Analisi I - 29/01/24 - Prova Scritta (versione A)

Esercizio 1 (*6 punti*). Si consideri l'equazione differenziale del secondo ordine

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x^2 - 7x + 10.$$

(1a) Determinare le soluzioni dell'equazione omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

che ha soluzioni $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(1b) Determinare le soluzioni dell'equazione completa.

Si ha $x^2 - 7x + 10 = \cos(\theta x) \cdot e^{\mu x} \cdot p_n(x)$, con $p_n(x) = p_2(x) = x^2 - 7x + 10, \theta = 0$, $\mu = 0$. Si usa il metodo di somiglianza. A tal fine, si osserva che, essendo $0 \notin \{3, 1\}$, segue che una soluzione particolare è della forma

$$y_p(x) = x^0 \cdot e^0 \cdot (\alpha x^2 + \beta x + \gamma),$$

con α, β, γ da determinare.

Per determinare α, β, γ calcoliamo le derivate della soluzione particolare e sostituiamo nell'equazione completa. Poiché

$$y_p'(x) = 2\alpha x + \beta$$

e

$$y_p''(x) = 2\alpha,$$

si ottiene $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{13}{9}, \gamma = \frac{32}{27}$. In conclusione

$$y_p(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{9}x + \frac{32}{27}$$

e le soluzioni dell'equazione completa sono

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{9}x + \frac{32}{27}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(1c) Determinare la soluzione dell'equazione completa tale che $y(0) = \frac{1}{9}$ e $y'(0) = 0$.

La condizione $y(0) = \frac{1}{9}$ implica $c_1 + c_2 = -\frac{29}{27}$. La condizione $y'(0) = 0$ implica $3c_1 + c_2 = \frac{13}{9}$. Quindi $c_1 = \frac{34}{27}$ e $c_2 = -\frac{7}{3}$. La soluzione richiesta è

$$y(x) = \frac{34}{27}e^{3x} - \frac{7}{3}e^x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{9}x + \frac{32}{27}.$$

Esercizio 2 (*9 punti*). Sia log il logaritmo naturale. Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = \log|x^2 - x|,$$

rispondendo ai seguenti punti.

(2a) Dominio, simmetrie e periodicità .

La funzione risulta essere definita non appena l'argomento del logaritmo è strettamente positivo; essendo tale argomento un valore assoluto è sufficiente imporre che l'argomento di quest'ultimo non sia nullo, ovvero $x^2 - x \neq 0$. Si conclude che

$$\mathrm{dom} f = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Non risultano né simmetrie né periodicità.

(2b) Limiti agli estremi del dominio.

I limiti della funzione f agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log|x^2 - x| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} \log|x^2 - x| = \lim_{x\to 1^\pm} \log|x^2 - x| = -\infty.$$

Le rette $x = 0$ e $x = 1$ sono quindi asintoti verticali. La funzione non presenta asintoti obliqui, infatti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log|x^2 - x|}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log(x^2 - x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\log|x| + \log(1 - 1/x)}{x} = 0.$$

(2c) Segno e zeri.

Essendo il logaritmo una quantità positiva non appena il suo argomento è maggiore di 1, abbiamo che

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - x| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x \geq 1, & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 1 \\ -x^2 + x \geq 1, & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{nessun valore di } x \end{cases}.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{se } x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ o } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ f(x) = 0, & \text{se } x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ f(x) < 0, & \text{se } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x \neq 0, 1 \end{cases}$$

(2d) Derivata e intervalli di monotonia.

Risulta

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x};$$

dunque, essendo $\frac{2x-1}{x^2-x} \geq 0$ se e solo se $0 < x \leq 1/2$ oppure $x \geq 1$, deduciamo che f decresce su $(-\infty, 0)$, cresce su $(0, 1/2)$, decresce su $(1/2, 1)$ e cresce su $(1, +\infty)$.

(2e) Massimi, minimi e punti di non derivabilità.

La funzione f è derivabile in ogni punto del suo dominio. La funzione f ha un massimo relativo in $x = 1/2$.

(2f) Tracciare un grafico qualitativo di f.