Analisi II - 2022/23 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 5 luglio 2023

Esercizio 1.[5pt] Sia dato il campo scalare

$$f(x,y) = (\sin x + \cos y)^2 + \log(xy^2).$$

(a) Determinare e disegnare il dominio di f, specificando se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, compatto.

(b) Discutere la differenziabilità di f nel punto $(\pi, 2\pi)$; determinare $\partial_v f(\pi, 2\pi)$, con $v = (1, -1)$, e, se possibile, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(\pi, 2\pi, 1 + \log(4\pi^3))$.

Soluzione.

(a) Il dominio di f è l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \neq 0\}$. Si tratta di un insieme aperto, non chiuso, non limitato, non compatto.

(b) Esistono le derivate parziali di f in ogni $(x,y) \in A$ e valgono

$$\partial_x f(x,y) = 2(\sin x + \cos y)\cos x + \frac{1}{x};$$
$$\partial_y f(x,y) = -2(\sin x + \cos y)\sin y + \frac{2}{y}.$$

La funzione f è quindi di classe C^1 in A oppure in un aperto che contiene $(\pi, 2\pi)$ (per esempio nell'intorno aperto $B((\pi, 2\pi), \pi/2) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\pi)^2 + (y-2\pi)^2 < \pi/2\}$); perciò f è differenziabile in $(\pi, 2\pi)$. Le derivate parziali di f nel punto sono

$$\partial_x f(\pi, 2\pi) = -2 + \frac{1}{\pi};$$
$$\partial_y f(\pi, 2\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

Per la differenziabilità della funzione in $(\pi, 2\pi)$, vale la formula del gradiente e si ha

$$\partial_v f(\pi, 2\pi) = (-2 + 1/\pi, 1/\pi) \cdot (1, -1) = \langle(-2 + 1/\pi, 1/\pi), (1, -1)\rangle = -2.$$

Il piano tangente è dato da

$$z = 1 + \log(4\pi^3) + \left(-2 + \frac{1}{\pi}\right)(x - \pi) + \frac{1}{\pi}(y - 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad z = \left(\frac{1}{\pi} - 2\right)x + \frac{y}{\pi} + \log(4\pi^3) + 2\pi - 2.$$

Esercizio 2.[3pt] Calcolare, o dimostrare che non esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x)\sin^2(y)}{x^2+y^2}.$$

Soluzione: Il limite esiste e vale zero, infatti, osservando preliminarmente che $\log(1+x) \sim x$, $\sin^2(y) \sim y^2$, rispettivamente per $x \to 0$, $y \to 0$, allora per $(x,y) \to (0,0)$ si ha

$$\frac{\log(1+x)\sin^2(y)}{x^2+y^2} \sim \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Usando il teorema del confronto, per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ vale la maggiorazione

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \to 0$$

per $(x,y) \to 0$. Da cui per il sudetto teorema si deduce che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x)\sin^2(y)}{x^2+y^2} = 0$$

Esercizio 3.[4pt] Sia data la curva parametrica $\gamma(t) = (\log(1-t), t - t^2), t \in (-\infty, 1)$.

(i) Si dica, giustificando la risposta, se γ è una curva regolare e se ne determini il sostegno.

(ii) Si calcoli la derivata del campo scalare $f(x,y) = x^2 + y^2$ lungo la curva γ in $t = -1$.

(iii) Si determini una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che γ sia la curva di livello 1 di g.

Soluzione. (i) Si ha che $\gamma \in \mathcal{C}^1((-\infty, 1))$ e $\gamma'(t) = (-(1-t)^{-1}, 1-2t) \neq (0,0)$ per ogni $t < 1$ perché la prima componente di $\gamma'(t)$ non si annulla mai. Pertanto, γ è una curva regolare. Dalla prima equazione del sistema

$$\begin{cases} x = \log(1-t) \\ y = t - t^2 \end{cases}$$

si ottiene $t = 1 - e^x$ e sostituendo nella seconda si ha $y = 1 - e^x - (1-e^x)^2 = e^x - e^{2x}$. Dunque il sostegno di γ è l'insieme

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x - e^{2x}\}.$$

(ii) Per la regola della catena si ha: $(f \circ \gamma)'(-1) = \langle \nabla f(\gamma(-1)), \gamma'(-1)\rangle$. Osservando che $\gamma(-1) = (\log 2, -2)$ e $\gamma'(-1) = (-1/2, 3)$ e che $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$, si ottiene:

$$(f \circ \gamma)'(-1) = \langle (2\log 2, -4), (-1/2, 3)\rangle = -\log 2 - 12.$$

(iii) Vogliamo determinare g in modo che $(x,y) \in C \Leftrightarrow g(x,y) = 1$ ovvero $g(x,y) = 1 \Leftrightarrow y = e^x - e^{2x} \Leftrightarrow y - e^x + e^{2x} + 1 = 1$. Basta allora prendere $g(x,y) = y - e^x + e^{2x} + 1$.

Esercizio 4.[4pt] Determinare i punti critici del campo scalare

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x + \cos^2 y + z^2 - 1$$

e studiarne la natura.
Facoltativo [0,5pt]: Dire, giustificando la risposta, se la funzione ammette minimo assoluto sul suo dominio.

Soluzione. Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ e che

$$\nabla f(x,y,z) = (2x-2, -2\sin y \cos y, 2z) = (2x-2, -\sin(2y), 2z).$$

Pertanto i punti critici sono i punti della forma $P_k = (1, k\pi/2, 0), k \in \mathbb{Z}$. Inoltre la matrice Hessiana di f è

$$H_f(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\cos(k\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che per k dispari, H_f è definita positiva e i P_k sono punti di minimo locale, mentre per k pari, H_f ha due autovalori positivi e uno negativo e dunque è indefinita. Pertanto, per k pari, i punti P_k sono punti di sella.
Osserviamo che per k dispari, si ha $f(P_k) = -2$ e che per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ risulta:

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x + \cos^2 y + z^2 - 1 = (x-1)^2 + \cos^2 y + z^2 - 2 \geq -2.$$

Pertanto, i punti P_k, k dispari, sono punti di minimo assoluto.

Esercizio 5. [3pt] Sia data l'equazione

$$x^3 + 2xz^2 - x^2 y = 18.$$

(a) Dire se, in un intorno del punto $P_0 = (1,1,3)$, l'equazione definisce implicitamente una funzione $x = h(y,z)$, e se possibile calcolare $\nabla h(1,3)$.

(b) Determinare i punti del tipo $(1, y_0, z_0)$, al variare di $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, in un intorno dei quali il teorema della funzione implicita consente di stabilire che l'equazione definisce implicitamente una funzione $x = h(y,z)$.

Soluzione: (a) Sia $f(x,y,z) = x^3 + 2xz^2 - x^2 y$. Osserviamo che il punto P_0 soddisfa l'equazione, infatti $f(P_0) = 18$; la funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$; inoltre,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2z^2 - 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 19 \neq 0,$$

Il Teorema di Dini assicura quindi che l'equazione definisce implicitamente una funzione $x = h(y,z)$ in un intorno di P_0. Essendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= -x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = -1, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 4xz \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 12. \end{aligned}$$

si ha che $\nabla h(1,3) = -1/19(-1,12) = (1/19, -12/19)$.
(b) Poiché $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, dobbiamo imporre che il punto soddisfi l'equazione e che la derivata rispetto a x nel punto non si annulli. Imponendo $f(1, y_0, z_0) = 18$ si ottiene

$$1 + 2z_0^2 - y_0 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = 2z_0^2 - 17;$$

imponendo che $\partial_x f(1, y_0, z_0) \neq 0$ si ottiene $2y_0 \neq 3 + 2z_0^2$; sostituendo la condizione precedente $y_0 = 2z_0^2 - 17$ si ottiene $z_0^2 \neq 37/2$ ovvero $z_0 \neq \sqrt{37/2}$. Allora il Teorema di Dini ci assicura che i punti del tipo $(1, y_0, z_0)$ in un intorno dei quali il teorema della funzione implicita assicura l'esistenza di una funzione $x = h(y,z)$ sono quelli del tipo $(1, 2z_0^2 - 17, z_0)$, con $z_0 \neq \sqrt{37/2}$.

Esercizio 6. [4pt] Si calcoli il seguente integrale doppio:

$$\iint_A y e^{2x-y}\, dxdy,$$

dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 2 \leq y \leq 2x, 0 \leq y \leq 2\right\}.$$

Soluzione: *Primo modo.* Osserviamo che

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y - 2x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\right\}.$$

Ponendo quindi $u = y - 2x$ e $v = y$, ovvero $(x,y) = T(u,v) = ((v-u)/2, v)$, risulta che $\det J_T(u,v) = -1/2$. Pertanto si ha:

$$\iint_A y e^{2x-y}\, dxdy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} e^{-u}\, du \cdot \int_0^2 v\, dv = \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_{-2}^{0}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^2 = e^2 - 1.$$

Secondo modo. Osserviamo che A può essere riscritto come

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y}{2} + 1,\ 0 \leq y \leq 2\right\}.$$

Integrando quindi per fili paralleli all'asse x si ha:

$$\iint_A y e^{2x-y}\, dxdy = \int_0^2 y e^{-y}\left(\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} e^{2x} dx\right) dy = e^2 - 1.$$

Esercizio 7. [4pt] Calcolare il volume della regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y^2 + z^2 \leq x \leq 1 - y^2, \ \ z \geq 0\}.$$

Soluzione: Osserviamo che dalla condizione $y^2 + z^2 \leq x \leq 1 - y^2$ segue in particolare che $y^2 + z^2 \leq 1 - y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + z^2 \leq 1$. Pertanto,

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D, y^2 + z^2 \leq x \leq 1 - y^2\},$$

dove

$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Integrando quindi per fili si ha:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D dydz \int_{y^2+z^2}^{1-y^2} dx = \iint_D (1-2y^2-z^2)\, dydz.$$

Ponendo $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, si ha:

$$\iint_D (1-2y^2-z^2)\, dydz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \int_0^1 \rho(1-\rho^2)\, d\rho d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (\rho-\rho^2)\, d\rho = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Esercizio 8. [4pt] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1+n^2)\sqrt{n}\, \log^2\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Soluzione: Studiamo la convergenza assoluta. Dato che $\log^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0$ e $\sqrt{n} \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, questo è equivalente a studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(1+n^2)|\sqrt{n}\, \log^2\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Inoltre, poiché $|\sin(1+n^2)| \leq 1$ allora per ogni $n \geq 1$ si ha

$$|\sin(1+n^2)|\sqrt{n}\, \log^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \sqrt{n}\, \log^2\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ora, dato che $\log^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$, si ha $\sqrt{n}\, \log^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ ed essendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ convergente allora, per criterio del confronto, segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(1+n^2)|\sqrt{n}\, \log^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$ è convergente. Allora la serie data converge assolutamente, e quindi converge anche semplicemente.