CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Prova d'esame – 6 settembre 2013

TEMA I

Un sistema meccanico è formato da due punti materiali che si muovono senza attrito in un medesimo piano orizzontale. Fra i due punti agisce una forza elastica lineare attrattiva. Scrivere la Lagrangiana del sistema, trovare le costanti del moto e tutte le simmetrie (indicandone i generatori infinitesimi). Discutere possibili scelte alternative di coordinate lagrangiane.

svolgimento

Il sistema ha quattro gradi di libertà. Usando come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane delle due particelle nel piano, (x_1, y_1, x_2, y_2), la Lagrangiana è

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right].$$

Poiché la Lagrangiana è indipendente dal tempo, si conserva l'energia totale

$$\mathcal{H} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{k}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right].$$

Le simmetrie del sistema sono le trasformazioni rigide del piano (rototraslazioni), poiché lasciano invariate sia l'energia cinetica (separatamente per ciascuna delle due particelle) sia la distanza fra le particelle (e quindi il potenziale). Una trasformazione del piano induce una trasformazione simultanea nelle coordinate dei due punti: ad esempio, una traslazione in x diventa – nello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^4$ – la traslazione $\varphi_\epsilon : (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1 + \epsilon, y_1, x_2 + \epsilon, y_2)$. I generatori infinitesimi sono quindi:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} && \text{(traslazioni in } x\text{)} \\
Y &= \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} && \text{(traslazioni in } y\text{)} \\
Z &= y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} && \text{(rotazioni)}
\end{aligned}
$$

Le corrispondenti costanti del moto noetheriane sono, rispettivamente, le due componenti della quantità di moto totale e il momento angolare totale.

Nel caso particolare in cui le due masse siano uguali, $m_1 = m_2$, può essere conveniente usare come coordinate lagrangiane le coordinate del baricentro $\left(x_G = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_G = \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$, la distanza r fra i due punti e l'angolo θ che la congiungente fra i due punti forma con una direzione fissa (ad esempio l'asse x). Si noti che queste coordinate non sono definite nei punti di sovrapposizione delle due particelle (dove $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$). È facile vedere che le coordinate del baricentro sono cicliche (e i due campi di simmetria X e Y indicati sopra non sono altro che i vettori della base naturale associati alle coordinate x_G e y_G, a parte un fattore 2); parimenti, l'angolo θ è una coordinata ciclica, mentre il potenziale dipende solo dalla coordinata r. Da notare che il vettore della base naturale associato alla coordinata θ *non è* il campo di simmetria Z indicato sopra: quest'ultimo genera rotazioni intorno all'origine, mentre una variazione di θ corrisponde a una rotazione attorno al baricentro del sistema (entrambe sono simmetrie del sistema, dato che la Lagrangiana è invariante per rotazioni intorno a qualsiasi punto: le rotazioni rispetto a punti diversi, d'altra parte, si ottengono l'una dall'altra componendole con una traslazione).

Anche nel caso in cui le masse siano diverse, beninteso, il moto del baricentro è disaccoppiato dagli altri due gradi di libertà, ma il cambiamento di coordinate è leggermente più complicato.

TEMA II

Una particella di massa m e carica elettrica e si muove in un campo elettromagnetico unforme e costante nel tempo. Per un dato osservatore, i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono entrambi non nulli e sono perpendicolari fra loro. Scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange per la particella.

SVOLGIMENTO

Scegliamo le coordinate in modo che i campi costanti $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (rispettivamente di modulo E e B) siano diretti, rispettivamente, lungo l'asse x e lungo l'asse y. Il tensore elettromagnetico è quindi

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E/c & 0 & 0 \\ -E/c & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per ottenere un quadripotenziale A_μ che generi questo campo $\left(F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right)$, si può assumere per semplicità (dato che il campo è stazionario) che A_μ non dipenda dal tempo. Si ha allora

$$F_{0,1} = \frac{E}{c} = -\frac{\partial A_0}{\partial x} \qquad \Rightarrow \quad A_0 = -\frac{E}{c}x$$

(a meno di una funzione delle sole coordinate y e z, che assumiamo nulla); inoltre,

$$F_{1,3} = B = \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}$$

che ammette come soluzione, ad esempio, $A_3 = Bx$ e $A_1 = 0$. In conclusione, un possibile quadripotenziale è $A = (-\frac{E}{c}x, 0, 0, Bx)$.

La Lagrangiana della particella è quindi

$$L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - \frac{e}{c}Ex^1u^0 + eBx^1u^3.$$

Le coordinate x^0, x^2 e x^3 sono cicliche, mentre una traslazione nella coordinata x^1 modifica la Lagrangiana con l'aggiunta di una derivata totale:

$$L(x^0, x^1 + \epsilon, x^2, x^3, u^\mu) = L(x^\mu, u^\mu) + \epsilon\frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c}Ex^0 + eBx^3\right),$$

quindi anche le traslazioni lungo x sono simmetrie di Noether generalizzate.

Le equazioni del moto si ottengono immediatamente dalla forma generale

$$\frac{d}{d\tau}mu^\mu = e\eta^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}u^\nu$$

sostituendo l'espressione di F scritta sopra.

TEMA III

Scrivere la funzione di Hamilton per un pendolo sferico ideale (costituito da un punto materiale di massa m soggetto alla forza peso e vincolato a distanza costante da un punto fisso) usando un sistema di coordinate non inerziali, relative a un osservatore che ruota con velocità angolare costante Ω intorno a un asse verticale passante per il punto di sospensione del pendolo. Scrivere le equazioni di Hamilton e trovare due costanti del moto indipendenti per il sistema.

SVOLGIMENTO

La parametrizzazione di un pendolo sferico di lunghezza fissata R in coordinate lagrangiane si ottiene tipicamente ponendo

$$\begin{cases} x = R\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = R\cos(\theta) \end{cases}$$

Supponendo che le coordinate cartesiane relative a un sistema inerziale, la Lagrangiana del sistema si ottiene dalla Lagrangiana non vincolata

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

sostituendo alle coordinate cartesiane e alle componenti cartesiane della velocità le corrispondenti funzioni delle coordinate $(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})$.

Il tema richiede però di usare coordinate relative a un osservatore (non inerziale) in rotazione uniforme attorno all'azze z rispetto a quello inerziale. In coordinate sferiche, il cambiamento (dipendente dal tempo) da un'osservatore all'altro diventa semplicemente

$$(\theta, \phi) \mapsto (\theta, \varphi(\phi, t)), \qquad \text{dove} \quad \varphi(\phi, t) = \phi - \Omega t$$

La parametrizzazione del sistema nelle nuove coordinate diventa quindi

$$\begin{cases} x = R\sin(\theta)\cos(\varphi + \Omega t) \\ y = R\sin(\theta)\sin(\varphi + \Omega t) \\ z = R\cos(\theta) \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \dot{x} = R\cos(\theta)\cos(\varphi + \Omega t)\dot{\theta} - R\sin(\theta)\sin(\varphi + \Omega t)(\dot{\varphi} + \Omega) \\ \dot{y} = R\cos(\theta)\sin(\varphi + \Omega t)\dot{\theta} + R\sin(\theta)\cos(\varphi + \Omega t)(\dot{\varphi} + \Omega) \\ \dot{z} = -R\sin(\theta)\dot{\theta} \end{cases}$$

La Lagrangiana che si ottiene è quindi

$$L = \frac{mR}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)(\dot{\varphi}+\Omega)^2\right) - mgR\cos(\theta).$$

(il termine lineare in $\dot{\varphi}$, che compare nella Lagrangiana sviluppando il quadrato di $(\dot{\varphi} + \Omega)$, corrisponde alla "forza apparente" vista dall'osservatore non inerziale). Da notare che si poteva arrivare allo stesso risultato per un'altra via: passare inizialmente a coordinate cartesiane relative all'osservatore rotante (in modo da far figurare i termini non inerziali già nell'espressione senza il vincolo) e poi passare in coordinate sferiche. Siccome l'equazione del vincolo è invariante rispetto all'osservatore, i due procedimenti comportano in pratica gli stessi calcoli, solo in ordine diverso.

La mappa di Legendre è

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR\dot{\theta} \\ \\ p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR\sin^2(\theta)(\dot{\varphi}+\Omega) \end{cases}$$

e la sua inversa è

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{p_1}{mR} \\ \\ \dot{\varphi} = \dfrac{p_2}{mR\sin^2(\theta)} - \Omega \end{cases}$$

La funzione di Hamilton è quindi

$$\begin{aligned} H(\theta,\varphi,p_1,p_2) &= p_1\cdot\dot{\theta}(p_1) + p_2\cdot\dot{\varphi}(\theta,p_2) - \tilde{L} \\ &= \frac{p_1^2}{mR} + \frac{p_2^2}{mR\sin^2(\theta)} - \Omega p_2 \\ &\quad - \frac{mR}{2}\left(\frac{p_1^2}{(mR)^2} + \frac{p_2^2\sin^2(\theta)}{(mR\sin^2(\theta))^2}\right) + mgR\cos(\theta) \\ &= \frac{p_1^2}{2mR} + \frac{p_2^2}{2mR\sin^2(\theta)} - \Omega p_2 + mgR\cos(\theta). \end{aligned}$$

La funzione di Hamilton è indipendente dal tempo, quindi è un integrale primo. La coordinata φ è ciclica, quindi la componente verticale del momento angolare, p_2, si conserva anche per l'osservatore non inerziale.

Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{p_1}{mR} \\[2ex] \dot{\varphi} = \dfrac{p_2}{mR\sin^2(\theta)} - \Omega \\[2ex] \dot{p_1} = 2\dfrac{p_2^2\cos(\theta)}{mR\sin^3(\theta)} + mgR\sin(\theta) \\[2ex] \dot{p_2} = 0. \end{cases}$$