Analisi II - 2023/24 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta -12 giugno 2024

Esercizio 1. [4pt] Si consideri il campo scalare definito da

$$f(x,y) = \frac{\log(x+y)}{x^2+y^2-4} - \cos(xy).$$

a) Disegnare il dominio di f e stabilire se è aperto, chiuso, limitato, compatto.
b) Verificare che f è differenziabile in $(1,0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie cartesiana $z = f(x,y)$ nel punto $(1,0,-1)$.
c) Calcolare la derivata direzionale di f in $(1,0)$ lungo una generica direzione $v = (v_1, v_2)$.

Soluzione. a) Il dominio di f è l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0,\ x^2+y^2 \neq 4\}$, che è la regione che giace al di sopra della retta di equazione $y = -x$, esclusi i punti della circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 4$. Non è limitato perché i punti del tipo $(n,0) \in A$ per ogni $n > 2$. Si osserva che A è aperto in quanto intersezione di due aperti. A non è chiuso e quindi nemmeno compatto.
b) Le derivate parziali sono

$$f_x(x,y) = \frac{x^2+y^2-4-2x(x+y)\log(x+y)}{(x^2+y^2-4)^2(x+y)} + y\sin xy,$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2+y^2-4-2y(x+y)\log(x+y)}{(x^2+y^2-4)^2(x+y)} + x\sin xy.$$

Essendo f_x e f_y funzioni continue in A, f è di classe C^1 in A e quindi è differenziabile in ogni punto di A, quindi in particolare in $(1,0)$. Si verifica subito che $f_x(1,0) = -\frac{1}{3}$, $f_y(1,0) = -\frac{1}{3}$. Quindi il piano tangente è

$$z = f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y - 1, \quad \text{cioè} \quad x + y + 3z = -2.$$

c) Essendo f differenziabile, vale la formula del gradiente e la derivata direzionale è

$$D_v f(0,0) = f_x(1,0)v_1 + f_y(1,0)v_2 = -\frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2.$$

Esercizio 2. [3 pt] Calcolare o dimostrare che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^3(e^{x^2y^2}-1)}{(x^4+y^4)\sin^2 y}.$$

Soluzione: Sapendo che $e^t - 1 \sim t$ e $\sin t \sim t$ per $t \to 0$, è equivalente studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^3x^2y^2}{(x^4+y^4)y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^5}{x^4+y^4}.$$

Osservando che $x^4 + y^4 \geq x^4$ otteniamo la disuguaglianza

$$\frac{|x|^5}{x^4+y^4} \leq \frac{|x|^5}{x^4} = |x|$$

e pertanto il limite assegnato è uguale a 0 per il teorema del confronto.

Esercizio 3. [4 pt] Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(u,v) = (uv, 7(v^2-u^2))$.

a) Giustificare l'esistenza di intorni U e V di $(1,1)$ e $(1,0)$ rispettivamente tali che $T : U \to V$ sia biunivoca con funzione inversa T^{-1} di classe C^1.

b) La funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è globalmente invertibile?

c) Calcolare $\nabla(f \circ T^{-1})(1,0)$ con l'inversa T^{-1} trovata in a) e f campo scalare definito da $f(x,y) = e^{1+x^3+y}$, dopo aver giustificato che la composizione sia ben definita in un intorno di $(1,0)$ e che si possa calcolare il gradiente.

Soluzione: a) Si verifica che $T(1,1) = (1,0)$. T è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, il dominio $\mathbb{R}^2$ è aperto e

$$JT(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ -14u & 14v \end{pmatrix}, \quad JT(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -14 & 14 \end{pmatrix}, \det JT(1,1) = 14 + 14 = 28 \neq 0.$$

Quindi il teorema di inversione locale (TIL) assicura l'esistenza di intorni aperti U, V, di $(1,1)$ e $(1,0)$ rispettivamente, e dell'inversa locale $T^{-1} : V \to U$, con $T^{-1} \in C^1(V)$.
b) T non è globalmente invertibile perché non è iniettiva su $\mathbb{R}^2$. Infatti,

$$T(1,1) = T(-1,-1) = (1,0).$$

c) Poiché $T^{-1} \in C^1(V)$ e f è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$, in quanto composizione di un esponenziale e di un polinomio, entrambi infinitamente derivabili, la composizione $f \circ T^{-1}$ è ben definita su V ed è di classe C^1 su V. In particolare, risulta differenziabile in $(1,0)$ e applicando il teorema di differenziabilità di campi vettoriali si ottiene

$$\nabla(f \circ T^{-1})(1,0) = \nabla f(T^{-1}(1,0)) \cdot JT^{-1}(1,0) = \nabla f(1,1) \cdot [JT(1,0)]^{-1}.$$

Si ha $\nabla f(x,y) = (3x^2 e^{1+x^3+y}, e^{1+x^3+y})$ da cui $\nabla f(1,1) = (3e^3, e^3)$, inoltre per il TIL

$$JT^{-1}(1,0) = [JT(1,1)]^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ +14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{28} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{28} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\nabla(f \circ T^{-1})(1,0) = (3e^3, e^3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{28} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{28} \end{pmatrix} = (2e^3, -\frac{1}{14} e^3).$$

Esercizio 4. [4 pt] Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \log(x-y) - \frac{y^3}{3} - x + 2y.$$

a) Determinare i punti critici di f e studiarne la natura.
b) Il campo f ammette minimi assoluti?

Soluzione: a) Il campo f è di classe $\mathcal{C}^2$ nel suo dominio, dato da dom $f = \{(x,y) : x - y > 0\}$. Il vettore gradiente e la matrice Hessiana di f in un generico punto del suo dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ sono rispettivamente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{x-y} - 1, -\frac{1}{x-y} - y^2 + 2 \right), \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x-y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} - 2y \end{pmatrix}.$$

I suoi punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1 \\ -\frac{1}{x-y} = y^2 - 2, \end{cases}$$

ovvero $P_1 = (2,1)$ e $P_2 = (0,-1)$. L'Hessiana in tali punti è

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando il test dei minori otteniamo che P_2 è un punto di sella (il determinante dell'Hessiana è negativo), P_1 è invece un massimo (il determinante dell'Hessiana è positivo, l'elemento in alto a sinistra negativo).
b) Il campo f non ammette minimi relativi e dunque nemmeno assoluti. Infatti, il campo è di classe $\mathcal{C}^2$ nel suo dominio e quindi verifica le ipotesi del teorema di Fermat, per cui i punti di estremo vanno ricercati tra i punti critici di f, ovvero i punti P_1 e P_2, che non sono minimi per quanto provato in a).

Esercizio 5. [4 pt] Si consideri la superficie parametrica $\sigma \colon \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v) = (e^v \sin(u), e^v \cos(u), e^{-v}).$$

(*i*) Stabilire se σ è una superficie regolare e, in caso affermativo, calcolare il versore normale. In caso contrario, indicare i punti singolari della superficie.

(*ii*) Dire se la superficie σ è semplice, giustificando la risposta. Il sostegno di σ è un insieme limitato?

Soluzione: (*i*) Osserviamo che il dominio $A = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ di σ è un aperto connesso per archi e che $\sigma \in C^1(A)$. La matrice Jacobiana di σ è:

$$J_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} e^v \cos(u) & e^v \sin(u) \\ -e^v \sin(u) & e^v \cos(u) \\ 0 & -e^{-v} \end{pmatrix}.$$

Il minore

$$\begin{pmatrix} e^v \cos(u) & e^v \sin(u) \\ -e^v \sin(u) & e^v \cos(u) \end{pmatrix}$$

ha determinante e^{2v} che non si annulla mai, quindi $J_\sigma(u, v)$ ha rango massimo per ogni $(u, v) \in A$, da cui deduciamo che σ è regolare. Per calcolare il versore normale osserviamo che, per ogni $(u, v) \in A$

$$(\sigma_u \wedge \sigma_v)(u, v) = (\sin(u), \cos(u), e^{2v})$$

e $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \sqrt{1 + e^{4v}}$, da cui segue

$$N(u, v) = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} = \left(\frac{\sin u}{\sqrt{1 + e^{4v}}}, \frac{\cos u}{\sqrt{1 + e^{4v}}}, \frac{e^{2v}}{\sqrt{1 + e^{4v}}} \right)$$

(*ii*) La superficie σ non è semplice in quanto $\sigma(u + 2\pi, v) = \sigma(u, v)$ per ogni $(u, v) \in A$. Infine, osserviamo che

$$\|\sigma(u, v)\|^2 = e^{2v} + e^{-2v} \to +\infty \quad \text{per } v \to +\infty$$

quindi il sostegno di σ non è limitato.

Esercizio 6. [4 pt] Calcolare

$$\int_A xy \, dx \, dy \, dz, \qquad \text{dove} \quad A = \left\{ (x, y, z) : x \geq 0, \; y \geq 0, \; x^2 + y^2 \leq z \leq 3 \right\}.$$

Soluzione: Possiamo integrare per fili ottenendo

$$\int_A xy \, dx \, dy \, dz = \int_S xy \int_{x^2+y^2}^{3} dz \, dxdy = \int_S xy(3 - x^2 - y^2) \, dxdy,$$

dove $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$. Risolviamo a questo punto l'integrale doppio utilizzando le coordinate polari; otteniamo

$$\int_S xy(3 - x^2 - y^2) \, dxdy = \int_{S'} \rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta (3 - \rho^2) \rho \, d\rho \, d\vartheta,$$

dove S' è il rettangolo polare $\left\{ (\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \right\}$. Risulta allora:

$$\int_{S'} \rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta (3 - \rho^2) \rho \, d\rho \, d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho^3 - \rho^5) \, d\rho = \frac{1}{2} [\sin^2 \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{3}{4}\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}.$$

Esercizio 7. [4 pt] Calcolare l'integrale

$$\int_\Omega \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \; x \geq 0, y \geq 0, -1 \leq z \leq 2 \right\}.$$

Soluzione: Utilizzando coordinate cilindriche, si trova che il dominio di integrazione in tali coordinate si scrive come

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \theta, z) \,\middle|\, 1 \leq \rho \leq 3, \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq z \leq 2 \right\}.$$

Utilizzando la formula di cambiamento di variabile, e le formule di riduzione, si ha

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{z^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz &= \int_{\Omega'} \frac{z^2}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{-1}^2 \int_1^3 \frac{z^2}{\rho}\,d\rho\,dz \\
&= \pi/2 \int_{-1}^2 z^2\,dz \int_1^3 \frac{1}{\rho}\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^2 [\log\rho]_1^3 \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{8+1}{3}\right)(\log 3 - \log 1) = \frac{3\pi}{2}\log 3.
\end{aligned}$$

Esercizio 8. [4 pt] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}} - e\right).$$

Soluzione. Dato che $\frac{n^2+2n}{n^2+1} > 1$, la serie è a termini non negativi, quindi la convergenza semplice ed assoluta sono equivalenti. Inoltre, si ha:

$$e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}} - e = e\left(e^{\frac{n^2+2n}{n^2+1}-1} - 1\right) = e\left(e^{\frac{2n-1}{n^2+1}} - 1\right) \sim e \cdot \frac{2n-1}{n^2+1} \sim \frac{2e}{n}, \qquad n \to \infty.$$

Pertanto, per confronto con la serie armonica, la serie diverge.