[4] Considere o conjunto $\mathcal{E}$ de todas as *strings* sobre o conjunto de seis símbolos $S = \{0, 1, \sim, |, (,)\}$ definido recursivamente por:

1. 0 e 1 pertencem a $\mathcal{E}$;
2. Se x e y são *strings* de $\mathcal{E}$ então $(\sim x)$ e $(x|y)$ são também *strings* de $\mathcal{E}$.

(a) Para cada um dos números n seguintes, diga se existe alguma *string* de $\mathcal{E}$ de comprimento n e, em caso afirmativo, apresente uma. (i) 3 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 6 (v) 7 (vi) 8 (vii) 9

(b) Considere agora o subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ definido recursivamente por:

1. 0 e 1 pertencem a $\mathcal{D}$;
2. Se x e y são *strings* de $\mathcal{D}$ então $(x|y)$ é também uma *string* de $\mathcal{D}$.

Chamamos bits aos símbolos 0 e 1. Use indução estrutural para provar que toda a *string* de $\mathcal{D}$ com n bits tem comprimento $n + 3(n - 1)$.

a)

i) 3 : não é possível

ii) 4: (~ 1)

iii) 5: $(1|0)$

iV) 6 - não é Possível

V) 7: $(\sim(\sim 1))$

Vi) 8: $(1|(\sim 0))$

Vii) 9: $((1|0)|0)$

b) $n+3(n-1)$

$(1|0)$

$(0|1)$

0

bit

$\mathcal{D}$

$(0,1)$

2. Seja $\mathcal{N}$ o conjunto de todas as árvores binárias não vazias sobre o conjunto $A = \{0, 1\}$ tais que cada pai tem 2 filhos e vértices com o mesmo pai têm etiquetas diferentes. Indique qual das seguintes é uma definição recursiva correta de $\mathcal{N}$, sabendo que se usa a notação $r(T)$ para designar a etiqueta da raiz de uma árvore T.

(l) Regra base: $(\,) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) \neq r(V)$ e $x \in A$ então $(U, x, V) \in \mathcal{N}$.
(m) Regra base: $(\,) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) = r(V) = 0$ então $(U, 1, V) \in \mathcal{N}$.
(n) Regra base: $(\,) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) = r(V) = 1$ então $(U, 0, V) \in \mathcal{N}$.
(o) Regra base: $(\,) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$ e $x \in A$ então $(U, x, V) \in \mathcal{N}$.
(p) Regra base: $(0), (1) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $\boxed{r(U) \neq r(V)}$ e $x \in A$ então $(U, x, V) \in \mathcal{N}$.
(q) Regra base: $(0), (1) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) = r(V) = 0$ então $(U, 1, V) \in \mathcal{N}$.
(r) Regra base: $(0), (1) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) = r(V) = 1$ então $(U, 0, V) \in \mathcal{N}$.
(s) Regra base: $(0), (1) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$ e $x \in A$ então $(U, x, V) \in \mathcal{N}$.

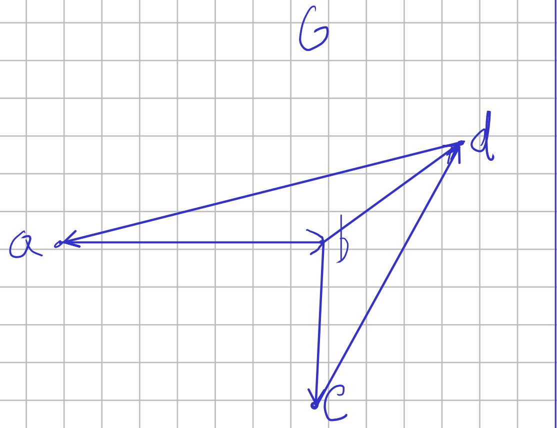
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
															X										

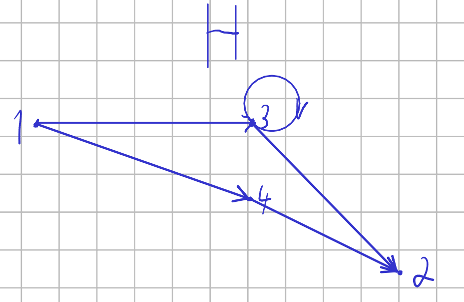
3. Relativamente aos seguintes grafos dirigidos, indique a afirmação correta:

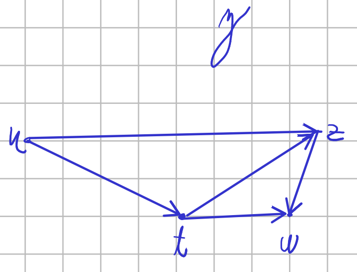
$G = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, d), (d, a)\})$
$H = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 3), (1, 4), (4, 2), (3, 2), (3, 3)\})$
$J = (\{x, z, w, t\}, \{(x, z), (x, t), (z, w), (t, z), (t, w)\})$

(g) Os grafos G e H são isomorfos e unilateralmente conexos, J é fortemente conexo.
(h) Os grafos G e H são isomorfos e não são unilateralmente conexos, J é fortemente conexo.
(i) G é unilateralmente conexo, mas H não; J é fortemente conexo.
(j) J é unilateralmente conexo, mas H não; G é fortemente conexo.
(k) Os grafos H e J são isomorfos e são unilateralmente conexos, G é fortemente conexo.
(l) Os grafos H e J são isomorfos e não são unilateralmente conexos, G é fortemente conexo.
(m) Os grafos G e J são isomorfos e não são unilateralmente conexos, H é fortemente conexo.
(n) G é unilateralmente conexo, mas J não; H é fortemente conexo.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
									X																







2. [2.2] Use indução matemática para mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, 3 divide $n^3 + 2n$.

1 $\quad 1^3 + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3$

3 divide 3 ✓ $\qquad$ H.I.: 3 divide $n^3 + 2n$

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n+1)\left[(n+1)^2 + 2\right] = (n+1)(n^2 + 2n + 1 + 2) =$$
$$= (n+1)(n^2+2n+3) = n^3 + 3n^2 + 2n + 3n + 3 = \underbrace{3n^2 + 3n + 3}_{\text{divisível por 3}} + n^3 + 2n$$

Por H.I é divisível por 3.

R: Logo $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

3. [3.6] A seguir apresentam-se as matrizes de adjacências A_G e A_H de dois digrafos, G e H, respetivamente, relativamente aos seus vértices, a, b, c, d, e, f, considerados por ordem alfabética.

$$A_G = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_H = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & 0 & 1 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & 0 & 1 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & 0 & 1 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \end{array}$$

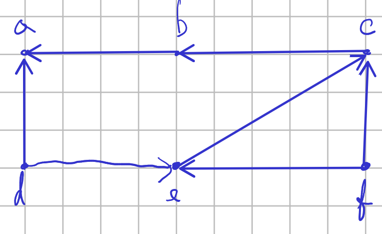
(a) Desenhe o digrafo G, colocando os vértices em duas linhas paralelas, a, b, c em cima e d, e, f em baixo.

(b) Mostre que G não é unilateralmente conexo.

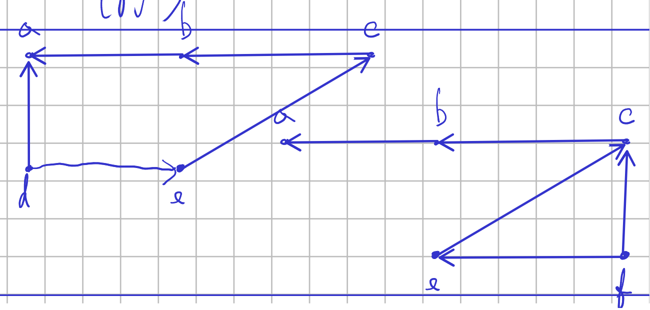
(c) Indique as componentes unilaterais do digrafo G.

(d) Sabendo que no digrafo H existem exatamente dois caminhos de comprimento 2 de a para c, indique os valores de a_{43} e a_{63}, justificando. São ambos 1.

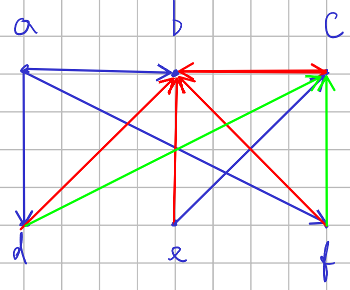
a)



b) (f, d)

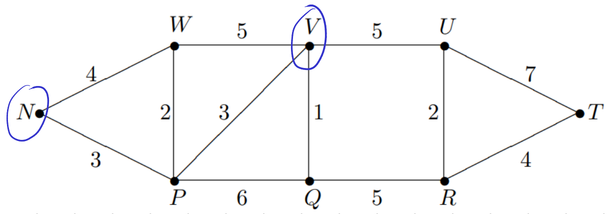


d) existem apenas 2 caminhos



$(f,c) \cap (d,c)$

4. [2] O grafo da figura representa as linhas e estações de metro de uma determinada cidade, os pesos das arestas indicam o tempo gasto (em minutos) para viajar de estação para estação. Use o algoritmo de Dijkstra para determinar um trajeto mais rápido da estação N para a estação Q bem como o tempo gasto nesse trajeto (ignorando os tempos de espera nas estações). [Deve dispor os passos do algoritmo numa tabela com três colunas. As 1ª e 2ª colunas dão conta, respetivamente, dos vértices e das arestas que vão sendo adicionados sucessivamente. A 3ª dá conta dos valores sucessivos da função $L(x)$ que em cada passo mede o comprimento de um caminho mais curto do vértice inicial a x, de entre os caminhos já testados.]



S	R	$L(u), u \notin S$
		$L(N)=0,\ L(u)=+\infty,\ u \neq N$
N		$L(W)=4$ $L(P)=3$
P	$\{N,P\}$	$L(W)=\text{Mínimo}\{4, P(P,W)+3\}=4$ | $L(V)=6$ $L(Q)=9$
W	$\{N,W\}$	$L(V)=\text{Mínimo}\{6, P(W,V)+4\}=6$
V	$\{P,V\}$	$L(Q)=\text{Mínimo}\{9, P(V,Q)+6\}=7$ $L(U)=11$.
Q	$\{V,Q\}$	$L(Q)=d(N,Q)=7$

2. Seja $B = \{0, 1, n, t\}$. Define-se recursivamente o conjunto $\mathcal{L}$ de listas sobre B do seguinte modo, onde $cab(L)$ significa "cabeça de L":

   1. $[0]$ e $[1]$ pertencem a $\mathcal{L}$;
   2. Se $cab(L) \in \{0, 1\}$ então $[n, L]$ e $[t, L]$ pertencem a $\mathcal{L}$.
      Se $cab(L) = t$ então $[0, L]$ e $[1, L]$ pertencem a $\mathcal{L}$.
      Se $cab(L) = n$ então $[t, L]$ pertence a $\mathcal{L}$.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
				X				

Indique em que caso ambas as listas pertencem a $\mathcal{L}$:

~~(A) $[t,n,1]$ e $[t,0,t,n]$~~ ~~(B) $[n,n,0]$ e $[1,0,1,0]$~~ ~~(C) $[t,n,t]$ e $[n,0,t,1]$~~ ~~(D) $[n,n]$ e $[t,t]$~~
(E) $[t,n,1]$ e $[n,0,t,1]$ ~~(F) $[n,0]$ e $[n,t,n,t]$~~ ~~(G) $[n,1]$ e $[t,n,t,n]$~~ ~~(H) $[1,0]$ e $[0,1]$~~

3. $\mathcal{S}$ é um subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cujos elementos (m,n) com $m \leq 7$ são apenas os pares ordenados $(1,2)$, $(2,3)$ e $(4,5)$. $\mathcal{S}$ pode ser definido recursivamente por uma das formas seguintes. Indique-a:

~~(A) *Regra base:* $(1,2) \in \mathcal{S}$. *Regra recursiva:* Se $(x,y) \in \mathcal{S}$ então $(x+4, y+4) \in \mathcal{S}$.~~
~~(B) *Regra base:* $(1,2) \in \mathcal{S}$. *Regra recursiva:* Se $(x,y) \in \mathcal{S}$ então $(x+1, y+1) \in \mathcal{S}$.~~
~~(C) *Regra base:* $1 \in \mathcal{S}$. *Regra recursiva:* Se $(x,y) \in \mathcal{S}$ e $1 \in \mathcal{S}$ então $(2x, x+2) \in \mathcal{S}$.~~
(D) *Regra base:* $(1,2) \in \mathcal{S}$. *Regra recursiva:* Se $(x,y) \in \mathcal{S}$ então $(2x, x+y) \in \mathcal{S}$.
~~(E) *Regra base:* $(1,2) \in \mathcal{S}$. *Regra recursiva:* Se $(x,y) \in \mathcal{S}$ então $(x+y, 2y) \in \mathcal{S}$.~~
~~(F) *Regra base:* $1 \in \mathcal{S}$. *Regra recursiva:* Se $x \in \mathcal{S}$ então $(x, x+1) \in \mathcal{S}$.~~
~~(G) *Regra base:* $(x,y) \in \mathcal{S}$. *Regra recursiva:* Se $(x,y) \in \mathcal{S}$ então $(x+y, 2y) \in \mathcal{S}$.~~
~~(H) *Regra base:* $(1,2) \in \mathcal{S}$. *Regra recursiva:* Se $(x,y) \in \mathcal{S}$ então $(x+2, y+2) \in \mathcal{S}$ e $(x+4, y+4) \in \mathcal{S}$.~~

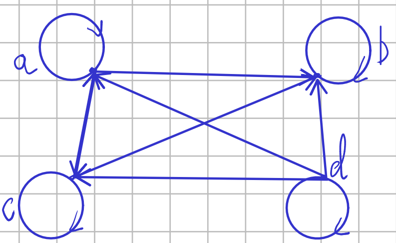
A	B	C	D	E	F	G	H
			X				

4. Seja G um digrafo cuja matriz dos caminhos é $\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$. Indique aqui

A	B	C	D	E	F	G	H
				X			

qual das propriedades, fortemente conexo (abreviadamente Fc), unilateralmente conexo (abreviadamente uc), fracamente conexo (abreviadamente fc), tem o digrafo G:

~~(A) Fc, uc, fc;~~ ~~(B) Fc, não uc, não fc;~~ ~~(C) Fc, não uc, fc;~~ ~~(D) Fc, uc, não fc;~~
(E) não Fc, uc, fc; ~~(F) não Fc, não uc, não fc;~~ ~~(G) não Fc, não uc, fc;~~ ~~(H) não Fc, uc, não fc;~~



2. [2.5] Seja f uma função de variável natural definida recursivamente por: $f(0) = \frac{1}{3}$; $f(n+1) = \frac{(-1)(n+1)}{3} f(n)$, $n \geq 0$.

(a) Calcule $f(2)$.

(b) Use indução matemática para provar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}}$.

$f(1) = \frac{(-1)(0+1)}{3} f(0)$

$f(1) = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{-1}{9}$

$f(2) = \frac{(-1)(2)}{3} \times \left(\frac{-1}{9}\right)$

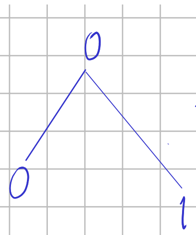
$f(2) = \frac{-2}{3} \times \left(\frac{-1}{9}\right) = \frac{2}{27} =$

3. [2.5] Considere o conjunto $\mathcal{B}$ das árvores binárias não vazias sobre o conjunto $\{0,1\}$ tais que:

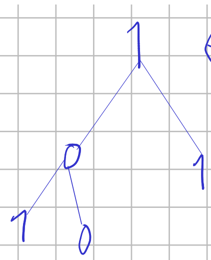
- Cada vértice que não é folha (ou seja, que é pai) tem exatamente dois filhos e tais que: se o filho da esquerda for etiquetado por 1 e o da direita por 0, o vértice é etiquetado por 0; nos outros casos, é etiquetado por 1.

(a) Relativamente a cada uma das árvores seguintes, desenhe-a e diga se pertence ou não a $\mathcal{B}$:
$((0),0,(1))$ $(((1),0,(0)),1,(1))$ $(((0),1,(1)),1,((0),1,(0)))$ $((1),1,((1),0,(0)))$

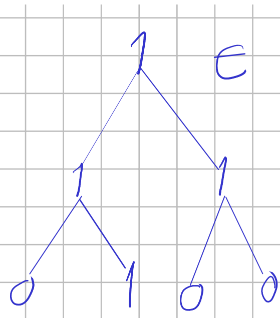
(b) Apresente uma definição recursiva de $\mathcal{B}$.



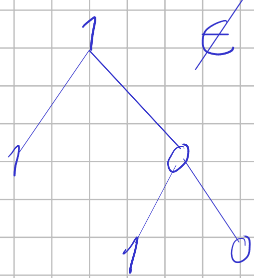
$\notin$



$\in$



$\in$



$\notin$

b) $1 - (0), (1) \in B$

$2 -$ Se $u, y \in B$ então:

- Se $u = 0$ e $y = 1$ então $(y, 0, u)$
- Se $u \neq 0$ e $y \neq 1$ então $(y, 1, u)$

4. [5.5] A Diana vai fazer uma viagem pela Europa com um grupo de amigos.

   (a) Para uma certa cidade desenhou um grafo dirigido simples G cujos vértices, V_1, V_2, ..., V_9, são os nove lugares a visitar, e cada aresta dirigida representa um certo percurso a fazer de bicicleta do vértice inicial para o vértice final. Determinada a matriz de adjacências A (considerados os vértices pela ordem natural dos seus índices), a Diana verificou que, relativamente à matriz A^2, a terceira linha é $[\,0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\,]$ e que a quinta coluna é $[\,2\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\,]^t$. Indique, justificando:

   (a1) o número de caminhos do digrafo de comprimento 2 de V_3 para V_5;

   (a2) o número de caminhos de comprimento 4 de V_3 para V_5.

a)

(a1)

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 & V_8 & V_9 \\ \hline V_3 & [0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0] \end{array}$$

R: 0

(a2)

$$[0\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0+2+0+1+0+1+0+0+0 = 2+2 = 4$$

(b) O grafo G não é fortemente conexo. A Diana apercebeu-se de que ele tem exatamente duas componentes fortes, a primeira com todos os vértices V_i para $i = 1, ..., 7$, a outra contendo apenas os vértices V_8 e V_9.

   (b1) Indique dois vértices (distintos) que pertencem a um mesmo ciclo do digrafo, justificando.

   (b2) Indique dois vértices que não podem pertencer a um mesmo ciclo no digrafo, justificando.

b1) v1 e v3, pois dá para ir de v1 a v3 e um subgrafo fortemente conexo

b2) v1 e v8, pois v1 pertence a um subgrafo diferente de v8 sendo estes 2 subgrafos fortemente conexos.

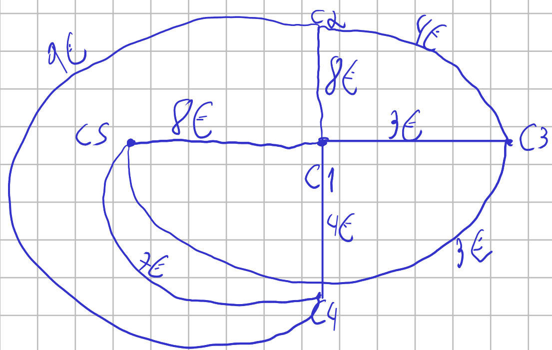
(c) O plano de viagem inclui 5 cidades a visitar, C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5. O grupo de amigos pretende visitá-las usando ligações por comboio. A Diana desenhou um grafo H não dirigido cujos pesos das arestas indicam o preço das respetivas viagens, assim:

entre C_1 e C_2: 8 €; entre C_1 e C_3: 3 €; entre C_1 e C_4: 4 €; entre C_1 e C_5: 8 €;
entre C_2 e C_3: 4 €; entre C_2 e C_4: 9 €; entre C_3 e C_5: 3 €; entre C_4 e C_5: 7 €.

(c1) Desenhe o grafo H colocando o vértice C_1 no centro e os restantes, C_2, C_3, C_4 e C_5 à volta dele.

(c2) É possível visitar todas as cidades sem repetir percursos, ou seja, H tem algum ciclo de Euler? Justifique.

(c3) Determine um caminho mais barato de C_1 para C_5, usando o algoritmo de Dijkstra, apresentando os passos do algoritmo numa tabela. Apresente a árvore correspondente ao algoritmo e indique quanto vai custar o trajeto. (Deve dispor os passos do algoritmo numa tabela com três colunas. As 1ª e 2ª colunas dão conta, respetivamente, dos vértices e das arestas que vão sendo adicionados sucessivamente. A 3ª dá conta dos valores sucessivos da função $L(x)$ que em cada passo mede o comprimento de um caminho mais curto do vértice inicial a x, de entre os caminhos já testados.)



c2) Não, pois para ter ciclo de Euler todos os vértices têm de ter 2 ligações porém, por exemplo, a cidade 2 tem grau 3, logo não tem ciclo de Euler. Não é possível visitar todas as cidades.

c3) C1 → C5

	S	R	L(u), u ∉ S
			L(C1) = 0, L(u) = +∞, u ≠ C1
	C1		L(C2) = 8 L(C3) = 3 L(C4) = 4 L(C5) = 8
3	C3	{C1,C3}	L(C2) = Mínimo {8, P(C3,C2) + 3} = 7 L(C5) = Mínimo {8, P(C3,C5) + 3} = 6
4	C4	{C1,C4}	L(C5) = Mínimo {6, P(C4,C5) + 4} = 6 L(C2) = Mínimo {7, P(C4,C5) + 4} = 7
	C5	{C3,C5}	L(C5) = L(C1,C5) = 6

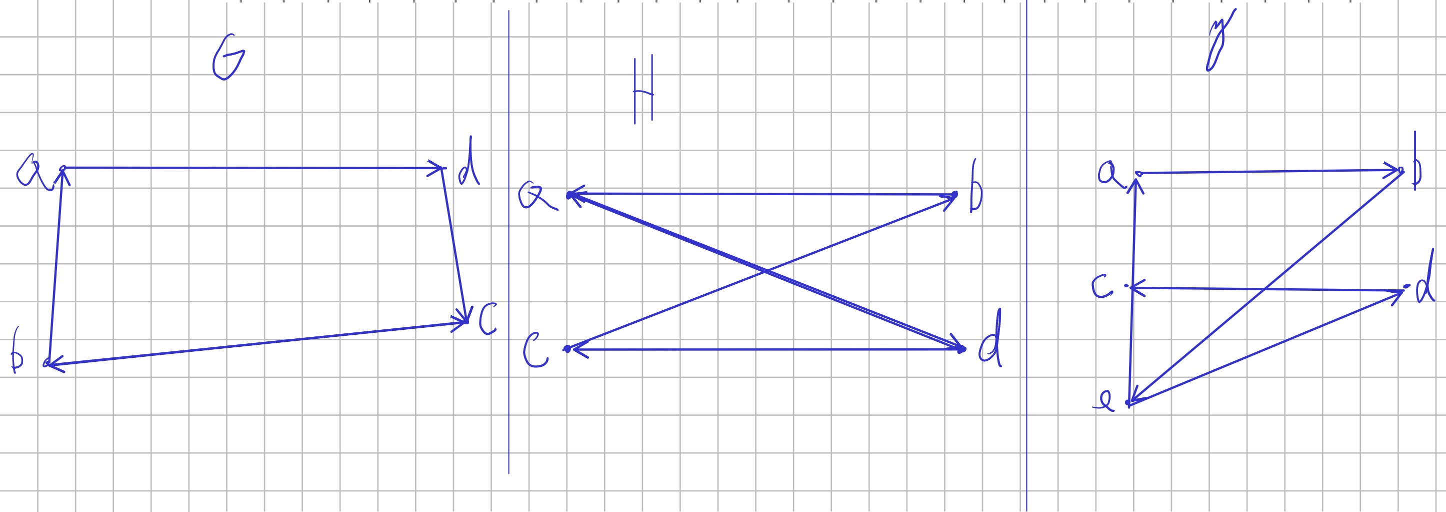
O trajeto mais barato é de C1, C3, C5 que custa 6 €

3. [1] Relativamente aos seguintes grafos dirigidos, indique a afirmação correta:

$G = (\{a, b, c, d\}, \{(a, d), (b, a), (b, c), (c, b), (d, c)\})$
$H = (\{a, b, c, d\}, \{(a, d), (b, a), (c, b), (d, a), (d, c)\})$
$J = (\{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (b, e), (d, c), (e, a), (e, d)\})$

(g) G e H são isomorfos mas não são unilateralmente conexos; J é fortemente conexo.
(h) G e H são isomorfos e unilateralmente conexos; J é fortemente conexo.
(i) G e H são isomorfos e são fortemente conexos; J é unilateralmente conexo.
(j) G e H são isomorfos e são fortemente conexos; J não é unilateralmente conexo.
(k) G e H não são isomorfos mas são ambos unilateralmente conexos; J é fortemente conexo.
(l) G e H não são isomorfos mas são ambos fortemente conexos; J é unilateralmente conexo.
(m) G é fortemente conexo, H e J não são isomorfos; mas são ambos unilateralmente conexos.
(n) G é unilateralmente conexo; H e J não são isomorfos, mas são ambos fortemente conexos.
(o) Nenhuma das anteriores.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
								X																	



4. [1.6] Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as *strings* definidas recursivamente no conjunto $A = \{1, 2, s, t, u, v\}$ da seguinte forma, onde o símbolo $\cdot$ denota a concatenação de *strings*. (Cada resposta certa vale 0.2, cada errada vale -0.15 até um mínimo de 0.)

(1) 1 e 2 são *strings* de $\mathcal{S}$.

(2) Se A e B são *strings* de $\mathcal{S}$ então $s \cdot A$ e $u \cdot A \cdot t \cdot B \cdot v$ também são *strings* de $\mathcal{S}$.

Para cada uma das seguintes *strings*, indique a afirmação verdadeira sobre pertencer ou não a $\mathcal{S}$:

(A) $s1$ (B) $u1t2v$ (C) $u1s2v$ (D) $s1u2t$
(E) $s1tu2$ (F) $uu1t2vts1v$ (G) $ss2v1tvs1v2tt$ (H) $uu2t1vtu1t2vv$

	A	B	C	D	E	F	G	H
Pertence.	X	X				X		X
Não pertence.			X	X	X		X	

3. [2.6] Use indução matemática para mostrar que para todo o número natural $n \geq 0$ se tem $\sum_{k=1}^{n}(2+5k) = \dfrac{5n(n+1)+4n}{2}$.

B.I. $\sum_{k=1}^{n}(2+5k) = 0$

$\dfrac{(5\times0)\times(0+1)+4\times0}{2} = \dfrac{0\times1+0}{2} = \dfrac{0+0}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$ ✓

Supomos que $\sum_{k=1}^{n}(2+5k) = \frac{5n(n+1)+4n}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2+5k) = \sum_{k=1}^{n}(2+5k) + (2+5(n+1))$$

Por H.I.

$$\frac{5n(n+1)+4n}{2} + 2+5(n+1) =$$

$$= \frac{5n(n+1)+4n+4+10(n+1)}{2} = \frac{(5n+10)(n+1)+4(n+1)}{2} =$$

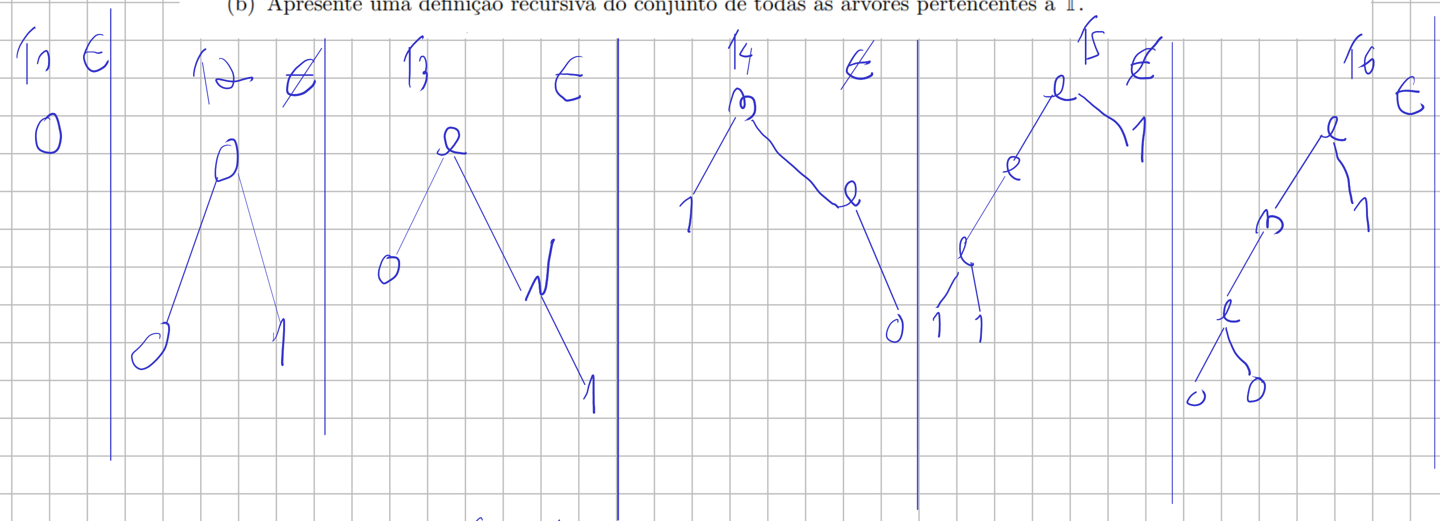
$$= \frac{5(n+1)(n+2)+4(n+1)}{2}$$

Logo $\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=1}^{n}(2+5k) = \frac{5n(n+1)+4n}{2}$

4. [2.4] Seja $\mathbb{T}$ o conjunto de todas as árvores binárias não vazias sobre o conjunto $\{e, n, 0, 1\}$ tais que cada folha (isto é, cada vértice que não tem filhos) é etiquetado por 0 ou 1, cada vértice com exatamente um filho é etiquetado por n, e cada vértice com dois filhos é etiquetado por e.

   (a) Relativamente às árvores: $T_1 = (0)$, $T_2 = ((0), 0, (1))$, $T_3 = ((0), e, ((), n, (1)))$, $T_4 = ((1), n, ((), e, (0)))$, $T_5 = ((((1), e, (1)), e, ()), e, (1))$ e $T_6 = ((((0), e, (0)), n, ()), e, (1))$, desenhe-as e, para cada uma delas, indique se pertence ou não a $\mathbb{T}$.

   (b) Apresente uma definição recursiva do conjunto de todas as árvores pertencentes a $\mathbb{T}$.



Sendo $(0),(1) \in T$

Se $A, B \in T$ então:

- $(A, e, B) \in T$
- $(A, n, ()) \in T$
- $((), n, A) \in T$

[2.7] Seja $G = (V, E)$ um digrafo com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_5, v_4), (v_6, v_3), (v_6, v_5)\}\}$.

(a) Desenhe o grafo colocando os vértices em duas linhas horizontais, os três primeiros em cima, os restantes em baixo.

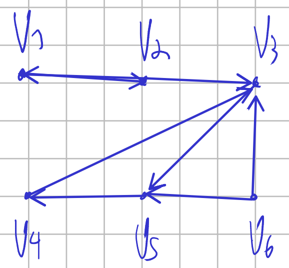
(b) Seja A a matriz de adjacências de G, considerando os vértices ordenados pela ordem natural dos seus índices. Indique, justificando, e sem calcular as potências de A envolvidas:

(i) a entrada (6,4) da matriz A^2;

(ii) a entrada (2,6) da matriz $A^0 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$.

(c) Indique as componentes fortes, as componentes unilaterais e as componentes fracas do grafo.

a)

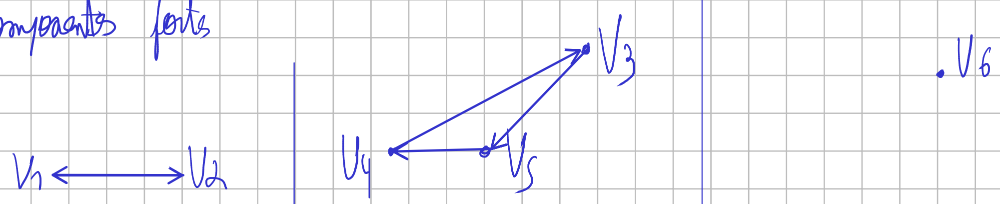


b)

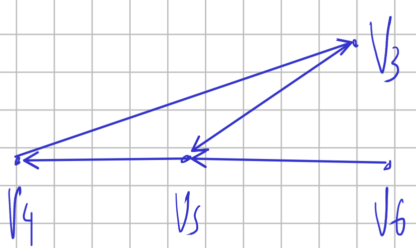
i) 1: há 1 caminho possível

ii) 0: não há caminhos possíveis

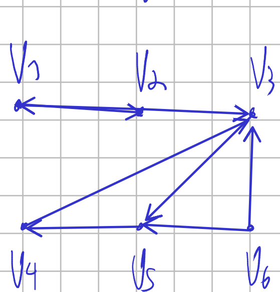
c) componentes fortes



componentes unilaterais



Componentes fracas:



6. [2.5] O centro turístico de uma certa cidade tem cinco pontos de interesse, A, B, C, D, E, e os seguintes percursos entre eles:

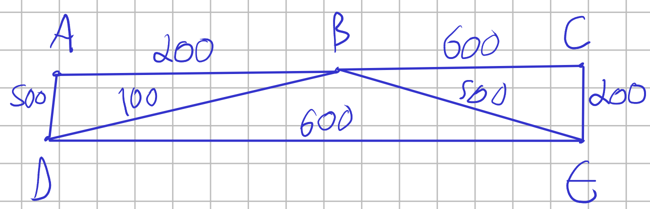
- entre A e B, com distância de 200m
- entre A e D, com distância de 500m
- entre B e C, com distância de 600m
- entre B e D, com distância de 100m
- entre B e E, com distância de 500m
- entre C e E, com distância de 200m
- entre D e E, com distância de 600m

(a) Desenhe um grafo não dirigido com pesos cujos vértices sejam os cinco pontos de interesse e cujas arestas sejam os percursos com as respetivas distâncias. Coloque os vértices em duas linhas horizontais, os três primeiros em cima, os restantes em baixo, e desenhe as arestas de forma a não se intersetarem entre si.

(b) Diga, justificando, se o grafo tem ciclos de Euler. Em caso afirmativo, indique um.

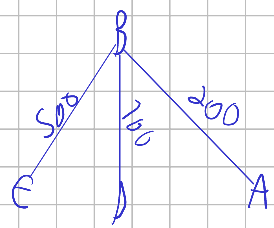
(c) Use agora o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho mais curto e a distância de A para E. Disponha os passos do algoritmo num quadro com três colunas, as duas mais à esquerda contendo os vértices e as arestas obtidos pelo algoritmo, e a da direita com o registo dos sucessivos valores da função L.
Apresente a correspondente árvore.

a)



b) Não pois o D tem grau 3, e 3 não é par.

S	R	$L(u), u \notin S$
		$L(A)=0,\ L(u)=+\infty,\ u\neq A$
A		$L(B)=200$ $L(D)=500$
200 B	$\{A,B\}$	$L(D)=\text{mínimo}(500,\ p(B,D)+200)=300$ $L(C)=200+p(B,C)=800$ | $L(E)=200+p(B,E)=700$
300 D	$\{B,D\}$	$L(E)=\text{mínimo}\{700,\ 300+p(D,E)\}=700$
E	$\{B,E\}$	$L(E)=d(A,E)=700$



A − B − E

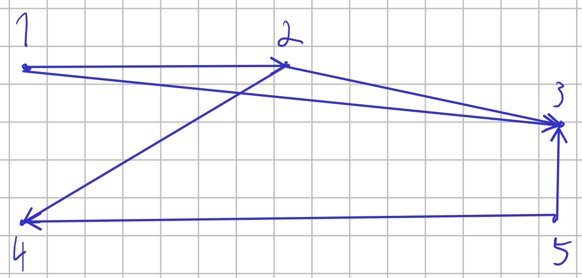
6. [0.8] Relativamente aos seguintes grafos dirigidos, indique a afirmação correta:

$G = (\{1,2,3,4,5\}, \{(1,2), (1,3), (2,4), (2,3), (5,3), (5,4)\})$
$H = (\{a,b,c,d,e\}, \{(b,a), (b,c), (d,a), (d,c), (e,a), (e,d)\})$
$J = (\{v,w,x,y,z\}, \{(v,x), (w,z), (x,w), (x,y), (y,z), (z,v)\})$

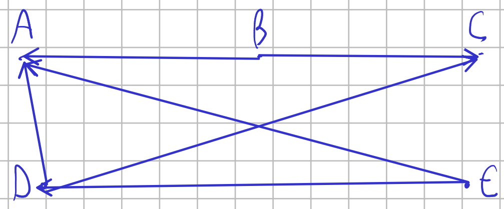
~~(j) Nenhum dos grafos é isomorfo a um dos outros e os três grafos são unilateralmente conexos.~~
~~(k) G e H são isomorfos e unilateralmente conexos sem serem fortemente conexos; J é fortemente conexo.~~
~~(l) G e J são isomorfos e os três grafos são unilateralmente conexos.~~
~~(m) Nenhum dos grafos é isomorfo a um dos outros; J e G são unilateralmente conexos sem serem fortemente conexos, e H não é unilateralmente conexo.~~
~~(n) Nenhum dos grafos é isomorfo a um dos outros; J é fortemente conexo, G é unilateralmente conexo e H não é unilateralmente conexo.~~
(o) G e H são isomorfos e não são unilateralmente conexos, J é fortemente conexo.
~~(p) G e H são isomorfos e os três grafos são fortemente conexos.~~
~~(q) Os três grafos são isomorfos e não são unilateralmente conexos.~~

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
														×											

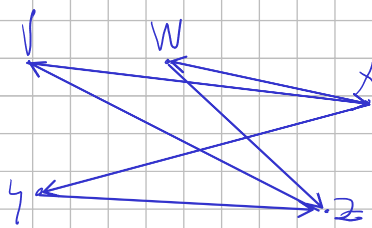
G



H



y



4. [2] Use indução matemática para provar que, pata todo o $n \geq 0$, o número $4^n - 1$ é múltiplo de 3.
   Sugestão: Repare que $\underbrace{4 \times 4^n - 1}$ $= 4 \times 4^n - 4 + 4 - 1$ e que pode pôr 4 em evidência de forma conveniente.

$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, 0 é múltiplo de 3 ✓

Supomos então, que por H.I. $4^n - 1$

$4^{n+1} - 1 = 4^n \times 4 - 1 = 4^n \times 4 - 4 + 4 - 1$

$4^n \times 4 - 4 + 3 = 4(4^n - 1) + 3$

Produto entre 4 e múltiplo de 3 ($4^n - 1$, por H.I.) é um múltiplo de 3.

4. [0.7] Considere o conjunto $\mathcal{W}$ de todas as árvores binárias sobre o conjunto $A = \{0, 1\}$ definido recursivamente por:

   1. $(0), (1) \in \mathcal{W}$.
   2. Se $U, V \in \mathcal{W}$ e U e V têm a mesma altura então $(U, 0, V)$ e $(U, 1, V)$ pertencem a $\mathcal{W}$.

   Em apenas um dos seguintes casos as duas árvores pertencem ambas a $\mathcal{W}$.

   Qual?

~~b) ( ) e ((1), 0, (1))~~
~~d) ((0), 0, (0)) e (((0), 1, (1)), 1, ((0), 1, (1)))~~
f) ((0), 0, ((1), 0, (1))) e (((0), 1, (1)), 0, ((1), 0, (0)))
~~h) (( ), 1, (0)) e (((0), 1, (1)), 1, ((0), 1, (1)))~~
~~c) ((1), 0, (1)) e ((0), 0, ((1), 0, (1)))~~
~~e) (((1), 0, (1)), 1, ((1), 0, (1))) e (( ), 1, (0))~~
~~g) (( ), 1, (0)) e (((1), 0, (1)), 0, ((0), 1, (0)))~~
~~i) ((0), 0, ((1), 0, (1))) e (((0), 1, (1)), 0, ((1), 0, (0)))~~

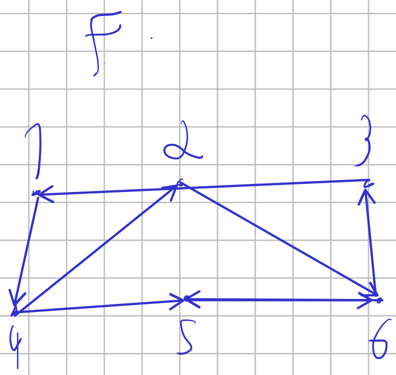
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
					x																				

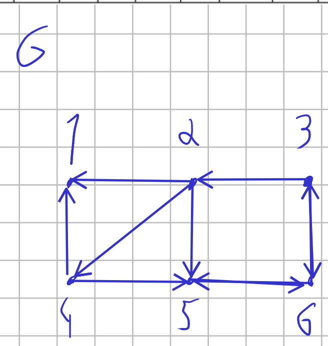
5. [0.7] Relativamente aos seguintes grafos dirigidos, indique a afirmação correta:

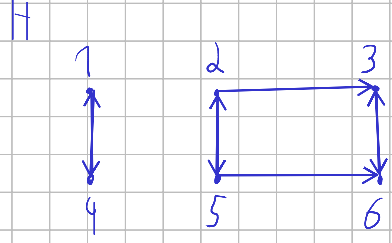
$F = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{(1,4),(2,6),(3,1),(4,2),(4,5),(5,6),(6,3),(6,5)\})$
$G = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{(2,1),(2,4),(2,5),(3,2),(3,6),(4,1),(4,5),(5,6)\})$
$H = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{(1,4),(2,3),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(5,6),(6,3)\})$

~~(j) G e H são isomorfos e são unilateralmente conexos, F é fortemente conexo.~~
~~(k) F e H são isomorfos e são unilateralmente conexos, G não é unilateralmente conexo.~~
~~(l) F e G são isomorfos e são unilateralmente conexos, H é fracamente conexo.~~
~~(m) F e G não são isomorfos mas são unilateralmente conexos, H é fracamente conexo.~~
(n) F é fortemente conexo, G é fracamente conexo, H não é fracamente conexo.
~~(o) F é fortemente conexo, G é unilateralmente conexo, H não é fracamente conexo.~~
~~(p) Nenhum dos grafos é isomorfo a um dos outros, mas todos são unilateralmente conexos.~~
(q) Nenhuma das situações anteriores.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
													?	?											







6. [2] Denotemos por $\mathcal{S}_n$ o conjunto de todas as *strings* de comprimento n sobre o conjunto $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
E seja $zip : \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \to \mathcal{S}_6$ a função definida por

$$zip(a_1a_2a_3, b_1b_2b_3) = a_1b_1a_2b_2a_3b_3.$$

(a) Caso seja possível, apresente um par $(p,q) \in \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$ tal que $zip(p,q) = 355711$. $zip(351, 571)$
(b) Quando diz que uma função qualquer $f : A \to B$ é injetiva? E sobrejetiva? E bijetiva?
(c) A função zip será bijetiva? Se sim,
(i) defina a sua inversa $zip^{-1} : S_6 \to \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$;
(ii) apresente a string $zip^{-1}(023584)$.
(d) Defina recursivamente o conjunto $\mathcal{S}$ de todas as *strings* sobre o conjunto A, incluindo a vazia, da forma $x_1x_1x_2x_2\ldots x_nx_n$, com $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ (como, por exemplo, 2211, 3333, 440055, 332222).

1. $\varepsilon \in S$
2. Se $z \in S$ e $u \in A$ então $zxuu \in S$? PQ uu

7. [1.8]

(a) Calcule $\displaystyle\sum_{k=2}^{1}(k+k^2) + \sum_{k=1}^{2}k^3$.

(b) Use indução matemática para provar que, para todo o $n \geq 1$, se verifica a igualdade
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

b)

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1^2 \times 4}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$1^3 = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ Por H.I.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3}$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

verifica-se para todo o $n \geq 1$

8. [3.3] Considere o digrafo $G = (V, E)$ com $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ e
$E = \{(a,b), (b,c), (b,e), (c,f), (d,a), (e,d), (e,f)\}$.

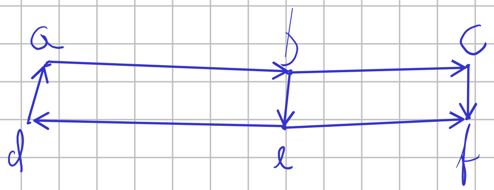
(a) Desenhe o grafo colocando os vértices em duas linhas paralelas, a, b, c em cima e d, e, f em baixo.

(b) Determine as componentes unilaterais e fortes do grafo.

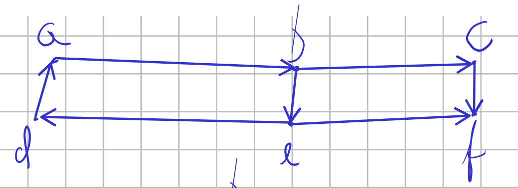
(c) Sendo A a matriz de adjacências de G, relativamente aos vértices ordenados por ordem alfabética, diga, justificando e sem calcular as matrizes qual o elemento na posição 2,6 de A^2, A^8 e A^9.

(d) Desenhe o grafo não dirigido com pesos obtido de G considerando todas as arestas de G como arestas não dirigidas, acrescentando ainda as arestas $\{d,b\}$ e $\{e,c\}$, e equipando as arestas com os seguintes pesos: $p(\{a,b\}) = 2$, $p(\{b,c\}) = 4$, $p(\{b,e\}) = 1$, $p(\{c,f\}) = 2$, $p(\{d,a\}) = 1$, $p(\{e,d\}) = 8$, $p(\{e,f\}) = 4$, $p(\{d,b\} = 4$, $p(\{e,c\} = 2$.
Use o algoritmo de Dijkstra para determinar a distância de d a c.

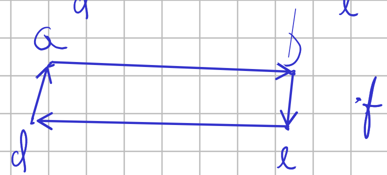
a)



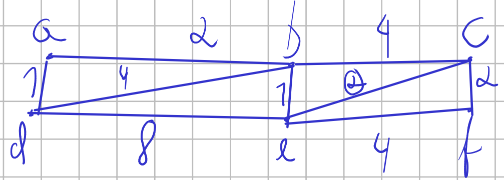
b) Componente Unilateral :



Componente forte :



d)



D − C

S	R	L(u), u ∉ S
		$L(d)=0$; $L(u)=+\infty$; $u \neq d$
d		$L(a)=1$ $L(b)=4$ $L(e)=8$
1 a	$\{d,a\}$	$L(b)=\text{mínimo}\{4, 1+2\}=3$
b	$\{a,b\}$	$L(c)=7$ $L(e)=\text{mínimo}\{8, 3+1\}=4$
e	$\{b,e\}$	$L(c)=\text{mínimo}\{7, 4+2\}=6$
c	$\{e,c\}$	$L(c)=6$

d, a, b, e, c → distância = 6.

2. Seja $\mathcal{N}$ o conjunto de todas as árvores binárias não vazias sobre o conjunto $A = \{0, 1\}$ tais que cada pai tem 2 filhos e vértices com o mesmo pai têm etiquetas diferentes. Indique qual das seguintes é uma definição recursiva correta de $\mathcal{N}$, sabendo que se usa a notação $r(T)$ para designar a etiqueta da raiz de uma árvore T.

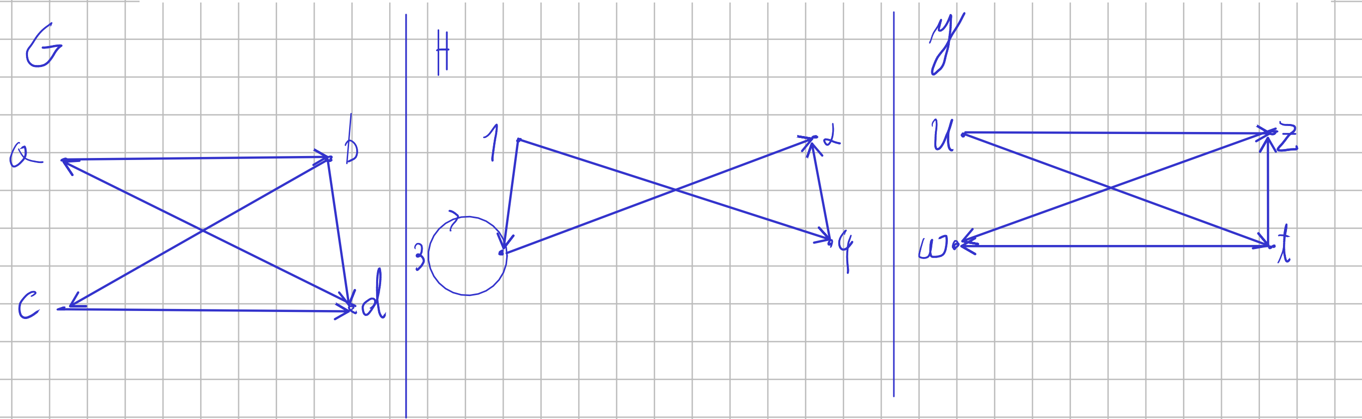
~~(l) Regra base: $()\in\mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) \neq r(V)$ e $x \in A$ então $(U, x, V) \in \mathcal{N}$.~~
~~(m) Regra base: $()\in\mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) = r(V) = 0$ então $(U, 1, V) \in \mathcal{N}$.~~
~~(n) Regra base: $()\in\mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) = r(V) = 1$ então $(U, 0, V) \in \mathcal{N}$.~~
~~(o) Regra base: $()\in\mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$ e $x \in A$ então $(U, x, V) \in \mathcal{N}$.~~
(p) Regra base: $(0), (1) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) \neq r(V)$ e $x \in A$ então $(U, x, V) \in \mathcal{N}$.
~~(q) Regra base: $(0), (1) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) = r(V) = 0$ então $(U, 1, V) \in \mathcal{N}$.~~
~~(r) Regra base: $(0), (1) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$, $r(U) = r(V) = 1$ então $(U, 0, V) \in \mathcal{N}$.~~
~~(s) Regra base: $(0), (1) \in \mathcal{N}$. Regra recursiva: Se $U, V \in \mathcal{N}$ e $x \in A$ então $(U, x, V) \in \mathcal{N}$.~~

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
															X										

$G = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, d), (d, a)\})$
$H = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 3), (1, 4), (4, 2), (3, 2), (3, 3)\})$
$J = (\{x, z, w, t\}, \{(x, z), (x, t), (z, w), (t, z), (t, w)\})$

~~(g) Os grafos G e H são isomorfos e unilateralmente conexos, J é fortemente conexo.~~
~~(h) Os grafos G e H são isomorfos e não são unilateralmente conexos, J é fortemente conexo.~~
~~(i) G é unilateralmente conexo, mas H não; J é fortemente conexo.~~
(j) J é unilateralmente conexo, mas H não; G é fortemente conexo.
~~(k) Os grafos H e J são isomorfos e são unilateralmente conexos, G é fortemente conexo.~~
~~(l) Os grafos H e J são isomorfos e não são unilateralmente conexos, G é fortemente conexo.~~
~~(m) Os grafos G e J são isomorfos e não são unilateralmente conexos, H é fortemente conexo.~~
~~(n) G é unilateralmente conexo, mas J não; H é fortemente conexo.~~

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
									X																



2. [2.2] Use indução matemática para mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, 3 divide $n^3 + 2n$.

B.I

$0^3 + 2\times 0 = 0 + 0 = 0$

3 divide 0 ✓

$(n+1)(n+1) = n^2+n+n+1$

n^2+2n+1

n^3+2n H.I

$(n+1)^3 + 2(n+1)$, queremos provar que é divisível por 3

$(n+1)\left((n+1)^2+2\right) = (n+1)\left((n^2+2n+1)+2\right) = (n+1)(n^2+2n+3)$

$(n^3+2n^2+3n+n^2+2n+3) = n^3+3n^2+3n+2n+3 = \underbrace{(n^3+2n)}_{\text{H.I.}} + \underbrace{3n^2+3n+3}_{\text{divisível por 3}}$

3. [3.6] A seguir apresentam-se as matrizes de adjacências A_G e A_H de dois digrafos, G e H, respetivamente, relativamente aos seus vértices, a, b, c, d, e, f, considerados por ordem alfabética.

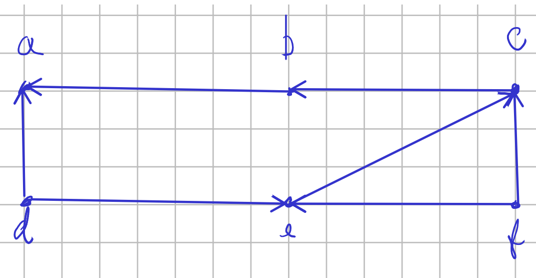
$$A_G = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & 0 & 1 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

(a) Desenhe o digrafo G, colocando os vértices em duas linhas paralelas, a, b, c em cima e d, e, f em baixo.

(b) Mostre que G não é unilateralmente conexo.

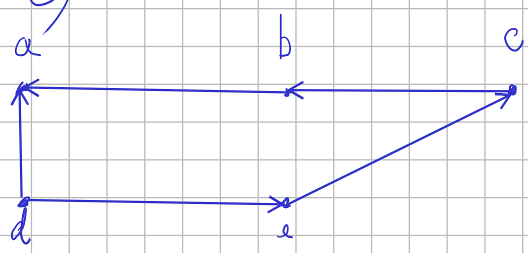
(c) Indique as componentes unilaterais do digrafo G.

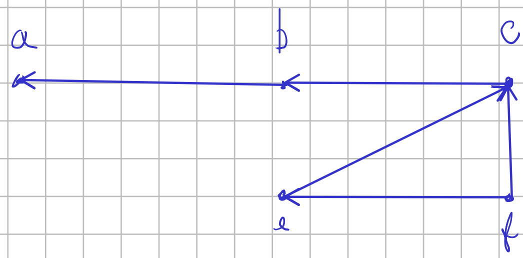
(d) Sabendo que no digrafo H existem exatamente dois caminhos de comprimento 2 de a para c, indique os valores de a_{43} e a_{63}, justificando.



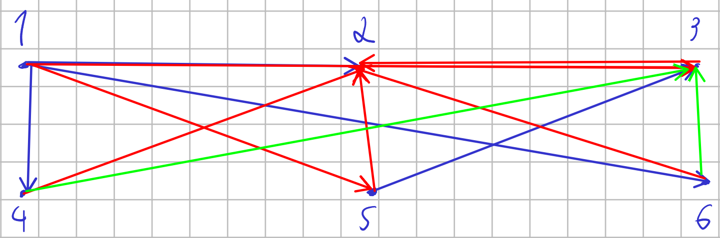
d e f não se conseguem conectar

c)



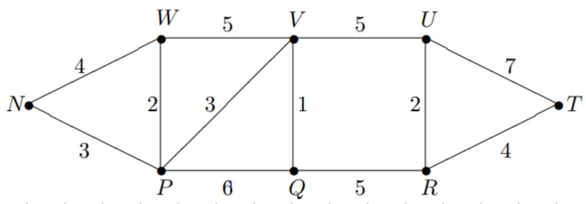


d)



$a_{43} = 1$
$a_{63} = 1$

4. [2] O grafo da figura representa as linhas e estações de metro de uma determinada cidade, os pesos das arestas indicam o tempo gasto (em minutos) para viajar de estação para estação. Use o algoritmo de Dijkstra para determinar um trajeto mais rápido da estação N para a estação Q bem como o tempo gasto nesse trajeto (ignorando os tempos de espera nas estações). [Deve dispor os passos do algoritmo numa tabela com três colunas. As 1ª e 2ª colunas dão conta, respetivamente, dos vértices e das arestas que vão sendo adicionados sucessivamente. A 3ª dá conta dos valores sucessivos da função $L(x)$ que em cada passo mede o comprimento de um caminho mais curto do vértice inicial a x, de entre os caminhos já testados.]



	S	R	$L(u), u \notin S$
			$L(N)=0$; $L(u)=+\infty$; $N \neq u$
	N		$L(W)=4$ $L(P)=3$
3	P	$\{N,P\}$	$L(W)=$ Mínimo $\{4, 3+P(Q)\}=4$ | $P(V)=6$ $P(Q)=9$ ←
4	W	$\{N,W\}$	$L(V)=$ Mínimo $\{6, 4+P(W,V)\}=6$
6	V	$\{P,V\}$	$P(Q)=$ Mínimo $\{9; P(V,Q)\}=7$ $P(U)=11$
	Q	$\{V,Q\}$	$L(Q)=d(N,Q)=7$

N, P, V, Q