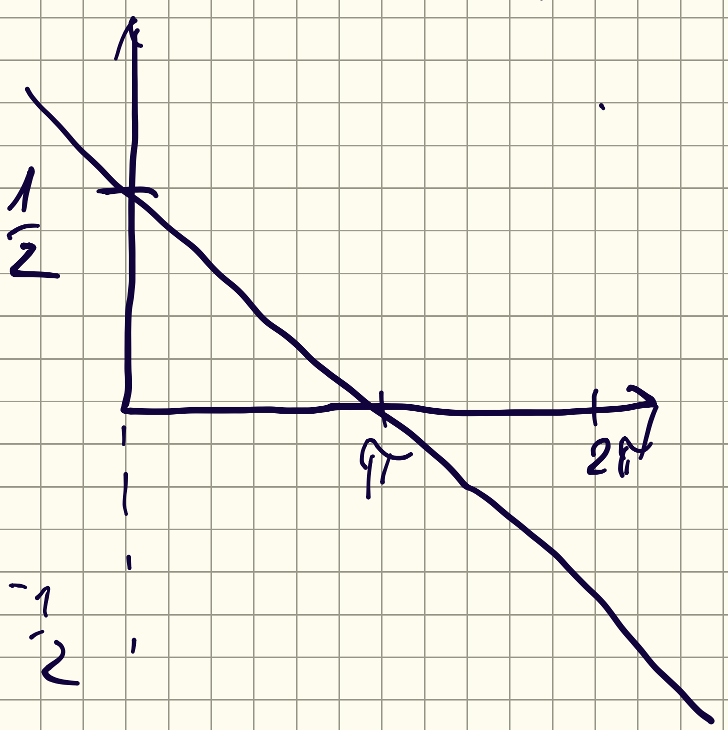
Fourier sorok

$(0, 2\pi)$

$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

Ha észrevesszük, hogy



eltoljuk 2π-vel akkor ciklikus
és páratlan ezért csak sinusos tagok
vannak
és elég ennek a fél intervallumon
integrálni

$$2\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(kx)\, dx = -\frac{\pi - x}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cos(kx)}{k} \cdot \cancel{2} \Big|_0^{\pi} \ldots$$

$$\ldots - - \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} dx =$$

sinus lesz belőle, 0 és π-nél 0-t add

$$u'v = uv - uv'$$

$$= \left(0 - \frac{\pi}{k}\right) = \frac{\pi}{k}$$

$$\pi \sum \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$$

$\Rightarrow$ ezt lehet normálni

$$\pi \sum \frac{\sqrt{\pi}}{k} \cdot \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \sum \frac{1}{k^2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\pi - x)^2}{2^2} dx =$$

$$\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi x + x^2) dx =$$

$$\frac{1}{4}\left(\pi^2 x - \pi x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{4}\left(2\pi^3 + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{\text{párosak}} + \sum_{\text{páratlanok}} = \sum \frac{1}{(2l)^2} + \sum \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} + \sum \frac{1}{(2l+1)^2}$$

Tehát a páros számok a négyzet összegek

$$\sum \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

○ Szőke–Tolvy könyv

∘ Parseval egyenlőtlenség

∘ Fourier együtthatók ortonormált rendszere

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = \pi$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Számítsuk ki a Fourier transzformáltját:

$$f(x)=\begin{cases}1 & -1<x<1\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-itx}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(tx)\,dt = \left.\frac{\sin(tx)}{x}\right|_{t=-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(x)}{x}$$

$$\cos(tx)-i\sin(tx)$$

- Páros függvény → csak a cosinusos szorzást kell elvégeznem

∘ Normája:

$$\sqrt{\int_{-1}^{1}1\,dt}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = 1$$

Fourier sor

$$f(x) = 2 + \sin^2(x) - 2\cos^3(x)$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(3x)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^3(x) = \cos(x) \cdot \cos^2(x) = \cos(x) \cdot \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos(x) \cdot \cos(2x)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\cos(x)\cdot\cos(2x) = \frac{\cos(3x)+\cos(x)}{2}$$

$$\frac{3}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)$$

TRIGONOMETRIKUS

ÖSSZEFÜGGÉSEK

$|\sin(x)|$ Fourier sora

- páros → csak cosinusos tagok vannak benne

$$2\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(kx)\,dx =$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{\sin(k+1)x - \sin(k-1)x}{2}\,dx =$$

$$= 2\left[-\frac{\cos(k+1)x}{2(k+1)} + \frac{\cos(k-1)}{2(k-1)}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\cos(k+1)\pi\left(\frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{(k+1)}\right) =$$

ha $k+1$ páros $\cos(k+1) = +1$

ha $k+1$ páratlan akkor $\cos(k+1) = -1$

$$- (-1)^{k}$$

$$= \frac{k+1-k+1}{k^2-1} = \frac{2}{k^2-1}$$

$\cos(x)$ $(0,\pi)$-n sinusos sora

kiterjesztem

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \cos(x) \cdot \sin(kx)\,dx$$

páros

Fourier transzformáció olyan fv-re
van improprius integrálja
pl.: sin(t)-nek nem létezik

hívhatjuk a formulákat nagyjából

1 napára

o Haar fv-nek

2 hét múlva is lesz valami

1. Négyzetesen integrálható függvények tere
Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség

2. Bessel-egyenlőtlenség
Parseval egyenlőtlenség
teljes egyenlőtlenség

3. Trigonometrikus rendszer
teljességi tétel

4. szinuszos és cosinuszos rendszer, teljessége

5. valós és komplex függvénysorok
Fourier-sorok

6. Legendre-polinomok, teljessége

7. Haar-féle ortonormált rendszer, teljesség

8. Fourier transzformáció, tulajdonságok

Szinusz sor a $[0, \pi]$ értelmezett
$f(t) = \cos(t)$

10 kiterjesztjük páratlan függvénnyel

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \cos(t) & 0 < t < \pi \\ -\cos(t) & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \to$ de ha megszorzom szinusszal akkor páros lesz

$\sin(1+k)t = \sin(t)\cos(kt) + \cos(t)\sin(kt)$

$\sin(1-k\cdot t) = \sin(t)\cos(kt) - \cos(t)\sin(kt)$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t)\sin(kt)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(1+k)t - \sin(1-kt)}{2}\,dt =$$

$$-\frac{2}{\pi}\left.\frac{\cos(1+k)\cdot t}{\pi(1+k)}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{2\cos(1-k)\cdot t}{\pi(1+k)}\right|_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1+h+1+h}{(1+h)(1-h)}\right) = \frac{2h}{1-h^2}$$

ennek a norma négyzete:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)\,dt$$

$\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$

$-\sin^2(t)+\cos^2(t)=\cos(2t)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \pi$$

$$\frac{\pi}{16} = \sum \frac{h^2}{(1-h^2)^2}$$