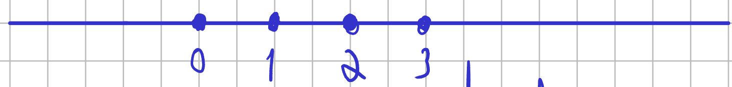
Matemática Discreta

1 $\boxed{20/02/2023}$

contínuo



discreto

1º teste → 25/3/2023
2º teste → 29/4/2023
3º teste → ?

Cálculo proposicional

Proposição — Valor lógico

Falso

Verdadeiro

O livro é do joão ou do Rui

O livro é do joão ou o livro é do Rui $P \vee Q$
(proposição composta)

O livro é do João (Proposição atómica) P

O livro é do Rui (Proposição atómica) Q

Negação	$\neg P$	Não P
Conjunção	$P \wedge Q$	P e Q
Disjunção	$P \vee Q$	P ou Q
Implicação (ou condicional)	$P \rightarrow Q$	Se P então Q

Se o João vai à festa e o Rui também então a Ana vai à festa

j := o João vai à festa

r := o Rui vai à festa

a := A Ana vai à festa

$$(j \wedge r) \rightarrow a$$

Tabela de Verdade

Negação

P	¬P
V	F
F	V

Conjunção

P	Q	P∧Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

P	Q	P∨Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Equivalência

P	Q	P ↔ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disjunção exclusiva

P	Q	P ⊻ Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação → interpretações

Se P então Q

P só se Q

P é condição suficiente para que Q

Q é condição necessária para que P

Uma condição suficiente para passar é ter 9,5

P : passar

Q = ter 9,5

$Q \to P$

Ter 9,5 é condição suficiente para passar.

$P \to Q$

P é o antecedente

Q é o consequente

Linguagem (conjunto de símbolos)

sintaxe (fórmulas bem-formadas)

semântica (significado)

Pateu

$\neg \wedge P \to \neg$

Não é bem formada

Uma proposição atómica ou átomo é um símbolo da forma P, Q, R, ..., a, b, c, ..., $P_1, P_2, P_3, \ldots$

$$((P \land Q) \rightarrow (\neg R))$$

forma-se pegando

subfórmulas da fórmula inicial

$$\frac{\dfrac{P \qquad Q \qquad R}{(\neg R) \qquad\qquad (P \land Q)}}{((P \land Q) \rightarrow (\neg R))}$$

Prioridade das operações

mais importante

$\neg$ → Não

$\land$ → e

$\lor$ → ou

$\rightarrow$ → Se... então, Só se

$\leftrightarrow$ → Se e Só se

menos importante

$$P \rightarrow (Q \land R)$$

fórmula bem formada → fbf

subfórmula bem formada → subfbf

Semântica:

Dada uma fbf, interpretando cada uma das suas variáveis proposicionais, V ou F, obtemos uma interpretação (significado) para a fbf

$p \to p \vee r$

p	r	p ∨ r	p → p ∨ r
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
V	V	F	V

Uma fbf é:

Tautologia, todos são verdadeiros

contradição todos falsos

contingência verdadeiro e falso

Exercício

$P \vee Q \to P$

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee Q \to P$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

contingência

Duas fbf dizem-se logicamente equivalentes se tiverem o mesmo significado

$\boxed{\equiv}$

Se numa fbf substituirmos uma subfbf por uma fbf equivalente obtemos uma fbf equivalente à fbf original

Exemplo

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (V \wedge (P \wedge Q)) \equiv \neg (P \wedge Q) \wedge (V \wedge (P \wedge Q))$$

$$\equiv \underbrace{\neg (P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q)}_{\text{contradição.}} \equiv F$$

$$P \to q \equiv \neg p \vee Q$$

$$P \leftrightarrow q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$Q \to P$ é $\boxed{\text{recíproca}}$ de $P \to Q$

$$P \to Q \not\equiv q \to P$$

$\neg q \to \neg p$ é a $\boxed{\text{contrapositiva}}$ de $P \to q$

$$\neg Q \to \neg P \equiv P \to Q$$

1P $\boxed{23 / 2 / 2023}$

(1) a) Não b) Sim c) Sim d) Sim e) Não

(2) a) V b) V c) F

(3) a) composta, b) composta, c) atomica, d) composta

(5)

a) P: A Maria está no ginásio
Q: A Marta está no ginásio

$P \to Q$

b) P: O carro do Rui é vermelho

Q: O carro do Rui é castanho

$P \vee Q$

c) P: Levantas-te às 7h.
Q: Chegas a tempo

$P \to Q$

d) P: chegas a tempo
Q: levantas-te às 7h

$P \leftrightarrow Q$

e) P: Ele vem
Q: tu avisá-lo

$Q \to P$

$\boxed{\underset{\text{suficiente}}{P} \longrightarrow \underset{\text{necessária}}{Q}}$

f) P: João tem 9.5
Q: O João Passa

$P \to Q$

g) P: Amanhã vou de autocarro
Q: Amanhã vou de taxi

$P \vee Q$

h) P: Vou de autocarro
Q: Vou de taxi
R: Autocarro Passa na Rona
S: Tenho Dinheiro

$(R \to P) \vee (Q \to S)$

i) P: Acabo o trabalho
Q: Vou para a Praia
R: Bom tempo

$(P \wedge R) \to Q$

6

g) $(P \leftrightarrow \neg Q) \wedge (Q \to P)$

P	Q	$\neg Q$	$P \leftrightarrow \neg Q$	$Q \to P$	$(P \leftrightarrow \neg Q) \wedge (Q \to P)$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

7

a) P: n é primo
Q: n é impar
R: $n = 2$

$P \to (Q \vee R)$

b) P: f é contínua

Q: f é diferenciável

$Q \to P$

Prioridade
$\neg$
$\wedge$
$\vee$
$\to$
$\leftrightarrow$

2) 2. Ponha parênteses nas expressões seguintes de tal modo que sejam indicadas as regras de prioridade estabelecidas para os conectivos envolvidos.
(a) $p \wedge q \wedge r \to p$ (b) $p \wedge r \vee q \leftrightarrow r$ (c) $\neg(p \wedge q) \to \neg r \vee p$ (d) $p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg q$

(a) $((p \wedge q) \wedge r) \to p$ (d) $((p \to q) \leftrightarrow ((\neg q) \to (\neg q)))$

7 b)

P	Q	$P \to Q$	$((P \to Q) \to Q)$	$((P \to Q) \to Q) \to \neg Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

A fbf é uma contingência

4

$P \wedge Q \wedge R \wedge S \wedge t \to \neg R$

Não é uma tautologia porque para $P = Q = R = S = t = V$, fica

$V \to F$, que é F

Além disso, podemos afirmar que é uma contigencia porque para $P = F$ e $R = V$ fica $F \to F$, que é V.

2 (b) $\neg(\neg(p \wedge q) \vee p) \equiv \mathbf{F}$

$p \vee \neg p \equiv V$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Lei do terceiro excluido Lei da contradição
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis da identidade
$p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$	Leis da absorção
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leis da idempotência
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leis da comutatividade
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leis da associatividade
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leis da distributividade
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan

$\neg(\neg(P \wedge Q) \vee P) \equiv \neg(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg P)$, leis de Morgan

$\equiv (P \wedge Q) \wedge \neg P$, dupla Negação

$\equiv (Q \wedge P) \wedge \neg P$, comutatividade

$\equiv (Q \wedge (P \wedge \neg P)$, Associatividade

$\equiv Q \wedge F$

$\equiv F$

3

(c) $(r \wedge V) \wedge (q \wedge \neg r)$

$\equiv R \wedge (Q \wedge \neg R)$

$\equiv (R \wedge \neg R) \wedge Q$

$\equiv F \wedge Q$

$\equiv F$ (absorção)

3

(g) $p \vee \neg q \vee (p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q$

$\equiv P \vee \neg Q \vee ((P \wedge Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \wedge Q))$

$\equiv P \vee \neg Q \vee (P \wedge Q \wedge \neg P \wedge Q \wedge (P \vee Q))$ comutatividade e associatividade

$\equiv P \vee \neg Q \vee ((P \wedge \neg P) \wedge (Q \wedge Q) \wedge (P \wedge Q))$

$\equiv P \vee \neg Q \vee (F \wedge Q \wedge (P \vee \neg Q))$

$\equiv P \vee \neg Q \vee F$

$\equiv P \vee \neg Q$

Exemplos de tautologias

$Q \vee \neg Q$ $\qquad$ $P \to P$

exemplos de contradições

$Q \wedge \neg Q$ $\qquad$ $(P \vee Q) \wedge \neg (P \vee Q)$

4)

4. Construa para cada caso proposições compostas P e Q por forma a que as proposições apresentadas sejam tautologias:

(a) $P \wedge Q$ (b) $P \to \neg P$

a) $P: P \to P$ $(P \to P) \wedge (Q \vee \neg Q)$
$Q: Q \vee \neg Q$

b) $(P \vee \neg P)$

T - $\boxed{27/2/2023}$

Argumentos corretos

Um argumento de forma

de $A_1, A_2 \ldots$ e A_n deduz-se B

Diz-se um argumento correto se

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$

for uma $\boxed{\text{tautologia.}}$

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \to B$ é uma tautologia significa

Sempre que $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ é V, e B é V significa

Sempre que as fbf $A_1, A_2, \dots, A_n$ são todas V, também B é V

Sempre que B é F, também $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots A_n$ é F significa

Sempre que B é F, pelo menos uma das fbf $A_1, A_2, \dots, A_n$ é F.

Para indicar que tal argumento é correto, escrevemos

$$\boxed{A_1, A_2, \dots A_n \models B}$$

Se a Rita estudou à tarde então à noite foi ao cinema ou ao teatro. Não foi ao cinema. Logo não estudou à tarde.

$$\begin{array}{l} P \to Q \vee R \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array} \quad ?$$

$(P \to Q \vee R) \wedge \neg Q \to \neg P$ é tautologia

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \to (Q \vee R)$	$\neg Q$	$(P \to Q \vee R) \wedge \neg Q \to \neg P$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

2^3 linhas, 3 = nº vars

$$A \to B,\ A * C \not\models \underset{V}{A} * \underbrace{(B \wedge C)}_{F}$$

V, V, V

consequente F $\Leftrightarrow$ B = F ou C = F $\Rightarrow$ (A *

Função de Verdade (ou função lógica)

$$f(P,Q) = \begin{cases} V \text{ se } P \text{ é } V \\ V \text{ se } P \text{ e } Q \text{ são ambos } F \\ F \text{ se } P \text{ é } F \text{ e } Q \text{ é } V \end{cases}$$

P	Q	f(P,Q)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

$Q \to P$

Um literal é uma variável proposicional ou a sua negação

Uma fbf diz-se forma normal disjuntiva (FND) se for uma disjunção de conjunções de literais.

P

$\neg P$

$P \vee \neg Q$

$\neg P \wedge Q$

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

$P \vee (P \wedge R)$

$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg R)$

2 x 3 x 4 → Produto de 3 fatores

2 x 3 → Produto de 2 fatores

2 → Produto de 1 fator

Uma fbf diz-se uma forma normal conjuntiva (FNC) se for uma conjunção de disjunções não literais

Determinar FBF Disjuntiva

P	Q	f(P,Q)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

$(\quad) \vee (\quad) \vee (\quad)$ ← Parcelas = nº V

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

1ª linha 2ª linha 4ª linha

P	Q	R	F
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

P	Q	f(P,Q)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

$$(P \vee \neg Q)$$

P	Q	R	F
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

conjuntos de conetivos lógicos completos

Um conjunto de conetivos lógicos é **completo** se toda a fbf do cálculo proposicional é equivalente a uma fbf onde figuram apenas conetivos desse conjunto. Assim

$$\{\neg, \wedge, \vee\}$$

é completo.

Será $\{\neg, \wedge\}$ completo?

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg(P \vee Q)) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

Portanto, $\{\neg, \wedge\}$ é completo

$\{\neg, \vee\}$ é completo

$\{\neg, \rightarrow\}$ é completo

Sistemas Formais

Tabela RI

$A, B \vdash A \wedge B$	Lei da combinação	(LC)
$A \wedge B \vdash B$	Lei da simplificação	(LS)
$A \wedge B \vdash A$	Variante da lei da simplificação	(VLS)
$A \vdash A \vee B$	Lei da adição	(LA)
$B \vdash A \vee B$	Variante da lei da adição	(VLA)
$A, A \rightarrow B \vdash B$	Modus ponens	(MP)
$\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A$	Modus tollens	(MT)
$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$	Silogismo hipotético	(SH)
$A \vee B, \neg A \vdash B$	Silogismo disjuntivo	(SD)
$A \vee B, \neg B \vdash A$	Variante do silogismo disjuntivo	(VSD)
$A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \vdash B$	Lei dos casos	(Casos)
$A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$	Eliminação da equivalência	(EEq)
$A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$	Variante da eliminação da equivalência	(VEEq)
$A \rightarrow B, B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$	Introdução da equivalência	(IEq)
$A, \neg A \vdash B$	Lei da inconsistência	(LI)

$P \to Q \vee R,\ P \wedge \neg R \vdash Q$

Prova formal:

1. $P \to Q \vee R$ premissa
2. $P \wedge \neg R$ premissa
3. P 2, VLS
4. $Q \vee R$ 1,3, MP
5. $\neg R$ 2, LS
6. Q 4,5, VSD

Prova formal de $A \vee B,\ \neg A \vdash B$:

1. $A \vee B$ premissa
2. $\neg A$ premissa
3. B 1,2, SD

Prova formal de $P,\ P \to \neg Q,\ R \to Q \vdash \neg R$

1. P Premissa
2. $P \to \neg Q$ Premissa
3. $R \to Q$ Premissa
4. $\neg Q$ 1,2, MP
5. $\neg R$ 3,4, MT

Mostra que $A_1 \models A \to B$ se e só se $A_1, A \models B$

$A_1 \models A \to B \Leftrightarrow A_1 \to (A \to B)$ é uma tautologia

$\Leftrightarrow$ Sempre que A_1 é V, também $A \to B$ é V

$\Leftrightarrow$ Sempre que A_1 é V, Sempre que A é V também B é V

$\Leftrightarrow$ Sempre que A_1 e A são ambos V também B é V

$\Leftrightarrow$ Sempre que $A_1 \wedge A$ é V, também B é V

$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \to B$ é tautologia

$\Leftrightarrow A_1, A_2 \models B$

1P - $\boxed{2/3/2023}$

Nuno conceição

nconceicao@estgv.ipv.pt

a) $(P \neg Q) \wedge P$ x

b) V

c) $P \vee Q$ x

2. Ponha parênteses nas expressões seguintes de tal modo que sejam indicadas as regras de prioridade estabelecidas para os conectivos envolvidos.

(a) $p \wedge q \wedge r \to p$ (b) $((p \wedge r) \vee q) \leftrightarrow r$ (c) $((\neg(p \wedge q)) \to ((\neg r) \vee p))$ (d) $p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg q$

F

5. Prove que são tautologias: (a) $(p \leftrightarrow \underbrace{(p \wedge \neg p)}_{F}) \leftrightarrow \neg p$

(b) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

a) $(P \wedge \neg Q) \leftarrow$ Sempre Falso

$(P \leftrightarrow F) \leftrightarrow \neg P$

$(V \leftrightarrow F) \leftrightarrow F$

$F \leftrightarrow F$

V

b)

$P \equiv V$

$R \equiv F$

$Q \equiv F$

Para b ser falsa:

1) $P \to Q \equiv V$

$(Q \to R) \to (P \to R) \equiv F$

2) para $(Q \to R) \to (P \to R) \equiv F$

teria de ter

$\boxed{Q \to R \equiv V}$ e $\boxed{P \to R \equiv F}$

3) logo $P \equiv V$ e $R \equiv F$

e $Q \equiv F$

Verificação:

$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$

$(V \to F) \to ((F \to F) \to (V \to F))$

$F \to (V \to F)$

$F \to F$

V

Pela Tabela de verdade:

P	Q	R	Q→R	P→R	A→B	P→Q	D→C
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tautologia

7. Diga quais das seguintes fórmulas são tautologias, contradições, ou nem uma coisa nem outra.

(a) $((p \to q) \to \neg(q \to p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

(b) $((p \to q) \to q) \to q$

(c) $((p \to q) \to p) \leftrightarrow (q \to (q \to p))$

(d) $(p \to (q \wedge \neg q)) \to \neg p$

$(P \to (Q \wedge \neg Q)) \to \neg P$

$(P \to F) \to \neg P$

1) $P = V$

$(V \to F) \to F$

$F \to F = V$

$P = F$

$(F \to F) \to V$

$V \to V = V$

Nota

$P \to Q \equiv \neg P \lor Q$

$P \leftrightarrow \equiv (P \to Q) \land (Q \to P)$

$(\neg P \to Q) \to (P \to \neg Q)$

$P \equiv V$

$Q \equiv V$

$(\phi \to \varphi) \to (\phi \to \neg \varphi)$

$(F \to V) \to (V \to F)$

$V \to F$

F

$(P \to Q) \lor (Q \to R)$

$(\neg P \lor Q) \lor (\neg Q \to R) \lor R$

$\neg P \lor V \lor R$

V

b) utilizamos

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$

P	Q	$\neg Q$	$P \to \neg Q$	$\underbrace{(P \to \neg Q) \wedge Q}_{A}$	$\neg P$	$A \to \neg P$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Tautologia

b) chove frequentemente

os agricultores queixam-se

1. $P \to Q$

$\neg P \to Q$

Q

Tabela de verdade

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \to Q$	$A \wedge B$	$C \to Q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

Tautologia

A_1 se $A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n \to B$ é tautologia

Neste caso escrevemos

$A_1, A_2, \dots, A_n \models B$

3. Prove as afirmações seguintes, usando tabelas de verdade.

(a) $p,\, p \to q \models p \wedge q$ (b) $p \to q,\, p \to r \models p \to q \wedge r$

(c) $p \vee q,\, \neg p \vee r \models q \vee r$ (d) $p \vee q,\, p \to r,\, q \to r \models r$

$P, P \to Q \models P \wedge Q$

$(P \wedge (P \to Q)) \to P \wedge Q$

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge (P \to Q)$	$P \wedge Q$	$A \to B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V

FND → Forma Normal Disjuntiva
FNC → Forma Normal conjuntiva

P	Q	R	f	
V	V	V	V	⇐ P Q R V
V	F	F	F	
V	F	V	V	⇐ P ¬Q R V
V	V	F	F	
F	V	V	F	
F	F	F	F	
F	F	V	V	⇐ ¬P, ¬Q, R V
F	V	F	F	

$$f \equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \text{ FND}$$

P16 E07

$f \equiv V$ nos casos seguintes:

$P \equiv V \quad Q \equiv V \quad R \equiv V$

$P \equiv V \quad Q \equiv F \quad R \equiv F$

$$f \equiv (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

P Q R

1 - $\boxed{6/3/2023}$

$A_1, A_2, \ldots, A_n, A \models B$ verifica-se se e só se:

$A_1, A_2, \ldots, A_n \models A \to B$

Queremos:

$\boxed{\models \text{ se e só se } \vdash}$

Regra do Teorema da Dedução (TD):

Se $A_1, A_2, \cdots, A_n, A \vdash B$
então $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A \to B$

Prova formal de $P \to Q,\ Q \to R \vdash P \to R$

1.	$P \to Q$	premissa
2.	$Q \to R$	premissa
3	P	hipótese
4	Q	1,3, MP
5	R	2,4, MP
6	$P \to R$	3-5, TD

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \to B \end{array}}{B}$$

Prova formal de $A \land \neg B \vdash \neg(A \to B)$

1	$A \land \neg B$	premissa
2	A	1, VLS
3	$\neg B$	1, LS
4	$A \to B$	hipótese

A
$\neg B$

5 B 2,4, MP

6 $(A \to B) \to B$ 4-5, ID

7 B

Prova formal de $\vdash A \to A$:

1	A	hipótese
2	$A \to A$	1, ID

Prova formal de $\vdash A \vee \neg A$

1	A	hipótese
2	$A \vee \neg A$	1, LA
3	$A \to (A \vee \neg A)$	1-2, ID
4	$\neg A$	hipótese
5	$A \vee \neg A$	4, ∨LA
6	$\neg A \to (A \vee \neg A)$	4-5, ID
7	$A \vee \neg A$	3,6, Casos

Observação $\models A \vee \neg A$ significa que $A \vee \neg A$

$A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B$ se e só se $A_1, A_2, \dots, A_m \models B$

No sistema formal natural

$\boxed{\models \quad \text{SSe} \quad \vdash}$

Notemos entretanto que não válidas as seguintes equivalências lógicas

(1) $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$

(2) $P \to Q \equiv P \wedge \neg Q \to F$

Demonstração indireta de que

Se $5n + 2$ é ímpar então n é ímpar

Consiste em provar que

Se n par então $5n+2$ é Par

Capítulo 2

Predicados e quantificadores

Todo o x é Par $\qquad \forall x P(x)$

Algum x é português $\qquad \exists$

Existe um x tal que $x+x=0$ $\qquad \exists x\, q(x,x)$

$S \Rightarrow \exists x P(x)$ (1)

$P(j) \wedge P(r) \to P(t)$ (2)

Interpretação

Uma interpretação:

domínio do discurso: um certo grupo de pessoas;

S: Faz sol;

$P(x)$: x vai à praia

j, r, t designam 3 pessoas desse grupo, respetivamente, Joana, Rui e Tiago

(1) Se faz sol então alguém vai à praia

(2) Se o Joana e o Rui vão à praia, o Tiago também vai à praia

Prioridade dos conetivos e quantificadores

$\neg, \exists x, \forall y$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$

$\leftrightarrow$

$(\forall x \quad P(x)) \rightarrow (Q(x))$ $\qquad\qquad$ $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

Escopo de um quantificador

Na fbf $\exists x(A)$, (A) diz-se o escopo do quantificador $\forall x$

Semântica

Para uma dada interpretação,

$\forall x\ P(x)$ toma o valor de **V** se $P(x)$ toma o valor de **V** para todos

Cálculo Proposicional

fbf

$\{\neg, \wedge, \vee\}$

a) $\{\neg, \rightarrow\}$

Nota: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

p, q proposição

$\neg p \vee$

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg p \vee \neg Q) \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$p \mid q \equiv \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Res $(q \mid q) \mid p$

$$\neg(q \wedge q) \mid p \equiv \neg(\neg(q \wedge q) \wedge p) \equiv \neg(\neg q \wedge p) \equiv q \vee \neg p \equiv p \rightarrow q$$

a) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ $\{\neg, \to\}$

$\neg p \vee \neg q \longrightarrow \neg(\neg r \vee \neg s)$

$(p \to \neg q) \to \neg(r \to \neg s)$

b) $p \leftrightarrow q$

$(p \to q) \wedge (q \to p)$

$\neg(\neg(p \to q) \to \neg(q \to p))$

$p \to q,\ p \models q$

$\underbrace{(p \to q) \wedge p \to q}_{\text{tautologia}}$

a) $\neg q,\ p \to q \models \neg p$

p	q	$p \to q$	$\overbrace{\neg q \wedge (p \to q)}^{A}$	$\neg p$	$A \to \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

P	Q	$\neg P$	$P \land \neg P$	$P \land \neg P \to \neg Q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

a) p O João esteve na festa de ontem

q faltou à aula

$$p \to q, \neg q \models \neg p$$

b) p : fazer ; q : ser criticado

$$p \to q, \neg p \to q \models q \text{ (lei dos casos)}$$

c) P : está frio

Q : está húmido $\quad p \land Q \models P$ (VCS)

d) P francisca levou o Fiat

Q Francisca não levou o citroen

$$P \lor Q, \neg Q \models P \text{ (VSD)}$$

(a) $p, p \to (q \vee r), (q \vee r) \to s \vdash s$

1	p	premissa
2.	$p \to (q \vee r)$	premissa
3	$(q \vee r) \to s$	premissa
4.	$q \vee r$	1,2, MP
5	s	3,4, MP

b)

1	$p \to q$	premissa
	$q \to r$	premissa
	$\neg r$	premissa
	$\neg q$	2,3, MT
	$\neg p$	1,4, MT

c)

1	P	premissa
2	$P \to Q$	premissa
3	q	1, 2, Mf
4	$p \wedge q$	1, 3, LC.

$$p \vee q \vee r \vee s \vee t \rightarrow p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

$p \equiv V$
$q \equiv V$
$r \equiv V$
$s \equiv V$
$t \equiv F$

1	$p \vee q$	premissa
2	$\neg p$	premissa
3	$q \rightarrow r$	premissa
4	q	1, 2, SO
5	r	3, 4, MP

$$(p \rightarrow q \wedge r \wedge s) \rightarrow p \vee q \vee r \vee t$$

$p \equiv V$
$q \equiv F$
$r \equiv V$
$s \equiv V$
$t \equiv V$

1	$\neg p \rightarrow q \wedge r$	premissa
2	$p \rightarrow s$	premissa
3	$\neg s$	premissa
4	$\neg p$	2, 3, MT
5	$q \wedge r$	1, 4, MP
6	q	5, VLS

p Vou fazer todos os ideais

q Vou fazer férias no Brasil.

a) $P \to Q$

b) $Q \leftrightarrow P$

c) $q \to P$

d) $q \to P$

e) $Q \to P$

f) $P \vee Q$

g) $p \vee \neg Q$

(12)

1. $\neg h$
2. $\neg v \longrightarrow \neg e$
3. $\neg v$
4. $\neg h \longrightarrow \neg j$
5. $(\neg v \wedge \neg e) \longrightarrow (r \vee j)$
6. $\neg j$ — 1,4, MP
7. $\neg e$ — 2,3, MP
8. $\neg v \wedge \neg e$ — 3,7, C
9. $r \vee j$ — 8,5, MP
10. r — 9,6, VSD

1 - $\boxed{13/3/2023}$

Interpretação das fbfs

$$\exists x \forall y \left(q(x,y) \to q(z,y)\right)$$

Universo: Alunos de uma dada escola.

$q(x,y) :=$ "y é amigo x".

$z := c$, onde c representa uma determinada pessoa chamada Carlos.

Deste modo, o significado é: "existe um aluno x tal que todo o amigo de x é também amigo de Carlos.

$$\exists x \forall y \left(q(x,y) \to q(z,y)\right)$$

Universo: $\mathbb{R}$

$q(x,y) := x \times y = 0$

$z := 2$

Para $x = 5$: $\forall y \; (5y = 0 \Rightarrow 2y = 0)$ Verdadeiro

Uma fbf pode ser:

Válida → Verdadeira para todas as interpretações

Satisfazível → se existirem interpretações para as quais ela é verdadeira

contingente → se for satisfazível, mas não válida

contraditória → sempre falsa

$\forall x \; (P(x) \vee \neg P(x))$ → Válida

$\forall x \; (P(x) \wedge \neg P(x))$ → contraditória

$\forall x \; P(x)$ é Satisfazível

$\forall x \exists x \, (P(x,y) \to q(x))$

$\exists x \, (p(x,y) \to q(x))$

	a	b
a	V	V
b	V	F

Universo: $\{a, b\}$

$p(x,y)$:= definido por

$q(x)$ definido por.

$y := a$

x	a	b
q(x)		

Para esta interpretação (x) é F

Universo $\{a, b\}$

$P(x,y)$: definido p/

$y := a$

P	a	b
a	V	F
b	F	F

x	a	b
$q(x)$	V	F

como $P(a,a) \to q(a)$, que é V de $V \to V = V$

Portanto esta fbf é uma contigencia

$A: \forall x \; \exists y \; p(x,y)$

$S_t^x(A) = \forall t \; \exists y \; P(t,y)$

Variante de $\forall x \; p(x) := \forall y \; P(y)$

① $\forall x \; p(y) \equiv p(y)$

$\forall x \underbrace{\exists y \, \exists x \; p(x,y)}_{A}$

⑧ Análogo trocando $\forall$ com $\exists$

② Análogo

③ $\forall x \; P(x) \equiv \forall y \; p(y)$

④ $\exists x \; p(x) \equiv \exists y \; p(y)$

⑤ $\forall x \; p(x) \equiv p(t) \land \forall x \; P(x)$

⑥ $\exists x \; p(x) \equiv p(t) \lor \exists x \; p(x)$

⑦ $\forall x \; (p(y) \lor q(x)) \equiv$

$\equiv p(y) \lor \forall x \; q(x)$

$\forall x \, (p(x) \vee q(x)), \; p(y) \vdash (q(y))$

1.	$\forall x \, (p(x) \vee q(x))$	premissa
2:	$\neg p(y)$	premissa
3	$p(y) \vee q(y)$	1, EU (S_y^x)
4.	$q(y)$	2, 3, VSD

$\forall x \; (p(x) \rightarrow q(x) \vee r(x)), \; p(z) \wedge \neg q(z) \vdash r(z)$

1.	$\forall x \, (p(x) \rightarrow q(x) \vee r(x))$	premissa
2.	$p(z) \wedge \neg q(z)$	premissa
3.	$p(z) \rightarrow q(z) \vee r(z)$	1, EU (S_z^x)
4.	$P(z)$	2, VCS
5.	$q(z) \vee r(z)$	3, 4, MP
6	$\neg q(z)$	2, CS
7	$r(z)$	5, 6, VSD.

P- $\boxed{16/3/2023}$

Teorema da dedução

Se $A_1, \ldots, A_n, A \vdash B$
então $A_1, \ldots, A_n \vdash A \Rightarrow B$

12. Demonstre formalmente:

(a) $\neg A \vdash A \to B$ (b) $A \wedge B \vdash A \to B$ (c) $A \wedge B \vdash A \vee B$

a)

1.	$\neg A$	premissa
2	A	hipótese
3	B	1,2, LI
4	$A \to B$	2-3, ID

b)

1	$A \wedge B$	premissa
2	A	hipótese
3	B	1, LS
4.	$A \to B$	2-3, ID

c) $A \wedge B \vdash A \vee B$

1	$A \wedge B$	premissa
2	A	1, VLS
3	$A \vee B$	2, LA

9. Prove formalmente que $P \to (Q \to R)$ e $P \wedge Q \to R$ são logicamente equivalentes.

$$P \to (Q \to R) \equiv P \wedge Q \to R$$

$$(P \to (Q \to R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \to R)$$

$$[P \to (Q \to R)] \vdash [(P \wedge Q) \to R]$$

$$[P \wedge Q \to R] \vdash [P \to (Q \to R)]$$

1	$P \to (Q \to R)$	premissa
2	$P \wedge Q$	hipótese
3	Q	2 ES
4	P	2, VES
5	$Q \to R$	1,4, MP
6	R	3,5, MP
7	$P \wedge Q \to R$	2-6, ID

2)

1.	$P \wedge Q \to R$	premissa
2.	P	hipótese
3	Q	hipótese
4	$P \wedge Q$	2,3, Ce
5	R	
6	$Q \to R$	3-5 ID
7	$P \to (Q \to R)$	2-6 ID

2. Representando "Faz bom tempo" por p, "Vou à praia" por q, "Passo a Matemática Discreta" por r e "Tenho umas boas férias" por s, traduza as duas frases seguintes em cálculo proposicional:

   (a) "Fazer bom tempo é uma condição necessária para eu ir à praia."

   (b) "Passar a Matemática Discreta é condição suficiente para ter umas boas férias."

P fez bom tempo

Q Vou á Praia

R passar a MD

S tenho boas férias

a) $q \to p$

b) $r \to s$

14. Para cada uma das seguintes equivalências lógicas averigue se está certa ou errada:

   (a) $(r \vee p) \wedge \neg p \equiv r \wedge \neg p$ → V (b) $p \to q \equiv \neg(\neg p \wedge q)$ → F (c) $\neg(p \to p) \equiv \mathbf{F}$ → V

   (d) $(r \vee p) \wedge \neg p \equiv r \vee \neg p$ (e) $(\neg r \wedge p) \to r \equiv p$ → F

a)

R	P	$(R \vee P)$	$\neg P$	$(R \vee P) \wedge \neg P$	$R \wedge \neg P$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	F

V

P	Q	$(P \to Q)$	$\neg P$	$\underbrace{\neg P \wedge Q}_{A}$	$\neg A$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V

F

1. Expresse as seguintes afirmações na forma de fórmulas do cálculo de predicados. O domínio considerado é o conjunto dos números inteiros.

   (a) Se x está entre 1 e 2, e se y está entre 2 e 3, então a diferença entre x e y não pode exceder 2. Use o predicado $b(x, y, z)$ se x está entre y e z, e use $d(x, y, z)$ se a diferença entre x e y é maior do que z.

   (b) Se x é divisível por quatro então x não pode ser primo. Use $d(x, y)$ se x é divisível por y e $p(x)$ se x é primo.

   (c) $x + y = z$ e $x + z = u$. Use $s(x, y, z)$ se $x + y = z$.

a) $b(x,y,z)$ x está entre y e z

$d(x,y,z) = x - y \leq z$

$b(x,1,2) \wedge b(y,2,3) \rightarrow \neg d(x,y,2)$

b) $d(x,y)$: x é divisível por y

$p(x)$ x é primo

$d(x,4) \rightarrow \neg p(x)$

c) $s(x,y,z)$: $x+y=z$

$s(x,y,z) \wedge s(x,z,u)$

2. Suponha que o universo de discurso é um grupo de pessoas. Traduza a afirmação "Toda a gente aqui fala inglês ou francês." em cálculo de predicados.

$D = \{$grupo de pessoas$\}$

$i(x)$: x fala inglês

$f(x)$ x fala francês

$\forall x \left(i(x) \vee f(x) \right)$

4. No domínio de todos os animais como traduziria as seguintes expressões em cálculo de predicados?

(a) Todos os leões são predadores.
(b) Alguns leões vivem em África.
(c) Só os leões rugem.
(d) Alguns animais comem insectos.
(e) As aranhas comem insectos.
(f) As aranhas só comem insectos.

a) $l(x)$ x é leão

$p(x)$ x é predador

$\forall x\,(l(x) \to p(x))$

b) $v(x)$: x vive em África

$\exists x\,(l(x) \wedge v(x))$

e) $s(x,y,z)$: $x+y=z$

$s(x,y,z) \wedge s(x,z,x)$

d) $i(x)$ x come insectos

$\exists x\,(i(x))$

Variáveis: $x, y, z, \ldots$

Predicados $p, q, r, \ldots$

Conetivos $\neg, \wedge, \vee, \ldots$

quantificadores: $\forall, \exists$

$\neg, \exists x, \forall x$

$\wedge$

$\vee$

$\to$

Escopo de um quantificador

$\forall x\ \boxed{A}$

$\exists x\ \boxed{A}$

$\exists x\ \underbrace{p(x,y)}_{\text{escopo}} \to \underbrace{q(x)}_{\text{livre}}$

$\exists x\ \underbrace{(p(x,y) \to q(x))}_{\text{escopo}}$

(variáveis limitadas)

2. Escreva uma fbf do cálculo de predicados que contenha um quantificador existencial, um quantificador universal, dois símbolos de predicado, A e B, o primeiro de aridade 2, segundo de aridade 1, a ocorrência da variável x duas vezes, ambas limitadas, a ocorrência da variável y três vezes, duas limitadas e uma livre.

$$\left[\exists x\ \forall y\ (B(x) \wedge B(y) \wedge A(x,y))\right] \vee B(y)$$

I para uma fbf ϕ

D

predicado → V ou F

variável livre sempre com o mesmo elemento do domínio.

1. Um universo contém três indivíduos a, b e c. Para estes indivíduos, define-se um predicado $q(x, y)$, cujos valores lógicos são dados pelo quadro seguinte:

	a	b	c
a	V	F	V
b	F	V	V
c	F	V	V

Estude a veracidade de:

(i) $\forall x \exists y\, q(x, y)$ V (ii) $\forall y\, q(y, b)$ F (iii) $\forall y\, q(y, y)$ V (iv) $\exists x\, \neg q(a, x)$ V

(v) $\forall y\, q(b, y)$ F (vi) $\forall y\, q(y, y) \wedge \forall x \exists y\, q(x, y)$. V

2. Um universo de discurso consiste em três pessoas, nomeadamente, João, Maria e Joana. Os três são estudantes, e nenhum deles é rico. Os símbolos de predicados e, h, m e r correspondem a ser estudante, ser homem, ser mulher e ser rico, respectivamente.

(a) Para cada uma das expressões seguintes, diga se é verdadeira ou falsa: $\forall x\, e(x)$, $\forall x\, m(x) \vee \forall x\, h(x)$, $\forall x\, (m(x) \vee h(x))$, $\exists x\, r(x)$ e $\exists x\, (m(x) \to r(x))$.

(b) Supondo p verdadeiro e q falso, determine $\forall x\, p$, $\forall x\, q$, $\exists x\, (p \wedge m(x))$, $\exists x\, (p \vee m(x))$ e $\exists x (q \vee m(x))$.

a)

$\forall x \; e(x)$ $\boxed{V}$

$\forall x \; m(x) \vee \forall x \; h(x)$ F

$\forall x \, (m(x) \vee h(x))$ V

$\exists x \; r(x)$ F

$\exists x \, (m(x) \rightarrow r(x))$ V

4. Numa certa interpretação o domínio consiste nos indivíduos a, b e c, e existe um predicado p de aridade 2 tal que $p(x, x)$ é verdadeiro para todos os possíveis valores de x, $p(a, c)$ é verdadeiro e $p(x, y)$ é falso para todos os outros casos em que x é diferente de y. Determine o valor lógico de

(a) $p(a, b) \wedge p(a, c)$ (b) $p(c, b) \vee p(a, c)$ (c) $p(b, b) \wedge p(c, c)$ (d) $p(c, a) \rightarrow p(c, c)$

$p(\,,\,)$

	a	b	c
a	V	F	F
b	F	V	F
c	F	F	V

a) $P(a,b) \wedge P(a,c)$ $F \wedge V \equiv F$

b) $P(c,b) \vee P(a,c)$ $F \vee V \equiv V$

c) $P(b,b) \wedge P(c,c)$ $V \wedge V \equiv V$

d) $P(c,a) \rightarrow P(c,c)$ $F \rightarrow V \equiv V$

5. Seja A a expressão $(p(x) \rightarrow q(y)) \wedge \neg q(y) \wedge p(y)$.

(a) Determine um modelo para A.

(b) Comente a seguinte afirmação: "A expressão $\forall x \forall y A$ é uma contradição."

a) $D = \{a, b\}$

	a	b
p	F	V

	a	b
q	V	F

$y : b$
$x : a$

23/3/2023

1. Averigue se cada um dos argumentos seguintes é ou não correcto:

(a) $\forall x\, p(x), \forall x\, q(x) \models \forall x\, (p(x) \wedge q(x))$ ✓

(b) $\exists x\, p(x) \models \forall x\, p(x)$ ✗

(c) $\underbrace{\exists x\, p(x)}, \underbrace{\forall x\, (p(x) \to q(x))} \models \forall x\, q(x)$ ✓

$V \to$ ✓

$F \to$ ✗

$\exists x\, q(x)$

$\overset{V}{p(x)}$

$\overset{V}{p(x)} \to \overset{V}{q(x)}$

V

2. Formalize os seguintes argumentos e diga se são ou não correctos.

(a) Há aqui alguém que fala inglês e francês. Logo há aqui alguém que fala inglês e há aqui alguém que fala francês.

(b) Todas as pessoas aqui presentes falam francês ou inglês. Logo todas as pessoas aqui presentes falam francês ou todas falam inglês.

a) 1 $\forall u\ \neg q(u)$

2 $\forall u\ (p(u) \to q(u))$

3	$\neg q(u_0)$	1, E∀ $(S^{u}_{u_0})$
4	$(p(u_0) \to q(u_0))$	2, E∀ $(S^{u}_{u_0})$
5	$\neg p(u_0)$	3,4, MT

6 $\forall u\ \neg p(u)$ 3-5, I∀ $(S^{u}_{u_0})$

b)

1	$\forall u \; A(u)$	premissa
2	$A(t_0)$	1, EU$(S^u_{t_0})$
3	$\exists u \, A(u)$	2, IG$(S^u_{t_0})$

3. Prove formalmente que das premissas $\exists x\, M(x)$, $\forall x\,(M(x) \to \exists y\, C(x,y))$ e $\forall x\,((\exists y\, C(x,y)) \to F(x))$ se deduz que $\exists y\, F(y)$.

$M(y)$, $M(y) \to \exists y\, C(y,y)$, $\exists y\, C(y,y) \to F(y)$

$M(y)$ $M(y) \to F(y)$

$M(y) \to \exists y\, M(y)$

1	$\exists x \; M(x)$	
2	$\forall x\,(M(x) \to \exists y\; C(x,y))$	
3	$\forall\,(\exists y\, C(x,y) \to F(x)$	
4	$M(x_0)$	hipótese
5	$M(x_0) \to \exists y\, C(x_0,y))$	2, EU $(S^x_{x_0})$
6	$\exists y\, C(x_0,y)$	4, 5, MP
7	$\exists y\; C(x_0,y) \to F(x_0)$	3, EU $(S^x_{x_0})$
8	$F(x_0)$	6, 7, MP
9	$\exists y\; F(y)$	8, IE$(S^{x_0}_y)$
10	$\exists y\, F(y)$	1, 4-9, EE

1P - $\boxed{27/04/2023}$

Relações

$R: X \longleftarrow X$

1) Propriedades

Reflexiva: $\forall x \in X \quad xRx$

irreflexiva $\forall x \in X \quad \neg(xRx)$

Simetria: $x, y \in X \quad xRy \Rightarrow yRx$

antissimetria: $x, y \in X, x \neq y, xRy \Rightarrow \neg(yRx)$

Transitiva: $\forall x, y, z \in X, xRy, yRz \Rightarrow xRz$

Uma relação
1) reflexiva
2) Simetria
3) Transitiva

é uma relação de equivalência.

Uma relação
1) reflexiva
2) antissimétrica
3) transitiva

é uma ordem parcial

Fechos

O fecho reflexivo* de R é a menor relação reflexiva* em X que contém R.

* simetrico/simetria
* transitivo/intransitivo

P76E06 $S=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1)\}$$

$$R^{(s)}=\{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1),(3,4),(1,3)\}$$

fecho reflexivo

$$R^{(s)}=\{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1),(1,1),(3,3),(4,4)\}$$

fecho transitivo

$$R^{+}\ \{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1),(1,1),(4,1),(3,2),(4,2)\}$$

P74E18

$A=\{a,b,c,d\}$

$R=\{(a,b),(b,d),(c,b),(d,a)\}$

$$M_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}a&b&c&d\end{matrix}\\ \hline & \begin{bmatrix}x&x&x&x\\x&x&x&x\\x&x&x&x\\x&x&x&x\end{bmatrix}\begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix}\end{array}$$

$$MR^{(r)}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$(x,y),(y,z)\Rightarrow(x,z)$$

$$MR^{(s)}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\rightarrow \Delta \text{ superior}=\Delta \text{ inferior}$$

$$(a,b),(b,d),(c,b)\ (d,a),(b,a),(a,d),(c,d),(b,b)$$
$$(a,a),(c,a),(d,d),(d,b)$$

$$M_{R^+}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

P77 E02

$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$X, Y \in A \qquad XRY$ sse $X \subseteq Y$

a) R é relação de ordem parcial:

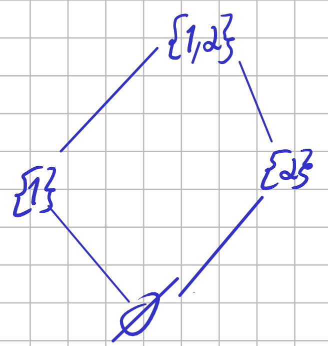
1) reflexiva? $\forall x \in A \; X \subseteq X$ $\boxed{V}$

2) antissimétrica? $x \neq y \quad X \subseteq Y \Rightarrow Y \not\subseteq X$ $\boxed{V}$

3) transitiva? $x \subseteq y, \; y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$ $\boxed{V}$

Mostramos que R_1 é uma ordem Parcial

b) Faça diagrama de Hasse.



$x|y$ "x divide y"

no conjunto $\{2, 3, 5, 6, 9, 10, 12\}$

a) esta é uma relação de ordem parcial

1) reflexiva $\forall x \in S \; x|x$ V

2) anti simetria

$x \neq y \quad x|y \Rightarrow \neg(y|x)$ V

3) transitiva

$x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$ V

$x | y$ y é múltiplo de x

$y | z$ z é multiplo de y

então z é multiplo de x, isto é, $x | z$

A relação é uma ordem parcial

b) é uma ordem total?

Por exemplo $\neg(2|9)$, logo não é ordem total

c)

$\{2, 3, 5, 6, 9, 10, 12\}$

y é multiplo de x

$y = K \times x$

z é multiplo de y

$z = K \times L \times x$

Porquê z multiplo de x?

$x = 3$
$y = 6$

$y = 6$
$z = 12$

Pag 83E19

19. Para $n = 1, 2, ..., 10$, indique o valor de $n$mod3 e $(-n)$mod3.

n	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n(mod 3)	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

P82E07

7. Determine quais das seguintes funções são injectivas, quais são sobrejectivas e quais são bijectivas.

(a) $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c\}$ $\quad f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

(b) $g : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b, c, d\}$ $\quad g = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

(c) $h : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ $\quad h = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$

(d) $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad p(j) = j^2 + 2$

(e) $m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad m(j) = j(\text{mod}3)$

(f) $q : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad q(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}$

	f	g	h	P	m	Q	R
domínio	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
CD	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{1,2\}$	$\{3,6,11,...\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
injetiva	✓	✓	X	✓	X	X	X
Sobrejetiva	✓	X	X	X	X	X	✓
bijetiva	✓	X	X	X	X	X	X

P84 E22

22. Dado $D = \{1, 2, 3\}$

(a) Enumere D^3 usando a ordem lexicográfica.

(b) Enumere D^2 usando a diagonalização de Cantor.

D^3. $(1,1,1) \leq (1,1,2) \leq (1,1,3) \leq (1,2,1) \leq (1,2,2) \leq (1,2,3) \leq (1,3,1)$

P- $\boxed{18/5/2023}$

Pag 103

9)

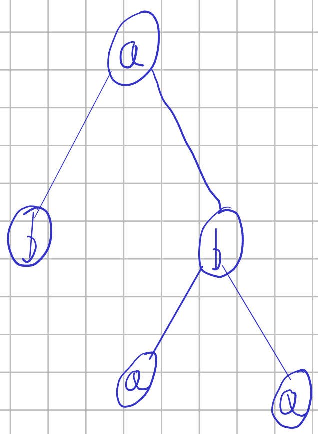
1) $\Lambda \in R_0$

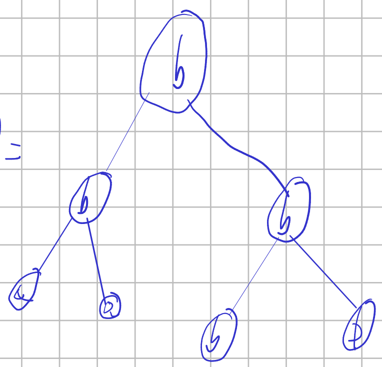
2) Se $S \in \mathcal{L}$ e não começa por 0 então $S \in \mathcal{L}$

Se $S \in \mathcal{L}$ e não começa por 1 então $S \in \mathcal{L}$

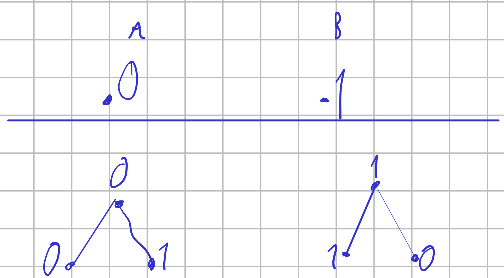
1)

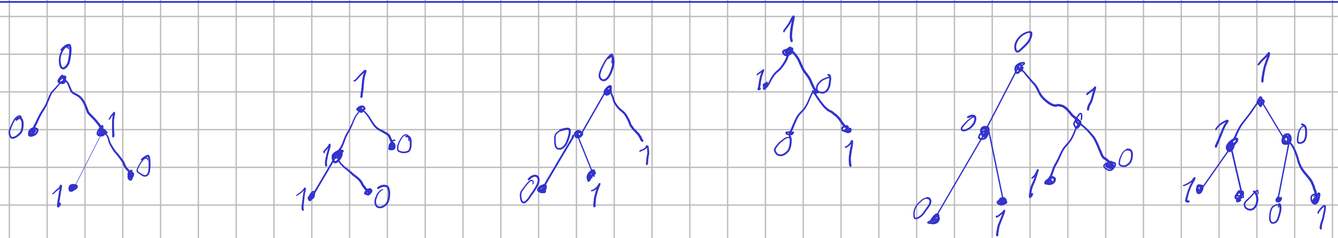
a)

A = 

B = 

b)





2)

1. $(\ )\in G$

2. Se $T\in G$ então $(T,0,T)$ e $(T,1,T)$ pertencem a G

4. Determine $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$ para $f(n)$ definida recursivamente por $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ e, para $n = 1, 2, ...$,

(a) $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$;

(b) $f(n+1) = f(n)^2 f(n-1)$;

(c) $f(n+1) = f(n-1)/f(n)$.

a)

$f(2) = f(1) + 3f(0) \Leftrightarrow f(2) = 2 + 3\times(-1) \Leftrightarrow f(2) = -1$

$f(3) = f(2) + 3f(1) \Leftrightarrow f(3) = -1 + (3\times 2) = 5$

$f(4) = f(3) + 3f(2) \Leftrightarrow f(4) = 5 + 3\times(-1) = 2$

b) $f(2) = f(1)^2 \times f(0) = 4\times(-1) = -4$

$f(3) = f(2)^2 \times f(1) = 16\times 2 = 32$

6. Dê uma definição recursiva da sucessão (a_n), $n = 1, 2, ...$, se

(a) $a_n = 6n$; (b) $a_n = 1 + (-1)^n$; (c) $a_n = n(n+1)$; (d) $a_n = n^2$.

a) $a_0 = 6\times 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$

$a_{n+1} = 6(n+1) = 6n + 6 = a_n + 6$

b) $a_n = 1 + (-1)^n$

$a_0 = 2$

$a_1 = 0$

$a_2 = 2$

$a_3 = 0$

$a_4 = 2$

$2 \longrightarrow 0$

$0 \longrightarrow 2$

$2 + 2(-1)^n = 0$

$0 + 2(-1)^n = 2$

Resposta: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2(-1)^{n+1} \end{cases}$

Se n par:

$a_n = 2$

$a_{n+1} = 2 + 2(-1)^{n+1} = a_n + 2(-1)^{n+1}$

Se n é ímpar: $a_n = 0$

$a_{n+1} = 0 + 2(-1)^{n+1} = a_n + 2(-1)^{n+1}$

10. Os números de Fibonacci, f_0, f_1, f_2, ..., definem-se por

$$f_0 = 0;\ f_1 = 1;\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

(a) Calcule os números de Fibonacci f_2, f_3, f_4 e f_5.

(b) Prove que $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

(c) Prove que $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$ para todo $n \geq 1$.

(d) (*) Prove que $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ para todo $n \geq 1$.

a)

$f(2) = f(1) + f(0) = 1 + 0 = 1$

$f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2$

$f(4) = f(3) + f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(5) = f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5$

b)

BI. $n = 1$

$f(1)^2 = f(1)\,f(2) \Leftrightarrow 1^2 = 1 \times 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ ✓

PI Supomos que

$f(1)^2 + f(2)^2 + \ldots + f(n)^2 = f(n)\,f(n+1)$

Queremos mostrar que:

$f(1)^2 + f(2)^2 + \ldots + f(n)^2 + f(n+1)^2 = f(n+1) \times f(n+2)$

$\underbrace{f(1)^2 + f(2)^2 + \ldots + f(n)^2} + f(n+1)^2 = \underbrace{f(n) \times f(n+1) + f(n+1)^2}$ por HI

$= f(n+1)\left[f(n) + f(n+1)\right]$

$= f(n+1)\,f(n+2)$, por definição dos números de Fibonacci

1. Considere o conjunto $A = \{c, a, b, o\}$.

   (a) Determine o número de listas de elementos de A de comprimento três cuja cabeça é uma vogal.

a) Sendo $V = \{a, o\}$, o nº destas listas é igual ao card$(V \times A \times A \times A) = 2 \times 4 \times 4 \times 4 = 8 \times 16$

$A = \{c, a, b, o\}$

   (b) Seja $\mathcal{W}$ o conjunto de todas as *strings* sobre o alfabeto A definidas recursivamente por:

   (i) a e o pertencem a $\mathcal{W}$.

   (ii) Se $S \in \mathcal{W}$ e S começa por uma vogal então $b \cdot S$ e $c \cdot S$ pertencem a $\mathcal{W}$. Se $S \in \mathcal{W}$ e S começa por uma consoante então $a \cdot S$ e $o \cdot S$ pertencem a $\mathcal{W}$.

   Apresente todas as *strings* de $\mathcal{W}$ de comprimento menor ou igual a 3.

   Quantas das strings de $\mathcal{W}$ têm comprimento 4? E 5?

   (c) Defina recursivamente o conjunto de todas as árvores binárias sobre A tais que cada nodo com filho tem ou dois filhos etiquetados por duas vogais ou dois filhos etiquetados por duas consoantes.

b)

2	a				o			
2×2	ba		ca		bo		co	
$2 \times 2 \times 2$	aba	oba	aca	oca	abo	obo	aco	oco
2^4								

Cada String de comprimento 3 dá origem a 2 de comprimento 4.

Logo temos 2^4 strings de comprimento.

Analogamente, temos 2^5 Strings de comprimento 5

c)

$V = \{a, o\}$ (U e V são possíveis arvores $\in$ a T)

$C = \{b, c\}$

$T =$ Conjunto que queremos definir

Se $U, V \in T$ e as suas raizes são ambas consoantes ou ambas vogais então (U, u, V) para cada u

2) Se $x \in A$, $T_1, T_2 \in T$ e as suas raízes de T_1 e T_2 pertencem ambas a V ou ambas a C, então $(T_1, x, T_2) \in T$

2. Use indução matemática para provar que todo o $n \geq 0$ verifica a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \,.$$

$$0 = 1 - \frac{1}{1} \Leftrightarrow 0 = 0 \checkmark$$

Por definição de somatório

PI Supomos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad (HI)$$

Queremos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{n+2}{(n+2)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 + \frac{-(n+2)+(n+1)}{(n+2)!} = \frac{1 + -n-2+n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

7. (a) Defina cabeça e cauda de uma lista. Defina recursivamente lista sobre um conjunto A.

(b) Defina recursivamente todas as listas não vazias sobre o conjunto $\{x, y, z\}$ tais que a a letra x aparece sempre com outro x ao lado; por exemplo, $[y]$, $[y, z]$, $[x, x]$, $[x, x, x]$, $[y, x, x, z, y]$, $[z, x, x, y, x, x, z, z]$.

Denotando por $\mathcal{L}$ o conjunto destas listas

1. $[x,x], [y], [z] \in \mathcal{L}$
2. Se $L \in \mathcal{L}$ é cabeça$(L) \neq x$, então $[x,x,L]$, $[y,L]$ e $[z,L] \in R_0$

Se $L \in \mathcal{L}$ e cabeça$(L) = x$, então

$[y,L]$ ...

1 - [22/5/2023]

1 - Uma Raiz tem nível 1

2 - O filho de um vertice de nível n tem nível $n+1$

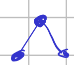
Teorema: O nº máximo de vertices de uma árvore binária de altura n é de $2^n - 1$ e existe uma árvore binária de altura n com $2^n - 1$ vertices

$n = 1$:

altura = 1

$2^1 - 1 = 1$ Vertice

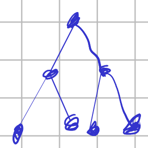
$n = 2$:



altura 2

$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$n = 3$



Altura = 3

$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

Vamos usar a indução estrutural para provar que:

Toda a árvore binária de altura n tem no máximo $2^n - 1$ vertices

BI. A arvore () tem altura 0 e tem 0 vertices.

$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \geq 0$ ✓

PI. Seja $T = ((U, r, V))$.

Suponemos que, por HI, U e V satisfazem a propriedade.

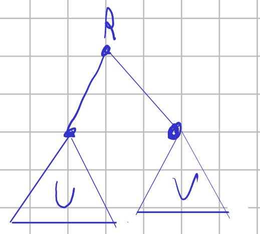
Queremos mostrar que T satisfaz a propriedade

Sejam:

$v(U) = i$

$v(V) = j$, onde $v(-) :=$ nº de vértices de

Então $v(T) = i+j+1 =: n$



Sejam

$a(U) = k$

$a(V) = m$

Então $a(T) = \overbrace{\max(k,m)}^{\leq n-1} + 1 =: n$

Queremos mostrar que $v(T) \leq 2^n - 1$

$v(T) = i + j + 1 \leq \underbrace{2^k - 1}_{U} + \underbrace{2^m - 1}_{V}$, por HI sobre U e V

$\leq 2^{n-1} - 1 + 2^{n-1} - 1 + 1$, pois $k, m \leq n-1$

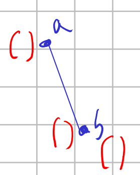
$= 2 \times 2^{n-1} - 1 - 1 + 1$

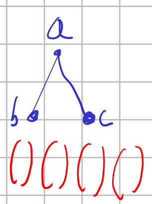
$= 2^n - 1$

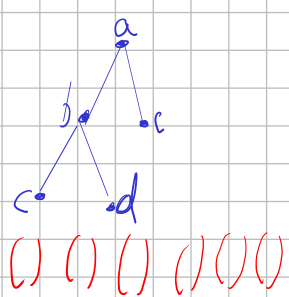
a

$((), a, ())$

2 subárvores vazias







BI. x 1 vértice

$\bullet$ 1+1 subárvores vazias

PI $T(U, x, V)$

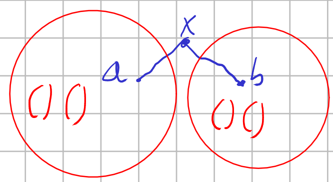
HI U e V satisfazem a propriedade

Mostrar que T tb satisfaz

$v(U) = k$

$V(V) = m$

Então $V(T) = k + m + 1 = n$



O nº de subárvores vazias de T é:

(nº de subárvores vazias de U) + (nº de subárvores vazias de V) =

$= (k+1) + (m+1)$, por HI

$= (k+m+1) + 1 = n+1$

Funções Recursivas Primitivas:

São as funções de N^k em N que se podem obter usando apenas as funções base, a composição (da forma definida atrás) e recursão primitiva.

1. Função add da adição de números naturais:

$$add(m, 0) = m$$

$$add(m, s(n)) = s(add(m, n))$$

2. Função predecessor:

$$P(0) = 0$$

$$P(S(n)) = n$$

3. Função subtração própria: A subtração própria entre m e n define-se por:

$$m - n = \begin{cases} m - n & \text{se } m > n \\ 0 & \text{se } m \leq n \end{cases}$$

4 Função sinal:

$$sg(0) = 0$$
$$sg(s(n)) = 1$$

5 Função sinal inversa:

$$isg(0) = 1$$
$$isg(s(u)) = 0$$

6 Funções booleanas

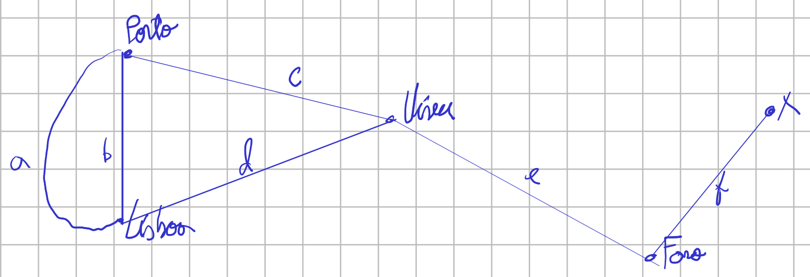
$$and(P, Q) = sg(P \times Q)$$
$$or(P, Q) = sg(P + Q)$$
$$not(P) = isg(P)$$

7 Função if: A função if é dada por:

$$if(u, y, z) = \begin{cases} y & \text{se } u > 0 \\ z & \text{se } u = 0 \end{cases}$$

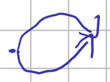
Logo: $if(u, y, z) = (y \times sg(u)) + (z \times isg(u))$

Capítulo V —— Grafos



Arestas Paralelas

Arestas sem seta (→)



Vertice adjacente: Ligado por 1 aresta

Vertice isolado: Não é ligado por 1 aresta

Grafo dirigido: Todas as arestas têm seta (→)

Grafo não dirigido: As arestas não têm seta (→)

Grafo misto: tem arestas com e sem seta (→)

Grafo simples: Grafo sem arestas paralelas e sem lacetes

Multigrafo: $G=(V,E,f)$

Num Grafo sem arestas paralelas, basta considerar $G=(V,E)$

Exemplo

$G=(V,E)$ com $V=\{u,v,w\}$ e $E=\{\{u,v\},\{u,w\}\}$

Nos Grafos dirigidos

Grau fora do nodo v: nº de arestas que têm v como nodo inicial.

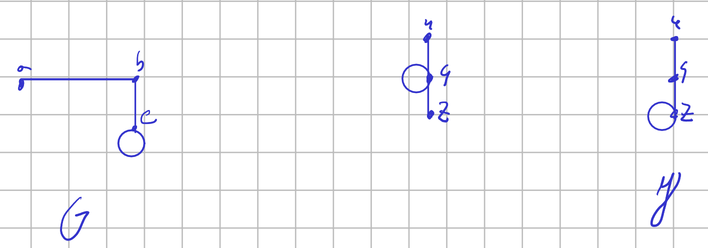
Grau dentro do nodo v: nº de arestas que têm v como nodo terminal.

Grau total do nodo v: Soma do grau de fora com o grau de dentro

Grafo bipartido: Um grafo diz-se bipartido se o seu conjunto de vertices V pode ser particionado em subconjuntos V_1 e V_2 tais que os vertices de V_1 não são adjacentes entre si e o mesmo acontece com os vertices de V_2

Grafos reflexivos, transitivos, simetricos e anti-simetricos

Isomorfismo de Grafos:



G e y são isomorfos esquecendo o nome dos vertices (ou das arestas) são o mesmo Grafo

Caminhos, ciclos e conectividade

Caminho: Sequencia de arestas em que o vertice terminal de cada aresta é o vertice inicial da aresta seguinte.

Caminho simples: Caminho sem repetição de arestas

Caminho elementar: Caminho sem repetição de vertices.

Ciclo: Ciclo que começa e acaba no mesmo vertice.

A **distancia** entre 2 vertices, V_1 e V_2, é o comprimento do caminho de comprimento minimo entre V_1 e V_2

P. 23/5/2023

9. Defina recursivamente o conjunto $\mathcal{L}$ de todas as *strings* sobre $B = \{0, 1\}$ que alternam 0's e 1's, como acontece, por exemplo, nas *strings* Λ, 0, 1, 01, 10, 010, 1010, 01010, ...

1) $\Lambda \in \mathcal{L}_0$

2) Se $S \in \mathcal{L}$, 1º elemento de A é 0 então $1A \in \mathcal{L}_0$

Caso contrário, $0A \in \mathcal{L}$

4. Determine $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$ para $f(n)$ definida recursivamente por $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ e, para $n = 1, 2, ...,$

(a) $f(n+1) = f(n) + 3f(n-1)$;

(b) $f(n+1) = f(n)^2 f(n-1)$;

(c) $f(n+1) = f(n-1)/f(n)$.

a)

$f(2) = f(1) + 3f(0) \Leftrightarrow f(2) = 2 + 3\times(-1) \Leftrightarrow f(2) = -1$

$f(3) = f(2) + 3f(1) \Leftrightarrow f(3) = -1 + (3\times 2) = 5$

$f(4) = f(3) + 3f(2) \Leftrightarrow f(4) = 5 + 3\times(-1) = 2$

$f(5) = f(4) + 3f(3) \Leftrightarrow f(5) = 17$

b) $f(2) = f(1)^2 \times f(0) = 4\times(-1) = -4$

$f(3) = f(2)^2 \times f(1) = 16 \times 2 = 32$

$f(4) = f(3)^2 \times f(2) = -2^{12}$

$f(5) = f(4)^2 \times f(3) = 2^{29}$

c)

$f(2) = f(0)/f(1) = \frac{-1}{2} = -0{,}5$

$f(3) = f(1)/f(2) = \frac{1}{-0{,}5} = -4$

$f(4) = f(2)/f(3) = \frac{1}{8}$

$f(5) = f(3)/f(4) = -32$

6. Dê uma definição recursiva da sucessão (a_n), $n = 1, 2, ...$, se

(a) $a_n = 6n$; (b) $a_n = 1 + (-1)^n$; (c) $a_n = n(n+1)$; (d) $a_n = n^2$.

b) $a_n = 1 + (-1)^n$

$a_0 = 2$

$a_1 = 0$

$a_2 = 2$

$a_3 = 0$

$a_4 = 2$

$2 \longrightarrow 0$

$0 \longrightarrow 2$

$2 + 2(-1)^m = 0$

$0 + 2(-1)^m = 2$

Resposta: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2(-1)^{n+1} \end{cases}$

Se n par:

$a_n = 2$

$a_{n+1} = 2 + 2(-1)^{n+1} = a_n + 2(-1)^{n+1}$

Se n é ímpar: $a_n = 0$

$a_{n+1} = 0 + 2(-1)^{n+1} = a_n + 2(-1)^{n+1}$

10. Os números de Fibonacci, $f_0, f_1, f_2, ...$, definem-se por

$$f_0 = 0;\ f_1 = 1;\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n = 2, 3, 4, ...$$

(a) Calcule os números de Fibonacci f_2, f_3, f_4 e f_5.

(b) Prove que $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

(c) Prove que $f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$ para todo $n \geq 1$.

(d) (*) Prove que $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ para todo $n \geq 1$.

a)

$f(2) = f(1) + f(0) = 1 + 0 = 1$

$f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2$

$f(4) = f(3) + f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(5) = f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5$

b)

BI. $n = 1$

$f(1)^2 = f(1) f(2) \Leftrightarrow 1^2 = 1 \times 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ ✓

PI Supomos que

$f(1)^2 + f(2)^2 + \dots + f(n)^2 = f(n) f(n+1)$

Queremos mostrar que:

$f(1)^2 + f(2)^2 + \dots + f(n)^2 + f(n+1)^2 = f(n+1) \times f(n+2)$

$\underbrace{f(1)^2 + f(2)^2 + \dots + f(n)^2}_{f(n) \times f(n+1)} + f(n+1)^2 = \underbrace{f(n) \times f(n+1) + f(n+1)^2}$ por HI

$$f(n) \times f(n+1) + f(n+1)^2 = f(n) \times f(n+1) + f(n+1) \times f(n+1)$$

$$= f(n+1)\left[f(n) + f(n+1)\right]$$

$$= f(n+1)\left[f(n+2)\right]$$

2. Use indução matemática para provar que todo o $n \geq 0$ verifica a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\ .$$

$0 = 1 - \frac{1}{1} \Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

Por definição de somatório

PI Supomos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad (HI)$$

Queremos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}.$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{n+2}{(n+2)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 + \frac{-(n+2)+(n+1)}{(n+2)!} = \frac{1+ -n-2+n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

10. (a) Represente graficamente as árvores binárias $A = ((b), a, ((a), b, (a)))$ e $B = (((a), b, (a)), b, ((b), b, (b)))$.

(b) Defina recursivamente árvore binária sobre um conjunto X.

(c) Seja $\mathcal{T}$ o conjunto das árvores binárias sobre o conjunto $\{0, 1\}$ definidas recursivamente por:

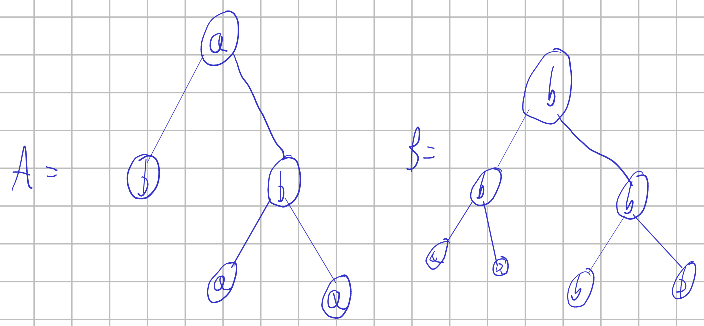
1. (0) e (1) pertencem a $\mathcal{T}$.
2. Se A é uma árvore em $\mathcal{T}$ de raiz 0 e B é uma árvore em $\mathcal{T}$ de raiz 1, então $(A, 0, B)$ e $(B, 1, A)$ pertencem a $\mathcal{T}$.

Representе todas as árvores de $\mathcal{T}$ de altura menor ou igual a 3.

(d) Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todas as árvores binárias não vazias sobre o conjunto $\{a, b\}$ tais que cada vértice com filhos tem dois filhos iguais (como acontece, por exemplo, com as árvores A e B da alínea (a)). Dê uma definição recursiva de $\mathcal{U}$.

1)

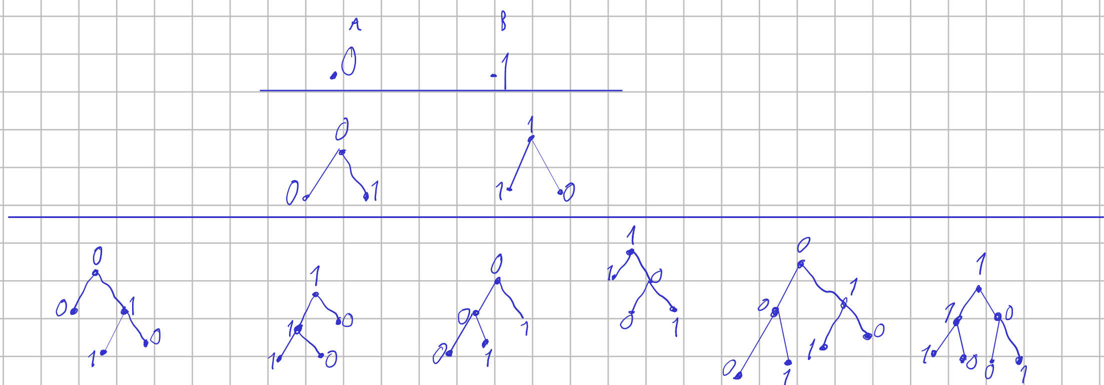
a)



c)

1. (0) e $(1) \in \mathcal{T}$

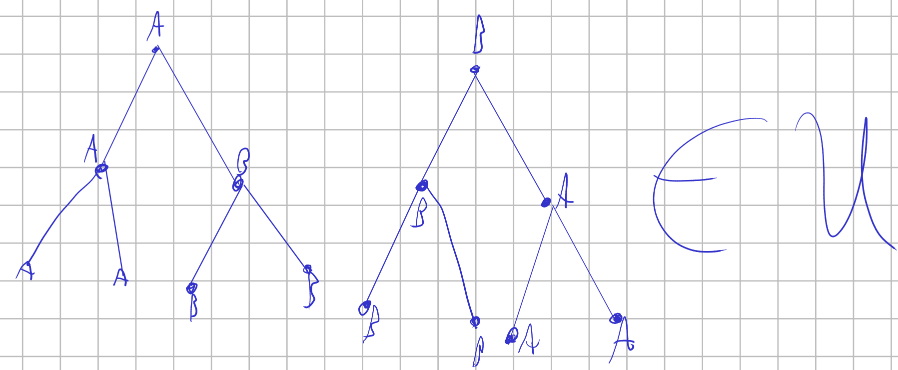
2. $A \in \mathcal{T}$ de raiz 0 e $B \in \mathcal{T}$ de raiz 1 então $(A,0,B)$ e $(B,1,A) \in \mathcal{T}$



d)

$\mathcal{U}$e

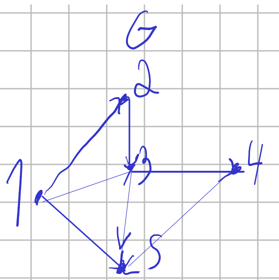
$\{a,b\}$



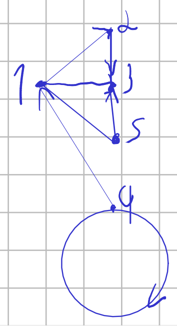
1) (a), (b) ∈ Ue

2) Se A ∈ Ue e tem Raiz a e B ∈ Ue e tem Raiz b então (A,a,A), (B,a,B), (A,b,A), (B,b,B) ∈ Ue

1. Desenhe o grafo $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$. Determine o conjunto $W = \{i \,|\, i$ é um vértice tal que i e 2 são adjacentes$\}$.

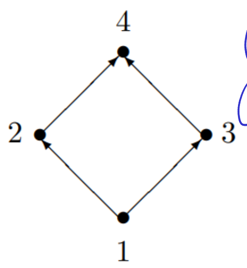


2. Desenhe o grafo dirigido $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3$
$(5, 1), (5, 3), (4, 1), (4, 4)\}$.



6. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que os dois grafos dados são

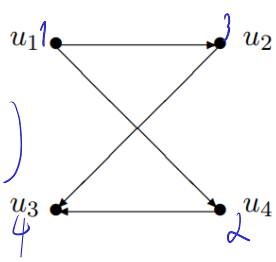
(a)



G

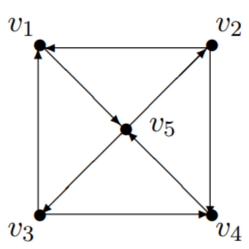
(1,2) (1,3) (2,4) (3,4)

(u_1, u_4) (u_1, u_2) (u_4, u_3) (u_2, u_3)

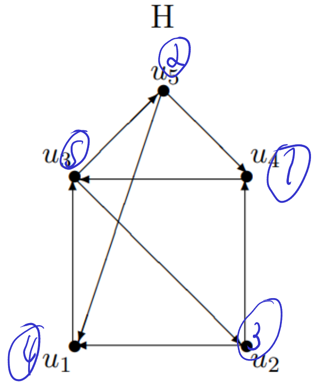


H

(b)



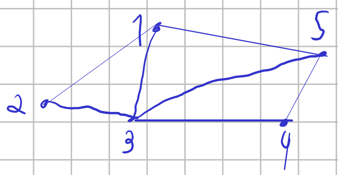
K



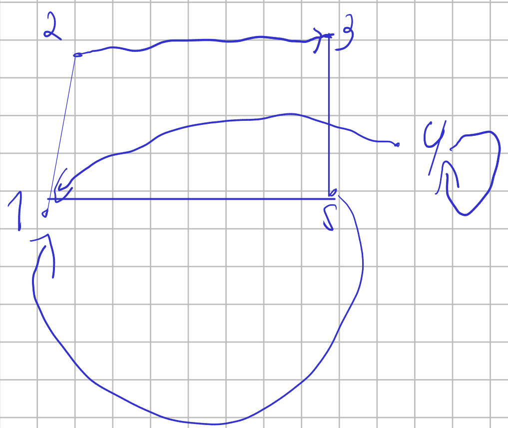
L

P – 25/5/2023

1. Desenhe o grafo $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$. Determine o conjunto $W = \{i \,|\, i$ é um vértice tal que i e 2 são adjacentes$\}$.

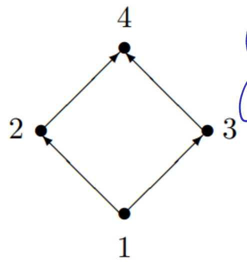


2. Desenhe o grafo dirigido $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (5, 1), (5, 3), (4, 1), (4, 4)\}$.



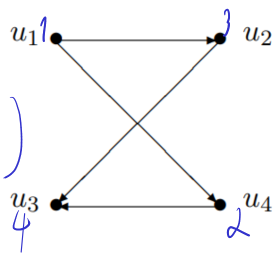
6. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que os dois grafos dados são

(a)



(1,2) (1,3) (2,4) (3,4)

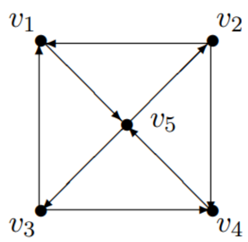
(u_1, u_4) (u_1, u_2) (u_4, u_3) (u_2, u_3)

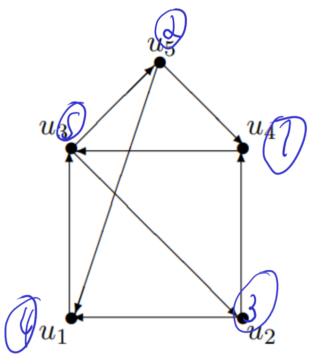


G

H

(b)

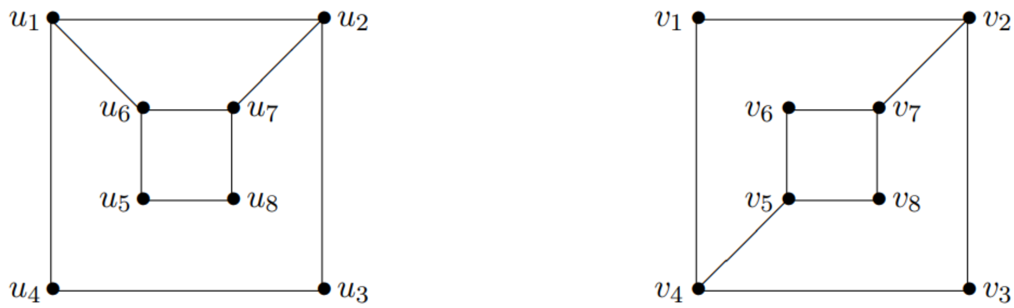




K

L

10. Mostre que os grafos seguintes não são isomorfos.

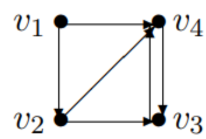


grau$(u1) = 3$ grau$(v1) = 2$
grau$(u2) = 3$ grau$(v2) = 3$
grau$(u3) = 2$ grau$(v3) = 2$
grau$(u4) = 2$ grau$(v4) = 3$
grau$(u5) = 2$ grau$(v5) = 3$
grau$(u6) = 3$ grau$(v6) = 2$
grau$(u7) = 3$ grau$(v7) = 3$
grau$(u8) = 2$ grau$(v8) = 2$

$u1 \rightarrow$
$u2 \rightarrow$
$u3 \rightarrow$
$u4 \rightarrow$
$u5 \rightarrow$ $v5$
$u6 \rightarrow$
$u7 \rightarrow$
$u8 \rightarrow$

Por exemplo, utilizando a noção de grau de um vértice:
Na função bijetiva, a u4 (grau 2) terá de corresponder um vértice com o mesmo grau: v1, v6, v8 ou v3
Mas, u4 liga com 2 vértices de grau 2 (u3) e 3 (u1) e todos os outros ligam com vértice grau 3.
Logo Não é Possível estabelecer um isomorfismo.

1. Indique três caminhos elementares distintos de v_1 para v_3 no digrafo



$\langle v1, v4, v3 \rangle$
$\langle v1, v2, v3 \rangle$
$\langle v1, v2, v4, v3 \rangle$

Qual a distância entre v_1 e v_3? Existe algum ciclo no grafo? O digrafo é transitivo?

$d(v_1, v_3) = 2$

Ciclo: (v_4, v_3, v_4)

É transitivo?

$\{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$

(v_1, v_2) e (v_2, v_3) são arestas do grafo e (v_1, v_3) não é, logo não é transitivo.

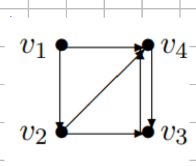
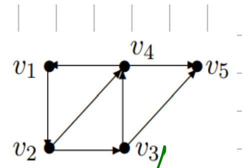
Nota: Um digrafo diz-se:

1) fracamente conexo se o grafo não dirigido obtido do grafo inicial é conexo.

2) unilateralmente conexo se para cada par de vértices do grafo pelo menos 1 dos vértices é atingível pelo outro.

3) fortemente conexo se para cada par de vértices cada um dos vértices é atingível pelo outro.

4. Para cada um dos digrafos dos exercícios 1 e 2, determine se são fortemente, fracamente ou unilateralmente conexos.

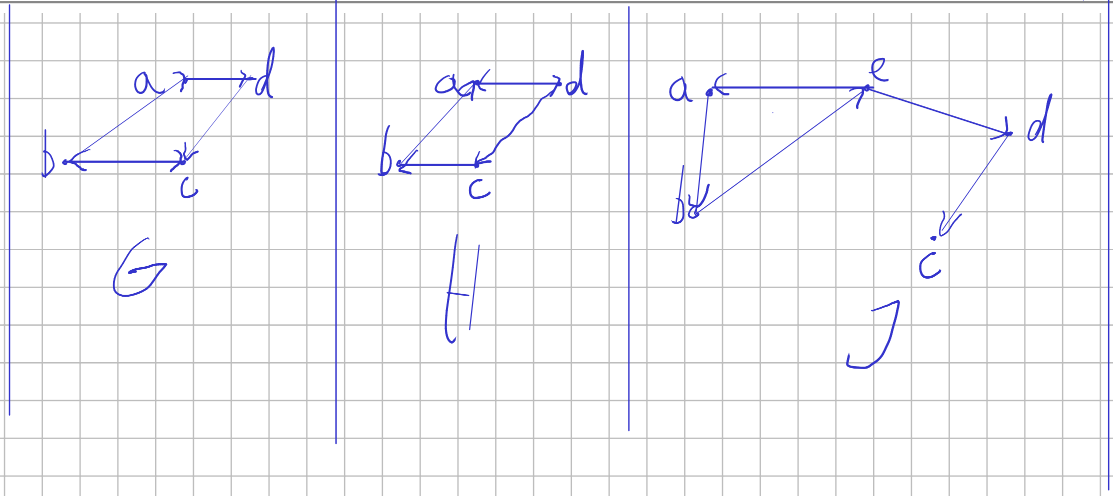
		
fracamente conexo	✓	✓
unilateralmente conexo	✓	✓
fortemente conexo	✗	✗

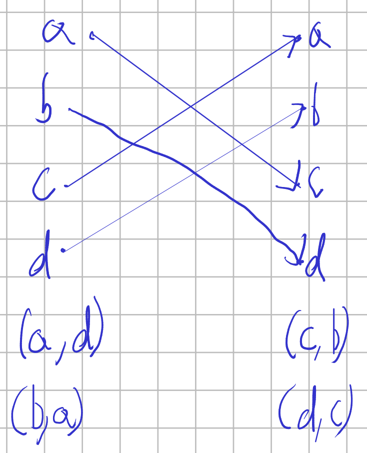
3. [1] Relativamente aos seguintes grafos dirigidos, indique a afirmação correta:

$G = (\{a,b,c,d\}, \{(a,d), (b,a), (b,c), (c,b), (d,c)\})$
$H = (\{a,b,c,d\}, \{(a,d), (b,a), (c,b), (d,a), (d,c)\})$
$J = (\{a,b,c,d,e\}, \{(a,b), (b,e), (d,c), (e,a), (e,d)\})$

(g) G e H são isomorfos mas não são unilateralmente conexos; J é fortemente conexo.
(h) G e H são isomorfos e unilateralmente conexos; J é fortemente conexo.
(i) G e H são isomorfos e são fortemente conexos; J é unilateralmente conexo.
(j) G e H são isomorfos e são fortemente conexos; J não é unilateralmente conexo.
(k) G e H não são isomorfos mas são ambos unilateralmente conexos; J é fortemente conexo.
(l) G e H não são isomorfos mas são ambos fortemente conexos; J é unilateralmente conexo.
(m) G é fortemente conexo, H e J não são isomorfos; mas são ambos unilateralmente conexos.
(n) G é unilateralmente conexo; H e J não são isomorfos, mas são ambos fortemente conexos.
(o) Nenhuma das anteriores.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
								X																	



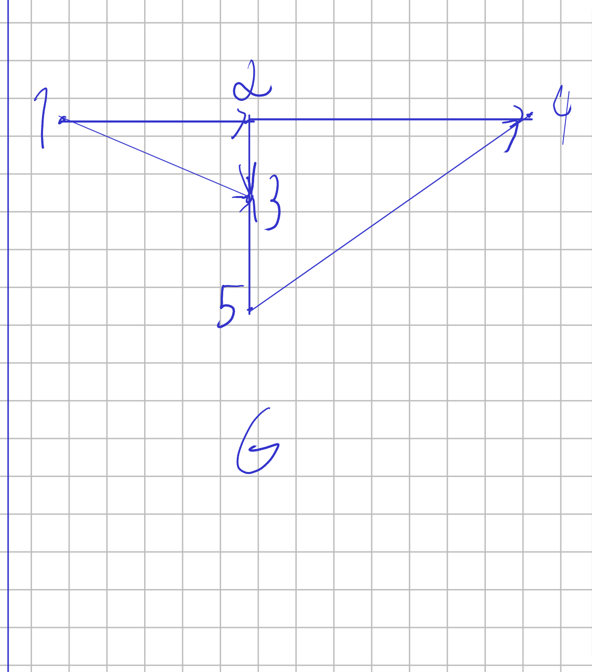


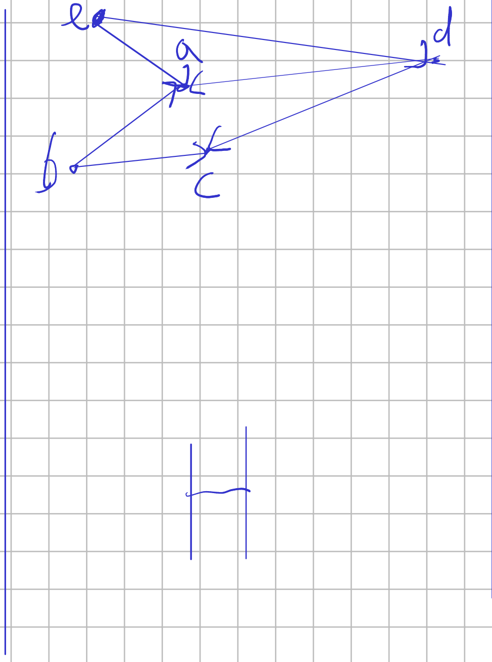
6. [0.8] Relativamente aos seguintes grafos dirigidos, indique a afirmação correta:

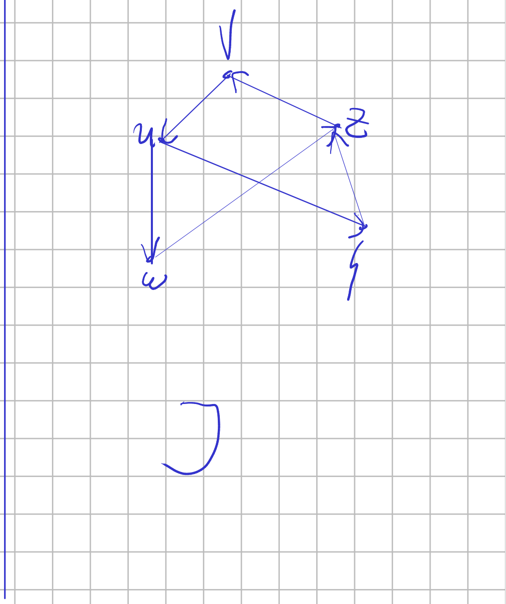
$G = (\{1,2,3,4,5\}, \{(1,2), (1,3), (2,4), (2,3), (5,3), (5,4)\})$
$H = (\{a,b,c,d,e\}, \{(b,a), (b,c), (d,a), (d,c), (e,a), (e,d)\})$
$J = (\{v,w,x,y,z\}, \{(v,x), (w,z), (x,w), (x,y), (y,z), (z,v)\})$

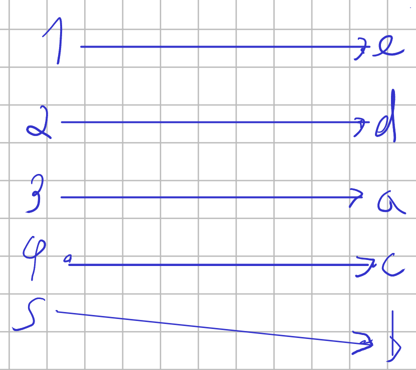
(j) Nenhum dos grafos é isomorfo a um dos outros e os três grafos são unilateralmente conexos.
(k) G e H são isomorfos e unilateralmente conexos sem serem fortemente conexos; J é fortemente conexo.
(l) G e J são isomorfos e os três grafos são unilateralmente conexos.
(m) Nenhum dos grafos é isomorfo a um dos outros; J e G são unilateralmente conexos sem serem fortemente conexos, e H não é unilateralmente conexo.
(n) Nenhum dos grafos é isomorfo a um dos outros; J é fortemente conexo, G é unilateralmente conexo e H não é unilateralmente conexo.
(o) G e H são isomorfos e não são unilateralmente conexos, J é fortemente conexo.
(p) G e H são isomorfos e os três grafos são fortemente conexos.
(q) Os três grafos são isomorfos e não são unilateralmente conexos.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
														X											







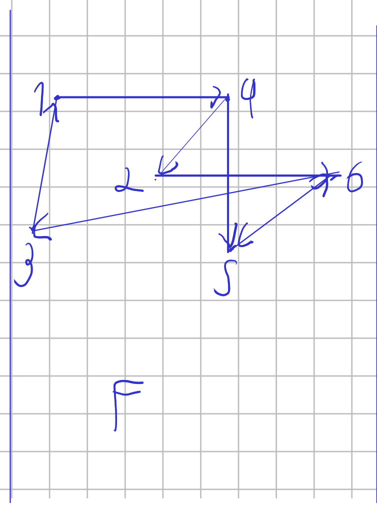


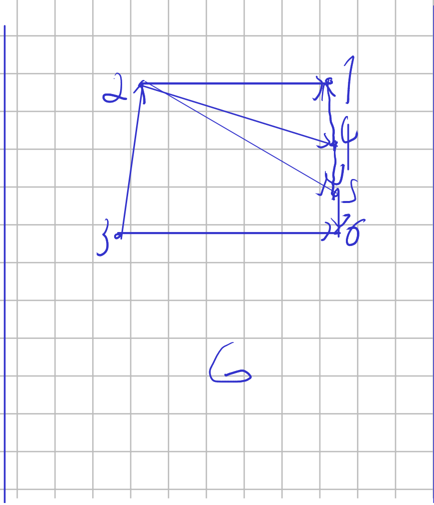
5. [0.7] Relativamente aos seguintes grafos dirigidos, indique a afirmação correta:

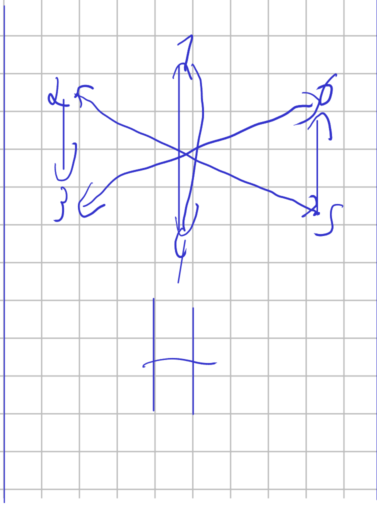
$F = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{(1,4), (2,6), (3,1), (4,2), (4,5), (5,6), (6,3), (6,5)\})$
$G = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{(2,1), (2,4), (2,5), (3,2), (3,6), (4,1), (4,5), (5,6)\})$
$H = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{(1,4), (2,3), (2,5), (3,6), (4,1), (5,2), (5,6), (6,3)\})$

(j) G e H são isomorfos e são unilateralmente conexos, F é fortemente conexo.
(k) F e H são isomorfos e são unilateralmente conexos, G não é unilateralmente conexo.
(l) F e G são isomorfos e são unilateralmente conexos, H é fracamente conexo.
(m) F e G não são isomorfos mas são unilateralmente conexos, H é fracamente conexo.
(n) F é fortemente conexo, G é fracamente conexo, H não é fracamente conexo.
(o) F é fortemente conexo, G é unilateralmente conexo, H não é fracamente conexo.
(p) Nenhum dos grafos é isomorfo a um dos outros, mas todos são unilateralmente conexos.
(q) Nenhuma das situações anteriores.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
																X									







1 - 29/5/2023

Ciclo: Caminho não trivial que começa e acaba no mesmo vértice

Ciclo Simples: nenhum dos arestas do ciclo aparece mais que uma vez

Ciclo Elementar:

Seja G um digrafo simples. Se u e v são 2 vértices de G dizemos que v é **atingível** por u se v = u ou se existir algum caminho de u pra v

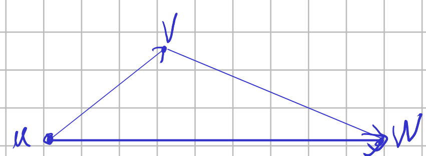
Exercício

Dê um exemplo que mostre que

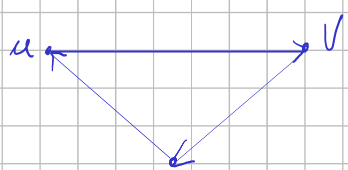
a) se pode ter $d(u,v) + d(v,w) > d(u,w)$

b) Se pode ter $d(u,v) \neq d(v,u)$

a)



b)



Observação:

Para grafos não dirigidos, (a) análogo, porém, (b) temos sempre que $d(u,v) = d(v,u)$

Teorema:

Num digrafo simples, o comprimento de cada caminho elementar é menor ou igual a $n-1$, onde n é o número de vértices do grafo. Analogamente o comprimento de cada ciclo elementar pertence a n

Um grafo não dirigido diz-se acíclico se não tiver ciclos simples (ou circuitos)

Ao contrário dos grafos dirigidos, os grafos não dirigidos pode ter ciclos, sem ter ciclos simples

Um grafo não dirigido diz-se conexo se não for vazio e cada dois vértices do grafo podem ser ligados por 1 caminho

A noção de conexidade induz uma partição num grafo

$G = (V, G)$ grafo

considera-se em V a relação $\mathcal{C}$ definida por:

$u \mathcal{C} v$ só e só se existe um caminho de u para v

Se G é não dirigido, a relação $\mathcal{C}$ em V é reflexiva, simétrica e transitiva.

Se G é dirigido, a relação $\mathcal{C}$ em V é reflexiva e transitiva.

Dizemos que um grafo é conexo (ou fracamente conexo) se o grafo não dirigido obtido desse digrafo considerando todos ...

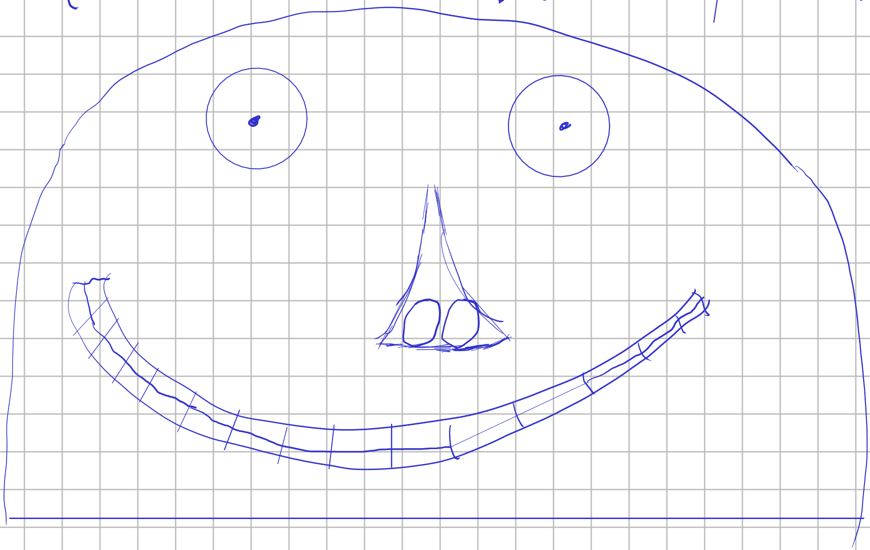
Um digrafo simples não vazio diz-se unilateralmente conexo se para cada par de vértices do grafo pelo menos 1 dos vértices do par é atingível pelo outro

Se para cada par de vértices cada 1 dos vértices é atingível pelo outro dizemos que o grafo é fortemente conexo

Teorema: Um digrafo

(1) é fortemente conexo SSe tiver um ciclo que contém os vértices todos.

(2) é unilateralmente conexo SSe tiver um caminho que contém todos os vértices.



Ciclos de Euler:

Teorema (Euler, 1736): Um grafo G tem um ciclo de Euler se e só se for conexo e os vértices tiverem grau par.

Matriz das adjacências

A Matriz das adjacências de um grafo não dirigido é sempre simétrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$