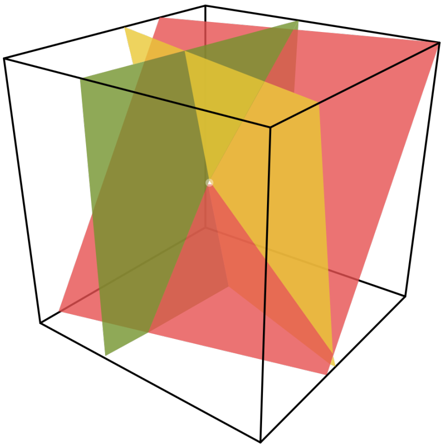


Geometria e Algebra lineare

Riassunto da: ""

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
settembre 2023

Indice

1 Sistemi Lineari

Prima di parlare di sistemi definiamo cosa si intende per *equazione lineare*: un'equazione lineare è un'uguaglianza del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2...a_nx_n = b$$

espressa nelle incognite x_1, x_2,... x_n. Un'equazinone di questo genere ha come soluzione una n-upla di numeri reali che sostituiti al posto delle incognite rende vera l'uguaglianza (la *risoluzione* dell'equazione consiste nel trovare questa n-upla).

esempio

Definiamo un'equazione $**: x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$ con $x_1 = x_2 - 2x_3 + 4$

L'insieme delle soluzioni di $*$ lo indichiamo con $S_{(*)}$ $S_{(*)} = \left\{ \left(x_2 - 2x_3 + 4x_2x_3 \right) : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ In cui x_2 e x_3 sono i parametri liberi che variano.

esempio

Utilizzando un'altra equazione $**: 2x - 3y = 0$

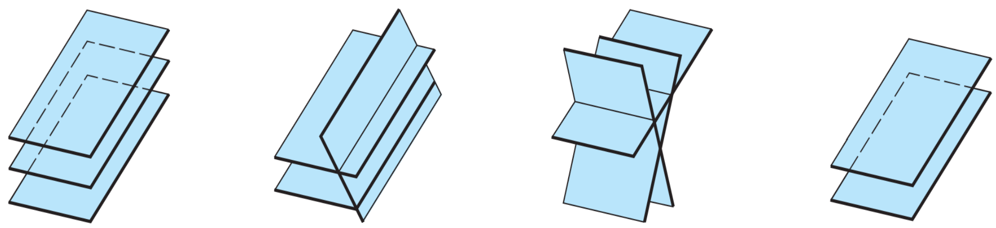
L'insieme delle sue soluzioni sarà: $S_{(*)} = \left\{ \left(xy \right) : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ oppure tramite un parametro t per il quale $\left\{ x = ty = \frac{2}{3}t, \quad t \in \mathbb{R} \quad S_{(*)} = \left\{ (t, \frac{2}{3}t) : t \in \mathbb{R} \right\} \right.$

Definiamo invece un *sistema lineare* di r equazioni lineari in n incognite $x_1, x_2 \dots x_n$ una struttura del tipo:

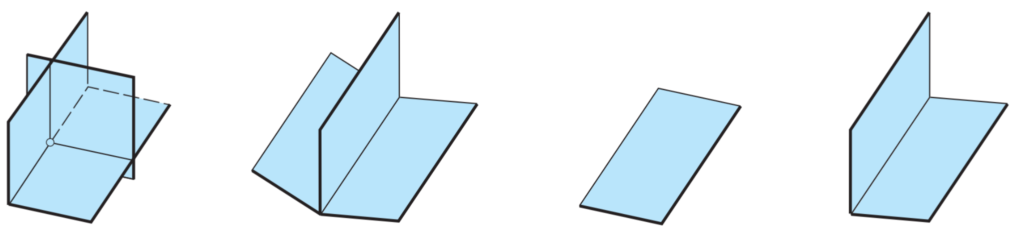
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

i coefficienti sono espressi nella forma a_{ij} per agevolarne il riconoscimento all'interno del sistema. Il pedice i indica l'indice di riga, il pedice j è l'indice di colonna. I termini noti b presentandosi una sola volta per riga hanno solo l'indice di riga. Se i termini noti sono tutti nulli il sistema si dirà ***omogeneo***.

Diremo soluzione del sistema una n-upla di numeri reali $\left(x_1 \vdots x_n \right)$ che risolve ciascuna delle equazioni del sistema. Il sistema si dice ***compatibile*** se ammette soluzioni (altrimenti ***incompatibile***). Due sistemi sono ***equivalenti*** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.



Nessuna soluzione



Una soluzione

∞ siluzioni
(1 par. libero)

∞ siluzioni
(3 par. liberi)

∞ siluzioni
(1 par. libero)

1.1 Teorema di Rouchè-Capelli

Un sistema lineare $AX = B$ con $A \in \mathbb{R}^{r,n}$, $\quad X \in \mathbb{R}^{n,p}$, $\quad B \in \mathbb{R}^{r,p}$ è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa. Se il sistema è compatibile, le soluzioni dipendono da $p \cdot (n - \mathrm{rk}A)$ parametri liberi.

$$\mathrm{rk}\left(A|\overline{b}\right) = \mathrm{rk}(A) \quad \Rightarrow \quad \text{sistema compatibile}$$

Poiché si opera solo sui coefficienti e non sulle incognite, i calcoli su essi risultano facilitati tramite l'utilizzo di tabelle (matrici). Un sistema quindi, nella sua forma matriciale (completa perché contiene anche i termini noti) il sistema si presenta così:

$$\left(A|\overline{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} & b_r \end{array}\right)$$

In questa forma la matrice è scomponibile e riscrivibile come il prodotto scalare tra il vettore dei coefficienti $\overline{a}$ e il vettore delle incognite $\overline{x}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \vdots \\ \vdots x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

1.2 Soluzioni di un sistema utilizzando il suo omogeneo associato

Se conosco una soluzione x_0 di Σ, sommandoci una qualsiasi soluzione del suo sistema associato Σ_0 Un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa.

Diciamo di avere un sistema molto semplice a un'equazione è il suo sistema omogeneo associato:

$$\Sigma : 3x - y = 5 \qquad \to y = 3x - 5$$

$$\Sigma_0 = 3x - y = 0 \qquad \to y = 3x.$$

Le soluzioni di Σ saranno:

$$S(\Sigma) : \{\begin{pmatrix} x3x-5 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$$

di Σ_0 invece:

$$S(\Sigma_0) : \{x \cdot \begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$$

Le soluzioni di Σ possono essere riscritte come una soluzione particolare (prendiamo quella con $x = 0$) sommata a tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato:

$$S(\Sigma) : \begin{pmatrix} 0-5 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix}$$

dimostrazione

Iniziamo provando che la somma di due soluzioni di un sistema omogeneo rimane una soluzione:

$$A\overline{x} = \overline{0} \qquad (\Sigma_0)$$

$$A\overline{y} = \overline{0} \qquad (\Sigma_0)$$

$$\overline{x}, \overline{y} \in S(\Sigma_0)$$

$$A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y} = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} + \overline{y} \in S(\Sigma_0)$$

Ovvio anche che $\lambda\overline{x}$ o $\lambda\overline{y}$ entrambi $= 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Proviamo poi che la somma di due soluzioni di Σ *non è mai* soluzione di Σ

$$A\overline{x} = \overline{b} \qquad (\Sigma)$$

$$A\overline{y} = \overline{b} \qquad (\Sigma)$$

$$\overline{x}, \overline{y} \in S(\Sigma)$$

$$A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y} = \overline{b} + \overline{b} = 2\overline{b}$$

Infine proviamo che una soluzione di Σ+ una qualsiasi soluzione di Σ_0 è sempre una soluzione di Σ:

$$\overline{x} \in S(\Sigma), \quad \overline{y} \in S(\Sigma_0) \quad \Rightarrow \quad A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y} = \overline{b} + \overline{0}$$

$$= \overline{b}$$

2 Matrici

Definiamo una matrice di r righe e n colonne con $a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1,\dots,r; j = 1,\dots,n$ definita nello spazio $\mathbb{R}^{rn}$ in questo modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,n} \end{bmatrix}$$

Esistono matrici **quadrate** se hanno stesso numero di righe e di colonne ($\mathbb{R}^{nn}$), **diagonali** se tutti gli elementi sono zeri tranne quelli sulla diagonale maggiore (matrice *unità* se la diagonale contiene solo 1), **nulle** se tutti gli elementi sono zeri, **riga** se hanno una riga sola, **colonna** se hanno una colonna sola.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Definizione: matrice ridotta

Una matrice si dice **ridotta** se in ogni sua riga *non nulla* esiste un elemento sotto al quale ci sono solo zeri, questo elemento viene chiamato *pivot*. Se una matrice è ridotta chiameremo *rango della matrice* il numero di righe non nulle in essa: $rk(A) \leq min\{r,n\}$.

Definizione: matrice a scala

Chiameremo *primo pivot* il primo pivot nella prima riga partendo da sinistra. Una matrice si dice **a scala se *è ridotta*** e se la riga R_i è tutta fatta di zeri e, quindi, anche la riga R_j per ogni $j > i$; ovvero:

$$R_i = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad R_j = \overline{0} \quad \forall j > i$$

Se la riga $R_i \neq \overline{0}$ il *primo pivot* di R_i è strettamente a destra del primo pivot di R_{i-1}.

Proposizione Il rango di una matrice A non supera mai il minimo fra il numero di righe e di colonne.

$$rk(a) \leq min\{r,n\}$$

dimostrazione

Sia B' la riduzione a scala di B.
Sappiamo che r_2 di B' comincia con almeno uno zero, r_3 con almeno 2 zeri, r_4 con almeno 3 zeri e così via.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad R_{n+1} \text{è tutta di zeri} \quad \Rightarrow \quad R_j \text{è tutta di zeri} \forall j \geq n+1$$

Se il rango è il numero di righe non nulle, e le righe dalla $n+1$ in poi sono tutte nulle, allora il rango è sicuramente minore o uguale a n. ■

2.1 Operazioni tra matrici

E' ammessa la somma tra matrici dello stesso ordine $\mathbb{R}^{rn}$ e sono ammesse la proprietà commutativa, associativa, esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'opposto. Il prodotto $A \cdot B$ è ammesso se il numero di righe della prima è uguale al numero di colonne della seconda, ovvero se $A \in \mathbb{R}^{rn}$ e $B \in \mathbb{R}^{np}$. Per il prodotto sono valide la proprietà associativa, la distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Prodotto come combinazione lineare

Un altro modo per descrivere il prodotto tra matrici è come *combinazione lineare di vettori colonna*:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

può anche essere scritto come:

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La trasposta di una matrice

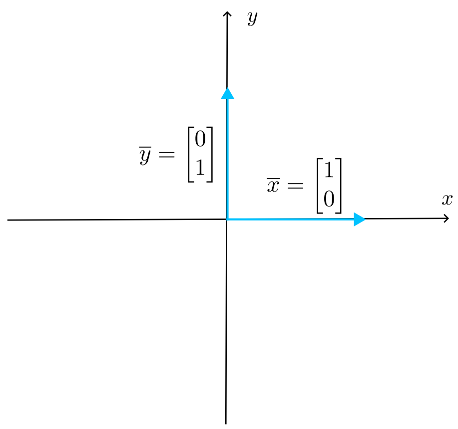
Definizione: matrice trasposta

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{r,n}$, si dice trasposta di A (^tA) la matrice che si ottiene scambiano le righe con le colonne di A: Se $A = (a_{ij})$, $^tA = (a_{ji})$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Interpretazione geometrica delle matrici

Dopo aver parlato di vettori, approfondiamo il concetto di *matrice* e il suo comportamento come *spazio vettoriale*. Più in particolare vedremo il prodotto tra matrici come trasformazioni lineari dello spazio vettoriale (linearmente perché nessuna linea viene curvata e l'origine rimane fissata). Questa interpretazione di una matrice rende i conti più facili ed intuitivi.
Diciamo di avere due vettori giacenti sui due assi:

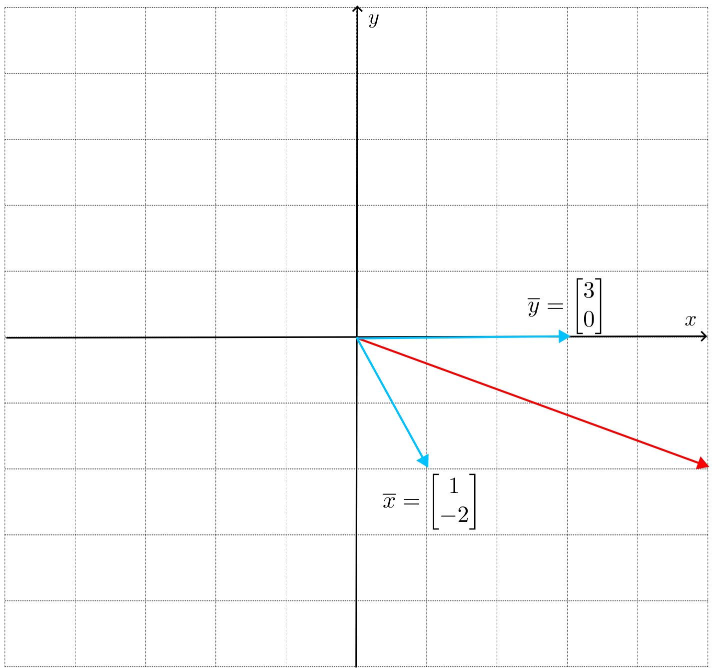


Diciamo ora di avere una matrice A che descrive dove questi due vettori cadono a seguito della trasformazione da essa descritta; la matrice A basta per descrivere dove cadrà ogni vettore (x,y).

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se, come abbiamo detto prima, le linee non vengono deformate, il vettore che nel primo grafico sarebbe stato (1,1), nel secondo è intuitivo pensare che ora sia (4,-2); Il prodotto tra le matrici lo conferma.



Possiamo arrivare alla conclusione che ogni matrice può essere interpretata come una trasformazione dello spazio, a prescindere dall'ordine della matrice.

Prodotto come composizione di trasformazioni Se applichiamo più trasformazioni consecutive, quindi tramite più matrici, interpretiamo la composizione di queste trasformazioni come il prodotto tra le matrici.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'ordine di composizione va letto da destra verso sinistra: viene eseguita prima la blu, poi la rossa (cosa tipica delle notazione delle funzioni: $f(g(x))$).
Pensando in questi termini, prodotto come composizione di trasformazioni, comprendiamo perché $AB \neq BA$; e la proprietà associativa diventa chiara e logica: $A(BC) = (AB)C$ in quanto l'ordine delle trasformazioni rimane invariato.

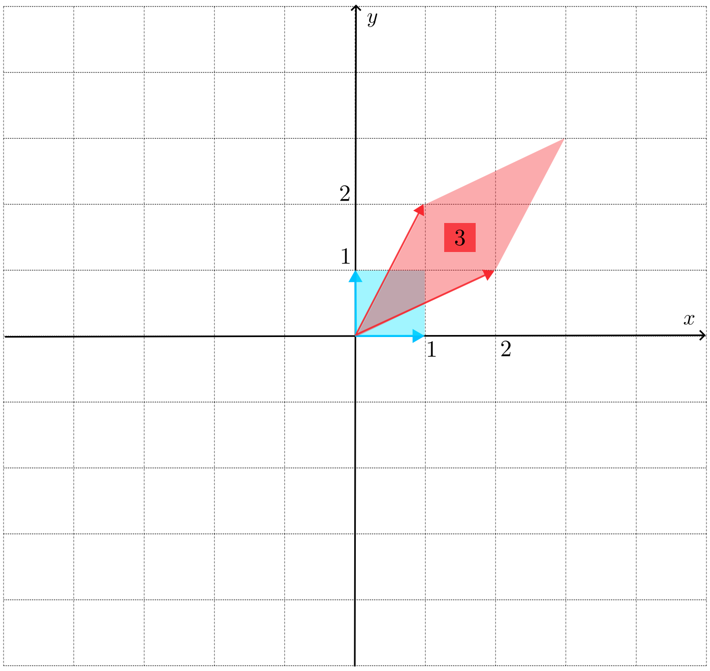
2.2 Determinante

Interpretazione geometrica del determinante

Il determinante di una matrice geometricamente rappresenta il fattore di "stretching" di un'area, o volume tridimensionale o n-dimensionale (qualunque cosa sia).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow detA = 3$$

In questo caso, l'area tra i vettori (0,1) e (1,0) sarebbe stata = 1. Dopo lo stretching dei due vettori l'area $(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1)$ diventa $= 3$.



Calcolo del determinante

Il determinante di una matrice è una funzione $det : \mathbb{R}^{nn} \Longrightarrow \mathbb{R}$ che verifica queste due proprietà:

1. Se a è un numero reale, ossia una matrice di ordine uno quadrata, allora $det(a) = a$.
2. Se A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ allora $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Dallo sviluppo del caso due notiamo che compaiono due addendi ciascuno dei quali è il prodotto di due fattori. I due fattori nei due prodotti di iniziano entrambi uno con un 1 e uno con un 2 per poi seguire con le *permutazioni di* $(1,2) : (1,2),(2,1)$. Perché il secondo prodotto ha un $-$ davanti? Il segno è dettato dalla *parità* della permutazione, ovvero: per arrivare alla coppia $(1,2)$ si devono attuare degli scambi, se il numero di scambi è pari, il segno non cambia, se gli scambi sono dispari, il segno cambia.

esempio

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

Definizione: determinante

Il determinante di una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n è dato da:

$$\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

dove σ è una qualsiasi permutazione dei numeri $1, 2, \dots, n$ e $\epsilon(\sigma)$ è il suo segno.

Come cambia il determinante dopo le 3 mosse?

1. $det^t(A) = det(A)$;
2. Se A' si ottiene scambiando due righe o due colonne di A, allora $det(A') = -det(A)$;
3. Se faccio moltiplico una riga per un numero reale λ allora $det(A^1) = \lambda^n det(A)$;
4. Se addiziono a una riga un multiplo di un'altra riga il determinante non cambia;

5. Una matrice con due righe o colonne uguali ha determinante nullo;
    (a) data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $rk(A) = n \longleftrightarrow det(A) \neq 0$
    (b) analogamente $rk(A) < n \longleftrightarrow det(A) = 0$
6. $det(A+B) \neq det(A) + det(B) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$
7. **Teorema di Binet**: $det(AB) = det(A)det(B) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$;
8. $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$;

dimostrazione determinante (2)

È conseguenza della definizione di determinante e del fatto che lo scambio di due righe comporta il cambiamento di segno di ciascuna permutazione. Per esempio, nel caso della matrice quadrata di ordine 2 si ha:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Se scambio due righe:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{11} + a_{21}a_{12}$$

■

dimostrazione determinante (5a)

Operando su una matrice A e la rendo A' a scala triangolare superiore. So allora che $det(A') = \lambda \cdot det(A)$ e $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow det(A') \neq 0$. Quindi $a'_{ij} \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.
Cioè A' ha n righe non nulle, quindi $rk(A') = n$. ■

dimostrazione determinante (8)

Per il teorema di Binet:

$$AA^{-1} = I \qquad A^{-1} = \frac{I}{A} \qquad det(A^{-1}) = det(\frac{I}{A}) = \frac{1}{det(A)}$$

■

osservazioni su matrici inverse Se il determinante di una matrice è uguale a zero, significa che la matrice è non invertibile. Questo perché il determinante descrive, anche se non esplicitamente, il numero di soluzioni del sistema di equazioni associato.
Il determinante è infatti strettamente legato al **rango**: se il rango, ovvero il numero di righe non nulle, di una matrice $A \in \mathbb{R}^{r,n}$ è minore di n sappiamo che il determinante vale 0 e che di conseguenza il sistema *non può avere una singola soluzione*. Infatti se la matrice ha una riga nulla o più, le soluzioni saranno infinite e legate a uno o più parametri liberi.
Se il sistema associato alla matrice A non ha una singola soluzione è chiaro come non possa esistere una matrice A' inversa che soddisfi:

$$AA^{-1} = I \quad A^{-1} = \frac{I}{A}$$

L'equazione ha infatti una sola soluzione se e solo se A fosse unicamente definita.

2.3 Teoremi di Laplace

I teoremi di Laplace permettono di semplificare i conti nel calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ a conti di un determinante $(n-1) \times (n-1)$. I conti vengono semplificati perché si procede a scegliere un elemento a_{ij} nella matrice (vedremo perché di solito è uno in una riga o colonna con tanti zeri) , "nascondendo" tutti gli elementi della riga e colonna del nostro candidato e andremo a calcolare il determinante della matrice "rimanente", questo determinante lo chiameremo **minore** di a_{ij} e lo indichiamo con M_{ij}. Ora serve definire il **cofattore**; il cofattore di a_{ij} è il numero A_{ij} definito dalla formula:

$$A_{ij} = (-1)^{ij} \cdot M_{ij}$$

Vediamo come il fattore $(-1)^{ij}$ da segno positivo o negativo se la posizione di a_{ij} è pari o dispari (a_{11} è pari, a_{12} è dispari...).

Primo Teorema di Laplace

Fissata la riga i-esima, il determinante di una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è dato dalla somma di tutti i prodotti tra gli elementi della riga e i rispettivi cofattori (questo metodo funziona anche con le colonne) :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Secondo Teorema di Laplace

In una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ la somma dei prodotti tra gli elementi di una riga (o colonna) e i cofattori *di una riga parallela* è zero:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \\ &= \sum_{h=1}^{n} a_{hi} A_{hj} \qquad i \neq j \end{aligned}$$

dimostrazione

È conseguenza evidente della proprietà (2) del determinante secondo la quale *se scambio due righe o colonne a una matrice allora il suo determinante cambia di segno.* Si puó interpretare come lo sviluppo del determinante di un matrice in cui, nel primo caso, la riga j-esima coincide con la riga i-esima e nel secondo caso, la colonna j-esima coincide con la riga i-esima.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Se per esempio scegliamo di moltiplicare gli elementi della prima riga per i complementi della seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} & a\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= abi - ach - bai + bcg + cah - cbg = 0 \end{aligned}$$

■

2.4 Matrici inverse

Definizione: matrice invertibile

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice invertibile se $\exists$ una matrice X tale che $AX = XA = I$.

Proprietà generali delle matrici inverse

1. Se esiste una matrice inversa allora questa è univocamente determinata e la chiamo A^{-1};
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. Se A, B sono invertibili non è detto che lo sia $A + B$;
4. $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

dimostrazione (1)

Supponiamo che X e X' soddisfino:

$$XA = I = AX$$

$$X'A = I = AX'$$

$$XAX = \begin{matrix} (XA)X' = IX' = X' \\ X(AX') = XI = X \end{matrix} \rightarrow XA = AX'$$

Abbiamo dimostrato che se esiste una X inversa a sinistra per A ed esiste una X' inversa a esa per A, allora $X = X'$ e quindi A è invertibile e X è la sua inversa.

dimostrazione (2)

Vedo se la candidata ad inversa $B^{-1}A^{-1}$ soddisfa le proprietà richieste:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = \cdots = I$$

■

Teorema Sia A una matrice quadrata di ordine n, se $\det(A) \neq 0$ allora esiste l'inversa di A ed è:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

dimostrazione

Dai teoremi di Laplace so che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{se} \quad i = k \\ 0 & \text{se} \quad i \neq k \end{cases}$$

ovvero che la somma dei prodotti tra tutti gli elementi di una riga di A e i rispettivi cofattori è uguale o a 0 o al determinante di A.
Ovvero che il prodotto tra la matrice A e la trasposta della matrice dei cofattori di A (adj$A$) si può scrivere come:

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix} = \det A \cdot I$$

Possiamo notare quindi che dopo le opportune operazioni ci si riconduce alla formula iniziale.

■

Teorema Una matrice A è invertibile $\Longleftrightarrow$ il rango è massimo ($\text{rk} A = n$).
Possiamo dire che risolvere $Ax = I$ sia equivalente a scrivere x per colonne e risolvere il seguente sistema:

$$(*) \begin{cases} A\overline{x}_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ A\overline{x}_2 = (0, 1, \dots, 0) \\ \quad \vdots \end{cases}$$

dimostrazione

$\Rightarrow$ (dimostro che il rango è massimo) So che A è invertibile: esiste A^{-1}.
Considero:

$$A^{-1}A\cdot\overline{x}_1 = A^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad I\cdot\overline{x}_1 = A^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{x}_1 = A^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \text{esiste una sola soluzione} \quad\Rightarrow\quad \text{par. lib.} = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{rk}A = n$$

Calcolo della matrice inversa 1

Il primo metodo consiste nello svolgimento di un'equazione matriciale:

$$AX = I$$

Che si risolve come:

$$(A|I) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1\end{array}\right]$$

Calcolo della matrice inversa 2

Possiamo calcolare la matrice inversa anche a partire dalla nozione di determinante dopo aver parlato dei teoremi di Laplace.

Definizione: matrice aggiunta

Si dice **matrice aggiunta** di A la trasposta della matrice contentente i *cofattori* di A:

$$\text{Adj}(A)_{ij} = [A_{ij}]$$

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 2 & 5\\0 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 4\\2 & 2 & -8\\-1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

I teoremi di Laplace più la matrice adiacente ci permettono di determinare in modo esplicito la formula dell'inversa.

2.5 Teorema di Cramer

Subito dopo aver descritto un nuovo modo per calcolare la matrice inversa vediamo come può tornare utile nella risoluzione di sistemi lineari con n incognite e n equazioni.

$$A\overline{x} = \overline{b}$$
$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$
$$\overline{x} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)\cdot\overline{b}$$

$$\overline{x} = \left[x_1 x_2 \vdots x_n\right] = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}\left[b_1 b_2 \vdots b_n\right] = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}A_{11}b_1 & A_{12}b_2 & \dots & A_{1n}b_n\\A_{21}b_1 & A_{22}b_2 & \dots & A_{2n}b_n\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\A_{n1}b_1 & A_{n2}b_2 & \dots & A_{nn}b_n\end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)}(b_1 A2i + b_2 A_{2i} + \dots + b_n Ani)\\ &= \frac{1}{\det(A)}\det(\overline{a}_1|\overline{a}_2\dots|\overline{b}|\dots|\overline{a}_n)\end{aligned}$$

3 Spazi Vettoriali

Possiamo vedere i vettori da diversi punti di vista, tutti validi, ma con intenti applicativi differenti. Possiamo definire vettori una freccia nello spazio caratterizzata da un modulo, una direzione e da un verso; oppure possiamo intendere un vettore una lista ordinata di numeri.

Se in fisica non importa la posizione nello spazio di un vettore, in algebra lineare questo sarà quasi sempre attaccato all'origine del nostro sistema di riferimento.

Definizione: Spazio Vettoriale

Si definisce **spazio vettoriale** sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ un certo insieme V nel quale sono definite le seguenti operazioni:

1. somma $+$: $V \times V \longrightarrow V$.
2. prodotto $\cdot$: $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$.

Un gruppo $(V, \times)$ si dice *commutativo* (o Abeliano) se $v \times y = y \times x \quad \forall x, y \in V$

Proprietà della somma

1. commutativa: $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$
2. associativa: $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y \in V$
3. esistenza dell'elemento neutro: $\exists 0 \in V : 0 + x = x + 0, \quad \forall x, y \in V$
4. esistenza dell'opposto: $\forall x \in V \exists - x \in V : x + (-x) = (-x) + x = 0$

Proprietà del prodotto

1. (diciamo) distributiva: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
2. $(\lambda + \mu) \cdot \overline{x} = \lambda \overline{x} + \mu \overline{x}, \quad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(\lambda \cdot \mu)\overline{x} = \lambda(\mu \cdot \overline{x}), \quad \forall x, y \in V$
4. $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}, \quad \forall x, y \in V$

3.1 Sottospazi vettoriali

Definizione: sottospazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale reale, $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V se W è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V, quindi rispetto alle operazioni di *somma* e *prodotto*.

- Se ho 2 elementi $\overline{x}, \overline{y} \in W \quad \Rightarrow \quad \overline{x} + \overline{y} \in W$;
- Se ho 2 elementi $\overline{x} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda \overline{x} \in W$.

Somma di due sottospazi

La somma di due sottospazi è il più piccolo sottospazio contenente l'unione dei duee si esprime come l'insieme di tutti i vettori ottenuti dalla somma di vettori appartenenti ai sottospazi sommati.

$$W_1 + W_2 = \{\overline{x} \in V : \quad \overline{x} = \overline{y} + \overline{z} \qquad y \in W_1, \quad z \in W_2\}.$$

Quindi $W_1 + W_2$ contiene W_1 e contiene W_2 e $W_1 + W_2$ è sottospazio.

dimostrazione

Possiamo dire che è sottospazio se la somma tra ogni vettore ricade in esso così come il prodotto tra ogni vettore uno scalare.
Prendiamo due vettori $\overline{x}$ e $\overline{y}$ entrambi $\in W_1 + W_2$:

$$\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 \quad \overline{x}_1 \in W_1, \quad \overline{x}_2 \in W_2.$$

$$\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 \quad \overline{y}_1 \in W_1, \quad \overline{y}_2 \in W_2.$$

$$\begin{aligned}(+) \Rightarrow \quad \overline{x} + \overline{y} &= \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{y}_1 + \overline{y}_2 \\ &= (\overline{x}_1 + \overline{y}_1) + (\overline{x}_2 + \overline{y}_2) \quad \Rightarrow \quad \in W_1 + W_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cdot) \Rightarrow \quad \lambda(\overline{x} + \overline{y}) &= \lambda\overline{x}_1 + \lambda\overline{x}_2 + \lambda\overline{y}_1 + \lambda\overline{y}_2 \\ &= \lambda(\overline{x}_1 + \overline{y}_1) + \lambda(\overline{x}_2 + \overline{y}_2) \quad \Rightarrow \quad \in W_1 + W_2\end{aligned}$$

Definizione: Somma diretta

$(V, +, \cdot)$ spazio vettoriale, $W_1, W_2 \leq V$. Diciamo che la somma $W_1 + W_2$ è una somma diretta se ogni $\overline{x} \in W_1 + W_2$ si scrive in modo unico come $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ con $\overline{x}_1 \in W_1$ e $\overline{x}_2 \in W_2$.
La somma verrà scritta come:

$$W_1 \oplus W_2 = V.$$

Proposizione In V spazio vettoriale, $W_1, W_2 \leq V$. Allora:

$$W_1 \quad \text{e} \quad W_2 \quad \text{sono in somma diretta} \quad \Longleftrightarrow \quad W_1 \cap W_2 = \{\overline{0}\}.$$

dimostrazione

$$\Leftarrow \quad \text{se esiste un x con almeno 2 decomposizioni} \quad \Rightarrow \quad \exists \overline{z} \in W_1 \cap W_2, \quad \overline{z} \neq \overline{0}.$$

Prendo allora tale $\overline{x}$ che si scompone in due coordinate x e in due y:

$$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = \overline{x} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2, \quad \overline{x}_1 \neq \overline{x}_2, \quad \overline{y}_1 \neq \overline{y}_2.$$

$$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = \overline{y}_1 + \overline{y}_2.$$

$$\overline{y}_1 - \overline{x}_1 = \overline{x}_2 - \overline{y}_2 \quad = \overline{z}.$$

Il vettore $\overline{z}$ è contenuto sia in W_1 sia in W_2, quindi $W_1 \cap W_2 \neq \overline{0}$.
Contronominale: se $W_1 \cap W_2 \neq \{\overline{0}\}$ $\Rightarrow$ non ho unicità di scrittura

$$\Rightarrow \quad \text{Se} \quad \overline{z} \in W_1 \cap W_2, \quad \overline{z} \neq 0.$$

$$x \in W_1 + W_2.$$

$$\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{z} + \overline{x}_2 - \overline{z}.$$

■

3.2 Combinazione lineare

Definizione: combinazione lineare

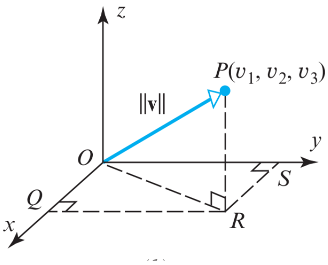
Dato V spazio vettoriale, $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n \in V$, una composizione lineare di $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ è una struttura del tipo $\lambda_1\overline{v}_1, \ldots, \lambda_n\overline{v}_n$ con ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ogni sottospazio possiamo dire essere generato da combinazioni lineari dei vettori che lo generano. Per questo

4 Prodotto scalare

Prima di parlare di prodotto scalare è necessario introdurre due concetti fondamentali:

1. **Lunghezza** di un vettore che d'ora in poi chiameremo *norma*;
2. **Angolo** tra due vettori.

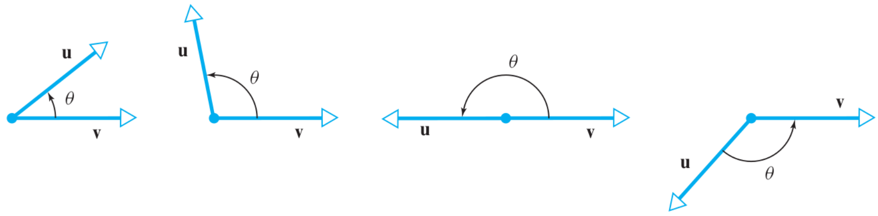


La norma del vettore è definita dalla formula:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Vedremo come saranno di estrema importanza i vettori di norma 1, o vettori unitari. Per esempio in V_3 i vettori unitari sono i, j, k. In generale per *normalizzare* un vettore basta dividerlo per la sua lunghezza, quindi per la sua norma:

$$u = \frac{v}{\|v\|}.$$



Per quanto riguarda l'angolo tra due vettori invece prenderemo in considerazione solo la parte compresa tra 0 e π.

Ora che sappiamo cosa sono norma di un vettore e angolo tra vettori possiamo parlare di **prodotto scalare**. E' infatti necessario introdurre un'operazione moltiplicativa "utile" per vettori in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.

Definizione: prodotto scalare

Il prodotto scalare (in V_3) $x \cdot y$ di due vettori x e y in V_3 è la funzione:

$$\cdot : \quad V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

così definita:

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \hat{xy}.$$

Dalla definizione troviamo altre due espressioni di norma e angolo:

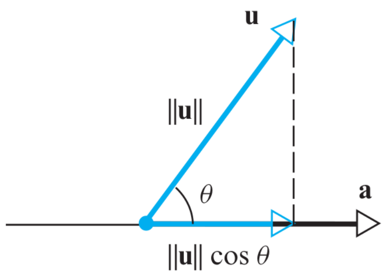
$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} \qquad \cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

4.1 Proprietà del prodotto scalare

- $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in V_3$;
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
- $(\lambda x) \cdot z = \lambda x \cdot z = x \cdot (\lambda z)$;
- $x \cdot x \geq 0 \qquad = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

4.2 Interpretazione geometrica del prodotto scalare

Il prodotto scalare $\|u\|\|a\|\cos\theta$ non è altro che il prodotto della lunghezza di uno dei due vettori ($\|u\|$) per la proiezione ortogonale con segno dell'altro sul primo($\|a\|\cos\theta$).



Teorema: vettore proiezione ortogonale Dati due vettori x e y non nulli il vettore proiezione ortogonale di y su x è:

$$p = \frac{x \cdot y}{\|x\|^2} x.$$

dimostrazione

Il mio obiettivo è quello di scrivere la proiezione di u su a in questa forma:

$$p = * \frac{a}{\|a\|}.$$

dove "*" indica la lunghezza della proiezione. Guardando la figura in alto sappiamo che la proiezione $\|p\| = \|u\|\cos\theta$. Quindi:

$$p = \|u\|\cos\theta \frac{a}{\|a\|}.$$

Per elimiare il coseno di theta risaliamo alla formula di prodotto scalare:

$$u \cdot a = \|u\|\|a\|\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \|u\|\cos\theta = \frac{u \cdot a}{\|a\|}.$$

Quindi:

$$p = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a.$$

5 Prodotto vettoriale

Definizione: prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale (in V_3) $x \cdot y$ di due vettori x e y in V_3 è la funzione:

$$\wedge : \quad V_3 \times V_3, \quad \longrightarrow \quad (x, y) \mapsto x \wedge y.$$

così definita:

$$x \wedge y = \|x \wedge y\| \|x\| \|y\| \sin \hat{xy}.$$

Il verso del vettore risultante dal prodotto vettoriale ha il verso che segue la *regola della mano destra*.

6 Esercizi rilevanti

Dimostrazione per assurdo

Dimostrazione per induzione