1 Trasformata di Fourier: calcolo e proprietà.

1.1

Data la funzione

$$f(x) = e^{-|x|} \,,$$

determinare le proprietà della trasformata di Fourier di f senza calcolarla. Calcolare la T. F. e verifficare le proprietà previste.

Soluzione

Dato che f va a zero più velocemente di $1/x$ per $x \to \pm\infty$ (infatti, più velocemente di ogni potenza di $1/x$), e dato che f è regolare per tutti $x \in \mathbb{R}$, la f è sommabile e la sua T. F. esiste.

- $f(x) = f(-x)$

  Dalla simmetria di $f(x)$, che è una funzione pari, si può dire che $\mathcal{F}_k\{f(x)\}$ è anche una funzione pari di k.

- $f \in L^1$

  Dalla sommabilità di $f(x)$ sappiamo che $\mathcal{F}_k\{f(x)\}$ è continua e va a zero per $k \to \pm\infty$.

- Andamento asintotico di $f(x)$

  Dal fatto che $x^n f(x)$ è sommabile per tutti $n \in \mathbb{N}$ possiamo dire che $\mathcal{F}_k\{f(x)\}$ è infinitamente derivabile.

- Derivabilità di $f(x)$.

  La funzione $f(x)$ è continua e la sua derivata è

  $$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}\,, & x > 0 \\ e^{x}\,, & x < 0 \end{cases} \,.$$

  Anche se $f'(x)$ non esiste per $x = 0$, $f'(x)$ è definita quasi ovunque ed è sommabile, quindi possiamo dire che $\mathcal{F}_k\{f(x)\} = o(1/k)$. Dato che $f'(x)$ non è continua, non possiamo dire niente altro sul andamento asintotico della T.F. di $f(x)$.

- Calcolo della T. F. di $f(x)$

Definendo $F(k) \equiv \mathcal{F}_k\{f(x)\}$

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-|x|}\, e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\left(\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{x}\, e^{-ikx} + \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-x}\, e^{-ikx}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\left(\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(1-ik)x} + \int_{0}^{\infty} dx\, e^{(-1-ik)x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\left(\left.\frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(-1-ik)x}}{-1-ik}\right|_{0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+k^2}\,.
\end{aligned}
$$

Si verifficano tutte le proprietà previste.

1.2

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

(a) Discutere l'esistenza della trasformata di Fourrier di $f(x)$ e dire quali sue proprietà possiamo dedurre senza calcolarla.

(b) Calcolare la trasformata di Fourrier di $f(x)$ e discutere le proprietà precedentemente previste.

Soluzione

(a) Guardando la funzione $f(x)$ possiamo dedurre le seguenti proprietà della trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k[f(x)]$:

- La funzione $f(x)$ non ha singolarità sul cammino d'integrazione ($x \in \mathbb{R}$) e per $x \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di $1/x$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x\, f(x) = 0.$$

  Pertanto la funzione $f(x)$ è sommabile. Quindi la trasformata di Fourier esiste ed è continua e limitata ovunque:

$$\left|\mathcal{F}_k[f(x)]\right| \leq \text{cost} \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

- La funzione $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n\, f(x) = 0 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Quindi la trasformata di Fourier è infinitamente derivabile.

- La funzione $f(x)$ non è continua, quindi neanche derivabile. Non possiamo quindi dire nulla sul comportamento all'infinito di $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

(b) Calcoliamo ora la trasformata di Fourier.

Per $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k[f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_{-a}^{+a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{ik} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ka}{k}\ . \end{aligned}$$

Per $k = 0$

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a\,.$$

– Come previsto $\mathcal{F}_k[f(x)]$ è continua e limitata.

– Si nota quindi che la trasformata di Fourier per $k \to \pm\infty$ tende a zero come $1/k$:

$$\lim_{k\to\pm\infty} \mathcal{F}_k[f(x)] = \lim_{k\to\pm\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ka}{k} = 0,$$

$$\lim_{k\to\pm\infty} k\mathcal{F}_k[f(x)] = \lim_{k\to\pm\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ka = \text{indefinito}$$

Nel primo limite abbiamo usato il fatto che, per $ka \in \mathbb{R}$ il seno rimane comunque limitato tra -1 e 1 per ogni k, quindi anche per $k \to \pm\infty$. Il secondo limite è indefinito, perché non possiamo dire a quale valore tra -1 e 1 tende $\sin ka$ per $k \to \pm\infty$.

– Notiamo inoltre che la trasformata di Fourier è infinitamente derivabile perchè è analitica per tutti i valori di k reale, come previsto.

1.3

Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

(a) Discutere l'esistenza della trasformata di Fourrier di $f(x)$ e dire quali sue proprietà possiamo dedurre senza calcolarla.

(b) Calcolare la trasformata di Fourrier di $f(x)$ e discutere le proprietà precedentemente previste.

Soluzione

(a) Guardando la funzione $f(x)$ possiamo dedurre le seguenti proprietà della trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k[f(x)]$:

– La funzione $f(x)$ non ha singolarità sul cammino d'integrazione ($x \in \mathbb{R}$) e per $x \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di $1/x$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\, f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} = 0.$$

Pertanto la funzione $f(x)$ è sommabile. Quindi la trasformata di Fourier esiste ed è continua e limitata ovunque:

$$\left|\mathcal{F}_k[f(x)]\right| \le \text{cost} \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

– La funzione $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ tende a zero come $1/x^2$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + a^2} = 1 \neq 0.$$

quindi non possiamo dire niente sulla derivbilità di $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

– La funzione $f(x)$ è infinitamente derivabile perchè è analitica per tutti i valori reali di x Quindi $\mathcal{F}_k[f(x)]$ per $k \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza:

$$\lim_{k\to\pm\infty} k^n\, \mathcal{F}_k[f(x)] = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Calcoliamo ora la trasformata di Fourier.

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2} dx$$

L'integrale è ben definito, perché la funzione integranda

$$F(x) = \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2}$$

non ha singolarità sul cammino d'integrazione (la retta reale) e perché va a zero per x che tende a $\pm\infty$ più velocemente di $1/x$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\,F(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\,e^{-ikx}}{x^2+a^2} = 0.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che e^{-ikx} (x e k reali) è un numero complesso che sta sulla circonferenza di raggio 1, quindi con parte reale e parte immaginaria limitata. Ora, se immergiamo la retta reale di x nel piano complesso di z (quindi $x = \operatorname{Re} z$), abbiamo che per la funzione

$$F(z) = \frac{e^{-ikz}}{z^2+a^2}$$

vale

$$\lim_{z\to\infty} z\,F(z) \neq 0\,, \text{ per } k \neq 0$$
$$\lim_{z\to\infty} z\,F(z) = 0\,, \text{ per } k = 0$$

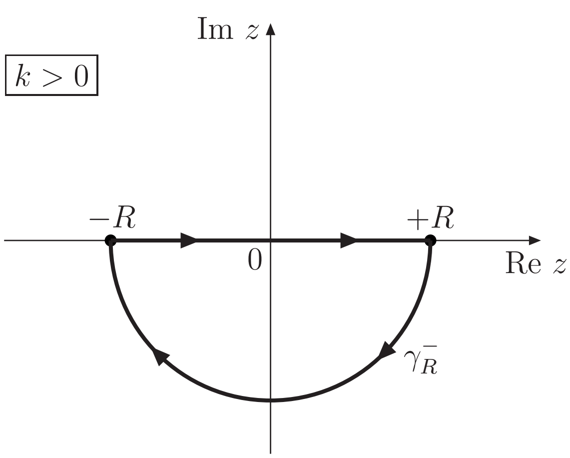
Infatti, la funzione $F(z)$ ha una singolarità essenziale all'infinito per $k \neq 0$ ($z \in \mathbb{C}$), che non può essere compensata da nessun polo del denominatore (che ha un polo doppio all'infinito). Notiamo però che per $k \neq 0$, $F(z)$ è proprio della forma

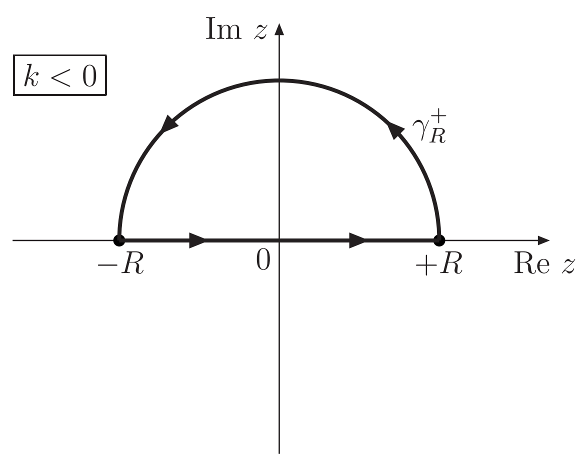
$$F(z) = e^{-i\,k\,z}\,g(z), \qquad \text{con} \qquad g(z) = \frac{1}{z^2+a^2}, \qquad \lim_{z\to\infty} g(z) = 0, \qquad \text{per } k \neq 0$$

Quindi possiamo applicare il lemma di Jordan, dobbiamo solo prestare attenzione ai valori di k per capire in quale semipiano immaginario chiudere il cammino di integrazione. In particolare avremo:

$\boxed{\text{Se } k>0}$ allora $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,g(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R^-} e^{-ikz}\,g(z)\,dz.$ cioè $\boxed{\text{chiudo sotto}}$

$\boxed{\text{Se } k<0}$ allora $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,g(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R^+} e^{-ikz}\,g(z)\,dz.$ cioè $\boxed{\text{chiudo sopra}}$





Per $k=0$ possiamo chiudere il camino sia sotto che sopra; scegliamo sopra. Quindi abbiamo

$$\text{Se } k>0 \quad \text{allora} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R^-} F(z)\,dz = -\,2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z<0} \{\operatorname{Res} F(z)\}\,.$$

$$\text{Se } k<0 \quad \text{allora} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R^+} F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \{\operatorname{Res} F(z)\}$$

$$\text{Se } k=0 \quad \text{allora} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R^+} g(z)\,dz = \ 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \{\operatorname{Res} g(z)\}\,.$$

Il segno "$-$" davanti al primo residuo è dovuto al fatto che la curva γ_R^- è percorsa in senso orario.

Essendo a un numero reale e positivo, la funzione integranda ha due poli semplici sull'asse immaginario, in $z=\pm ia$, di cui, quando mandiamo R a infinito, $z=-ia$ si trova nella regione interna a γ_R^-, mentre $z=+ia$ si trova nella regione interna a γ_R^+. Pertanto

$$\begin{aligned}
\text{Se } k>0 \ \Rightarrow \ \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx &= -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z<0} \{\operatorname{Res} F(z)\} = -2\pi i \left\{\operatorname{Res} \frac{e^{-ikz}}{z^2+a^2}\right\}_{z=-ia} \\
&= -2\pi i \lim_{z\to -ia} (z+ia)\frac{e^{-ikz}}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\pi\, e^{-ka}}{a}. \\
\text{Se } k<0 \ \Rightarrow \ \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \{\operatorname{Res} F(z)\} = 2\pi i \left\{\operatorname{Res} \frac{e^{-ikz}}{z^2+a^2}\right\}_{z=ia} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to ia} (z-ia)\frac{e^{-ikz}}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\pi\, e^{ka}}{a}, \\
\text{Se } k=0 \ \Rightarrow \ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \{\operatorname{Res} g(z)\} = 2\pi i \left\{\operatorname{Res} \frac{1}{z^2+a^2}\right\}_{z=ia} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to ia} (z-ia)\frac{1}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\pi}{a}.
\end{aligned}$$

Avremo quindi per la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-ka}}{a} & k>0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{ka}}{a} & k<0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a} & k=0 \end{cases} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-|k|a}}{a}
\end{aligned}$$

- La trasformata è continua a limitata come previsto. Per questo esempio abbiamo calcolato i casi $k=0$ esplicitamente per controlare la continuità prevista dalla sommabilità di $f(x)$. Nella pratica, possiamo solo fare il calcolo della trasformata per valori diversi da zero e usare la continuità della trasformata (che sapiamo vale se $f(x)$ è sommabile) per trovare il suo valore per $k=0$.

– Si nota che, come previsto, la trasformata di Fourier per $k \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza:

$$\lim_{k\to\pm\infty} k^n \mathcal{F}_k[f(x)] = \lim_{k\to\pm\infty} k^n \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-|k|a}}{a} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

– Notiamo inoltre che la trasformata di Fourier non è derivabile (per tutti i valori reali di k) perchè la sua derivata non esiste per $k = 0$:

$$\text{per } k \neq 0\,, \qquad \frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{d}{dk}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-|k|a}}{a} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-ka}}{-a^2} & k > 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{ka}}{a^2} & k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{k\to 0^+} \frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)] = \lim_{k\to 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-ka}}{-a^2} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a^2},$$

$$\lim_{k\to 0^-} \frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)] = \lim_{k\to 0^-} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{ka}}{a^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a^2}.$$

1.4 (esercizio risolto a lezione e discusso nella esercitazione.)

Data la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

(a) Discutere l'esistenza della trasformata di Fourrier di $f(x)$ e dire quali sue proprietà possiamo dedurre senza calcolarla.

(b) Calcolare la trasformata di Fourrier di $f(x)$ e discutere le proprietà precedentemente previste.

Soluzione

(a) Guardando la funzione $f(x)$ possiamo dedurre le seguenti proprietà della trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k[f(x)]$:

- La funzione $f(x)$ non ha singolarità sul cammino d'integrazione ($x \in \mathbb{R}$) e per $x \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di $1/x$:

  $$\lim_{x\to\pm\infty} x\, f(x) = 0.$$

  Pertanto la funzione $f(x)$ è sommabile. Quindi la trasformata di Fourier esiste ed è continua e limitata ovunque:

  $$\Big|\mathcal{F}_k[f(x)]\Big| \leq \text{cost} \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

- La funzione $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza:

  $$\lim_{x\to\pm\infty} x^n\, f(x) = 0 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Quindi la trasformata di Fourier è infinitamente derivabile (per tutti i valori reali di k).

- La funzione $f(x)$ è infinitamente derivabile (per tutti i valori reali di x) perchè la esponenziale è analitica. Tutte le derivate sono sommabili: la derivata n della gaussiana è della forma $P(x)\exp(x^2/a^2)$ (con $P(x)$ un polinomio di x); il limite di una gaussiana per qualsiasi potenza di x e sempre zero per $x \to \pm\infty$. Quindi $\mathcal{F}_k[f(x)]$ per $k \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza:

  $$\lim_{k\to\pm\infty} k^n\, \mathcal{F}_k[f(x)] = 0 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Calcoliamo ora la trasformata di Fourier.

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, e^{-ikx} dx$$

Un modo semplice per calcolarla è quello di considerare la derivata di $\mathcal{F}_k[f(x)]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,(-ix)\,e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{ia^2}{2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\right)\,e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{ia^2}{2}e^{-\frac{x^2}{a^2}-ikx}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ia^2}{2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,\frac{d}{dx}\left(e^{-ikx}\right)dx.
\end{aligned}$$

Il termine integrato è nullo a causa dell'esponenziale gaussiano, quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)] &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ia^2}{2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,(-ik)e^{-ikx}dx \\
&= -\frac{ka^2}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,e^{-ikx}dx = -\frac{ka^2}{2}\mathcal{F}_k[f(x)]
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale del primo ordine per $\mathcal{F}_k[f(x)]$ che si può facilmente risolvere:

$$\frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)] = -\frac{ka^2}{2}\mathcal{F}_k[f(x)]; \qquad \frac{d\mathcal{F}_k[f(x)]}{\mathcal{F}_k[f(x)]} = -\frac{ka^2}{2}dk;$$

$$\ln\left(\mathcal{F}_k[f(x)]\right) = -\frac{k^2a^2}{4} + C; \qquad \mathcal{F}_k[f(x)] = K\,e^{-\frac{a^2}{4}k^2}.$$

La costante d'integrazioe K si può fissare facilmente, considerando che:

$$\lim_{k\to 0}\mathcal{F}_k[f(x)] = K \qquad \Rightarrow \qquad K = \lim_{k\to 0}\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx.$$

Quindi K non è altro che l'integrale gaussiano:

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx; \qquad \begin{aligned}
K^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx\right]^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{a^2}}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}}
\end{aligned}$$

Ora passiamo dalle variabili cartesiane x e y alle variabili polari:

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy = \int_0^{\infty}d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\,\rho.$$

Abbiamo quindi:

$$K^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\,\rho\,e^{-\frac{\rho^2}{a^2}} = \int_0^{\infty}d\rho\,\rho\,e^{-\frac{\rho^2}{a^2}} = \left[\frac{-a^2}{2}e^{-\frac{\rho^2}{a^2}}\right]_0^{\infty} = \frac{a^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Perciò la trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{a}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{a^2}{4}k^2}.$$

- Come previsto $\mathcal{F}_k[f(x)]$ è continua e limitata.
- Notiamo inoltre che la trasformata di Fourier è infinitamente derivabile, come previsto.
- Notiamo che, come previsto, la $\mathcal{F}_k[f(x)]$ per $k \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza:

$$\lim_{k\to\pm\infty} k^n \, \mathcal{F}_k[f(x)] = \lim_{k\to\pm\infty} k^n \, \frac{a}{\sqrt{2}} \, e^{-\frac{a^2}{4}k^2} = 0 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.5

Data la funzione

$$f(x) = \frac{\cos \pi x}{x^2 + x - \frac{3}{4}}.$$

(a) Discutere l'esistenza della trasformata di Fourrier di $f(x)$ e dire quali sue proprietà possiamo dedurre senza calcolarla.

(b) Calcolare la trasformata di Fourrier di $f(x)$ e discutere le proprietà precedentemente previste.

Soluzione

NOTA: anche se la funzione non è definita per $x = 1/2, -3/2$, queste sono punti di singolarità eliminabile. Possiamo quindi "rimuovere" le singolarità usando il limite, come descrito nel file "8_Fourier_proprieta.pdf"

(a) Guardando la funzione $f(x)$ possiamo dedurre le seguenti proprietà della trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k[f(x)]$:

- Vediamo prima di tutto se la $f(x)$ è sommabile.

  La funzione $f(x)$ non ha singolarità sul cammino d'integrazione ($x \in \mathbb{R}$). Infatti le uniche possibili singolarità di $f(x)$ al finito vengono dagli zeri del denominatore, che ha due zeri semplici in:

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0, \qquad x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2}, \qquad x_- = -\frac{3}{2}, \quad x_+ = \frac{1}{2}.$$

  Notiamo che per $x \to x_\pm$ anche il numeratore $\cos \pi x$ ha degli zeri semplici. Quindi gli zeri semplici del denominatori sono compensati dagli zeri semplici del numeratore e la funzione è regolare in $x = x_\pm$:

$$\lim_{x \to x_\pm} f(x) = \lim_{x \to x_\pm} \frac{\cos \pi x}{x^2 + x - \frac{3}{4}} = \lim_{x \to x_\pm} \frac{-\pi \sin \pi x}{2x + 1} = \frac{-\pi \sin \pi x_\pm}{2x_\pm + 1} = \mp \frac{\pi}{2}.$$

  Inoltre, per $x \to \pm\infty$, $f(x)$ tende a zero più velocemente di $1/x$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} x\, f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2 + x - \frac{3}{4}} = 0.$$

  Qui abbiamo usato il fatto che, per $x \in \mathbb{R}$, il coseno rimane comunque limitato tra -1 e $+1$ per ogni x, quindi anche per $x \to \pm\infty$.

  Pertanto la funzione $f(x)$ è sommabile.

  Quindi la trasformata di Fourier esiste ed è continua e limitata ovunque:

$$\left|\mathcal{F}_k[f(x)]\right| \leq \text{cost} \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

– La funzione $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ tende a zero come $1/x^2$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 \cos \pi x}{x^2 + x - \frac{3}{4}} = \text{indefinito}.$$

Il primo limite è quello calcolato sopra. Il secondo limite è indefinito, perché non possiamo dire a quale valore tra -1 e $+1$ tende $\cos \pi x$ per $x \to \pm\infty$. Quindi non possiamo dire niente sulla derivabilità di $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

– La funzione $f(x)$ è infinitamente derivabile (per tutti i reali) e tutte le derivate sono limitate al finito perchè $f(x)$ è analitica. La sommabilità delle derivate segue dal comportamento asintotico di $f(x)$, che per $x \to \pm\infty$

$$f(x) \sim \frac{\cos(\pi x)}{x^2}.$$

Le derivate di $1/x^2$ portano sempre una potenza in più nel denominatore e quelle di $\cos(\pi x)$ risulta sempre un seno o coseno, quindi tutte le derivate di $f(x)$ hanno un termine dominante $O(1/x^2)$ per $x \to \pm\infty$. Questo significa che tutte le derivate sono sommabili. Quindi $\mathcal{F}_k[f(x)]$ per $k \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza:

$$\lim_{k\to\pm\infty} k^n \, \mathcal{F}_k[f(x)] = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Calcoliamo ora la trasformata di Fourier.

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx} \cos \pi x}{x^2 + x - \frac{3}{4}}\, dx$$

è ben definito. Infatti la funzione integranda

$$F(x) = \frac{e^{-ikx} \cos \pi x}{x^2 + x - \frac{3}{4}} = f(x)\, e^{-ikx}$$

è sommabile perché lo è $f(x)$.

Vogliamo ora calcolare l'integrale usando la chiusura del cammino di integrazione all'infinito. Per farlo dovremmo riscrivere il coseno come somma di esponenziali e poi spezzare l'integrale:

$$\cos(\pi x) = \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{2}, \qquad \mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(k-\pi)x} + e^{-i(k+\pi)x}}{x^2 + x - \frac{3}{4}}\, dx.$$

Se spezziamo l'integrale nella somma dei due integrali con funzioni integrande

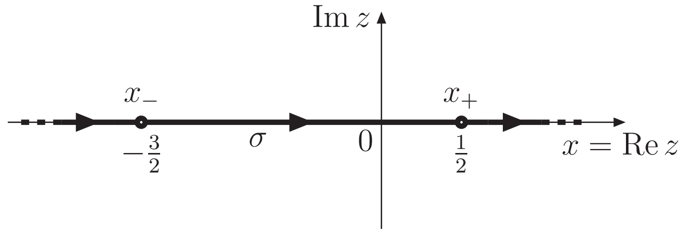
$$F_1(x) = \frac{e^{-i(k-\pi)x}}{x^2 + x - \frac{3}{4}}, \qquad F_2(x) = \frac{e^{-i(k+\pi)x}}{x^2 + x - \frac{3}{4}},$$

vediamo che gli integrali di $F_1(x)$ e $F_2(x)$ non sono definiti sulla retta reale, perché gli integrandi hanno poli semplici sul cammino di integrazione. Avendo infatti spezzato il coseno, il numeratore delle singole $F_1(x)$ e $F_2(x)$ non si annulla più in $x = x_\pm$; solo la somma $F_1(x) + F_2(x)$ è regolare in $x = x_\pm$. Torniamo quindi all'integrale di partenza e lo scriviamo come un integrale nel piano complesso della funzione

$$F(z) = \frac{e^{-ikz} \cos \pi z}{z^2 + z - \frac{3}{4}}$$

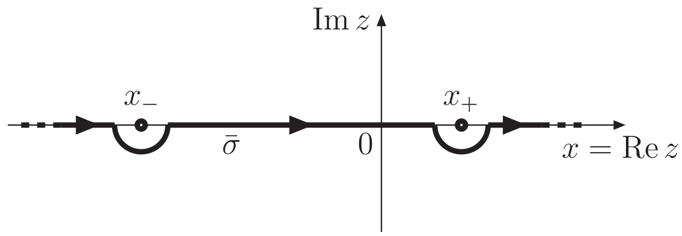
sulla curva σ che va da $-\infty$ a $+\infty$ sulla retta reale:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\sigma F(z)\, dz$$



Visto che siamo nel piano complesso, grazie al teorema di Cauchy, l'integrale non cambia se il cammino d'integrazione viene deformato con continuità senza incontrare singolarità e lasciando invariati il punto di partenza ($-\infty$) e quello d'arrivo ($+\infty$). Usiamo questa proprietà per modificare il cammino d'integrazione e aggirare i punti $z = x_\pm$. Possiamo farlo come vogliamo. Scegliamo di aggirare $z = x_\pm$ andando nel semipiano immaginario negativo e calcoliamo l'integrale lungo la curva $\bar{\sigma}$ in figura:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{\sigma}} F(z)\, dz$$



Il nuovo cammino di integrazione $\bar{\sigma}$ è omotopicamente equivalente al cammino originale σ e quindi, per il corollario al teorema di Cauchy, il risultato dell'integrale calcolato sui due cammini è lo stesso.

Dopo aver deformato il cammino di integrazione, possiamo spezzare l'integrale nella somma dei due integrali:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left[\int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\, dz + \int_{\bar{\sigma}} F_2(z)\, dz \right],$$

$$F_1(z) = \frac{e^{-i(k-\pi)z}}{z^2 + z - \frac{3}{4}} = \frac{e^{-i(k-\pi)z}}{\left(z + \frac{3}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}, \qquad F_2(z) = \frac{e^{-i(k+\pi)z}}{z^2 + z - \frac{3}{4}} = \frac{e^{-i(k+\pi)z}}{\left(z + \frac{3}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}.$$

Le funzioni integrande soddisfano le ipotesi del lemma di Jordan per $k \neq \pi, -\pi$:

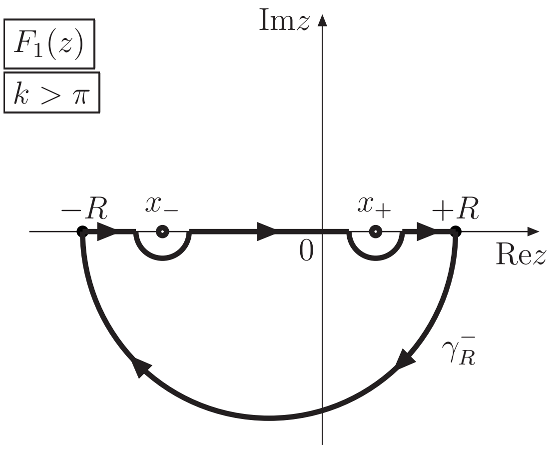
$$F_1(z) = e^{-i(k-\pi)z} g(z), \qquad F_2(z) = e^{-i(k+\pi)z} g(z), \qquad g(z) = \frac{1}{z^2 + z - \frac{3}{4}},$$

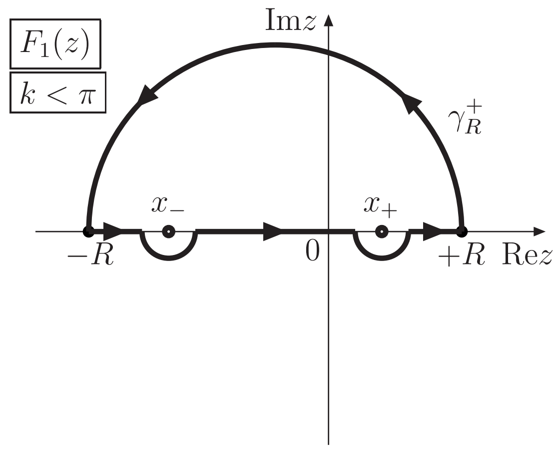
$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0.$$

Quindi possiamo applicare il lemma di Jordan per $k \neq \pi, -\pi$. Per $k = \pi, -\pi$ si può calcolare chiudendo il camino di integrazione sia sotto che sopra, come nel esercizio precedente. Quà invece, usaremo la proprietà prevista della continuità di $\mathcal{F}_k[f(x)]$ per questi punti. Torniamo al caso $k \neq \pi, -\pi$. Dobbiamo solo prestare attenzione ai valori di k per capire in quale semipiano immaginario chiudere il cammino di integrazione. In particolare per $F_1(z) = e^{-i(k-\pi)z} g(z)$ dobbiamo distinguere i casi $k < \pi$ e $k > \pi$:

$$\boxed{\text{Se } k > \pi} \quad \text{allora} \quad \int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} F_1(z)\,dz. \quad \text{cioè} \quad \boxed{\text{chiudo sotto}}$$

$$\boxed{\text{Se } k < \pi} \quad \text{allora} \quad \int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} F_1(z)\,dz. \quad \text{cioè} \quad \boxed{\text{chiudo sopra}}$$





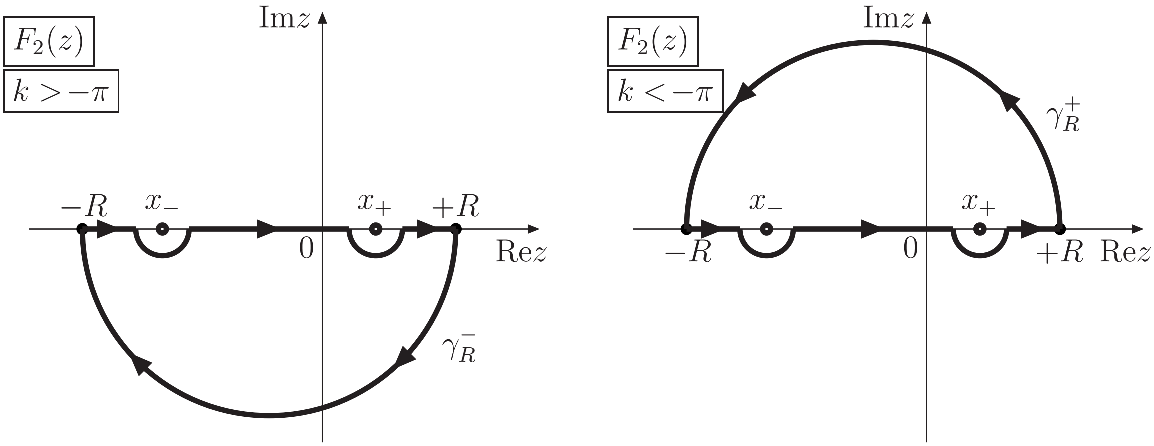
Notiamo che, quando chiudiamo sotto, le singolarità non sono nella regione interna di γ_R^- e il corrispondente integrale è nullo:

$$\begin{aligned}
\text{Se } k > \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\,dz &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} F_1(z)\,dz = 0 \\
\text{Se } k < \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\,dz &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} F_1(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z=x_-,x_+} \{\operatorname{Res} F_1(z)\} \\
&= 2\pi i \left[\{\operatorname{Res} F_1(z)\}_{z=x_-} + \{\operatorname{Res} F_1(z)\}_{z=x_+} \right] \\
&= 2\pi i \left[\lim_{z\to-\frac{3}{2}} \frac{\left(z+\frac{3}{2}\right) e^{-i(k-\pi)z}}{\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right) e^{-i(k-\pi)z}}{\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \right] \\
&= 2\pi i \left[-\frac{e^{i(k-\pi)\frac{3}{2}}}{2} + \frac{e^{-i(k-\pi)\frac{1}{2}}}{2} \right] \\
&= \pi i \left[-e^{-i\frac{3}{2}\pi} e^{i\frac{3}{2}k} + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{1}{2}k} \right] = \pi \left[e^{i\frac{3}{2}k} - e^{-i\frac{1}{2}k} \right]
\end{aligned}$$

Invece per $F_2(z) = e^{-i(k+\pi)z} g(z)$ dobbiamo distinguere i casi $k < -\pi$ e $k > -\pi$:

$$\boxed{\text{Se } k > -\pi} \quad \text{allora} \quad \int_{\bar\sigma} F_2(z)\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} F_2(z)\, dz. \quad \text{cioè} \quad \boxed{\text{chiudo sotto}}$$

$$\boxed{\text{Se } k < -\pi} \quad \text{allora} \quad \int_{\bar\sigma} F_2(z)\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} F_2(z)\, dz. \quad \text{cioè} \quad \boxed{\text{chiudo sopra}}$$



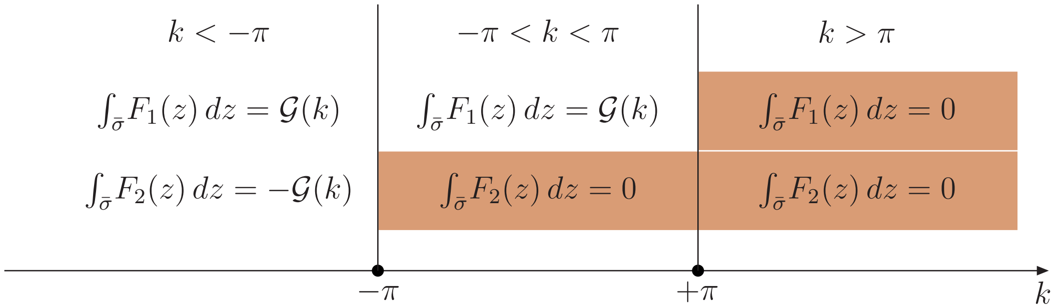
Quando chiudiamo sotto, le singolarità non sono nella regione interna di γ_R^- e il corrispondente integrale è nullo:

$$\begin{aligned}
\text{Se } k > -\pi \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar\sigma} F_2(z)\, dz &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} F_2(z)\, dz = 0 \\
\text{Se } k < -\pi \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar\sigma} F_2(z)\, dz &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} F_2(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z=x_-,x_+} \{\text{Res}\, F_2(z)\} \\
&= 2\pi i \left[\{\text{Res}\, F_2(z)\}_{z=x_-} + \{\text{Res}\, F_2(z)\}_{z=x_+} \right] \\
&= 2\pi i \left[\lim_{z\to-\frac{3}{2}} \frac{\left(z+\frac{3}{2}\right) e^{-i(k+\pi)z}}{\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right) e^{-i(k+\pi)z}}{\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \right] \\
&= 2\pi i \left[-\frac{e^{i(k+\pi)\frac{3}{2}}}{2} + \frac{e^{-i(k+\pi)\frac{1}{2}}}{2} \right] \\
&= \pi i \left[-e^{i\frac{3}{2}\pi} e^{i\frac{3}{2}k} + e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{1}{2}k} \right] = -\pi \left[e^{i\frac{3}{2}k} - e^{-i\frac{1}{2}k} \right]
\end{aligned}$$

Definiamo per comodità

$$\mathcal{G}(k) = \pi \left[e^{i\frac{3}{2}k} - e^{-i\frac{1}{2}k} \right]$$

e mettiamo insieme i risultati di F_1 e F_2:



Abbiamo che per $k \neq \pi, -\pi$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left[\int_{\bar\sigma} F_1(z)\,dz + \int_{\bar\sigma} F_2(z)\,dz\right] = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\begin{cases} \mathcal{G}(k) - \mathcal{G}(k) & k < -\pi \\ \mathcal{G}(k) + 0 & -\pi < k < \pi \\ 0 + 0 & k > \pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & k < -\pi \\ \sqrt{\frac{\pi}{8}}\left[e^{i\frac{3}{2}k} - e^{-i\frac{1}{2}k}\right] & -\pi < k < \pi \\ 0 & k > \pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

Visto che la trasformata è continua (perchè la funzione originale $f(x)$ è sommabile), dal risultato precendente sapiamo che per $k = \pi, -\pi$, $\mathcal{F}_k[f(x)] = 0$:

$$
\mathcal{F}_k[f(x)] = \begin{cases} 0 & k \leq -\pi \\ \sqrt{\frac{\pi}{8}}\left[e^{i\frac{3}{2}k} - e^{-i\frac{1}{2}k}\right] & -\pi < k < \pi \\ 0 & k \geq \pi \end{cases}
$$

- La trasformata di Fourier è continua dappertutto (noi abbiamo usato questo per calcolare i casi $k = \pi, -\pi$). Si nota che come previsto è anche limitata.
- La derivata di $\mathcal{F}_k[f(x)]$ non esiste per $k = \pi, -\pi$. Per dimostralo calcoliamo i limiti da destra e sinistra della derivata di $\mathcal{F}_k[f(x)]$ per $k \neq \pi, -\pi$:

  $$
  \text{per } k \neq \pi, -\pi\,, \qquad \frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)] = \begin{cases} 0 & k < -\pi \\ i\sqrt{\frac{\pi}{32}}\left[3e^{i\frac{3}{2}k} + e^{-i\frac{1}{2}k}\right] & -\pi < k < \pi \\ 0 & k > \pi \end{cases}
  $$

  $$
  \lim_{k\to\pi^+} = 0\,, \qquad \lim_{k\to\pi^-} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,, \qquad \lim_{k\to-\pi^+} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,, \qquad \lim_{k\to-\pi^-} = 0\,.
  $$

  Questo significa che $\mathcal{F}_k[f(x)]$ non esiste per $k = \pi, -\pi$ e quindi $\mathcal{F}_k[f(x)]$ non è derivabile (per tutti i valori reali di k).
- Come previsto, la trasformata di Fourier per $k \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza di k.

Esercizio 5*

Data la funzione

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \begin{cases} 0 & |k| > \pi, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-2ik} - 1\right), & |k| \leq \pi, \end{cases}$$

(a) dedurre le caratteristiche della anti trasformata $f(x)$ di $\mathcal{F}_k[f(x)]$;

(b) calcolare esplicitamente $f(x)$ e discutere le proprietà precedentemente previste;

(c) dalla forma esplicita di $f(x)$, ritrovare $\mathcal{F}_k[f(x)]$.

Soluzione

(a) Guardando la funzione $\mathcal{F}_k[f(x)]$ possiamo dedurre le seguenti proprietà dell'antitrasformata $f(x)$:

- La funzione $\mathcal{F}_k[f(x)]$ non ha singolarità sul cammino d'integrazione ($k \in \mathbb{R}$) e per $k \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di $1/k$:

$$\lim_{k \to \pm\infty} k\, \mathcal{F}_k[f(x)] = 0.$$

  Pertanto la funzione $\mathcal{F}_k[f(x)]$ è sommabile. Quindi l'antitrasformata di Fourier esiste ed è continua e limitata ovunque:

$$\big|f(x)\big| \leq \text{cost} \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- La funzione $\mathcal{F}_k[f(x)]$ per $k \to \pm\infty$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza:

$$\lim_{k \to \pm\infty} k^n\, \mathcal{F}_k[f(x)] = 0 \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Quindi l'antitrasformata di Fourier $f(x)$ è infinitamente derivabile (per tutti i valori reali di x).

- La funzione $\mathcal{F}_k[f(x)]$ è continua dappertutto (in particolare in $k = \pm\pi$):

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to -\pi^-} \mathcal{F}_k[f(x)] = 0, \qquad \lim_{k \to -\pi^+} \mathcal{F}_k[f(x)] &= \lim_{k \to -\pi} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-2ik} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-1) = 0, \\
\lim_{k \to \pi^+} \mathcal{F}_k[f(x)] = 0, \qquad \lim_{k \to \pi^-} \mathcal{F}_k[f(x)] &= \lim_{k \to \pi} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-2ik} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-1) = 0.
\end{aligned}$$

  La derivata di $\mathcal{F}_k[f(x)]$ esiste per $k \neq \pi, -\pi$

$$\frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)] = \begin{cases} 0 & |k| > \pi, \\ -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-2ik}, & |k| < \pi, \end{cases}$$

Anche se la derivata è discontinua (e infatti non esiste per $k \neq \pi, -\pi$) è sommabile.
Perciò la $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ va a zero almeno come $1/x$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x\, f(x) = \text{cost.}$$

La derivata $\frac{d}{dk}\mathcal{F}_k[f(x)]$ non è continua e non possiamo dire se $f(x)$ va al meno come $1/x^2$. Quindi $f(x)$ va al meno come $1/x$ per $x \to \pm\infty$.

(b) Calcoliamo ora l'antitrasformata di Fourier. Per $x \neq 0, 2$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_k[f(x)]\, e^{ikx} dx = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(e^{ik(x-2)} - e^{ikx}\right) dx \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{ik(x-2)}}{i(x-2)} - \frac{e^{ikx}}{ix} \right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{i\pi(x-2)}}{i(x-2)} - \frac{e^{i\pi x}}{ix} - \frac{e^{-i\pi(x-2)}}{i(x-2)} + \frac{e^{-i\pi x}}{ix} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{e^{i\pi x}}{i(x-2)} - \frac{e^{i\pi x}}{ix} - \frac{e^{-i\pi x}}{i(x-2)} + \frac{e^{-i\pi x}}{ix} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\pi x)}{x-2} - \frac{\sin(\pi x)}{x} \right] \\
&= \frac{\sin(\pi x)}{2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right] = \frac{\sin(\pi x)}{x(x-2)}\,.
\end{aligned}$$

Per $x = 0, 2$, usiamo il fatto che la antitrasformata $f(x)$ deve essere continua per chè $\mathcal{F}_k[f(x)]$ è sommabile. Quindi per $x = 0, 2$ la antitrasformata $f(x)$ si può scrivere come i limiti

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-2)} = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad f(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-2)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

- La funzione $f(x)$ è continua. Noi abbiamo usato questo fatto per calcolare il suo valore per $x = 0, -2$, però il calcolo si può fare esplicitamente.
- Notiamo inoltre che, come previsto, la $f(x)$ è infinitamente derivabile perchè è analitica per tutti i reali. La sua analiticità implica anche che $f(x)$ è limitata per tutti i reali. Per dimostrate che le derivate sono sommabili resta studiare il loro comportamento asintotico. Si nota che

$$\text{per } x \to \pm\infty\,, \qquad f(x) \sim \frac{\sin(x)}{x^2}\,,$$

  in questo limite, ogni derivata della nostra funzione risulta sempre in un termine con un seno o un coseno nel numeratore e x^2 nel denominatore. Quindi per $x \to \pm\infty$ la derivata n di $f(x)$ è ordine $O(1/x^2)$ e perciò sommabile.
- La funzione $f(x)$ va a zero come $1/x^2$ per $x \to \pm\infty$, quindi è almeno ordine $O(1/x)$ come previsto.

(c) Ritroviamo ora la $\mathcal{F}_k[f(x)]$, facendo la trasformata di Fourier della $f(x)$:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx} \sin \pi x}{x(x-2)}\, dx$$

L'integrale è ben definito, poiché $f(x)$ è sommabile. In particolare notiamo che la funzione integranda

$$F(x) = \frac{e^{-ikx}\sin\pi x}{x(x-2)}$$

non ha singolarità sul cammino di integrazione. Infatti anche in $x = 0$ e $x = 2$, che sono zeri semplici del denominatore, la $f(x)$ è regolare, perché questi punti sono anche zeri semplici del numeratore.

Vogliamo ora calcolare l'integrale usando la chiusura del cammino di integrazione all'infinito. Per farlo dovremmo riscrivere il seno come differenza di esponenziali e poi spezzare l'integrale:

$$\sin(\pi x) = \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i}, \qquad \mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{-i}{\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(k-\pi)x} - e^{-i(k+\pi)x}}{x(x-2)}\,dx.$$

Se spezziamo l'integrale nella differenza dei due integrali con funzioni integrande

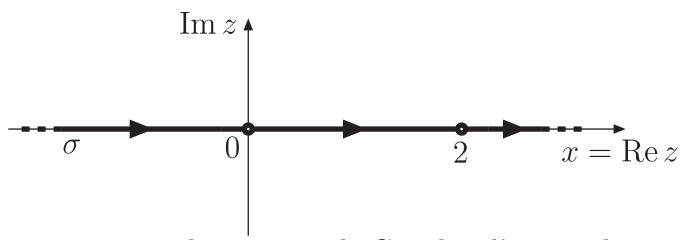
$$F_1(x) = \frac{e^{-i(k-\pi)x}}{x(x-2)}, \qquad F_2(x) = \frac{e^{-i(k+\pi)x}}{x(x-2)},$$

vediamo che gli integrali di $F_1(x)$ e $F_2(x)$ non sono definiti sulla retta reale, perché gli integrandi hanno poli semplici sul cammino di integrazione. Avendo infatti spezzato il seno, il numeratore delle singole $F_1(x)$ e $F_2(x)$ non si annulla più in $x = 0$ e $x = 2$; solo la differenza $F_1(x) - F_2(x)$ è regolare in $x = 0$ e $x = 2$. Torniamo quindi all'integrale di partenza e lo scriviamo come un integrale nel piano complesso della funzione

$$F(z) = \frac{e^{-ikz}\sin\pi z}{z(z-2)}$$

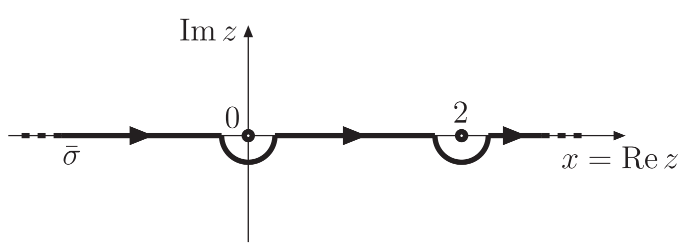
sulla curva σ che va da $-\infty$ a $+\infty$ sulla retta reale:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\sigma F(z)\,dz$$



Visto che siamo nel piano complesso, grazie al teorema di Cauchy, l'integrale non cambia se il cammino d'integrazione viene deformato con continuità senza incontrare singolarità e lasciando invariati il punto di partenza ($-\infty$) e quello d'arrivo ($+\infty$). Usiamo questa proprietà per modificare il cammino d'integrazione e aggirare i punti $z = 0$ e $z = 2$. Possiamo farlo come vogliamo. Scegliamo di aggirare $z = 0$ e $z = 2$ andando nel semipiano immaginario negativo e calcoliamo l'integrale lungo la curva $\bar{\sigma}$ in figura:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\bar{\sigma}} F(z)\,dz$$



Il nuovo cammino di integrazione $\bar{\sigma}$ è omotopicamente equivalente al cammino originale σ e quindi, per il corollario al teorema di Cauchy, il risultato dell'integrale calcolato sui due cammini è lo stesso.

Dopo aver deformato il cammino di integrazione, possiamo spezzare l'integrale nella differenza dei due integrali:

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{-i}{\sqrt{8\pi}} \left[\int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\, dz - \int_{\bar{\sigma}} F_2(z)\, dz \right],$$

$$F_1(z) = \frac{e^{-i(k-\pi)z}}{z(z-2)}, \qquad\qquad F_2(z) = \frac{e^{-i(k+\pi)z}}{z(z-2)}.$$

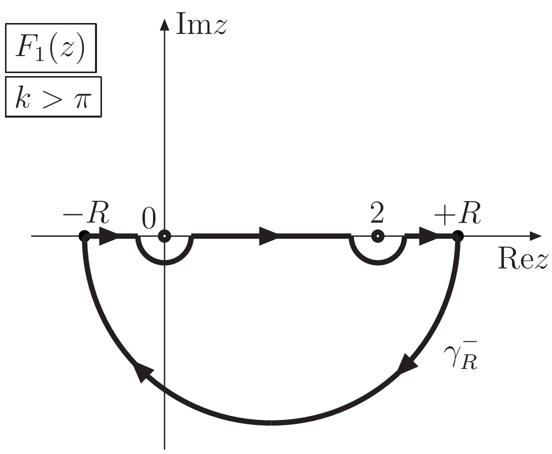
Le funzioni integrande soddisfano le ipotesi del lemma di Jordan per $k \neq \pi, -\pi$:

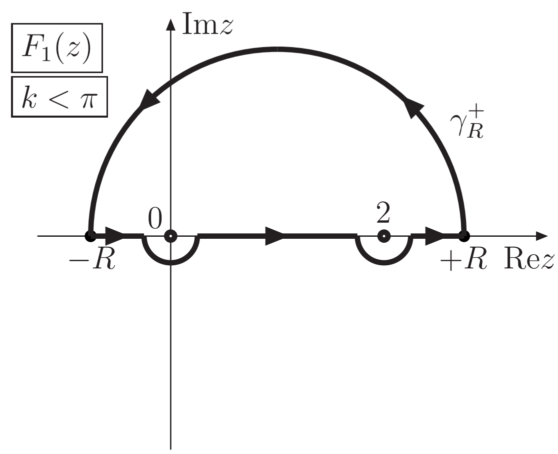
$$F_1(z) = e^{-i(k-\pi)z} g(z), \quad F_2(z) = e^{-i(k+\pi)z} g(z), \quad g(z) = \frac{1}{z(z-2)}, \quad \lim_{z\to\infty} g(z) = 0.$$

Quindi possiamo applicare il lemma di Jordan, dobbiamo solo prestare attenzione ai valori di k per capire in quale semipiano immaginario chiudere il cammino di integrazione. In particolare per $F_1(z) = e^{-i(k-\pi)z} g(z)$ dobbiamo distinguere i casi $k < \pi$ e $k > \pi$:

$$\boxed{\text{Se } k > \pi} \quad \text{allora} \quad \int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} F_1(z)\, dz. \quad \text{cioè} \quad \boxed{\text{chiudo sotto}}$$

$$\boxed{\text{Se } k < \pi} \quad \text{allora} \quad \int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} F_1(z)\, dz. \quad \text{cioè} \quad \boxed{\text{chiudo sopra}}$$





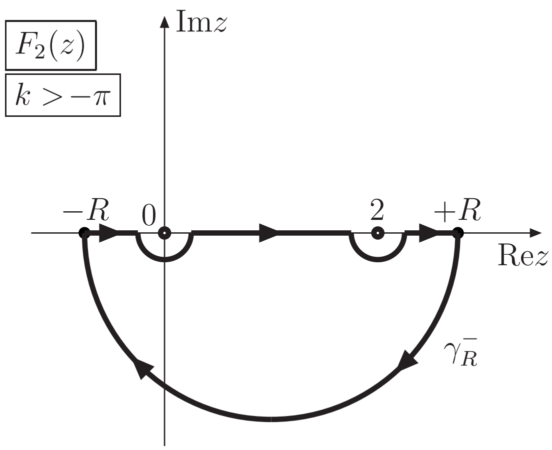
Notiamo che, quando chiudiamo sotto, le singolarità non sono nella regione interna di γ_R^- e il corrispondente integrale è nullo:

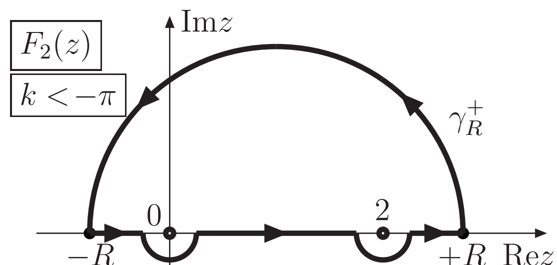
$$\begin{aligned}
\text{Se } k > \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\,dz &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} F_1(z)\,dz = 0 \\
\text{Se } k < \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar{\sigma}} F_1(z)\,dz &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} F_1(z)\,dz = \\
&= 2\pi i \left[\{\operatorname{Res} F_1(z)\}_{z=0} + \{\operatorname{Res} F_1(z)\}_{z=2}\right] \\
&= 2\pi i \left[\lim_{z\to 0} \frac{z\, e^{-i(k-\pi)z}}{z(z-2)} + \lim_{z\to 2} \frac{(z-2)e^{-i(k-\pi)z}}{z(z-2)}\right] \\
&= 2\pi i \left[-\frac{1}{2} + \frac{e^{-2i(k-\pi)}}{2}\right] = \pi i \left(-1 + e^{2i\pi} e^{-2ik}\right) \\
&= \pi i \left(e^{-2ik} - 1\right)
\end{aligned}$$

Invece per $F_2(z) = e^{-i(k+\pi)z} g(z)$ dobbiamo distinguere i casi $k < -\pi$ e $k > -\pi$:

$$\boxed{\text{Se } k > -\pi} \quad \text{allora} \quad \int_{\bar{\sigma}} F_2(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} F_2(z)\,dz. \quad \text{cioè} \quad \boxed{\text{chiudo sotto}}$$

$$\boxed{\text{Se } k < -\pi} \quad \text{allora} \quad \int_{\bar{\sigma}} F_2(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} F_2(z)\,dz. \quad \text{cioè} \quad \boxed{\text{chiudo sopra}}$$





Quando chiudiamo sotto, le singolarità non sono nella regione interna di γ_R^- e il corrispondente integrale è nullo:

$$
\begin{aligned}
\text{Se } k > -\pi \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar\sigma} F_2(z)\,dz &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^-} F_2(z)\,dz = 0 \\
\text{Se } k < -\pi \quad \Rightarrow \quad \int_{\bar\sigma} F_2(z)\,dz &= \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R^+} F_2(z)\,dz \\
&= 2\pi i \left[\{\mathrm{Res}\, F_2(z)\}_{z=0} + \{\mathrm{Res}\, F_2(z)\}_{z=2}\right] \\
&= 2\pi i \left[\lim_{z\to 0} \frac{z\, e^{-i(k+\pi)z}}{z(z-2)} + \lim_{z\to 2} \frac{(z-2)e^{-i(k+\pi)z}}{z(z-2)}\right] \\
&= 2\pi i \left[-\frac{1}{2} + \frac{e^{-2i(k+\pi)}}{2}\right] = \pi i \left(-1 + e^{-2i\pi} e^{-2ik}\right) \\
&= \pi i \left(e^{-2ik} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Definiamo per comodità

$$\mathcal{G}(k) = \pi i \left(e^{-2ik} - 1\right)$$

e mettiamo insieme i risultati di F_1 e F_2:

$k < -\pi$	$-\pi < k < \pi$	$k > \pi$
$\int_{\bar\sigma} F_1(z)\,dz = \mathcal{G}(k)$	$\int_{\bar\sigma} F_1(z)\,dz = \mathcal{G}(k)$	$\int_{\bar\sigma} F_1(z)\,dz = 0$
$\int_{\bar\sigma} F_2(z)\,dz = \mathcal{G}(k)$	$\int_{\bar\sigma} F_2(z)\,dz = 0$	$\int_{\bar\sigma} F_2(z)\,dz = 0$

$-\pi$ $+\pi$ k

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[f(x)] &= \frac{-i}{\sqrt{8\pi}} \left[\int_{\bar\sigma} F_1(z)\,dz - \int_{\bar\sigma} F_2(z)\,dz\right] = \frac{-i}{\sqrt{8\pi}} \begin{cases} \mathcal{G}(k) - \mathcal{G}(k) & k < -\pi \\ \mathcal{G}(k) - 0 & -\pi < k < \pi \\ 0 - 0 & k > \pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & k < -\pi \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-2ik} - 1\right) & -\pi < k < \pi \\ 0 & k > \pi \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ci resta però calcolare esplicitamente i casi $k = \pi, -\pi$. Per farlo esplicitamente si poù procedere in modo analogo, solo che per $k = \pi, -\pi$ la esponenziale dentro la integrale di Fourer vale uno. Quindi il camino si può chiudere sia sotto che sopra. Noi invece, usiamo il fatto che $f(x)$ è sommabile e quindi la trasformatta deve esere continua:

$$
\mathcal{F}_k[f(x)] = \begin{cases} 0 & k \le -\pi \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-2ik} - 1\right) & -\pi < k < \pi \\ 0 & k \ge \pi \end{cases}
$$