CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Prova d'esame – 21 luglio 2022

TEMA I (A)

Un punto materiale di massa m si muove (senza attrito) sulla superficie descritta in $\mathbb{R}^3$ dall'equazione $ax^2 + y^2 + z^2 = 1$, dove $a > 0$ è una costante reale e (x, y, z) sono coordinate cartesiane ortonormali, con l'asse z diretto verticalmente verso l'alto. Sul punto agisce la forza peso.

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema;
(2) Trovare le configurazioni di equilibrio, determinarne la stabilità e calcolare le frequenze caratteristiche delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile.

TEMA I (B)

Un punto materiale di massa m si muove (senza attrito) sulla superficie descritta nel semispazio $z > 0$ dall'equazione $z^2 - x^2 - by^2 = 1$, dove $b > 0$ è una costante reale e (x, y, z) sono coordinate cartesiane ortonormali, con l'asse z diretto verticalmente verso l'alto. Sul punto agisce la forza peso.

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema;
(2) Trovare le configurazioni di equilibrio, determinarne la stabilità e calcolare le frequenze caratteristiche delle piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile.

SVOLGIMENTO

I due problemi differiscono solo per la superficie di vincolo, che nel tema (A) è un ellissoide e nel tema (B) è la falda superiore di un iperboloide.

Il primo passo è la scelta del sistema di coordinate. In questo caso, è utile guardare che cosa viene richiesto nell'esercizio: si chiede di trovare i punti di equilibrio e calcolare le frequenze caratteristiche del sistema linearizzato intorno all'equilibrio stabile. Quindi sarà necessario che il dominio delle coordinate comprenda i punti di equilibrio.

In questo caso, poiché il potenziale è quello della forza peso, $U = -mgz$, indipendentemente dalle coordinate in cui sarà espressa la funzione è evidente che sull'ellissoide che compare nel caso (A) U ha un massimo isolato nel punto $(0, 0, -1)$ e un minimo isolato nel punto $(0, 0, 1)$, quindi il primo sarà un punto di equilibrio stabile e il secondo un punto di equilibrio instabile. Sulla falda di iperboloide che compare nel caso (B), invece, U ha solo un massimo isolato in $(0, 0, 1)$, che quindi sarà la configurazione di equilibrio stabile.

Se le costanti a e b fossero state uguali a 1, si sarebbe trattato di superfici di rotazione intorno all'asse z, e in questo caso si sarebbe potuto immaginare di parametrizzare il sistema in coordinate cilindriche, ponendo $z = f(r)$. Questo sarebbe stato vantaggioso perché l'angolo θ sarebbe stato una coordinata ciclica. Tuttavia, nel problema proposto le costanti a e b sono generiche; per di più, la scelta di coordinate (r, θ) è comunque da escludere (anche se si trattasse di superfici simmetriche rispetto all'asse z), perché i punti di equilibrio si troverebbero in $r = 0$, fuori dal dominio delle coordinate, e non sarebbe possibile linearizzare il sistema intorno ad essi.

In entrambi i casi, si può parametrizzare il vincolo usando le coordinate (x, y). In queste coordinate, come si vede dai calcoli che seguono, la metrica definita dall'energia cinetica non è diagonale; tuttavia, i coefficienti non diagonali si annullano nei punti di equilibrio.

Caso (A): occorre considerare due carte, che coprono rispettivamente la calotta superiore e quella inferiore dell'ellissoide: $z = \pm\sqrt{1 - a\,x^2 - y^2}$. In entrambi i casi l'immagine della carta è l'aperto definito da $ax^2 + y^2 < 1$. In entrambe le carte l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{a^2x^2}{1 - a\,x^2 - y^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(1 + \frac{y^2}{1 - a\,x^2 - y^2}\right)\dot{y}^2 + \frac{m\,a\,xy}{1 - a\,x^2 - y^2}\dot{x}\dot{y}$$

mentre l'espressione del potenziale è $U = -mg\sqrt{1 - a\,x^2 - y^2}$ nella carta che copre la calotta superiore e $U = mg\sqrt{1 - a\,x^2 - y^2}$ per la calotta inferiore ($z < 0$). Sappiamo già dove si trovano il massimo e il minimo di U, ossia nel punto di coordinate $(0, 0)$ in ciascuna carta; quindi è inutile risolvere un'equazione per trovare i punti in cui $dU = 0$. Dobbiamo però calcolare ugualmente le derivate parziali di U per ottenere la matrice hessiana del potenziale, che serve per il calcolo delle frequenze caratteristiche. Per la calotta inferiore, dove si trova l'equilibrio stabile, si ottiene

$$\text{Hess}(U) = \begin{pmatrix} \dfrac{mg\,a(y^2 - 1)}{(1 - a\,x^2 - y^2)^{3/2}} & \dfrac{-mg\,a\,xy}{(1 - a\,x^2 - y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{-mg\,a\,xy}{(1 - a\,x^2 - y^2)^{3/2}} & \dfrac{mg(a\,x^2 - 1)}{(1 - a\,x^2 - y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

che nel punto di equilibrio $(0, 0)$ diventa

$$K = \text{Hess}(U)|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -mg\,a & 0 \\ 0 & -mg \end{pmatrix}$$

Nel punto $(0, 0)$ la matrice dei coefficienti dell'energia cinetica T si riduce a

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

da cui segue che le pulsazioni caratteristiche, soluzioni dell'equazione

$$\det\begin{pmatrix} -mg\,a + \omega^2 m & 0 \\ 0 & -mg + \omega^2 m \end{pmatrix} = 0,$$

sono $\quad \omega_1 = \sqrt{g\,a} \quad$ e $\quad \omega_2 = \sqrt{g}$.

Si sarebbe potuta scegliere una parametrizzazione diversa?
Sì: ad esempio, con questa parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\cos(\theta) \\ y = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \sin(\theta)\cos(\varphi) \end{cases}$$

si sarebbero potuti fare i calcoli altrettanto semplicemente; le coordinate dei punti di equlibrio sarebbero state individuate dalle due equazioni $\{\cos(\theta) = 0,\ \sin(\varphi) = 0\}$. Bisogna però fare attenzione a un fatto: in queste coordinate si ha $U = -mg\sin(\theta)\cos(\varphi)$, e imponendo l'annullarsi del differenziale $dU = mg(\sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi - \cos(\theta)\cos(\varphi)d\theta$ compaiono altre due soluzioni, corrispondenti a $\{\sin(\theta) = 0, \ \cos(\varphi) = 0\}$ (le intersezioni dell'ellissoide con l'asse x). Ma queste due soluzioni sono spurie: sono fuori dal dominio delle coordinate e non sono affatto punti stazionari di U (come è facile vedere, ricordando che $U = -mgz$). Lo stesso fenomeno si sarebbe osservato prendendo l'angolo di (co-)latitudine $\theta \in (0, \pi)$ a partire dall'asse y anziché dall'asse x. È invece da escludere una parametrizzazione come questa, in cui i "poli" sono le intersezioni con l'asse z:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \cos(\theta) \end{cases}$$

perché con questa scelta i poli, dove le coordinate (θ, φ) non sono definite, coincidono proprio con i due punti di equilibrio.

Caso (B): poiché il tema indica come vincolo solo la falda superiore dell'iperboloide (altrimenti lo spazio delle configurazioni avrebbe avuto due componenti sconnesse fra loro), è sufficiente una sola carta. Prendendo $z = \pm\sqrt{1 + x^2 + b\,y^2}$, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{x^2}{1 + x^2 + b\,y^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(1 + \frac{b^2y^2}{1 + x^2 + b\,y^2}\right)\dot{y}^2 + \frac{m\,b\,xy}{1 + x^2 + b\,y^2}\dot{x}\dot{y}$$

mentre il potenziale è $U = -mg\sqrt{1 + x^2 + b\,y^2}$. Procedendo come nel caso (A), si trova

$$\mathrm{Hess}(U) = \begin{pmatrix} \dfrac{-mg(b\,y^2 + 1)}{(1 + x^2 + b\,y^2)^{3/2}} & \dfrac{mg\,b\,xy}{(1 + x^2 + b\,y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{mg\,b\,xy}{(1 + x^2 + b\,y^2)^{3/2}} & \dfrac{-mg\,b(x^2 + 1)}{(1 + x^2 + b\,y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

che nel punto di equilibrio $(0, 0)$ diventa

$$K = \begin{pmatrix} -mg & 0 \\ 0 & -mg\,b \end{pmatrix}$$

Nel punto $(0, 0)$ la matrice dei coefficienti dell'energia cinetica T si riduce a

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

da cui segue che le pulsazioni caratteristiche sono $\quad \omega_1 = \sqrt{g} \quad$ e $\quad \omega_2 = \sqrt{g\,b}$.

Anche in questo caso si sarebbero potute scegliere delle parametrizzazioni alternative, ma si sarebbero dovute usare le funzioni iperboliche sinh e cosh in luogo delle funzioni trigonometriche (da notare che la parametrizzazione con funzioni iperboliche non avrebbe comportato i problemi di dominio che abbiamo osservato per le coordinate angolari sull'ellissoide).

TEMA II (A)

Un sistema con due gradi di libertà è descritto, in coordinate canoniche (q^μ, p_μ), dall'Hamiltionana

$$H = \frac{1}{2m}\left((p_1)^2 + \frac{(p_2)^2}{(q^1)^2}\right) + \frac{1}{2}\left((q^1)^2 + \frac{(q^2)^2}{(q^1)^2}\right);$$

trovare una funzione dipendente solo da (q^2, p_2) che sia in involuzione con H.

TEMA II (B)

Un sistema con due gradi di libertà è descritto, in coordinate canoniche (q^μ, p_μ), dall'Hamiltionana

$$H = \frac{1}{2m}\left(e^{q^2}(p_1)^2 + (p_2)^2\right) + \frac{1}{2}\left(e^{q^2}(q^1)^2 + (q^2)^2\right);$$

trovare una funzione dipendente solo da (q^1, p_1) che sia in involuzione con H.

SVOLGIMENTO

Caso (A): data una generica funzione $f(q^2, p_2)$, si ha

$$\{H, f\} = \frac{p_2}{m\,(q^1)^2}\frac{\partial f}{\partial q^2} - \frac{q^2}{(q^1)^2}\frac{\partial f}{\partial p^2}$$

quindi la condizione richiesta diventa

$$\frac{p_2}{m}\frac{\partial f}{\partial q^2} = q^2\frac{\partial f}{\partial p^2}.$$

Questa equazione si può risolvere col metodo della separzione (additiva) delle variabili. Dividendo per $q^2 p_2$ si ha infatti

$$\frac{1}{m\,q^2}\frac{\partial f}{\partial q^2} = \frac{1}{p_2}\frac{\partial f}{\partial p^2};$$

ponendo $f(q^2, p_2) = F(q^2) + G(p_2)$ si ha

$$\frac{1}{m\,q^2}\frac{dF}{dq^2} = \frac{1}{p_2}\frac{dG}{dp^2},$$

e poiché l'espressione a sinistra dell'uguaglianza può dipendere solo da q^2, mentre l'espressione a destra può dipendere solo da p_2, entrambi i membri devono essere uguali a un medesimo valore costante α. L'equazione si riconduce quindi alle due equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dF}{dq^2} = m\,q^2\alpha, \qquad \frac{dG}{dp^2} = p_2\alpha$$

che si integrano immediatamente, fornendo la soluzione (a meno di una costante additiva irrilevante)

$$f(q^2, p_2) = \frac{\alpha}{2}\left((p_2)^2 + m(q^2)^2\right).$$

Più in generale, se ne deduce che qualunque funzione $f(q^2, p_2) = g\left((p_2)^2 + m(q^2)^2\right)$ è in involuzione con H.

Caso (B): procedendo analogamente al caso (A), dalla condizione

$$0 = \{H, f\} = e^{q^2} \left(\frac{p_1}{m} \frac{\partial f}{\partial q^1} - q^1 \frac{\partial f}{\partial p^1} \right)$$

si arriva a

$$\frac{1}{m\, q^1} \frac{\partial f}{\partial q^1} = \frac{1}{p_1} \frac{\partial f}{\partial p^1}$$

che ammette la soluzione

$$f(q^1, p_1) = \frac{\alpha}{2} \left((p_1)^2 + m(q^1)^2 \right).$$

Ogni funzione dell'espressione $f(q^1, p_1)$ così ottenuta è in involuzione con H.