CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova d'esame di Metodi Matematici della Meccanica Classica – 18/9/2024

TEMA I

Due punti materiali, rispettivamente di massa m_1 e m_2, si muovono in un piano orizzontale fissato, sotto l'azione di un potenziale $U(r)$ che dipende solo dalla distanza r fra i due punti

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema e mostrare che, con un'opportuna scelta di coordinate lagrangiane, esso si disaccoppia completamente in un sistema (A) equivalente a un punto materiale su cui non agiscono forze, e un sistema (B) equivalente a un punto materiale soggetto a un potenziale centrale.

(2) Nel caso particolare di un potenziale elastico, $U(r) = -\frac{1}{2}kr^2$, trovare le frequenze caratteristiche del sistema (B).

SVOLGIMENTO

La Lagrangiana del sistema è data da

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + U(r),$$

dove (x_1, y_1) sono le coordinate cartesiane del primo punto materiale, (x_2, y_2) quelle del secondo punto e $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$; il sistema ha quattro gradi di libertà.

Poiché l'unica forza agente nel sistema è una forza interna, per la prima equazione cardinale della dinamica sappiamo che il baricentro del sistema di muoverà di moto rettilineo uniforme. Questo suggerisce di utilizzare le coordinate del baricentro come due delle quattro coordinate lagrangiane. La scelta delle altre due coordinate si può fare in più modi. Una volta determinata la posizione di uno dei due punti materiali rispetto al baricentro, la posizione dell'altro punto si ricava univocamente: una scelta possibile, quindi, consiste nel prendere le coordinate del primo punto in un sistema che ha l'origine traslata nel baricentro. Una seconda opzione può essere quella di usare, a questo scopo, coordinate polari anziché coordinate cartesiane; una terza opzione può essere quella di usare la distanza r fra i due punti in luogo della coordinata radiale di uno dei punti rispetto al baricentro.

A posteriori, per un generico potenziale $U(r)$ quest'ultima è la scelta più conveniente, ma nel caso del potenziale elastico può convenire restare in coordinate cartesiane, poiché le equazioni del moto si possono integrare direttamente in quel sistema.

Nel seguito, quindi, prenderemo innanzitutto come coordinate lagrangiane le coordinate (X, Y) del baricentro e le coordinate (x, y) del primo punto materiale rispetto al baricentro. Posto $m_1 + m_2 = M$, da

$$\begin{cases} X = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \\ Y = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M} \\ x = x_1 - X \\ y = y_1 - Y \end{cases}$$

si ricava subito la parametrizzazione del sistema in termini delle coordinate (X, Y, x, y):

$$\begin{cases} x_1 = X + x \\ y_1 = Y + y \\ x_2 = X - \dfrac{m_1}{m_2} x \\ y_2 = Y - \dfrac{m_1}{m_2} y \end{cases}$$

e quindi

$$r^2 = \frac{M^2}{m_2^2}(x^2 + y^2).$$

Da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{X} + \dot{x} \\ \dot{y}_1 = \dot{Y} + \dot{y} \\ \dot{x}_2 = \dot{X} - \dfrac{m_1}{m_2} \dot{x} \\ \dot{y}_2 = \dot{Y} - \dfrac{m_1}{m_2} \dot{y} \end{cases}$$

si trova

$$L = \frac{M}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{M\,m_1}{2\,m_2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + U(r).$$

Poiché la distanza r dipende solo da (x, y) e non dalle coordinate del baricentro, ne consegue che la Lagrangiana è la somma della Lagrangiana L_A di un punto materiale di massa M (la cui posizione coincide con il baricentro dei due punti materiali), non soggetto a forze, e della Lagrangiana L_B di un secondo punto materiale soggetto al potenziale centrale $U(r)$. Per calcolare la massa di questo secondo punto occorre specificare il potenziale $U(r)$, poiché r è la distanza di tale punto dal baricentro del sistema moltiplicata per $\dfrac{M}{m_2}$. Nel caso di un potenziale elastico $U(r) = -\dfrac{k}{2}r^2$, il sistema (B) è descritto dalla Lagrangiana

$$L_B = \frac{M\,m_1}{2\,m_2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\frac{M^2}{m_2^2}(x^2 + y^2)$$

che è equivalente alla Lagrangiana di un oscillatore armonico isotropo con costante elastica k e massa uguale alla *massa ridotta* $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{M}$. Le equazioni di Lagrange risultano infatti le seguenti:

$$\begin{cases} M\ddot{X} = 0 \\ M\ddot{Y} = 0 \\ \dfrac{M\,m_1}{2\,m_2}\ddot{x} + \dfrac{kM^2}{m_2^2} x = 0 \\ \dfrac{M\,m_1}{2\,m_2}\ddot{y} + \dfrac{kM^2}{m_2^2} y = 0; \end{cases}$$

quindi le coordinate (X, Y) evolvono linearmente nel tempo, mentre le coordinate (x, y) obbediscono entrambe all'equazione di un oscillatore armonico con frequenza caratteristica

$$\omega = \sqrt{\frac{kM}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

Vediamo ora che cosa succede con una diversa scelta di coordinare lagrangiane: oltre a (X, Y), prendiamo come coordinate le coordinate polari (r, θ) del primo punto rispetto al secondo. In questo caso la parametrizzazione è

$$\begin{cases} x_1 = X + \dfrac{m_2 r}{M}\cos(\theta) \\ y_1 = Y + \dfrac{m_2 r}{M}\sin(\theta) \\ x_2 = X - \dfrac{m_1 r}{M}\cos(\theta) \\ y_2 = Y - \dfrac{m_1 r}{M}\sin(\theta). \end{cases}$$

Facendo tutti i conti si ottiene

$$L = \frac{M}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r)$$

da cui risulta manifesto che il sistema (B) corrisponde a un punto materiale con massa ridotta μ soggetto al potenziale centrale $U(r)$, indipendentemente da quale sia la funzione U.

TEMA II

Per il medesimo sistema descritto nel Tema I, dette (q^1, q^2) le coordinate cartesiane (x, y) del primo punto materiale, (q^3, q^4) le coordinate cartesiane del secondo punto e $(p_1, \dots p_4)$ i corrispondenti momenti coniugati,

(1) scrivere l'Hamiltoniana del sistema;
(2) mostrare che le funzioni $P_1 = p_1 + p_3$, $P_2 = p_2 + p_4$, $J = q^1 p_2 - q^2 p_1 + q^3 p_4 - q^4 p_3$ sono costanti del moto e calcolare le parentesi di Poisson fra le tre funzioni;
(3) mostrare che le tre funzioni P_1, P_2 e J corrispondono a costanti del moto noetheriane e indicare le corrispondenti simmetrie nello spazio delle configurazioni.

SVOLGIMENTO

L'Hamiltoniana del sistema è data da

$$H = \frac{1}{2m_1}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2m_2}\left(p_3^2 + p_4^2\right) - U(r),$$

con $r^2 = (q^1 - q^3)^2 + (q^2 - q^4)^2$. Poiché

$$\frac{\partial H}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial U}{\partial q^\lambda} = \frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial q^\lambda} = \frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}\frac{\partial r^2}{\partial q^\lambda},$$

si ricava subito che

$$
\begin{aligned}
[H,q^1] &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{1}{2m_1}p_1 & \qquad [H,p_1] &= -\frac{\partial H}{\partial q^1} = \frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}(q^3-q^1) \\
[H,q^2] &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{1}{2m_1}p_2 & \qquad [H,p_2] &= -\frac{\partial H}{\partial q^2} = \frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}(q^4-q^2) \\
[H,q^3] &= \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{1}{2m_2}p_3 & \qquad [H,p_3] &= -\frac{\partial H}{\partial q^3} = \frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}(q^1-q^3) \\
[H,q^4] &= \frac{\partial H}{\partial p_4} = \frac{1}{2m_3}p_4 & \qquad [H,p_4] &= -\frac{\partial H}{\partial q^4} = \frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}(q^2-q^4)
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
[H,P_1] &= [H,p_1+p_3] = 0 \\
[H,P_2] &= [H,p_2+p_4] = 0
\end{aligned}
$$

mentre

$$
\begin{aligned}
[H,J] = {}& [H,q^1p_2-q^2p_1+q^3p_4-q^4p_3] = \\
&= [H,q^1]p_2 + q^1[H,p_2] - [H,q^2]p_1 - q^2[H,p_1] + [H,q^3]p_4 + q^3[H,p_4] - [H,q^4]p_3 + \\
&\quad - q^4[H,p_3] = \frac{1}{2m_1}p_1p_2 + q^1\frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}(q^4-q^2) - \frac{1}{2m_1}p_2p_1 - q^2\frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}(q^3-q^1) + \\
&\quad + \frac{1}{2m_2}p_3p_4 + q^3\frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}(q^2-q^4) - \frac{1}{2m_2}p_4p_3 - q^4\frac{1}{2r}\frac{dU}{dr}(q^1-q^3) = 0.
\end{aligned}
$$

Si ha poi

$$
\begin{aligned}
[P_1,P_2] &= [p_1+p_3,p_2+p_4] = 0 \\
[P_1,J] &= [p_1+p_3,J] = \frac{\partial J}{\partial q^1} + \frac{\partial J}{\partial q^3} = p_2+p_4 = P_2 \\
[P_2,J] &= [p_2+p_4,J] = \frac{\partial J}{\partial q^2} + \frac{\partial J}{\partial q^4} = -p_1-p_3 = -P_1
\end{aligned}
$$

Le costanti del moto P_1, P_2 e J sono tutte lineari nei momenti coniugati, ossia hanno la forma $X^\lambda(q^\mu)p_\lambda$. Le corrispondenti funzioni nello spazio delle velocità hanno quindi la forma $X^\lambda(q^\mu)\dfrac{\partial L}{\partial u^\lambda}$ e coincidono con le costanti noetheriane associate ai campi vettoriali $X^\lambda(q^\mu)\dfrac{\partial}{\partial q^\lambda}$ sullo spazio delle configurazioni. I campi di simmetria noetheriana nello spazio $\mathbb{R}^4$ corrispondenti a P_1, P_2 e J sono quindi, rispettivamente,

$$
\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^4}, \qquad q^1\frac{\partial}{\partial q^2} - q^2\frac{\partial}{\partial q^1} + q^3\frac{\partial}{\partial q^4} - q^4\frac{\partial}{\partial q^3}
$$

e rappresentano l'azione delle traslazioni (in x e in y, rispettivamente) dell'origine delle coordinate cartesiane nel piano in cui si muovono i due punti materiali, e delle rotazioni attorno all'origine nello stesso piano.