Analisi II - 2020/21 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 7 settembre 2021

Esercizio 1. [3 pt] Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2+1}}{\sqrt{2-y}} + \log\big(4(x^2+y^2)-1\big)\,.$$

(a) Determinare il dominio D della funzione e disegnarlo. Stabilire, motivando la risposta, se D è un insieme aperto, chiuso o limitato del piano. D è compatto?

(b) Calcolare, precisandone il campo di esistenza, la derivata parziale di f rispetto ad x.

Soluzione: (a) Il dominio $D = \{(x,y) : x^2-1 \leq y < 2, x^2+y^2 > 1/4\}$ è la regione di piano delimitata inferiormente dalla parabola $y = x^2-1$ e superiormente dalla retta $y = 2$, privata della palla centrata nell'origine e di raggio $1/2$, $B_{1/2}(0)$. I punti della retta e quelli della circonferenza, pur essendo punti del bordo, non appartengono all'insieme: per questo motivo D non è chiuso. I punti del bordo di D e appartenenti alla parabola fanno invece parte dell'insieme: D non è dunque nemmeno aperto. L'insieme è limitato: è ad esempio contenuto in $B_{100}(0)$. D non è chiuso quindi non è compatto.
(b) La derivata parziale richiesta è definita in tutti i punti interni a D, ovvero in ogni $(x,y) \in D$ tale per cui $y-x^2+1 \neq 0$. Abbiamo

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2-y}}\frac{-x}{\sqrt{y-x^2+1}} + \frac{8x}{4(x^2+y^2)-1}.$$

Esercizio 2. [4 pt] Calcolare o dimostrare che non esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a+y^a}{(x^2+y^2)(x+y-1)}$$

quando $a = 1$ e quando $a = 4$.

Soluzione: Nel caso $a = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x,x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x,-x) = 0$ dunque il limite non esiste.
Nel caso $a = 4$, il limite è 0, infatti vale la maggiorazione:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)(x+y-1)}\right| &\leq \left|\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)(x+y-1)}\right| \\ &\leq \left|\frac{x^2+y^2}{x+y-1}\right|\end{aligned}$$

e la funzione $g(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y-1}$ è infinitesima quando ci si avvicina all'origine, infatti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -(x^2+y^2) = 0.$$

Esercizio 3. [4 pt] a) Calcolare la derivata del campo scalare

$$f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2} + e^{x+y}$$

lungo la curva $\gamma(t) = (\sin t + 1, \log(t^2+1), 0)$ quando $t = 0$, giustificando se sia possibile farlo (ovvero $f \circ \gamma$ ben definita e soddisfacente alle ipotesi della regola della catena o, equivalentemente, della derivata di un campo scalare lungo una curva).
b) La curva γ è regolare?

Soluzione: a) Osserviamo che la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Il dominio del campo scalare f è $dom\, f = \{(x,y,z) : (x,y) \neq (0,0)\}$ e f è di classe C^1 sul suo dominio. Si ha $\gamma(0) = (1,0,0)$, dunque la composizione $f \circ \gamma$ è ben definita in un intorno di $t = 0$ e le funzioni sono di classe C^1.
Grazie alla regola della derivata di un campo scalare lungo una curva (oppure la chain rule) si ha

$$\left[\frac{df}{dt} f(\gamma(t))\right]_{|t=0} = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0).$$

Essendo

$$\gamma'(t) = \left(\cos t, \frac{2t}{t^2+1}, 0\right) \quad \Longrightarrow \quad \gamma'(0) = (1,0,0)\,,$$
$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2} + e^{x+y}, -\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2} + e^{x+y}, \frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(1,0,0) = (e,e,1)$$

la derivata richiesta vale e.
b) γ è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e $\gamma'(t) \neq (0,0,0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi la curva è regolare.
Esercizio 4. [4 pt] Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \log(x-y) - \frac{y^3}{3} - x + 2y.$$

a) Determinare i punti critici di f e studiarne la natura.
b) Esistono punti di minimo assoluto?

Soluzione: a) Il vettore gradiente e la matrice hessiana di f in un generico punto del suo dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ sono rispettivamente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x-y} - 1, -\frac{1}{x-y} - y^2 + 2\right), \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x-y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} - 2y \end{pmatrix}.$$

Il campo è di classe $\mathcal{C}^2$ nel suo dominio. I suoi punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1 \\ -\frac{1}{x-y} = y^2 - 2, \end{cases}$$

ovvero $P_1 = (2,1)$ e $P_2 = (0,-1)$. L'hessiana in tali punti è

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque P_1 è un punto di massimo locale (il determinante dell'Hessiana è positivo, l'elemento in alto a sinistra negativo) mentre P_2 è un punto di sella (il determinante dell'Hessiana è negativo).
b) Osserviamo che non ci sono punti di minimo relativo quindi nemmeno assoluto.

Esercizio 5.[3 pt] Verificare che l'equazione

$$\frac{y^2}{2} - \log(1 + x^2 + y^2) + x + xy = 0$$

definisce, in un intorno del punto $(0,0)$, un'unica funzione $x = \varphi(y)$ di classe C^1 tale che $\varphi(0) = 0$. Verificare che $y = 0$ è un punto stazionario per la funzione $\psi(y) = \varphi^2(y) + y\varphi(y)$.

Soluzione. Data $f(x,y) = \frac{y^2}{2} - \log(1 + x^2 + y^2) + x + xy$, è facile verificare che f è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0) = 0$ e che $f_x(x,y) = y - \frac{2x}{1+x^2+y^2} + 1$, pertanto $f_x(0,0) = 1 \neq 0$. Per il teorema di Dini esiste un'unica funzione $x = \varphi(y)$ definita e di classe C^1 in un intorno di $y_0 = 0$ e tale che $\varphi(0) = 0$. Osserviamo inoltre che $\varphi'(0) = -f_y(0,0)/f_x(0,0)$. Poiché $f_y(x,y) = y + x - \frac{2y}{1+x^2+y^2}$, segue che $f_y(0,0) = 0$ e dunque $\varphi'(0) = 0$. Osserviamo infine che $\psi'(y) = 2\varphi(y)\varphi'(y) + \varphi(y) + y\varphi'(y)$ pertanto $\psi'(0) = 0$.

Esercizio 6.[4 pt] Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int_A xye^{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}\,dxdy, \qquad A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}.$$

Soluzione: Utilizzando le coordinate polari $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, si ottiene che

$$\int_A xye^{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}\,dxdy = \int_{A'} \rho^3\sin\theta\cos\theta e^{\rho\sin^2\theta}\,d\rho d\theta,$$

dove

$$A' = \left\{(\rho,\theta) : 1\le\rho\le 2, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\int_{A'} \rho^3\sin\theta\cos\theta e^{\rho\cos^2\theta}\,d\rho d\theta &= \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\cos\theta\cos\theta e^{\rho\cos^2\theta}\,d\rho d\theta \\
&= -\int_1^2 \frac{\rho^2}{2}\left[e^{\rho\cos^2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2 \rho^2(e^\rho-1)\,d\rho \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_1^2 \rho^2 e^\rho\,d\rho - \frac{7}{3}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{4e^2 - e - 2\left([\rho e^\rho]_1^2 - \int_1^2 e^\rho\,d\rho\right) - \frac{7}{3}\right\} \\
&= e^2 - \frac{e}{2} - \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

Esercizio 7.[4 pt] Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_A z(1+\sqrt{x^2+y^2})\,dxdydz, \qquad A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 1, x^2+y^2\le z^2\}.$$

Soluzione: Utilizzando le coordinate cilindriche $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$, si ha che

$$\int_A z(1+\sqrt{x^2+y^2})\,dxdydz = \int_{A'} z\rho(1+\rho)\,d\rho d\theta dz,$$

dove

$$A' = \{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le\theta\le\pi, 0\le\rho\le 1/\sqrt{2}, \rho\le z\le\sqrt{1-\rho^2}\}.$$

Dunque risulta

$$\begin{aligned}
\int_{A'} z\rho(1+\rho)\,d\rho d\theta dz &= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\rho+\rho^2)\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}} z\,dzd\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2\rho^2)(\rho+\rho^2)\,d\rho \\
&= .\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\rho-2\rho^3+\rho^2-2\rho^4)\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{2}+\frac{\rho^3}{3}-\frac{2\rho^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{15\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 8.[4 pt] Discutere la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^2+n+1}.$$

Soluzione. Osserviamo che si tratta di una serie a segni alterni. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, la serie non converge assolutamente in quanto

$$\left|(-1)^n\frac{n+2}{n^2+n+1}\right| = \left|\frac{n+2}{n^2+n+1}\right| \sim \frac{1}{n}, \quad n\to\infty,$$

e la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ è divergente, quindi diverge anche la serie di partenza per il criterio del confronto asintotico. Per la convergenza semplice possiamo utilizzare il criterio di Leibniz. Infatti, osserviamo che la successione $b_n = \frac{n+2}{n^2+n+1} > 0$ tende a 0 per $n \to \infty$ ed è decrescente. Infatti, considerando la funzione $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x+1}$, questa risulta derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2} < 0 \qquad \text{per} \quad x \in [0, +\infty).$$

Dunque, f è decrescente su $(0, +\infty)$ e pertanto anche la successione b_n lo è. La serie è quindi una serie di Leibniz e pertanto converge.