INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Dérivation des fonctions

Aimé Lachal

Cours de mathématiques
1$^{\text{er}}$ cycle, 1$^{\text{re}}$ année

Sommaire

1. Dérivabilité en un point
   - Nombre dérivé
   - Dérivabilité à gauche/à droite
   - Interprétation graphique
   - Fonctions à valeurs complexes
2. Dérivabilité sur un intervalle
   - Opérations
   - Dérivation d'une réciproque
   - Extremum d'une fonction
   - Théorème de Rolle
   - Théorème des accroissements finis
   - Dérivée et variations
   - Limite de la dérivée
3. Dérivation d'ordre supérieur
   - Dérivées successives
   - Classe $\mathcal{C}^n$
   - Opérations
4. Convexité d'une fonction
   - Fonctions convexes
   - Point d'inflexion
5. Compléments
   - Règle de L'Hospital

Sommaire

1. Dérivabilité en un point
   - Nombre dérivé
   - Dérivabilité à gauche/à droite
   - Interprétation graphique
   - Fonctions à valeurs complexes
2. Dérivabilité sur un intervalle
3. Dérivation d'ordre supérieur
4. Convexité d'une fonction
5. Compléments

Dans ce qui suit, sauf indication contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.

Définition 1.1 (Dérivabilité)

- *Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, on appelle* ***taux d'accroissement de f entre x_0 et x*** *le rapport* $\tau_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- *On dit que f est* ***dérivable en x_0*** *si l'application τ_{x_0} admet une limite* ***finie*** *en x_0. On note alors cette limite* $\mathbf{f'(x_0)}$ *et on l'appelle le* ***nombre dérivé de f en x_0 :***

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si x_0 est une borne de l'intervalle I, la limite de τ_{x_0} en x_0 est supposée être une limite à gauche ou une limite à droite selon le cas de figure.

Corollaire 1.2 (Dérivabilité $\Longrightarrow$ continuité)

*Si une fonction f est **dérivable** en x_0 alors f est **continue** en x_0.*

*Attention, la **réciproque** de cette implication est **fausse**. Par exemple, pour $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$, la fonction f est **continue** mais **pas dérivable** en x_0.*

Exemple 1.3 (Fonction puissance)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Les deux formulations conduisent à $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$:

- $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \cdots + x_0^{n-1} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} nx_0^{n-1}$;
- $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \dbinom{n}{1} x_0^{n-1} + \dbinom{n}{2} x_0^{n-2} h + \cdots + \dbinom{n}{n} h^{n-1} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} nx_0^{n-1}$.

Exemple 1.4 (Fonction sinus)

Soit $f(x) = \sin x$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Les deux formulations conduisent à $f'(x_0) = \cos x_0$.

En effet, à l'aide de $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$:

- $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 2\cos\left(\dfrac{x + x_0}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \cos x_0$;
- $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \sin x_0 \left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x_0 \left(\dfrac{\sin h}{h}\right) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \cos x_0$.

Définition 1.5 (Dérivabilité à gauche, à droite)

*On dit que f est **dérivable à gauche en x_0** (resp. **dérivable à droite en x_0**) lorsque τ_{x_0} admet une limite **finie** à gauche en x_0 (resp. une limite **finie** à droite en x_0).*

On note alors $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *et* $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Proposition 1.6

*Si f est définie **dans un voisinage de x_0** :*

*f est **dérivable** en x_0 ssi f est **dérivable à gauche et à droite** en x_0 **et** $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

On a alors $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple 1.7 (Valeur absolue)

Soit f la fonction « valeur absolue » : $f(x) = |x|$.

On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} +1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ puis $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -1$.

Ainsi f est dérivable **à droite et à gauche** en 0 : $f'_d(0) = +1$ et $f'_g(0) = -1$,
mais $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f **n'**est **pas** dérivable en 0.

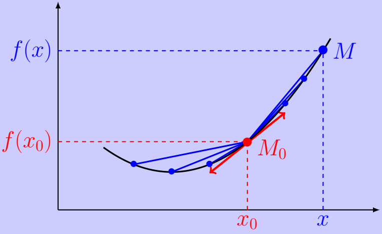
Définition 1.8 (Tangente)

On munit le plan d'un repère orthonormal.

1. *Si f est une fonction **dérivable** en x_0, la droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est appelée **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.*

   *C'est la position limite des **cordes** reliant un point de la courbe $M(x, f(x))$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$ lorsque M tend vers M_0.*

   *Dans le cas d'une **dérivabilité** de f uniquement **à gauche ou à droite** en x_0, on parle de **demi-tangente**.*



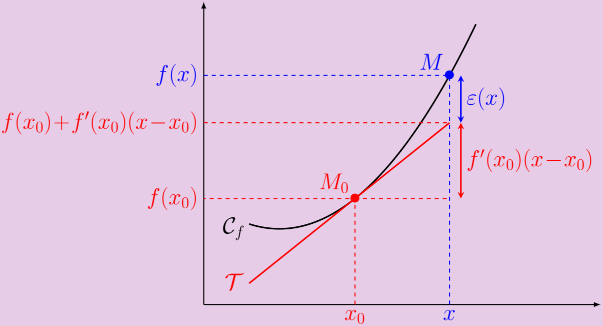
2. *Dans le cas où $\displaystyle\lim_{x \to x_0^- \text{ ou } x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet une **demi-tangente verticale** en x_0.*

3. *Si f est **continue** en x_0 et **dérivable à gauche et à droite** en x_0 avec $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ on dit que la courbe représentative de f admet un **point anguleux** en x_0.*

Proposition 1.9 (Approximation affine)

*Supposons f **dérivable** en x_0. Alors il existe une application ε définie dans un voisinage de x_0 avec $\lim_{x_0} \varepsilon = 0$ telle que*

$$\text{au voisinage de } x_0, \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

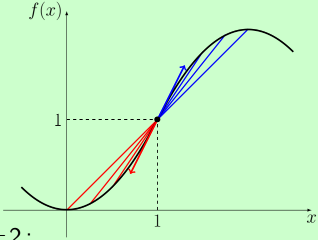


*La droite $\mathcal{T}$ d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la **tangente** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f (cf. Définition 1.8).*

***Remarque :** la relation $f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ est appelée **développement limité d'ordre 1 de f en x_0** (cf. chapitre « Développements limités »).*

Exemple 1.10 (Raccord dérivable)

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1, \\ -x^2+4x-2 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$

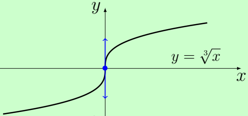


- f est continue sur $\mathbb{R}$;
- on a $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \begin{cases} x+1 & \text{si } x<1, \\ -x+3 & \text{si } x>1, \end{cases}$

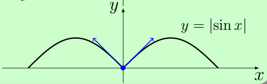
  puis $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$;
- donc f est dérivable à droite et à gauche en 1 et $f'_g(1)=f'_d(1)=2$. Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$;
- la courbe admet la droite d'équation $y=2x-1$ pour **tangente** au point de coordonnées $(1,1)$.

Exemple 1.11 (Fonctions non dérivables en un point)

❶ Soit $g(x) = \sqrt[3]{x}$. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = +\infty$ donc la courbe admet une **tangente verticale** en l'origine.



❷ Soit $h(x) = |\sin x|$. On a $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \pm 1$ donc la courbe admet un **point anguleux** en l'origine.



On peut étendre la notion de dérivabilité aux fonctions definies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ en utilisant les limites complexes des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.12 (Dérivée d'une fonction à valeurs complexes)

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$ telle que $f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
La fonction f est dérivable en x_0 ssi f_1 et f_2 le sont, et l'on a alors

$$f'(x_0) = f_1'(x_0) + \mathrm{i} f_2'(x_0).$$

Proposition 1.13 (Dérivation de l'exponentielle complexe)

Rappelons que pour tout $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$ (exponentielle complexe). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et f définie par $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Sommaire

1. Dérivabilité en un point
2. Dérivabilité sur un intervalle
   - Opérations
   - Dérivation d'une réciproque
   - Extremum d'une fonction
   - Théorème de Rolle
   - Théorème des accroissements finis
   - Dérivée et variations
   - Limite de la dérivée
3. Dérivation d'ordre supérieur
4. Convexité d'une fonction
5. Compléments

Définition 2.1 (Dérivabilité sur un intervalle)

On dit qu'une fonction f est ***dérivable sur un intervalle I*** *lorsque f est dérivable en tout point de I. On note f' la* ***fonction dérivée*** *de f qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$.*

Proposition 2.2 (Addition, multiplication, division)

Soit f et g deux fonctions ***dérivables*** *sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Les fonctions λf, $f+g$, $f \times g$ sont alors ***dérivables*** *sur I et l'on a :*

- $(\lambda f)' = \lambda f'$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est aussi ***dérivable*** *sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Exemple 2.3 (Fonctions homographiques)

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, c étant **non nul.** On définit la fonction f par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

- Son ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
- La fonction f est **dérivable** sur $\mathcal{D}_f$ comme quotient de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

Remarque : f est constante ssi les couples (a, b) et (c, d) sont proportionnels.

Proposition 2.4 (Composition)

*Soit I et J deux intervalles, f une fonction de I dans J et g une fonction de J dans $\mathbb{R}$. Si f est **dérivable** sur I et g est **dérivable** sur J alors $g \circ f$ est **dérivable** sur I et l'on a la **formule de dérivation d'une fonction composée** :*

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Exemple 2.5 (Composées usuelles)

Lorsque les conditions le permettent, on a :

- $(\mathrm{e}^f)' = f'\mathrm{e}^f$
- $(\ln|f|)' = \dfrac{f'}{f}$
- $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$
- $(\sin f)' = f' \cos f$
- $(\cos f)' = -f' \sin f$
- $(\tan f)' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}$

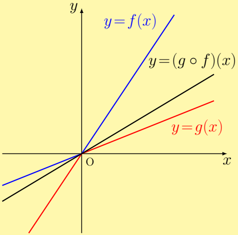
Remarque 2.6

Les conditions f et g dérivables sont **suffisantes** mais **non nécessaires** pour que $g \circ f$ soit dérivable.

Par exemple, soit a et b deux réels et

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leqslant 0 \\ bx & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = \begin{cases} bx & \text{si } x \leqslant 0 \\ ax & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

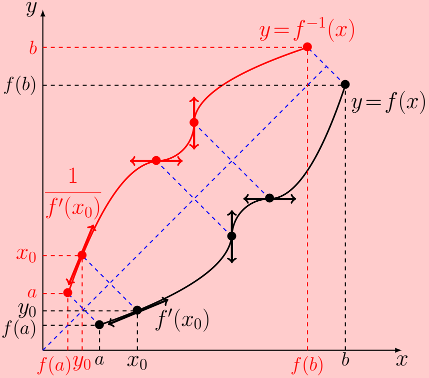
La fonction $h = f \circ g = g \circ f$ est définie par $h(x) = (ab)x$. Ainsi, lorsque $a \neq b$, f et g **ne** sont **pas** dérivables en 0 alors que h l'est.



Théorème 2.7 (Dérivation d'une bijection réciproque)

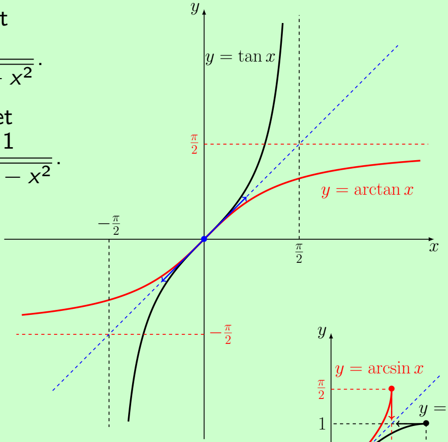
*Soit f une application **continue et strictement monotone** sur un intervalle I. Elle induit une **bijection** de I sur $f(I)$ que l'on notera encore f.*

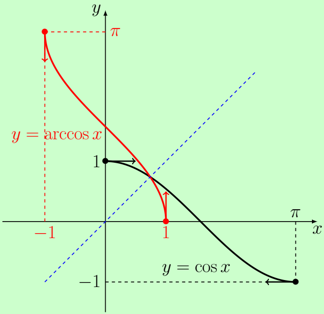
1. *Supposons f **dérivable** en $x_0 \in I$.*
   - *Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est **dérivable** en $y_0 = f(x_0)$ et l'on a*
   $$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$
   - *Si $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} **n'est pas dérivable** en $y_0 = f(x_0)$ et sa courbe représentative présente une **(demi-)tangente verticale** au point d'abscisse y_0.*
2. *Supposons $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$. Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, $(f^{-1})'(y_0) = 0$ et sa courbe représentative présente une **tangente horizontale** au point d'abscisse y_0.*

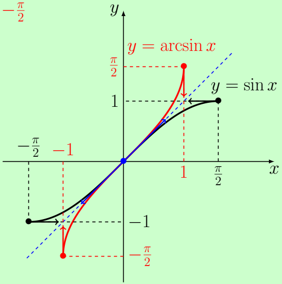


Exemple 2.8 (Fonctions trigonométriques réciproques)

- arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et
  $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et
  $\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.







Définition 2.9 (Extremum)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

1. *On dit que f admet un* ***maximum local*** *(resp. un* ***minimum local****) en x_0 s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :*
$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I, \quad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0))$$
Un maximum ou un minimum local est appelé un ***extremum local****.*
2. *On dit que f admet un* ***maximum global*** *(resp. un* ***minimum global****) sur I en x_0 lorsque : $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).*

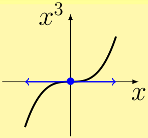
Proposition 2.10 (Condition nécessaire d'extremum)

Soit f une fonction ***dérivable*** *sur un intervalle I et $x_0 \in I$ qui* ***n'est pas*** *une borne de I.*
Si *f possède un* ***extremum local*** *en x_0* ***alors*** *$f'(x_0) = 0$.*

Remarque 2.11 (Point critique)

Lorsque $f'(x_0) = 0$ on dit que x_0 est un **point critique** de f.

Attention, la **réciproque** de la proposition 2.10 est **fausse :** un point critique **n'est pas nécessairement** un extremum.
Par exemple, $f(x) = x^3$ et $x_0 = 0$.

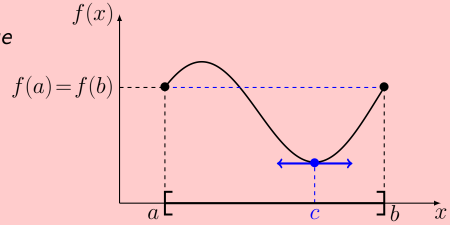


Théorème 2.12 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- *f est **continue** sur $[a,b]$;*
- *f est **dérivable** sur $]a,b[$;*
- *$f(a) = f(b)$.*

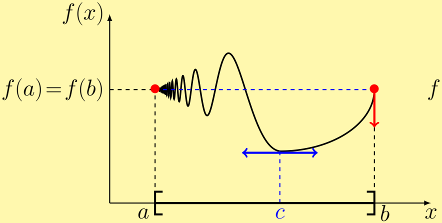
Alors $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.



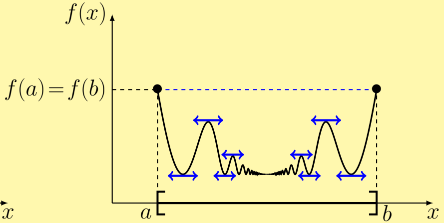
Remarque 2.13

Les hypothèses « f est **continue** sur $[a,b]$ et **dérivable** sur $]a,b[$ » sont équivalentes à « f **dérivable** sur $]a,b[$ et **continue** en a et b. »

- Il n'est pas nécessaire de supposer f dérivable en a ou/et b.

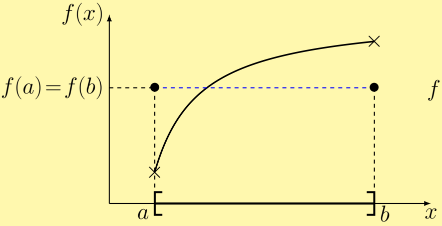


- Il peut y avoir une infinité de réels c tels que $f'(c) = 0$.

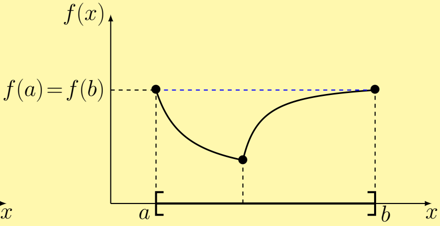


Remarque 2.14 (Contre-exemples)

Le théorème peut être mis en défaut lorsqu'une hypothèse n'est pas satisfaite.



- f **discontinue** aux bornes de l'intervalle, f' ne s'annule pas.



- f **non dérivable** en un point à l'intérieur de l'intervalle, f' ne s'annule pas.

Remarque 2.15

Le théorème de Rolle **ne** s'étend **pas** aux fonctions à valeurs complexes.

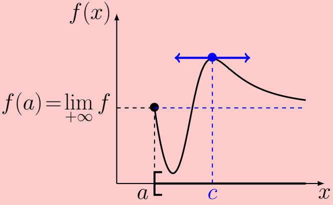
Par exemple, la fonction $f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est dérivable sur $[0,2\pi]$, satisfait $f(0)=f(2\pi)$ alors que sa dérivée, $f'(t)=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, ne s'annule pas.

Théorème 2.16 (Théorème de Rolle généralisé (facultatif))

❶ *Soit* $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

- f *est* ***continue*** *sur* $[a, +\infty[$;
- f *est* ***dérivable*** *sur* $]a, +\infty[$;
- $\lim\limits_{+\infty} f = f(a)$.

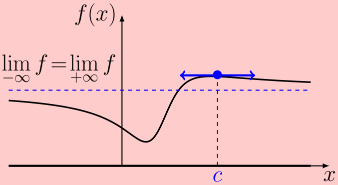
Alors $\exists\, c \in]a, +\infty[$ *tel que* $f'(c) = 0$.



❷ *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

- f *est* ***dérivable*** *sur* $\mathbb{R}$;
- $\lim\limits_{-\infty} f$ *et* $\lim\limits_{+\infty} f$ *existent et coïncident.*

Alors $\exists\, c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(c) = 0$.

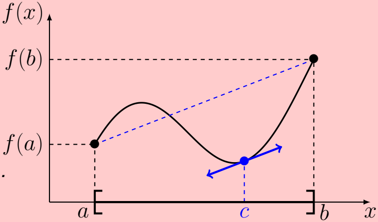


Théorème 2.17 (Théorème des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- *f est **continue** sur $[a, b]$;*
- *f est **dérivable** sur $]a, b[$.*

Alors $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Corollaire 2.18 (Inégalité des accroissements finis - version 1)

*Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$ $(a < b)$.*
S'il existe des réels m et M tels que $\forall\, x \in]a, b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

Corollaire 2.19 (Inégalité des accroissements finis - version 2)

*Si f est **dérivable** sur un intervalle I et si $\exists\, k > 0$ tel que $\forall\, x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$ alors :*

$$\forall\, (x, y) \in I \times I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

*On dit que f est une fonction **k-Lipschitzienne** sur I (cf. cours du 2^{nd} semestre).*

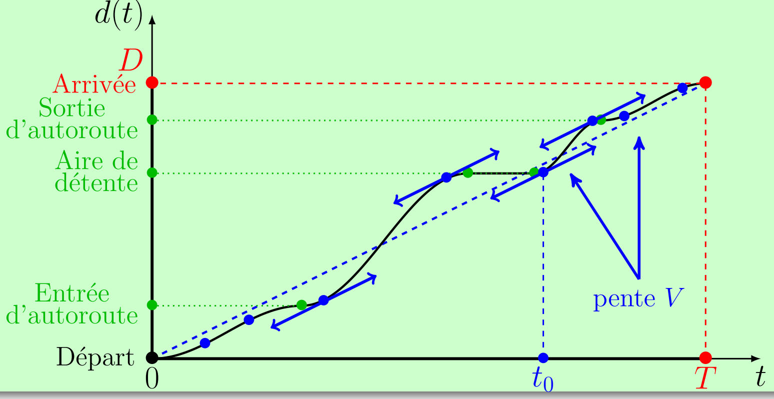
Exemple 2.20 (Cinématique)

Un véhicule parcourt une distance de D km durant un laps de temps de T minutes.

Soit $d : [0, T] \longrightarrow [0, D]$ la fonction modélisant le problème : à chaque instant $t \in [0, T]$, $d(t)$ représente la distance parcourue durant l'intervalle de temps $[0, t]$.

L'application d (« **loi horaire** » du mouvement) est dérivable sur $[0, T]$, sa dérivée étant la **vitesse instantanée** du véhicule : $d'(t) = v(t)$. La **vitesse moyenne** est $V = \dfrac{D}{T}$.

Le théorème des accroissements finis stipule qu'il existe au moins un instant en lequel la **vitesse instantanée** coïncide avec la **vitesse moyenne :** $\exists t_0 \in [0, T],\ v(t_0) = V$.



Théorème 2.21 (Dérivée et variations)

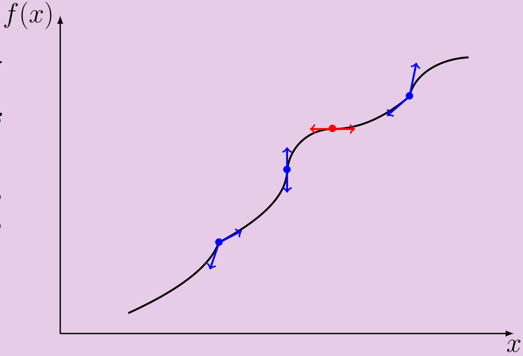
*Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I. On a les équivalences suivantes :*

1. *f est **croissante** sur I* $\iff$ $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$
2. *f est **décroissante** sur I* $\iff$ $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$
3. *f est **constante** sur I* $\iff$ $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$

Proposition 2.22 (Condition suffisante de stricte monotonie)

*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et **dérivable** sur I sauf peut-être en un **nombre fini** de points.*

*Si f' est de **signe constant** et ne s'**annule** qu'en un **nombre fini** de points, alors f est **strictement monotone** sur I.*



Théorème 2.23 (Théorème de la limite de la dérivée)

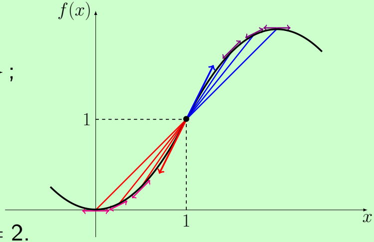
*Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, **dérivable** sur $I \setminus \{x_0\}$, où $x_0 \in I$.*

1. *Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est **dérivable** en x_0 et $f'(x_0) = \ell$ (et donc f' est même continue en x_0). On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^1$** en x_0.*
2. *Si $\lim\limits_{x \to x_0^- \text{ ou } x_0^+} f'(x) = \pm\infty$, alors f n'est **pas dérivable** en x_0 et sa courbe représentative admet une (demi-)tangente **verticale** en x_0.*
3. *Si f' admet des limites à gauche et à droite en x_0 **distinctes** alors f n'est **pas dérivable** en x_0. Si ces limites sont finies, f est dérivable à gauche et à droite en x_0.*

Exemple 2.24 (Raccord de classe $\mathcal{C}^1$)

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$

- f est **continue** sur $\mathbb{R}$ et **dérivable** sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- on a $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1, \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1, \end{cases}$
  puis $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = 2$;
- donc f est **dérivable** en 1 (et $\mathcal{C}^1$) et $f'(1) = 2$.



Remarque 2.25

Dans le théorème 2.23, l'hypothèse « f est **continue** sur I et **dérivable** sur $I\backslash\{x_0\}$ » est équivalente à « f est **continue** en x_0 et **dérivable** sur $I\backslash\{x_0\}$ ».

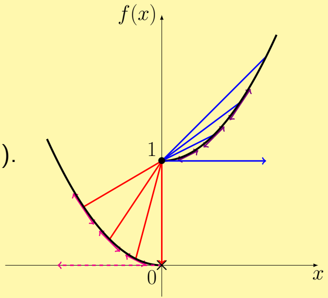
Le théorème est mis en défaut si f n'est **pas continue** en x_0, f n'est évidemment **pas dérivable** en x_0 même si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$ existe comme le montre l'exemple ci-dessous.

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ x^2+1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;
- on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0$;
- mais f n'est **pas dérivable** en 0 (discontinue en 0).

  En fait f est **dérivable à droite** en 0, $f'_d(0) = 0$, mais **pas à gauche**.

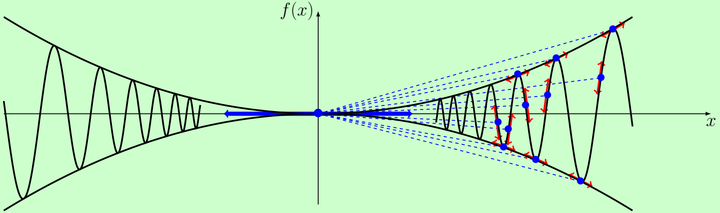
  Le graphe de f admet ainsi une demi-tangente horizontale **à droite** en 0, mais contrairement aux apparences, **pas à gauche.**



Exemple 2.26 (Une fonction dérivable non $\mathcal{C}^1$)

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- Avec $|f(x)| \leqslant x^2$, on voit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.
- On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc $\left|\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right| \leqslant |x|$, puis $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$, et alors f est dérivable en 0 de dérivée 0.
- On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On voit que f' n'a pas de limite en 0.
- En conclusion, f est dérivable en 0 mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.



Sommaire

1. Dérivabilité en un point
2. Dérivabilité sur un intervalle
3. Dérivation d'ordre supérieur
   - Dérivées successives
   - Classe $\mathcal{C}^n$
   - Opérations
4. Convexité d'une fonction
5. Compléments

Définition 3.1 (Dérivées successives)

*Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction f est **n fois dérivable** lorsqu'on peut dériver successivement n fois en commençant par f. On note alors $f^{(2)}$ (ou f'') la **dérivée** 2^{nde} de f, $f^{(3)}$ (ou f''') sa **dérivée 3^e^**, etc., $f^{(n)}$ sa **dérivée n^e^**. Par convention : $f^{(0)} = f$.*

Remarque 3.2

Pour que f soit ***n* fois dérivable** en x_0, il est implicitement nécessaire que $f^{(n-1)}$ soit définie sur un voisinage de x_0, i.e. que f soit **(n−1) fois dérivable** sur un **voisinage** de x_0. En effet :

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Exemple 3.3 (Fonctions usuelles)

- $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$
- $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
- $\text{ch}^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{ch}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{sh}(x) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\text{sh}^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{sh}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{ch}(x) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- si $\varphi(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} p(p-1)\dots(p-n+1)x^{p-n} & \text{si } n < p \\ p! & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$
- si $\psi(x) = \dfrac{1}{x^p}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $\psi^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{x^{p+n}}$

Définition 3.4 (Classe $\mathcal{C}^n$)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0. On dit que :

1. *f est de **classe $\mathcal{C}^0$** en x_0 lorsque f est **continue** en x_0.*
2. *f est de **classe $\mathcal{C}^n$** en x_0 $(n \in \mathbb{N}^*)$ lorsque f est **n fois dérivable** en x_0 et lorsque $f^{(n)}$ est **continue** en x_0.*
3. *f est de **classe $\mathcal{C}^\infty$** en x_0 lorsque elle est de classe $\mathcal{C}^n$ en x_0 **pour tout $n \in \mathbb{N}$**.*

Proposition 3.5 (Hiérarchie)

1. *f est de **classe $\mathcal{C}^n$** $\Longrightarrow$ f est **n fois dérivable** $\Longrightarrow$ f est de **classe $\mathcal{C}^{n-1}$***
2. *f est **n fois dérivable** $\Longrightarrow$ f est de **classe $\mathcal{C}^{n-1}$** $\Longrightarrow$ f est **$(n-1)$ fois dérivable***

Exemple 3.6 (Fonctions usuelles)

1. Les fonctions exp, cos, sin, ch, sh, polynômes sont de **classe $\mathcal{C}^\infty$** sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions ln et puissances sont de **classe $\mathcal{C}^\infty$** sur $]0, +\infty[$.
3. Les fonctions rationnelles sont de **classe $\mathcal{C}^\infty$** sur leur ensemble de définition.

Proposition 3.7 (Opérations)

*Soit f et g deux fonctions **n fois dérivables** sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. *les fonctions λf et $f+g$ sont **n fois dérivables** sur I et l'on a :*

$$\bullet\, (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)} \qquad \bullet\, (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

2. *la fonction $f \times g$ est **n fois dérivable** sur I et l'on a (**formule de Leibniz**) :*

$$\bullet\, (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exemple 3.8 (Formule de Leibniz)

1. Pour $n = 2$ et $n = 3$, la formule de Leibniz s'écrit :

$$\bullet\, (fg)'' = fg'' + 2f'g' + f''g \qquad \bullet\, (fg)''' = fg''' + 3f'g'' + 3f''g' + f'''g.$$

2. Soit φ la fonction définie $\varphi(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$.
   Posons $f(x) = x^2$ et $g(x) = \mathrm{e}^x$.
   On a $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ puis $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$, $f^{(k)}(x) = 0$.
   Par ailleurs $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(x) = \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big)\mathrm{e}^x$.

Sommaire

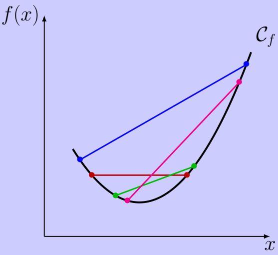
1. Dérivabilité en un point
2. Dérivabilité sur un intervalle
3. Dérivation d'ordre supérieur
4. Convexité d'une fonction
   - Fonctions convexes
   - Point d'inflexion
5. Compléments

Définition 4.1 (Fonction convexe)

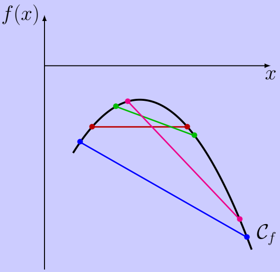
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. **Définition géométrique**

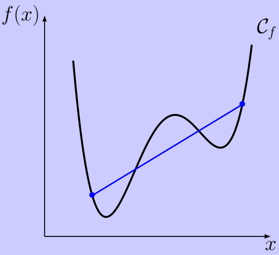
   - On dit que f est **convexe sur I** (resp. **concave sur I**) lorsque toutes les cordes reliant deux points de $\mathcal{C}_f$ sont **au-dessus** (resp. **au-dessous**) de $\mathcal{C}_f$.
   - La fonction f est **concave sur I** ssi la fonction $-f$ est **convexe sur I**.



f convexe



f concave



f ni convexe
ni concave

Définition 4.1 (Fonction convexe)

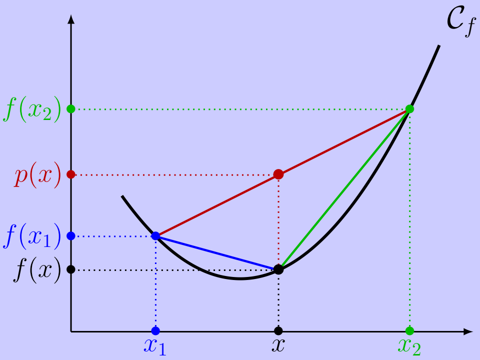
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

❷ **Définition analytique**

f est **convexe** ssi

$$\forall x_1, x_2 \in I_{\,(x_1<x_2)},\ \forall x \in]x_1, x_2[,\quad f(x) \leqslant f(x_2)\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1} + f(x_1)\,\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$$

ou encore $$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$



$$p(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1)$$
$$= f(x_2)\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1} + f(x_1)\,\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$$

— **pente** $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

— **pente** $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$

— **pente** $\dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$

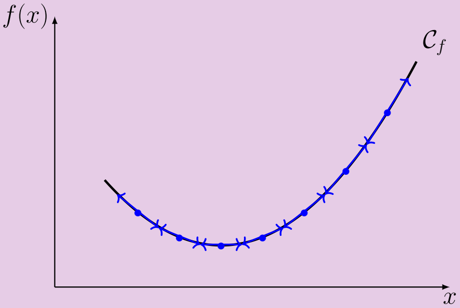
Proposition 4.2 (Fonction convexe et dérivation)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. *La fonction f est* ***convexe sur I*** *ssi la fonction f' est* ***croissante*** *sur I.*
2. *La fonction f est* ***concave sur I*** *ssi la fonction f' est* ***décroissante*** *sur I.*

Proposition 4.3 (Position courbe/tangentes)

La courbe représentative d'une fonction ***convexe*** *(resp.* ***concave****) est* ***au-dessus*** *(resp.* ***au-dessous****)* ***de chacune de ses tangentes****.*



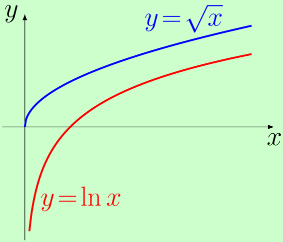
Proposition 4.4 (Un critère de convexité)

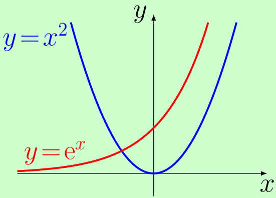
*Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I.*

*f est **convexe** sur I (resp. **concave** sur I) ssi $\forall\, x \in I,\ f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) \leqslant 0$).*

Exemple 4.5 (Fonctions usuelles)

1. Les fonctions carré et exponentielle sont **convexes** sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions racine carrée et logarithme sont **concaves** sur $]0, +\infty[$.
3. Plus généralement : la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est **convexe** pour tout $\alpha \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$
   concave pour tout $\alpha \in [0, 1]$ sur $]0, +\infty[$



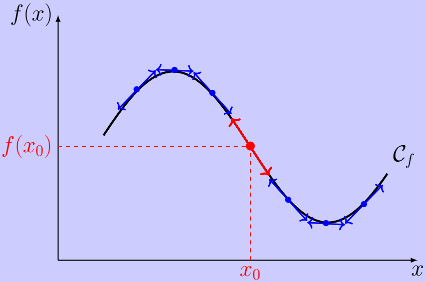


Remarque 4.6 (Convexité et réciprocité)

Une **bijection convexe** admet une **réciproque concave** et réciproquement.

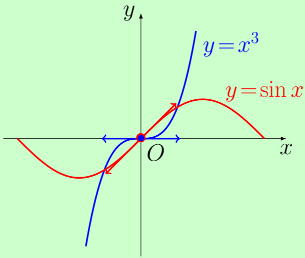
Définition 4.7 (Point d'inflexion)

*Lorsque f'' **s'annule en x_0 en changeant de signe,** on dit que sa courbe représentative **change de concavité** et le point d'abscisse x_0 est alors appelé **point d'inflexion** de la courbe.*



Exemple 4.8 (Fonctions « cube » et sinus)

1. Les fonctions cube et sinus admettent un **point d'inflexion** en l'origine.
2. Plus généralement, pour tout **entier positif impair** n, la fonction $x \longmapsto x^n$ admet un **point d'inflexion** en l'origine.



Sommaire

1. Dérivabilité en un point
2. Dérivabilité sur un intervalle
3. Dérivation d'ordre supérieur
4. Convexité d'une fonction
5. Compléments
   - Règle de L'Hospital

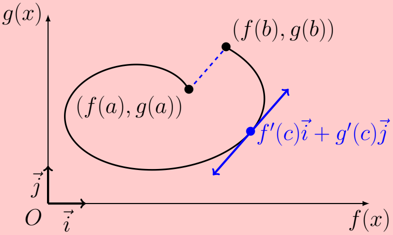
La connaissance des résultats suivants est **facultative** mais peut parfois s'avérer utile :

Théorème 5.1 (Accroissements finis généralisés (facultatif))

Soit f et g deux fonctions ***continues*** *sur un intervalle $[a,b]$ et* ***dérivables*** *sur $]a,b[$.*

Alors il existe un réel c dans $]a,b[$ tel que

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c).$$



Corollaire 5.2 (Règle de L'Hospital (facultatif))

Soit f et g deux fonctions ***continues*** *sur un intervalle I,* ***dérivables*** *sur $I\setminus\{x_0\}$ où $x_0 \in I$, telles que $g'(x) \neq 0$ sur $I\setminus\{x_0\}$. Alors :*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \ell.$$

Cette règle permet d'étudier certaines ***formes indéterminées*** $\dfrac{0}{0}$.

Corollaire 5.3 (Initiation à la formule de Taylor-Young (cf. chapitre « Développements limités »))

1. *Soit f une fonction* ***deux fois dérivable*** *en x_0. Alors :*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

2. *Plus généralement, si f est une fonction* ***n fois dérivable*** *en x_0, alors :*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Exemple 5.4 (Fonctions cosinus/sinus et cosinus/sinus hyperbolique)

- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Dérivabilité

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_Lhopital/Lhopital0.html

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Fonctions convexes

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_fonctions_convexes.pdf

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Formule de Stirling

Aimé Lachal

http ://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_stirling.pdf

Notions à retenir

- Dérivée
  - ⋆ Opérations, techniques de calcul
  - ⋆ Ordre supérieur, classe $\mathcal{C}^n$
- Tangente
  - ⋆ Équation à connaître
  - ⋆ Position relative de la courbe par rapport à sa tangente
- Dérivabilité
  - ⋆ Théorèmes fondamentaux (théorème de Rolle, TAF, IAF)
  - ⋆ Dérivée de la réciproque d'une bijection
- Variations
  - ⋆ Monotonie
  - ⋆ Détermination d'extremums
  - ⋆ Étude de la convexité, détermination de points d'inflexion
- Fonctions trigonométriques réciproques
  - ⋆ Dérivées à connaître