CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

PROVA D'ESAME – 1 LUGLIO 2015

TEMA I

Si consideri un pendolo semplice, posto in un piano verticale fisso. Il punto materiale, oltre alla forza peso, è soggetto anche a una forza elastica lineare con costante k, diretta verso un punto posto sulla stessa retta verticale a cui appartiene il punto di sospensione del pendolo. Detta Y la coordinata verticale del centro della forza elastica (supponendo che il punto di sospensione del pendolo coincida con l'origine delle coordinate), discutere la stabilità dei punti di equilibrio del sistema al variare del parametro Y.

Svolgimento

Detto θ l'angolo calcolato a partire dalla posizione più bassa del pendolo e L la lunghezza del pendolo, si ha

$$\begin{cases} x = L\sin(\theta) \\ y = -L\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{mL^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgL\cos(\theta) - \frac{k}{2}\left[L^2\sin^2(\theta) + (Y + L\cos(\theta))^2\right] = \\ &= \frac{mL^2}{2}\dot{\theta}^2 + L(mg - kY)\cos(\theta) + \text{cost.} \end{aligned}$$

Se $Y = \frac{mg}{k}$, allora il potenziale si annulla e non ci sono forze attive tangenti al vincolo: in questo caso per velocità nulla si ha equilibrio (indifferente) in tutte le configurazioni.

Si sa che la funzione coseno ha un massimo in $\theta = 0$ e un minimo $\theta = \pi$: se $Y \neq \frac{mg}{k}$, il potenziale ha quindi due punti di stazionarietà, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Se il coefficiente $(mg - kY)$ è positivo, ossia $Y < \frac{mg}{k}$, il potenziale ha lo stesso segno della funzione coseno, quindi in $\theta = 0$ l'equilibrio è stabile e in $\theta = \pi$ è instabile;

se $Y > \frac{mg}{k}$, invece, in $\theta = 0$ l'equilibrio è instabile e in $\theta = \pi$ è stabile.

Si può ottenere lo stesso risultato valutando la derivata seconda del potenziale nei due punti $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

TEMA II

Si consideri una Lagrangiana $L = L(q^\mu, u^\mu)$, supposta regolare.

(1) Mostrare che la Lagrangiana $L' = L + \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} u^\lambda$, per qualsiasi funzione differenziabile $f(q^\lambda)$, genera le stesse equazioni di Eulero-Lagrange della lagrangiana L.
(2) Spiegare il perché, usando il principio di minima azione.
(3) Indicate con Φ_L e $\Phi_{L'}$ le due mappe di Legendre associate rispettivamente a L e L', mostrare che le due mappe differiscono per una trasformazione canonica in T^*Q.
(4) Trovare una funzione generatrice di tale trasformazione canonica.

Svolgimento

(1) Scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana L' si trova

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial u^\mu}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q^\mu} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q^\mu}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial q^\mu \partial q^\nu} u^\nu.$$

Poiché

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q^\mu}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^\mu \partial q^\nu} \dot{q}^\nu$$

e l'altra metà delle equazioni di Lagrange è $\dot{q}^\nu = u^\nu$, ne segue la tesi.
(2) I due integrali d'azione differiscono per l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} \dot{q}^\lambda(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} f(q^\lambda(t)) dt$$

questo integrale dipende solo dal valore assunto da f negli estremi di integrazione, e pertanto non cambia per variazioni a estremi fissi. Le curve estremali dei due funzionali d'azione sono quindi le stesse.
(3) Poiché

$$\Phi_L : (q^\nu, u^\nu) \mapsto \left(q^\nu, p_\nu = \frac{\partial L}{\partial u^\nu}\right), \Phi_{L'} : (q^\nu, u^\nu) \mapsto \left(q^\nu, p_\nu = \frac{\partial L}{\partial u^\nu} + \frac{\partial f}{\partial q^\nu},\right)$$

le due mappe di Legendre sono legate dalla relazione $\Phi_{L'}(q^\nu, u^\nu) = \Phi_L(q^\nu, u^\nu) + df$; si tratta quindi di far vedere che la trasformazione $T^*Q \to T^*Q$ definita da

$$P_\nu = p_\nu + \frac{\partial f}{\partial q^\nu}, \qquad Q^\nu = q^\nu$$

è canonica. A questo fine basta osservare che $P_\nu dQ^\nu = dp_\nu dq^\nu + df$.
(4) Dato che $Q^\nu = q^\nu$, la trasformazione considerata non è mai di prima specie. Si deve quindi considerare la relazione

$$\begin{aligned} 0 = P_\nu dQ^\nu - p_\nu dq^\nu - df &= P_\nu dQ^\nu - d(p_\nu q^\nu) + q^\nu dp_\nu - df \\ &\Rightarrow \quad P_\nu dQ^\nu + q^\nu dp_\nu = d(f + p_\nu q^\nu); \end{aligned}$$

quindi ("invertendo" la relazione $Q^\nu = q^\nu$) si trova come funzione generatrice $S(Q^\mu, p_\mu) = f(Q^\mu) + p_\nu Q^\nu$.