Analisi I - 20/2/24 - Prova Scritta (versione A)

Esercizio 1 (*6 punti*). Risolvere i seguenti esercizi.

(1a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{t}{t-1}\, dt$$

Si ha

$$\int \frac{t}{t-1}\, dt = \int \frac{t-1+1}{t-1}\, dt = \int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = t + \log|t-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(1b) Calcolare l'area della regione di piano individuata dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1},$$

dalle rette $x = 4$ e $x = 9$ e dall'asse delle x.

Essendo $f(x) > 0$ per $x \in [4, 9]$, l'area A della regione è data

$$A = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\, dx.$$

Operando la sostituzione $\sqrt{x} = t$, si ha $dx = 2tdt$ e dunque

$$A = 2\int_2^3 \frac{t}{t-1}\, dt$$

e per quanto calcolato nel punto (1a)

$$A = 2\left[t + \log(t-1)\right]_2^3 = 2 + 2\log 2.$$

Esercizio 2 (*9 punti*). Sia arctan la funzione arcotangente. Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = 2x + 2\arctan\left(\frac{1}{2x}\right)$$

rispondendo ai seguenti punti.

(2a) Dominio, eventuali simmetrie e periodicità.

Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione è dispari.

(2b) Limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

Poiché f è dispari, è sufficiente calcolare i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to 0^+$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ (= -\lim_{x\to-\infty} f(x))$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \pi \ (= -\lim_{x\to 0^-} f(x)).$$

Non vi sono dunque asintoti verticali né orizzontali. Essendo però

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = 0,$$

la retta $y = 2x$ è un asintoto obliquo.

(2c) Segno e zeri.

Poiché $\arctan(1/x) > 0$ per $x > 0$, si ha $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$; per simmetria, $f(x) < 0$ per $x < 0$. La funzione f dunque non ha zeri.

(2d) Derivata e intervalli di monotonia.

Si ha
$$f'(x) = \frac{8x^2 - 2}{4x^2 + 1}$$
e dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 \geq 1/4$, cioè se e solo se $x \leq -1/2$ o se $x \geq 1/2$. Pertanto la funzione è crescente su $(-\infty, -1/2)$ e su $(1/2, +\infty)$ e decrescente su $(-1/2, 0)$ e su $(0, 1/2)$.

(2e) Eventuali massimi e minimi.

Dall'analisi della monotonia, si deduce che $x = -1/2$ è un punto di massimo locale, mentre $x = 1/2$ è un punto di minimo locale. Non vi sono né massimi né minimi globali.

(2f) Tracciare un grafico qualitativo di f.