TUTORATO 2

1. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, A, B, C le matrici associate nella base canonica a due applicazioni lineari $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, g, h le matrici associate nella base canonica a due forme bilineari $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\mathbb{I}$ la matrice identità, scrivere in notazione di Einstein le seguenti operazioni:

   (a) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$ (d) $C = AB$ (g) $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$

   (b) $\mathbb{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ (e) $h = A^{\mathbf{T}} g A$ (h) $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} g(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

   (c) $\mathbf{v}^{\mathbf{T}} g \mathbf{w} = a$ (f) $C = B^{-1}AB$ (i) $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = C\mathbf{u}$

a) $v^\mu + w^\mu = u^\mu$ d) $C^\mu_\nu = A^\mu_\rho B^\rho_\nu$ g) $w^\mu = A^\mu_\nu v^\mu$

b) $\delta^\mu_\nu v^\nu = v^\mu$ e) $h_{\mu\nu} = A^\sigma_\nu g_{\rho\sigma} B^\rho_\mu$ h) $g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} w^\mu v^\nu$

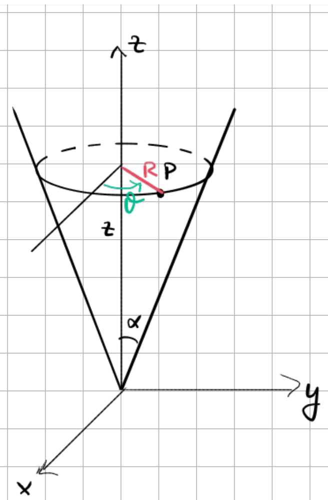
c) $v^\nu g_{\mu\nu} w^\mu = a$ f) $C^\mu_\nu = (B^{-1})^\mu_\rho A^\rho_\sigma B^\sigma_\nu$ i) $a v^\mu + b w^\mu = C^\mu_\nu u^\nu$

2. Un punto materiale $\mathbf{P}$ di massa m scivola senza attrito, soggetto alla forza peso, all'interno di un cono di semiapertura angolare α, con asse verticale e vertice verso il basso.

   (a) Dopo aver scelto opportune coordinate, scrivere la Lagrangiana del sistema.

   (b) Scrivere le equazioni del moto.

   (c) Caratterizzare i moti ad altezza costante.



$$\begin{cases} x = R(z)\cos\theta \\ y = R(z)\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

$\frac{R(z)}{z} = \tan\alpha \Rightarrow R(z) = z\overbrace{\tan\alpha}^{= a} = za$

$\theta \in [0, 2\pi]$, $z > 0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = az\cos\theta \\ y = az\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = a\dot{z}\cos\theta - az\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = a\dot{z}\sin\theta + az\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

a) $T = \frac{1}{2}m\left(a^2\dot{z}^2 + a^2z^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left[\dot{z}^2(a^2+1) + a^2z^2\dot{\theta}^2\right]$

$U = -mgz$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\left[\dot{z}^2(a^2+1) + a^2z^2\dot{\theta}^2\right] - mgz$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2z^2\dot{\theta}$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2ma^2z\dot{z}\dot{\theta} + ma^2z^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial z} = ma^2z\dot{\theta}^2 - mg$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}(a^2+1)$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}(a^2+1)$ NB: $z > 0$

b) $\Rightarrow$ le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} 2\cancel{m}\cancel{a^2}\cancel{z}\dot{z}\dot{\theta} + \cancel{m}\cancel{a^2}z^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = 0 \\ \cancel{m}a^2z\dot{\theta}^2 - \cancel{m}g = \cancel{m}\ddot{z}(a^2+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{z}\dot{\theta}}{z} \\ \ddot{z} = \frac{a^2z\dot{\theta}^2 - g}{a^2+1} \end{cases}$$

c) $z = z_0$ costante $\Rightarrow$ $\dot z = 0,\ \ddot z = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 0 = a z_0 \dot\theta^2 - g \\ \ddot\theta = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\dot\theta^2 = \dfrac{g}{a z_0}$ $\Rightarrow$ $\dot\theta = \dot\theta_0 = \text{cost}$

$\dot\theta_0 = \pm \sqrt{\dfrac{g}{a z_0}}$

$\Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME con velocità angolare $\pm\sqrt{\dfrac{g}{a z_0}}$

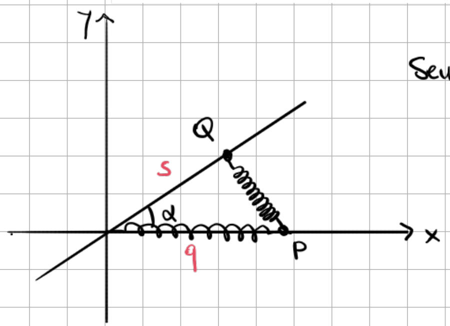
BONUS : Integrali primi :

- L indipendente da t $\rightarrow$ $\mathcal{H}$ integrale primo
  $\left.\begin{array}{l} T \text{ quadratica nelle } \dot q \\ U \text{ indipendente da } \dot q \end{array}\right\} \rightarrow \mathcal{H} = T - U = \frac{1}{2}m\left[\dot z^2(a^2+1) + a^2 z^2 \dot\theta^2\right] - mgz$ ENERGIA
- L indipendente da θ $\rightarrow$ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m a^2 z^2 \dot\theta$ integrale primo COMPONENTE z del MOMENTO ANGOLARE

3. Si considerino, in un piano orizzontale, due rette incidenti che formano un angolo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Due punti materiali **P** e **Q** di ugual massa m sono vincolati a muoversi lungo le rette, rispettivamente, e sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. **P**, inoltre, è collegato al punto di intersezione delle rette tramite una molla di costante elastica $2k$ e lunghezza a riposo nulla.

   (a) Dopo aver scelto opportune coordinate, scrivere la Lagrangiana del sistema.

   (b) Scrivere le equazioni del moto.



Senza perdere generalità, una retta coincide con l'asse x

$\begin{cases} x_P = q \\ y_P = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x_Q = s\cos\alpha \\ y_Q = s\sin\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} \dot x_p = \dot q \\ \dot y_p = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \dot x_p = \dot s\cos\alpha \\ \dot y_p = \dot s\sin\alpha \end{cases}$

a) $T = \frac{1}{2}m(\dot q^2 + \dot s^2)$

$U = -kq^2 - \frac{1}{2}k(s^2 + q^2 - 2sq\cos\alpha) = -\frac{1}{2}k(s^2 + 3q^2 - 2sq\cos\alpha)$

$L = \frac{1}{2}m(\dot q^2 + \dot s^2) - \frac{1}{2}k(s^2 + 3q^2 - 2sq\cos\alpha)$

b) $\dfrac{\partial L}{\partial s} = -k(s - q\cos\alpha)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot s} = m\dot s$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot s} = m\ddot s$

$\dfrac{\partial L}{\partial q} = -k(3q - s\cos\alpha)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q} = m\dot q$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q} = m\ddot q$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot s = \dfrac{k}{m}(q\cos\alpha - s) \\ \ddot q = \dfrac{k}{m}(s\cos\alpha - 3q) \end{cases}$$