Analisi II - 2023/24 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta -12 settembre 2024

Esercizio 1. Si consideri il campo scalare definito da

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}-\log(16-x^2-(y-1)^2).$$

a) Disegnare il dominio di f e stabilire se è aperto, chiuso, limitato, compatto.
b) Verificare che f è differenziabile in $(2,2)$ e scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie cartesiana $z=f(x,y)$ nel punto $(2,2,2-\log(11))$.
c) Calcolare la derivata direzionale di f in $(2,2)$ lungo una generica direzione $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$.

Soluzione. a) Il dominio di f è l'insieme $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 4,\ x^2+(y-1)^2<16\}$, ovvero la regione delimitata dalla circonferenza C_1 di centro $(0,0)$ e raggio 2 e dalla circonferenza C_2 di centro $(0,1)$ e raggio 4. Si tratta pertanto di un insieme limitato. Si può inoltre osservare che la frontiera di A è l'unione delle due circonferenze; l'insieme A contiene C_1, ma non contiene alcun punto di C_2. Pertanto A non è né aperto né chiuso, e quindi non può nemmeno essere compatto.
b) Le derivate parziali di f sono ben definite in $U:=\mathrm{Int}(A)$ ed uguali a:

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}+\frac{2x}{16-x^2-(y-1)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}+\frac{2(y-1)}{16-x^2-(y-1)^2}.$$

Inoltre f_x e f_y sono continue su U e quindi $f\in C^1(U)$ ed è differenziabile in ogni punto di U. L'aperto U contiene il punto $(2,2)$, pertanto f è differenziabile in $(2,2)$. Inoltre $f_x(2,2)=\frac{15}{11}$ e $f_y(2,2)=\frac{13}{11}$. Quindi il piano tangente ha equazione

$$z=f_x(2,2)(x-2)+f_y(2,2)(y-2)+f(2,2)$$

cioè

$$z=\frac{15}{11}(x-2)+\frac{13}{11}(y-2)+2-\log(11)$$

c) Essendo f differenziabile, vale la formula del gradiente e la derivata direzionale lungo una generica direzione $v=(v_1,v_2)$ è

$$D_vf(2,2)=f_x(2,2)v_1+f_y(2,2)v_2=\frac{15}{11}v_1+\frac{13}{11}v_2.$$

Esercizio 2. [3 pt] Calcolare o dimostrare che non esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\log(1+xy)\sin^2(x)}{\sqrt{x^3}+y^2}.$$

Soluzione: Visto che $\log(1+t)\sim t$ e $\sin t\sim t$ per $t\to 0$, basta studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{\sqrt{x^3}+y^2}.$$

Osserviamo che se $x=0$ e $y\neq 0$, allora la funzione è identicamente nulla. D'altra parte, se $x\neq 0$, allora vale la stima

$$\left|\frac{x^3y}{\sqrt{x^3}+y^2}\right|\leq\frac{|x|^3|y|}{\sqrt{x^3}}=|x|^{\frac{3}{2}}|y|.$$

Quindi, dato che $|x|^{3/2}|y|\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$, per confronto deduciamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{\sqrt{x^3}+y^2}=0.$$

Esercizio 3. [4 pt] Sia dato il campo vettoriale $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da $T(x,y,z)=(xz,2xy,3yz)$.

(a) Si verifichi che T è localmente invertibile in un intorno del punto $(1,1,1)$.

(b) Detta T^{-1} l'inversa locale, si scriva il gradiente del campo scalare $h \circ T^{-1}$ nel punto $(1,2,3)$, dove $h(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2 - w$.

Soluzione. (a) Il campo T è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e

$$J_T(x,y,z) = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 3z & 3y \end{pmatrix} \Rightarrow J_T(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $12 \neq 0$. Pertanto, per il teorema di inversione locale, T è localmente invertibile in un intorno del punto $(1,1,1)$. Inoltre, detta T^{-1} l'inversa locale, questa è di classe C^1 in un intorno di $T(1,1,1) = (1,2,3)$ e

$$J_{T^{-1}}(1,2,3) = [J_T(1,1,1)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

(b) Per la regola della catena si ha:

$$\nabla(h \circ T^{-1})(1,2,3) = \nabla h(1,1,1) J_{T^{-1}}(1,2,3) = (2,2,1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right).$$

Esercizio 4. [4 pt] Si determinino i punti critici del campo scalare

$$f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)e^{x+2y}$$

e se ne studi la natura. Si dica se esistono punti di massimo assoluto per f.
Soluzione: La funzione f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$ e i punti critici si ottengono come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = (x^2 + y^2 + xy + 2x + y)e^{x+2y} = 0 \\ f_y(x,y) = (2x^2 + 2xy + 2y^2 + x + 2y)e^{x+2y} = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni le coppie $A = (0,0)$ e $B = (0,-1)$. Si ha inoltre

$$f_{xx}(x,y) = (x^2 + y^2 + xy + 4x + 2y + 2)e^{x+2y},$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (2x^2 + 2y^2 + 2xy + 5x + 4y + 1)e^{x+2y},$$
$$f_{yy}(x,y) = (4x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 8y + 2)e^{x+2y}.$$

Pertanto, risulta:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad e \qquad H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} e^{-2} & -e^{-2} \\ -e^{-2} & -2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Dallo studio delle matrici Hessiane si ottiene che A è un punto di minimo locale perchè $\det H_f(0,0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(0,0) > 0$, mentre $B = (0,-1)$ è un punto di sella perchè $\det H_f(0,-1) = -3e^{-4} < 0$. La funzione non ha punti di massimo assoluto perchè non ha neanche punti di massimo relativo.

Esercizio 5. [4 pt] Stabilire per quali $\bar{y} \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$f(x,y) = x^3 e^{y+x} + xy = 0$$

definisce implicitamente in un intorno del punto $(0,\bar{y})$ un'unica funzione derivabile $x = g(y)$.
Per tali valori calcolare $g'(\bar{y})$.
Soluzione: La funzione $f(x,y) = x^3 e^{x+y} + xy$ è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$, in particolare quindi in un intorno di un qualsiasi punto $(0,\bar{y})$, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$; inoltre $f(0,\bar{y}) = 0$, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$. L'ultima ipotesi del Teorema della Funzione Implicita da verificare è pertanto $f_x(0,\bar{y}) \neq 0$, ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\bar{y}) = \left[3x^2 e^{x+y} + x^3 e^{x+y} + y\right]_{(0,\bar{y})} = \bar{y} \neq 0,$$

Se $\bar{y} \neq 0$ è quindi possibile definire in modo univoco la funzione g. Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, \bar{y}) = \left[x^3 e^{x+y} + x\right]_{(0,\bar{y})} = 0,$$

si ha che $g'(\bar{y}) = 0$, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Esercizio 6. [4 pt] Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \left(1 + \frac{3x^2}{x^2 + y^2}\right) dx\, dy$$

dove D è l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 4, \; 4x^2 + y^2 \geq 4, \; 0 \leq y \leq x\right\}.$$

Suggerimento. Utilizzare coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ ed osservare che $4\cos^2\theta + \sin^2\theta = 3\cos^2\theta + 1$.
Soluzione: L'insieme D è l'insieme dei punti del I quadrante compresi fra l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$, la retta $y = x$ e l'asse x. Passando in coordinate polari

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \; \theta \in [0, 2\pi), \; |\det J_\Phi(\rho, \theta)| = \rho$$

si ha

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ 4x^2 + y^2 \geq 4 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \iff \begin{cases} \rho \leq 2 \\ \rho^2(4\cos^2\theta + \sin^2\theta) \geq 4 \\ 0 \leq \rho\sin\theta \leq \rho\cos\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Osservando che $4\cos^2\theta + \sin^2\theta = 3\cos^2\theta + 1$ otteniamo che

$$D' = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \;\middle|\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \; \frac{2}{\sqrt{3\cos^2\theta + 1}} \leq \rho \leq 2\right\}$$

e quindi D' è un dominio ρ-semplice. Ne segue che

$$\begin{aligned} \iint_D \left(1 + \frac{3x^2}{x^2 + y^2}\right) dx\, dy &= \iint_{D'} (1 + 3\cos^2\theta)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{2}{\sqrt{3\cos^2\theta+1}}}^2 \rho\, d\rho\right) (1 + 3\cos^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4 - \frac{4}{3\cos^2\theta + 1}\right)(1 + 3\cos^2\theta)\, d\theta = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta \\ &= 3\left[\theta + \sin\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3(\pi + 2)}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 7. [4 pt] Calcolare

$$I = \int_A 2z\, dx\, dy\, dz$$

dove $A = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, \; x^2 + y^2 \leq 1, \; z \geq 0\right\}$.
Soluzione: La regione A è interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, si trova nel semispazio superiore delimitato da $z = 0$ e giace sotto il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; cilindro e cono si intersecano nel piano $z = 1$. Quindi$A$ è un dominio normale rispetto all'asse z, e possiamo scriverlo come

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, (x, y) \in D, \, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

dove $D = \{(x, y,) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ dove il disco unitario centrato nell'origine. Utilizzando il metodo di integrazione per fili otteniamo che

$$I = \int_A 2z\, dx\, dy\, dz = \int_D dx\, dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} 2z\, dz = \int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

Passando alle coordinate polari si ottiene

$$I = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho^2 \, \rho \, d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 8. [4 pt] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + \arctan n + \pi/2}}.$$

Soluzione. La serie non converge assolutamente in quanto si ha

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + \arctan n + \pi/2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n + \arctan n + \pi/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

per $n \to +\infty$, e la serie armonica generalizzata con esponente $\alpha = 1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge. La serie converge semplicemente perché verifica le ipotesi del teorema di Leibiniz, infatti:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n + \arctan n + \pi/2}} > 0, \quad \forall n \geq 1,$$

b_n è infinitesima, per $n \to +\infty$, e osserviamo che $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$, dove $a_n := n + \arctan n + \pi/2$. Ora, a_n è crescente (in quanto somma di funzioni crescenti), quindi $\sqrt{a_n} = \sqrt{n + \arctan n + \pi/2}$ è crescente (la radice è una funzione crescente), da cui si deduce che $b_n = \frac{1}{\sqrt{n + \arctan n + \pi/2}}$ è decrescente. Equivalentemente, la funzione associata $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \arctan x + \pi/2}}$, $x \geq 1$, è positiva, e

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x + \arctan x + \pi/2)\sqrt{x + \arctan x + \pi/2}} \left(1 + \frac{1}{1 + x^2}\right)$$

è negativa per $x \geq 1$ quindi la funzione f è decrescente per $x \geq 1$.