1 Equazioni differenziali.

Esercizio 1.1

Trovare la soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico classico:

$$u''(z) + \omega^2\, u(z) = 0$$

come serie intorno al punto $z = 0$. Determinarne il raggio di convergenza e sommare le serie.

Soluzione

L'equazione è regolare per ogni z finito, in particolare per $z = 0$. Possiamo quindi cercare una soluzione del tipo

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \ .$$

Sostituiamo questo sviluppo in serie nell'equazione:

$$u'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^{k-1}, \qquad\qquad u''(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k-1)\, c_k\, z^{k-2}.$$

$$u''(z) + \omega^2\, u(z) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(k-1)\, c_k\, z^{k-2} + \omega^2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = 0$$

Per portare tutte le potenze di z nella forma z^k, nella prima serie facciamo la sostituzione

$$k' = k - 2, \qquad \text{cioè} \qquad k = k' + 2,$$

ottenendo

$$\sum_{k'=-2}^{+\infty} (k'+2)\,(k'+1)\, c_{k'+2}\, z^{k'} + \omega^2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = 0$$

La serie in k' comincia ora da -2, però per $k' = -2$ e per $k' = -1$ i coefficienti della serie si annullano per la presenza del fattore $(k'+2)(k'+1)$. Quindi possiamo far partire tranquillamente la serie da $k' = 0$. Rinominando poi $k' \leftrightarrow k$, otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}\, z^k + \omega^2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \big[(k+2)(k+1)c_{k+2} + \omega^2 c_k\big] z^k = 0.$$

Otteniamo quindi una serie di Taylor che deve annullarsi ovunque. Affinché ciò possa avvenire, deve annullarsi ogni suo singolo termine:

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} + \omega^2 c_k = 0 \qquad \forall k \geq 0 \ .$$

da cui segue la *relazione di ricorrenza* per i coefficienti c_k:

$$c_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+1)(k+2)} c_k \ .$$

Essendo una relazione che lega c_{k+2} a c_k, possiamo esprimere tutti i coefficienti pari in termini di c_0 e tutti quelli dispari in funzione di c_1. Quindi possiamo considerare c_0 e c_1 come le costanti di integrazione dell'equazione differenziale, e costruire tutti i coefficienti delle potenze pari da c_0:

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{\omega^2}{2} c_0 \\
c_4 &= -\frac{\omega^2}{(3)(4)} c_2 = \frac{(\omega^2)^2}{4!} c_0 \\
c_6 &= -\frac{\omega^2}{(5)(6)} c_4 = -\frac{(\omega^2)^3}{6!} c_0 \\
c_{2n} &= (-1)^n \frac{(\omega^2)^n}{(2n)!} c_0,
\end{aligned}$$

e quelli delle potenze dispari da c_1:

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{\omega^2}{(2)(3)} c_1 \\
c_5 &= -\frac{\omega^2}{(4)(5)} c_3 = \frac{(\omega^2)^2}{5!} c_1 \\
c_7 &= -\frac{\omega^2}{(6)(7)} c_5 = -\frac{(\omega^2)^3}{7!} c_1 \\
c_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(\omega^2)^n}{(2n+1)!} c_1 \ .
\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione cercata è

$$u(z) = c_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{c_1}{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \alpha \cos(\omega z) + \beta \sin(\omega z) \ ,$$

che è proprio, come noto, la soluzione dell'equazione, con $\alpha = c_0$ e $\beta = c_1/\omega$ come costanti d'integrazione.

Il raggio di convergenza delle serie è evidentemente $+\infty$, visto che si tratta di seni e coseni, che non hanno singolarità al finito. Un altro modo di dimostrarlo è usare la relazione di ricorrenza nella formula di Cauchy-Hadamard:

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \sqrt{\left| \frac{c_k}{c_{k+2}} \right|} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt{\left| -\frac{(k+1)(k+2)}{\omega^2} \right|} = +\infty.$$

Esercizio 1.2 : esame del 24 / Gennaio /2024

Esercizio 2

Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$(z^2 - 1)\, u''(z) + 2\,(a\,z + b)\, u'(z) - a\,b\,u(z) \;=\; 0\,,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 1$.

(a) Studiare le singolarità al finito dell'equazione differenziale. Esistono valori di a, b per i quali l'equazione è regolare $\forall\, z \in \mathbb{C}$?

(b) Risolvere l'equazione indiciale della soluzione intorno al punto $z = 1$ e, alla luce del teorema di Fuchs, discutere la forma delle due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale (senza calcolarle).

(c) Trovare la relazione di ricorrenza di $u_1(z)$ (la soluzione corrispondente alla radice ρ_1 dell'equazione indiciale, con $\mathrm{Re}(\rho_1) > \mathrm{Re}(\rho_2)$) come serie intorno al punto $z = 1$ e determinarne il raggio di convergenza della serie.

(d) Nel caso $a = 1$, determinare la condizione su b affinché la soluzione $u_1(z)$ sia di tipo polinomiale. Scrivere esplicitamente la soluzione di grado 2, sempre nel caso $a = 1$.

Soluzione

(a) Analizziamo le singolarità dell'equazione riscrivendola in forma canonica.

$$u''(z) + P(z)\, u'(z) + Q(z)\, u(z) = 0,$$

con

$$P(z) = 2\,\frac{a\,z + b}{z^2 - 1}, \qquad Q(z) = -\frac{a\,b}{z^2 - 1}.$$

$P(z)$ e $Q(z)$ hanno al più poli semplici in $z = \pm 1$, che sono quindi singolarità fuchsiane dell'equazione. Dal momento che $Q(z)$ è singolare in $z = \pm 1$ per ogni scelta di $a, b \geq 1$, non esistono valori dei parametri che rendano l'equazione regolare in tutto $\mathbb{C}$.

(b) Per scrivere l'equazione indiciale intorno a $z = 1$ calcoliamo p_0 e q_0,

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z\to 1} (z-1)\, P(z) = \lim_{z\to 1} 2\,\frac{a\,z + b}{z + 1} = a + b\,, \\ q_0 &= \lim_{z\to 1} (z-1)^2\, Q(z) = \lim_{z\to 1} -(z-1)\,\frac{a\,b}{z+1} = 0\,, \end{aligned}$$

e risolviamo l'equazione indiciale $\rho^2 + (p_0 - 1)\,\rho + q_0 = 0$:

$$\rho\,(\rho + a + b - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 = 0\,, \quad \rho_2 = 1 - (a+b)\,.$$

Essendo $a, b \geq 1$, la soluzione con parte reale maggiore è $\rho_1 = 0$, pertanto le due soluzioni linearmente indipendenti hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-1)^k\,, \qquad\qquad c_0 \neq 0\,, \\ u_2(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k\,(z-1)^{k+1-(a+b)} + d\,u_1(z)\,\log(z-1)\,. \end{aligned}$$

Se $a + b \notin \mathbb{N}$, allora $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}$ e quindi nella soluzione $u_2(z)$ sicuramente non compare il termine logaritmico ($d = 0$, $d_0 \neq 0$). Se invece $a + b \in \mathbb{N}$ il termine logaritmico potrebbe essere presente o meno (si noti che $a + b \geq 2$, quindi l'esponente nella seconda serie è $k + 1 - (a+b) \neq k$, pertanto non possiamo essere certi della presenza del termine logaritmico).

(c) Determiniamo la relazione di ricorrenza per la soluzione $u_1(z)$ utilizzando

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-1)^k\,, \\ u_1'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,(z-1)^{k-1}\,, \\ u_1''(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k\,(z-1)^{k-2}. \\ z &= 1 + (z-1)\,, \\ z^2 - 1 &= (z-1)^2 + 2(z-1)\,. \end{aligned}$$

L'equazione differenziale diviene (ponendo $w \equiv z - 1$)

$$\begin{aligned} & (z^2-1)\,u_1''(z) + 2\,(a\,z + b)\,u_1'(z) - a\,b\,u_1(z) = 0\,, \\ \Longleftrightarrow\quad & w(w+2)\sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k\,w^{k-2} \\ & + 2\,(a + b + a\,w)\sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,w^{k-1} - a\,b\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,w^k = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k\,w^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k\,w^{k-1} \\ & + 2\,a\sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,w^k + 2\,(a+b)\sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,w^{k-1} - a\,b\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,w^k = 0\,. \end{aligned}$$

Notiamo che, nella seconda e nella quarta serie, il termine $k = 0$ si annulla, pertanto quelle serie partono in realtà da $k = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k\,w^k + 2\sum_{k=1}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k\,w^{k-1}$$
$$+\,2\,a\sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,w^k + 2\,(a+b)\sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k\,w^{k-1} - a\,b\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,w^k = 0.$$

Per portare tutte le potenze di w nella forma w^k, nella seconda e quarta serie operiamo la sostituzione

$$k' = k - 1, \qquad \text{ovvero} \qquad k = k' + 1,$$

mentre poniamo $k' = k$ nelle altre serie:

$$\sum_{k'=0}^{\infty} k'\,(k'-1)\,c_{k'}\,w^{k'} + 2\sum_{k'=0}^{\infty} k'\,(k'+1)\,c_{k'+1}\,w^{k'}$$
$$+\,2\,a\sum_{k'=0}^{\infty} k'\,c_{k'}\,w^{k'} + 2\,(a+b)\sum_{k'=0}^{\infty} (k'+1)\,c_{k'+1}\,w^{k'} - a\,b\sum_{k'=0}^{\infty} c_{k'}\,w^{k'} = 0\,.$$

Rinominando poi $k' \to k$, possiamo ora collezionare tutti i termini in un'unica serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,c_k\,w^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} k\,(k+1)\,c_{k+1}\,w^k$$
$$+\,2\,a\sum_{k=0}^{\infty} k\,c_k\,w^k + 2\,(a+b)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,c_{k+1}\,w^k - a\,b\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,w^k = 0,$$
$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Big\{2\,(k+a+b)(k+1)\,c_{k+1} + \Big[k(k-1+2\,a) - a\,b\Big]\,c_k\Big\}\,w^k = 0\,.$$

Otteniamo quindi una serie di Taylor che deve annullarsi $\forall\, w$. Affinché ciò possa avvenire, deve annullarsi ogni suo singolo coefficiente:

$$2\,(k+a+b)(k+1)\,c_{k+1} + \Big[k(k-1+2\,a) - a\,b\Big]\,c_k = 0\,, \qquad \forall k \geq 0\,,$$

da cui

$$c_{k+1} = -\,\frac{k(k-1+2\,a) - a\,b}{2\,(k+a+b)(k+1)}\,c_k\,.$$

Se $k(k-1+2\,a)-a\,b=0$ per qualche k, allora $u_1(z)$ è un polinomio, e il suo raggio di convergenza è infinito. In caso contrario, la formula di Cauchy-Hadamard per il raggio di convergenza diviene

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2\,(k+a+b)(k+1)}{k(k-1+2\,a)-a\,b}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2\,k^2}{k^2}\right| = 2\,.$$

Questo valore non è sorprendente, poiché l'equazione ha un'altra singolarità in $z=-1$, a distanza $\rho=2$ dal punto $z=1$ attorno a cui stiamo sviluppando.

(d) Cerchiamo ora una soluzione $u_1(z)$ polinomiale, ovvero nella forma di una serie troncata del tipo

$$u_1(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k\,(z-1)^k, \qquad \text{con} \qquad N\in\mathbb{N}\,,$$

che si realizza se $c_{N+1}=c_{N+2}=...=0$. La relazione di ricorrenza per $k=N$ e $a=1$ è

$$c_{N+1} = -\frac{N(N+1)-b}{2\,(N+1+b)(N+1)}\,c_N\,,$$

pertanto

$$c_{N+1}=0 \quad \text{e} \quad c_N\neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b=N(N+1)\,, \qquad N\in\mathbb{N}\,,$$

e la relazione di ricorrenza diviene

$$c_{k+1} = -\frac{k(k+1)-N(N+1)}{2\,(k+1+N(N+1))(k+1)}\,c_k\,.$$

Si noti incidentalmente che la condizione $c_{N+1}=0$ è sufficiente a garantire che $c_p=0$, per ogni $p>N+1$. Nel caso $a=1$ e $N=2$ si ha $b=2\,(2+1)=6$, pertanto i coefficienti del polinomio di secondo grado $u_1(z)$ sono:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{0(0+1)-6}{2\,(0+1+6)(0+1)}\,c_0 = \frac{3}{7}\,c_0\,,\\
c_2 &= -\frac{1(1+1)-6}{2\,(1+1+6)(1+1)}\,c_1 = \frac{1}{8}\,\frac{3}{7}\,c_0 = \frac{3}{56}\,c_0\,,\\
c_3 &= -\frac{2(2+1)-6}{2\,(2+1+6)(2+1)}\,c_2 = 0\,,
\end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$u_1(z) = c_0\left[1+\frac{3}{7}\,(z-1)+\frac{3}{56}\,(z-1)^2\right].$$

Verifichiamo che tale polinomio soddisfi l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} u_1'(z) &= c_0 \left[\frac{3}{7} + \frac{3}{56}\, 2\, (z-1) \right] = \frac{3}{7}\, c_0 \left[1 + \frac{1}{4}\, (z-1) \right], \\ u_1''(z) &= \frac{3}{28}\, c_0\,, \end{aligned}$$

pertanto l'equazione differenziale diviene (moltiplicata per un fattore $28/(3\, c_0) \neq 0$, per convenienza computazionale)

$$\begin{aligned} & (z^2-1) + 2\,(z+6)\, 4 \left[1 + \frac{1}{4}\, (z-1) \right] - 6 \left[\frac{28}{3} + 4(z-1) + \frac{1}{2}\, (z-1)^2 \right] \\ = \quad & z^2 \big(1+2-3 \big) + z \big(6+12-24+6 \big) + \big(-1+36-56+24-3 \big) \\ = \quad & 0\,. \end{aligned}$$

Esercizio 1.3: esame del 15/Febbraio/2022

Esercizio 2

Si consideri l'equazione differenziale

$$(1 - z^2)\, u''(z) - z\, u'(z) + \alpha\, u(z) \;=\; 0\,,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Scrivere la forma della soluzione generale come serie intorno al punto $z = 0$, ricavarne la relazione di ricorrenza dei coefficienti e determinarne il raggio di convergenza.

(b) Scrivere la forma della soluzione generale come somma di due serie intorno al punto $z = 1$ e ricavare la relazione di ricorrenza dei coefficienti della serie che può dare origine ad una soluzione polinomiale.

(c) Determinare per quali valori di α l'equazione ammette una soluzione polinomiale e trovare la soluzione polinomiale di grado 2 sia con la serie al punto (a) che con quella al punto (b).

Soluzione

(a) Poichè il punto $z = 0$ è un punto regolare dell'equazione, cercheremo una soluzione data dalla serie:

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \;.$$

Cerchiamo di determinare i coefficienti c_k della serie. Calcoliamo le derivate

$$u'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^{k-1} \qquad u''(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)c_k\, z^{k-2}$$

e sostituiamole nell'equazione di partenza:

$$(1 - z^2)\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)c_k\, z^{k-2} - z\sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^{k-1} + \alpha\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)c_k\, z^{k-2} - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)c_k\, z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k\, c_k\, z^k + \alpha\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = 0$$

Per portare tutte le potenze di z nella forma z^k, nella prima serie facciamo la sostituzione

$$k' = k - 2, \qquad \text{cioè} \qquad k = k' + 2,$$

ottenendo

$$\sum_{k'=-2}^{+\infty} (k'+2)(k'+1)c_{k'+2}z^{k'} + \sum_{k=0}^{+\infty} [-k(k-1)-k+\alpha]\ c_k\, z^k = 0\ .$$

La serie in k' comincia ora da -2, però per $k'=-2$ e per $k'=-1$ i coefficienti della serie si annullano per la presenza del fattore $(k'+2)(k'+1)$. Quindi possiamo far partire tranquillamente la serie da $k'=0$. Rinominando poi $k' \to k$, otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\{(k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k \left[k^2-\alpha\right]\right\} z^k = 0\ .$$

Otteniamo quindi una serie di Taylor che deve annullarsi ovunque. Affinché ciò possa avvenire, deve annullarsi ogni suo singolo termine

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k \left[k^2-\alpha\right] = 0,$$

da cui si ricava la relazione di ricorrenza

$$c_{k+2} = \frac{k^2-\alpha}{(k+2)(k+1)}\, c_k.$$

Essendo una relazione che lega c_{k+2} a c_k, possiamo esprimere tutti i coefficienti pari in termini di c_0 e quelli dispari in funzione di c_1. Possiamo quindi scrivere la soluzione $u(z)$ nella forma

$$u(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{+\infty} c_k\, z^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{+\infty} c_k\, z^k$$

con c_0 e c_1 costanti di integrazione.

Avendo l'equazione differenziale singolarità in $z=\pm 1$, il raggio di convergenza della soluzione generale intorno a $z=0$ è $\rho=1$.

(b) Essendo

$$P(z) = -\frac{z}{1-z^2} = \frac{z}{z^2-1}, \qquad Q(z) = \frac{\alpha}{1-z^2}.$$

il punto $z=1$ è una singolarità fuchsiana. Ricaviamo e risolviamo l'equazione indiciale in $z=1$:

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{z\to 1}(z-1)\,P(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}; \\ q_0 &= \lim_{z\to 1}(z-1)^2\,Q(z) = -\lim_{z\to 1}(z-1)^2\frac{\alpha}{(z-1)(z+1)} = 0. \end{aligned}$$

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\,\rho + q_0 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \rho\left(\rho - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{1}{2}, \quad \rho_2 = 0.$$

Poiché le due radici non differiscono per un intero, la soluzione generale sarà

$$u(z) = u_1(z) + u_2(z), \quad \text{con} \quad u_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,(z-1)^{k+\frac{1}{2}}, \quad u_2(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k\,(z-1)^k,$$

con $c_0, d_0 \neq 0$. A causa della potenza $1/2$ in u_1, solo $u_2(z)$ può dare origine ad una soluzione polinomiale. Calcoliamone le derivate:

$$u_2'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k d_k (z-1)^{k-1}, \qquad u_2''(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) d_k (z-1)^{k-2}.$$

Prima di sostituire il tutto nell'equazione di partenza, conviene scrivere i polinomi dell'equazione come somme di potenze di $(z-1)$:

$$z = (z-1) + 1, \qquad 1 - z^2 = 1 - [(z-1)+1]^2 = -(z-1)^2 - 2(z-1).$$

Così otteniamo:

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) d_k (z-1)^k - 2\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) d_k (z-1)^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} k d_k (z-1)^k$$
$$-\sum_{k=0}^{+\infty} k d_k (z-1)^{k-1} + \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (z-1)^k = 0.$$

Per portare tutte le potenze di $(z-1)$ nella forma $(z-1)^k$, nella seconda e quarta serie facciamo la sostituzione

$$k' = k - 1, \qquad \text{cioè} \qquad k = k' + 1,$$

ottenendo

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) d_k (z-1)^k - 2\sum_{k'=-1}^{+\infty} (k'+1)k' d_{k'+1} (z-1)^{k'} - \sum_{k=0}^{+\infty} k d_k (z-1)^k$$
$$-\sum_{k'=-1}^{+\infty} (k'+1) d_{k'+1} (z-1)^{k'} + \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (z-1)^k = 0.$$

Le due serie in k' cominciano ora da -1, però per $k' = -1$ i coefficienti delle due serie si annullano per la presenza del fattore $(k'+1)$. Quindi possiamo far partire tranquillamente le due serie da $k' = 0$. Rinominando poi $k' \leftrightarrow k$, otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big[- k(k-1)d_k - 2(k+1)k\, d_{k+1} - k\, d_k - (k+1)d_{k+1} + \alpha\, d_k \Big](z-1)^k = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big[- (k+1)(2k+1)\, d_{k+1} - (k^2 - \alpha)\, d_k \Big](z-1)^k = 0.$$

Otteniamo quindi una serie di Taylor che deve annullarsi ovunque. Affinché ciò possa avvenire, deve annullarsi ogni suo singolo termine:

$$-(k+1)(2k+1)\, d_{k+1} - (k^2 - \alpha)\, d_k = 0, \qquad \forall k \geq 0,$$

da cui segue la seguente relazione di ricorrenza sui coefficienti d_k:

$$d_{k+1} = \frac{\alpha - k^2}{(k+1)(2k+1)}\, d_k.$$

Notiamo che, avendo l'equazione differenziale singolarità in $z = \pm 1$, il raggio di convergenza della soluzione generale intorno a $z = 1$ è $\rho = 2$.

(c) Cerchiamo ora una soluzione polinomiale. Per farlo possiamo scegliere di troncare sia le serie intorno a $z = 0$ sia la serie $u_2(z)$ intorno a $z = 1$.

Se usiamo una delle due serie intorno a $z = 0$ (ponendo uguale a zero la costante d'integrazione dell'altra), affinché questa si tronchi a $k = N$, basta che sia $c_{N+2} = 0$ (dalla relazione di ricorrenza avremo automaticamente che anche $c_{N+4} = c_{N+6} = \cdots = 0$), cioè

$$c_{N+2} = \frac{N^2 - \alpha}{(N+2)(N+1)}\, c_N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = N^2\,.$$

Se usiamo la serie $u_2(z)$ intorno a $z = 1$, affinché si tronchi a $k = N$, basta che sia $d_{N+1} = 0$ (dalla relazione di ricorrenza avremo automaticamente che anche $d_{N+2} = d_{N+3} = \cdots = 0$), cioè

$$d_{N+1} = \frac{\alpha - N^2}{(N+1)(2N+1)}\, d_N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = N^2\,.$$

Pertanto la condizione per avere una soluzione polinomiale di grado N è:

$$\alpha = N^2 \qquad \text{con} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Per trovare la soluzione di secondo grado $P_2(z)$ possiamo usare sia la serie con potenze pari intorno a $z = 0$, sia la serie $u_2(z)$ intorno a $z = 1$:

– Serie con potenze pari intorno a $z = 0$:

$$N = 2, \quad \alpha = N^2 = 4, \quad c_{k+2} = \frac{k^2 - 4}{(k+2)(k+1)}\, c_k.$$

$$c_2 = \frac{0^2 - 4}{(0+2)(0+1)}\, c_0 = -2\, c_0 \quad \Rightarrow \quad P_2(z) = c_0(1 - 2\, z^2).$$

– Serie $u_2(z)$ intorno a $z = 1$:

$$N = 2, \quad \alpha = N^2 = 4, \quad d_{k+1} = \frac{4 - k^2}{(k+1)(2k+1)}\, d_k.$$

$$d_1 = \frac{4 - 0^2}{(0+1)(0+1)}\, d_0 = 4\, d_0, \qquad d_2 = \frac{4 - 1^2}{(1+1)(2+1)}\, d_1 = \frac{1}{2}\, d_1 = 2\, d_0$$

Perciò

$$\begin{aligned} P_2(z) &= d_0 + 4\, d_0\, (z-1) + 2\, d_0 (z-1)^2 \\ &= (d_0 - 4d_0 + 2d_0) + (4d_0 - 4d_0)\, z + 2 d_0 z^2 \\ &= -d_0(1 - 2\, z^2). \end{aligned}$$

Verifichiamo che il polinomio $P_2(z)$ sia effettivamente soluzione dell'equazione differenziale (con $\alpha = 4$).

$$P_2(z) = c_0(1 - 2\, z^2), \qquad P_2'(z) = -4\, c_0\, z, \qquad P_2''(z) = -4\, c_0. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (1 - z^2)\, P_2''(z) - z\, P_2'(z) + 4\, P_2(z) &= -4c_0(1 - z^2) + 4c_0 z^2 + 4c_0(1 - 2\, z^2) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$