Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása

Filep Illés Attila

2023. április 11.

Kivonat

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dokumentum célja a sztochasztikus folyamatok alkalmazása nevű tárgyon tanult, kiemelt elemek demonstrációja. A demonstráció MATLAB könyvtár elkészítésével történik. A könyvtárnak a célja, hogy szimbolikus matematikai eszközökkel a folyamatokat bemutassa. A könyvtárnak nem célja a semmilyen informatikai optimalizáltságot megvalósítani.

I. rész
Stacionárius folyamatok

1. Alapvető definíciók

1.1. Valószínűségi változó

Legyen:

- Ω egy nem üres halmaz
- $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$
- $x \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazaiból alkotott esemény σ-algebrája (tehát $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető tér)

Akkor $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt valószínűségi változónak hívunk.

1.2. Sztochasztikus folyamat

A sztochasztikus folyamat (vagy véletlen folyamat) egy olyan matematikai modell, amely egy vagy több időfüggő véletlen változó által létrehozott folyamatot ír le. A sztochasztikus folyamatok olyan rendszerek leírására szolgálnak, amelyekben a jövő állapota részben véletlenszerűen határozza meg a múlt és a jelen állapotát.

A sztochasztikus folyamatok általában valószínűségi változók sorozataként jelennek meg, amelyeknek az idő függvényében változó értékei vannak. A folyamatot gyakran matematikailag leírt egyenletekkel vagy valószínűségi eloszlásokkal írják le.

A sztochasztikus folyamatok számos területen alkalmazhatók, például az anyag- és energiaátvitel, a kommunikációs rendszerek, a pénzügyek, az idősorok elemzése és a gépi tanulás területén.

1.2.1. Sztochasztikus folyamatok kompatibilitási feltételei

A sztochasztikus folyamatok kompatibilitási feltételei a következők:

- Az időpillanatok száma felsorolható, véges vagy végtelen, de számontartható.
- Az időpillanatok sorozata szigorúan növekvő, azaz $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ vagy $t_1 < t_2 < \cdots < t_\infty$.
- Az időpillanatok közötti időközök meghatározottak és végesek vagy végtelenek.
- A folyamat értékei véletlenszerűek, és általában valószínűségi változóként vannak definiálva.
- A folyamat értékei időfüggők, és az időbeli elmozdulásokkal szembeni szimmetriára vonatkozó korlátozásokat kell teljesítenie. Például a stacionárius folyamatok esetében az eloszlások nem változnak az idő múlásával, és az átlag és szórás időfüggetlen.

Ezen kívül a sztochasztikus folyamatoknál általában szükséges az ergodicitás feltétele, amely azt jelenti, hogy a folyamat minden pillanatban eléri minden lehetséges állapotát az idő végtelen futamán. Ez fontos feltétele a statisztikai tulajdonságok meghatározásának, mert lehetővé teszi a folyamat várható értékének becslését a mintavételezés révén.

1.3. Várható érték

Lényegében az első (centrális) momentum, egy funkcionál.

Diszkrét esetben

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

Folytonos esetben

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

1.3.1. Várható érték létezésének a feltétele

Diszkrét esetben

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i |x_i| < \infty$$

Folytonos esetben

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

1.3.2. Várható érték tulajdonságai

- Ha X az 1 valószínűséggel korlátos valószínűségi változó, akkor van olyan x_1 és x_2 konstans, hogy $P(x_1 \leq X \leq x_2) = 1$ akkor $x_1 \leq E(X) \leq x_2$
- $E(cX) = cE(X)$
- $P(X = c) = 1 \rightarrow E(X) = c$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X * Y) = E(X) * E(Y)$

1.4. Kovariancia függvény

$$\begin{aligned} R_X(u) &= \operatorname{cov}(X_t, X_{t-u}) \\ &= E[(X_t - E(X_t))(X_{t-u} - E(X_{t-u}))] \end{aligned}$$

Ez itt nem a kovarianciamátrixot fogja vissza adni, hanem az eltérés közötti összefüggést.

1.4.1. Kovariancia függvény tulajdonságai

- Additivitás: Ha X és Y véletlen változók és a és b valós számok, akkor a kovarianciafüggvény additív, azaz:

$$cov(aX + bY, Z) = a_cov(X, Z) + b_cov(Y, Z)$$

- Szimmetria: A kovarianciafüggvény szimmetrikus, azaz

$$cov(X, Y) = cov(Y, X)$$

- Állandóság: Ha X és Y véletlen változók és a és b konstansok, akkor a kovarianciafüggvény állandó marad, ha mindkét változót a-val és b-vel eltoljuk. Azaz,

$$cov(X + a, Y + b) = cov(X, Y)$$

- Nemnegativitás: A kovarianciafüggvény mindig nemnegatív, azaz

$$cov(X, X) \geq 0$$

  Ha a két változó független, akkor az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az X állandó.

- Normálás: Ha X és Y normális eloszlásúak, akkor a kovarianciafüggvény teljesen meghatározza a két változó közötti kapcsolatot.

- Két független változó kovarianciája nulla: Ha X és Y független változók, akkor a kovarianciafüggvényük zérus:

$$cov(X, Y) = 0$$

1.5. Gauss folyamat

Egy folyamatot Gauss folyamatnak nevezünk, ha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- Az összes véges dimenziós eloszlása Gauss-eloszlású kell legyen. Ez azt jelenti, hogy az összes véges dimenziós eloszlásfüggvény szimmetrikus, és a karakterisztikus függvénye exponenciális alakú kell legyen.
  - Korreláció mátrixokat mind meg kell nézni, hogy pozitívak-e.

- Az összes időpillanatra vonatkozó középérték és szórás azonos kell legyen. A folyamat homogénnek tekinthető.
  - Ezt homogenitás teszttel lehet ellenőrizni.
- Az összes időpillanatban értékeket vesz fel végtelen dimenziós vektorokban. A végtelen dimenziós eloszlás azonban nem kell Gauss-eloszlásúnak lennie.

1.6. Herglotz-tétel

Legyen $R_X(u)$ a folyamat kovarianciafüggvénye, és tegyük fel, hogy ez a függvény az időbeli eltolásra invariáns, azaz csak a két időpont közötti különbségtől függ. Ekkor $R_X(u)$ Herglotz-féle sűrűségfüggvényként is felírható, azaz teljesül rá a következő:

$$R_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i*\lambda*u} * g_X(\lambda) d\lambda$$

ahol $g_X(\lambda)$ egy valós, szigorúan monoton növekvő eloszlásfüggvény. Más szóval, a kovarianciafüggvény Fourier-transzformáltját egy valós eloszlásfüggvénnyel lehet leírni.

2. Stacionárius folyamatok

A stacionárius folyamatok olyan valószínűségi folyamatok, amelyeknek a statisztikai tulajdonságai nem változnak az idő múlásával. Az ilyen folyamatok esetében a várható érték és a kovariancia függvénye nem függ az időtől, vagyis az idősor jellege nem változik az idő múlásával.

A stacionárius folyamatok matematikailag jól definiáltak és számos fontos tulajdonsággal rendelkeznek, amelyek lehetővé teszik számunkra az idősorok modellezését és előrejelzését. Az ilyen folyamatokra vonatkozóan meghatározott várható érték és kovariancia függvény jellemzi a folyamatot teljes egészében.

A stacionárius folyamatok fontosak a való életben előforduló idősorok modellezésében is, például a gazdasági mutatók és a meteorológiai adatok előrejelzésében. Az ilyen folyamatok matematikai tulajdonságai lehetővé teszik az idősorok előrejelzését, a kockázatbecslést és az optimalizálást.

2.1. Tágabb értelemben stacionárius folyamat

Legyen $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$, ahol

- X a t időponthoz tartozó sztochasztikus folyamat

A tágabb értelemben vett stacionárius folyamatot szokás röviden stacionárius folyamatnak nevezni.

Ha egy sztochasztikus folyamat tágabb értelemben stacionárius, az azt jelenti, hogy a várható értéke és a kovariancia függvénye csak az időbeli különbségtől függ, és nem az abszolút időponttól.

2.1.1. Tesztelés tágabb értelemben vett stacionárius folyamatra

Amennyiben a következő feltételek megegyeznek az egy tágabb értelemben vett stacionárius folyamat:

- $\mu_X(t) = E(X_t)$
- $R_X(s,t) = cov(X_s, X_t) = E(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))$

Ahol a következők a következőket jelenti:

- $t, s \in \mathcal{T}$, tehát időbéli változók
- $\mu_X(t)$ egy konstans, ami csak az időtől függ és megegyezik a várható értékkel
- R_X a kovariancia függvény
- $E(X_t^2) < \infty$

2.2. Szűkebb értelemben stacionárius folyamat

Ahhoz, hogy valamit szűkebb értelemben stacionáriusnak nevezzünk teljesülnie kell, hogy $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ és $(X_{t_{1+t}}, \ldots, X_{t_n+t})$ valószínűségi változók együttes eloszlása megegyezik és tágabb értelemben stacionárius folyamat.

3. Stacionárius Gauss folyamatok

A stacionárius Gauss-folyamat olyan Gauss-folyamat, amelynek a statisztikai tulajdonságai (középérték, szórás, autokorrelációs függvény) időtől függetlenek, vagyis az időbeli változások nem befolyásolják ezeket a tulajdonságokat.

4. Spektrál előállítás

A Herglotz-tétel szerint, a kovarianciafüggvényt kitudjuk fejezni a következő képen:

$$R_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i*\lambda*u} * g_X(\lambda) d\lambda$$

Ebben az összefüggésben a spektrális sűrűségfüggvény a $g_X(\lambda)$.

Analóg módon értelmezzük a diszkrét esetet is:

$$R_X(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^2 e^{i*u*\lambda_k}$$

4.1. Spektrális sűrűségfüggvény előállítása speciális esetben

Ha $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |R_X(u)| < \infty$ feltétel teljesül, akkor a spektrális sűrűségfüggvény közvetlenül is előállítható:

$$g_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-i*k*\lambda}$$

Ez tovább írható:

$$\begin{aligned} g_X(\lambda) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) cos(k\lambda) = \\ = & \frac{1}{2\pi} \left(\sigma_X^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R_X(k) cos(k\lambda) \right) \end{aligned}$$

4.2. Spektrális sűrűségfüggvény segítségével lévő stacionárius folyamat előállítása

$$X_t = \mu_X + \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda)$$

$$X_t = \mu_X + \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k e^{i*t*\lambda_k}$$

- μ_X a várható érték
- t az idő változó

- $Z(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi$ egy sztochasztikus folyamat, amely zérus várható értékű
- $E(Z(\lambda'' - Z(\lambda'))^2 = G_X(\lambda'') - G_X(\lambda')$, ha $-\pi \leq \lambda' < \lambda'' \leq \pi$

5. Diszkrét spektrum

6. Folytonos Spektrum

7. Becslések

7.1. Várható érték becslése

7.2. Kovariancia függvény becslése

8. Fehérzaj folyamat

8.1. Fehérzaj folyamat tulajdonságai

9. Harmonikus folyamatok

9.1. Harmonikus folyamatok tulajdonságai

II. rész
Lineáris folyamatok

III. rész
Wiener folyamatok