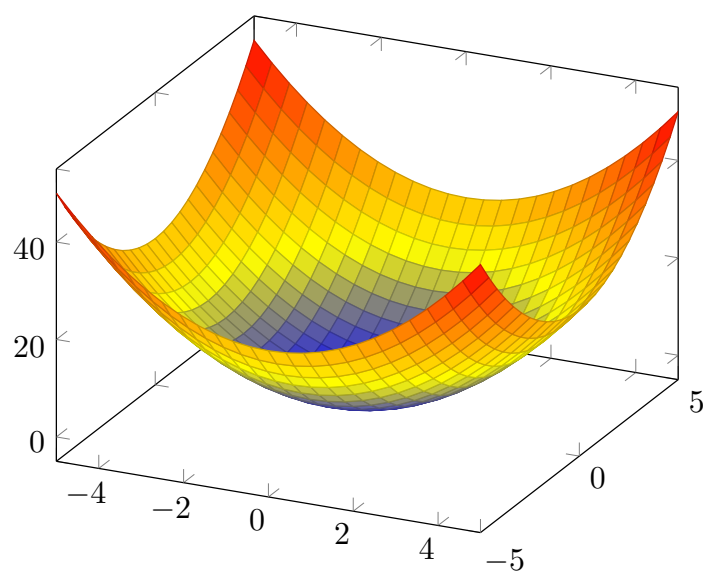


# Analisi III

Riassunto da: "*Analisi Matematica 2* - Claudio Canuto, Anita Tabacco"



Corso di Laurea in Fisica - Corso A  
Università degli studi di Torino, Torino  
Settembre 2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Successioni di funzioni</b>	<b>2</b>
1.1	Limiti di successioni . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Serie di funzioni</b>	<b>5</b>
2.1	Serie di potenze in $\mathbb{C}$ . . . . .	6

# 1 Successioni di funzioni

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}), \quad f_n : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} N &\rightarrow \{\text{f.ni definite su } A\} \\ n &\mapsto f_n \end{aligned}$$

Vogliamo studiare come si comporta  $(f_n)_n$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

## 1.1 Limiti di successioni

### **Definizione: Convergenza puntuale**

Diciamo che la successione di funzioni  $(f_n)_n$ ,  $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C})$  **converge puntualmente** (o semplicemente) a una funzione  $f$  sull'insieme  $E \subseteq A$  se

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Notiamo che quest'ultimo limite è un limite di successione numerica, quindi

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) \text{ t.c. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq \bar{n}$$

### **Definizione: Convergenza uniforme**

Diciamo che la successione di funzioni  $(f_n)_n$ ,  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C})$  **converge uniformemente** su  $E \subseteq A$  alla funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ t.c. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ t.c. } \sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

dove l'estremo superiore viene denominato  $\alpha_n$  successione positiva ( $\geq 0$ ):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ t.c. } 0 \leq \alpha_n < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

opure

esempio 1

esempio 2

esempio 3

**Teorema 1 - La convergenza uniforme preserva la continuità**

Sia  $(f_n)_n$  una successione di funzioni  $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ) tali che

(H1)  $f_n$  sono funzioni continue su  $E \subseteq A$ ,

(H2)  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $E$

allora  $f$  è continua su  $E$

...dimostrazione .....

La tesi è

$$\forall x_0 \in E, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero che

$$\forall x_0 \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$$

- Da (H2) convergenza uniforme sappiamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$  quindi

$$\exists \hat{n} = \hat{n}(\varepsilon) \quad : \quad \alpha_n = \sup |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq \hat{n}$$

- Da (H1) abbiamo invece la continuità di  $f_{\hat{n}}$  in  $x_0$ :

$$\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \quad : \quad |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in I_\delta$$

Ora utilizzando la riscrittura

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{\hat{n}}(x) + f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0) + f_{\hat{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{\hat{n}}(x)| + |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| + |f_{\hat{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Teorema 2 - Passa al limite sotto integrale**

Sia  $(f_n)_n$  una successione di funzioni  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

(H1)  $f_n$  sono funzioni continue su  $[a, b]$ ,

(H2)  $f_n$  converge uniformemente su  $[a, b]$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \int_a^b f(x) dx$$

...dimostrazione .....

Dal **Teorema 1** sappiamo che  $f$  è continua su  $[a, b]$  e perciò è integrabile è

$$\int_a^b f(x) dx$$

è ben definito.

Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

ovvero che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{n} = \tilde{n}(\varepsilon) \quad : \quad |I_n - I| < \varepsilon \quad \forall n \geq \tilde{n}$$

Utilizziamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} |I_n - I| &= \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b f_n - f \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n - f| \\ &\leq \int_a^b \alpha_n = \alpha_n(b-a) \end{aligned}$$

e poiché per (H2) si ha  $\alpha_n \rightarrow 0$

$$\exists \tilde{n} : \alpha_n(b-a) < \varepsilon \quad \forall n \geq \tilde{n}$$

□

esempio 4

#### **Teorema**

Sia  $(f_n)_n$ ,  $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ) tale che

- $f_n$  converga uniformemente a  $f$  in  $E \subseteq A$ ,
- $f_n$  siano continue sulla chiusura di  $E$ :  $\bar{E}$

allora si ha che  $f_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $\bar{E}$ .

## 2 Serie di funzioni

Presa  $(f_n)_n$  successione di funzioni,  $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ), chiamiamo

$$\sum_n f_n(x)$$

**serie di funzioni.** Definiamo

$$S_N = \sum_{n=1}^N f_n(x)$$

successione delle ridotte.

**Convergenza della serie** Diciamo che la serie converge (puntualmente o uniformemente) su un insieme  $E \subseteq A$  se lo fa la successione delle ridotte. Si andrà quindi a studiare il limite di  $S_N$  che chiamiamo somma della serie.

### **Teorema 1S**

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se

- $f_n$  continue su  $E \subseteq A$ ;
- $\sum_n f_n$  converge uniformemente su  $E \subseteq A$  alla somma  $S(x)$

Allora  $S(x)$  è continua su  $E$ .

### **Teorema 2S**

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $E = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , se

- $f_n$  continue su  $E \subseteq A$ ;
- $\sum_n f_n$  converge uniformemente su  $E \subseteq A$  alla somma  $S(x)$

Allora

$$\int_a^b \sum f_n(x) dx = \sum \int_a^b f_n(x) dx$$

### **Definizione:**

$$I_s = \left\{ x \mid \text{la serie considerata } \sum f_n(x) \text{ converge semplicemente} \right\}$$

per la serie  $\sum x^n$  si ha che  $I_s = (-1, 1)$

$$I_a = \left\{ x \mid \text{la serie considerata } \sum |f_n(x)| \text{ converge semplicemente} \right\}$$

**Teorema: *m*-test o criterio di convergenza totale**

Date

- $(f_n)_n$  successione di funzioni su  $E \subseteq \mathbb{R}$  (o in  $\mathbb{C}$ );
- $(m_n)_n \subseteq \mathbb{R}$  successione di numeri reali positivi.

tali che

$$(H1) \quad |f_n(x)| \leq m_n \quad \forall x \in E, \forall n;$$

$$(H2) \quad \sum m_n(x) < +\infty.$$

Allora la serie  $\sum f_n(x)$  converge assolutamente in ogni punto di  $E$  e uniformemente su  $E$   
 $\implies$  la serie converge totalmente.

**Teorema 3S**

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ). Se

- $\sum_n f_n$  converge uniformemente su  $E$ ,
- $f_n$  sono continue su  $\bar{E}$

allora  $\sum_n f_n$  converge uniformemente su  $\bar{E}$ .

## 2.1 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

Intendiamo con serie di potenze in  $\mathbb{C}$  un'espressione del tipo

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

dove  $(a_n)_n$  è una successione di numeri complessi,  $z_0 \in \mathbb{C}$  è il *centro* e  $z$  è la variabile complessa. I concetti di convergenza si estendono sostituendo il modulo al valore assoluto nelle relative definizioni.

In campo complesso l'intervallo di convergenza viene sostituito da un **disco di convergenza**.

La successione delle ridotte  $S_N(z)$  è un polinomio di grado  $N$  a variabile complessa.

**Teorema: disco di convergenza**

Data una serie di potenze in  $\mathbb{C}$ ,  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ , esiste  $R \geq 0$  detto raggio di convergenza della serie tale che

1. La serie **converge assolutamente** in  $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ ,
2. la serie **non converge semplicemente** in  $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(z_0)}$ ,

$$D_R(z_0) \subseteq I_a \subseteq I_s \subseteq \overline{D_R(z_0)}$$

3. la serie **converge uniformemente** su ogni  $\overline{D_r(z_0)}$  con  $r \in (0, R)$ .

...dimostrazione .....

Per prima cosa sappiamo che  $z_0 \in I_s$  quindi  $I_s \neq \emptyset$ .

Definiamo

$$R := \sup\{|z - z_0| : z \in I_s\}$$

Ora andiamo a studiare quando  $R$  si annulla e quando è maggiore di zero:

- $\boxed{R = 0}$  Se  $R$  è nullo il punto  $z_0$  corrisponde all'insieme  $I_s$ :

$$\{z_0\} = I_s$$

La serie converge solo in un punto dove si riduce al primo termine  $a_0$ , quindi  $I_a = I_s$ .

- $\boxed{R > 0}$  e  $r \in (0, R)$ .

Avendo definito  $R$  come il *raggio dell'insieme*  $I_s$  di centro  $z_0$ , il punto 2 è subito dimostrato.

- considero  $\boxed{z_1 : |z_1 - z_0| \in (r, R)}$ . Si ha che  $z_1 \in I_s$  ovvero

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z_1 - z_0)^n \quad \text{convergente in } \mathbb{C}$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n (z_1 - z_0)^n = 0$$

$$\implies \exists \tilde{n} : |a_n (z_1 - z_0)^n| < 1 \quad \forall n \geq \tilde{n}$$

- considero  $\boxed{z \in \overline{D_r(z_0)}}$ . Vogliamo usare l'm-test per dedurre la convergenza assoluta in ogni  $\overline{D_r(z_0)}$  e la convergenza uniforme in  $D_r(z_0)$ .

Vogliamo maggiorare

$$|a_n (z_1 - z_0)^n|$$

con un numero  $m_n$  tale che  $\sum m_n < +\infty \quad \forall t \in \overline{D_r(z_0)}$ :

$$|a_n| |(z_1 - z_0)^n| \leq |a_n| r^n \overline{|(z_1 - z_0)^n|}$$

□

### corollario

prova testo prova