Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 29 Novembre 2013

Esercizio 1 (punti 6).

i) Determinare il raggio di convergenza ρ e l'intervallo (aperto) di convergenza I della serie di potenze reali

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\log^2(n)}{\sqrt{n}}(x-1)^n.$$

ii) Studiare il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo I.

iii) Si dica se la serie converge uniformemente nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

iv) Posto $f(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\log^2(n)}{\sqrt{n}}(x-1)^n$, $x \in I$. Quanto vale la derivata $f'(1)$?

Soluzione. i) Risulta:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\log^2(n+1)}{\log^2(n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

oppure

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\log^2(n)}{n}}}{n^{1/2n}} = 1.$$

(si noti che grazie alla regola di de l'Hopital, $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log(x))^2}{x} = 0$)

Pertanto, il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho = 1$. L'intervallo (aperto) di convergenza è invece $I = (0, 2)$.

ii) In $x = 0$, si ottiene la serie numerica a termini positivi

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\log^2(n)}{\sqrt{n}}$$

che diverge per il criterio del confronto in quanto

$$\frac{\log^2(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq 3,$$

e la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. In $x = 2$, si ottiene la serie a segni alterni

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\log^2(n)}{\sqrt{n}}$$

che converge per il criterio di Leibniz. Infatti, la successione $b_n = \frac{\log^2(n)}{\sqrt{n}}$ tende a 0 per $n \to \infty$ e inoltre è (definitivamente) decrescente. Per vederlo basta studiare il segno della derivata della funzione $f(x) = \frac{\log^2(x)}{\sqrt{x}}$. Per ogni $x > 0$ si ha:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x}\frac{\log(x)}{x} - \frac{\log^2(x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\log(x)}{2x\sqrt{x}}(4 - \log(x)).$$

Poiché $f'(x) < 0$ per $x > e^4$, la successione b_n è definitivamente decrescente. Pertanto la serie converge semplicemente in $x = 2$. Si noti che la serie non converge assolutamente in $x = 2$.

iii) Dal teorema dell'intervallo di convergenza sappiamo che la serie converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I (infatti la serie converge uniformemente in

ogni intervallo $[1-r, 1+r]$ (o $]1-r, 1+r[$) con $0 < r < 1$) e dunque anche in $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ che è contenuto in $[1/2, 3/2]$.
iv) Derivando termine a termine la serie di potenze si trova

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n n \, \frac{\log^2(n)}{\sqrt{n}} (x-1)^{n-1} = 0 + \frac{\log^2(2)}{\sqrt{2}} (x-1) + ...,$$

$x \in (0, 2)$. Pertanto $f'(1) = 0$ (si poteva anche osservare che dalla formula $a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$ segue che $a_1 = f'(1) = 0$).

Esercizio 2 (punti 5).
(i) Utilizzando il teorema di Gauss-Green, calcolare l'area dell'insieme (limitato) E delimitato dal sostegno della curva

$$\bar{\gamma}(\theta) = (\sin^3\theta, \cos^2\theta + \frac{\pi}{2} - \theta),$$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e dagli assi x e y.
(ii) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\bar{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$ uscente dal bordo del solido C,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in E, \ 0 \leq z \leq 2\}.$$

Soluzione. (i) Posto $\bar{\gamma}_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$ e $\bar{\gamma}_2(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1 + \pi/2]$, risulta

$$Area(E) = \int_{+\partial E} x\, dy = \int_{\bar{\gamma}_1} x\, dy - \int_{\bar{\gamma}} x\, dy - \int_{\bar{\gamma}_2} x\, dy$$

(si noti che il sostegno di $\bar{\gamma}$ e' percorso in senso orario). Quindi

$$Area(E) = -\int_0^{\pi/2} (0, \sin^3\theta) \cdot (3\sin^2\theta\cos\theta, -2\cos\theta\sin\theta - 1) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos\theta d\theta + \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.$$

(ii) Usando il teorema della divergenza si trova

$$\int_{\partial C} \bar{F} \cdot \bar{n}_e dS = \iiint_C div\bar{F}(x, y, z) dxdydz$$

$$= \iiint_C dxdydz = 2\, area(E) = \frac{32}{15}.$$

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri la forma differenziale ω_a, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$,

$$\omega_a(x, y) = \frac{2x + 2y}{2x^2 + y^2} dx + \frac{ax + y}{2x^2 + y^2} dy, \quad (x, y) \in D.$$

(i) Si determini il dominio D di ω_a.
(ii) Per quali valori di a, ω_a è chiusa in D?
(iii) In corrispondenza a quei valori di a per cui ω_a è chiusa, calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma \omega,$$

dove γ è il bordo dell'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 = 4$, orientato positivamente.

(iv) Si consideri il campo vettoriale

$$\bar{F}_a(x,y,z) = \Big(\frac{2x+2y}{2x^2+y^2}\,,\,\frac{ax+y}{2x^2+y^2}\,,\,z^2\Big) = \frac{2x+2y}{2x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{ax+y}{2x^2+y^2}\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}.$$

Si determini il dominio di $\bar{F}_a$. In corrispondenza ai valori di a per cui ω_a è chiusa (vedere (iii)) il campo $\bar{F}_a$ è conservativo nel suo dominio ?

Soluzione. (i) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.
(ii) Poniamo $F_1(x,y) = \frac{2x+2y}{2x^2+y^2}$, $F_2(x,y) = \frac{ax+y}{2x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$. Osserviamo che F_1 ed $F_2 \in C^1(D)$.

Per verificare che ω è chiusa in D, occorre verificare che $\partial_y F_1(x,y) = \partial_x F_2(x,y)$, $(x,y) \in D$. Risulta:

$$\begin{cases} \partial_y F_1 &= \frac{-2y^2+4x^2-4xy}{(2x^2+y^2)^2} \\ \\ \partial_x F_2 &= \frac{-2ax^2+ay^2-4xy}{(2x^2+y^2)^2} \end{cases},$$

dunque ω è chiusa in D se $-2y^2+4x^2-4xy = -2ax^2+ay^2-4xy$, cioè per $a=-2$.
(iii) La curva è data da $\bar{\gamma}(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$. Sia $\omega = \omega_{-2}$ la precedente forma chiusa; risulta:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\bar{\gamma}} \omega = \int_{\bar{\gamma}} (F_1 dx + F_2 dy) \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}(\sqrt{2}\cos t + 2\sin t)\sqrt{2}\sin t\,dt + \int_0^{2\pi} \frac{-2\sqrt{2}\cos t + 2\sin t}{4} 2\cos t\,dt = -2\sqrt{2}\,\pi. \end{aligned}$$

(iv) Il dominio E di $\bar{F}_a$ è $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse z (è connesso ma non è semplicemente connesso). Posto $\bar{F} = \bar{F}_{-2}$, se consideriamo

$$\bar{\gamma}_0(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\sin t, 0), \quad t \in [0,2\pi],$$

abbiamo una curva chiusa e regolare (con sostegno contenuto in E) per cui

$$\int_{\bar{\gamma}_0} \bar{F}\cdot \bar{d}s = I = -2\sqrt{2}\,\pi.$$

Dunque poichè l'integrale curvilineo non è nullo, $\bar{F}$ non può essere conservativo in E.

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z) = (y+y^2, xy, xz).$$

(i) Calcolare il flusso del rotore di $\bar{F}$, attraverso la porzione di superficie cartesiana S di equazione

$$z = y^2, \;\text{ con } (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\;\; x \geq 0,\; x^2+y^2 \leq 1\}$$

(il versore normale alla superficie è quello indotto dalla parametrizzazione cartesiana standard).
(ii) Si calcoli il precedente flusso, usando il teorema di Stokes (quindi calcolando un integrale curvilineo).
(iii) Il flusso calcolato in (i) (o in (ii)) è un flusso entrante (cioè diretto verso l'interno del solido di cui S costituisce una parte del bordo) o uscente? Giustificare la risposta.

Soluzione.
(i) S è parametrizzata da $\bar{r}(x,y)=(x,y,y^2)$, $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$.
Si tratta di calcolare

$$I=\iint_S rot\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS=\iint_D rot\bar{F}(\bar{r}(x,y))\cdot\bar{r}_x\wedge\bar{r}_y\,dxdy.$$

Risulta che $\bar{r}_x(x,y)=(1,0,0)$, $\bar{r}_y(x,y)=(0,1,2y)$ e $\bar{r}_x\wedge\bar{r}_y(x,y)=(0,-2y,1)$.
Calcoliamo rot$\bar{F}$.

$$rot\bar{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ y^2+y & xy & xz\end{vmatrix}=(0,-z,-y-1),\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Perciò

$$\begin{aligned}I&=\iint_D(0,-y^2,-y-1)\cdot(0,-2y,1)\,dxdy=\iint_D(2y^3-y-1)\,dxdy=\\&=\int_0^{1/2}dx\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}(2y^3-y)dy\ -\iint_D dxdy=\ \text{(usando la disparita' delle funzioni } 2y^3 \text{ e } y)\\&=-Area(D)=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(ii) Parametrizziamo il bordo orientato positivamente di D, $+\partial D$, attraverso le curve $\bar{\gamma}_i(t)$, $i=1,2$,

$$\bar{\gamma}_1(t)=\Big(\cos t,\sin t\Big),\ t\in[-\pi/2,\pi/2],\qquad -\bar{\gamma}_2(t)=(0,t),\ t\in[-1,1],$$

dove $-\bar{\gamma}_2(t)$ è la curva opposta di $\bar{\gamma}_2(t)$ (ha lo stesso sostegno di $\bar{\gamma}_2$ ma verso opposto).
Il trasformato di $+\partial D$ attraverso $\bar{r}$, cioè $\bar{r}(+\partial D)$, si parametrizza attraverso le curve $\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i(t)$, $i=1,2$,

$$\begin{aligned}&\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1(t)=\big(\cos t,\sin t,\sin^2 t\big),\ t\in[-\pi/2,\pi/2],\\&-(\bar{r}\circ\bar{\gamma}_2)(t)=(0,t,t^2),\quad t\in[-1,1].\end{aligned}$$

Ora calcoliamo il flusso di rot$\bar{F}$ attraverso S, usando il teorema di Stokes, cioè calcoliamo l'integrale curvilineo $J=\int_{+\partial D}\bar{F}\cdot d\bar{s}$. Risulta:

$$\begin{aligned}J&=\int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1}\bar{F}\cdot d\bar{s}+\int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_2}\bar{F}\cdot d\bar{s}\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(\sin^2 t+\sin t,\cos t\sin t,\sin^2 t\ \cos t\big)\cdot\big(-\sin t,\cos t,2\cos t\sin t\big)dt\\&-\int_{-1}^{1}(t^2+t,0,0)\cdot(0,1,2t)dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(-\sin^3 t+\cos^2 t\sin t+2\sin^3 t\cos^2 t-\sin^2 t\big)dt\\&=\ -\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=-\pi/2.\end{aligned}$$

(iii) Il flusso è entrante. Infatti il versore $\bar{n}$ indotto dalla parametrizzazione cartesiana standard assegnata punta sempre verso l'alto (in questo caso $\bar{n}\cdot\bar{k}=\frac{1}{1+y^2}>0$). Inoltre nel nostro caso la superficie ha la concavità rivolta verso l'alto (si tratta di cilindro parabolico). Quindi $\bar{n}$ è la normale entrante per il solido delimitato da S.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}\sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n^x}}-1\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

$\left[e^{\frac{1}{n^x}}\right.$ indica l'esponenziale di $\left.\frac{1}{n^x}\right]$; facoltativo: discutere la convergenza totale della serie.

Soluzione. Si osserva che la serie è a termini non negativi per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, quindi la convergenza semplice e quella assoluta sono equivalenti. Per $x \leq 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n^x}} - 1\right) = +\infty,$$

dunque la serie non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. Per $x > 0$, tale condizione è invece soddisfatta e si ha:

$$\sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n^x}} - 1\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{n^x} = \frac{1}{n^{x-\frac{1}{2}}}.$$

Per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie converge se e solo se $x - \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. In conclusione, la serie converge *solo* per $x > \frac{3}{2}$.

Per quanto riguarda la convergenza totale (che implica quella uniforme), si osserva che la serie converge totalmente su ogni intervallo della forma $[\delta, +\infty)$ con $\delta > 3/2$. Infatti, per $x \in [\delta, +\infty)$ si ha:

$$\sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n^x}} - 1\right) \leq \sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n^\delta}} - 1\right)$$

e la serie

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n^\delta}} - 1\right)$$

con $\delta > 3/2$ converge per gli argomenti precedenti.

Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 13 Dicembre 2013

Esercizio 1 (punti 6). Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 + x - 3}.$$

i) Si determini lo sviluppo di Taylor di f centrato in $x = 0$.
ii) Si determinino il raggio e l'intervallo (aperto) di convergenza I della serie ottenuta.
iii) Si studi il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo I.
iv) Si calcoli $f^{(3)}(0)$ (la derivata terza di f in $x = 0$).

Soluzione. i) Risulta:

$$f(x) = \frac{1}{(2x+3)(x-1)}.$$

Decomponendo f in fratti semplici si ottiene:

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2x+3} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)}.$$

Dunque, purchè $|x| < 1$, si ha:

$$f(x) = -\frac{1}{5} \sum_{n \geq 0} x^n - \frac{2}{15} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{2}{3}\right)^n x^n = -\frac{1}{5} \sum_{n \geq 0} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) x^n.$$

ii) La serie ottenuta ha raggio di convergenza $\rho = 1$, in quanto

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n} = 1.$$

L'intervallo aperto di convergenza è $I = (-1, 1)$.
iii) La serie non converge per $x = -1$ poiché in tale punto si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right),$$

il cui termine generale non tende a 0 per $n \to \infty$. In modo simile, si verifica che la serie non converge neanche per $x = 1$.
iv) Essendo $\frac{f^{(3)}(0)}{6} = a_3$ si trova

$$f^{(3)}(0) = -\frac{6}{5} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4\right) = -\frac{26}{27}.$$

Esercizio 2 (punti 5). Sia $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e ∂E la frontiera dell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \geq 1, \;\; 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\, x, \quad x \leq 3\}.$$

i) Disegnare E.
(ii) Calcolare l'integrale curvilineo di prima specie

$$\int_{\partial E} f \, ds.$$

(iii) Indicare una possibile interpretazione fisica del precedente integrale curvilineo.

Soluzione.
(i) La frontiera ∂E è l'unione dei sostegni delle curve

$$\bar{\gamma}_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [1,3], \ \bar{\gamma}_2 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in \big[0, \frac{\pi}{6}\big], \quad \bar{\gamma}_3 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad t \in \big[\frac{\sqrt{3}}{2}, 3\big],$$

$$\bar{\gamma}_4 : \begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \big[0, \sqrt{3}\big],$$

Pertanto,

$$\int_{\bar{\gamma}} f\, ds = \int_{\bar{\gamma}_1} f\, ds + \int_{\bar{\gamma}_2} f\, ds + \int_{\bar{\gamma}_3} f\, ds + \int_{\bar{\gamma}_4} f\, ds$$

$$= \int_0^{\pi/6} \sin t dt + \frac{2}{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{3} \frac{t}{\sqrt{\frac{4}{3} t^2}}\, dt + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{9+t^2}} dt$$

$$= \frac{5}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

(iii) L'integrale precedente indica, per esempio, la massa di un filo avente la forma di ∂E e densita' lineare di massa $f(\bar{\gamma}(t))$.

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri il campo vettoriale $\bar{F}_{a,b}$ (dipendente dai parametri a, $b \in \mathbb{R}$)

$$\bar{F}_{a,b}\,(x,y,z) = \Big(\frac{2xz^2}{1+x^2z^2},\, 3y^2 \,+ b \,\log(1+x) \,+\, az^2,\, \frac{2x^2 z}{1+x^2z^2} \,+\, 2yz\Big).$$

(i) Si determini il dominio $D_{a,b}$ di $\bar{F}_{a,b}$.

(ii) Per quali valori di a e b, $\bar{F}_{a,b}$ è conservativo in $D_{a,b}$?

(iii) Calcolare il potenziale che vale 1 in $(0,0,0)$ per $\bar{F}_{a,b}$ (in corrispondenza a quei valori di a e b per cui $\bar{F}_{a,b}$ è conservativo).

(iv) Calcolare l'integrale di linea (di seconda specie) $\int_{\bar{\gamma}} \bar{F}_{a,b} \cdot d\bar{s}$, quando $\bar{F}_{a,b}$ è conservativo e

$$\bar{\gamma}(t) = (\cos t \,- 1, \log(1+t), \sin^2 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione.
(i) $D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x > -1\}$, se $b \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$; $D_{a,0} = \mathbb{R}^3$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.
(ii) Si noti che il campo è di classe C^1 nel suo dominio per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Verifichiamo le condizioni necessarie affinché il campo sia conservativo:

$$\begin{cases} \partial_y F_1 = & \partial_x F_2 \\ \partial_z F_1 = & \partial_x F_3 \\ \partial_z F_2 = & \partial_y F_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & = & \frac{b}{1+x} \\ \frac{4xz(1+x^2z^2) - 4z^3x^3}{(1+x^2z^2)^2} & = & \frac{4xz(1+x^2z^2) - 4z^3x^3}{(1+x^2z^2)^2} \\ 2az & = & 2z \end{cases}$$

$$\iff a = 1,\ b = 0.$$

Poiché $D_{1,0} = \mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso, possiamo dire che $\bar{F} = \bar{F}_{1,0}$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$.
(iii) Calcoliamo un potenziale $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ per $\bar{F}$,

$$\bar{F}(x,y,z) = \Big(\frac{2xz^2}{1+x^2z^2},\, 3y^2 \,+ z^2,\, \frac{2x^2z}{1+x^2z^2} \,+\, 2yz\Big).$$

Deve valere $\partial_x U(x,y,z) = U_x(x,y,z) = \frac{2xz^2}{1+x^2z^2}$ da cui

$$U(x,y,z) = \int \frac{2xz^2}{1+x^2z^2}dx = \log(1+x^2z^2)\ + c(y,z),$$

dove $c(y,z)$ è una funzione da determinare. Imponiamo che

$$U_y(x,y,z) = c_y(y,z) \text{ sia } = 3y^2\ + z^2.$$

Segue che $c(y,z) = y^3 + z^2y + h(z)$, con $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da determinare. Imponiamo che

$$U_z(x,y,z) = \frac{2x^2z}{1+x^2z^2}\ + 2yz + h'(z) \text{ sia } = \frac{2x^2z}{1+x^2z^2}\ + 2yz.$$

Segue che $h(z) = k$, con $k \in \mathbb{R}$. Dunque

$$U(x,y,z) = \log(1+x^2z^2) + y^3 + z^2y + k, \ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Scegliendo $k = 1$ si trova il potenziale richiesto.
(iv) Per calcolare l'integrale usiamo il fatto che $\bar{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$. Si ha:

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s} = U(\bar{\gamma}(2\pi)) - U(\bar{\gamma}(0)) = \log^3(1+2\pi).$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(x, 0, \frac{y^2}{2} + 1\right).$$

(i) Si calcoli direttamente il flusso I del rotore di $\bar{F}$, attraverso il sostegno S della superficie $\bar{r}$,

$$\bar{r}(u,v) = (v^2, u^2, uv), \ \ (u,v) \in D,$$

dove $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le u \le 1,\ 1 \le v \le 2\}$ (il versore normale $\bar{n}$ alla superficie e' quello indotto dalla parametrizzazione assegnata).
(ii) Si calcoli il precedente flusso I usando il teorema di Stokes.
(iii) La superficie $\bar{r}$ è regolare e semplice? Quale è il bordo intuitivo di S? (giustificare le risposte).
Soluzione (i) Si tratta di calcolare

$$I = \int_S rot\bar{F} \cdot \bar{n}\, dS = \iint_D rot\bar{F}(\bar{r}(u,v)) \cdot \bar{r}_u \wedge \bar{r}_v\, dudv$$

Risulta che $\bar{r}_u(u,v) = (0, 2u, v)$, $\bar{r}_v(u,v) = (2v, 0, u)$ e

$$\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2u & v \\ 2v & 0 & u \end{vmatrix} = (2u^2, 2v^2, -4uv), \ \ (u,v) \in D.$$

Si trova subito che $\mathrm{rot}\bar{F}(x,y,z) = (y, 0, 0)$. Percio' il flusso del rotore e'

$$I = \iint_D (u^2, 0, 0) \cdot (2u^2, 2v^2, -4uv)\, dudv = 2 \iint_D u^4\, dudv = 2/5.$$

(ii) Parametrizziamo il bordo orientato positivamente di D, $+\partial D$, attraverso le curve $\bar{\gamma}_i(t)$, $i = 1, \ldots, 4$,

$$\bar{\gamma}_1(t) = (t,1),\ t \in [0,1], \qquad \bar{\gamma}_2(t) = (1,t),\ t \in [1,2],$$
$$-\bar{\gamma}_3(t) = (t,2),\ t \in [0,1], \quad -\bar{\gamma}_4(t) = (0,t),\ t \in [1,2],$$

dove $-\bar{\gamma}_3(t)$ e $-\bar{\gamma}_4(t)$ sono le curve opposte di $\bar{\gamma}_3(t)$ e $\bar{\gamma}_4(t)$ (hanno lo stesso sostegno di $\bar{\gamma}_3$ e $\bar{\gamma}_4$ ma verso opposto).

Consideriamo ora il trasformato del bordo $+\partial D$ attraverso $\bar{r}$, cioe' $\bar{r}(+\partial D)$. Questo si parametrizza attraverso le curve $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned}
&\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (1, t^2, t),\ t \in [0,1],\\
&\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) = (t^2, 1, t),\ t \in [1,2],\\
&-\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3(t) = (4, t^2, 2t),\ t \in [0,1],\\
&-(\bar{r} \circ \bar{\gamma}_4)(t) = (t^2, 0, 0),\ t \in [1,2].
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo il flusso di $\mathrm{rot}\bar{F}$ usando il teorema di Stokes, cioe' calcoliamo l'integrale curvilineo

$$J = \int_{\bar{r}(+\partial D)} \bar{F} \cdot d\bar{s}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{i=1}^{4} \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i} \bar{F} \cdot d\bar{s}\\
&= \int_0^1 \left(1, 0, \frac{t^4}{2} + 1\right) \cdot (0, 2t, 1)dt + \int_1^2 (t^2, 0, 3/2) \cdot (2t, 0, 1)dt\\
&- \int_0^1 \left(4, 0, \frac{t^4}{2} + 1\right) \cdot (0, 2t, 2)dt - \int_1^2 (t^2, 0, 1) \cdot (2t, 0, 0)dt = 2/5.
\end{aligned}$$

(iii) $\bar{r}_u(u,v) \wedge \bar{r}_v(u,v) = (2u^2, 2v^2, -4uv) \neq \bar{0}$, per ogni $(u,v) \in D$ (infatti $2v^2 \geq 2$ per ogni $v \in [1,2]$), e questo prova che $\bar{r}$ e' regolare.

D'altra parte se $\bar{r}(u,v) = \bar{r}(u',v')$ per qualche (u,v) e $(u',v') \in D$, deve essere necessariamente $u = u'$ e $v = v'$ (infatti $u^2 = (u')^2$ e $2v^2 = 2(v')^2$ con $u, u', v, v' \geq 0$ implica che $u = u'$ e $v = v'$). Questo dimostra che $\bar{r}$ e' semplice.

Il bordo intuitivo di S coincide con $\bar{r}(+\partial D)$ essendo $\bar{r}$ regolare e semplice.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \left(e^{\cos^n x} - 1\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

[$e^{\cos^n x}$ è l'esponenziale di $(\cos x)^n$]
Facoltativo: la serie converge totalmente in $(0, \pi/2)$?

Soluzione. Si osserva prima di tutto che

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq k\pi \\ 1 & \text{se} \quad x = 2k\pi \\ \text{non esiste se} & x = (2k+1)\pi \end{cases} \quad , k \in \mathbb{Z}.$$

Negli ultimi due casi la serie non converge neanche semplicemente poiché il termine generale non tende a 0. Per $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ovvero se $|\cos x| < 1$, osserviamo che

$$|e^{\cos^n x} - 1| \sim |\cos^n x| = |\cos x|^n$$

(occorre mettere i $|\cdot|$ poichè la serie in generale non è a termini positivi); la serie geometrica

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} |\cos x|^n$$

converge avendo ragione $|\cos x| < 1$. Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie $\sum_{n\geq 1} \left(e^{\cos^n x} - 1\right)$ converge assolutamente e quindi anche semplicemente per $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

E' anche possibile studiare la serie solo per $x \in [0, 2\pi[$ grazie al fatto che $\cos x$ è periodica.

Per quanto riguarda la convergenza totale:

$$a_n = \sup_{x\in(0,\pi/2)} |e^{\cos^n x} - 1| = \sup_{x\in[0,\pi/2]} (e^{\cos^n x} - 1) \geq (e^{\cos^n 0} - 1) = e - 1;$$

dunque a_n non tende a 0 per $n \to \infty$ e la serie non converge totalmente su $(0, \pi/2)$.

Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 2 Settembre 2014

Esercizio 1 (punti 6).
(i) Determinare il raggio di convergenza ρ e l'intervallo (aperto) di convergenza I della serie di potenze reali

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}+(3n)^2}{(4+5^n)n^2}(x-1)^n$$

(ii) Studiare il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza I.
(iii) Verificare che la funzione somma $f(x)$ della serie di potenze e' derivabile nel punto $x=1$. Calcolare $f'(1)$.

Soluzione

(i) Utilizzando il criterio della radice si trova:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{2n}+(3n)^2}{(4+5^n)n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4^n}{5^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{5}.$$

Dunque il raggio di convergenza e' $\rho = \frac{5}{4}$ e l'intervallo aperto di convergenza e' $I = \left(1-\frac{5}{4}, 1+\frac{5}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

(ii) In $x = 9/4$, si trova: $\sum_{n\geq 1} \frac{\left(2^{2n}+(3n)^2\right)}{(4+5^n)n^2} \left(\frac{5}{4}\right)^n$. In $x=-1/4$, si trova: $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\left(2^{2n}+(3n)^2\right)}{(4+5^n)n^2} \left(\frac{5}{4}\right)^n$.
In entrambi i casi il *modulo* del termine generale della serie numerica e'

$$\frac{\left(2^{2n}+(3n)^2\right)}{(4+5^n)n^2} \left(\frac{5}{4}\right)^n \sim \frac{1}{n^2}.$$

La serie numerica a termini positivi $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Dunque la serie di potenze converge assolutamente negli estremi dell'intervallo I.

(iii) Ogni serie di potenze reale ha per somma una funzione f che e' di classe C^∞ nell'intervallo aperto di convergenza I. Il punto $x=1$ appartiene a I e dunque f e' derivabile in $x=1$. Derivando termine a termine la serie di potenze si trova $f'(1) = a_1 = \frac{13}{9}$.

Esercizio 2 (punti 5).
(i) Usando la formula di Gauss-Green, calcolare l'area del dominio limitato $D \subset \mathbb{R}^2$, il cui bordo è formato dalle curve

$$\bar{\gamma}_1(t) = (t^2+t, 1-\cos t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

e $\bar{\gamma}_2(t) = (t^2+t, \cos t - 1), \quad t \in [0, 2\pi]$.
(ii) Utilizzando il teorema della divergenza, calcolare il flusso ϕ del campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = (0,0,z)$$

uscente dal bordo ∂C del solido $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq y+3\}$. (Suggerimento: si osservi che il dominio D e' simmetrico rispetto all'asse x)

Soluzione. (i) Il sostegno di $\bar{\gamma}_1$ è contenuto nel primo quadrante. Il sostegno di $\bar{\gamma}_2$ è il simmetrico del sostegno di $\bar{\gamma}_1$ rispetto all'asse x .

Si osservi che il sostegno di $\bar{\gamma}_1$ è *percorso in senso orario;* infatti $\bar{\gamma}_1(0) = \bar{0}$, $\bar{\gamma}_1(\pi) = (\pi^2+\pi, 2)$ e $\bar{\gamma}_1(2\pi) = (4\pi^2+2\pi, 0)$. Invece il sostegno di $\bar{\gamma}_2$ è percorso in verso antiorario.

Per la formula di Gauss-Green (essendo D un dominio regolare piano) si ha:

$$\text{area}(D) = \iint_D dxdy = \int_{+\partial D} -y\, dx.$$

Il bordo orientato positivamente $+\partial D$ e' l'unione del sostegno orientato di $\bar{\gamma}_1$ percorso nel verso opposto e del sostegno orientato di $\bar{\gamma}_2$.

Dunque si ha:

$$\begin{aligned}\text{area}(D) &= \int_{+\partial D} -y\,dx = \int_{\bar{\gamma}_2} -y dx\ -\ \int_{\bar{\gamma}_1} (-y) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \Big((1-\cos t)(2t+1)\Big) dt\ +\ \int_0^{2\pi} \Big((1-\cos t)(2t+1)\Big) dt = 8\pi^2 + 4\pi.\end{aligned}$$

(ii) Osserviamo che $\bar{F}$ e' di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\phi = \int_S \bar{F} \cdot \bar{n}_e\, dS = \iiint_C div\bar{F}\, dxdydz,$$

dove $\bar{n}_e$ indica la normale esterna ad $S = \partial C$. Poiche' $div\bar{F}(x,y,z) = 1$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, si ha:

$$\phi = \iiint_C dxdydz = Vol(C).$$

Integrando per fili paralleli all'asse z si ha:

$$\phi = \iint_D dxdy \int_0^{y+3} dz = \iint_D (y+3) dxdy$$

Usando la simmetria di D rispetto all'asse x si ha $\iint_D y\ dxdy = 0$ da cui

$$\phi = 3\text{area}(D) = 24\pi^2 + 12\pi.$$

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri la forma differenziale $\omega_{a,b}$, dipendente dai parametri a, $b \in \mathbb{R}$,

$$\omega_{a,b}(x,y) = \frac{2x+2y}{2x^2+y^2} dx + \frac{ax+by}{2x^2+y^2} dy, \quad (x,y) \in E.$$

(i) Si determini il dominio E di $\omega_{a,b}$.

(ii) Per quali valori di a e b, $\omega_{a,b}$ è chiusa in E?

(iii) In corrispondenza a quei valori di a e b per cui $\omega_{a,b}$ è chiusa, calcolare l'integrale di linea $\int_{\bar{\gamma}} \omega$, dove $\bar{\gamma}(t) = (1 + \frac{1}{2}\cos t, \sin t + \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(iv) La forma differenziale $\omega_{a,b}$ è esatta in E per qualche valore di a e di b? Giustificare la risposta.

Soluzione. (i) $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per ogni a, $b \in \mathbb{R}$.

(ii) Poniamo $F_1(x,y) = \frac{2x+2y}{2x^2+y^2}$, $F_2(x,y) = \frac{ax+by}{2x^2+y^2}$, $(x,y) \in E$. Osserviamo che F_1 ed $F_2 \in C^1(E)$.

Per verificare che $\omega_{a,b}$ è chiusa in E, occorre verificare che $\partial_y F_1(x,y) = \partial_x F_2(x,y)$, $(x,y) \in E$. Risulta:

$$\begin{cases} \partial_y F_1 &= \frac{-2y^2+4x^2-4xy}{(2x^2+y^2)^2} \\ \partial_x F_2 &= \frac{-2ax^2+ay^2-4bxy}{(2x^2+y^2)^2} \end{cases},$$

dunque $\omega_{a,b}$ è chiusa in E se $-2y^2 + 4x^2 - 4xy = -2ax^2 + ay^2 - 4bxy$, cioè per $a = -2$ e $b = 1$.

(iii) Poniamo $\omega = \omega_{-2,1}$. Osserviamo subito che $\bar{\gamma}$ e' chiusa (e regolare), infatti $\bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}(2\pi)$ $= (3/2, 1)$. Inoltre per la prima componente si ha $\gamma_1(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos t \geq 1/2$, per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Pertanto il sostegno di $\bar{\gamma}$ (ovvero $\bar{\gamma}([0, 2\pi])$) e' certamente contenuto nel semipiano H,

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 1/3\} \subset E.$$

Essendo H semplicemente connesso in $\mathbb{R}^2$ e ω (piu' precisamente la restrizione di ω ad H) una forma differenziale chiusa in $H \subset E$, si deduce che ω e' anche *esatta* in H. Dunque deve essere

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega = 0.$$

(iv) Dobbiamo solo controllare $\omega_{a,b}$ quando $a = -2$ e $b = 1$. Infatti per gli altri valori dei parametri, $\omega_{a,b}$ non e' chiusa e quindi non puo' essere esatta.

Poniamo $\omega = \omega_{-2,1}$ e consideriamo il bordo dell'ellisse di equazione $2x^2 + y^2 = 2$, orientato positivamente. Ovvero consideriamo $\bar{\phi}(t) = (\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Risulta:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\bar{\phi}} \omega = \int_{\bar{\gamma}} (F_1 dx + F_2 dy) \\ &= \int_0^{2\pi} -(\cos t + \sqrt{2}\sin t)\sin t\, dt + \int_0^{2\pi} \frac{-2\cos t + \sqrt{2}\sin t}{2}\sqrt{2}\cos t\, dt = -2\sqrt{2}\,\pi. \end{aligned}$$

Poiché $\bar{\phi}$ è una curva chiusa e regolare (con sostegno contenuto in E) e $I \neq 0$, ω non è esatta in E (si noti che E è connesso ma non è semplicemente connesso).

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x, y, z) = (z, y, \frac{x^2}{2} + y).$$

(i) Calcolare il flusso del rotore di $\bar{F}$, attraverso la porzione di superficie cartesiana S di equazione

$$z = x^2, \text{ con } (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$$

(il versore normale alla superficie e' quello indotto dalla parametrizzazione cartesiana standard).

(ii) Si calcoli il precedente flusso, usando il teorema di Stokes (quindi calcolando un integrale curvilineo).

(iii) Scrivere il versore normale indotto dalla parametrizzazione cartesiana nel punto $(1, 0, 1)$ della superficie S.

Soluzione. (i) S e' parametrizzata da $\bar{r}(x, y) = (x, y, x^2)$, $(x, y) \in D$. Si tratta di calcolare

$$I = \iint_S rot\bar{F} \cdot \bar{n}\, dS = \iint_D rot\bar{F}(\bar{r}(x, y)) \cdot \bar{r}_x \wedge \bar{r}_y\, dxdy$$

Risulta che $\bar{r}_x(x, y) = (1, 0, 2x)$, $\bar{r}_y(x, y) = (0, 1, 0)$ e

$$\bar{r}_x \wedge \bar{r}_y(x, y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2x, 0, 1), \quad (x, y) \in D.$$

Calcoliamo rot$\bar{F}$.

$$rot\bar{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & y & x^2/2 + y \end{vmatrix} = (1, 1 - x, 0), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Percio'

$$I = \iint_D (1, 1 - x, 0) \cdot (-2x, 0, 1)\ dxdy = \iint_D -2x\, dxdy = -2/3.$$

(ii) Parametrizziamo il bordo orientato positivamente di D, $\partial^+ D$, attraverso le le curve

$$\bar{\gamma}_1(t) = (t, 0),\ t \in [0, 1], \quad \bar{\gamma}_2(t) = (1, t),\ t \in [0, 1], \quad -\bar{\gamma}_3(t) = (t, t),\ t \in [0, 1],$$

dove $-\bar{\gamma}_3(t)$ e' la curva opposta di $\bar{\gamma}_3(t)$ (ha lo stesso sostegno di $\bar{\gamma}_3$ ma verso opposto).

Consideriamo ora il trasformato del bordo $+\partial D$ attraverso $\bar{r}$, cioe' $\bar{r}(+\partial D)$. Questo si parametrizza attraverso le curve $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$,

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (t, 0, t^2), \quad \bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) = (1, t, 1), \quad -(\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3)(t) = (t, t, t^2), \;\; t \in [0, 1].$$

Ora calcoliamo il flusso di $\mathrm{rot}\bar{F}$ usando il teorema di Stokes, cioe' calcoliamo l'integrale curvilineo

$$J = \int_{\bar{r}(+\partial D)} \bar{F} \cdot d\bar{s}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i} \bar{F} \cdot d\bar{s} \\ &= \int_0^1 (t^2, 0, t^2/2) \cdot (1, 0, 2t) dt + \int_0^1 (1, t, 1/2 + t) \cdot (0, 1, 0) dt \\ &- \int_0^1 (t^2, t, t^2/2 + t) \cdot (1, 1, 2t) dt = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(iii) Il versore normale in un generico punto e' $\frac{(-2x,0,1)}{\sqrt{1+4x^2}}$, $(x, y) \in D$. Dobbiamo considerare $x = 1$ e $y = 0$. Si trova $\frac{(-2,0,1)}{\sqrt{5}}$.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{1 + n^{2x}} - 1 \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Facoltativo: Discutere la convergenza totale della serie.

Soluzione. Si osserva prima di tutto che si tratta di una serie a termini non negativi quindi la convergenza puntuale e quella assoluta sono equivalenti. Per $x \geq 0$ la serie non converge perchè il termine generale non tende a 0 per $n \to \infty$. Per $x < 0$ si ha:

$$\sqrt{1 + n^{2x}} - 1 \sim \frac{1}{2} n^{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{-2x}}.$$

Poiché la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{-2x}}$ converge se e solo se $x < -\frac{1}{2}$, si conclude che la serie data converge puntualmente ed assolutamente per $x < -\frac{1}{2}$. Non converge per $x \geq -\frac{1}{2}$.

Per quanto riguarda la convergenza totale osserviamo che la serie non converge totalmente sull'insieme di convergenza $I = (-\infty, -\frac{1}{2})$. Infatti

$$\sup_{x\in I} |\sqrt{1 + n^{2x}} - 1| = \sup_{x\in I} (\sqrt{1 + n^{2x}} - 1) = \sqrt{1 + n^{-1}} - 1 \sim \frac{1}{2n}$$

e dunque la serie

$$\sum_{n\geq 1} \sup_I (\sqrt{1 + n^{2x}} - 1)$$

diverge per confronto con la serie armonica. Tuttavia c'è convergenza assoluta sugli insiemi $I_\delta = (-\infty, \delta)$ per ogni $\delta < -\frac{1}{2}$, in quanto

$$\sup_{x\in I_\delta} (\sqrt{1 + n^{2x}} - 1) = \sqrt{1 + n^{2\delta}} - 1 \sim \frac{1}{2n^{-2\delta}}$$

e la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{-2\delta}}$ converge poiché $\delta < -\frac{1}{2}$.