Onde Fluidi e Termodinamica

Riassunto da:
"FISICA: Meccanica e Termodiamica - P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci"

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Maggio 2024

Indice

Onde

1.1 Onde meccaniche

Se in casi come il pendolo o un corpo attaccato ad una molla l'oscillazione è **macroscopica** perché tutto il sistema oscilla, in corpi continui elastici possono prodursi moti oscillatori locali, provocati in una zona specifica del corpo. Questa oscillazione indotta localmente si **propaga nel mezzo** con una certa velocità costituendo così un'**onda**.

> Definizione: **Onda**
>
> Un'onda è una perturbazione locale impulsiva e periodica che si porpaga in un mezzo (corpo continuo ed elastico) con una certa velocità v. Nel caso unidimensionale parliamo di **onda piana** $\xi(x,t)$ la cui deformazione è costante in tutti i punti con stessa x

Per descrivere l'andamento di un'onda possiamo: **fissare un istante** t e osservare la deformazione su tutto lo spazio x, come se fosse una foto dell'onda; oppure **fissare un punto dello spazio** x e osservare al variare del tempo come varia la forma dell'onda, come se fosse un filmato.

inserire grafici

Vediamo ora come possiamo scrivere l'equazione che descrive la perturbazione in funzione della posizione **x** e del tempo **t**: per farlo serviamoci di un sistema di riferimento **O** solidale con l'istante $t = 0$ e un sistema di riferimento **O′** solidale con lo spostamento dell'onda che viaggia a velocità v.

Possiamo quindi descrivere la posizione l'andamento di un'onda piana tramite una funzione del tipo

$$\begin{cases} x' = x \pm vt \\ \xi' = \xi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \xi(x,t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} \pm \mathbf{vt})$$

Una funzione del tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x} \pm \mathbf{vt})$ soddisfa l'equazione differenziale detta **equazione delle onde** o **equazione di d'Alembert**:

$$\nabla^2_\xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

dimostrazione

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{vt} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 1} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = -v} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -v\frac{\partial}{\partial z}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Il passaggio più ambiguo è quello evidenziato in ciano, in cui viene cambiata variabile di derivazione da t a z. Trattando una funzione qualsiasi, la derivata di qualsiasi funzione rispetto a t è uguale a $-v$ derivata rispetto a z ($-v$ rappresenta il dz che va a moltiplicare).

Notare che l'equazione delle onde è soddisfatta solo per funzioni che hanno come argomento combinazioni lineari di x e t ($\xi(x \pm vt)$); è perciò **l'argomento che importa e non la funzione in sè**. Una combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione dell'equazione, la soluzione generale ha forma

$$G(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$