CORSO DI LAUREA IN FISICA
Prova scritta di Metodi Matematici della Meccanica Classica – 23 gennaio 2023

TEMA I

Un punto materiale è vincolato a muoversi (senza attrito) sulla superficie di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$. Non sono presenti forze attive (moto geodetico).

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema, scegliendo le coordinate lagrangiane in modo da ottenere un'equazione di Weierstrass per il sistema.

(2) Usando quest'ultima, trovare se sono possibili moti geodetici sull'intersezione fra la superficie e un piano fissato $z = k$.

TEMA II

Si consideri il sistema con un grado di libertà descritto dall'Hamiltoniana $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$, con ω costante reale.

(1) Integrando le equazioni di Hamilton, scrivere la trasformazione φ_t che manda un generico dato iniziale (q_0, p_0) nel punto (q, p) raggiunto dopo il tempo t;

(2) trovare la funzione generatrice $S(q_0, q, t)$ della trasformazione φ_t.

SVOLGIMENTO

TEMA I

Il punto materiale si muove su un ellissoide di rotazione, che in coordinate cilindriche è rappresentata dall'equazione $\rho^2 = 1 - \frac{1}{4}z^2$.
La parametrizzazione più conveniente si ha usando come coordinate lagrangiane z e θ.
In questo modo, la parametrizzazione risulta:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}z^2}\,\cos(\theta) \\ y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}z^2}\,\sin(\theta) \\ z = z, \quad |z| < 2 \end{cases}$$

Nei conti seguenti, per comodità di calcolo utilizzeremo ρ non come coordinata ma come funzione di z. Tenendo conto che la Lagrangiana coincide con l'energia cinetica $T = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$, otteniamo

$$L = \frac{m}{2}\left(\rho(z)^2\dot{\theta}^2 + \left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]\dot{z}^2\right)$$

Poiché il sistema è autonomo l'energia totale (coincidente con L) si conserva, e inoltre si conserva il momento coniugato alla coordinata ciclica θ, $J = m\rho(z)^2\dot{\theta}$. Sostituendo, troviamo la legge di conservazione

$$\frac{m}{2}\left(\frac{J^2}{m^2\rho^2} + \left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]\dot{z}^2\right) = E,$$

da cui l'equazione di Weierstrass

$$\dot{z}^2 = W(z) = \frac{1}{m}\left(2E - \frac{J^2}{m\rho^2}\right)\left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]^{-1}.$$

L'equazione di Weierstrass è singolare nei punti in cui $\rho = 0$ (ossia $z = \pm 2$), che però sono fuori dal dominio delle coordinate che stiamo usando.
Poiché non vi sono forze attive, ogni configurazione è di equilibrio: se la velocità iniziale è nulla, il punto materiale resta fermo. Cerchiamo allora se sono possibili moti geodetici con $z =$ costante diversi dalla quiete.
Come è noto dalla teoria, possiamo avere una soluzione costante $z = k$ solo se k è uno zero doppio di $W(z)$. Poiché $W(z)$ è il prodotto di due funzioni, $W(z) = A(z)B(z)$, e solo la prima, $A(z)$, può annullarsi, il sistema $(W(z) = 0, W'(z) = 0)$ è equivalente alla condizione $(A(z) = 0, A'(z) = 0)$.
Devono quindi essere soddisfatte le equazioni

$$\begin{cases} 2E - \dfrac{J^2}{m\rho^2} = 0 \\ \dfrac{d}{dz}\,\dfrac{J^2}{m\rho^2} = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione implica

$$\frac{z}{2}\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)^{-2} = 0$$

e può essere soddisfatta solo se $z = 0$, quindi un moto geodetico con z costante può esistere solo in questo piano.

(NB Sono possibili altre scelte di coordinate lagrangiane; i calcoli risultano un po' più laboriosi, ma - se sono giusti - pervengono ai medesimi risultati. In tutti i casi una delle coordinate deve sempre essere l'angolo θ, che è una coordinata ciclica in conseguenza della simmetria della superficie di rotazione: altrimenti non si potrà ottenere un'equazione di Weierstrass). In particolare, usare ρ come coordinata – invece di z – non è sbagliato, ma si devono allora considerare separatamente le carte che coprono $z > 0$ e $z < 0$. In questo modo, però, non si copre proprio l'intersezione con il piano $z = 0$, e quindi si perde la soluzione cercata.

Si può anche ragionare in termini puramente geometrici in questo modo: per la superficie considerata, l'intersezione con un piano $z = k$, se non è vuota e non si riduce a un punto, è una circonferenza. Siccome i moti geodetici sono necessariamente uniformi, il moto geodetico cercato dovrebbe essere un moto circolare uniforme, in cui l'accelerazione è sempre diretta verso il centro della circonferenza e pertanto deve giacere sul medesimo piano $z = k$ (detto ancora più semplicemente: se lungo il moto z deve essere costante, la componente z dell'accelerazione, in coordinate cartesiane, deve essere nulla). Calcolando il gradiente della funzione $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4}$ che definisce la superficie (gradiente che ha sempre direzione perpendicolare a quest'ultima) si trova che tale gradiente ha componente z uguale a zero solo se $z = 0$.

TEMA II

Le equazioni di Hamilton e il corrispondente integrale generale sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q(t; q_0, p_0) = q_0 \cos(\omega t) + \dfrac{p_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ p(t; q_0, p_0) = -\omega q_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Per poter ricavare una funzione generatrice di prima specie $S(q_0, q)$ bisogna scrivere p e p_0 in funzione di q e q_0. Siccome la dipendenza dai dati iniziali è lineare, con pochi passaggi si trova

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{\omega}{\sin(\omega t)} \left(q - q_0 \cos(\omega t)\right) = \dfrac{\partial S}{\partial q_0} \\ p = \dfrac{\omega}{\sin(\omega t)} \left(q \cos(\omega t) - q_0\right) = -\dfrac{\partial S}{\partial q} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S(q_0, q) = \omega \, \frac{2 q_0 q - (q^2 + q_0^2) \cos(\omega t)}{2 \sin(\omega t)}$$