Analisi II - 2020/21 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 14 febbraio 2022

Esercizio 1. [4pt] Sia dato il campo scalare

$$f(x,y) = \sqrt{1-(x-2)^2-(y-1)^2} - \log y$$

(a) Determinare e disegnare il dominio di f, specificando se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, compatto. Se ne determini la frontiera.

(b) Discutere la differenziabilità di f nel punto $(3/2, 1)$; scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(3/2, 1, \sqrt{3}/2)$.

Soluzione. (a) Il dominio di f è l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \setminus \{(2,0)\}$$

la cui frontiera è la circonferenza di centro $(2,1)$ e raggio 1. L'insieme D è limitato ma non è né aperto né chiuso in quanto i punti della circonferenza suddetta, escluso il punto $(2,0)$ appartengono a D. Non essendo chiuso, D non è neanche compatto.
(b) f ammette derivate parziali nei punti interni di D date da

$$f_x(x,y) = \frac{2-x}{\sqrt{1-(x-2)^2-(y-1)^2}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{1-y}{\sqrt{1-(x-2)^2-(y-1)^2}} - \frac{1}{y}.$$

Queste sono continue nell'interno di D e pertanto anche in un intorno di $(3/2, 1)$, dunque f è differenziabile in tale punto. Poiché

$$f\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_x\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f_y\left(\frac{3}{2}, 1\right) = -1,$$

l'equazione del piano tangente richiesto è

$$z - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{2}\right) - y + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}x - y - z + 1 = 0.$$

Esercizio 2. [3 pt] Calcolare, o dimostrare che non esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{x^2y}}{\sqrt{x^2+y^4}}.$$

Soluzione. Osserviamo che la funzione $f(x,y) = \frac{1-e^{x^2y}}{\sqrt{x^2+y^4}}$ è identicamente nulla lungo gli assi, quindi se il limite esiste deve valere 0. Inoltre, poiché $1-e^{x^2y} \sim -x^2y$ per $(x,y) \to (0,0)$, studiare il limite dato equivale a studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^4}}.$$

Risulta che

$$\left|-\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^4}}\right| = \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^4}} \leq \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2}} = |x|\cdot|y| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \to 0, \qquad (x,y)\to(0,0).$$

Pertanto, per il teorema del confronto, il limite dato vale 0.

Esercizio 3. [3 pt] Siano $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x,y,z) = (x^2z, \sqrt{-xy})$ e sia $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1 tale che

$$J_g(3, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver determinato il dominio della funzione $g \circ f$, se ne calcoli la matrice Jacobiana nel punto $(1, -2, 3)$.
Soluzione. Osserviamo che il dominio di $g \circ f$ coincide con quello di f ed è dato dall'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy \leq 0\}.$$

Inoltre la funzione f è di classe C^1 sull'interno di D. Infine, si ha che $f(1, -2, 3) = (3, \sqrt{2})$. Pertanto, per la regola della catena, risulta $J_{g\circ f}(1, -2, 3) = J_g(3, \sqrt{2})J_f(1, -2, 3)$. Poiché si ha

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz & 0 & x^2 \\ -\frac{y}{2\sqrt{-xy}} & -\frac{x}{2\sqrt{-xy}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(1, -2, 3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

allora risulta

$$J_{g\circ f}(1, -2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. [4 pt] Si determinino i punti critici del campo scalare

$$f(x, y) = (x^2 + x - 2)(y + 1)e^{-y}$$

e se ne studi la natura. Ci sono punti di massimo assoluto? (Giustificare la risposta)

Soluzione. Il campo scalare f è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$. Si ha:

$$f_x(x, y) = (2x + 1)(y + 1)e^{-y}, \qquad f_y(x, y) = -(x^2 + x - 2)ye^{-y}.$$

Pertanto, i punti critici di f si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (2x + 1)(y + 1) = 0 \\ (x^2 + x - 2)y = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono i punti $A = (-1/2, 0), B = (1, -1), C = (-2, -1)$. Risulta

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y + 1)e^{-y} & -(2x + 1)ye^{-y} \\ -(2x + 1)ye^{-y} & (x^2 + x - 2)(y - 1)e^{-y} \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$H_f(-1/2, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, dunque A è un punto di minimo locale.

$$H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 3e \\ 3e & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a $-9e^2 < 0$. Pertanto B è un punto di sella. Infine,

$$H_f(-2, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -3e \\ -3e & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante ancora $-9e^2$. Dunque, anche C è un punto di sella.
La funzione è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$ (quindi, in particolare, di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$); i punti di estremo vanno quindi ricercati tra i punti critici (teorema di Fermat) dunque non essendoci punti di massimo locale non vi sono nemmeno quelli di massimo assoluto.

Esercizio 5. [4 pt] Si consideri la superficie parametrica $r(u, v) = (u^2 + v^2, u - v, e^u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Si verifichi che r è semplice;

(b) Si dimostri che r è una superficie regolare e se ne determini il versore normale al sostegno nel punto di coordinate $(4, -2, 1)$.

Soluzione. (a) Dati $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\mathbb{R}^2$ tali che $r(u_1,v_1)=r(u_2,v_2)$, ovvero

$$\begin{cases} u_1^2+v_1^2=u_2^2+v_2^2 \\ u_1-v_1=u_2-v_2 \\ e^{u_1}=e^{u_2} \end{cases},$$

dalla terza relazione si ottiene che $u_1=u_2$ per l'iniettività della funzione esponenziale. Sostituendo nella seconda equazione si ottiene $v_1=v_2$, pertanto $(u_1,v_1)=(u_2,v_2)$ e quindi r è semplice.
(b) Osserviamo che r è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$ (in quanto le componenti sono di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$) e che

$$J_r(u,v)=\begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 1 & -1 \\ e^u & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2 in ogni punto. Pertanto r è una superficie regolare. Osservando che $r(0,2)=(4,-2,1)$, risulta che

$$r_u\wedge r_v(0,2)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(1,4,-4).$$

Pertanto, il versore normale richiesto è

$$N(0,2)=\frac{1}{\sqrt{33}}(1,4,-4).$$

Esercizio 6. [4 pt] Calcolare

$$\iint_A x^2\log y\,dx\,dy,$$

con

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq\frac{1}{\sqrt{2}},\ x\leq y\leq\frac{1}{x}\right\}.$$

Soluzione. L'insieme A è la regione compresa tra l'iperbole di equazione $y=1/x$, la retta $x=1/\sqrt{2}$ e la bisettrice del primo e del terzo quadrante. Si tratta di un insieme y-semplice, precisamente

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1, x\leq y\leq\frac{1}{x}\right\}.$$

Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned}\iint_A x^2\log y\,dx\,dy &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x^2\int_x^{\frac{1}{x}}\log y\,dy=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 x^2\left[y\log y-y\right]_x^{\frac{1}{x}} \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left[-(x+x^3)\log x-x+x^3\right]\,dx \\ &= \left[-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\log x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(-\frac{x}{2}+\frac{5x^3}{4}\right)\,dx=-\frac{5}{32}\log 2+\frac{7}{64}.\end{aligned}$$

Esercizio 7. [4 pt] Calcolare la massa di un solido con densità di massa $\mu(x,y,z)=|x|$ che occupa la regione

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 1+2y\}.$$

Soluzione. La massa del solido è data per definizione dall'integrale triplo

$$\iiint_A |x|\,dxdydz.$$

Quest'ultimo si può calcolare integrando per fili. Si ha:

$$\iiint_A |x|\, dxdydz = \iint_C |x| \left(\int_{x^2+y^2}^{1+2y} dz \right) dxdy = \iint_C |x|(1+2y-x^2-y^2)\, dxdy,$$

dove

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1+2y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2 \leq 2\}.$$

Utilizzando il cambiamento di coordinate $x = \rho\cos\theta, y = 1+\rho\sin\theta$, si ottiene

$$\iiint_A |x|\, dxdydz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \rho^2 |\cos\theta|(2-\rho^2)\, d\theta d\rho = \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2-\rho^4)\, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} |\cos\theta|\, d\theta = \frac{32}{15}\sqrt{2}.$$

Esercizio 8. [4 pt] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie seguente:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\cos(n^\alpha) - 1\right),$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Osserviamo prima di tutto che per $\alpha \geq 0$, la successione $a_n = \cos(n^\alpha) - 1$ non tende a 0 per $n \to \infty$, dunque la serie non converge neanche semplicemente. Per $\alpha < 0$ la condizione necessaria per la convergenza è invece soddisfatta. Per quanto riguarda la convergenza assoluta osserviamo che

$$|(-1)^n \cos(n^\alpha) - 1| = 1 - \cos(n^\alpha) \sim \frac{1}{2} n^{2\alpha} = \frac{1}{2n^{-2\alpha}}.$$

Per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, risulta quindi che la serie data converge assolutamente se e solo se $\alpha < -1/2$. Per quanto riguarda la convergenza semplice, si osserva che per $\alpha < 0$, la serie è una serie di Leibniz in quanto $0 < n^\alpha < 1$ per ogni n e la funzione $f(x) = \cos x$ è decrescente nell'intervallo $(0,1)$, pertanto la serie converge semplicemente per ogni $\alpha < 0$. In conclusione la serie converge semplicemente per $\alpha < 0$ e assolutamente per $\alpha < -\frac{1}{2}$.