

Tutorato 6

Metodi Matematici della Meccanica Classica - 5 maggio 2025

1. Si consideri la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{1 + q^2} \right) \dot{q}^2$$

- (a) Si determini l'Hamiltoniana H associata a L .
- (b) Si calcolino le equazioni di Hamilton.
- (c) Considerata la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{p}{q} \sqrt{\frac{q^2}{p^2} + (1 + q^2)} \\ P = \sqrt{\frac{q^2}{p^2} + (1 + q^2)} \end{cases}$$

si determini se è canonica.

- (d) Si determini l'Hamiltoniana K in funzione delle nuove coordinate (Q, P) .
- (e) Si usi il risultato del punto precedente per trovare la soluzione alle equazioni di Hamilton con dati iniziali $(q(0), \dot{q}(0)) = (1, 1)$.

2. Nello spazio delle fasi $T^*\mathbb{R}$ con coordinate (q, p) si considerino le trasformazioni

$$\begin{cases} q_\epsilon = q_0 + \frac{1}{2}\alpha\epsilon^2 + \alpha\epsilon p_0 \\ p_\epsilon = p_0 - \epsilon \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che queste trasformazioni formano un flusso e sono canoniche per ogni ϵ .
- (b) Scrivere il campo Hamiltoniano che genera il flusso
- (c) Determinare la corrispondente Hamiltoniana