RELATÓRIO - EP3

Renan Fichberg - **NUSP:** 7991131

Laboratório de Métodos Numéricos - MAC0210 - 2017/1

Professor: Ernesto G. Birgin

Monitor: Lucas Magno

1 Arquivos e diretórios

Neste exercício programa, estão sendo entregues os seguintes arquivos e diretórios:

- `/docs` - Diretório contendo este relatório.
- `/docs/relatorio.pdf` - Este documento.
- `/images` - Diretório que contém a imagem original e as geradas (se for rodar o programa que manipula imagens ao invés de funções).
- `/images/purple_tentacle.jpg` - Imagem original. Está sendo entregue como exemplo de entrada do programa de imagens para efeitos ilustrativos.
- `/images/compressed_red.jpg` - Imagem gerada pela compressão da imagem `purple_tentacle.jpg`. Está sendo entregue (e o programa a escreve no disco) como exemplo de saída do programa para efeitos ilustrativos.
- `/images/compressed_blue.jpg` - Idem a imagem `compressed_red.jpg`.
- `/images/compressed_green.jpg` - Idem as imagens `compressed_red.jpg` e `compressed_blue.jpg`.
- `/images/decompressed_red.jpg` - Imagem gerada pela decompressão da imagem `decompressed_red.jp` Está sendo entregue como exemplo de saída do programa para efeitos ilustrativos. Retorna a imagem ao estado anterior (isto é, restaura a imagem `compressed_red.jpg` através dos métodos de interpolação bicúbica ou bilinear nos *pixels* de `compressed.jpg`), com perdas.
- `/images/decompressed_blue.jpg` - Idem a imagem `decompressed_red.jpg`.
- `/images/decompressed_green.jpg` - Idem as imagens `decompressed_red.jpg` e `decompressed_blue.jp`
- `/images/final.jpg` - Junção dos canais para formar a imagem original (a qualidade está ruim por causa de um problema com a biblioteca `GraphicsMagick`).
- `/src` - Diretório contendo os códigos-fonte do Exercício Programa 3.
- `/src/argument_checker.m` - Código-fonte do Exercício Programa 3 para leitura dos argumentos da CLI, chamado pelo *script* principal selecionado (um dos dois listados nos itens abaixo).
- `/src/bivariate_interpolation.m` - Código-fonte do Exercício Programa 3 para manipulação de uma *imagem*.

- `/src/bivariate_interpolation_test.m` - Código-fonte do Exercício Programa 3 para manipulação de uma *função conhecida f(x, y)*.

2 Invocação dos Programas

O exercício programa foi dividido em dois *scripts* devido a minha experiência obtida com o EP2, na qual eu achei que o código acabou tendo muitas condições de desvio que acabaram aumentando a complexidade da função principal, tornando-o difícil (e chato) de ler. Para resolver este problema, achei melhor desenvolver dois *scripts* independentes. O código-fonte de ambos difere de muita pouca coisa, sendo que o que foi pedido tanto no EP2 quanto no EP3 está implementado da mesma forma em ambos os *scripts*. Todas as funções implementadas, porém, são encontradas em ambos os códigos-fonte com a mesma assinatura, diferindo apenas nos parâmetros (no de imagem, os parâmetros referentes às malhas são triplicados por causa dos três canais de cores. Idem eventuais retornos das malhas pelas funções).

2.1 Manipulação de imagens

Para rodar o programa no modo imagem, é necessário estar no diretório do código-fonte '`/src`' e usar o seguinte comando:

```
$ ./bivariate_interpolation.m <parametros>
```

Onde os `<parâmetros>` disponíveis são os descritos abaixo (todos antecedidos de *dois* caracters "-"):

- **–image**: parâmetro **mandatório**. Deve ser uma **imagem**. Os testes foram realizados na imagem que está sendo fornecida, com a extensão `.jpg`. A imagem deve **obrigatoriamente** estar no diretório '`/images`'.

- **–bilinear**: parâmetro **semi-mandatório**. Passe este parâmetro, sem argumentos, se quiser rodar o programa no modo de interpolação bilinear. Este parâmetro está classificado como "semi-mandatório" pois ele não é obrigado estar presente, desde que o parâmetro para o modo bicúbico esteja. **Um dos dois parâmetros de modo deve ser obrigatoriamente passado**.

- **–bicubic**: parâmetro **semi-mandatório**. Idem '`--bilinear`', só que para rodar o programa no modo bicúbico. Apenas um dos parâmetros 'semi-mandatórios' pode ser passado por vez.

- **–cr**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número inteiro**. É a taxa de compressão da imagem (**c**ompression **r**ate). Nos testes o valor mais usado foi '5'.

Exemplo válido de invocação do *script* de imagem:

```
$ ./bivariate_interpolation.m --image purple_tentacle.jpg --bicubic --cr 5
```

2.2 Manipulação de funções e rotinas de teste

Para rodar o programa no modo de funções, é necessário estar no diretório do código-fonte '`/src`' e usar o seguinte comando:

```
$ ./bivariate_interpolation_test.m <parametros>
```

Onde os `<parâmetros>` disponíveis são os descritos abaixo (todos antecedidos de *dois* caracters "-"):

- **–nx**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número inteiro e positivo**, conforme especificado no enunciado.
- **–ny**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número inteiro e positivo**, conforme especificado no enunciado.
- **–ax**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número real**, conforme especificado no enunciado.
- **–bx**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número real**, conforme especificado no enunciado. Ainda, deve satisfazer a condição $a_x < b_x$.
- **–ay**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número real**, conforme especificado no enunciado.
- **–by**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número real**, conforme especificado no enunciado. Ainda, deve satisfazer a condição $a_y < b_y$.
- **–x**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número real contido na malha**.
- **–y**: parâmetro **mandatório**. Deve ser um **número real contido na malha**.
- **–bilinear**: parâmetro **semi-mandatório**. Passe este parâmetro, sem argumentos, se quiser rodar o programa no modo de interpolação bilinear. Este parâmetro está classificado como "semi-mandatório" pois ele não é obrigado estar presente, desde que o parâmetro para o modo bicúbico esteja. **Um dos dois parâmetros de modo deve ser obrigatoriamente passado**.

- **–bicubic**: parâmetro **semi-mandatório**. Idem '`--bilinear`', só que para rodar o programa no modo bicúbico. Apenas um dos parâmetros 'semi-mandatórios' pode ser passado por vez.

Exemplo válido de invocação do *script* de funções:

```
$ ./bivariate_interpolation_test.m --nx 150 --ny 150 --ax -5 --bx 5 --ay -5
--by 5 --x 3.11 --y 1.42 --bicubic
```

2.2.1 Testes realizados neste modo

1. Teste de verificação: o programa irá tentar mostrar ao usuário que, para os valores de parâmetros escolhidos, v interpola f nos pontos da malha. Ou seja, será mostrado que para todos os pontos (x, y) da malha, $|f(x, y) - v(x, y)| = 0$.

   Nota importante: Aparentemente foi encontrado um bug no *GNU-Octave*. O exemplo fornecido abaixo para rodar o programa neste modo o reproduz. O teste ira acusar como falho, mas os valores de 'a' e 'b' são iguais, conforme pode ser evidenciado ao remover o comentário do *printf* da função 'interpolation_verification_test'.

2. Teste de comportamento do erro: se o programa detectar que a área é quadrada, isto é, $h_x = h_y$, serão *duplicados* os valores dos parâmetros n_x e n_y de forma a mostrar que o erro diminui com o aumento da quantidade de pontos na malha fina (em outras palavras, quando tornamos a malha fina mais densa, fazendo h se aproximar mais de zero. $h_x = h_y = h \to 0)$. A depender dos valores iniciais de n_x e n_y e os valores das coordenadas do ponto (x, y), claro, *podem haver casos em que o teste falhe*, pois, por exemplo, o ponto (x, y) pode estar mais perto de um ponto da malha "fina" que o mesmo ponto (x, y) da malha "grossa". Isso não é esperado, mas pode ocorrer.

Consideração importante: o teste de comportamento de erro irá re-executar o programa com valores superiores para os parâmetros n_x e n_y. A depender do seu valor inicial, a execução do programa pode ficar consideravelmnte demorada, pois o número de pontos na malha para a realização deste teste será **consideravelmente superior**. A explicação do porque isso é feito já foi fornecida acima.

3 Dedução dos métodos de interpolação: cálculo eficiente dos coeficientes

Esta seção abordará detalhes do que foi feito na implementação para resolver o problema do EP2. Todas as definições e suposições feitas no enunciado já estão sendo consideradas para as explicações que se seguem. Para a resolução dos problemas do EP3, por favor, pule para a próxima seção.

3.1 Caso Bilinear

Para resolver o problema de interpolação no caso bilinear, precisamos apenas considerar os valores da função $f(x, y)$ em cada vértice do *pixel* da malha definida pelos 6 parâmetros mandatórios de entrada n_x, n_y, a_x, b_x, a_y e b_y. Para todos os efeitos, vamos sempre considerar que o ponto (x_i, y_j) refere-se ao vértice *inferior esquerdo* do *pixel*, que o ponto (x_{i+1}, y_j) refere-se ao vértice *inferior direito* do *pixel*, que o ponto (x, y_{j+1}) refere-se ao vértice *superior esquerdo* do *pixel* e, finalmente, que o ponto (x_{i+1}, y_{j+1}) refere-se ao vértice do *pixel* que sobrou, o *superior direito*.

O polinômio dado no enunciado por

$$s_{ij}^L(x, y) = a_{00} + a_{10}(x - x_i) + a_{01}(y - y_j) + a_{11}(x - x_i)(y - y_j)$$

deve interpolar f, e portanto, temos que a condição $f(x, y) \approx s_{ij}^L(x, y)$ deve ser satisfeita. Ainda, nos pontos da malha, temos que $f(x, y) = s_{ij}^L(x, y)$, que nos leva às condições de interpolação que são fornecidas no enunciado e reescritas abaixo:

$$\begin{aligned}
s_{ij}^L(x_i, y_j) &= f(x_i, y_j) \\
s_{ij}^L(x_i, y_{j+1}) &= f(x_i, y_{j+1}) \\
s_{ij}^L(x_{i+1}, y_j) &= f(x_{i+1}, y_j) \\
s_{ij}^L(x_{i+1}, y_{j+1}) &= f(x_{i+1}, y_{j+1})
\end{aligned}$$

Que podemos expandi-las para cada um dos quatro vértices do *pixel*:

$$\begin{aligned}
s_{ij}^L(x_i, y_j) &= a_{00} + a_{10}(x_i - x_i) + a_{01}(y_j - y_j) + a_{11}(x_i - x_i)(y_j - y_j) = f(x_i, y_j) \\
s_{ij}^L(x_i, y_{j+1}) &= a_{00} + a_{10}(x_i - x_i) + a_{01}(y_{j+1} - y_j) + a_{11}(x_i - x_i)(y_{j+1} - y_j) = f(x_i, y_{j+1}) \\
s_{ij}^L(x_{i+1}, y_j) &= a_{00} + a_{10}(x_{i+1} - x_i) + a_{01}(y_j - y_j) + a_{11}(x_{i+1} - x_i)(y_j - y_j) = f(x_{i+1}, y_j) \\
s_{ij}^L(x_{i+1}, y_{j+1}) &= a_{00} + a_{10}(x_{i+1} - x_i) + a_{01}(y_{j+1} - y_j) + a_{11}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = f(x_{i+1}, y_{j+1})
\end{aligned}$$

E podemos reescrever o que está representado acima matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{00} & 0 & a_{01}h_y & 0 \\ a_{00} & a_{10}h_x & 0 & 0 \\ a_{00} & a_{10}h_x & a_{01}h_y & a_{11}h_xh_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_i, y_j) \\ f(x_i, y_{j+1}) \\ f(x_{i+1}, y_j) \\ f(x_{i+1}, y_{j+1}) \end{pmatrix}$$

E, finalmente, obtemos uma maneira de calcular os coeficientes eficientemente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h_y & 0 \\ 1 & h_x & 0 & 0 \\ 1 & h_x & h_y & h_xh_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_i, y_j) \\ f(x_i, y_{j+1}) \\ f(x_{i+1}, y_j) \\ f(x_{i+1}, y_{j+1}) \end{pmatrix}$$

3.2 Caso Bicúbico

O caso bicúbico compartilha semelhanças com o caso bilinear explicado na subseção anterior. A diferença é que agora precisamos usar os valores das derivadas de primeira ordem com relação às variáveis x e y de cada vértice do *pixel*, bem como as derivadas mistas de segunda ordem **também**, pois temos 12 coeficientes a mais a serem determinados. Naturalmente, é suposto que a função admita a existência das derivadas parciais com relação às variáveis x e y, bem como a existência da derivada mista de segunda ordem. Em outras palavras, f deve ser de classe C^2. **Observação**: o Exercício Programa **não tem implementações para realizar tais checagens**. Está a cargo do usuário colocar uma função que respeite tais condições.

Analogo ao processo que fizemos na seção do caso bilinear, conjuntamente com a suposição da existência das derivadas parciais já mencionadas, reescrevemos todas as 16 condições de interpolação do enunciado abaixo:

$$\begin{aligned}
s_{ij}^C(x_i, y_j) &= f(x_i, y_j) \\
s_{ij}^C(x_i, y_{j+1}) &= f(x_i, y_{j+1}) \\
s_{ij}^C(x_{i+1}, y_j) &= f(x_{i+1}, y_j) \\
s_{ij}^C(x_{i+1}, y_{j+1}) &= f(x_{i+1}, y_{j+1}) \\
\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_i, y_j) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) \\
\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_i, y_j) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) \\
\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_i, y_{j+1}) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_{j+1}) \\
\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_i, y_{j+1}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_{j+1}) \\
\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_{i+1}, y_j) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_j) \\
\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_{i+1}, y_j) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}, y_j) \\
\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_{j+1})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_{i+1}, y_{j+1}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}, y_{j+1})$$
$$\frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_j)$$
$$\frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_i, y_{j+1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_{j+1})$$
$$\frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_j)$$
$$\frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_{j+1})$$

E reescrevamos as condições de interpolação no seguinte formato matricial:

$$\begin{pmatrix} s_{ij}^C(x_i, y_j) & s_{ij}^C(x_i, y_{j+1}) & \frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_i, y_j) & \frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_i, y_{j+1}) \\ s_{ij}^C(x_{i+1}, y_j) & s_{ij}^C(x_{i+1}, y_{j+1}) & \frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) \\ \frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_i, y_j) & \frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_i, y_{j+1}) & \frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) & \frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_i, y_{j+1}) \\ \frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_{i+1}, y_{j+1}) & \frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_i, y_j) & f(x_i, y_{j+1}) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_{j+1}) \\ f(x_{i+1}, y_j) & f(x_{i+1}, y_{j+1}) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_{j+1}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_{j+1}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}, y_{j+1}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) \end{pmatrix}$$

Consideremos, então, a forma matricial do polinômio $s_{ij}^C(x, y)$ fornecida pelo enunciado, reproduzida abaixo:

$$s_{ij}^C(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & (x - x_i) & (x - x_i)^2 & (x - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y - y_j) \\ (y - y_j)^2 \\ (y - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

Temos, finalmente, para cada um dos 16 polinômios $s_{ij}^C(x, y)$:

1) $s_{ij}^C(x_i, y_j)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x_i - x_i) & (x_i - x_i)^2 & (x_i - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y_j - y_j) \\ (y_j - y_j)^2 \\ (y_j - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{00}$$

2) $s_{ij}^C(x_i, y_{j+1})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x_i - x_i) & (x_i - x_i)^2 & (x_i - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y_{j+1} - y_j) \\ (y_{j+1} - y_j)^2 \\ (y_{j+1} - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h_y \\ h_y^2 \\ h_y^3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{00} + a_{01}h_y + a_{02}h_y^2 + a_{03}h_y^3$$

3) $s_{ij}^C(x_{i+1}, y_j)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x_{i+1} - x_i) & (x_{i+1} - x_i)^2 & (x_{i+1} - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y_j - y_j) \\ (y_j - y_j)^2 \\ (y_j - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & h_x & h_x^2 & h_x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{00} + a_{10}h_x + a_{20}h_x^2 + a_{30}h_x^3$$

4) $s_{ij}^C(x_{i+1}, y_{j+1})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x_{i+1} - x_i) & (x_{i+1} - x_i)^2 & (x_{i+1} - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y_{j+1} - y_j) \\ (y_{j+1} - y_j)^2 \\ (y_{j+1} - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & h_x & h_x^2 & h_x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h_y \\ h_y^2 \\ h_y^3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{00} + a_{01}h_y + a_{02}h_y^2 + a_{03}h_y^3 + a_{10}h_x + a_{11}h_xh_y + a_{12}h_xh_y^2 + a_{13}h_xh_y^3 + a_{20}h_x^2 + a_{21}h_x^2h_y + a_{22}h_x^2h_y^2 + a_{23}h_x^2h_y^3 + a_{30}h_x^3 + a_{31}h_x^3h_y + a_{32}h_x^3h_y^2 + a_{33}h_x^3h_y^3$$

5) $\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_i, y_j)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x_i - x_i) & (x_i - x_i)^2 & (x_i - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(y_j - y_j) \\ 3(y_j - y_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{01}$$

6) $\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_i, y_{j+1})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x_i - x_i) & (x_i - x_i)^2 & (x_i - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(y_{j+1} - y_j) \\ 3(y_{j+1} - y_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2h_y \\ 3h_y^2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{01} + 2a_{02}h_y + 3a_{03}h_y^2$$

7) $\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_{i+1}, y_j)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x_{i+1} - x_i) & (x_{i+1} - x_i)^2 & (x_{i+1} - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(y_j - y_j) \\ 3(y_j - y_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & h_x & h_x^2 & h_x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{01} + a_{11}h_x + a_{21}h_x^2 + a_{31}h_x^3$$

8) $\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial y}(x_{i+1}, y_{j+1})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (x_{i+1} - x_i) & (x_{i+1} - x_i)^2 & (x_{i+1} - x_i)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(y_{j+1} - y_j) \\ 3(y_{j+1} - y_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & h_x & h_x^2 & h_x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2h_y \\ 3h_y^2 \end{pmatrix}$$

$= a_{01} + a_{11}h_x + a_{21}h_x^2 + a_{31}h_x^3 + 2(a_{02}h_y + a_{12}h_xh_y + a_{22}h_x^2h_y + a_{32}h_x^3h_y) + 3(a_{03}h_y^2 + a_{13}h_xh_y^2 + a_{23}h_x^2h_y^2 + 3a_{33}h_x^3h_y^2)$

9) $\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_i, y_j)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2(x_i - x_i) & 3(x_i - x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y_j - y_j) \\ (y_j - y_j)^2 \\ (y_j - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= a_{10}$

10) $\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_i, y_{j+1})$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2(x_i - x_i) & 3(x_i - x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y_{j+1} - y_j) \\ (y_{j+1} - y_j)^2 \\ (y_{j+1} - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h_y \\ h_y^2 \\ h_y^3 \end{pmatrix}$$

$= a_{10} + a_{11}h_y + a_{12}h_y^2 + a_{13}h_y^3$

11) $\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_{i+1}, y_j)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2(x_{i+1} - x_i) & 3(x_{i+1} - x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y_j - y_j) \\ (y_j - y_j)^2 \\ (y_j - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2h_x & 3h_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{10} + 2a_{20}h_x + 3a_{30}h_x^2$$

12) $\frac{\partial s_{ij}^C}{\partial x}(x_{i+1}, y_{j+1})$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2(x_{i+1} - x_i) & 3(x_{i+1} - x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (y_{j+1} - y_j) \\ (y_{j+1} - y_j)^2 \\ (y_{j+1} - y_j)^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2h_x & 3h_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h_y \\ h_y^2 \\ h_y^3 \end{pmatrix}$$

$$= a_{10} + a_{11}h_y + a_{12}h_y^2 + a_{13}h_y^3 + 2(a_{20}h_x + a_{21}h_xh_y + a_{22}h_xh_y^2 + a_{23}h_xh_y^3) + 3(a_{30}h_x^2 + a_{31}h_x^2h_y + a_{32}h_x^2h_y^2 + a_{33}h_x^2h_y^3)$$

13) $\frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_i, y_j)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2(x_i - x_i) & 3(x_i - x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(y_j - y_j) \\ 3(y_j - y_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}$$

14) $\frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_i, y_{j+1})$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2(x_i - x_i) & 3(x_i - x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(y_{j+1} - y_j) \\ 3(y_{j+1} - y_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2h_y \\ 3h_y^2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} + 2a_{12}h_y + 3a_{13}h_y^2$$

15) $\frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_j)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2(x_{i+1} - x_i) & 3(x_{i+1} - x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(y_j - y_j) \\ 3(y_j - y_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2h_x & 3h_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} + 2a_{21}h_x + 3a_{31}h_x^2$$

16) $\frac{\partial^2 s_{ij}^C}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_{j+1})$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2(x_{i+1} - x_i) & 3(x_{i+1} - x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(y_{j+1} - y_j) \\ 3(y_{j+1} - y_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2h_x & 3h_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2h_y \\ 3h_y^2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} + 2a_{21}h_x + 3a_{31}h_x^2 + 2(a_{12}h_y + 2a_{22}h_xh_y + 3a_{32}h_x^2h_y) + 3(a_{13}h_y^2 + 2a_{23}h_xh_y^2 + 3a_{33}h_x^2h_y^2)$$

Uma vez com estes 16 valores obtidos, podemos substituir as instâncias de $s_{ij}^C(x, y)$ na nossa matriz e obter a seguinte expressão matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h_x & h_x^2 & h_x^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2h_x & 3h_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 1 & 1 \\ 0 & h_y^2 & 0 & 2h_y \\ 0 & h_y^3 & 0 & 3h_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_i, y_j) & f(x_i, y_{j+1}) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_{j+1}) \\ f(x_{i+1}, y_j) & f(x_{i+1}, y_{j+1}) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_{j+1}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_{j+1}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}, y_{j+1}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) \end{pmatrix}$$

Precisamos isolar os coeficientes. Finalmente, supondo que a matrizes que estão multiplicando a matriz de coeficientes a_{ij} sejam invertíveis (como uma é transposta da outra, apesar dos termos h_x e h_y, basta que apenas uma seja invertível que a outra também será, então a rigor fazemos apenas uma suposição, e não duas), temos que:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{h_x^2} & \frac{3}{h_x^2} & \frac{-2}{h_x} & \frac{-1}{h_x} \\ \frac{2}{h_x^3} & \frac{-2}{h_x^3} & \frac{1}{h_x^2} & \frac{1}{h_x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_i, y_j) & f(x_i, y_{j+1}) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_j) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_{j+1}) \\ f(x_{i+1}, y_j) & f(x_{i+1}, y_{j+1}) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_j) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_{j+1}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_i, y_{j+1}) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1}, y_{j+1}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_j) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_{i+1}, y_{j+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{h_y^2} & \frac{2}{h_y^3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{h_y^2} & \frac{-2}{h_y^3} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{h_y} & \frac{1}{h_y^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{h_y} & \frac{1}{h_y^2} \end{pmatrix}$$

Uma maneira eficiente de calcular os coeficientes para realizarmos o método da interpolação bicúbica.

4 Dedução das derivadas parciais em x, em y e mistas.

5 Considerações Finais (e pessoais)

Do EP2 para este, resolvi alguns problemas de falta de conhecimento que tinha com o *GNU-Octave* para oferecer um código mais limpo e eficiente. A qualidade do código com relação ao último EP está incomparavelmente superior, e desta vez eu estou entregando o EP satisfeito com os resultados obtidos e a qualidade do código. **:p**

Com relação à manipulação de imagens, o problema que eu tive com os índices no EP2 foi aparentemente resolvido neste EP, dado que eu consegui atingir resultados deveras satisfatórios para a interpolação da imagem exemplo. Este EP3 não foi feito copiando e colando o EP2 e 'melhorando as partes ruins'. Tudo foi replanejado e reimplementado, ora até usando outras estruturas de dados, tal como *Struct Arrays*.

Finalmente, como o EP3 sugeriu uma idéia de continuidade do EP2 (e pensando em boas práticas de desenvolvimento de *software*), eu resolvi aproveitar a explicação da dedução dos cálculos dos coeficientes dos métodos de interpolação nessa documentação apenas porque me pareceu a coisa mais correta a se fazer, mesmo que isso não tivesse sido pedido no enunciado. Com isso a documentação fica, de fato, completa.