Analisi II - 2022/23 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 11 settembre 2023

Esercizio 1. [5pt] Sia dato il campo scalare

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\log(1+xy)}$$

(a) Determinare e disegnare il dominio di f, specificando se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, compatto.

(b) Discutere la differenziabilità di f nel punto $(1,1)$; determinare $\partial_v f(1,1)$, con $v = (-1,0)$, e, se possibile, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $\left(1, 1, \frac{2}{\log 2}\right)$.

Soluzione.

(a) Il dominio di f è l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1,\ xy \neq 0\}$. Si tratta di un insieme aperto in quanto intersezione di due aperti di $\mathbb{R}^2$, A è non chiuso, non limitato (per vedere questo basta osservare che i punti della forma $(x_n, y_n) = (1, n)$ con $n \in \mathbb{N}^+$, sono contenuti in A). In particolare A non è compatto.

(b) Esistono le derivate parziali di f in ogni $(x,y) \in A$ e valgono

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(1+xy)\log(1+xy) - y(x+y)}{\log^2(1+xy)(1+xy)};$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{(1+xy)\log(1+xy) - x(x+y)}{\log^2(1+xy)(1+xy)}.$$

La funzione f è quindi di classe C^1 in A, e dato che $(1,1) \in A$ si ha che f è differenziabile in $(1,1)$. Le derivate parziali di f in $(1,1)$ sono quindi date da

$$\partial_x f(1,1) = \frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}; \qquad \partial_y f(1,1) = \frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}.$$

f è differenziabile, quindi per la formula del gradiente, si ha

$$\partial_v f(1,1) = \left(\frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}, \frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}\right) \cdot (-1, 0) = -\frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}.$$

La funzione f è differenziabile, quindi ammette piano tangente dato da

$$z = \frac{2}{\log 2} + \frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}(x-1) + \frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}(y-1) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}x + \frac{\log 2 - 1}{\log^2 2}y + \frac{2}{\log^2 2}.$$

Esercizio 2. [3 pt] Calcolare, o dimostrare che non esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^4)}{x^3 + y^6}.$$

Soluzione: Il limite non esiste, infatti, detta $f(x,y) = \frac{\sin(xy^4)}{x^3+y^6}$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(y^2, y) = \frac{\sin(y^6)}{2y^6} = 1/2.$$

Esercizio 3. [4 pt] Sia dato un campo scalare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$, e la curva $\gamma(t) = (t^2, t^3, e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $g(1,1,e^{-1}) = -1$, e $\nabla g(1,1,e^{-1}) = (-1,1,e)$.

(i) Dire se è ben definita la composizione
$$h = g \circ \gamma$$
($h(t) = g(\gamma(t))$) e, nel caso in cui lo sia, dire tra quali spazi agisce; calcolare, se possibile, $h'(1)$.

(ii) Dire se è ben definita la composizione
$$k = \gamma \circ g,$$
($k(x,y,z) = \gamma(g(x,y,z))$) e, nel caso in cui lo sia, tra quali spazi agisce; calcolare, se possibile, la matrice Jacobiana $Jk(1,1,1)$.

Soluzione. Entrambe le composizioni sono ben definite, e si ha
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$
Poiché sia g che γ sono di classe C^1 possiamo applicare la regola della catena. Essendo $h(t) = g(t^2, t^3, e^{-t})$ e $\gamma'(t) = (2t, 3t^2, -e^{-t})$, otteniamo
$$h'(t) = 2t\frac{\partial g}{\partial x}(t^2, t^3, e^{-t}) + 3t^2\frac{\partial g}{\partial y}(t^2, t^3, e^{-t}) - e^{-t}\,\frac{\partial g}{\partial z}(t^2, t^3, e^{-t}), \text{ e quindi } h'(1) = 0.$$
Per quanto riguarda k, si ha
$$J_k(x,y,z) = \gamma'(g(x,y,z)) \cdot \nabla g(x,y,z),$$
dove il prodotto $\cdot$ denota un prodotto righe per colonne tra matrici. Si ottiene quindi
$$Jk(1,1,1) = \gamma'(g(1,1,e^{-1}))\cdot\nabla g(1,1,e^{-1}) = \gamma'(-1)\cdot\nabla g(1,1,e^{-1}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -e \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2e \\ -3 & 3 & 3e \\ e & -e & -e^2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. [4 pt] Determinare i punti critici del campo scalare
$$f(x,y) = xy^2 + 3x^3 + xy - 300\pi$$
e studiarne la natura. Dire, giustificando la risposta, se la funzione ammette massimo o minimo assoluto sul suo dominio.
(#) La funzione ammette minimo assoluto (o globale) sull'insieme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 2\}$? (domanda facoltativa)

Soluzione. I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} y^2 + 9x^2 + y = 0 \\ 2xy + x = 0 \end{cases}$$
i punti critici sono quindi $P_1(0,0)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1/6,-1/2)$ e $P_4(-1/6,-1/2)$. La matrice Hessiana è data da
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 18x & 2y+1 \\ 2y+1 & 2x \end{pmatrix}$$
Si ha:

$\det Hf(P_1) = \det Hf(P_2) = -1$, quindi P_1 e P_2 sono punti di sella.

$\det Hf(P_3) = 1$, e $\partial^2_{xx} f(P_3) = 3 > 0$, quindi P_3 è un punto di minimo relativo.

$\det Hf(P_4) = 1$, e $\partial^2_{xx} f(P_4) = -3 < 0$, quindi P_4 è un punto di massimo relativo.

Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}^2$; f non ammette massimo e minimo assoluti nel suo dominio, infatti per esempio
$$f(x,0) = 3x^3 - 300\pi \to \pm\infty \quad \text{per} \quad x \to \pm\infty.$$
L'insieme C è chiuso e limitato (ovvero è compatto) e la funzione f è continua su C; quindi, per il Teorema di Weierstrass, f ammette almeno un punto di minimo assoluto su C.

Esercizio 5. [3 pt] Si consideri la superficie parametrica $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), av),$$

dove a è un fissato numero reale positivo. Si stabilisca se σ è una superficie regolare ed in tale caso si determini il versore normale in ogni suo punto.

Soluzione: Osserviamo per prima cosa che $\sigma \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e per calcolo diretto si verifica che

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = (-a \cosh(v) \sin(u), a \cosh(v) \cos(u), 0),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), a).$$

Quindi

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -a \cosh(v) \sin(u) & a \cosh(v) \cos(u) & 0 \\ a \sinh(v) \cos(u) & a \sinh(v) \sin(u) & a \end{vmatrix},$$

da cui segue subito che

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (a^2 \cosh(v) \cos(u), a^2 \cosh(v) \sin(u), -a^2 \cosh(v) \sinh(v)).$$

Inoltre

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| = a^2 \sqrt{\cosh^2(v) + \cosh^2(v) \sinh^2(v)} = a^2 \cosh(v) \sqrt{1 + \sinh^2(v)} > 0$$

per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Quindi σ è una superficie regolare dato che $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ non si annulla mai. Per quanto concerne il versore normale si ha

$$N(u, v) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \|} = \left(\frac{\cos(u)}{\sqrt{1 + \sinh^2(v)}}, \frac{\sin(u)}{\sqrt{1 + \sinh^2(v)}}, -\frac{\sinh(v)}{\sqrt{1 + \sinh^2(v)}} \right).$$

Esercizio 6. [4 pt] Calcolare

$$\iint_A \frac{2x - y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, \ y \leq x, \ y \geq 2x - 2, \ y \geq 0\}$.

Soluzione: Passando a coordinate polari, l'insieme A diventa

$$A' = \left\{ (\rho, \vartheta) : 1 \leq \rho \leq \frac{2}{2 \cos \vartheta - \sin \vartheta}, \ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Si ha quindi che

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{2x - y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy &= \iint_{A'} \frac{2\rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta}{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_1^{\frac{2}{2 \cos \vartheta - \sin \vartheta}} (2 \cos \vartheta - \sin \vartheta) \, d\rho \\ &= \int_0^{\pi/4} (2 \cos \vartheta - \sin \vartheta) \left(\frac{2}{2 \cos \vartheta - \sin \vartheta} - 1 \right) d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi/4} (2 - 2 \cos \vartheta + \sin \vartheta) \, d\vartheta = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 7. [4 pt] Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_A \sqrt{z} \, dx dy dz,$$

dove $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0,\, z \geq 0,\, \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq x\,, x^2+y^2+z^2 \leq 4 \right\}$.

Soluzione. Per calcolare l'integrale integriamo per strati. Osserviamo che essendo $x \geq 0$ allora, da $\frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq x$, si ha pure $y \geq 0$. Inoltre, scrivendo $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ come $x^2+y^2 \leq 4-z^2$, allora, tenuto conto che $z \geq 0$ deduciamo che z varia in $[0,2]$. Se fissiamo $z \in [0,2]$, lo strato $A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, (x,y,z) \in A\}$ si scrive come

$$A_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq x,\, x^2+y^2 \leq 4-z^2 \right\}.$$

Esso corrisponde alla regione di piano contenuta nel primo quadrante compresa fra le rette di equazione $y = \sqrt{3}x$, $y = x$ e contenuta nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $r_z = \sqrt{4-z^2}$. Dalla formula di integrazione per strati abbiamo che

$$\int_A \sqrt{z}\, dxdydz = \int_0^2 \left(\int_{A_z} \sqrt{z}\, dxdy \right) dz = \int_0^2 \sqrt{z} \left(\int_{A_z} 1\, dxdy \right) dz.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale doppio interno passando alle coordinate polari. Tenuto conto che in tali coordinate A_z si scrive come $A'_z := \{(\rho,\theta);\, 0 \leq \rho \leq \sqrt{4-z^2}\,,\, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, abbiamo che

$$\int_{A_z} 1\, dxdy = \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \rho\, d\theta d\rho = \frac{3}{4}\pi \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho\, d\rho = \frac{3}{8}\pi(4-z^2).$$

Quindi

$$\int_A \sqrt{z}\, dxdydz = \frac{3}{8}\pi \int_0^2 \sqrt{z}(4-z^2)\, dz = \frac{3}{8}\pi \left(\left[\frac{8z^{3/2}}{3} \right]_0^2 - \left[\frac{2z^{7/2}}{7} \right]_0^2 \right) = \frac{3}{8}\pi \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{7} \right) = \sqrt{2}\frac{8}{63}\pi.$$

Esercizio 8. [4 pt] Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1+n^\alpha} - 1 \right).$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi pertanto essa converge semplicemente se e solo se converge assolutamente. Osserviamo che se $\alpha \geq 0$ sicuramente non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza perché $\sqrt{n}\left(\sqrt{1+n^\alpha}-1\right) \to +\infty$ per $n \to \infty$. Se $\alpha < 0$, allora risulta che

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{1+n^\alpha} - 1 \right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n^\alpha}{2} = \frac{1}{2n^{-\alpha+\frac{1}{2}}}, \qquad n \to \infty.$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata si ha che la serie converge se e solo se $-\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2}$. In conclusione, se $\alpha < -\frac{1}{2}$, la serie converge assolutamente, mentre se $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, essa non converge neanche semplicemente.