CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Prova d'esame – 29 giugno 2017

TEMA I

Un punto materiale di massa m si muove nel piano xy sotto l'azione di una forza descritta dal potenziale $U = \dfrac{k\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

(1) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana del sistema in coordinate polari (r,θ).
(2) Detto p_2 il momento coniugato alla coordinata angolare, trovare una funzione $f(\theta)$ tale che la funzione $F = (p_2)^2 + f(\theta)$ sia una costante del moto *(usare le parentesi di Posson!)*.
(3) *(solo per i più audaci)* Dalla conservazione dell'energia, $H(p_1,p_2,r,\theta) = E$, immaginare da dove può essere venuta fuori la costante del moto F così ottenuta. Dire se F può essere associata a una simmetria (noetheriana) nello spazio delle configurazioni, e perché.

Svolgimento

In coordinate polari, la lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) + \frac{k\cos\theta}{r^2};$$

la mappa di Legendre è

$$p_1 = m\dot r, \quad p_2 = mr^2\dot\theta$$

e l'hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right) - \frac{k\cos\theta}{r^2}.$$

La parentesi di Poisson fra H e F è

$$\{H,F\} = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_2}{mr^2}\frac{df}{d\theta} - 2p_2\frac{k\sin\theta}{r^2}$$

Quindi per avere $\{H,F\} = 0$ deve essere

$$\frac{df}{d\theta} = 2mk\sin\theta \quad \Rightarrow \quad f(\theta) = -2mk\cos\theta$$

Dalla conservazione dell'hamiltoniana,

$$\frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right) - \frac{k\cos\theta}{r^2} = E$$

si può ottenere, moltiplicando per $2mr^2$ e separando i termini dipendenti da (p_1,r) da quelli dipendenti da (p_2,θ):

$$r^2p_1^2 - 2mr^2E = -p_2^2 + 2mk\cos\theta = -F(\theta,p_2)$$

quindi F, che per definizione dipende da p_2 e da θ, su ogni curva di moto risulta uguale a una funzione dipendente solo da p_1 e da r (poiché E è costante). Questo suggerisce che F sia una costante del moto, cosa che si può verificare in questo modo: poiché

$H = H_1(r,p_1) + \frac{1}{2mr^2}F(\theta,p_2)$, usando la linearità, la regola di Leibnitz e l'antisimmetria delle parentesi di Poisson si ottiene

$$\{H,F\} = \left\{H_1 + \frac{1}{2mr^2}F, F\right\} = \{H_1, F\} + \left\{\frac{1}{2mr^2}, F\right\} F;$$

ma due funzioni, una delle quali dipenda solo da (θ, p_2) e l'altra solo da (r, p_1), sono necessariamente in involuzione; quindi entrambe le parentesi di Poisson a destra di quest'ultima equazione si annullano.
L'integrale primo F non può corrispondere a una simmetria noetheriana: infatti, per il teorema di Noether ogni costante del moto associata a una simmetria nello spazio delle configurazione ha la forma $X^\lambda \dfrac{\partial L}{\partial u^\lambda}$, con $X^\lambda = X^\lambda(q^\mu)$. Quindi la sua immagine nello spazio delle fasi deve essere $X^\lambda p_\lambda$, ossia essere lineare nelle coordinate (naturali) p_λ *(NB si può generalizzare il teorema di Noether in modo da produrre anche costanti del moto della forma* $X^\lambda \dfrac{\partial L}{\partial u^\lambda} + f(q^\mu)$*, ma comunque la dipendenza dai momenti coniugati resta lineare).*

TEMA II

Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali, rispettivamente di massa m_A e m_B. Il primo punto è vincolato a muoversi (senza attrito) su una retta r orizzontale. Il secondo punto è vincolato a muoversi (senza attrito) su una guida circolare, posta in un piano orizzontale, il cui centro O appartiene alla retta r. Fra i due punti agisce una forza elastica attrattiva.

(1) Scrivere la lagrangiana del sistema.
(2) Trovare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e individuare quelle stabili.
(3) Calcolare le frequenze caratteristiche del sistema linearizzato intorno a una configurazione di equilibrio stabile.

Svolgimento

Una scelta conveniente di coordinate lagrangiane è la seguente: nel piano a cui appartiene il sistema, posta l'origine nel punto O, consideriamo l'ascissa x del punto A sulla retta r e l'angolo θ che identifica la posizione del punto B sulla circonferenza a cui è vincolato, calcolato a partire dalla semiretta su r con $x > 0$. Poiché le guide giacciono in un piano orizzontale, la forza peso è ovunque perpendicolare al vincolo e l'unica forza attiva è la forza elastica, con costante $k > 0$. Detto R il raggio della circonferenza, sia trova subito che la lagrangiana del sistema (a meno di una costante) è

$$L = \frac{m_A}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_B R^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{k}{2}(x^2 - 2Rx\cos\theta)$$

Le configurazioni di equilibrio coincidono con i punti stazionari del potenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -kx + kR\cos\theta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -kRx\sin\theta = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni (x^*, θ^*) sono

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad (R, 0), \quad (-R, \pi).$$

La matrice hessiana del potenziale è

$$K = \begin{pmatrix} -k & -kR\sin\theta \\ -kR\sin\theta & -kRx\cos\theta \end{pmatrix},$$

e neile quattro configurazioni di equilibrio l'hessiana di U diventa, rispettivamente

$$\begin{pmatrix} -k & -kR \\ -kR & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -k & kR \\ kR & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2 \end{pmatrix}.$$

Nelle prime due configurazioni, il determinante della matrice hessiana è uguale a $-k^2R^2 < 0$. Pertanto, gli autovalori della matrice devono avere segno opposto e l'equilibrio è instabile (il potenziale ha un punto di sella).
Nelle altre due configurazioni (quelle con $x = \pm R$) gli autovalori della matrice sono entrambi negativi, quindi si tratta di punti di massimo del potenziale e l'equilibrio è stabile.
Le frequenze caratteristiche si ottengono dagli autovalori della matrice

$$\Omega = M^{-1}K = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_B R^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -kR^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m_A} & 0 \\ 0 & -\frac{k}{m_B} \end{pmatrix}$$

e sono pertanto

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_A}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_B}}.$$