Esempi di temi d'esame di Metodi Matematici dalla Meccanica Classica
assegnati negli a.a. 2000/01 e 2001/02

---

1 - Due punti materiali di masse m_1 e m_2 si muovono senza attrito su una retta. Siano x e y le distanze di ciascuno dei due punti da un'origine fissata sulla retta. Fra i due punti agisce una "molla esponenziale" attrattiva, rappresentata dal potenziale $U(x, y) = ke^{(x-y)^2}$. Scrivere le equazioni di Lagrange e due costanti del moto indipendenti. Dire se la costante k deve essere positiva o negativa affinchè la forza sia attrattiva. Scrivere le equazioni di Hamilton e trovare due costanti del moto indipendenti. Dire se ha senso o no studiare il sistema nell'approssimazione lineare. Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi.

---

2 - Un punto materiale si muove in un piano lungo la traiettoria rappresentata dall'equazione cartesiana $y = \cos(x)$. Dire se, per una opportuna legge di percorrenza, il moto può essere centrale, con centro l'origine delle coordinate. La risposta cambia se si suppone che il centro sia diverso? E se si suppone che la traiettoria sia solo un arco della curva data?

---

3 - Scrivere la Lagrangiana e descrivere matematicamente tutte le simmetrie e le leggi di conservazione per una particella materiale che si muove nello spazio tridimensionale, in assenza di vincoli, sotto una forza costante non nulla.

---

4 - Sia $H(q, p, t) = \frac{1}{2} f(t) \left(p^2 + q^2\right)$ la funzione di Hamilton di un sistema unidimensionale, con $f(t)$ funzione qualsiasi. Confrontare il moto del sistema con quello che si avrebbe nel caso $f(t) \equiv 1$. Supponendo che $f(t)$ sia una funzione ovunque positiva e monotona descrescente, dire se per un dato iniziale diverso da $(0, 0)$ il moto nello spazio delle fasi può tendere asintoticamente a $(0, 0)$ per $t \to \infty$, e se il moto nello spazio delle configurazioni può tendere a 0.

---

5 - Scrivere l'Hamiltoniana per una particella materiale che si muove nello spazio tridimensionale, in assenza di vincoli, sotto una forza costante non nulla. Trovare quattro costanti del moto e calcolare tutte le parentesi di Poisson fra le costanti del moto trovate. Dire se il sistema è completamente integrabile.

NOTA: Nei problemi 6 e 8 si suppone che i due punti materiali possano anche sovrapporsi.

---

6 - Due punti materiali di masse m_1 e m_2 si muovono senza attrito su una guida descritta dall'equazione $y = \sin(x)$ in un piano verticale (con l'asse y in direzione verticale). Oltre alla forza peso, fra i due punti agisce una forza elastica (molla con lunghezza a riposo nulla).

a) Scrivere le equazioni di Lagrange e le equazioni di Hamilton del sistema.
b) Scrivere le equazioni linearizzate intorno a una configurazione di equilibrio stabile (a scelta).

7 - Un punto materiale si muove in un piano lungo una traiettoria a spirale, rappresentata in coordinate polari dall'equazione $r = e^\theta$.

a) Assumendo che il moto sia centrale, con centro l'origine delle coordinate, trovare la legge di percorrenza.

b) Descrivere dettagliatamente (anche senza eseguire i calcoli) attraverso quale procedimento si potrebbe ricavare il potenziale della forza a cui è soggetto il punto.

c) Un moto sulla stessa traiettoria potrebbe ancora essere centrale (con una diversa legge di percorrenza) supponendo che il centro sia in un punto diverso dall'origine?

---

8 - Due punti materiali di uguale massa m sono vincolati a muoversi su una superficie sferica. Fra i due punti agisce una forza il cui potenziale dipende solo dalla distanza fra i due punti.

a) Dire qual è lo spazio delle configurazioni del sistema.

b) Trovare le leggi di conservazione per il sistema dato, nel formalismo lagrangiano o in quello hamiltoniano.

c) Calcolare le parentesi di Poisson fra le costanti del moto trovate e dire se il sistema è completamente integrabile.

d) Dire quali leggi di conservazione sarebbero ancora valide (con gli opportuni adattamenti) nel caso in cui il vincolo, anziché corrispondere all'equazione di una sfera, fosse descritto dall'equazione di un ellissoide generico oppure di un ellissoide di rotazione.

9- Siano A e B due punti materiali, di massa m_A e m_B rispettivamente, vincolati a muoversi su due rette parallele. Fra i due agisce una forza elastica. Si suppone che sul sistema non agisca la forza peso e i vincoli siano lisci. Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto in un sistema di coordinate che permetta di disaccoppiare e risolvere completamente le equazioni.

10- Considerare il moto di un punto P vincolato a muoversi sulla superficie di rotazione di equazione $z = \frac{1}{r}$ (in coordinate cilindriche), e soggetto alla forza peso (con l'asse z verticale e orientato verso l'alto).

a) Dire qual è lo spazio delle configurazioni del sistema;

b) Scrivere la lagrangiana del sistema; scrivere le equazioni di Lagrange *oppure* due leggi di conservazione equivalenti alle equazioni di Lagrange.

c) Scrivere l'equazione differenziale che deve essere soddisfatta dalle *traiettorie* del moto $r = r(\theta)$.

11- Sia P un punto materiale di massa m. Su di esso agisce una molla di lunghezza a riposo nulla, costante elastica k e massa trascurabile, con l'altro estremo fissato in un punto O dello spazio. Sul punto agisce anche la forza peso.

a) Dire qual è lo spazio delle configurazioni;

b) Scrivere la lagrangiana del sistema, scegliendo un sistema di coordinate in cui una coordinata è ciclica; ricavare due costanti del moto.

c) Dire come si potrebbe risolvere completamente il sistema nel caso in cui fosse assente la forza peso.

12- Si consideri un sistema formato da due punti materiali di masse m_1 e m_2, posti un piano e soggetti ad una forza di interazione reciproca soddisfacente il "principio di azione e reazione" (forze dirette lungo la congiungente e a somma nulla).

a) Scrivere la forma del potenziale per una generica forza di questo tipo;

b) Scrivere in termini delle coordinate cartesiane dei punti e dei loro momenti coniugati il *momento angolare totale del sistema* (rispetto a un asse perpendicolare al piano), e mostrare che è una costante del moto (usando le parentesi di Poisson).

13- Si consideri un punto materiale che si muove nel semipiano superiore ($y > 0$) del piano cartesiano, con Lagrangiana

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

Scrivere le leggi di conservazione per il sistema e dire se è possibile che il punto, per qualche posizione e velocità iniziali, raggiunga in un tempo finito l'asse x.

14- Considerare il moto (relativistico) di un particella di massa m e carica e, posta in un campo elettrostatico costante parallelo all'asse x.

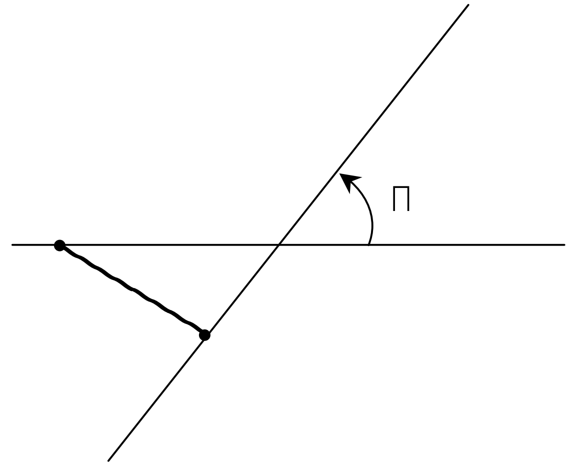
Scrivere la Lagrangiana (in formalismo quadridimensionale); mostrare che il campo vettoriale

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

è una simmetria infinitesima del sistema e calcolare la corrispondente legge di conservazione secondo il teorema di Noether.

15- Scrivere la funzione di Hamilton per una particella classica vincolata a muoversi su un piano e a trovarsi in ogni istante t a distanza $f(t)$ dall'origine, con $f(t)$ funzione assegnata del tempo, in assenza di forze attive. Calcolare la derivata temporale del momento angolare della particella (rispetto all'origine).

16- Si consideri il sistema formato da due punti materiali di uguale massa m, ciascuno dei quali è vincolato a muoversi (senza attrito) lungo una retta. Le due rette sono poste in un piano orizzontale fisso e sono incidenti con un angolo α. Fra i due punti materiali agisce una forza elastica attrattiva.
Determinare lo spazio delle configurazioni, scegliere un sistema di coordinate lagrangiane, scrivere la funzione di Lagrange del sistema, scrivere le equazioni di Lagrange, trovare eventuali costanti del moto.



17- Il potenziale di un *campo di dipolo* nel piano, in coordinate polari, è

$$U(r,\theta) = k\,\frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

(1) Scrivere la funzione di Hamilton di un punto materiale che si muove nel campo di dipolo;

(2) Mostrare che il momento angolare p_2 non è una costante del moto, mentre la quantità $\ell = (p_2)^2 + 2mk\cos(\theta)$ è una costante del moto. Dire se questa quantità può essere associata a una simmetria noetheriana (e perché).

(3) Scrivere l'espressione in coordinate del campo vettoriale X_ℓ sullo spazio delle fasi.

(4) Usando le due costanti del moto del sistema, scrivere un'equazione di Weierstass $\dot{r}^2 = \Phi(r;\ell,E)$ per la sola coordinata radiale.