Analisi I - 13/6/24 - Prova Scritta (versione A)

Esercizio 1 (*6 punti*). **Esercizio 1** (*6 punti*). Determinare le soluzioni della seguente equazione differenziale:

$$y'(x) + (\sin x)y(x) = \sin x.$$

Si tratta di una equazione del primo ordine lineare. Risulta

$$y(x) = e^{\cos x}\Big(\int e^{-\cos x}\sin x\ dx + c\Big) = e^{\cos x}(e^{-\cos x} + c) = 1 + c\ e^{\cos x},\ c \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 2 (*9 punti*). Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\sin x}}{\sin x}$$

rispondendo ai seguenti punti.

(2a) Dominio, eventuali simmetrie e periodicità .

Risulta $\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione f è 2π-periodica.

(2b) Limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

Risulta, per $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to 2k\pi^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to (2k+1)\pi^{\pm}} f(x) = \mp\infty.$$

(2c) Segno e zeri.

Risulta $f(x) < 0$ per $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, e $f(x) > 0$ per $x \in ((2k)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Risulta $f(x) \neq 0$ $\forall x$.

(2d) Derivata e intervalli di monotonia.

Risulta

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}\ (e^{\sin x})\ \cos x\ (\sin x - 1.)$$

Pertanto,

$$f'(x) \leq 0 \iff x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$$

e

$$f'(x) \geq 0 \iff x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right) \cup \left(\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

(2e) Eventuali massimi e minimi.

I punti $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo relativo ed i punti $\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, sono punti di massimo relativo.

(2f) Tracciare un grafico qualitativo di f.