Onde Fluidi e Termodinamica

Riassunto da:
"FISICA: Meccanica e Termodiamica - P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci"

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Maggio 2024

Indice

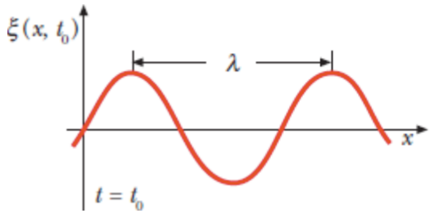
Onde

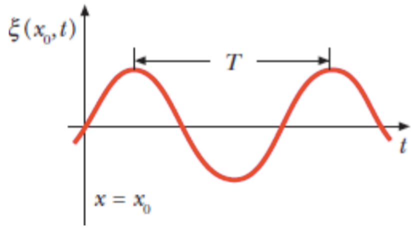
1.1 Onde piane armoniche

Un tipo molto importante di onda piana è l'**onda armonica** la cui forma si scrive

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}x \mp \boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\delta})$$

dove k è il **numero d'onde**.





Periodo spaziale Fissato un tempo $t = t_0$, definiamo la lunghezza d'onda λ come la periodicità spaziale dell'onda. Essendo λ lo spazio tra due creste d'onda possiamo calcolarla come $\lambda = x_2 - x_1 = 2\pi/k$, da cui si deduce che k è uguale al numero di lunghezze d'onda in un intervallo spaziale pari a 2π metri.

In generale il periodo spaziale può essere espresso tramite λ o k.

Lunghezza d'onda λ

La lunghezza d'onda è lo spazio percorso dalla perturbaione nell'intervallo di tempo di un periodo T.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = vT$$

Periodo temporale Fissato unpunto nello spazio $x = x_0$, definiamo il periodo $T = t_2 - t_2$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

come l'intervallo temporale tra due istanti nei quali l'onda, essendo armonica, assume lo stesso valore.

Sapendo che la pulsazione è la velocità dell'onda nel percorrere un giro (2π), i due periodi dono legati dalla relazione

$$\lambda = vT$$

Quindi possiamo esprimere il periodo temporale tramite T, f, ω.

Tutte le espressioni della funzione d'onda sono:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx \mp \omega t + \delta) \qquad \xi(x,t) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) + \delta\right] \qquad \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt) + \delta\right]$$

1.1.1 Propagazione dell'energia in una barra solida

La propagazione di un campo che descrive in'onda è sempre accompagnato da una propagazione di energia. Osserviamo prima il fenomeno del flusso di energia legato alla propagazione di un'onda piana armonica in una barra solida andando a calcolare la potenzia media e l'energia per untià di volume ad essa associata.

Per prima cosa mettiamo in evidenza le equazioni che entrano in gioco:

$$\textbf{Onda:}\quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Forza:}\quad F = -ES\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

L'espressione della potenza è

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= \vec{F} \cdot \vec{u} \\
&= -ES\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} \\
&= -ES\left[k\xi_0 \cos(kx - \omega t)\right]\left[-\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)\right] \\
&= ESk\omega\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

La potenza quindi è una cosinusoide traslata in alto di una sua ampiezza (con avvallamenti tangenti all'asse orizzontale). la potenza media è espirmibile come la retta che interseca la cosinusoide alla quota pari a metà la sua ampiezza; poi ricordandoci che

$$\boxed{v = \sqrt{E/\rho} \qquad E = v^2\rho} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_m &= \frac{1}{2}ESk\omega\xi_0^2 \\
&= \frac{1}{2}(v^2\rho)S\left(\frac{\omega}{v}\right)\omega\xi_0^2
\end{aligned}$$

$$\mathscr{P}_m = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi^2 Sv \tag{1.1}$$

Energia per unità di volume

Considero l'elemento infinitesimo di massa $dm = \rho dV = \rho S dx$ descrive un moto armonico con

$$\textbf{Posizione:}\quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Velocità}\quad v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Quindi l'energia meccanica risulta pari all'energia cinetica massima assunto dall'elemento dm, che si trova utilizzando la velocità massima $v_{\max} = \omega\xi_0$:

$$dU = \frac{1}{2}(dm)v_{\max}^2 = \frac{1}{2}\rho S(dx)\omega^2\xi_0^2 = \frac{1}{2}\rho(dV)\omega^2\xi_0^2$$

Chiamiamo **densità di energia per unità di volume** il valore

$$\mathscr{W} = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

con la quale possiamo esprimere la potenza media come

$$\mathscr{P}_m = \mathscr{W} Sv \tag{1.2}$$

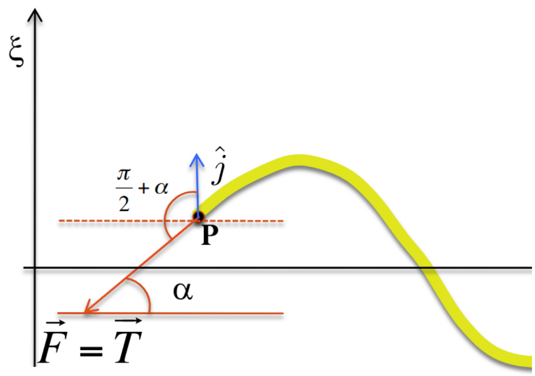
Intensità dell'onda

Definiamo l'intensità di un'onda come **potenza media per unità di superficie**, quindi

$$I = \frac{\mathscr{P}_m}{S} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v$$

1.1.2 Propagazione dell'energia in una corda tesa

Studiamo ora lo stesso fenomeno ma in una corda tesa. La situazione è simile con la differenza che l'onda ora è trasversale.



Per prima cosa mettiamo in evidenza le equazioni che entrano in gioco:

$$\textbf{Onda:} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Forza:} \quad F = T$$

L'espressione della potenza è

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= F \cdot \vec{u} \\
&= T\frac{\partial \xi}{\partial t}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} \\
&= T\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} \\
&= T k\omega\xi_0^2\cos^2(kx-\omega t)
\end{aligned}$$

Trovo la potenza media come prima esprimendo k e T come

$$\boxed{v = \sqrt{T/\mu} \qquad T = v^2\mu} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

$$\boxed{\mathscr{P}_m = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi^2 v} \tag{1.3}$$

Energia per unità di lunghezza

Considero l'elemento infinitesimo di massa $dm = \mu dx$ descrive un moto armonico con

$$\textbf{Posizione:} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Velocità} \quad v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Quindi l'energia meccanica risulta pari all'energia cinetica massima assunto dall'elemento dm, che si trova utilizzando la velocità massima $v_{\max} = \omega \xi_0$:

$$dU = \frac{1}{2}(dm) v_{\max}^2 = \frac{1}{2}\mu(dx)\omega^2 \xi_0^2$$

Chiamiamo **densità di energia per unità di lunghezza** il valore

$$\mathscr{W} = \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

con la quale possiamo esprimere la potenza media come

$$\mathscr{P}_m = \mathscr{W} v \tag{1.4}$$

1.2 Onde sonore

Consideriamo ora delle onde sonore come onde di spostamento sempre accompagnate da onde di pressione:

$$\textbf{Spostamento:} \quad \xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Pressione:} \quad dp = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

1.2.1 Pressione

L'espressione della pressione era stata ricavata nel capitolo sulle onde nei gas (**??**)

$$p(x,t) = p_0 - \beta \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad dp(x,t) = p(x,t) - p_0 = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Sviluppando la derivata parziale, e ricordando alcune equivalenze

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \longrightarrow \beta = v^2 \rho_0} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

troviamo

$$\begin{aligned} dp &= -\beta k \xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ &= v^2 \rho_0 \frac{\omega}{v} \cos(kx - \omega t) \\ &= \boldsymbol{\rho_0 v \omega \xi_0} \cos(kx - \omega t) \\ &= \boldsymbol{\Delta p}_{\max} \sin(kx - \omega t - \pi/2) \end{aligned}$$

Le onde di pressione sono quindi in ritardo di $\pi/2$.

1.2.2 Potenza

$$\mathscr{P} = \overrightarrow{F} \cdot \vec{v} = (dp)Sv = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial x} S \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= \beta k \xi_0 \cos(kx - \omega t)\, S\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ &= v^2 \rho_0 \frac{\omega}{v} \xi_0 \cos(kx - \omega t)\, S\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ &= \rho_0 v \omega^2 S \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)\end{aligned}$$

Si ottiene quindi una potenza media pari a metà la sua ampiezza

$$\mathscr{P}_m = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 S \xi_0^2$$

1.2.3 Intensità

Ricordando che l'intensità è la potenza per unità di superficie:

$$I = \frac{\mathscr{P}_m}{S} = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 \xi_0^2$$

Riconosciamo che $\Delta p_{\max} = \rho_0 v \omega \xi_0$ e che quindi possiamo scrivere l'intensità come

$$\boxed{I = \frac{(\rho_0 v \omega \xi_0)^2}{2\rho_0 v} = \frac{\Delta p_{\max}^2}{2\rho_0 v}} \tag{1.5}$$