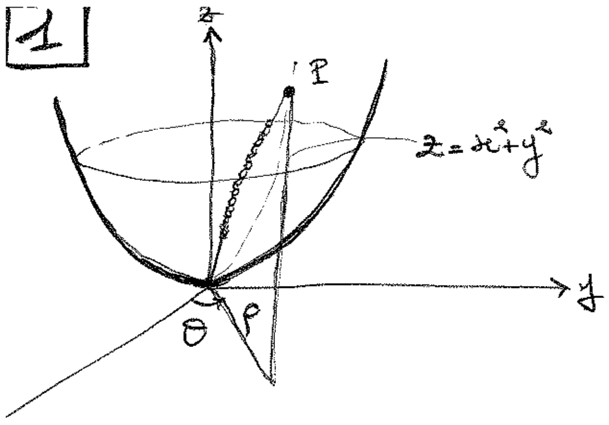
1



IN COORDINATE CILINDRICHE, TENUTO CO-
TO DEL VINCOLO $z=x^2+y^2$, SI HA:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \rho^2 \end{cases}$$

IL MOTO DEL PUNTO P È DUNQUE A 2 GRADI DI LIBERTÀ E PUÒ ESSERE DESCRIT DALLE COORDINATE LAGRANGIANE (ρ, θ).

$$\begin{cases} \dot x = \dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta \\ \dot y = \dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta \\ \dot z = 2\rho\dot\rho \end{cases} \Longrightarrow T = \frac{1}{2}m\left[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + 4\rho^2\dot\rho^2\right]$$

POICHÉ LA LUNGHEZZA A RIPOSO DELLA MOLLA È SUPPOSTA ESSERE $L_0>0$, MENTRE $L=\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho\sqrt{1+\rho^2}$, SI HA:

$$\Delta L = L - L_0 = \rho\sqrt{1+\rho^2} - L_0 .$$

DUNQUE, L'ENERGIA POTENZIALE (SOMMA DI QUELLA GRAVITAZIONALE E DI QUELLA ELASTICA) SARÀ:

$$U = mg\rho^2 + \frac{K^2}{2}\left(\rho\sqrt{1+\rho^2} - L_0\right)^2$$

1. $$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + 4\rho^2\dot\rho^2\right] - mg\rho^2 - \frac{K^2}{2}\left(\rho\sqrt{1+\rho^2} - L_0\right)^2 =$$
$$= \frac{m}{2}(1+4\rho^2)\dot\rho^2 + \frac{m}{2}\rho^2\dot\theta^2 - \left(mg + \frac{K^2}{2}\right)\rho^2 - \frac{K^2}{2}\rho^4 +$$
$$+ \cancel{2}L_0\frac{K^2}{\cancel{2}}\rho\sqrt{1+\rho^2} - \frac{K^2}{2}L_0^2$$

LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE SONO DUNQUE:

$$\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot\theta\right) = 0 \qquad (\theta \text{ È CICLICA}),$$

E L'ALTRA LA OTTENGO COME:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q} = m(1+4\rho^2)\dot\rho$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = -2\left(mg + \frac{K^2}{2}\right)\rho - 2K^2\rho^3 + m\rho\dot\theta^2 + 4m\rho\dot\rho^2 +$$
$$+ K^2L_0\left(\sqrt{1+\rho^2} + \rho^2\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow m(1+4\rho^2)\ddot\rho + 4m\rho\dot\rho^2 - m\rho\dot\theta^2 + 2\left(mg + \frac{K^2}{2}\right)\rho +$$
$$+ 2K^2\rho^3 - K^2L_0\left(\sqrt{1+\rho^2} + \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}}\right) = 0$$

2. LE COSTANTI DEL MOTO DEL SISTEMA SONO PERCIÒ:

$$\begin{cases} J = m\rho^2\dot{\vartheta} \\ E = \frac{m}{2}\left[\dot{\rho}^2 + \frac{J^2}{m^2\rho^2} + 4\rho^2\dot{\rho}^2\right] + mg\rho^2 + \frac{K}{2}^2(\rho\sqrt{1+\rho^2} - L_0 \end{cases}$$

3. PER OTTENERE INFORMAZIONI SUL MOTO DEL SISTEMA USANDO LE DUE COSTANTI J ED E, COSTRUISCO LA FUNZIONE DI WEIERSTRASS:

$$\dot{\rho}^2 = \left\{\frac{2}{m}\left[E - mg\rho^2 - \frac{K}{2}^2(\rho\sqrt{1+\rho^2} - L_0)^2\right] - \frac{J^2}{m^2\rho^2}\right\}\frac{1}{1+4\rho^2} \equiv \phi(\rho; E, J$$

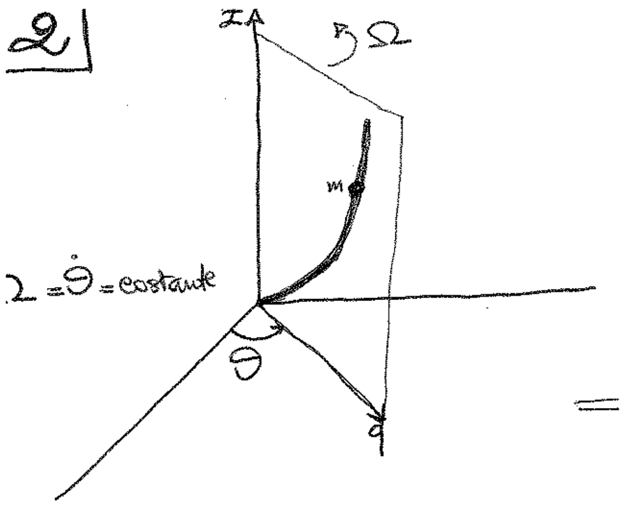
POICHÉ:

$$\phi(0) \longrightarrow -\infty \quad ; \quad \lim_{\rho \to +\infty} \phi(\rho) = -\infty$$

SICURAMENTE IL MOTO SARÀ CONFINATO IN UNA REGIONE TRA ρ_- e ρ_+

ALTRE INFORMAZIONI "IMMEDIATE" NON SE NE POSSONO RICAVARE VISTA LA COMPLESSITÀ DELLA ϕ.

2



IN COORDINATE CILINDRICHE E CON IL VINCOLO $z = q^2$, HO:

$$\begin{cases} x = q\cos\Omega t \\ y = q\sin\Omega t \\ z = q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{q}\cos\Omega t - q\Omega\sin\Omega t \\ \dot{y} = \dot{q}\sin\Omega t + q\Omega\cos\Omega t \\ \dot{z} = 2q\dot{q} \end{cases}$$

1. $T = \frac{1}{2}m\left[\dot{q}^2 + \Omega^2 q^2 + 4q^2\dot{q}^2\right]$; $U = mgq^2$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2}(1+4q^2)\dot{q}^2 + \left(\frac{m}{2}\Omega^2 - mg\right)q^2$$

DUNQUE, ESSENDO DATA Ω = COSTANTE, SI HA 1 UNICO GRAD. DI LIBERTÀ - OVVERO UN'UNICA EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANG

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m(1+4q^2)\dot{q} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 4mq\dot{q}^2 + (m\Omega^2 - 2mg)q$$

$$\Rightarrow m(1+4q^2)\ddot{q} + 4mq\dot{q}^2 - m(\Omega^2 - 2g)q = 0$$

2. IL TERMINE $\frac{m}{2}\Omega^2 q^2$ COMPARE NELL'ENERGIA CINETICA, NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE FISSO, OPPURE COME TERMI POTENZIALE (NON DIPENDE DALLE VELOCITÀ LAGRANGIANE) NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE CON LA GUIDA - TALE SISTE ESSENDO IN ROTAZIONE, È NON INERZIALE - INFATTI, IL TERMINE SUDDETTO RAPPRESENTA L'ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA CE TRIFUGA, CHE È UNA FORZA APPARENTE -

3. POICHÉ LA LAGRANGIANA DEL SISTEMA È INDIPENDENTE DAL TEMPO (IN QUANTO IL PIANO SI MUOVE CON VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE), ED IL VINCOLO È REONOMO, ABBIAMO LA COSTAN DEL MOTO HAMILTONIANA:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{m}{2}(1+q^2)\dot{q}^2 - m\left(\frac{\Omega^2}{2} - g\right)q^2$$

CHE NON COINCIDE CON L'ENERGIA DEFINITA COME $E = T + U$ -
$\mathcal{H}$ COINCIDE PROPRIO CON L'INTEGRALE DELL'EQUAZIONE DEL MO

$\boxed{3}$ DATA IN $\mathbb{R}^2$ LA FAMIGLIA AD 1 PARAMETRO DI TRASFORMAZIONI LINEARI RAPPRESENTATA DA MATRICI:

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

1. SI HA, PER $\theta_0 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1}$$

$\Rightarrow \varphi_{\theta_0}$ COINCIDE CON L'IDENTITÀ.

SI VERIFICA INOLTRE CHE $\varphi_\theta \circ \varphi_\phi = \varphi_{\theta+\phi}$ - INFATTI:

$$\varphi_\theta \circ \varphi_\phi = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\theta\cosh\phi + \sinh\theta\sinh\phi & \cosh\theta\sinh\phi + \sinh\theta\cosh\phi \\ \cosh\theta\sinh\phi + \sinh\theta\cosh\phi & \cosh\theta\cosh\phi + \sinh\theta\sinh\phi \end{pmatrix}$$

POICHÉ È, AD ESEMPIO:

$$\cosh\theta\cosh\phi + \sinh\theta\sinh\phi = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\cdot\frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{2} + \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\cdot\frac{e^{\phi}-e^{-\phi}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{\theta+\phi} + \cancel{e^{\theta-\phi}} + \cancel{e^{-\theta+\phi}} + e^{-(\theta+\phi)} + e^{\theta+\phi} - \cancel{e^{\theta-\phi}} - \cancel{e^{-\theta+\phi}} + e^{-(\theta+\phi)}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\,e^{\theta+\phi} + 2\,e^{-(\theta+\phi)}\right] = \frac{e^{\theta+\phi} + e^{-(\theta+\phi)}}{2},$$

SI RICAVA CHE:

$$\varphi_\theta \circ \varphi_\phi = \begin{pmatrix} \cosh(\theta+\phi) & \sinh(\theta+\varphi) \\ \sinh(\theta+\phi) & \cosh(\theta+\varphi) \end{pmatrix} \equiv \varphi_{\theta+\varphi}.$$

2. FISSATO UN PUNTO $P \equiv (x_0, y_0)$ IN $\mathbb{R}^2$, SE APPLICO AD ESSO IL FLUSSO, OTTENGO:

$$\varphi_\theta(P) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta\cdot x_0 + \sinh\theta\cdot y_0 \\ \sinh\theta\cdot x_0 + \cosh\theta\, y_0 \end{pmatrix}.$$

DUNQUE, AL VARIARE DI (x_0, y_0), SI HANNO LE CURVE INTEGRALI, OVVERO LE LINEE DI FLUSSO:

$$\gamma_P(t) = \varphi_t(P) \Rightarrow \gamma : t \longrightarrow \begin{pmatrix} \cosh t\cdot x_0 + \sinh t\cdot y_0 \\ \sinh t\cdot x_0 + \cosh t\cdot y_0 \end{pmatrix}$$

3. IL GENERATORE INFINITESIMO DEL FLUSSO SI TROVA COME SEGUE:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \cosh t \, x_0 + \sinh t \, y_0 \\ y = \sinh t \, x_0 + \cosh t \, y_0 \end{cases}$$

DERIVANDO, SI OTTIENE:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sinh t \, x_0 + \cosh t \, y_0 \equiv y \\ \dot{y} = \cosh t \, x_0 + \sinh t \, y_0 \equiv x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} .$$

ALTERNATIVAMENTE, IL GENERATORE SI TROVA DERIVANDO LA TRASFORMAZIONE

$$\varphi_t : (x, y) \longrightarrow (\cosh t \, x + \sinh t \, y \, ; \sinh t \, x + \cosh t \, y)$$

RISPETTO A t E PONENDO $t = 0$.