$$\lambda = v T \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = k v} \qquad (255)_r$$

- La generalizzazione ad una direzione di propagazione qualsiasi, cioè ad un'onda con velocità generica $\vec{v}$ è

$$\boxed{a(t,\vec{x}) = a \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \qquad (256)_r$$

dove $\vec{k}$ è detto "vettore (numero) d'onda" e la "relazione di dispersione" $(255)_r$ si generalizza a

$$\boxed{\omega^2 = v^2 |\vec{k}|^2} \qquad (257)_r$$

- Se $a(t,\vec{x})$ è una grandezza scalare, è necessario che la fase in $(256)_r$ sia un invariante. Notiamo che possiamo scrivere

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} = -\frac{1}{c}\left(-\omega\, c t + \vec{k}\cdot\vec{x}\right) =$$

$$= -\left(-\frac{\omega}{c}\cdot x^0 + \vec{k}\cdot\vec{x}\right) \qquad (258)_r$$

Introducendo

$$\boxed{K_\mu = \left(-\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)} \qquad (259)_r$$

abbiamo quindi

$$\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} = -\left(K_0 x^0 + \vec{k}\cdot\vec{x}\right) = -K_\mu x^\mu$$

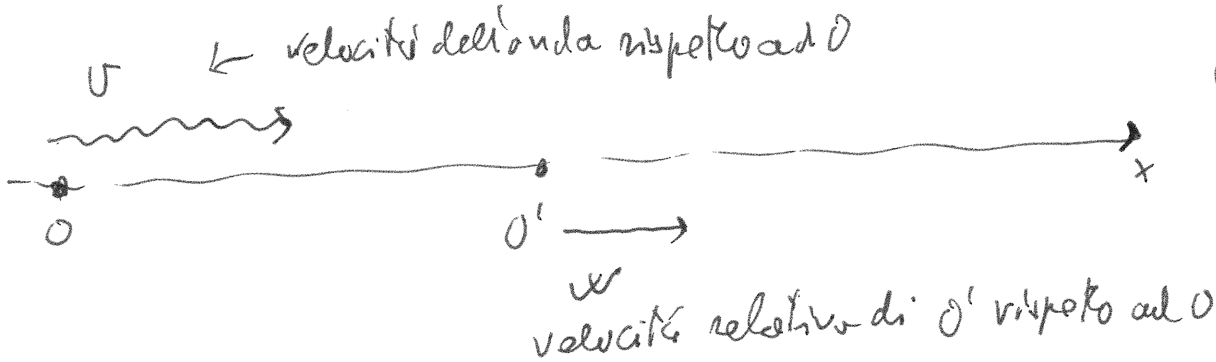
$$= -K\cdot X \qquad (260)_r$$

Questo è un invariante $\Rightarrow$ K_μ è un quadrivettore covariante!

- Da questo semplice statement segue, in particolare, l'espressione dell'Effetto Doppler relativistico

- Effetto Doppler Longitudinale

Supponiamo che l'onda si propaghi nella direzione x e consideriamo l'effetto di una T.L. collineare:



(261)r

La TL che collega le coordinate di O' ed O è effettuata dalla matrice

$$\hat{\Lambda} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \beta = \frac{w}{c} \;;\; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (262)_r$$

sulle coordinate x^0, x^1 mentre x^2, x^3 sono invarianti. ~~Dunque~~ La trasformazione inversa si ha per $\beta \leftrightarrow -\beta$:

$$\hat{\Lambda}^{-1} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \qquad (263)_r$$

Dunque la trasformazione di K_μ,

$$K_\mu \to K'_\mu = (\Lambda^{-1})^T K \qquad (264)_r$$

diviene semplicemente

$$\begin{cases} K_0' = \gamma K_0 + \gamma\beta K_1 \\ K_1' = \beta\gamma K_0 + \gamma K_1 \end{cases} \xrightarrow[k_0 = -\frac{\omega}{c}]{(k \equiv k_1)} \begin{cases} \omega' = \gamma\omega - \gamma\beta c k \\ k' = -\gamma\beta\frac{\omega}{c} + \gamma k \end{cases} \qquad (265)_r$$

con $K_2' = K_2$, $K_3' = K_3$.

Ricordando la relazione di dispersione (255)r, cioè $\omega = kv$ in questo caso, la (265)r si può scrivere come $(\beta c = w)$

$$\boxed{\begin{cases} \omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{w}{v}\right) \\ k' = \gamma k\left(1 - \frac{wv}{c^2}\right) \end{cases}}$$ Effetto Doppler Longitudinale

(266)r

$(k_2' = k_2,\ k_3' = k_3)$

- Nel limite non-relativistico si ha $\gamma(w) \to 1$, $\frac{vw}{c^2} \ll 1$ per cui queste formule si riducono alle usuali espressioni classiche:

$$\begin{cases} \omega' = \omega\left(1 - \frac{w}{v}\right) \\ k' = k \end{cases} \qquad (267)r$$

Nel limite non relativistico, infatti, la lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ non varia.

- N.B. La (266)r è consistente con la legge di composizione delle velocità. Infatti,

$$v' = \frac{\omega'}{k'} = \frac{v - w}{1 - \frac{vw}{c^2}} \qquad (268)r$$

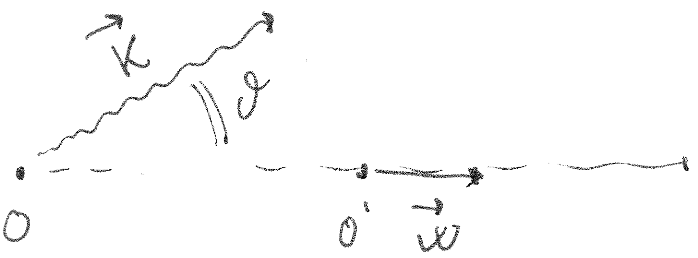
- Effetto Doppler Longitudinale per onde luminose

Se l'onda si propaga con velocità c (cioè si ha $\frac{\omega}{k} = c$) la (266)r diviene

$$\begin{cases} \omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{w}{c}\right) = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\omega = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\omega \\ k' = \gamma k\left(1 - \frac{w}{c}\right) = \dots = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,k \end{cases} \qquad (269)r$$

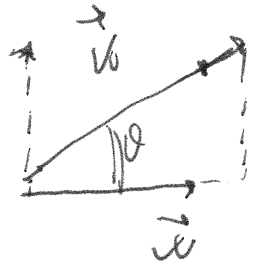
• Effetto Doppler: formule generali

Supponiamo ora di effettuare una TL dove la velocità $\vec{w}$ non è collineare a $\vec{k}$ (270)r



. Denotiamo con θ l'angolo tra il vettore d'onda $\vec{k}$ e la velocità relativa $\vec{w}$

Possiamo distinguere la componente parallela e trasversa di $\vec{k}$:



$$\begin{cases} k_{\parallel} = |\vec{k}|\cos\theta \\ k_{\perp} = |\vec{k}|\sin\theta \end{cases} \qquad \left(\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}}\right) \qquad (271)_r$$

Sotto la TL con velocità $\vec{w}$, si ha l'analogo della (265)r in cui $k_1 \to k_{\parallel}$, mentre è $\vec{k}_{\perp}$ a rimanere invariato. Dunque

$$\begin{cases} \omega' = \gamma\omega - \gamma|\vec{w}|k_{\parallel} = \gamma\omega - \gamma|\vec{w}||\vec{k}|\cos\theta \\ k'_{\parallel} = \gamma k_{\parallel} - \gamma\dfrac{|\vec{w}|\omega}{c^2} = \cancel{\gamma k} \end{cases} \qquad (272)_r$$

$$\vec{k}'_{\perp} = \vec{k}_{\perp}$$

La relazione di dispersione è

$$\boxed{\omega = v|\vec{k}|} \qquad (273)_r$$

per cui troviamo

$$\boxed{\begin{cases} \omega' = \gamma\omega\left(1 - \dfrac{|\vec{w}|}{v}\cos\theta\right) \\ k'_{\parallel} = \gamma k_{\parallel}\left(1 - \dfrac{|\vec{w}|v}{c^2}\dfrac{1}{\cos\theta}\right) \end{cases}}, \quad \boxed{\vec{k}'_{\perp} = \vec{k}_{\perp}} \qquad (274)_r \qquad (\theta \neq \pi/2)$$

• La prima equazione ci dice che vi è una modifica di ω anche per $\vartheta = \pi/2$ (effetto Doppler trasverso):

$$\omega' = \gamma\omega \qquad (\text{se } \vartheta = \pi/2) \qquad (275)_r$$

• Notiamo che l'angolo sotto cui è vista la direzione di propagazione dell'onda cambia anch'esso: nel SR', analogamente alla $(271)_r$ avremo

$$\begin{cases} k'_{\parallel} = |\vec{k}'| \cos\vartheta' \\ k'_{\perp} = |\vec{k}'| \sin\vartheta' \end{cases} \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\vartheta' = \frac{k'_{\perp}}{k'_{\parallel}} \qquad (276)_r$$

per cui dalla 274 abbiamo, ricordando la $(271)_r$:

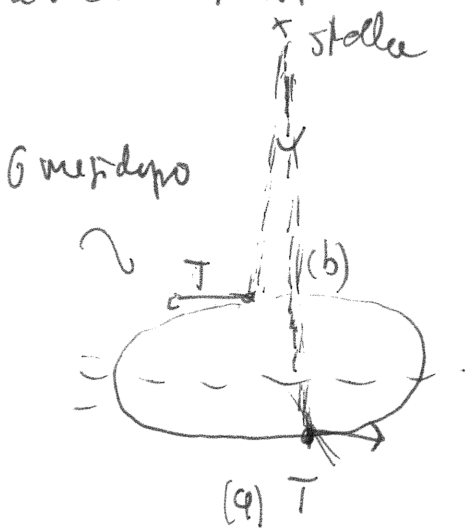
$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{k_{\perp}}{\gamma k_{\parallel}\left(1 - \frac{|\vec{\omega}| v}{c^2}\frac{1}{\cos\vartheta}\right)} = \frac{\sin\vartheta}{\gamma\cos\vartheta\left(1 - \frac{|\vec{\omega}| v}{c^2}\frac{1}{\cos\vartheta}\right)}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{\sin\vartheta}{\gamma\left(\cos\vartheta - \frac{|\vec{\omega}| v}{c^2}\right)}} \qquad (277)_r$$

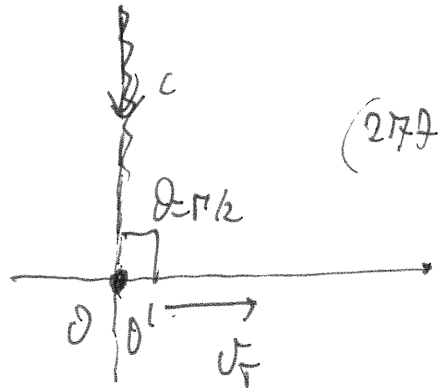
· Aberrazione della luce stellare

· Supponiamo di osservare una stella dalla Terra nelle stesse condizioni ma a 6 mesi di distanza.

· Per semplicità consideriamo una stella che, se la Terra fosse ferma, ci apparirebbe allo zenith



(a)

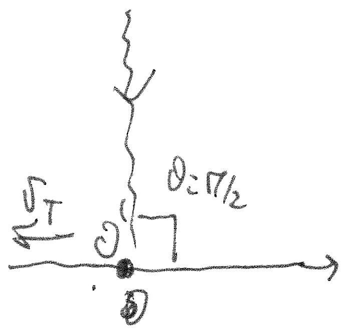


$(277\text{-}1)_r$

O: osservatore inerziale solidale con la stella

O': osservatore terrestre

(b)



$(277\text{-}2)_r$

In a), $\beta = v_T/c$ $(\sim 10^{-4})$ $\quad v = c$

$\theta = \pi/2$

⇒ la 277 ci dice che per l'osservatore terrestre

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{1}{-\gamma\beta} \qquad (277\text{-}3)_r$$

In b) abbiamo semplicemente $v_T \to -v_T$, i.e. $\beta \to -\beta$ $(\gamma \to \gamma)$:

$$\operatorname{tg}\theta'' = \frac{1}{\gamma\beta} \qquad (277\text{-}4)_r$$

con $\beta \sim 10^{-4}$, $\frac{1}{\gamma\beta} \sim \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \sim \frac{1}{\beta} >> 1$ (277-5)r

quindi ϑ' e ϑ'' sono molto prossimi a $\pi/2$: abbiamo

$$\left|tg\,\vartheta''\right| >> 1 \rightarrow \quad \vartheta'' = \pi/2 - \alpha \qquad (\alpha << 1) \qquad (277\text{-}6)r$$

$$\left|tg\,\vartheta'\right| << 1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta' = \pi/2 + \alpha$$

sono opposti

$$\Rightarrow \left|\vartheta' - \vartheta''\right| = 2\alpha \simeq 2\,tg\,\alpha = 2\,tg\,(\pi/2 - \vartheta'') = \frac{2}{tg\,\vartheta''}$$

$$= 2\beta\gamma \sim \boxed{2\beta} \qquad (277\text{-}7)r$$

che è in accordo con le osservazioni.

· Esercizio generalizzare al caso in cui la stella non sia allo zenith per un osservatore inerziale, cioè si abbia $\vartheta \neq \pi/2$.

• Equazione del moto per una particella libera (~~massiva~~

. Anche in RS, l'assunzione è che valga il principio di inerzia: in assenza di interazione, in ogni S.R. inerziale un punto materiale si muove di moto rettilineo uniforme, dunque con $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ = costante.

. Se è costante $\vec{v}$, è costante anche la quadrivelocità u^μ

$$u^\mu = (\gamma(\vec{v})c, \; \gamma(\vec{v})\vec{v}) = \text{costante} \qquad (278)r$$

Possiamo esprimere questa richiesta in forma di ~~covariantemente~~ ~~eqme~~ equazione del moto quadrivettoriale:

$$\boxed{\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0} \qquad (279)_r$$

NB Si introduce anche il nome "quadriaccelerazione" per il vettore

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau} \qquad (280)_r$$

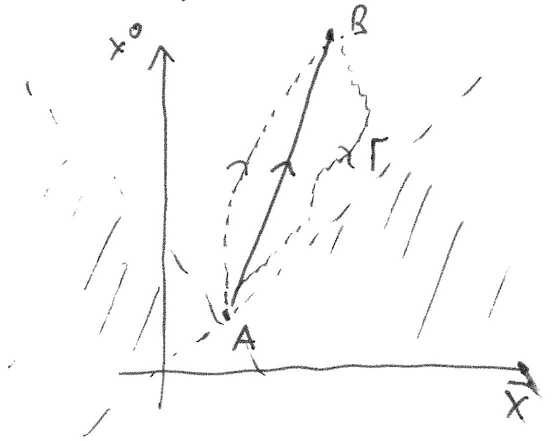
. Le traiettorie nello spazio di Minkowski sono dunque rettilinee: la soluzione delle eq. del moto $(279)_r$ è

$$x^\mu(\tau) = x_0^\mu + \tau\, u^\mu \qquad \forall \mu: 0,1,2,3 \qquad (281)_r$$

cioè

$$x^0(\tau) = x_0^0 + \tau u^0, \quad x^1(\tau) = x_0^1 + \tau u^1, \quad \dots \qquad (282)_r$$

che è l'eq. di una retta in forma parametrica



- Per collegare gli eventi A e B, la particella libera segue la traiettoria rettilinea nello sp-tempo
- Tra tutte le traiettorie Γ possibili, questa è la traiettoria che ~~minimizza~~ massimizza l'intervallo di tempo proprio $\Delta\tau_{AB}(\Gamma)$

. Possiamo quindi derivare le eq. del moto $(279)_r$ da un principio di ~~minima~~ estremizzazione dell'azione in cui l'azione (con estremi fissati in A e B) è

$$\boxed{S_{AB}[\Gamma] = -mc^2\, \Delta\tau_{AB}[\Gamma]} = -mc\sqrt{-\Delta s^2_{AB}(\Gamma)} \qquad (283)_r$$

- Ricordiamo che

$$-c^2 \Delta\tau_{AB}^2 = \Delta s_{AB}^2 < 0 \qquad (284)_r$$

per la traiettoria di una particella massiva, dato che gli eventi A e B sono temporalmente separati: possono essere collegati da un segnale (che è la particella stessa) che viaggia con velocità $< c$.

- Il fattore mc è necessario per ragioni dimensionali:

$$[mc^2 \Delta\tau] = [\text{energia} \times \text{tempo}] = [\text{azione}] \qquad (285)_r$$

- L'azione dunque si può scrivere come

$$\boxed{S[\Gamma] = -mc^2 \int_{\Gamma_{AB}} d\tau} = -mc^2 \int_\Gamma \underbrace{\sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}}}_{= c} d\tau \qquad (286)_r$$

N.B. Se la traiettoria Γ è fissata e τ è il tempo proprio lungo Γ, allora

$$-\frac{dx^\mu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -u^\mu u_\mu = c^2 \qquad (287)_r$$

~~Ba sostituire~~ l'ultima forma però è utile per fare la variazione di S rispetto alla traiettoria.

- Se parametrizziamo la traiettoria col tempo coordinato t, abbiamo

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}\, dt \qquad (288)_r$$

~~per cui~~ dove $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ lungo la traiettoria. Dunque

$$\boxed{S[\Gamma] = -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \qquad (289)_r$$

- Nel limite non-relativistico, $\vec{v}^2/c^2 \ll 1$, lungo tutta la traiettoria,

$$S \sim -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} dt \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^2}{c^2} + \dots\right) =$$

$$\boxed{S = -mc^2 \Delta t_{AB} + \int_{t_A}^{t_B} dt \cdot \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \dots} \qquad (210)_r$$

fissato, indipendente dalla traiettoria
irrilevante nelle variazioni

↑ azione non-relativistica della particella libera

- Da questa azione possiamo determinare la traiettoria classica Γ chiedendo che ~~essa~~ l'azione sia stabile rispetto a piccole variazioni arbitrarie di Γ:

$$x^\mu(\tau) \to x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) \qquad (211)_r$$

N.B. τ non è più il tempo proprio della traiettoria variata:
$\Rightarrow$ prima di esplicitare l'effetto della variazione non possiamo assumere $-\frac{dx^\mu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2$. Dunque chiediamo

$$0 = \delta S = -mc \int_{\Gamma} \delta\left(\sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}}\right) d\tau =$$

$$= +mc \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-\frac{dx^\rho}{d\tau}\eta_{\rho\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\tau}}} \cdot 2(-)\frac{dx^\mu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{d\,\delta x^\nu}{d\tau} \cdot d\tau \qquad (212)_r$$

ora qs viene valutato sulla traiettoria "originaria", $\to = c^2$

Dunque, integrando per parti,

$$0 = -m \int_{\Gamma} d\tau \, \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \eta_{\mu\nu} \delta x^\nu \qquad (293)r$$

per δx^ν arbitrario, da cui

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau} = 0} \qquad (294)r$$

cioè proprio l'eq. del moto attesa per una particella libera, vd (279)r.
In termini del quadrimpulso, qs corrisponde a

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0} \qquad (295)r$$

cioè alla conservazione del quadrimpulso per una particella libera

. Quadriaccelerazione Se introduciamo la

$$\boxed{a^\mu \equiv \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau}} \qquad (296)r$$

l'eq. del moto è semplicemente

$$\boxed{a^\mu = 0} \qquad (297)r$$

per una particella libera. Ricordiamo che (eq (241)r)

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \qquad (298)r$$

da cui abbiamo

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \vec{v}) = \left(c\gamma \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \right) \qquad (299)r$$