1 Integrali I.

Esercizio 1.1

Studiare la funzione
$$f(z) = \frac{z^3}{2z^4 + 1}$$
e calcolare l'integrale
$$\oint_C f(z)\, dz \qquad \text{com} \qquad C = z : |z| = 1$$

Soluzione

- Denominatore

  Il denominatore $2z^4 + 1$ ha zeri semplici in:
  $$z^4 = -\frac{1}{2}, \qquad\qquad z = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{2}}, \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}, \frac{e^{i\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}, \frac{e^{i\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}.$$
  Inoltre ha un polo di ordine 4 all'infinito. Ponendo infatti $z = 1/t$, abbiamo che
  $$2z^4 + 1 = 2\left(\frac{1}{t}\right)^4 + 1 = \frac{2}{t^4} + 1 = \frac{2 + t^4}{t^4}$$
  ha un polo di ordine 4 in $t = 0$, quindi ha polo di ordine 4 in $z = \infty$.

- Numeratore

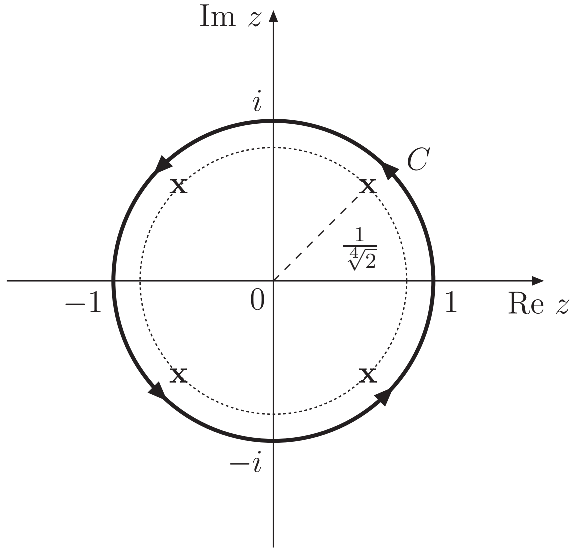
  Il numeratore z^3 ha uno zero triplo in $z = 0$.

  Inoltre ha un polo di ordine 3 all'infinito. Ponendo infatti $z = 1/t$, abbiamo che
  $$z^3 = \left(\frac{1}{t}\right)^3 = \frac{1}{t^3}$$
  ha un polo di ordine 3 in $t = 0$, quindi ha polo di ordine 3 in $z = \infty$.

Quindi la funzione $f(z)$ ha:

- poli semplici in $z = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{2}}, \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}, \frac{e^{i\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}, \frac{e^{i\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}},$
- uno zero di ordine 3 in $z = 0$.
- uno zero semplice in $z = \infty$ (polo di ordine 3 del numeratore e polo di ordine 4 del denominatore).

Per calcolare l'integrale, notiamo che tutte le singolarità al finito (i quattro poli semplici) sono interne alla curva C (circonferenza di raggio 1).



Possiamo quindi sfruttare che la somma di tutti i residui al finito più quello all'infinito è zero:

$$\sum_{z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}} \{\mathrm{Res}\, f(z)\} = \sum_{z\in\mathbb{C}} \{\mathrm{Res}\, f(z)\} + \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = 0$$

Avremo quindi:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i\Bigg[\{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=\frac{e^{i\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}} + \{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=\frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}} \\ &\qquad + \{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=\frac{e^{i\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}} + \{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=\frac{e^{i\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt[4]{2}}}\Bigg] \\ &= -2\pi i\,\{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=\infty} = 2\pi i\,\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0}\end{aligned}$$

La funzione

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} = \frac{\frac{1}{t^3}}{\frac{2+t^4}{t^4}}\,\frac{1}{t^2} = \frac{1}{2+t^4}\,\frac{1}{t}$$

ha un polo semplice in $t=0$. Quindi avremo:

$$\oint_C f(z)\,dz = -2\pi i\,\{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=\infty} = 2\pi i\,\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0} = 2\pi i\,\lim_{t\to 0} t\,\frac{1}{2+t^4}\,\frac{1}{t} = i\,\pi.$$

Esercizio 1.2

Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}^+,$$

Soluzione

L'integrale è ben definito, perché non ha singolarità sul cammino d'integrazione (la retta reale) e perché va a zero per x che tende a $\pm\infty$ più velocemente di $1/x$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\, f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^{2n}} = 0, \qquad\qquad n \geq 1$$

Vogliamo calcolare l'integrale usando la chiusura del cammino di integrazione all'infinito. Immergiamo quindi la retta reale di x nel piano complesso di z (quindi $x = \operatorname{Re} z$) e abbiamo che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}, \qquad\qquad n \geq 1$$

soddisfa

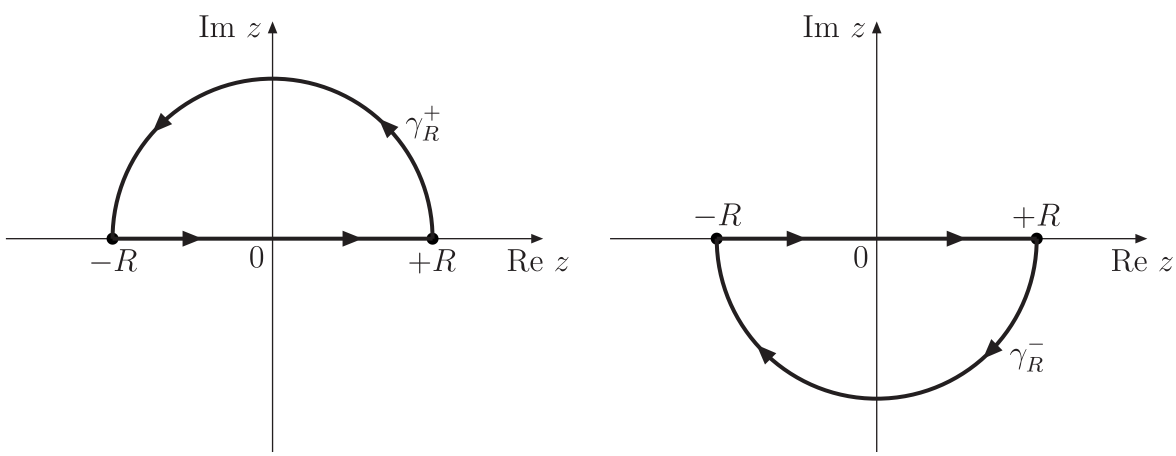
$$\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0.$$

Infatti, facendo la sostituzione $z = 1/t$, abbiamo

$$\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, \frac{1}{1+\frac{1}{t^{2n}}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{2n-1}}{t^{2n}+1} = 0, \qquad \text{per} \qquad n \geq 1$$

Possiamo quindi "chiudere" il cammino di integrazione nel piano complesso sia nel semipiano superiore che nel semipiano inferiore:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma_R^+} f(z)\, dz = \lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma_R^-} f(z)\, dz.$$



Scegliamo di chiuderlo nel semipiano superiore (γ_R^+), in modo da avere un cammino percorso in senso antiorario. Pertanto

$$I = \lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma_R^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \{\operatorname{Res} f(z)\}\, .$$

Studiamo le singolarità della funzione $f(z)$, che è una funzione fratta. Il numeratore non ha singolarità al finito, mentre il denominatore si annulla se

$$1 + z^{2n} = 0 \quad\Rightarrow\quad z^{2n} = -1 \quad\Rightarrow\quad z = (-1)^{\frac{1}{2n}} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}}, \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

I punti

$$z_k = e^{i\pi\frac{2k+1}{2n}}, \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1$$

cioè

$$\ldots,\quad z_{-2} = e^{-i\frac{3\pi}{2n}},\quad z_{-1} = e^{-i\frac{\pi}{2n}},\quad z_0 = e^{i\frac{\pi}{2n}},\quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{2n}},\quad \ldots$$

sono tutti zeri semplici del denominatore e quindi poli semplici della funzione. I poli z_k giacciono nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$ se

$$0 < \frac{2k+1}{2n}\pi < \pi \quad\Leftrightarrow\quad 0 < 2k+1 < 2n \quad\Leftrightarrow\quad -1 < 2k < 2n-1 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2} < k < n-\frac{1}{2}.$$

Essendo k un numero intero, questo equivale a

$$0 \le k \le n-1.$$

Quindi abbiamo

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \{\operatorname{Res} f(z)\} = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=z_k}\, .$$

Il residuo di $f(z)$ nel polo z_k vale

$$\{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=z_k} = \lim_{z\to z_k} \left\{ (z-z_k)\frac{1}{1+z^{2n}} \right\} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{2n\, z^{2n-1}} = \frac{z_k}{2n z_k^{2n}} = -\frac{z_k}{2n}.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato che:

$$z_k^{2n} = e^{i\pi(2k+1)} = -1.$$

Pertanto, ricordando che

$$1 - w^n = (1-w)(1+w+\cdots+w^{n-1}) = (1-w)\sum_{k=0}^{n-1} w^k \qquad\Rightarrow\qquad \sum_{k=0}^{n-1} w^k = \frac{1-w^n}{1-w},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{z_k}{2n}\right) = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi}{2n}(2k+1)} = -\frac{i\pi}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^k = -\frac{i\pi}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \frac{1-\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} \\ &= -\frac{i\pi}{n} e^{\frac{i\pi}{2n}} \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} = -\frac{i\pi}{n} \frac{1-(-1)}{e^{-\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i\pi}{2n}}} = \frac{\pi}{n} \frac{2i}{e^{\frac{i\pi}{2n}} - e^{-\frac{i\pi}{2n}}} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}, \end{aligned}$$

che è reale e positivo (l'argomento del seno è sempre compreso tra 0 e $\pi/2$ per $n \ge 1$), come l'integrale di partenza ci lasciava prevedere.

Esercizio 1.3

Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin^2(x)}{x^2} \, .$$

Soluzione

Vediamo prima se l'integrale esiste. Al finito, dobbiamo verificare che la funzione non abbia delle singolarità non integrabile. L'unico punto potenzialmente problematico al finito è $x = 0$. Dato che il limite per $x \to 0$ della funzione esiste, quindi al finito non abbiamo delle singolartià non integrabile. All'infinito, la funzione deve annullarsi più vlocemente di $1/x$. Dato che

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \, \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 0 \, ,$$

quindi l'integrale esiste.
Proviamo a trovare I nel piano complesso, scrivendo

$$I = \int_\sigma dz \frac{\sin^2(z)}{z^2} \, ,$$

con σ un cammino di integrazione che va da $-\infty$ a ∞ sulla retta reale. Per utilizzare la chiusura del cammino di integrazione secondo il Lemma di Jordan, scriviamo il seno in termine di funzioni esponenziali

$$\begin{aligned} I = & -\frac{1}{4} \int_\sigma dz \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2}{z^2} \\ = & -\frac{1}{4} \int_\sigma dz \left(\frac{e^{i2z}}{z^2} + \frac{e^{-i2z}}{z^2} + \frac{2}{z^2} \right) . \end{aligned}$$

Vogliamo scrivere I in termini di tre integrali, delle funzioni $f_1 = \frac{e^{i2z}}{z^2}$, $f_2 = \frac{e^{-i2z}}{z^2}$, $f_3 = \frac{1}{z^2}$. Prima di "spezzare" l'integrale, dobbiamo però deformare il cammino di integrazione per non passare per il punto $z = 0$, che è un polo doppio di f_1, f_2, f_3. Scriviamo quindi

$$\begin{aligned} I = & -\frac{1}{4} \int_{\tilde\sigma} dz \left(\frac{e^{i2z}}{z^2} + \frac{e^{-i2z}}{z^2} + \frac{2}{z^2} \right) \\ = & -\frac{1}{4} \left(\int_{\tilde\sigma} dz \frac{e^{i2z}}{z^2} + \int_{\tilde\sigma} dz \frac{e^{-i2z}}{z^2} + \int_{\tilde\sigma} dz \frac{1}{z^2} \right) , \end{aligned}$$

con $\tilde\sigma$ un cammino di integrazione che non passa per il punto $z = 0$. Questo cammino può passare sia sopra che sotto la singolarità $z = 0$. Scegliamo sotto e risolviamo gli integrali, notando che se il cammino si può chiudere sotto, l'integrale si annulla dato che non ci sarebbero delle singularità all'interno del cammino.

- $I_1 \equiv \int_{\tilde{\sigma}} dz \dfrac{e^{i2z}}{z^2}$

  La funzione dentro l'integrale è della forma $g(z)\, e^{i\alpha z}$, con $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ e $\alpha > 0$, quindi dobbiamo chiudere sopra:

$$
\begin{aligned}
I_1 = \int_{\tilde{\sigma}} dz \frac{e^{i2z}}{z^2} &= \int_{\gamma^+} dz \frac{e^{i2z}}{z^2} \\
&= 2\pi i \mathrm{Res} \left\{ \frac{e^{i2z}}{z^2} \right\}_{z=0} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\, z^2 \frac{e^{i2z}}{z^2}\,,
\end{aligned}
$$

  dove il cammino γ^+ è un cammino chiuso sopra il semipiano immaginario positivo. L'integrale I_1 e uguale a $2\pi i$ moltiplicato per il residuo della funzione per $z = 0$, dato che quella è l'unica singolarità dentro il cammino di integrazione (polo doppio). Abbiamo

$$
\begin{aligned}
& I_1 = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\, z^2 \frac{e^{i2z}}{z^2} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \left(i\, 2\, e^{i2z} \right) \\
\Longrightarrow\ & I_1 = -\, 4\, \pi\,.
\end{aligned}
$$

- $I_2 \equiv \int_{\tilde{\sigma}} dz \dfrac{e^{-i2z}}{z^2}$

  La funzione dentro l'integrale è della forma $g(z)\, e^{i\alpha z}$, con $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ e $\alpha < 0$, quindi dobbiamo chiudere sotto (l'integrale si annulla)

$$
I_2 = 0\,.
$$

- $I_3 \equiv \int_{\tilde{\sigma}} dz \dfrac{1}{z^2}$

  In questo caso non vale il lemma di Jordan. Invece, dato che la funzione dentro l'integrale va a zero più velocemente di $1/z$ per $z \to \infty$

$$
\lim_{z\to\infty} z \frac{1}{z^2} = 0\,,
$$

  possiamo scegliere chiudere sia sotto che sopra. In ogni caso, l'integrale si annulla

$$
I_3 = 0\,.
$$

Metendo tutto insieme abbiamo

$$
I = -\frac{1}{4} \Big(-4\pi + 0 + 0 \Big) = \pi\,.
$$

Esercizio 1.4

Calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2}, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}^+, \qquad a \neq b.$$

Soluzione

Vediamo se l'integrale è ben definito. La funzione

$$F(x) = \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2}$$

va a zero per x che tende a $\pm\infty$ più velocemente di $1/x$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\, F(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x} = 0.$$

Vediamo ora se non ha singolarità sul cammino d'integrazione (la retta reale). $F(x)$ è una funzione fratta. Il numeratore non ha singolarità al finito. Quindi le uniche possibili singolarità vengono dagli zeri del denominatore. Il denominatore ha un solo zero doppio in $x = 0$. Vediamo come si comporta la $F(x)$ per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2a\sin(2ax) + 2b\sin(2bx)}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-4a^2\cos(2ax) + 4b^2\cos(2bx)}{2} = 2(b^2 - a^2).
\end{aligned}$$

Un altro modo di vedere questa cosa è quello di considerare lo sviluppo di Taylor del coseno intorno a $x = 0$:

$$\cos(2ax) = 1 - \frac{(2ax)^2}{2} + \frac{(2ax)^4}{24} + \ldots \qquad \cos(2bx) = 1 - \frac{(2bx)^2}{2} + \frac{(2bx)^4}{24} + \ldots$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \left[2b^2 - 2a^2 + \frac{(2a)^4 x^2}{24} - \frac{(2b)^4 x^2}{24} + \ldots \right] = 2(b^2 - a^2).$$

Quindi $F(x)$ non ha singolarità sull'asse reale e l'integrale I è ben definito.
Vogliamo ora calcolare l'integrale usando la chiusura del cammino di integrazione all'infinito. Ora, se immergiamo la retta reale di x nel piano complesso di z (quindi $x = \operatorname{Re} z$), abbiamo che per la funzione

$$F(z) = \frac{\cos(2az) - \cos(2bz)}{z^2}$$

vale

$$\lim_{z\to\infty} z\, F(z) \neq 0.$$

Infatti, la funzione $F(z)$ ha una singolarità essenziale all'infinito (a causa dei coseni), che non può essere compensata da nessun polo del denominatore (che ha un polo doppio all'infinito). Quindi non si può applicare la chiusura del cammino direttamente su I. Se però riscriviamo i coseni a numeratore come

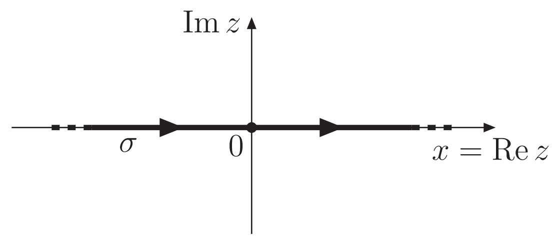
$$\cos(2ax) = \frac{e^{2iax} + e^{-2iax}}{2}, \qquad \cos(2bx) = \frac{e^{2iab} + e^{-2iab}}{2},$$

abbiamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{2iax} + e^{-2iax} - e^{2ibx} - e^{-2ibx}}{2x^2}$$

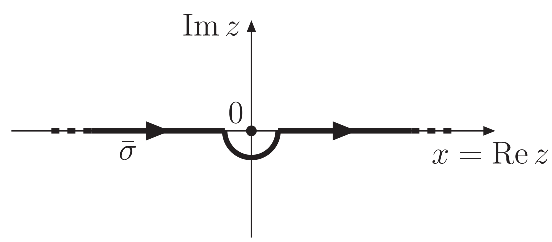
Per procedere con la chiusura del cammino di integrazione, dovremmo separare i quattro integrali e trattarli singolarmente. Se lo facciamo però, notiamo che i quattro integrandi, considerati singolarmente, non sono definiti, poiché ognuno di essi presenta un polo (doppio) sul cammino d'integrazione. Tuttavia, come visto precedentemente, la loro somma riproduce la $F(x)$, che non ha singolarità sul cammino d'integrazione. Torniamo quindi all'integrale di partenza e lo scriviamo come un integrale nel piano complesso della funzione $F(z)$ sulla curva σ che va da $-\infty$ a $+\infty$ sulla retta reale:

$$I = \int_\sigma dz\, F(z) = \int_\sigma dz\, \frac{\cos(2az) - \cos(2bz)}{z^2}$$



Visto che siamo nel piano complesso, grazie al teorema di Cauchy, l'integrale non cambia se il cammino d'integrazione viene deformato con continuità senza incontrare singolarità e lasciando invariati il punto di partenza ($-\infty$) e quello d'arrivo ($+\infty$). Usiamo questa proprietà per modificare il cammino d'integrazione e aggirare il punto $z = 0$. Possiamo farlo come vogliamo. Scegliamo di aggirare $z = 0$ andando nel semipiano immaginario negativo e calcoliamo l'integrale lungo la curva $\bar{\sigma}$ in figura:

$$I = \int_{\bar{\sigma}} dz\, F(z) = \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{\cos(2az) - \cos(2bz)}{z^2}$$



Il nuovo cammino di integrazione $\bar{\sigma}$ è omotopicamente equivalente al cammino originale σ e quindi, per il corollario al teorema di Cauchy, il risultato dell'integrale calcolato sui due cammini è lo stesso.
Dopo aver deformato il cammino di integrazione, possiamo spezzare l'integrale nella somma dei quattro integrali:

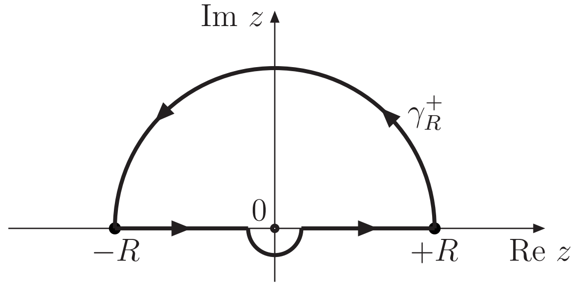
$$I = \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{2iaz}}{2z^2} + \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{-2iaz}}{2z^2} - \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{2ibz}}{2z^2} - \int_{\bar{\sigma}} dz\, \frac{e^{-2ibz}}{2z^2}$$

Le funzioni integrande del primo e terzo integrale sono del tipo

$$f(z) = e^{i\alpha\, z} g(z), \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+ \qquad \lim_{z\to\infty} g(z) = 0$$

e possiamo applicare il lemma di Jordan, chiudendo l'integrale nel semipiano immaginario positivo:

$$\begin{aligned}
\int_{\bar\sigma} dz\, \frac{e^{2iaz}}{2z^2} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} dz\, \frac{e^{2iaz}}{2z^2} \\
\int_{\bar\sigma} dz\, \frac{e^{2ibz}}{2z^2} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} dz\, \frac{e^{2ibz}}{2z^2}
\end{aligned}$$

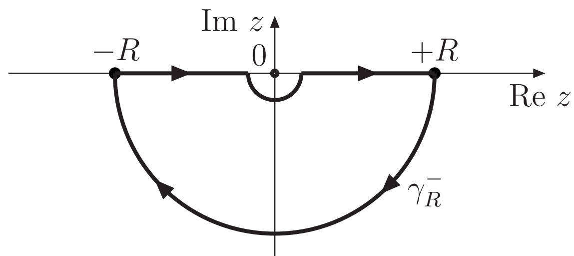


Invece le funzioni integrande del secondo e quarto integrale sono del tipo

$$f(z) = e^{-i\alpha\, z} g(z), \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+ \qquad \lim_{z\to\infty} g(z) = 0.$$

e possiamo applicare il lemma di Jordan, chiudendo l'integrale nel semipiano immaginario negativo:

$$\begin{aligned}
\int_{\bar\sigma} dz\, \frac{e^{-2iaz}}{2z^2} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} dz\, \frac{e^{-2iaz}}{2z^2} \\
\int_{\bar\sigma} dz\, \frac{e^{-2ibz}}{2z^2} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} dz\, \frac{e^{-2ibz}}{2z^2}
\end{aligned}$$



Essendo $z = 0$ l'unica singolarità (polo doppio) al finito delle funzioni integrande, possiamo calcolare gli integrali con il teorema dei residui:

$$\begin{aligned}
\int_{\bar\sigma} dz\, \frac{e^{2iaz}}{2z^2} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} dz\, \frac{e^{2iaz}}{2z^2} = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res} \frac{e^{2iaz}}{2z^2} \right\}_{z=0} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{e^{2iaz}}{2z^2} \right] = -\,2\pi a, \\
\int_{\bar\sigma} dz\, \frac{e^{2ibz}}{2z^2} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} dz\, \frac{e^{2ibz}}{2z^2} = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res} \frac{e^{2ibz}}{2z^2} \right\}_{z=0} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{e^{2ibz}}{2z^2} \right] = -\,2\pi b, \\
\int_{\bar\sigma} dz\, \frac{e^{-2iaz}}{2z^2} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} dz\, \frac{e^{-2iaz}}{2z^2} = 0, \\
\int_{\bar\sigma} dz\, \frac{e^{-2ibz}}{2z^2} &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} dz\, \frac{e^{-2ibz}}{2z^2} = 0.
\end{aligned}$$

I due integrali su γ_R^- fanno zero perché la regione che ha γ_R^- come bordo non contiene nessuna singolarità dell'integrando. Mettendo insieme i quattro integrali si ottiene:

$$I = -\,2\pi a + 0 - (-\,2\pi b) - 0 = 2\pi(b - a).$$

Si noti che l'integrale è correttamente reale ed antisimmetrico per scambio $a \leftrightarrow b$.