

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Ижевский государственный технический университет"

УТВЕРЖДАЮ

Ректор

_____ И.В. Абрамов

" ____ " _____ 200__г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторной работы
по дисциплине "Вычислительная математика"
на тему "Интерполяция" (теория и варианты заданий)
для студентов специальностей
220200 Автоматизированные системы обработки информации и управления,
220300 Системы автоматизированного проектирования,
направления 552800 Информатика и вычислительная техника
Форма обучения очная и заочная

Ижевск 2004

Кафедра "Автоматизированные системы обработки информации и управления".

Составитель: Исенбаева Е.Н., ст. преподаватель.

Методические указания составлены на основании государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и утверждены на заседании кафедры

Протокол от " ____ " _____ 200__ г. № ____.

Заведующий кафедрой _____ В.Н. Кучуганов

" ____ " _____ 200__ г.

СОГЛАСОВАНО:

Председатель учебно-методической комиссии
по специальности _____

_____ В.Н. Кучуганов

" ____ " _____ 200__ г.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы по дисциплине "Вычислительная математика" студентами специальностей 220300 Системы автоматизированного проектирования, 220200 Автоматизированные системы обработки информации и управления, направления 552800 Информатика и вычислительная техника.

Начальник учебно-инженерного отдела _____ А.М. Ефимова

" ____ " _____ 200__ г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ.....	5
2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА.....	6
3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ СХЕМА ЭЙТКЕНА.....	7
4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ "ИНТЕРПОЛЯЦИЯ"	11
5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ.....	12
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	12

ВВЕДЕНИЕ

Данные методического указания предназначены для использования студентами при выполнении лабораторной работы на тему "Интерполяция". В пособии дается постановка задачи аппроксимации функции одной переменной, определяется решающий эту задачу интерполяционный многочлен Лагранжа, рассматривается итерационный принцип вычисления промежуточных значений таблично заданных (сеточных) функций с помощью лагранжевой интерполяции, известной как интерполяционная схема Эйткена.

В работе приведены варианты заданий на лабораторную работу.

Выполняя лабораторную работу "Интерполяция", студент должен научиться строить аппроксимирующую функцию по заданной аппроксимируемой функции и применять полученные навыки при выполнении курсовых работ и дипломного проекта.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы $n+1$ точки x_0, x_1, \dots, x_n , которые называются узлами интерполяции, и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках

$$f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \dots, f(x_n)=y_n \quad (1.1)$$

Геометрическая интерпретация задачи интерполирования

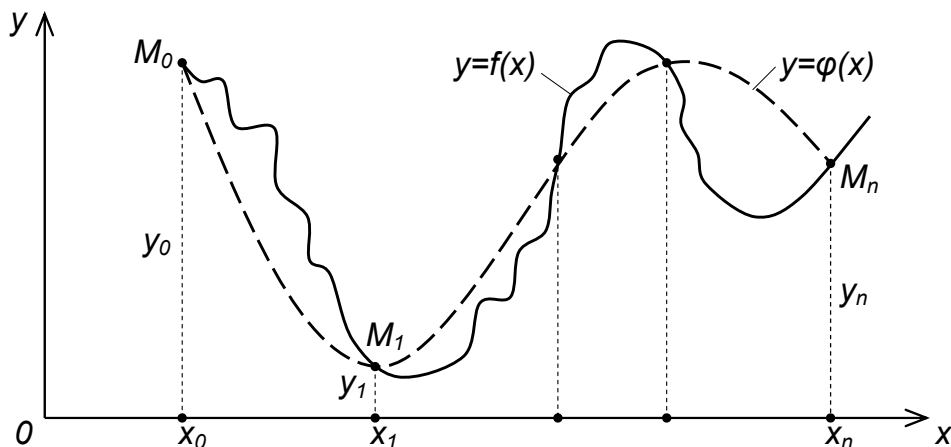


Рис. 1.1

Требуется построить функцию $\varphi(x)$ близкую к $f(x)$ и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т.е. такую, что

$$\varphi(x_0)=y_0, \varphi(x_1)=y_1, \dots, \varphi(x_n)=y_n. \quad (1.2)$$

Функция $\varphi(x)$ должна обладать "хорошими" свойствами, позволяющими легко производить над ней те или иные аналитические или вычислительные операции. Функцию $\varphi(x)$ будем называть интерполирующей функцией. Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y=\varphi(x)$, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) (рис. 1.1).

В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений или совсем не иметь решений. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $\varphi(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям (1.2), т.е. такой, что $P_n(x_0)=y_0, P_n(x_1)=y_1, \dots, P_n(x_n)=y_n$. В этом случае будем говорить о полиномиальной аппроксимации. Для вычислительной математики многочлены привлекательны тем, что они являются линейными функциями своих параметров (коэффициентов), и их вычисления сводятся к выполнению конечного числа простейших арифметических операций — сложения и умножения.

Полученную интерполяционную формулу $y=\varphi(x)$ обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции $f(x)$ для значений аргумента x , отличных от узлов интерполирования. Такая операция называется интерполированием функции $f(x)$. При этом различают интерполирование в узком смысле, когда $x \in [x_0, x_n]$, и экстраполирование, когда $x \notin [x_0, x_n]$. В дальнейшем

под термином интерполирование будем понимать как первую, так и вторую операцию.

2. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Интерполяционная формула Лагранжа используется для произвольно заданных узлов интерполирования.

Пусть в точках x_0, x_1, \dots, x_n таких, что $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$, известны значения функции $y=f(x)$, т.е. на отрезке $[a, b]$ задана табличная (сеточная) функция

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

$f(x)$:

(2.1)

Требуется построить полином $L_n(x)$ степени не выше n , имеющий в заданных узлах x_0, x_1, \dots, x_n те же значения, что и функция $f(x)$, т.е. такой, что

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, 2, \dots, n).$$

Будем строить многочлен n -ой степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации

$\sum_{i=0}^n c_i l_i(x)$ многочленов n -й же степени $l_i(x)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$). Индекс i показывает номер многочлена.

Для того чтобы этот многочлен был интерполяционным для функции $f(x)$, достаточно зафиксировать в качестве коэффициентов c_i этой линейной комбинации заданные в табл. (2.1) значения $y_i=f(x_i)$, а от базисных многочленов $l_i(x)$ потребовать выполнения условия

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases} \quad (2.2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

В этом случае для многочлена

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \text{ в каждом узле } x_j \text{ (} j \in \{0, 1, \dots, n\} \text{), в силу (2.2), справедливо}$$

ливо

$$L_n(x_j) = l_0(x_j)y_0 + \dots + l_{j-1}(x_j)y_{j-1} + l_j(x_j)y_j + l_{j+1}(x_j)y_{j+1} + \dots + l_n(x_j)y_n = 0 + \dots + 0 + y_j + 0 + \dots + 0 = y_j$$

Чтобы конкретизировать базисные многочлены $l_i(x)$, учтем, что они должны удовлетворять условиям (2.2). Равенство нулю i -го многочлена во всех узлах, кроме i -го, означает, что $l_i(x)$ можно записать в виде

$$l_i(x) = A_i(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n),$$

а коэффициент A_i этого представления легко получается из содержащегося в (2.2) требования $l_i(x_i) = 1$. Подставляя в выражение $l_i(x)$ значение $x=x_i$ и приравнявая результат единице, получаем:

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Таким образом, базисные многочлены Лагранжа имеют вид:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)},$$

а искомым интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i \quad (2.3)$$

Пример. Построить интерполяционный полином для функции $y=\sin x$.

Возьмем сетку, состоящую из трех точек: $x_0=0$; $x_1=\frac{\pi}{6}$; $x_2=\frac{\pi}{2}$, выпишем соот-

ветствующие этим аргументам значения функции $\sin x$: $y_0=0$; $y_1=\frac{1}{2}$; $y_2=1$.

Построим по этой таблице интерполяционный полином второй степени. По формуле Лагранжа (2.3):

$$L_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{2})}{(-\frac{\pi}{6})(-\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x-\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{6} \cdot (-\frac{\pi}{3})} + 1 \cdot \frac{x(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{3}} = \frac{7}{2\pi}x - \frac{3}{\pi^2}x^2.$$

Легко проверить, что в точках сетки этот полином принимает нужные значения. Чтобы получить представление о погрешности интерполирования, сравнивая значения $\sin x$ и интерполяционного полинома в точке $x=\frac{\pi}{4}$.

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707107,$$

$$L_2(\frac{\pi}{4}) = \frac{11}{16} = 0,6875,$$

$$\varepsilon = \sin \frac{\pi}{4} - L_2(\frac{\pi}{4}) = 0,019607 \approx 0,02.$$

Значительная величина погрешности определяется тем, что на отрезке длиной $\frac{\pi}{2}$ мы взяли грубую сетку, состоящую всего из трех точек. Чтобы улучшить точность интерполирования, нужно либо увеличить число точек n и повысить соответственно степень интерполяционного полинома $L_n(x)$, либо уменьшить длину исходного отрезка.

3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ СХЕМА ЭЙТКЕНА

Пусть функция $f(x)$ и расположение узлов x_0, x_1, \dots, x_n на отрезке интерполяции $[a, b]$ таковы, что имеет место сходимостъ процесса интерполяции, т.е. $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть требуется найти не общее выражение $L_n(x)$, а лишь его значения при конкретных x , т.е. решается частная задача вычисления отдельных приближенных значений функции $f(x)$ с помощью вычисления соответствующих им значений интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$. Для

построения эффективного способа решения такой частной задачи интерполяции учтем следующее:

- 1) использование многочлена Лагранжа в виде (2.3) неудобно из-за его громоздкости, что ведет к большим вычислительным затратам;
- 2) заранее не известно, многочлены какой степени нужно использовать для интерполирования данной функции с требуемой точностью. А постепенное улучшение точности за счет вычислений $L_n(x)$ с большим показателем степени n невыгодно, т.к. $L_{n-1}(x)$ плохо перестраивается в $L_n(x)$;
- 3) функция $f(x)$ задается таблицей своих приближенных значений. Процесс сходимости $L_n(x)$ к $f(x)$ при больших значениях n будет нарушен влиянием на результат исходных ошибок.

Построим вычислительную схему для получения приближенного значения сеточной функции $f(x)$ в заданной точке $x = \tilde{x}$, в основу которой будет положена интерполяция Лагранжа на сетке узлов x_0, x_1, \dots, x_n . Организация вычислений по этой схеме будет иметь итерационный характер. Каждый шаг заключается в вычислении некоторого определителя второго порядка.

Пусть даны две точки на кривой $y=f(x)$: (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Построим функцию $P_{0,1}(x)$:

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

$$P_{0,1}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = L_1(x).$$

Т.е. $P_{0,1}(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени, построенным по двум данным точкам (сравните с 2.3).

Построим через определитель функцию $P_{1,2}(x)$ для точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$:

$$P_{1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} x - x_1 & y_1 \\ x - x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$P_{1,2}(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2.$$

Она тоже является многочленом Лагранжа первой степени, построенным по двум точкам (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Если на кривой $y=f(x)$ заданы три точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, то, используя введенные линейные функции $P_{0,1}(x)$ и $P_{1,2}(x)$ образуем новую функцию:

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & P_{0,1}(x) \\ x - x_2 & P_{1,2}(x) \end{vmatrix}.$$

Покажем, что эта функция есть многочлен второй степени. Учитывая, что

$$P_{0,1}(x_0) = P_{1,2}(x_1) = y_0,$$

$$P_{0,1}(x_1) = y_1, \quad P_{1,2}(x_2) = y_2,$$

подставляя в $P_{0,1,2}(x)$ поочередно значения $x=x_0, x_1, x_2$, получим:

$$P_{0,1,2}(x_0) = y_0; \quad P_{0,1,2}(x_1) = y_1; \quad P_{0,1,2}(x_2) = y_2.$$

Т.о., функция $P_{0,1,2}(x)$ – это многочлен второй степени, решающий задачу параболической интерполяции по трем точкам (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Но такой многочлен единственный, следовательно, $P_{0,1,2}(x)=L_2(x)$, где $L_2(x)$ – многочлен Лагранжа.

Продолжая процесс рассуждения, получим рекуррентное задание последовательности интерполяционных многочленов Лагранжа, которое составляет суть интерполяционной схемы Эйткена:

$$f(x) \approx P_{0,1,\dots,i}(x) = \frac{1}{x_i - x_0} \begin{vmatrix} x - x_0 & P_{0,1,\dots,i-1}(x) \\ x - x_i & P_{1,2,\dots,i}(x) \end{vmatrix}, \quad (3.1)$$

где $i=1, 2, \dots, n$ и по определению $P_0(x)=y_0$, $P_1(x)=y_1$.

Схема Эйткена легко реализуется на ЭВМ. Организация вычислений по формуле (3.1) должна быть такова, что если заранее неизвестна степень интерполяционного многочлена, который нужно использовать для вычисления $y(x)$, то должно происходить постепенное повышение степени k интерполирующих ее многочленов за счет подключения новых узлов. Счет ведется до тех пор, пока идет уточнение приближенного значения $y(x)$.

Об этом можно судить по уменьшению величины $|P_{i, i+k-1}(x)-P_{i, i+k}(x)|$ при увеличении k и подходящем фиксировании i .

Пример. Пусть некоторая функция $y=y(x)$ задана таблицей своих значений, округленных до двух знаков после запятой:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
y_i	1.00	1.02	1.08	1.12	1.34	1.54	1.81	2.15

Рассмотрим процесс вычисления двух значений этой функции по схеме Эйткена в точках: а) $\tilde{x} = 0.1$; б) $\tilde{x} = 0.25$. Результаты промежуточных вычислений (в которых один знак запасной) сведем в табл. 3.1, 3.2. Числа в столбцах, помеченных посредством $P_{i,i+k}(\tilde{x})$, представляют собой значения многочленов Лагранжа k -ой степени, построенных по узлам от i -го до $(i+k)$ -го рекуррентно по формуле:

$$P_{i,i+k}(\tilde{x}) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \begin{vmatrix} \tilde{x} - x_i & P_{i,i+k-1}(\tilde{x}) \\ \tilde{x} - x_{i+k} & P_{i+1,i+k}(\tilde{x}) \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

где $k=1, 2, \dots$, $P_{i,j} := y_i$, в соответствии с интерполяционной схемой Эйткена. Порядок получения этих значений показан проставленными в каждой клетке номерами.

Таблица 3.1.

Вычисление по схеме Эйткена значения $y(0.1)$

i	x_i	y_i	$P_{i,i+1}(0.1)$	$P_{i,i+2}(0.1)$	$P_{i,i+3}(0.1)$	$P_{i,i+4}(0.1)$
0	0	1.00	$\boxed{1}$ 1.01	$\boxed{3}$ 1.005	$\boxed{6}$ 1.001	$\boxed{10}$ 0.991
1	0.2	1.02	$\boxed{2}$ 0.99	$\boxed{5}$ 0.983	$\boxed{9}$ 0.920	
2	0.4	1.08	$\boxed{4}$ 1.02	$\boxed{8}$ 1.358		
3	0.6	1.12	$\boxed{7}$ 0.57			
4	0.8	1.34				
5	1.0	1.54				
6	1.2	1.81		$y(0.1) \approx P_{0,3}(0.1) \approx 1.001$		
7	1.4	2.15				

Таблица 3.2

Вычисление по схеме Эйткена значения $y(0.25)$

i	x_i	y_i	$P_{i,i+1}(0.25)$	$P_{i,i+2}(0.25)$	$P_{i,i+3}(0.25)$	$P_{i,i+4}(0.25)$
0	0	1.00				
1	0.2	1.02	$\boxed{1}$ 1.035	$\boxed{3}$ 1.038	$\boxed{6}$ 1.048	
2	0.4	1.08	$\boxed{2}$ 1.050	$\boxed{5}$ 1.169		
3	0.6	1.12	$\boxed{4}$ 0.735			
4	0.8	1.34				
5	1.0	1.54				
6	1.2	1.81		$y(0.25) \approx P_{1,3}(0.25) \approx 1.038$		
7	1.4	2.15				

Процесс вычисления значений многочленов Лагранжа ведется до тех пор, пока идет уточнение приближенного значения $y(\tilde{x})$, т.е. уменьшается величина $\left| P_{i,i+k-1}(\tilde{x}) - P_{i,i+k}(\tilde{x}) \right|$ при увеличении k и подходящем фиксировании i .

Например, для подсчета приближенного значения данной функции в точке $\tilde{x} = 0.1$, расположенной между узлами $x_0 = 0.0$ и $x_1 = 0.2$, целесообразно в качестве основной последовательности значений многочленов Лагранжа брать строку таблицы 3.1, соответствующую значению $i=0$, т.е. числа $P_{0,1}(0.1) = 1.010 = L_1(0.1)$, $P_{0,2}(0.1) = 1.005 = L_2(0.1)$ и т.д.

Вычислив разности между последующими и предыдущими числами этой строки, а именно:

0.005 0.004 0.010,

видим, что дальнейший счет бессмыслен; разность перестала уменьшаться. Т.е. по данной информации о функции $y(x)$ более точное значение $y(0.1)$, чем $y(0.1)=1.001$, получаемое с помощью $L_3(0.1)$, найти не удастся.

В случае б) вычисление по схеме Эйткена дает следующий результат: $y(0.25) \approx 1.038$, полученный с помощью $L_3(0.25)$.

4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ "ИНТЕРПОЛЯЦИЯ"

Функция $y=f(x)$ задана таблицей значений:

Вариант	x	5	10	15	20	25	30	35	40
1	y	2,236	3,162	3,873	4,472	5,000	5,477	5,916	6,325
2	y	1,710	2,154	2,466	2,714	2,924	3,107	3,271	3,420
3	y	7,071	10,000	12,247	14,142	15,811	17,321	18,708	20,000
4	y	3,684	4,642	5,313	5,848	6,300	6,694	7,047	7,368
5	y	7,937	10,000	11,447	12,599	13,572	14,422	15,183	15,874
6	y	0,200	0,100	0,067	0,050	0,040	0,033	0,029	0,025
7	y	19,635	78,540	176,720	314,160	490,870	706,860	962,100	1256,600
8	y	15,710	31,420	47,120	62,830	78,540	94,250	109,960	125,700
9	y	1,609	2,303	2,708	2,996	3,219	3,401	3,555	3,689

Вариант	x	5^0	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0	40^0
10	y	0,087	0,174	0,259	0,342	0,423	0,500	0,534	0,643
11	y	0,996	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766
12	y	0,088	0,176	0,268	0,364	0,466	0,577	0,700	0,839

Указания. Для вариантов 10 – 12 значения аргумента x предварительно перевести из градусов в радианы.

Даны контрольные значения аргумента $x_1=12$; $x_2=26$; $x_3=42$.

1. Написать подходящие для приближенного вычисления значений $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $y_3=f(x_3)$ интерполяционные многочлены Лагранжа первой и второй степени. Получить эти значения.
2. Составить алгоритм и написать программу на языке высокого уровня, реализующую схему Эйткена вычисления с максимально возможной точностью значения $y=f(x)$ в произвольной точке x промежутка $[x_0, x_n+(x_n-x_{n-1})]$. Пользуясь этим алгоритмом, вычислить приближенные значения y_1, y_2, y_3 .
3. Сделать анализ результатов заданий 1, 2.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

В отчете по лабораторной работе должны быть представлены следующие разделы:

1. Постановка задачи.
2. Математическая модель.
3. Текст программы.
4. Результаты работы.
5. Выводы.

Лабораторная работа выполняется на любом языке высокого уровня.

Отчет по лабораторной работе, включая рукописный текст программы, без результатов работы, предварительно должен быть представлен преподавателю до выхода на компьютер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Высшая школа, 2000.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970.
3. Брадис В.М. Вычислительная работа в курсе математики средней школы. – М.: Изд. АПН РСФСР, 1962.