Simulazione 2 - calcoli

Curva

Sia γ la curva di equazioni $x = 2\cos t + \cos(2t)$, $y = 2\sin t - \sin(2t)$, con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Stabilire se la curva è chiusa.

La curva non è chiusa perché $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (-1, -2) \neq (-1, 2) = \gamma(\pi)$.

2. Stabilire se la curva è regolare.

La curva non è regolare perché

$$\gamma'(t)|_{t=0} = (-2\sin t - 2\sin(2t), 2\cos t - 2\cos(2t))|_{t=0} = (0, 0)\,.$$

3. Calcolare la lunghezza della curva.

La lunghezza della curva è

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\gamma'(t)|\, dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2(t) + 4\sin^2(2t) + 8\sin(t)\sin(2t) + 4\cos^2(t) + 4\cos^2(2t) - 8\cos(t)\cos(2t)}\, dt \\
&= \sqrt{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos(3t)}\, dt = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\frac{3t}{2}\right| dt = 8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{3t}{2}\, dt \\
&= \frac{16}{3}\left(-\cos\frac{3\pi}{4} + \cos 0\right) = \frac{8}{3}(\sqrt{2} + 2),
\end{aligned}$$

Si è usata l'identità $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ con $\alpha = \frac{3t}{2}$ e la parità della funzione $t \mapsto \left|\sin\frac{3t}{2}\right|$.

Campo

Fissato $a \in \mathbb{R}$ sia $\bar{F}_a\,(x, y, z) = \left(\frac{z}{\cos^2(ax)}\,,\, z\,,\, y + \tan(ax)\right)$.

1. Per quali valori di a il dominio di F_a è connesso?

Se $a = 0$ il campo è ben definito su tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$, che è un dominio connesso. Se $a \neq 0$ il dominio è $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ed è non connesso, essendo costituito da aperti disgiunti delimitati da piani paralleli di equazioni $x = \frac{(2k+1)\pi}{2a}$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi il dominio di F_a è connesso per certi valori di a e per altri no.

2. Detto $D_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon |2ax| < \pi\}$, trovare i valori del parametro a tali per cui il campo F_a risulti irrotazionale in D_a.

Il campo F_a risulta irrotazionale in D_a quando il suo rotore è identicamente nullo in D_a. Si calcola

$$\nabla \wedge F_a = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{z}{\cos^2(ax)} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & z \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & y + \tan(ax) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ -\frac{a}{\cos^2(ax)} + \frac{1}{\cos^2(ax)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque F_a è irrotazionale in D_a se e solo se $a = 1$.

3. Per i valori non nulli del parametro a per cui il campo F_a risulta irrotazionale in D_a, calcolare l'integrale $\int_{\gamma_a} F_a \cdot ds$ lungo la curva $\gamma_a(t) = \left(\frac{\arctan t}{a}, \cos t, t\right)$ con $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Se $a \neq 0$ la curva γ_a è contenuta in D_a perché $\left|2a\frac{\arctan t}{a}\right| \leq 2\arctan\frac{\pi}{4} = 2 < \pi$. L'insieme D_a è aperto e semplicemente connesso. Quindi, quando $a = 1$, il campo F_a è conservativo in D_a per il lemma di Poincaré. Allora vale che

$$\int_{\gamma_a} F_a \cdot ds = U\left(\gamma_a\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) - U\left(\gamma_a\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

dove U è un potenziale di F_a in D_a. Per $a = 1$ si ha che

$$F_a(x, y, z) = F(x, y, z) = \left(\frac{z}{\cos^2(x)}, z, y + \tan(x)\right)$$

e, posto $\gamma_a = \gamma$,

$$\gamma\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right), \quad \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Con il metodo delle integrazioni parziali si trova che un potenziale è dato da

$$U(x, y, z) = z\tan(x) + yz = z(y + \tan(x))$$

e quindi

$$\int_{\gamma_a} F_a \cdot ds = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \tan 1\right) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \tan(-1)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Flusso

Detta $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera unitaria, si considerino le calotte sferiche $S_+ = \{(x, y, z) \in S \colon 2z \geq 1\}$ e $S_- = \{(x, y, z) \in S \colon 2z \leq 1\}$. Inoltre sia $F(x, y, z) = (xz^2, x + z, x^2z + y)$.

1. Area di S_+.

La calotta sferica S_+ può essere parametrizzata come superficie cartesiana nella forma $S = \varphi(D)$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}\}$ e

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}.$$

Allora

$$\varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \text{area}(S_+) &= \int_D |\varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y)|\, dx\, dy = \int_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}\, d\rho = -2\pi \left[\sqrt{1 - \rho^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

2. Flusso del rotore di F attraverso S_+ orientata con normale diretta verso l'esterno dalla sfera.
Il rotore di F è dato da

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & xz^2 \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x+z \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & x^2 z + y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\operatorname{rot} F(\varphi(x,y)) \cdot \varphi_x(x,y) \wedge \varphi_y(x,y) = 1 \,.$$

Osservando che la parametrizzazione cartesiana induce su S_+ l'orientazione con normale diretta verso l'esterno della sfera, il flusso richiesto vale

$$\begin{aligned} \int_{S_+} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma &= \int_D \operatorname{rot} F(\varphi(x,y) \cdot \varphi_x(x,y) \wedge \varphi_y(x,y) \, dx \, dy \\ &= \int_D 1 \, dx \, dy = \operatorname{area}(D) = \frac{3\pi}{4} \,. \end{aligned}$$

3. Flusso del rotore di F attraverso S_- orientata con normale diretta verso l'interno dalla sfera.
Detta $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ la palla unitaria, con bordo orientato con normale esterna, tenuto conto dell'orientazione di S_+ e S_-, si ha che

$$\int_{\partial B} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = \int_{S_+} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma - \int_{S_-} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma \,.$$

D'altra parte

$$\int_{\partial B} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = \int_S \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = 0$$

per qualsiasi campo F di classe C^1 in B. Quindi

$$\int_{S_-} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = \int_{S_+} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = \frac{3\pi}{4} \,.$$

4. Flusso di F uscente da S.
Per il teorema della divergenza, il flusso di F uscente da $S = \partial B$ vale

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} F \cdot N \, d\sigma &= \int_B \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \int_B (z^2 + x^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, (\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \cos^2\theta) \rho^2 \sin\theta \\ &= \frac{\pi}{5} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right]_0^\pi - \frac{2\pi}{5} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{8\pi}{15} \,. \end{aligned}$$

Serie

Si consideri la serie di potenze in campo complesso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2n^2+in}$.

1. Raggio di convergenza.
Si tratta di una serie di potenze con centro in $z_0 = i$ e coefficienti $a_n = \frac{1}{2n^2+in}$. Il raggio di convergenza R è dato da $R = \frac{1}{L}$ dove

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|2n^2+in|}{|2(n+1)^2+i(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{2(n+1)^2} \frac{|1+\frac{i}{2n}|}{|1+\frac{i}{2(n+1)}|} = 1$$

Dunque $R = 1$.

2. La serie converge in $z = e^{i\pi/4}$?
Siccome

$$|e^{i\pi/4} - i|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - i \right|^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} < 1$$

la serie converge in $z = e^{i\pi/4}$.

3. La serie converge in $z = 0$?
Il punto $z = 0$ appartiene al bordo del disco di convergenza. Il carattere della serie va determinato studiando nello specifico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{2n^2+in}$. Tale serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ che converge. Quindi è anche semplicemente convergente.

4. La serie converge uniformemente nel disco chiuso $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| \leq 1\}$?
Sì perché converge assolutamente in un punto del suo bordo.