

Analisi I

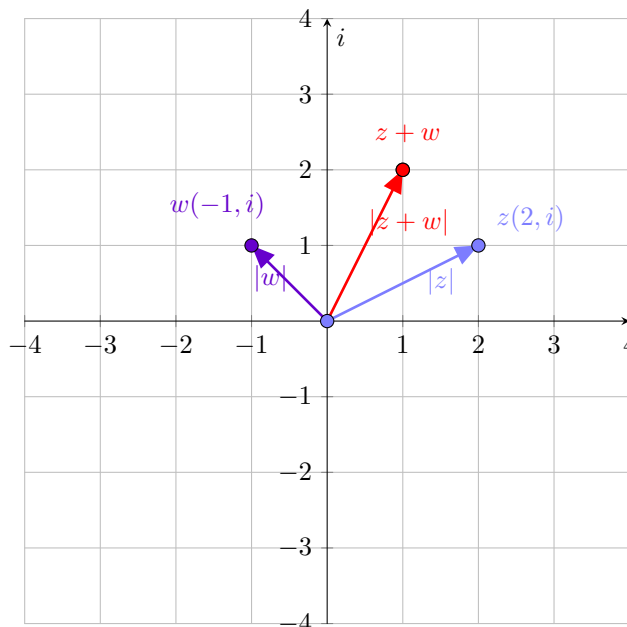
Riassunto da: ””

Indice

1 Numeri Complessi	2
1.1 Operazioni algebriche	2
2 Logica	4
2.1 Proposizioni	4
2.2 Predicati	4
2.3 Principio di induzione	4
3 Numeri reali	6
3.1 Completezza di \mathbb{R}	6
Maggioranti e minoranti	6
Intervalli, massimi e minimi	6
Teorema di completezza di \mathbb{R}	7
3.2 Intorni	7
4 Integrali secondo Riemann	8
4.1 Funzioni a scala	8
Lemma 1: monotonia dell'integrale di funzione a scala	8
4.2 Integrale superiore e inferiore	9
Lemma 2: integrale inferiore \leq integrale superiore	9
5 Limiti e continuità	11
Teorema di unicità del limite	11
Teorema di permanenza del segno	11
Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone	12
Teorema del confronto 1	13
Teorema del confronto 2	14
6 Proprietà globali delle funzioni continue	15
Teorema di esistenza degli zeri	15
Corollario 7.1	17
Corollario 7.2	17
Teorema dei valori intermedi (0.9)	18
Corollario 7.3	18
Teorema di Weierstrass	19
7 Derivabilità	20
Teorema di dubbia derivabilità	20
Teorema di Fermat	20
Teorema di Rolle	20
Teorema di Lagrange	21
Proposizione	21
Teorema di Cauchy	22
8 Taylor	22
9 Primitivazione	24
10 Equazioni differenziali	25
10.1 Equazioni differenziali del second'ordine	26

1 Numeri Complessi

L'insieme dei numeri reali può essere esteso con le proprietà delle operazioni di somma e prodotto valide in esso. L'estensione dà vita all'insieme dei numeri complessi che chiamiamo \mathbb{C} .



Questo ampliamento permette la risoluzione di qualsiasi equazione algebrica. Il Teorema Fondamentale dell'algebra afferma che qualsiasi polinomio a coefficienti reali o complessi di grado $n, n \in \mathbb{N}$ ammette almeno una radice complessa, da cui segue che un qualsiasi polinomio a coefficienti reali o complessi di grado n ammette sempre n radici complesse contate con le relative molteplicità.

I numeri complessi possono essere indicati con tre differenti notazioni:

1. Cartesiana: $z = (x + iy)$
2. Trigonometrica: $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$
3. Esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$

Ogni notazione ha i suoi vantaggi grafici o di calcolo, per questo preferiremo una notazione ad un'altra in casi specifici. In generale un numero complesso è formato da una *parte reale* $x = \text{Re}(z)$ e da una *parte immaginaria* $y = \text{Im}(z)$, dal punto di vista algebrico \mathbb{R} e \mathbb{C} hanno le stesse proprietà anche se nel caso dei numeri complessi non è possibile definire un "ordine" compatibile con le operazioni.

1.1 Operazioni algebriche

Le operazioni di somma e differenza sono definite dalla semplice somma o differenza tra parti reali e parti immaginarie. Il prodotto tra due numeri complessi si comporta in modo simile al comportamento di seno e coseno nelle operazioni di somma:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Il reciproco di un numero complesso espresso come $\frac{1}{z}$ si può riscrivere moltiplicando sopra e sotto per il complesso coniugato di $z = x - iy$:

$$\frac{1}{z} \bar{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

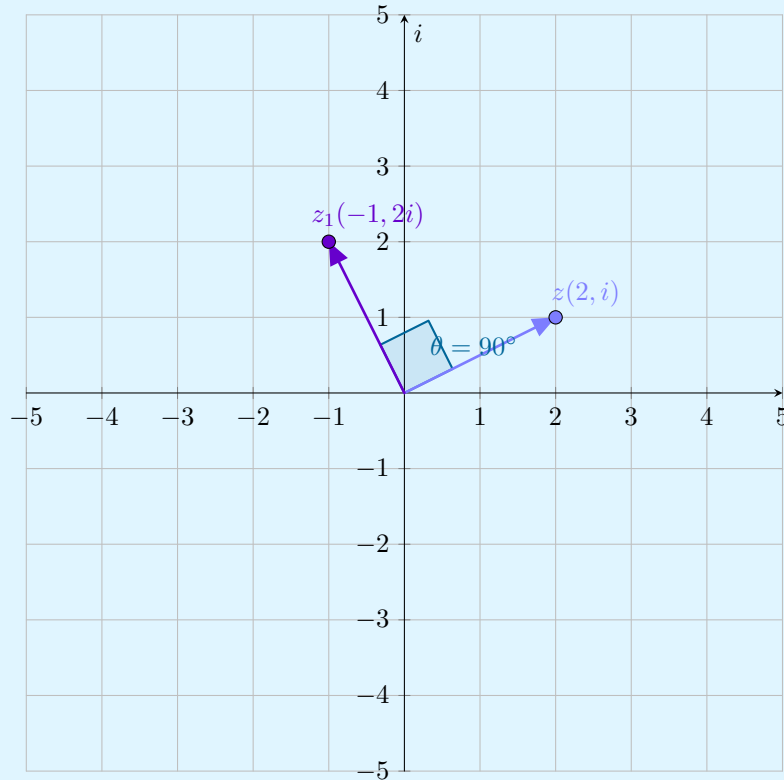
Nel caso di potenze di un numero complesso la notazione esponenziale è particolarmente funzionale. In generale z^n eleva alla n il modulo ρ e l'argomento:

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Un fatto interessante che spiega perché la parte immaginaria dei numeri complessi è situata a 90° in senso antiorario rispetto alla parte reale è che se moltiplichiamo un qualsiasi numero complesso per i , questo subirà una rotazione di 90° in senso antiorario.

es

Prendiamo $z = 2 + i$ e $w = i$: ora $z \cdot w = (2 + i)(i)$ sappiamo essere uguale a $-1 + 2i$.



Sappiamo anche che moltiplicare per i è equivalente a moltiplicare per un certo numero complesso $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$; da ciò notiamo che l'argomento θ è anche l'angolo di rotazione di un qualsiasi altro numero complesso l moltiplicato per w , ovvero per i .

Quindi possiamo decidere di che angolo traslare qualsiasi numero complesso scegliendo opportunamente l'argomento θ di un altro numero complesso da moltiplicare.

2 Logica

2.1 Proposizioni

Definiamo una *proposizione logica* è un enunciato del quale si può inequivocabilmente dire se è vero o falso. Attraverso le proposizioni logiche possiamo ottenere operazioni logiche espresse da simboli specifici detti *connettivi logici*:

negazione logica	$\neg p$ ("non p")
coniunzione logica	$p \wedge q$ ("p e q")
disgiunzione logica	$p \vee q$ ("p o q")

In matematica molti enunciati sono del tipo "se p è vera, è vera anche q " in cui p è condizione sufficiente affinché q sia vera; in questo caso che q sia vera è condizione necessaria affinché lo sia anche p . Questi tipi di enunciati sono detti implicazioni logiche:

implicazione logica	$p \Rightarrow q$ ("p implica q")
biimplicazione logica	$p \iff q$ ("p equivale a q")

Vengono poi definite delle regole per *negare* le implicazioni o per scriverle in modo logicamente equivalente (nella loro forma *contronominale*):

$$\text{contronominale} \quad (p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

2.2 Predicati

Un predicato logico è un enunciato dipendente da uno o più argomenti ed è indicato nella forma $p(x, \dots)$. Gli argomenti x, \dots da cui dipende il predicato rendono quest'ultimo una *proposizione logica* e assume valori di verità Vero o Falso a seconda dei valori assegnati agli argomenti.

es

Dato il predicato " $p(x)$ è un numero dispari" con $x \in \mathbb{N}$:
 $p(7)$ è Vero, $p(4)$ è Falso.

Dato un predicato $p(x)$ con $x \in \mathbb{A}$ è naturale chiedersi se l'enunciato $p(x)$ sia vero *per ogni* elemento di \mathbb{A} . A questo fine introduciamo dei *quantificatori*:

$$\begin{aligned} \forall x, p(x) & \quad (\text{"per ogni } x, \text{ è vero } p(x)\text{"}) \\ \exists x, p(x) & \quad (\text{"esiste almeno un } x, \text{ per cui è vero } p(x)\text{"}) \\ \exists! x, p(x) & \quad (\text{"esiste, ed è unico, almeno un } x, \text{ per cui è vero } p(x)\text{"}) \end{aligned}$$

Anche con i quantificatori sono definite le forme di negazione:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x, p(x)) & \iff \exists x, \neg p(x) \\ \neg(\exists x, p(x)) & \iff \forall x, \neg p(x) \end{aligned}$$

2.3 Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proprietà che dipende da $n \geq n_0 \geq 0$ $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Ora supponiamo che siano verificate:

- $P(n_0)$ è Vero;
- $\forall n \geq n_0$, se $P(n)$ è vero, allora $P(n+1)$ è vero.

Allora $P(n)$ è vero per ogni $n \geq n_0$.

es

Sappiamo che $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dimostriamo che se è vero per n lo è anche per $n + 1$ ($P(n) \Rightarrow P(n + 1)$):

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 &= \frac{(n + 1)(n + 1 + 1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2n + 2}{2} \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + n + 1 \end{aligned}$$

Quindi in generale il Principio di induzione si usa in questo modo: prima si controlla che $P(n_0)$ sia vero, poi si assume che sia vero anche per un generico n e, usando tale informazione, si dimostra che anche $P(n + 1)$ è vero.

3 Numeri reali

L'insieme \mathbb{R} è l'ambiente naturale dell'analisi I, nonostante questo non ne conosciamo la definizione rigorosa(!). Possiamo però riflettere sulle sue proprietà:

- Si dice che \mathbb{R} sia un **campo ordinato**. Ovvero sono definite le due *operazioni di somma e prodotto* ed è definita una *relazione d'ordine* $x \leq y$ compatibile con le operazioni (cosa non possibile nell'insieme \mathbb{C}).
- \mathbb{R} è un insieme **completo**, al suo interno sono inclusi anche i numeri irrazionali.

3.1 Completezza di \mathbb{R}

Possiamo dire colloquialmente che \mathbb{R} riempie la retta. Tramite una formulazione più rigorosa notiamo che, dato un certo intervallo, ogni valore successivo è maggiore di un valore nell'intervallo:

Maggioranti e minoranti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice che A è:

- *superiormente limitato* se $\exists b \in \mathbb{R} | x \leq b, \forall x \in A$; \longrightarrow esiste un **maggiorante** di A .
- *inferiormente limitato* se $\exists a \in \mathbb{R} | a \leq x, \forall x \in A$; \longrightarrow esiste un **minorante** di A .
- *limitato* se $\exists a, b \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b, \forall x \in A$;

Maggiorante e minorante se esistono sicuramente non sono unici: a, b sono infatti ricercati in tutto \mathbb{R} ; qualunque numero maggiore di un elemento in A è maggiorante e stessa cosa per il minorante.

Intervalli, massimi e minimi

- Gli intervalli $(-\infty, b)$ e $(-\infty, b]$ sono limitati superiormente;
- Gli intervalli $(b, +\infty)$ e $[b, +\infty)$ sono limitati inferiormente;
- Gli intervalli (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ sono limitati.

Definizione: massimo e minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente (o inferiormente) limitato. Si dice che A ammette **massimo** se

$$\exists x_M \in A \quad \text{t.c.} \quad x \leq x_M, \quad \forall x \in A$$

$$(\exists x_M \in A \quad \text{t.c.} \quad x_M \leq x, \quad \forall x \in A)$$

L'elemento, necessariamente unico, si dice **massimo** (o minimo) di A e si pone

$$x_M = \max A$$

$$(x_m = \min A)$$

La differenza con un maggiorante sta proprio nel fatto che il massimo è contenuto nell'intervallo; la stessa cosa si può dire per i minimi.

— dimostrazione unicità del massimo (o minimo) —

Se $x_M = x'_M$ sono entrambi massimo allora si ha

$$x \leq x_M \quad \text{e} \quad x \leq x'_M \quad \forall x \in A$$

e quindi

$$x_M \leq x'_M \quad \text{e} \quad x'_M \leq x_M$$

da cui $x_M = x'_M$.

Esistono casi che però non ammettono massimi o minimi, per esempio l'insieme $\tilde{A} = \{\frac{1}{n} | n = 1, 2, \dots\}$. Quest'ultimo ha come intervallo $[1, +\infty)$, ha quindi un massimo ma non ammette minimi. In questi casi quando $\neg \exists$ minimo o massimo sarebbe utile poter definire un minorante o maggiorante *ottimale* che vengono definiti rispettivamente come *il più grande dei minoranti* e *il più piccolo dei maggioranti*. Definiamo allora i concetti di **estremo superiore** ed **estremo inferiore**.

Teorema di completezza di \mathbb{R}

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente (inferiormente) limitato, il **massimo** (minimo) dell'insieme dei maggioranti (minoranti) **esiste sempre**.

Definizione: estremo superiore e inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente (inferiormente) limitato.

Si dice estremo superiore (inferiore) di A , e si scrive **sup** A (**inf** A), il più piccolo (grande) dei maggioranti (minoranti) di A = **estremo superiore** (inferiore).

3.2 Intorni

Un'altra "struttura" fondamentale di \mathbb{R} è quella che si basa sul concetto di **intorno**.

Definizione: estremo superiore e inferiore

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Si dice **intorno** di centro x_0 e raggio r l'intervallo

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Notare che:

$$x \in I_r(x_0) \iff x_0 - r < x < x_0 + r$$

$$-r < x - x_0 < r$$

$$|x - x_0| < r$$

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si dice intorno di centro x_0 e raggio r l'intervallo $I_n(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

In questo contesto è utile definire anche un *sistema esteso dei numeri reali* che includa anche $+\infty$ e $-\infty$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

4 Integrali secondo Riemann

Il nostro obiettivo è quello di definire un numero reale che rappresenti, quando $f \geq 0$, l'area della regione compresa tra il grafico di f e l'asse x .

Per fare ciò definiremo:

1. $\int_a^b f$ per funzioni a scala;
2. $\int_a^b f$ per funzioni qualsiasi.

4.1 Funzioni a scala

Definizione: funzione a scala —

Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice a scala se:

1. esistono $n + 1$ punti $x_0, x_1, \dots, x_n, x_n$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

2. n costanti $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

per cui

$$f(x) = c_k \quad \forall x \in (x_{k-1}, x_k) \quad k = 1, \dots, n$$

Definizione: Integrale di funzioni a scala —

Sia $f \in \mathcal{S}([a, b])$ (insieme delle funzioni a scala) e sia x_0, x_1, \dots, x_n una suddivisione adattata di f (f continua in ogni sottointervallo). Detto c_k il valore di f su (x_{k-1}, x_k) $k = 1, \dots, n$:
si dica integrale di f su $[a, b]$ il numero

$$\sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{denotato con} \quad \int_a^b f$$

Osserviamo che se f è positiva nell'intervallo il numero $\int_I f$ rappresenta l'area del trapezoide di f .

Lemma 1: monotonia dell'integrale di funzione a scala

Siano $g, h \in \mathcal{S}([a, b])$ t.c. $g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h$$

dimostrazione —

Sia $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ adattata sia a g sia ad h e siano c_k e d_k i valori di g e h su (x_{k-1}, x_k) con $k = 1, \dots, n$. Allora:

$$\int_a^b g = \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n d_k (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b h$$

4.2 Integrale superiore e inferiore

Definizione: integrale superiore e inferiore

Siano

$$\mathcal{S}^- f = \{g \in \mathcal{S}([a, b]) \mid g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]\}$$

$$\mathcal{S}^+ f = \{h \in \mathcal{S}([a, b]) \mid f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]\}$$

gli insiemi delle funzioni a scala formati dalle funzioni che **maggiorano** e **minorano** f .

Nota: $\mathcal{S}f^- \neq \emptyset$ e $\mathcal{S}f^+ \neq \emptyset$ perché f è **limitata**.

$$\underline{\int_a^b} f = \text{integrale inferiore} = \sup \left\{ \int_a^b g \quad \text{t.c.} \quad g \in \mathcal{S}^- f \right\}$$

$$\overline{\int_a^b} f = \text{integrale superiore} = \inf \left\{ \int_a^b h \quad \text{t.c.} \quad h \in \mathcal{S}^+ f \right\}$$

Lemma 2: integrale inferiore \leq integrale superiore

Per ogni funzione f limitata su $[a, b]$ si ha che l'integrale inferiore è minore o uguale all'integrale superiore:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

dimostrazione

Prendo:

$$g \in \mathcal{S}^- f, \quad h \in \mathcal{S}^+ f$$

Si ha $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]$. In particolare $g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a, b]$ e quindi per il **lemma 1**:

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h$$

Ora *fisso* g e faccio variare h :

$$\int_a^b g \leq \inf \left\{ \int_a^b h \quad \text{t.c.} \quad h \in \mathcal{S}^+ f \right\} = \overline{\int_a^b} f$$

Ora facendo variare g e ricordando la definizione di integrale inferiore si ottiene la tesi:

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f &\leq \sup \left\{ \int_a^b g \quad \text{t.c.} \quad g \in \mathcal{S}^- f \right\} = \overline{\int_a^b} f \\ &\implies \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \end{aligned}$$

!attenzione—

Sembrerebbe logico pensare che la disuguaglianza sopra sia in realtà un'uguaglianza per tutte le funzioni limitate. Se prendiamo per esempio la funzione di Dirichlet ci accorgiamo che non è così: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ e prendiamo $[a, b] = [0, 1]$ abbiamo:

$$\text{se } g \in \mathcal{S}^- f, \text{ allora } g(x) \leq 0$$

$$\text{se } h \in \mathcal{S}^+ f, \text{ allora } h(x) \geq 0$$

A questo proposito diamo la definizione di **funzione integrabile** secondo **Riemann**:

Definizione: Funzione integrabile secondo Riemann—

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **limitata** (condizione necessaria). Si dice che f sia integrabile su $[a, b]$ se

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$$

In tal caso si scrive che

$$f \in \mathcal{R}([a, b])$$

e si pone $\int_a^b f = \underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f}$ che si dice **integrale di f su $[a, b]$** .

5 Limiti e continuità

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il concetto di *intorno*, ora vediamo come questo sia essenziale nella comprensione dei **limiti**.

Definizione: Limite

Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se e solo se:

\forall intorno di $l, I(l) \quad \exists$ intorno di $x_0, I(x_0)$ tale che

$$x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l)$$

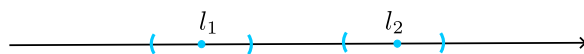
Adesso dobbiamo stabilire alcune proprietà del limite: intanto se esiste il limite è *unico*, possiamo dire infatti "il limite di f " e non "uno dei limiti di f ".

Teorema di unicità del limite

Supponiamo che f ammetta limite l finito o infinito per x tendente a x_0 . Allora f non ha altri limiti tendenti a x_0 .

dimostrazione: unicità del limite

Supponiamo che esistano due limiti differenti di una funzione f tendente allo stesso valore x_0 e li chiamiamo l_1 e l_2 tali che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$. Inoltre prendiamo gli intorno di l_1 e di l_2 in modo che $I(l_1) \cap I(l_2) = \emptyset$.



Ora dalla definizione di limite data prima, possiamo scrivere:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists I(x_0) \mid x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l_1)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow \exists I'(x_0) \mid x \in I'(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l_2)$

Dunque possiamo dire che x è sia in $I(x_0)$ sia in $I'(x_0)$:

$$x \in (I(x_0) \cap I'(x_0)) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(l_1) \cap I(l_2)$$

Assurdo poiché

$$I(l_1) \cap I(l_2) = \emptyset$$

Teorema di permanenza del segno

Supponiamo che

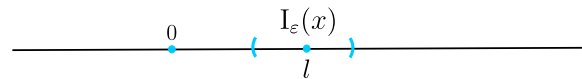
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{con } l > 0 \text{ o } l = +\infty.$$

Allora esiste un intorno di x_0

$$I(x_0) \quad \text{t.c.} \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

dimostrazione

$$1) \quad l \in \mathbb{R}, l > 0$$



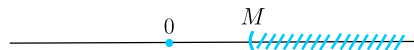
Prendo un intorno di raggio ε con $\varepsilon = \frac{l}{2}$: $I_\varepsilon(l)$. Per definizione di limite

$$\exists I(x_0) \quad \text{t.c.} \quad x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in I_\varepsilon(l)$$

Quindi in particolare

$$x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \implies f(x) > \frac{l}{2} > 0$$

$$2) \quad l = +\infty$$



$$\forall M > 0 \quad \exists I_{x_0} \quad \text{t.c.} \quad x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\} \implies f(x) > M > 0$$

Corollario del teorema di permanenza del segno Se esiste un intorno di x_0 $I(x_0)$ in cui $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ allora (se esiste), il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$$

dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l < 0$, allora per il **teorema di permanenza del segno**

$$\exists I'(x_0) \quad \text{t.c.} \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Allora

$$x \in (I(x_0) \cap I'(x_0)) \setminus \{x_0\} \implies \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

che è assurdo.

Toerema di esistenza del limite per funzioni monotone

Data la funzione

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

Prendiamo l'intorno $I = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

Se f è **monotona** su I , allora esiste il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} \sup f(I) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ \inf f(I) & \text{se } f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

(la monotonia è **condizione sufficiente** per l'esistenza del limite)

dimostrazione

Supponiamo che f sia crescente con $l = \sup f(I)$.
 $l = +\infty$) Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l = +\infty$$

cioè

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad x > k \implies f(x) > M$$

Poiché la funzione è crescente, vale:

$$x > k \implies f(x) \geq f(k) > M$$

$l \in \mathbb{R}$) Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad x > k \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Prendiamo un ε arbitrario maggiore di zero. Poiché $l - \varepsilon$ non è maggiorante di $f(x)$ esiste sicuramente un k tale che $f(k) > l - \varepsilon$. Poiché la funzione è crescente:

$$x > k \implies f(x) \geq f(k) > l - \varepsilon$$

D'altro canto, poiché l è maggiorante di $f(I)$ sappiamo che la funzione sarà sempre minore di l : $f(x) \leq l \quad \forall x \in I$ e quindi possiamo affermare che

$$x > k \implies l - \varepsilon < f(x) \leq l < l + \varepsilon$$

Teorema del confronto 1

Date due funzioni f e g siano i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \quad x_0, l, m \in \mathbb{R}$$

Se esiste un intorno in cui f è minore di g :

$$I(x_0) \text{ t.c. } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

allora sappiamo che il valore a cui tende f è minore di quello a cui tende g :

$$l \leq m$$

dimostrazione

Prendiamo una terza funzione sicuramente positiva:

$$h(x) = g(x) - f(x) \quad \rightarrow h(x) \geq 0 \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Allora sappiamo per il **teorema di permanenza del segno** che il limite di $h(x)$ è sicuramente ≥ 0 e per il **teorema fondamentale dell'algebra** che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m - l$$

quindi:

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m - l$$

Teorema del confronto 2

Date due funzioni con stesso limite l :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

Se esiste un intorno $I(x_0)$ per il quale

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

allora possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

dimostrazione

Nel caso in cui $l = \pm\infty$ basta sapere che

$$f(x) \leq g(x) \rightarrow +\infty$$

$$g(x) \leq h(x) \rightarrow -\infty$$

Se invece $l \in \mathbb{R}$ cerchiamo altri intorni di x_0 per f e per h ; per fare ciò prendiamo $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies \exists I'(x_0) \quad \text{t.c.} \quad \forall I'(x_0) \setminus \{x_0\} \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \implies \exists I''(x_0) \quad \text{t.c.} \quad \forall I''(x_0) \setminus \{x_0\} \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

Ora definiamo un terzo intorno che verifica le condizioni precedenti:

$$x \in (I(x_0) \cap I'(x_0) \cap I''(x_0)) \implies l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < h(x) < l + \varepsilon$$

6 Proprietà globali delle funzioni continue

Nei capitoli precedenti ci siamo occupati, mediante il concetto di limite, delle varie proprietà locali di una funzione, ossia proprietà che valgono in un intorno di un punto della retta reale. Ora è necessario parlare di alcune proprietà globali delle funzioni, valide su tutto l'intervallo.

Definizione: Zero di una funzione

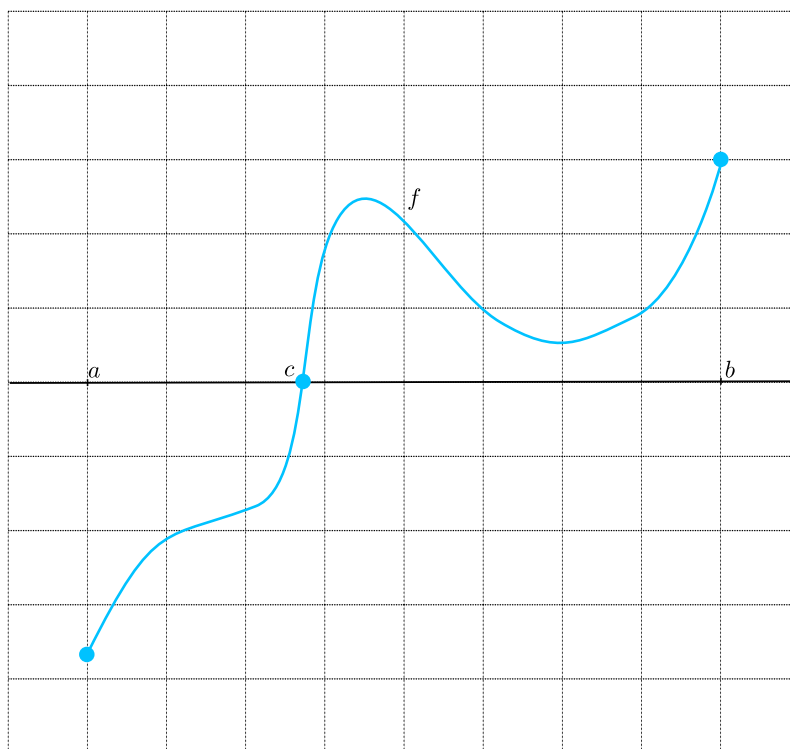
Data una funzione reale f chiamiamo **zero** di f ogni punto $x_0 \in \text{dom}f$ in cui la funzione si annulla.

Teorema di esistenza degli zeri

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *continua* nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se la funzione f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo, allora esiste uno zero di f nell'intervallo aperto (a, b) ; in formule:

$$f(a)f(b) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Inoltre se f è strettamente monotona in $[a, b]$, allora lo zero è unico nell'intervallo.



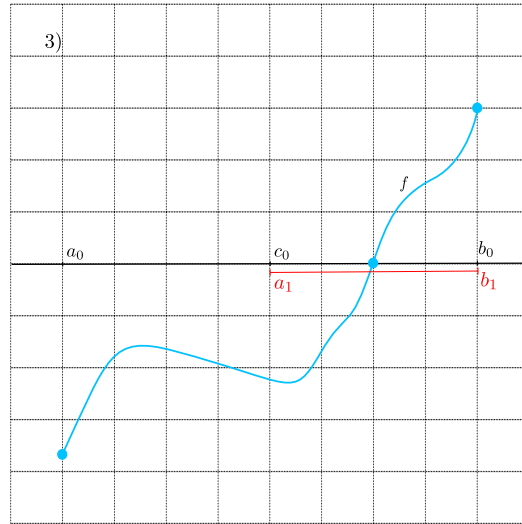
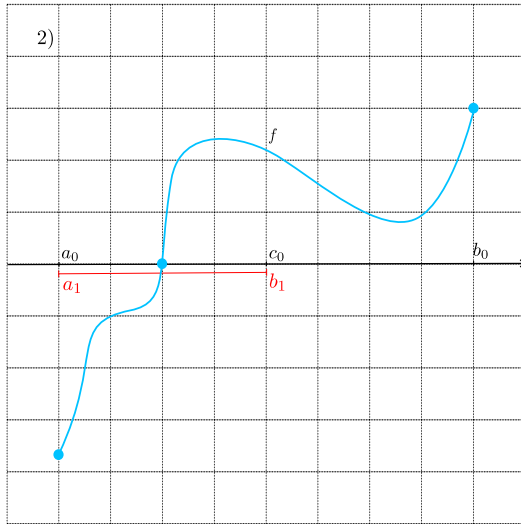
—dimostrazione: teorema esistenza degli zeri—

Supponiamo $f(a)$ negativo e $f(b)$ positivo: $f(a) < 0 < f(b)$.

Definiamo poi il punto medio c_0 e rinominiamo a e b : $a = a_0$, $b = b_0$, $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.

Una volta calcolato il punto medio abbiamo tre possibilità:

1. Se $f(c_0) = 0$ il teorema è dimostrato;
2. Se $f(c_0) > 0$ allora dovremo cercare lo zero *a sinistra* del punto medio; in questo caso poniamo quindi $a_0 = a_1$ e $c_0 = b_1$;
3. Se $f(c_0) < 0$ allora dovremo cercare lo zero *a destra* del punto medio; in questo caso poniamo $c_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$.



Nei casi 2) e 3) abbiamo costruito un intervallo $[a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0]$ t.c.

$$f(a_1) < 0 < f(b_1) \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Ora iteriamo il procedimento:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \text{e consideriamo} \quad f(c_1) = 0, > 0, < 0.$$

Iterando in questo modo possono verificarsi due casi:

1. In un numero finito di passi troviamo lo zero di f ;
2. o troviamo una *successione* di intervalli $[a_n, b_n]$ t.c.

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n].$$

$$\text{con} \quad f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

$$\text{e con} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Osservando come varia la posizione di a_n e di b_n notiamo che a_n o rimane dov'è o si sposta a destra (aumenta), invece b_n o rimane dov'è o si sposta a sinistra (diminuisce). Possiamo allora dire che le successioni a_n e b_n sono rispettivamente monotona crescente e monotona decrescente, limitate rispettivamente in $(a \leq a_n \leq b)$ e in $(a \leq b_n \leq b)$.

Proprio perché le due successioni sono *monotone crescenti*, secondo il teorema di esistenza del limite per successioni monotone:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c^- \in [a, b] \quad \text{e} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c^+ \in [a, b].$$

Da ciò segue che:

$$c^+ - c^- = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

$$c^+ = c^- =: c \in [a, b].$$

Poiché f è continua:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n).$$

Infine ricordando che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e ricordando il corollario del teorema di permanenza del segno:

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \Rightarrow f(c) \leq 0 \leq f(c).$$

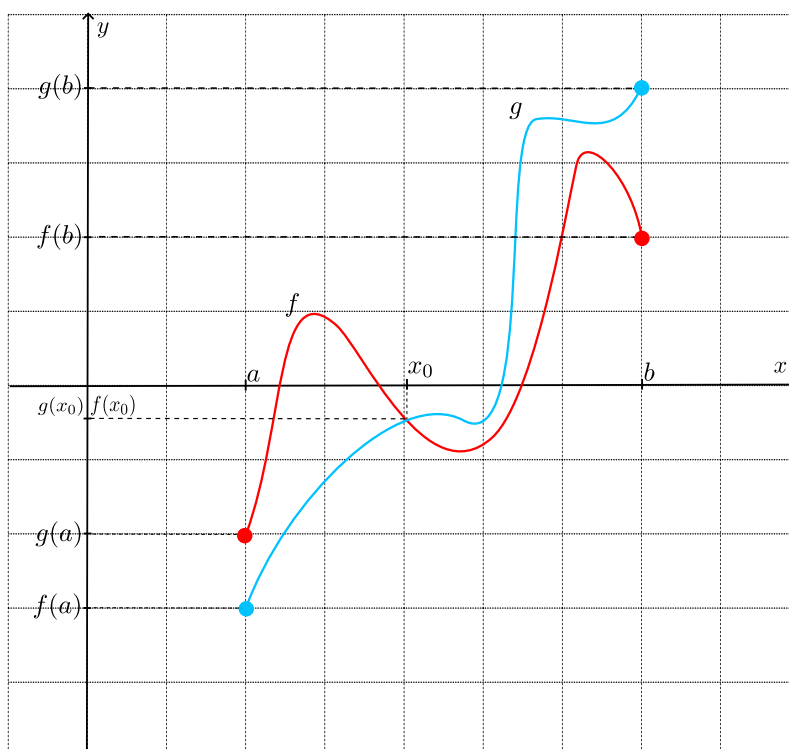
Dunque $f(c) = 0$, $c \in (a, b)$

Corollario 7.1 Definiamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esistono (finiti o infiniti) i limiti sinistro e destro di f agli estremi di I , e se tali limiti hanno segno discorde, allora esiste uno zero di f in I ; tale zero è unico se f è strettamente monotona in I . *In soldoni: se a sinistra la curva se ne va in basso verso $-\infty$ e a destra se ne va in alto verso $+\infty$ chiaramente dovrà intersecare l'asse x a un certo punto.*

Corollario 7.2 Siano f e g due funzioni continue in $[a, b]$. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ allora esiste almeno un punto in (a, b) tale che:

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Inoltre se f è strettamente crescente e g strettamente decrescente in $[a, b]$ il punto x_0 è unico. *In soldoni: presi due punti a e b sull'asse x e ricavati gli intervalli $(f(a), f(b))$ e $(g(a), g(b))$ sull'asse y se l'intervallo di g contiene quello di f , allora esiste sicuramente un punto x_0 in f contenente $f(x_0)$*



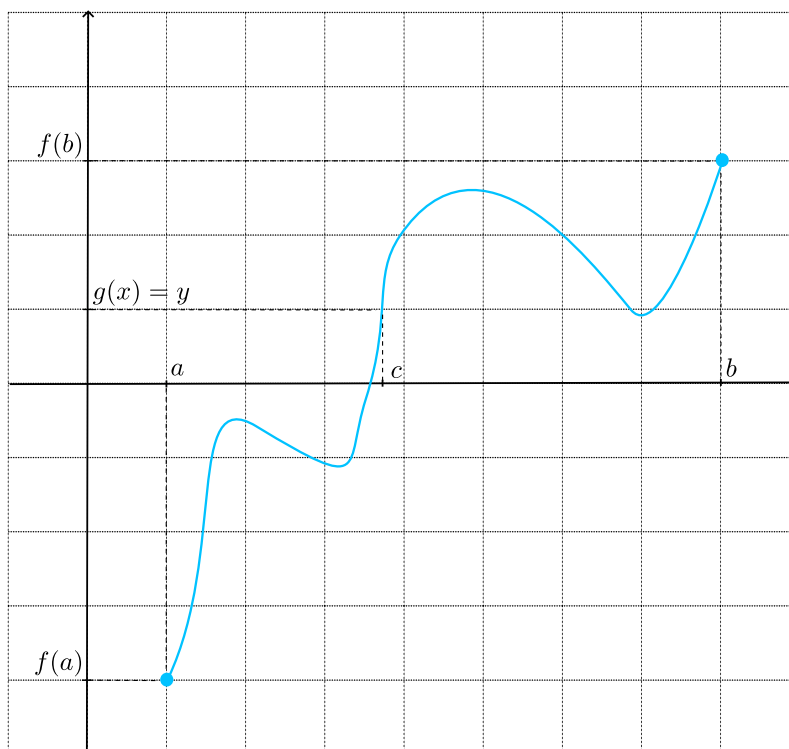
Teorema dei valori intermedi (0.9)

Il teorema si concentra sullo studio dell'immagine di una funzione continua definita su un intervallo della retta reale.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Ovvero:

$$\forall y \in (f(a), f(b)) \quad \exists c \in [a, b] : f(c) = y.$$



dimostrazione: teorema valori intermedi

Se $f(a) = f(b)$ non c'è niente da dimostrare.

Se invece supponiamo $f(a) < f(b)$ e definiamo la funzione costante $g(z) = y$ prendendo come y un qualsiasi punto compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, otteniamo subito le seguenti disuguaglianze:

$$f(a) < y < f(b).$$

$$f(a) < g(a) \quad f(b) > g(b).$$

Notiamo la somiglianza al corollario 7.2. Secondo il corollario otteniamo in $[a, b]$ l'esistenza di un punto c tale che:

$$f(c) = g(c) = y.$$

Il teorema garantisce che l'immagine di $[a, b]$ contiene almeno l'intervallo chiuso di estremi $f(a)$ e $f(b)$:

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b]) \quad \text{se} \quad f(a) \leq f(b).$$

La formula equivalente con $f(b) \leq f(a)$ è ovvia.

Corollario 7.3 Il teorema ha come conseguenza importante il fatto che una funzione continua "trasforma intervalli in intervalli": l'immagine di tale funzione $f(I)$ attraverso l'intervallo è ancora un intervallo.

dimostrazione: corollario 7.3

Presi $y_1 < y_2$ due punti di $f(I)$; allora esistono in I due punti x_1 e x_2 tali che:

$$f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2.$$

Supponiamo che $x_1 < x_2$ e consideriamo $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$; per il teorema dei valori intermedi **sappiamo che** f assume tutti i valori tra y_1 e y_2 .

Teorema di Weierstrass

Se I è chiuso e limitato (cioè $I = [a, b]$) vale il teorema di Weierstrass.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f([a, b])$ è un intervallo chiuso e limitato, cioè:

$$f([a, b]) = [m, M].$$

in cui m e M sono massimo e minimo. Quindi f assume valore massimo, valore minimo e tutti i valori intermedi.

7 Derivabilità

Teorema di dubbia derivabilità

Data una funzione continua nell'intervallo I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad I \subset \mathbb{R}$$

- Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$ allora $\exists f'(x_0) = l$;
- Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \{\pm\infty\}$ allora f non è derivabile in x_0 ;

Teorema di Fermat

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I ,

$$\text{Se } x_0 \text{ punto di estremo per } f \implies f'(x_0) = 0$$

Nota: non vale il viceversa poiché la derivata può annullarsi anche in flessi orizzontali.

— dimostrazione —

Supponiamo di avere x_0 punto di massimo locale, allora per definizione

$$\exists I(x_0) \quad \text{t.c.} \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I(x_0) \cap I$$

Poiché x_0 è interno ad I esiste un intorno $J(x_0)$ t.c. $J(x_0) \subseteq I$. Allora $I(x_0) \cap J(x_0)$ è un intorno di x_0 e

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (I(x_0) \cap J(x_0)) \subseteq I$$

Ne segue che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & x > x_0, \quad x \in (I(x_0) \cap J(x_0)) \\ \geq 0 & x < x_0, \quad x \in (I(x_0) \cap J(x_0)) \end{cases}$$

Per il corollario del teorema di permanenza del segno (o per il teorema del confronto) si ha:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Ma **poiché** f è derivabile in x_0 :

$$f(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$$

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su tutto l'intervallo $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . Se

$$f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b) \quad \text{t.c.} \quad f'(c) = 0$$

Vedremo come in realtà Rolle sia semplicemente un caso particolare del teorema di Lagrange.

— dimostrazione —

Per il teorema di Weierstrass sappiamo che l'immagine di una funzione in un intervallo chiuso e limitato è un intervallo chiuso e limitato:

$$f([a, b]) = [m, M]$$

Quindi esistono x_m e $x_M \in [a, b]$ t.c.

$$f(x_m) = m \quad \text{e} \quad f(x_M) = M$$

cioè x_m e x_M sono punti di minimo e massimo globale.

- Se x_m e x_M sono interni a $[a, b]$, allora per il teorema di Fermat $f' = 0$ in uno almeno uno dei due punti.
- Se x_m e x_M sono esterni, allora la funzione è costante e quindi vale $f' = 0 \forall c \in [a, b]$.

Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su tutto l'intervallo $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . Allora esiste una c che soddisfa

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ovvero esiste un punto in cui la retta tangente alla curva è parallela alla retta passante per a e b . Infatti:

- $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è il coefficiente angolare della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
- $f'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente a f in c .

— dimostrazione —

Definiamo una funzione ausiliaria sicuramente continua su $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo (a, b) poiché differenza della funzione f che ha per ipotesi tali proprietà:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Tramite la funzione ausiliaria si verifica facilmente che

$$h(a) = f(a) \quad h(b) = f(b)$$

Quindi per il teorema di Rolle sappiamo che esiste una $c \in (a, b)$ che soddisfa $h'(c) = 0$. Ma

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Quindi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Proposizione (caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è costante su } I$$

— dimostrazione —

\Leftarrow Ovvio perché il rapporto incrementale è sempre zero quindi anche il limite.
 \Rightarrow Proviamo che $\forall x_1, x_2 \in I (x_1 < x_2)$ si ha $f(x_1) = f(x_2)$. Usiamo il **teorema di Lagrange**:
 esiste $c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Teorema di Cauchy

Siano f e g continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b) . Si supponga che $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, allora esiste sicuramente una

$$c \in (a, b) \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

8 Taylor

Lo sviluppo di Taylor di una funzione nell'intorno di un punto x_0 dell'asse reale, è la rappresentazione come somma di un polinomio e di un infinitesimo di ordine superiore al grado del polinomio. Con esso è possibile approssimare una funzione complessa (in un intorno abbastanza piccolo di x_0) a un polinomio, di cui è facile stabilire le proprietà qualitative.

Iniziamo supponendo una funzione continua in x_0 e costante (di grado 0), sappiamo che per $x \rightarrow x_0$:

$$f(x) = f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In altri termini possiamo approssimare la funzione f mediante un polinomio di grado 0 in modo che la differenza tra $f(x)$ e $T_{f_0, x_0}(x)$ sia un infinitesimo di x_0 .

Supponiamo che la funzione sia anche derivabile:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

In generale posso trovare il polinomio $T_{n, x_0}(x)$ di grado $leqn$ tale che:

$$f(x) = T_{n, x_0}(x) + o((x - x_0)^n)$$

che è riscrivibile come:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n, x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

— Teorema: formula di Taylor con resto di Peano —

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0 , allora posto

$$T_{n, x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

risulta

$$f(x) = T_{n, x_0}(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Il polinomio $T_{n, x_0}(x)$ è **unico** e si chiama **polinomio di Taylor di ordine n** (per $x_0 = 0$ si chiama polinomio di Mac-Lawri)

dimostrazione

Per $n = 0$ e $n = 1$ già lo sappiamo. Dimostriamo che per

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{2,x_0}(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

dove

$$T_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Per il **teorema di De L'Hopital** è vero se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)} = 0$$

cioè

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0) \right) = 0$$

che è vero per la definizione di derivata seconda.

9 Primitivazione

10 Equazioni differenziali

Definizione: soluzione di *

Si dice soluzione di * la funzione

$$y : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I$$

(con I intervallo) e f derivabile n volte.

esempio 1

$$y' = g(x) \quad (y'(x) = g(x))$$

Già risolta (se g è continua).

$$y(x) = G(x) \quad G' = h, c \in \mathbb{R}$$

esempio 2

$$y' = ky \quad k \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = e^{kx} \implies y'(x) = ke^{kx} = ky(x)$$

Per trovare le soluzioni, osservo che:

$$\begin{aligned} (e^{-kx}y(x))' &= -ke^{-kx}y(x) + e^{-kx}y'(x) \\ &= (y'(x) - ky(x))e^{-kx} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} y'(x) = ky(x) &\iff (e^{-kx}y(x))' = 0 \\ &\iff e^{-kx}y(x) = c \\ &\iff y(x) = ce^{kx} \end{aligned}$$

esempio 3

$$y' = y^2$$

Verifico che $y(x) = -\frac{1}{x+c}$ $c \in \mathbb{R}$ è soluzione:

$$y'(x) = \frac{1}{(x+c)^2} = y(x)^2$$

Fatto interessante

$$y(x) = -\frac{1}{x+c}$$

è definita su $I = (-\infty, -c)$ o su $I = (-c, +\infty)$. Il modello prevede un'esplosione (blow-up) in un tempo finito.

esempio 4

$$y'' = g(x) \quad g \text{ continua}$$

Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_2 & G' &= g, & c_2 &\in \mathbb{R} \\ y(x) &= c_1 + c_2 x + \mathcal{G}(x) & G' &= G(\mathcal{G}' = g), & c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Per $g(x) = -g$ costanti, $\mathcal{G} = -\frac{g}{2}x^2$ e quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 x - \frac{g}{2}x^2$$

Cinematica: $F(t, s, v) = -mg$ (forza peso)

$$\begin{aligned} ms'' &= mg \implies s'' = -g \\ \implies s(t) &= c_1 + c_2 t - \frac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

che è la legge oraria di caduta dei gravi.

Per determinare una **unica** soluzione, si impongono condizioni aggiuntive, in questo caso si parla di **problema di Cauchy**.

$$\begin{aligned} \text{I ordine)} & \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{condizione iniziale} \\ \text{II ordine)} & \quad \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{posizione iniziale} \\ y'(x_0) = z_0 \quad \text{velocità iniziale} \end{cases} \end{aligned}$$

esempio 1

$$\begin{aligned} & \begin{cases} N' = kN & k > 0 \\ N(0) = N_0 > 0 \end{cases} \\ \implies N(t) &= ce^{kt} \quad c \in \mathbb{R} \\ \implies N(0) &= ce^0 = c \end{aligned}$$

$(k > 0) \implies N(t) = N_0 e^{kt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ Rappresenta una crescita esponenziale (irrealistica).

Il modello logistico invece

$$\begin{cases} N' = kN(1 - \frac{N}{h}) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

ha come asintoto il valore della "capacità portante dell'ambiente".

esempio 2

$$\begin{cases} ms'' = -mg \\ s(0) = s_0 \\ s'(0) = v_0 \end{cases} \implies \begin{cases} s(t) = c_1 + c_2 t - \frac{g}{2}t^2 \\ s(0) = c_1 = s_0 \\ s'(t) = c_2 - gt \implies s'(0) = c_2 = v_0 \end{cases}$$

$$\implies s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{-g}{2}t^2$$

10.1 Equazioni differenziali del second'ordine

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

L'equazione con $g(x) = 0$, cioè

$$y'' + ay' + by = 0$$

si dice **omogenea** associata.

Perché il termine "lineare"? L'operatore differenziale

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= C^2 \rightarrow C^0 \\ y &\rightarrow y'' + ay' + by\end{aligned}$$

è lineare, cioè $\mathcal{L}_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \mathcal{L}_2(y_1) + c_2 \mathcal{L}_2(y_2) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall y_1, y_2 \in C^2$

Come conseguenza: se y_1, y_2 sono soluzioni di $y'' + ay' + by = g(x)$, allora $c_1 y_1 + c_2 y_2$ è anche soluzione, ovvero: l'insieme delle soluzioni di $y'' + ay' + by = g(x)$ è spazio vettoriale (= il nucleo di \mathcal{L}).

Si considera l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

e distinguiamo 3 casi: posto $\Delta = a^2 - 4b$

1. $\Delta > 0$: dette $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ le due soluzioni di (LO2) sono date da

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Infatti

$$\begin{aligned}D(e^{\lambda_i x}) &= \lambda_i e^{\lambda_i x} \\ D^2(e^{\lambda_i x}) &= \lambda_i^2 e^{\lambda_i x}\end{aligned}$$

2. $\Delta = 0$: detta $\lambda = -\frac{a}{2}$ la soluzione reale (doppia): le soluzioni di (LO2) sono date da

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. $\Delta < 0$: date $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega$ le due soluzioni complesse coniugate $\left(\sigma = -\frac{a}{2}, \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)$ le soluzioni di (LO2) sono data da

$$y(x) = (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) e^{\sigma x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Nel caso non-omogeneo, le soluzioni sono date da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \quad \text{in cui } y_p \text{ è soluzione particolare dell'eq. completa}$$