

Relazione di laboratorio - Calorimetro delle mescolanze

Misura del calore specifico di un corpo metallico e della massa equivalente di un calorimetro

Federico Cesari

1096759

Gruppo 5

corso A

Università degli studi di Torino, Torino

5 luglio 2024

Indice

1	Prima presa dati	3
1.1	Cilindro metallico	3
1.1.1	Fit lineare T_1 e T_{eq}	4
1.1.2	Fit lineare T_{eq}	5
1.2	Massa d'acqua	6
1.2.1	Fit lineare T'_{eq}	7
1.3	Calcolo massa equivalente e calore specifico	8
1.4	Analisi errori	9
2	Seconda presa dati	10
2.1	Cilindro metallico	10
2.1.1	Fit lineare T_{eq}	10
2.2	Massa d'acqua	12
2.2.1	Fit lineare T'_{eq}	12
2.3	Calcolo massa equivalente e calore specifico	13
3	Confronto masse equivalenti e calori specifici	15
3.1	Test Z (m_e)	15
3.2	Test Z (c_x)	15
3.3	Test Z con calore specifico teorico	15
4	Errori sistematici	16
4.1	Influenza agitatore	16
4.2	Calore disperso	16
5	Appendice	17
5.1	Calcoli e approssimazioni ricorrenti	17
5.2	Calcolo T_1 e T_{eq} con covarianze	17
5.3	Errori associati a c_x e m_e	17

Scopo dell'esperienza e premesse teoriche

L'esperienza ha come obiettivi la misura del calore specifico c_x di un corpo metallico (un cilindro di acciaio) tramite l'utilizzo di un calorimetro e la taratura di quest'ultimo determinata dalla sua massa equivalente m_e .

Il principio zero della termodinamica afferma che tra due corpi a temperature differenti posti a contatto avviene uno scambio di calore che ne fa variare le temperature portandoli ad una temperatura di equilibrio. Inoltre la quantità di calore ceduto dal corpo caldo è uguale al calore assorbito da quello freddo:

$$|Q_{\text{ced}}| = |Q_{\text{ass}}|$$

con il calore espresso come $Q = mc\Delta T$: prodotto di massa del corpo, il suo calore specifico e la sua variazione di temperatura.

Nel nostro caso il calore è ceduto dal sistema del calorimetro (calorimetro + acqua) con temperatura T_1 del sistema acqua (m_a) + calorimetro e temperatura T_2 del corpo (m_c). Si può riscrivere la prima equazione come:

$$\sum m_{\text{cal}} c_{\text{cal}} (T_{\text{eq}} - T_1) + m_a c_a (T_{\text{eq}} - T_1) = m_c c_x (T_2 - T_{\text{eq}}) \quad (1)$$

Durante l'esperienza verrà calcolata la massa equivalente m_e , massa d'acqua che assorbe lo stesso calore che viene sottratto dal sistema del calorimetro. Per farlo si versa nel calorimetro una massa m'_a d'acqua calda (di cui è noto il calore specifico) e trovando temperature iniziali e di equilibrio, riscrivendo l'equilibrio energetico, si può determinare m_e

$$m'_a c_a (T'_2 - T'_{\text{eq}}) = (m_a + m_e) (T_{\text{eq}} - T'_1)$$

$$m_e c_a (T'_2 - T'_{\text{eq}}) + m_a c_a (T'_{\text{eq}} - T'_1) = m_a c_a (T_{\text{eq}} - T'_1)$$

dove m_e è l'unica incognita.

Trovata la massa equivalente è possibile ricavare il calore specifico c_x del cilindro metallico sostituendo $\sum m_{\text{cal}} c_{\text{cal}}$ con $m_e c_a$ nella (1):

$$m_e c_a (T_{\text{eq}} - T_1) + m_a c_a (T_{\text{eq}} - T_1) = m_c c_x (T_2 - T_{\text{eq}})$$

Strumentazione

strumento	sensibilità	utilizzo
Cronometro digitale	0.01 s	misura tempo presa dati
Termometro a mercurio (1)	0.01 °C	misura temperatura acqua nel calorimetro
Termometro a mercurio (2)	1 °C	misura temperatura corpo nel bollitore
Termometro a mercurio (3)	1 °C	misura temperatura ambiente
Termometro digitale	0.01 °C	misura temperatura acqua calda nella borraccia (m'_a)
bilancia elettronica	0.0001 kg	misura masse

Tabella 1: Misure preliminari (masse)

E' stato utilizzato un bollitore per scaldare l'acqua (e il corpo a bagnomaria) e ovviamente un calorimetro, composto di un vaso metallico interno che contiene l'acqua e un recipiente esterno isolante (nella pratica non riesce ad ottenere la perfetta adiabaticità del sistema). Alcuni contenitori come un becher e una caraffa sono stati utilizzati come tara per alcune misurazioni.

1 Prima presa dati

1.1 Cilindro metallico

Per prima cosa si procede all'acquisizione di alcune misure preliminari. Alcune di queste saranno già utilizzabili per il calcolo finale del calore specifico del cilindro metallico, altre invece verranno utilizzate per ricavare altri dati utili. Pesiamo sulla bilancia il vaso del calorimetro, il vaso con all'interno circa 2.6kg d'acqua, il cilindro metallico e il becher (nel caso sia necessario tarare qualche misura successivamente).

L'acqua versata all'interno del vaso è stata diluita con acqua fredda fino a farla arrivare ad una temperatura di circa 14°C , in modo da rientrare nella scala di lettura del termometro fissato nel calorimetro ($12 - 24^{\circ}\text{C}$).

Una volta versata, viene registrata la temperatura dell'acqua a intervalli di un minuto per quasi quindici minuti.

Si immerge il cilindro metallico in un bollitore per scaldarlo fino a una temperatura di circa 90°C . Subito prima dell'immersione del cilindro nel vaso pieno d'acqua si acquisiscono le temperature dell'acqua nel vaso, del corpo e dell'ambiente così da correggere eventuali dispersioni avvenute nell'attesa che il cilindro si scaldasse.

Oggetto	$(m \pm 0.0001)\text{kg}$
Massa vaso	1.3775
Massa vaso + acqua	3.9825
Massa corpo m_c	0.3866
Massa becher	0.2246

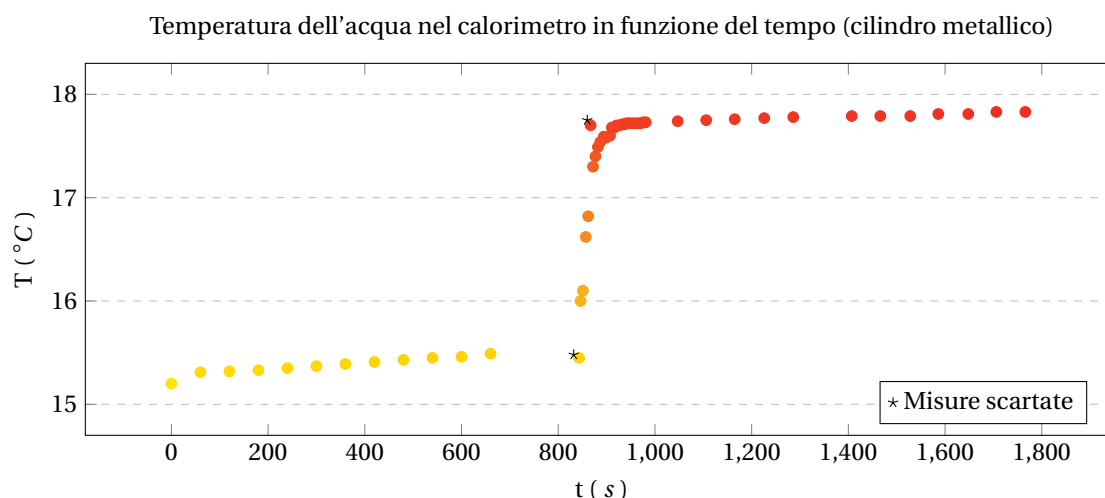
Tabella 2: Misure preliminari (masse)

Oggetto	$(T)^{\circ}\text{C}$
Temp. cilindro metallico T_2	86 ± 1
Temp. acqua	15.20 ± 0.01
Temp. ambiente	19 ± 1

Tabella 3: Misure preliminari (temperature)

Dalle seguenti misure si ricava la massa d'acqua m_a presente nel calorimetro come differenza della massa del vaso più l'acqua e la massa del vaso: $(m_a = 2.6050 \pm 0.0002)\text{kg}^1$.

Immergo il cilindro metallico nell'acqua del calorimetro si acquisisce la temperatura dell'acqua a intervalli di 5s fino a che questa non raggiunge una soglia di equilibrio. Una volta raggiunta la temperatura di equilibrio si acquisisce nuovamente a intervalli di un minuto.



Analizzando la presa dati complessiva sono evidenti due sbavature, dovute a un errore di battitura o di lettura sul termometro, che vado a scartare. E' chiaro che la prima imprecisione (temperatura misurata nell'istante di immersione del cilindro) è sicuramente sbagliata: la temperatura dell'acqua stava aumentando gradualmente e non è fisicamente spiegabile un crollo simile. Anche la seconda esce completamente fuori dall'andamento della temperatura in quegli istanti ed è quindi ragionevole scartarla.

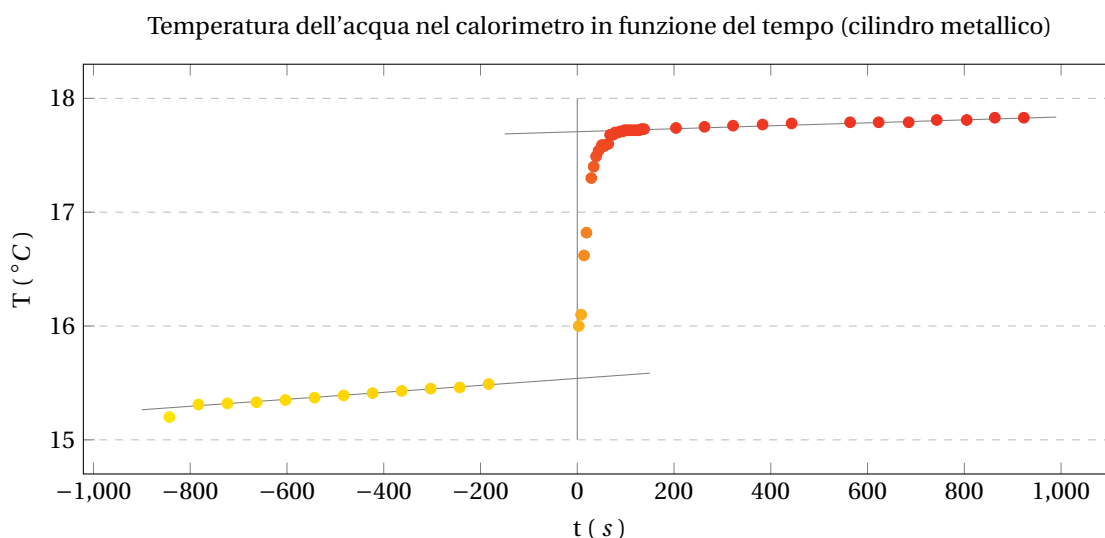
Avendo dovuto scartare la temperatura all'istante di immersione si dovrà ricavare T_1 temperatura iniziale dell'acqua tramite un fit lineare delle prime misure; nello stesso modo si determinerà T_{eq} temperatura di equilibrio.

1.1.1 Fit lineare T_1 e T_{eq}

Per ricavare T_{eq} si traccia la retta di best fit delle temperature finali e la si interseca con la retta $x = t_i$ tempo di immersione del corpo. Si andrà quindi a simulare un "innalzamento istantaneo" della temperatura.

Risulta molto più semplice traslare il grafico, come riportato sotto, portando $t_i = 843s$ sullo 0 ($t' = t - 843s$) così che le due temperature trovate abbiano come errore quello sull'intercetta b delle rispettive rette di best fit. In appendice viene esposto un secondo metodo che non necessita della traslazione del grafico e in cui entra in gioco la covarianza (5.2).

Per prima cosa troviamo T_1 :



T_1	
$(t \pm 0.01)s$	$(T \pm 0.01)^\circ C$
-783	15.31
-723	15.32
-663	15.33
-603	15.35
-543	15.37
-483	15.39
-423	15.41
-363	15.43
-303	15.45
-243	15.46
-183	15.49

Per trovare l'equazione della retta si utilizza il metodo dei minimi quadrati. L'errore relativo sul tempo è di due ordini di grandezza minore rispetto all'errore relativo sulla temperatura quindi quest'ultima sarà la variabile y , il tempo, che abbiamo appurato avere errore trascurabile rispetto a quello sulla temperatura, la x . Con il metodo dei minimi quadrati si trovano i parametri a e b della retta:

$$y = a + bx$$

$$a = (15.28 \pm 0.01)^\circ C \quad b = (0.00031 \pm 0.00002) \frac{^\circ C}{s}$$

Per verificare che la retta trovata si adatti bene ai dati è bene effettuare un test del χ^2 .

Ipotesi nulla La retta $y = a + bx$ descrive bene l'andamento dei dati osservati sperimentalmente.

valori per test χ^2		
Livello di significatività	α	0.05 ²
Gradi di libertà	n	(11 - 2) = 9
Valore di χ^2	χ^2	2.61
χ^2 sospetto	χ^2_{sos}	3.32
χ^2 critico	χ^2_{cri}	16.91

Tabella 4: χ^2 T_1

Il valore χ^2 rilevato è minore di quello sospetto: un piccolo valore di χ^2 è indice di barre d'errore troppo grandi o di una forte vicinanza tra valori sperimentali e valori teorici tuttavia è impossibile aver sovrastimato l'errore sulle misure in quanto questo corrisponde alla sensibilità del termometro; piuttosto il risultato del test è spiegabile da una presa dati molto precisa. A corroborare l'ipotesi di una presa dati molto precisa si rileva un coefficiente di correlazione lineare $r = 0.997$. Concludo quindi accettando l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5%.

1.1.2 Fit lineare T_{eq}

Per trovare l'equazione della retta si utilizza nuovamente il metodo dei minimi quadrati con il quale si ottengono i parametri a' e b' della retta:

$$y = a' + b'x$$

$$a' = (17.71 \pm 0.02)^\circ\text{C} \quad b' = (0.00013 \pm 0.00003) \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}}$$

Per verificare che la retta trovata si adatti bene ai dati è bene effettuare un test del χ^2 .

T_{eq}	
$(t \pm 0.01)\text{s}$	$(T \pm 0.01)^\circ\text{C}$
564	17.78
623	17.79
685	17.79
743	17.79
805	17.81
863	17.81
923	17.83

Ipotesi nulla La retta $y = a' + b'x$ descrive bene l'andamento dei dati osservati sperimentalmente.

valori per test χ^2		
Livello di significatività	α	0.05 ³
Gradi di libertà	n	(7 - 2) = 5
Valore di χ^2	χ^2	2.24
χ^2 sospetto	χ^2_{sos}	1.15
χ^2 critico	χ^2_{cri}	11.07

Tabella 5: χ^2 T_{eq}

Il valore χ^2 rilevato è compreso tra quello sospetto e quello critico quindi si conclude che, con livello di significatività del 5%, la retta trovata descrive bene l'andamento dei dati.

T_1 e T_{eq}

Appurato che entrambe le rette possono essere buone approssimazioni dei miei dati, avendo traslato il grafico della temperatura portando il tempo di immersione sullo 0, le due temperature saranno semplicemente i due termini noti delle due rette:

$$T_1 = (15.28 \pm 0.01)^\circ\text{C}$$

$$T_{\text{eq}} = (17.71 \pm 0.02)^\circ\text{C}$$

1.2 Massa d'acqua

Prima di tutto alcune misure preliminari: vengono pesate nuovamente tutte le masse (per eventuali residui di acqua rimasti sul cilindro o nei contenitori utilizzati per pesare) e misurate le temperature dell'acqua nel calorimetro e dell'acqua riscaldata nel bollitore e poi messa nella bottiglia.

Oggetto	$(m \pm 0.0001)\text{kg}$
Massa becher	0.1046
Massa becher + corpo	0.4962
Massa corpo m_c	0.3866
Massa bottiglia	0.2544
Massa bottiglia + acqua	0.3660

Tabella 6: Misure preliminari (masse)

Oggetto	$(T \text{ } ^\circ\text{C})$
Temp. acqua nella bottiglia T'_2	82 ± 0.1
Temp. acqua	17.90 ± 0.01
Temp. ambiente	19 ± 1

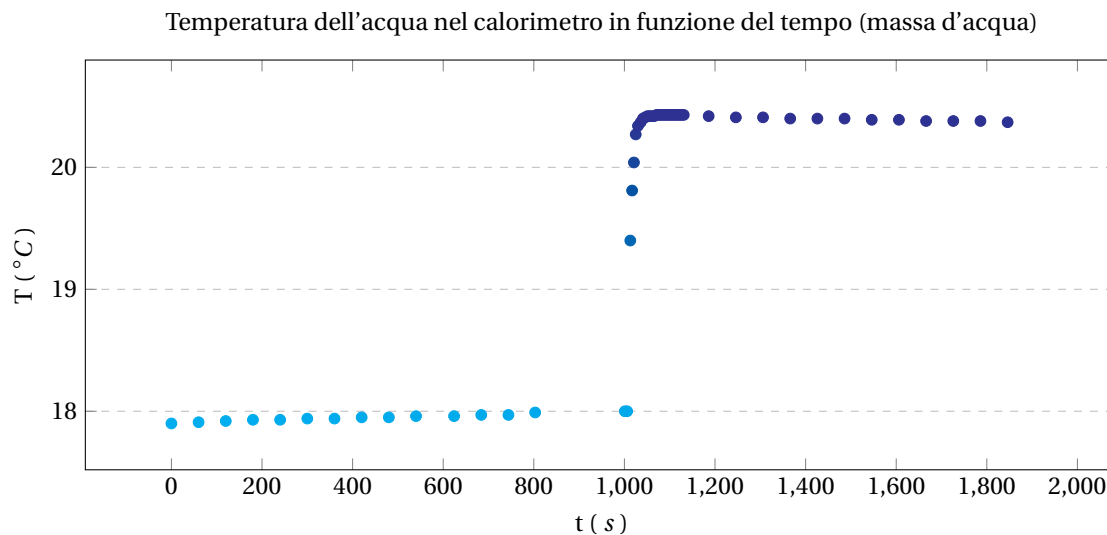
Tabella 7: Misure preliminari (temperature)

Nel momento dell'estrazione del corpo dal calorimetro parte dell'acqua in quest'ultimo potrebbe essere rimasta attaccata al corpo. Per ricavare la massa d'acqua rimasta nel calorimetro pesiamo la massa del corpo bagnato in un becher; si ricava la massa d'acqua $m_{a(2)}$ presente nel calorimetro come:

$$m_{a(2)} = m_a - (m_{\text{becher+corpo}} - m_{\text{becher}} - m_c) \\ = (2.6000 \pm 0.0002)\text{kg}$$

Si ricava invece la massa d'acqua da versare togliendo la tara utilizzata (bottiglia) alla massa bottiglia più acqua:

$$m'_a = (0.1116 \pm 0.0002)\text{kg}$$

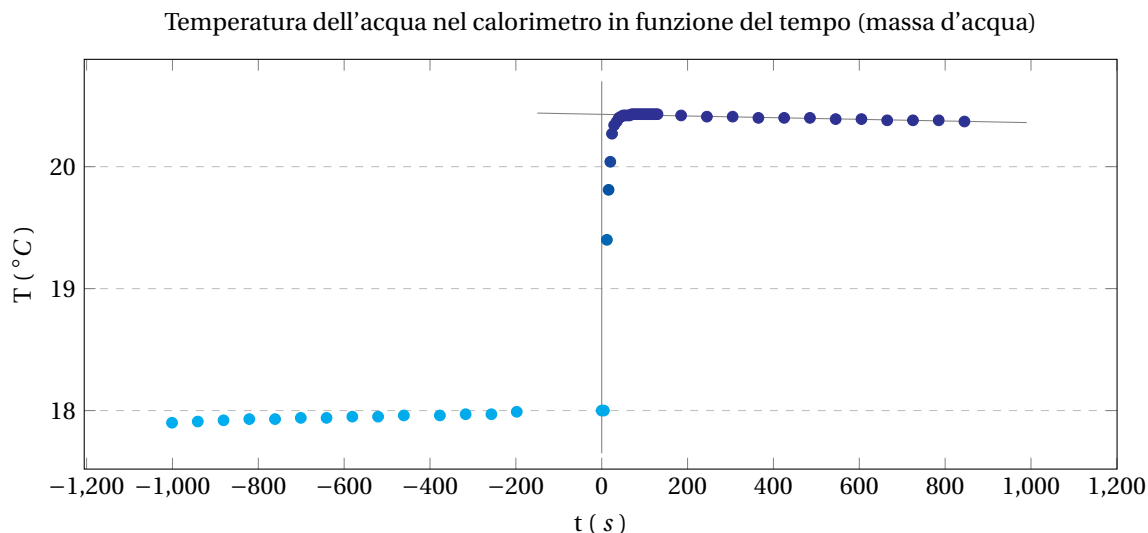


Come per il cilindro metallico viene rilevata la temperatura dell'acqua nel calorimetro ogni minuto fino all'istante di versamento della massa d'acqua m'_a riscaldata nel bollitore. Dal versamento fino alla stabilizzazione della temperatura le misure sono effettuate a intervalli di 5 secondi e poi nuovamente di un minuto.

1.2.1 Fit lineare T'_{eq}

In questo caso è nota la temperatura T'_1 corrispondente alla temperatura all'istante di versamento della massa d'acqua e vale $T'_1 = (18.00 \pm 0.01)^\circ C$.

Invece per trovare T'_{eq} si procede al fit lineare delle ultime misure.



T'_{eq}	
$(t \pm 0.01)s$	$(T \pm 0.01)^\circ C$
245	20.41
305	20.41
365	20.40
425	20.40
485	20.40
545	20.39
605	20.39
665	20.38
725	20.38
785	20.38
845	20.37

Con il metodo dei minimi quadrati si trovano i parametri a e b della retta:

$$y = a + bx$$

$$a = (20.43 \pm 0.01)^\circ C \quad b = (-0.00007 \pm 0.00001) \frac{^\circ C}{s}$$

Per verificare che la retta trovata si adatti bene ai dati è bene effettuare un test del χ^2 .

Ipotesi nulla La retta $y = a + bx$ descrive bene l'andamento dei dati osservati sperimentalmente.

valori per test χ^2		
Livello di significatività	α	0.05
Gradi di libertà	n	$(11 - 2) = 9$
Valore di χ^2	χ^2	0.99
χ^2 sospetto	χ^2_{sos}	3.32
χ^2 critico	χ^2_{cri}	16.92

Tabella 8: χ^2 T'_{eq}

Il valore χ^2 rilevato è sospetto, tuttavia, come per i fit precedenti, l'unica spiegazione che si può dare a tale risultato è una presa dati molto precisa; non si può pensare a barre d'errore troppo grandi poiché l'errore

sulla temperatura è la sensibilità dello strumento. Accetto l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5%.

T'_1 e T'_{eq}

Conclusa l'analisi delle misure si ha T'_1 , di cui si ha la misura diretta, e T'_{eq}

$$T'_1 = (18.00 \pm 0.01)^\circ C$$

$$T_{eq} = (20.43 \pm 0.01)^\circ C$$

1.3 Calcolo massa equivalente e calore specifico

Dalle misure appena concluse è possibile trovare il valore della massa equivalente:

$$m_e = \frac{m'_a (T'_2 - T'_{eq})}{T'_{eq} - T'_1} - m_{a(2)} \pm \sigma_{m_e} = \frac{m'_a \Delta T'_{2e}}{\Delta T'_{e1}} - m_{a(2)} \pm \sigma_{m_e}^4$$

	misure	errore assoluto	errore relativo	u.m.
$\Delta T'_{2e}$	61.6	0.1	0.002	$^\circ C$
$\Delta T'_{e1}$	2.43	0.01	0.01	$^\circ C$
m'_a	0.1116	0.0002	0.002	kg
$m_{a(2)}$	2.6000	0.0002	0.0001	kg

Tabella 9: misure per massa equivalente

$$m_e = (0.22 \pm 0.02) \text{ kg}$$

Ora si hanno tutti i dati per calcolare il calore specifico del corpo c_x :

$$c_x = \frac{(m_e + m_a) c_a (T_e - T_1)}{m_c (T_2 - T_e)} \pm \sigma_{c_x} = \frac{M c_a \Delta T_{e1}}{m_c \Delta T_{2e}} \pm \sigma_{c_x}$$

con $c_a = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ C}$

	misure	errore assoluto	errore relativo	u.m.
ΔT_{e1}	68	1	0.02	$^\circ C$
ΔT_{2e}	2.17	0.03	0.01	$^\circ C$
M	2.83	0.02	0.005	kg

Tabella 10: misure per calore specifico

$$c_x = (0.233 \pm 0.005) \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ C}$$

1.4 Analisi errori

Visti i risultati ottenuti è possibile ripetere l'esperienza modificando alcuni parametri iniziali così da ottenere un calore specifico e una massa equivalente più accurati. Per fare ciò si vanno a confrontare gli errori relativi dei fattori delle due espressioni e si individua quale di questi è il maggiore (e quindi è più influente nell'aumento delle incertezze).

⁴Lo sviluppo dell'errore di m_e e di c_x è riportato in appendice (5.3)

Tra i fattori di m_e si nota subito che l'errore relativo di $\Delta T'_{e1} = T'_{eq} - T'_1$ è di un ordine di grandezza superiore agli altri; invece tra i fattori di c_x sia $\Delta T_{2e} = T_2 - T_{eq}$ sia $\Delta T_{e1} = T_{eq} - T_1$ risultano di un ordine di grandezza superiori agli altri.

Anche aumentare m_a massa d'acqua iniziale aiuterebbe anche se in misura minore.

Per far sì che nella prossima presa dati questi errori relativi diminuiscano decidiamo di aumentare i delta in questo modo:

1. Diminuire la temperatura iniziale cominciando con T_1 e T'_1 minori;
2. Aumentare la temperatura finale cominciando con la temperatura del corpo T_2 maggiore;
3. Aumentare la massa d'acqua nel calorimetro così che M risulti maggiore.

2 Seconda presa dati

2.1 Cilindro metallico

Oggetto	$(m \pm 0.0001)\text{kg}$
Massa vaso	1.3760
Massa vaso + acqua	4.1790
Massa corpo m_c	0.3866
Massa becher	0.2290

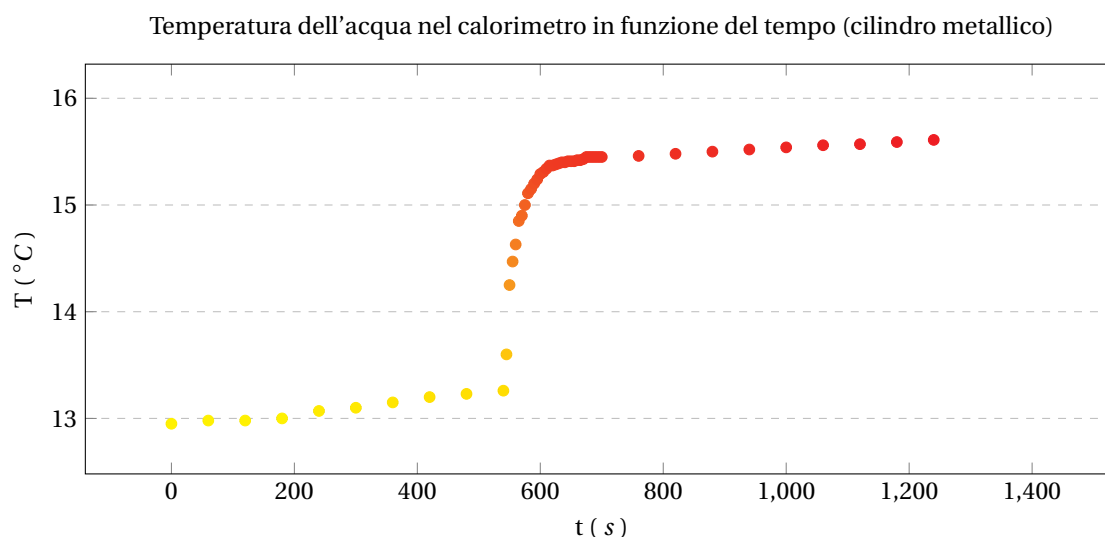
Tabella 11: Misure preliminari (masse)

Oggetto	$(T) ^\circ\text{C}$
Temp. cilindro metallico T_2	94 ± 1
Temp. acqua	12.95 ± 0.01
Temp. ambiente	19 ± 1

Tabella 12: Misure preliminari (temperature)

Dalle seguenti misure si ricava la massa d'acqua m_a presente nel calorimetro come differenza della massa del vaso più l'acqua e la massa del vaso: ($m_a = 2.8030 \pm 0.0002$)kg.

Immerso il cilindro metallico nell'acqua del calorimetro si acquisisce la temperatura dell'acqua a intervalli di 5s fino a che questa non raggiunge una soglia di equilibrio. Una volta raggiunta la temperatura di equilibrio si acquisisce nuovamente a intervalli di un minuto.

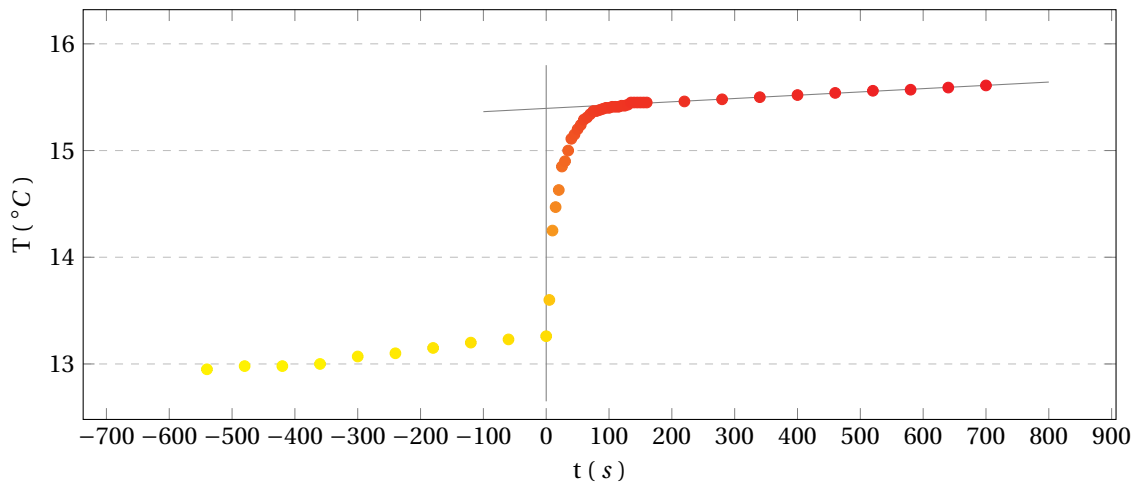


2.1.1 Fit lineare T_{eq}

La temperatura iniziale T_1 è quella corrispondente all'istante di immersione del corpo e vale $T_1 = (13.26 \pm 0.01)^\circ\text{C}$

Per ricavare T_{eq} si trasla il grafico portando l'istante di immersione sullo zero e si traccia la retta di best fit delle temperature finali. Per prima cosa troviamo T_{eq} :

Temperatura dell'acqua nel calorimetro in funzione del tempo (cilindro metallico)



$(t \pm 0.01)s$	T_{eq} $(T \pm 0.01)^\circ C$
220	15.46
280	15.48
340	15.50
400	15.52
460	15.54
520	15.56
580	15.57
640	15.59
700	15.60

Con il metodo dei minimi quadrati si trovano i parametri a e b della retta:

$$y = a + bx$$

$$a = (15.40 \pm 0.01)^\circ C \quad b = (0.00031 \pm 0.00002) \frac{^\circ C}{s}$$

Per verificare che la retta trovata si adatti bene ai dati è bene effettuare un test del χ^2 .

Ipotesi nulla La retta $y = a + bx$ descrive bene l'andamento dei dati osservati sperimentalmente.

valori per test χ^2		
Livello di significatività	α	0.05 ⁵
Gradi di libertà	n	$(9 - 2) = 7$
Valore di χ^2	χ^2	0.65
χ^2 sospetto	χ^2_{sos}	2.17
χ^2 critico	χ^2_{cri}	114.07

Tabella 13: χ^2 T_1

L'unica spiegazione ad un chi quadro sospetto in questo caso è di nuovo una misura molto precisa. Accetto l'ipotesi nulla con un livello di significatività del 5%.

T_1 e T_{eq}	$T_1 = (13.26 \pm 0.01)^\circ C$	$T_{eq} = (15.40 \pm 0.01)^\circ C$
------------------	----------------------------------	-------------------------------------

2.2 Massa d'acqua

Oggetto	$(m \pm 0.0001)\text{kg}$
Massa becher	0.1046
Massa becher + corpo	0.4939
Massa corpo m_c	0.3866
Massa borraccia	0.2544
Massa borraccia + acqua	0.4047

Tabella 14: Misure preliminari (masse)

Oggetto	$(T \text{ } ^\circ\text{C})$
Temp. acqua nella borraccia T'_2	82 ± 0.1
Temp. acqua	17.90 ± 0.01
Temp. ambiente	19 ± 1

Tabella 15: Misure preliminari (temperature)

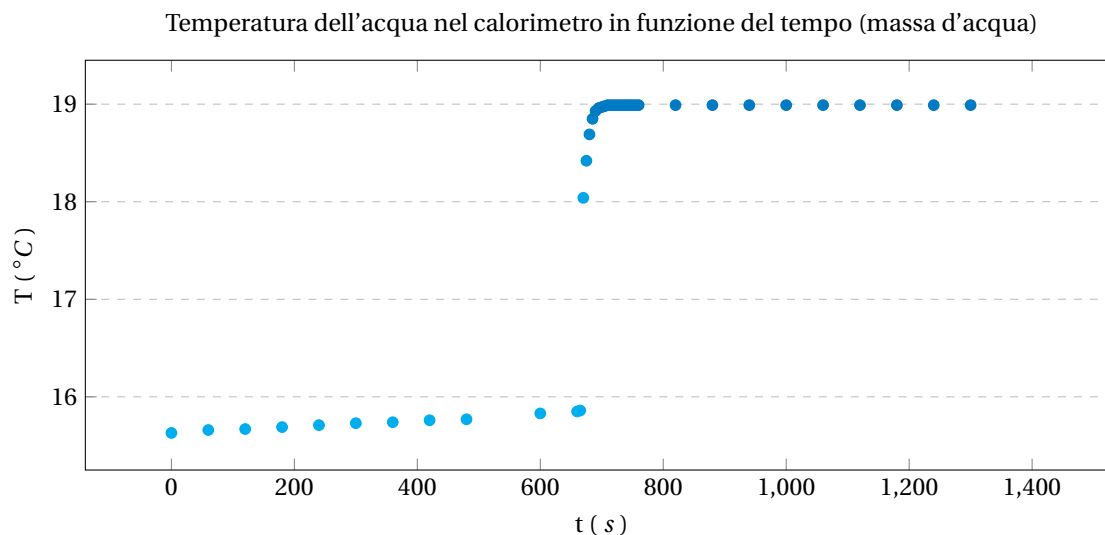
Nel momento dell'estrazione del corpo dal calorimetro parte dell'acqua in quest'ultimo potrebbe essere rimasta attaccata al corpo. Per ricavare la massa d'acqua rimasta nel calorimetro pesiamo la massa del corpo bagnato in un becher; si ricava la massa d'acqua $m_{a(2)}$ presente nel calorimetro come:

$$\begin{aligned} m_{a(2)} &= m_a - (m_{\text{becher+corpo}} - m_{\text{becher}} - m_c) \\ &= (2.8010 \pm 0.0002)\text{kg} \end{aligned}$$

Si ricava invece la massa d'acqua da versare togliendo la tara utilizzata (borraccia) alla massa borraccia più acqua:

$$m'_a = (0.1503 \pm 0.0002)\text{kg}$$

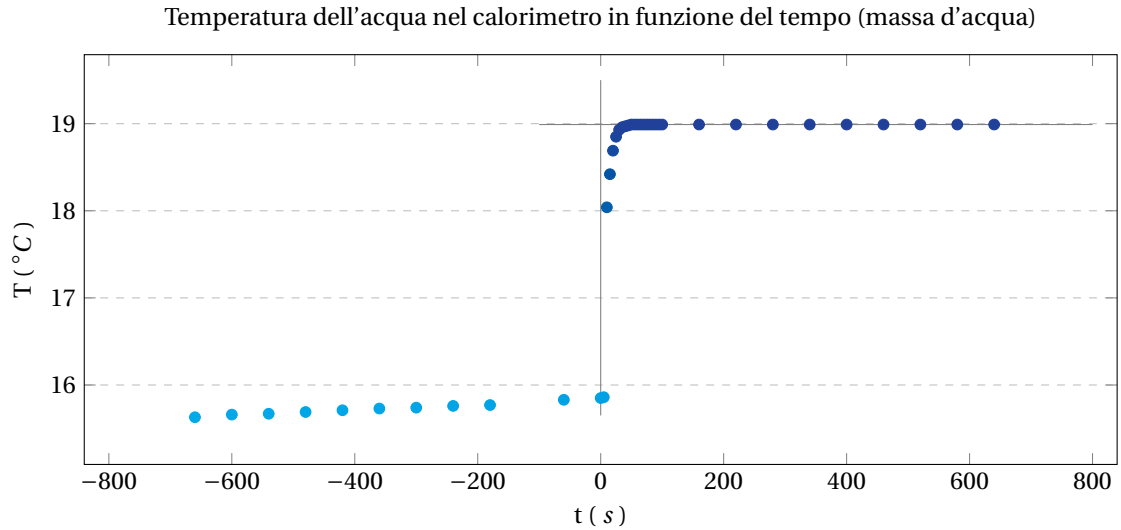
Come per il cilindro metallico viene rilevata la temperatura dell'acqua nel calorimetro ogni minuto fino all'istante di versamento della massa d'acqua m'_a riscaldata nel bollitore. Dal versamento fino alla stabilizzazione della temperatura le misure sono effettuate a intervalli di 5 secondi e poi nuovamente di un minuto.



2.2.1 Fit lineare T'_{eq}

In questo caso è nota la temperatura T'_1 corrispondente alla temperatura all'istante di versamento della massa d'acqua e vale $T'_1 = (15.85 \pm 0.01)^\circ\text{C}$.

Invece per trovare T'_{eq} si procede al fit lineare delle ultime misure.



$(t \pm 0.01)s$	$T'_{eq} (T \pm 0.01)^{\circ}C$
160	18.99
220	18.99
280	18.99
340	18.99
400	18.99
460	18.99
520	18.99
580	18.99
640	18.99

Come si può notare le ultime misure sono tutte stabilizzate sulla temperatura ambiente (precedentemente misurata $(19 \pm 1)^{\circ}C$). Procedere al fit dei dati sarebbe inutile in quanto la retta in questione è

$$y = (18.99 \pm 0.01)^{\circ}C$$

Sappiamo quindi che il valore di T'_{eq} è $T_{eq} = (18.99 \pm 0.01)^{\circ}C$

T'_1 e T'_{eq}

Conclusa l'analisi delle misure si hanno

$$T'_1 = (15.85 \pm 0.01)^{\circ}C$$

$$T_{eq} = (18.99 \pm 0.01)^{\circ}C$$

2.3 Calcolo massa equivalente e calore specifico

Dalle misure appena concluse è possibile trovare il valore della massa equivalente:

$$m'_e = \frac{m'_a (T'_2 - T'_{eq})}{T'_{eq} - T'_1} - m_{a(2)} \pm \sigma_{m'_e} = \frac{m'_a \Delta T'_{2e}}{\Delta T'_{e1}} - m_{a(2)} \pm \sigma_{m'_e}$$

	misure	errore assoluto	errore relativo	u.m.
$\Delta T'_{2e}$	61.8	0.1	0.002	$^{\circ}C$
$\Delta T'_{e1}$	3.14	0.02	0.005	$^{\circ}C$
m'_a	0.1503	0.0002	0.001	kg
$m_{a(2)}$	2.8010	0.0002	0.0001	kg

Tabella 16: misure per massa equivalente

$$m'_e = (0.206 \pm 0.001) \text{ kg}$$

Ora si hanno tutti i dati per calcolare il calore specifico del corpo c_x :

$$c'_x = \frac{(m'_e + m_a)c_a(T_e - T_1)}{m_c(T_2 - T_e)} \pm \sigma_{c_x} = \frac{Mc_a}{m_c} \frac{\Delta T_{e1}}{\Delta T_{2e}} \pm \sigma_{c_x}$$

con $c_a = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$

	misure	errore assoluto	errore relativo	u.m.
ΔT_{e1}	2.14	0.02	0.007	$^\circ\text{C}$
ΔT_{2e}	78.6	0.1	0.001	$^\circ\text{C}$
M	3.006	0.001	0.0003	kg

Tabella 17: misure per calore specifico

$$c'_x = (0.211 \pm 0.002) \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

3 Confronto masse equivalenti e calori specifici

Conclusa la seconda presa dati e ottenuti i valori del calore specifico del corpo e della massa equivalente del calorimetro si procede nella verifica che i risultati ottenuti nelle due prese dati siano compatibili tra di loro per scongiurare eventuali errori di procedura.

	misura	errore assoluto	errore relativo
m_e	0.22	0.02	9.1 %
m'_e	0.206	0.001	0.5 %
c_x	0.233	0.005	2.1%
c'_x	0.211	0.002	0.9 %

Tabella 18: confronto prima e dopo correzioni

Si evince che le correzioni hanno permesso una stima di massa equivalente e calore specifico molto più precisa; tuttavia potrebbero risultare non compatibili i valori. Per accertarsi che i risultati della prima presa dati siano consistenti con quelli della seconda si sottopongono questi ultimi a un test z . Più precisamente si va a verificare che la differenza tra c_x e c'_x e tra m_e e m'_e sia compatibile con 0:

$$z = \frac{|m_e - m'_e|}{\sqrt{\sigma_{m_e}^2 + \sigma_{m'_e}^2}} \quad z = \frac{|c_x - c'_x|}{\sqrt{\sigma_{c_x}^2 + \sigma_{c'_x}^2}}$$

3.1 Test Z (m_e)

Ipotesi nulla La differenza dei valori c_x e c'_x è compatibile con zero con un livello di significatività del 5%

valori per test z		
Livello di significatività	α	0.05
z osservato	z_{oss}	0.7
z critico	z_{cri}	1.96

Tabella 19: z $m_e - m'_e$

3.2 Test Z (c_x)

Ipotesi nulla La differenza dei valori m_e e m'_e è compatibile con zero con un livello di significatività del 5%

valori per test z		
Livello di significatività	α	0.05
z osservato	z_{oss}	4.0
z critico	z_{cri}	1.96

Tabella 20: z $c_x - c'_x$

Accetto la prima ipotesi nulla e rifiuto la seconda: le masse equivalenti risultano essere compatibili (livello di significatività del 5%) mentre i calori specifici non lo sono. Una spiegazione plausibile è una prima presa dati imprecisa e più grossolana rispetto alla seconda che ha fornito un valore di c_x con errore di 0.9% contro il 2.1% della prima. Per accertarsi di quale calore specifico sia il più accurato li si confronta con il calore specifico dell'acciaio fornitoci dalla letteratura:

$$c_{x\text{lett}} = 0.215 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

3.3 Test Z con calore specifico teorico

Ipotesi nulla Il calore specifico sperimentale (prima c_x e poi c'_x) è compatibile con il calore specifico fornito dalla letteratura

valori per test z		
Livello di significatività	α	0.05
z osservato	z_{oss}	1.82
z critico	z_{cri}	1.96

Tabella 21: $z\ c_x - c_{x_{\text{lett}}}$

valori per test z		
Livello di significatività	α	0.05
z osservato	z_{oss}	3.8
z critico	z_{cri}	1.96

Tabella 22: $z\ c'_x - c_{x_{\text{lett}}}$

Come ci si poteva aspettare il primo calore specifico non risulta compatibile con quello teorico, mentre il secondo, frutto della presa dati più precisa, risulta compatibile (con un livello di significatività del 5%). L'esito positivo del secondo test z evidenzia, oltre alla già verificata precisione, l'accuratezza dei valori ottenuti nella seconda procedura (rispetto alla prima).

4 Errori sistematici

Per accertarsi che nessun fattore esterno abbia influenzato in modo significativo le prese dati si studiano i contributi energetici dell'agitatore e dell'ambiente esterno nel quale viene dispersa parte del calore.

4.1 Influenza agitatore

Il motorino elettrico che muove l'agitatore eroga una potenza di 3W. Se si ipotizzasse per assurdo che tutta l'energia elettrica venisse convertita in calore, l'aumento di temperatura causato dal movimento dell'agitatore in un intervallo di tempo sarebbe:

$$P = \frac{Q_{\text{ass}}}{\Delta t} = \frac{(m_a + m_e)c_a \Delta T}{\Delta t} \rightarrow \Delta T = \frac{P \Delta t}{(m_a + m_e)c_a}$$

In un intervallo di tempo pari a circa 1800 secondi si ha una variazione di temperatura pari a

$$\Delta T = 0.45^\circ \text{C}$$

pari a circa

$$0.007 \frac{^\circ \text{C}}{60 \text{s}}$$

Una variazione di 0.007°C al minuto non è apprezzabile dal termometro utilizzato nel calorimetro (sensibilità 0.01°C); ogni due minuti si avrebbe una variazione di poco più di 0.01°C che rientra nelle naturali fluttuazioni statistiche delle misure; dopo il terzo minuto si comincerebbe ad avere un centesimo di grado in più su ogni misura ogni due minuti. Per perfezionare la presa dati bisognerebbe sottrarre la variazione di temperatura dovuta all'agitatore laddove questa è percepibile dal termometro.

Certo è che le stime appena fatte sono assurde e fisicamente impossibili; nella realtà dei fatti è improbabile che l'agitatore abbia influito sulla presa dati visto il contributo minimo anche in condizioni ideali nelle quali tutta l'energia del motore è convertita in calore.

4.2 Calore disperso

Possibili errori possono essere stati le temperature iniziali del corpo e della massa d'acqua m'_a che potrebbero essersi raffreddati durante il processo di immissione nel calorimetro. Tuttavia per prevenire questo tipo di errori la temperatura di questi ultimi è sempre stata registrata nell'istante subito precedente all'inserimento nel calorimetro.

5 Conclusioni

L'esperienza ha permesso di determinare in modo accurato il calore specifico di un cilindro di acciaio e della massa equivalente di un calorimetro. Per arrivare ai risultati ottenuti sono state effettuate due prese

dati: la prima ha permesso di analizzare quali elementi influenzavano l'incertezza delle nostre incognite che, nella seconda presa dati, sono state ricalcolate in maniera più precisa.

Il sistema del calorimetro pur non essendo completamente adiabatico non ha influenzato significativamente i risultati; eventuali dissipazioni di energia sono risultate trascurabili.

6 Appendice

6.1 Calcoli e approssimazioni ricorrenti

1. L'errore di misure derivate da somme e differenze sono tutti ricavati come semplici somme in quadratura.
2. Se l'errore associato a una misura derivata da una somma o una differenza era del tipo 0.14, 0.014, 0.00...014 è sempre stato approssimato per eccesso. Si è preferito avere errori lievemente maggiori invece di sottostimati.

6.2 Calcolo T_1 e T_{eq} con covarianze

Al fine di semplificare la ricerca di temperatura iniziale e temperatura di equilibrio è utile traslare i grafici portando l'istante d'immersione (prima del corpo poi della massa d'acqua) sullo 0. In questo modo le due temperature risultano essere semplicemente i termini noti delle rette di best fit.

Senza ricorrere alla traslazione è possibile ricavare i due valori trovando l'intersezione delle due rette di best fit con la retta $x = t_i$ istante di immersione. In questo caso però il punto dove le rette intersecano $x = t_i$ dipenderà dai parametri delle due rette **a e b**, grandezze dipendenti. Perciò nell'errore da associare a T_1 e T_{eq} entrerà in gioco anche la covarianza σ_{ab} :

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + 2 \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right) \sigma_{ab}$$

con

$$\sigma_{ab} = - \frac{\sigma_y^2 \sum^N x_i}{N \sum^N x_i^2 + (\sum^N x_i)^2}$$

Andando a calcolare la temperatura si ottiene lo stesso risultato ottenuto traslando il grafico con $t_i = 0$:

$$T_1 = a + b(t_i) \pm \sigma_T = (15.28 \pm 0.01)^\circ C$$

6.3 Errori associati a c_x e m_e

$$m_e = \frac{m'_a (T'_2 - T'_{eq})}{T'_{eq} - T'_1} - m_a = \frac{m'_a \Delta T'_{2e}}{\Delta T'_{e1}} - m_a$$

$$\begin{aligned} \sigma_{m_e} &= \sqrt{\left(\frac{\partial m_e}{\partial m'_a}\right)^2 \sigma_{m'_a}^2 + \left(\frac{\partial m_e}{\partial \Delta T'_{2e}}\right)^2 \sigma_{\Delta T'_{2e}}^2 + \left(\frac{\partial m_e}{\partial \Delta T'_{e1}}\right)^2 \sigma_{\Delta T'_{e1}}^2 + \left(\frac{\partial m_e}{\partial m_a}\right)^2 \sigma_{m_a}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta T'_{2e}}{\Delta T'_{e1}}\right)^2 \sigma_{m'_a}^2 + \left(\frac{m'_a}{\Delta T'_{e1}}\right)^2 \sigma_{\Delta T'_{2e}}^2 + \left(\frac{m'_a \Delta T'_{2e}}{\Delta T_{e1}^2}\right)^2 \sigma_{\Delta T'_{e1}}^2 + \sigma_{m_a}^2} \end{aligned}$$

$$c_x = \frac{(m_e + m_a) c_a (T_e - T_1)}{m_c (T_2 - T_e)} = \frac{M c_a \Delta T_{e1}}{m_c \Delta T_{2e}}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{c_x} &= \sqrt{\left(\frac{\partial c_x}{\partial M}\right)^2 \sigma_M^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial c_a}\right)^2 \sigma_{c_a}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial m_c}\right)^2 \sigma_{m_c}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial \Delta T_{e1}}\right)^2 \sigma_{\Delta T_{e1}}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial \Delta T_{2e}}\right)^2 \sigma_{\Delta T_{2e}}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{c_a}{m_c} \frac{\Delta T_{e1}}{\Delta T_{2e}}\right)^2 \sigma_M^2 + \left(\frac{M}{m_c} \frac{\Delta T_{e1}}{\Delta T_{2e}}\right)^2 \sigma_{c_a}^2 + \left(\frac{M c_a}{m_c^2} \frac{\Delta T_{e1}}{\Delta T_{2e}}\right)^2 \sigma_{m_c}^2 + \left(\frac{M c_a}{m_c} \frac{1}{\Delta T_{2e}}\right)^2 \sigma_{\Delta T_{e1}}^2 + \left(\frac{M c_a}{m_c} \frac{\Delta T_{e1}}{\Delta T_{2e}^2}\right)^2 \sigma_{\Delta T_{2e}}^2} \end{aligned}$$