TUTORATO - Serie di funzioni, serie di potenze in campo complesso e in campo reale, sviluppi in serie di potenze di funzioni razionali, funzioni trascendenti in C

Esercizio 1: Per ciascuna delle seguenti serie di funzioni di variabile reale si determinino gli insiemi di convergenza semplice e assoluta e si studi la convergenza uniforme.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2+x+1)^n$

$I_s = I_a = \{ x \in \mathbb{R} : \quad |x^2+x+1| < 1 \}$

$x^2+x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ perché $\Delta < 0$

$|x^2+x+1| < 1 \iff x^2+x < 0 \iff -1 < x < 0$

$\Longrightarrow I_s = I_a = (-1, 0)$.

Convergenza unif. in $[a, b]$ $\forall a, b$ con $-1 < a < b < 0$.

(b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{2+n|x|}$

$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2+n|x|} \sim \frac{e^{-x}}{n|x|}$ per $n \to \infty$ se $x \neq 0$

$\sum \frac{1}{n} = \infty \Longrightarrow \sum f_n(x) = \infty$

$\sum f_n(0) = \sum \frac{1}{2} = \infty$.

$\Longrightarrow I_s = I_a = \emptyset$.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + (\log n)^x}$

$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x + (\log n)^x}$

$\forall x < 0 \quad n^x \to 0$ e $(\log n)^x \to 0$ per $n \to \infty$

quindi $f_n(x) \not\to 0$

Se $x=0$ $\quad f_n(0) = \frac{(-1)^n}{2} \not\to 0$.

Dunque $I_s \subset (0,\infty)$. Siccome $\frac{n}{\log n} \to \infty$, si ha che $|f_n(x)| \sim \frac{1}{n^x}$ per $n\to\infty$. Quindi $I_a = (1,\infty)$.

Essendo la successione $\frac{1}{n^x+(\log n)^x}$ decrescente, per Leibniz $\sum f_n(x)$ converge per ogni $x>0$.

Quindi $I_s = (0,\infty)$, $I_a = (1,\infty)$.

Posto $s(x) = \sum_2^\infty f_n(x)$ e $s_n(x) = \sum_{k=2}^n f_n(x)$, dalla stima del resto data dal criterio di Leibniz abbiamo che

$$| s_n(x) - s(x) | \le |f_{n+1}(x)| \le |f_{n+1}(\delta)| \quad \forall x \ge \delta > 0 .$$

Essendo $f_{n+1}(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ otteniamo che $\sum f_n$ converge uniformemente in $[\delta,\infty)$ $\forall \delta>0$ (ma non in $(0,\infty)$),

(d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n e^{nx}}{n}$

Chiamo $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{nx}}{n}$.

Se $x>0$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Se $x=0$ $\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ e $\sum f_n(0)$ converge ma non assolutamente

Se $x<0$ $\quad |f_n(x)| < \left(e^{-|x|}\right)^n \quad \sum |f_n(x)| < \infty$

$\Longrightarrow I_s = (-\infty,0]$, $I_a = (-\infty,0)$.

Se $x \in (-\infty,-\delta]$ con $\delta>0$ allora $|f_n(x)| \le \left(e^{-\delta}\right)^n$ convergenza totale. Quindi convergenza uniforme in $(-\infty,-\delta]$ $\forall \delta>0$.

Si può provare convergenza uniforme in $(-\infty, 0]$ usando la stima del resto data dal criterio di Leibniz (perché la serie è a termini di segno alterno).

Detta $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nx}}{n}$ e $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{e^{kx}}{k}$,

si ha che

$$|s(x) - s_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \qquad \forall x \in (-\infty, 0]$$

$\Longrightarrow \sup_{x \leq 0} |s_n(x) - s(x)| \longrightarrow 0$ cioè convergenza unif. in $(-\infty, 0]$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3n^4}$

Chiamo $f_n(x) = \frac{x}{x^4 + 3n^4}$ e osservo che f_n è continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e $f_n(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$.

Calcolo $M_n = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$. Essendo f_n dispari, basta considerare $f_n(x)$ per $x > 0$.

$$f_n'(x) = \frac{x^4 + 3n^4 - 4x^4}{(x^4 + 3n^4)^2} = \frac{3(n^4 - x^4)}{(x^4 + 3n^4)^2} = 0 \text{ per } x > 0$$

se e solo se $x = n$.

$$f_n(n) = \frac{n}{n^4 + 3n^4} = \frac{1}{4n^3}.$$

$\Longrightarrow M_n = \frac{1}{4n^3}$. Essendo $\sum M_n < \infty$ concludo che $\sum f_n$ converge totalmente in $\mathbb{R}$. Quindi $I_s = I_a = \mathbb{R}$ e si ha convergenza uniforme in $\mathbb{R}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3x+n^2}$

$f_n(x) = \dfrac{\log(1+nx)}{n^3x+n^2}$ definita in $(-\frac{1}{n},\infty)$.

$$\bigcap_{n\geq 1} (-\tfrac{1}{n},\infty) = [0,\infty) = S$$

Dobbiamo considerare solo $x \geq 0$.

In $x=0$ $\quad f_n(0)=0$

In $x>0$ $\quad f_n(x)>0$

$$\log(1+t) \leq t \quad \forall t\geq 0 \implies f_n(x) \leq \frac{nx}{n^3x+n^2} \leq \frac{nx}{n^3x} = \frac{1}{n^2}.$$

$$\implies \sup_{x\geq 0} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

$\implies \sum f_n$ converge totalm. in $[0,\infty)$.

$\implies I_s = I_a = (0,\infty)$, convergenza uniforme in $[0,\infty)$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^2}{1+nx^2}\right)^n$

Chiamo $f_n(x) = \left(\dfrac{1+x^2}{1+nx^2}\right)^n$ — osservo che $f_n(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n$.

In $x=0$ $\quad f_n(x)=1$ e $\sum f_n(0)=\infty$.

Se $|x|>\varepsilon$ $\quad f_n(x) \leq \displaystyle\sup_{|x|\geq\varepsilon} f_n(x)$

$$f_n'(x) = n\left(\frac{1+x^2}{1+nx^2}\right)^{n-1} \frac{2x(1+nx^2)-2nx(1+x^2)}{(1+nx^2)^2} < 0$$

se $x\geq\varepsilon$.

$$\implies \sup_{|x|\geq\varepsilon} |f_n(x)| = f_n(\varepsilon) \leq \left(\frac{1+\varepsilon^2}{1+2\varepsilon^2}\right)^n = M_n$$

Dato che $\sum M_n < \infty$ ho convergenza totale in
$(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$ $\forall \varepsilon > 0$.

$\Longrightarrow I_s = I_a = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Convergenza uniforme in $(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$ $\forall \varepsilon > 0$
ma non in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(h) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{(2|\sin x|)^n} - 1 \right]$$

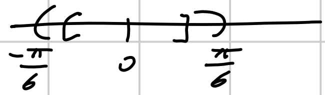
Chiamo $f_n(x) = e^{(2|\sin x|)^n} - 1$

Deve essere $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e quindi $(2|\sin x|)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ciò succede se e solo se $2|\sin x| < 1$ cioè
se e solo se $|x| < \frac{\pi}{6} \mod \pi$

In tal caso $f_n(x) \sim (2|\sin x|)^n$ per $n \to \infty$
e $\sum f_n(x)$ converge assolutamente.

$$\Longrightarrow I_s = I_a = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right)$$



Non ci può essere convergenza unif. in I_S.

Se $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + \varepsilon + k\pi, \frac{\pi}{6} - \varepsilon + k\pi \right]$ allora $|\sin x| \leq \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varepsilon\right)$

$$|f_n(x)| \leq e^{\left[2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varepsilon\right)\right]^n} - 1 = M_n$$

$M_n \sim \left[2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varepsilon\right)\right]^n$ $\quad \sum M_n < \infty$ perché $2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varepsilon\right) \in (0,1)$

$\Longrightarrow$ convergenza (totale) uniforme in $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + \varepsilon + k\pi, \frac{\pi}{6} - \varepsilon + k\pi \right]$

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n x^n}$$

$f_n(x) = \dfrac{\log(1+nx)}{n x^n}$ definita in $\left(-\frac{1}{n}, 0\right) \cup (0, \infty) = S_n$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n' = (0,\infty)$. Devo considerare solo $x>0$.

$f_n(x) > 0 \quad \forall x>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

$\log(1+t) \le t \quad \forall t>0. \implies f_n(x) \le \frac{nx}{nx^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \le \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-1}}$

se $x \geq 1+\varepsilon > 1$

$\implies \sum \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{n-1} < \infty$ se $\varepsilon>0$ $\implies$ convergenza totale in $[1+\varepsilon,\infty)$.

Se $0<x\le 1$ $f_n(x) \geq \frac{\log(1+nx)}{n}$ e $\sum \frac{\log(1+nx)}{n}$ diverge.

$\implies I_S = I_a = (1,\infty)$
e convergenza uniforme in $[1+\varepsilon,\infty)$ $\forall\varepsilon>0$
ma non in $(1,\infty)$.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$.

Chiamo $f_n(x) = n^x x^n$.

Si ha che $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff x\in[-1,1)$.

Per $x=-1$ $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ e la serie converge ma non assolut.

Per $|x|\le\delta<1$ $|f_n(x)| \le n^\delta \delta^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^\delta\delta^n < \infty$.

$\implies$ $\sum f_n$ converge totalm. in $[-\delta,\delta]$.
M-test

Dunque $I_S = [-1,1)$, $I_a = (-1,1)$. Convergenza uniforme in $[-\delta,\delta]$ $\forall\delta>0$. Posso provare anche convergenza uniforme in $[-1,-\frac{1}{2}]$: sia $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Per $x\in[-1,-\frac{1}{2}]$ $\sum f_n(x)$ è una serie a termini di segno alterno

Inoltre $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$ $\forall n$, $\forall x \in [-1, -\frac{1}{2}]$. Infatti

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{(n+1)^x \, |x|^{n+1}}{n^x \, |x|^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x |x| \underset{|x| \leq 1}{\leq} \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \underset{x \geq -\frac{1}{2}}{\leq} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} < 1 .$$

Inoltre $f_n(x) \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$.

Sono dunque soddisfatte le condizioni del criterio di Leibniz e possiamo stimare il resto nel modo seguente

$$|s(x) - s_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = (n+1)^x \, |x|^{n+1} \underset{x \in [-1, -\frac{1}{2}]}{\leq} (n+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \sup_{x \in [-1, -\frac{1}{2}]} |s(x) - s_n(x)| \longrightarrow 0$$

Dunque $\sum f_n$ converge unif. in $[-1, -\frac{1}{2}]$

Dato che converge unif. in $[-\frac{1}{2}, \delta]$ $\forall \delta \in (0,1)$ possiamo concludere che $\sum f_n$ converge uniform. in $[-1, \delta]$ $\forall \in (0,1)$.

Esercizio 2: Delle seguenti serie di potenze in campo complesso si determini quanto specificato.

(a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$ disco di convergenza

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

$\Longrightarrow R = 4$

$D = \{ z \in \mathbb{C} : \ |z| < 4 \}.$

(b) $\sum \frac{(1-2i)^{n^2}}{n(n^2+1)} (z-1)^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|1-2i|^n}{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n^2+1}} = \frac{(\sqrt{5})^n}{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n^2+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \qquad \Longrightarrow R = 0$$

La serie converge solo in $z = 1$.

(c) $\sum \frac{n}{n!+i} z^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{|(n+1)!+i|} \frac{|n!+i|}{n} = \frac{n+1}{n} \frac{\left|1+\frac{i}{n!}\right|}{(n+1)\left|1+\frac{i}{(n+1)!}\right|} \longrightarrow 0$$

$\Longrightarrow R = \infty$

$I_s = I_a = \mathbb{C}$ convergenza unif. nei dischi $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ $\forall r > 0$.

(d) $\sum \left(\sqrt{4n^2+\sqrt{n}} - 2n\right)(z-i)^n$

$$a_n = \frac{\cancel{4n^2} + \sqrt{n} - \cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2+\sqrt{n}} + 2n} \sim \frac{1}{4\sqrt{n}} \Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow 1$$

$\Longrightarrow$ disco aperto di convergenza $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$

Convergenza unif. sui dischi $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq r\}$ $\forall r \in (0,1)$

ma non in D se no convergerebbe anche in $\overline{D}$ che non è vero perché in $z = i + 1$ non converge (è la serie $\sum a_n$, divergente per il criterio asintotico).

(e) $\sum \left(\sqrt{e^{2n} + n} - e^n \right) z^n$

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{e^{2n}+n} + e^n} \sim \frac{n}{2e^n} \Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow \frac{1}{e} \Longrightarrow R = e.$$

$$a_n R^n = \frac{n e^n}{\sqrt{e^{2n}+n} + e^n} = \frac{n}{1 + \sqrt{1 + \frac{n}{e^{2n}}}} \longrightarrow \infty$$

$\Longrightarrow I_s = I_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| < e\}.$

Convergenza unif in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ $\forall r \in (0, e)$ ma non in I_s.

Esercizio 3: Determinare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie di potenze in campo reale. Studiarne inoltre la convergenza uniforme.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - 1\right) x^n$

$x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n!} - 1$, $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \implies R = 1$

In $x = \pm 1$ la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo.

$I_s = I_a = (-1, 1)$, convergenza unif. in $[-r, r]$ $\forall r \in (0,1)$.

(b) $\sum_{2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(\log n)^n}$

$x_0 = 1$, $a_n = \frac{1}{(\log n)^n}$, $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0 \implies R = \infty$

$I_a = I_s = \mathbb{R}$, convergenza unif. in $[-r, r]$ $\forall r > 0$.

(c) $\sum_{1}^{\infty} \left(2^{3n} + 3^{2n}\right)(x-2)^n$

$x_0 = 2$, $a_n = 8^n + 9^n$, $\frac{1}{R} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 9 \implies R = \frac{1}{9}$

In $x = 2 \pm \frac{1}{9}$ non c'è convergenza perché il termine generale della serie $(8^n + 9^n)\frac{(\pm 1)^n}{9^n} \not\to 0$.

$I_a = I_s = \left(\frac{17}{9}, \frac{19}{9}\right)$ conv. unif. in $\left[\frac{17}{9} + \varepsilon, \frac{19}{9} - \varepsilon\right]$ $\forall \varepsilon > 0$.

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n e^{-n}}{n^2+1} x^n$

$x_0 = 0 \quad a_n = \frac{n e^{-n}}{n^2+2} \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+2}}\, e^{-1} \longrightarrow e^{-1} \implies R = e.$

$\sum \frac{n e^{-n}}{n^2+1} e^n = \sum \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

$\sum \frac{n e^{-n}}{n^2+1} (-e)^n = \sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \le 0$ per $x \geq 1$

$\implies$ la succ. $\frac{n}{n^2+1}$ è decrescente

$\implies$ La serie converge per Leibniz.

Quindi $I_S = [-e, e)$, $I_a = (-e, e)$

Convergenza uniforme in $[-e, r]$ $\forall r < e$.

Esercizio 4. Ricordando che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$ per $x \in [-1,1)$

si determini l'insieme di convergenza semplice e la funzione somma delle seguenti serie e se ne discuta l'uniforme convergenza:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \sum_{1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \underset{-1\le t<1}{=} -\log(1-t) \underset{x\le -1 \,\vee\, x>1}{=} -\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$I = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.

La convergenza è uniforme in $(-\infty, -1] \cup [1+\varepsilon, \infty)$ $\forall \varepsilon > 0$.

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(3x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-3x)^n}{n+1} = \frac{1}{2-3x}\sum_{0}^{\infty} \frac{(2-3x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2-3x}\sum_{1}^{\infty}\frac{(2-3x)^n}{n}$$

$$= -\frac{1}{2-3x}\log(1-2+3x) = \frac{1}{3x-2}\log(3x-1) .$$ Per $x = \frac{2}{3}$ vale 1.

$x \neq \frac{2}{3}$, $-1 \le 2-3x < 1$

La funzione somma è $$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 2/3 \\ \frac{\log(3x-1)}{3x-2} & x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Convergenza uniforme in $\left[\frac{1}{3}+\varepsilon, 1\right]$ $\forall \varepsilon > 0$.

c) $$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

So che $-\log(1-x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ in $[-1,1)$ con convergenza uniforme in $[-1, r]$ $\forall r \in (0,1)$.

$$\Longrightarrow \int_0^x -\log(1-t)\,dt = \int_0^x \sum_{1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\,dt = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^x t^n\,dt =$$

conv. unif. in $[0,x]$ se $x \in (0,1)$ o in $[x,0]$ se $x \in [-1,0)$.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Inoltre $$\int_0^x -\log(1-t)\,dt = -t\log(1-t)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt =$$

$$= -x\log(1-x) + \int_0^x \left(\frac{1-t}{1-t} - \frac{1}{1-t}\right)dt =$$

$$= -x\log(1-x) + x + \log(1-x) = x + (1-x)\log(1-x)$$

$$\Longrightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x}\log(1-x) \qquad \forall x \in [-1,1).$$

La serie converge uniformemente in $[-1,1]$. La funzione somma si può estendere per continuità in 1 con valore 1.

Esercizio 5: Per ciascuna delle seguenti funzioni di variabile reale si scriva lo sviluppo in serie di potenze centrato nel punto x_0 indicato e si determini l'intervallo di convergenza della serie trovata.

a) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} \qquad x_0 = 0$

$$f(x) = (1+x)\frac{1}{1-x} = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n$$

$$I = (-1,1)$$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{3x^2+6x-24} \qquad x_0 = 0$

$$3x^2+6x-24 = 0 \qquad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+3\cdot 24}}{3} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

$$3x^2+6x-24 = 3(x-2)(x+4)$$

$$\frac{2x}{3x^2+6x-24} = \frac{A}{3(x-2)} + \frac{B}{x+4} = \frac{Ax+4A+3Bx-6B}{3(x-2)(x+4)}$$

$$\begin{cases} A+3B = 2 \\ 4A-6B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2A+6B = 4 \\ 4A-6B = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 6A = 4 & A = \frac{2}{3} \\ 6B = 4A = \frac{8}{3} & B = \frac{4}{9} \end{matrix}$$

$$f(x) = \frac{2}{9}\frac{1}{x-2} + \frac{4}{9}\frac{1}{x+4} = \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{4}{9}\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{9}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{9}\sum_{0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{4^n}\right)x^n$$

$$R = \min\{|2|, |-4|\} = 2 \Longrightarrow I = (-2,2).$$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+2)(x-3)} \qquad x_0 = 0$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x + (-3A+2B)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+2B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1-B \\ -3+3B+2B=1 \end{cases} \qquad B = \frac{4}{5} \quad A = \frac{1}{5}.$$

$$f(x) = \frac{1}{5}\,\frac{1}{x+2} + \frac{4}{5}\,\frac{1}{x-3} = \frac{1}{10}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} - \frac{4}{15}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$= \frac{1}{10}\sum_0^\infty \left(-\frac{x}{2}\right)^n - \frac{4}{15}\sum\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_0^\infty \frac{1}{5}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{4}{3^{n+1}}\right]x^n$$

$R = \min\{|-2|, |3|\} = 2 \qquad I = (-2, 2).$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+7x} \qquad x_0 = -3$

$t = x+3 \qquad x = t-3 \qquad 2x^2+7x = 2(t^2-6t+9) + 7(t-3) = 2t^2 - 5t - 3$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-3)} = \frac{A}{2t+1} + \frac{B}{t-3} = \frac{(A+2B)t + (-3A+B)}{(2t+1)(t-3)}$$

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ -3A+B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -2B \\ 6B+B=1 \end{cases} \qquad B = \frac{1}{7} \quad A = -\frac{2}{7}$$

$$f(x) = -\frac{2}{7}\,\frac{1}{1-(-2t)} - \frac{1}{21}\,\frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{2}{7}\sum_0^\infty (-2t)^n - \frac{1}{21}\sum_0^\infty \left(\frac{t}{3}\right)^n$$

$$= \sum_0^\infty \left[-\frac{2}{7}(-2)^n - \frac{1}{21}\,\frac{1}{3^n}\right](x+3)^n$$

$R = \min\{|3|, |-\tfrac{1}{2}|\} = \tfrac{1}{2} \qquad I = \left(-3-\tfrac{1}{2}, -3+\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{7}{2}, -\tfrac{5}{2}\right).$

Esercizio 6.

(i) Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ in campo reale, se ne determini l'intervallo di convergenza semplice e si calcoli la funzione somma (Suggerimento: $n x^n = x \frac{d}{dx}(x^n)$)

(ii) Si deduca lo sviluppo in serie di potenze centrato in 0 della funzione $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ per $|x|<1$

(iii) Si determini lo stesso sviluppo richiesto al punto (ii) usando la serie prodotto secondo Cauchy.

(i) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \implies R = 1$

Se $x = \pm 1$ la serie non converge (il termine generale non è infinitesimo). Quindi $I_s = (-1, 1)$

Detta $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ si ha convergenza unif. in $[-r, r]$ $\forall r \in (0,1)$

Quindi per $x \neq 0$

$$\frac{s(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) \uparrow = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

perché $\sum_{0}^{\infty} x^n$ converge unif. a $\frac{1}{1-x}$ in $[-r, r]$ $\forall r \in (0,1)$

$$\implies s(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1,1)$$ (vale anche per $x = 0$).

(ii) Da (i) segue che

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n .$$

$x \in (-1,1)$ $\qquad \forall x \in (-1,1)$.

(iii)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \overset{\downarrow}{=} \left(\sum_{0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{0}^{\infty} c_n x^n$$

dove $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ con $a_k = 1$ e $b_{n-k} = 1$ $\forall k$.

$\implies c_n = \sum_{0}^{n} 1 = n+1$ cioè $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{0}^{\infty} (n+1) x^n$ $\forall x \in (-1,1)$.

Esercizio 7. Scrivere le funzioni di variabile complessa cosh z, sinh z, cos z, sin z in serie di potenze complesse (con centro in 0). Inoltre verificare le seguenti identità in campo complesso:

a) $(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z})$

b) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

c) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

d) $\cos z = \cosh iz$

e) $\sin z = -i \sinh iz$

a) Se $n = 0$ e $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $w^0 = 1$. Inoltre $e^0 = 1$.

Quindi $(e^z)^0 = e^{0z}$

Se $n = 1, 2, \dots$ $\quad (e^z)^n = \underbrace{e^z \cdot e^z \cdot \ldots \cdot e^z}_{n \text{ volte}} = e^{\overbrace{z+z+\ldots+z}^{n \text{ volte}}} = e^{nz}$

Se $n = -1$ $\quad (e^z)^{-1} = \frac{1}{e^z}$. Inoltre $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$

$\Longrightarrow e^{-z} = \frac{1}{e^z} = (e^z)^{-1}$.

Se $n = -2, -3, \dots$ $\quad (e^z)^n = (e^z)^{-|n|} = \frac{1}{(e^z)^{|n|}} = \frac{1}{e^{|n|z}} =$

$= e^{-|n|z} = e^{nz}$.

b) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} +$

$- \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} = 1$

c) $\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{-iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} +$

$+ \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} = 1$

d) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz$

e) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{i} \sinh iz = -i \sinh iz$.

Esercizio 8. Verificare che se $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ allora $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.
Dedurre che dato $w \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^z = w$ non ha soluzioni in $\mathbb{C}$ se $w=0$ mentre ne ha infinite se $w \neq 0$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$|e^z| = e^x \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ perché $e^x \in (0, \infty)$.

Fissato $w \in \mathbb{C}$ $w \neq 0$ scrivo $w = \rho e^{i\theta}$ con $\rho = |w|$ e $\theta \in [0, 2\pi)$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ chiamo $z_k = \ln \rho + i(2k\pi + \theta)$ e ottengo che

$$e^{z_k} = e^{\ln \rho}\left[\cos(2k\pi + \theta) + i \sin(2k\pi + \theta)\right] = \rho e^{i\theta} = w.$$