



# **Geometria e Algebra lineare**

Riassunto da: ""

corso A  
Università degli studi di Torino, Torino  
settembre 2023

# Indice

<b>1 Sistemi di equazioni lineari</b>	<b>2</b>
1.1 Sistemi omogenei . . . . .	3
<b>2 Matrici</b>	<b>5</b>
2.1 Operazioni tra matrici . . . . .	5
Prodotto come combinazione lineare . . . . .	6
La trasposta di una matrice . . . . .	6
2.2 Determinante . . . . .	8
Calcolo del determinante . . . . .	8
Come cambia il determinante dopo le 3 mosse? . . . . .	8
2.3 Teoremi di Laplace . . . . .	9
Primo Teorema di Laplace . . . . .	10
Secondo Teorema di Laplace . . . . .	10
2.4 Matrici inverse . . . . .	10
Calcolo della matrice inversa 1 . . . . .	12
Calcolo della matrice inversa 2 . . . . .	12
2.5 Teorema di Cramer . . . . .	12
<b>3 Prodotto scalare e vettoriale</b>	<b>13</b>
3.1 Proprietà del prodotto scalare . . . . .	13
3.2 Interpretazione geometrica del prodotto scalare . . . . .	14
3.3 Prodotto vettoriale . . . . .	14
Proprietà del prodotto vettoriale . . . . .	15
Interpretazione geometrica del prodotto vettoriale . . . . .	15
3.4 Prodotto misto . . . . .	15
<b>4 Spazi Vettoriali</b>	<b>16</b>
Proprietà della somma . . . . .	16
Proprietà del prodotto . . . . .	16
4.1 Sottospazi vettoriali . . . . .	16
+ Somma di due sottospazi . . . . .	17
$\cap$ Intersezione di due sottospazi . . . . .	18
4.2 Combinazione lineare . . . . .	18
4.3 Indipendenza lineare . . . . .	19
4.4 Basi . . . . .	20
4.5 Cambiamento di base . . . . .	20
Metodo per trovare la matrice di cambiamento di base . . . . .	21
4.6 Spazio delle righe, delle colonne, Nullspace . . . . .	21
4.7 Rank . . . . .	21
<b>5 Applicazioni Lineari</b>	<b>22</b>
<b>6 Autovettori, autovalori</b>	<b>23</b>
6.1 Automorfismi e sottospazi invarianti . . . . .	23
6.2 Autovettori e autovalori . . . . .	23
<b>7 Diagonalizzazione</b>	<b>25</b>
7.1 Criteri di diagonalizzabilità . . . . .	25
7.2 Endomorfismi autoaggiunti . . . . .	27
<b>8 Forme bilineari</b>	<b>30</b>
8.1 Diagonalizzazione . . . . .	30

# 1 Sistemi di equazioni lineari

Prima di parlare di sistemi definiamo cosa si intende per *equazione lineare*: un'equazione lineare è un'uguaglianza del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

espressa nelle incognite  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Un'equazione di questo genere ha come soluzione una n-upla di numeri reali che sostituiti al posto delle incognite rende vera l'uguaglianza (la *risoluzione* dell'equazione consiste nel trovare questa n-upla).

*esempio*

Definiamo un'equazione  $*$ :  $x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$  con  $x_1 = x_2 - 2x_3 + 4$

L'insieme delle soluzioni di  $*$  lo indichiamo con  $S_*$   $S_* = \left\{ (x_2 - 2x_3 + 4, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$  In cui  $x_2$  e  $x_3$  sono i parametri liberi che variano.

*esempio*

Utilizzando un'altra equazione  $*$ :  $2x - 3y = 0$

L'insieme delle sue soluzioni sarà:  $S_* = \left\{ (xy) : x, y \in \mathbb{R} \right\}$  oppure tramite un parametro  $t$  per il quale  $\left\{ x = ty = \frac{2}{3}t, t \in \mathbb{R} \right\}$   $S_* = \left\{ (t, \frac{2}{3}t) : t \in \mathbb{R} \right\}$

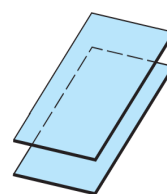
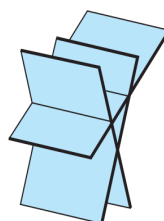
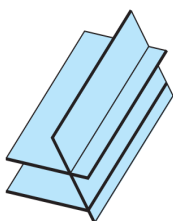
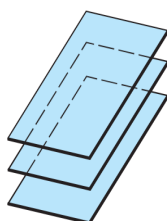
Definiamo invece un *sistema lineare* di  $r$  equazioni lineari in  $n$  incognite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una struttura del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

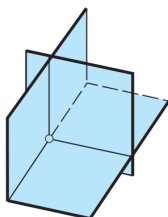
i coefficienti sono espressi nella forma  $a_{ij}$  per agevolarne il riconoscimento all'interno del sistema. Il pedice  $i$  indica l'indice di riga, il pedice  $j$  è l'indice di colonna. I termini noti  $b$  presentandosi una sola volta per riga hanno solo l'indice di riga. Se i termini noti sono tutti nulli il sistema si dirà **omogeneo**

Diremo soluzione del sistema una n-upla di numeri reali  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  che risolve ciascuna delle equazioni

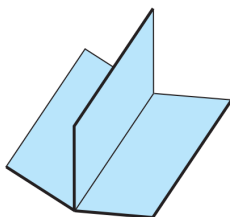
del sistema. Il sistema si dice **compatibile** se ammette soluzioni (altrimenti **incompatibile**). Due sistemi sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.



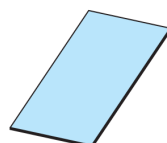
Nessuna soluzione



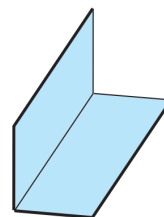
Una soluzione



$\infty$  soluzioni  
(1 par. libero)



$\infty$  soluzioni  
(3 par. liberi)



$\infty$  soluzioni  
(1 par. libero)

*Teorema di Rouché-Capelli*

Un sistema lineare  $AX = B$  con  $A \in \mathbb{R}^{r,n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n,p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r,p}$  è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa. Se il sistema è compatibile, le soluzioni dipendono da  $p \cdot (n - \text{rk} A)$  parametri liberi.

$$\text{rk}(A|\bar{b}) = \text{rk}(A) \Rightarrow \text{sistema compatibile}$$

Poiché si opera solo sui coefficienti e non sulle incognite, i calcoli su essi risultano facilitati tramite l'utilizzo di tabelle (matrici). Un sistema quindi, nella sua forma matriciale (completa perché contiene anche i termini noti) il sistema si presenta così:

$$(A|\bar{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,n} & b_r \end{array} \right)$$

In questa forma la matrice è scomponibile e riscrivibile come il prodotto scalare tra il vettore dei coefficienti  $\bar{a}$  e il vettore delle incognite  $\bar{x}$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

## 1.1 Sistemi omogenei

Particolarità dei sistemi omogenei è il fatto che operando sulle righe, non si va ad alterare sulla colonna di zeri. Ogni sistema omogeneo ricade in due possibili scenari:

1. Ha solo la soluzione banale;
2. Ha altre infinite soluzioni oltre quella banale.

*Teorema: parametri liberi*

Se un sistema lineare omogeneo ha  $n$  incognite e nell sua forma ridotta la sua matrice completa ha  $\text{rank} A = n$  (nessuna riga nulla), allora

$$\text{parametri liberi} = n - \text{rank} A.$$

Se conosco una soluzione  $x_0$  di  $\Sigma$ , sommandoci una qualsiasi soluzione del suo sistema associato  $\Sigma_0$  Un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice completa.

Diciamo di avere un sistema molto semplice a un'equazione è il suo sistema omogeneo associato:

$$\Sigma: 3x - y = 5 \quad \rightarrow y = 3x - 5$$

$$\Sigma_0: 3x - y = 0 \quad \rightarrow y = 3x.$$

Le soluzioni di  $\Sigma$  saranno:

$$S(\Sigma): \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x - 5 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

di  $\Sigma_0$  invece:

$$S(\Sigma_0): \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Le soluzioni di  $\Sigma$  possono essere riscritte come una soluzione particolare (prendiamo quella con  $x = 0$ ) sommata a tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato:

$$S(\Sigma) : \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

*dimostrazione*

Iniziamo provando che la somma di due soluzioni di un sistema omogeneo rimane una soluzione:

$$A\bar{x} = \bar{0} \quad (\Sigma_0)$$

$$A\bar{y} = \bar{0} \quad (\Sigma_0)$$

$$\bar{x}, \bar{y} \in S(\Sigma_0)$$

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in S(\Sigma_0)$$

Ovvio anche che  $\lambda\bar{x}$  o  $\lambda\bar{y}$  entrambi  $= 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

Proviamo poi che la somma di due soluzioni di  $\Sigma$  *non è mai* soluzione di  $\Sigma$

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (\Sigma)$$

$$A\bar{y} = \bar{b} \quad (\Sigma)$$

$$\bar{x}, \bar{y} \in S(\Sigma)$$

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = \bar{b} + \bar{b} = 2\bar{b}$$

Infine proviamo che una soluzione di  $\Sigma$  + una qualsiasi soluzione di  $\Sigma_0$  è sempre una soluzione di  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} \in S(\Sigma), \quad \bar{y} \in S(\Sigma_0) &\Rightarrow A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = \bar{b} + \bar{0} \\ &= \bar{b} \end{aligned}$$

## 2 Matrici

Definiamo una matrice di  $r$  righe e  $n$  colonne con  $a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n$  definita nello spazio  $\mathbb{R}^{r \times n}$  in questo modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,n} \end{bmatrix}$$

Esistono matrici **quadrate** se hanno stesso numero di righe e di colonne ( $\mathbb{R}^{nn}$ ), **diagonali** se tutti gli elementi sono zero tranne quelli sulla diagonale maggiore (matrice *unità* se la diagonale contiene solo 1), **nulle** se tutti gli elementi sono zero, **riga** se hanno una riga sola, **colonna** se hanno una colonna sola.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [1 \ 2 \ 3] \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Definizione: matrice ridotta

Una matrice si dice **ridotta** se in ogni sua riga *non nulla* esiste un elemento sotto al quale ci sono solo zeri, questo elemento viene chiamato *pivot*. Se una matrice è ridotta chiameremo *rango della matrice* il numero di righe non nulle in essa:  $rk(A) \leq \min\{r, n\}$ .

Definizione: matrice a scala

Chiameremo *primo pivot* il primo pivot nella prima riga partendo da sinistra. Una matrice si dice **a scala se è ridotta** e se la riga  $R_i$  è tutta fatta di zeri e, quindi, anche la riga  $R_j$  per ogni  $j > i$ ; ovvero:

$$R_i = \bar{0} \Rightarrow R_j = \bar{0} \quad \forall j > i$$

Se la riga  $R_i \neq \bar{0}$  il *primo pivot* di  $R_i$  è strettamente a destra del primo pivot di  $R_{i-1}$ .

**Proposizione** Il rango di una matrice  $A$  non supera mai il minimo fra il numero di righe e di colonne.

$$rk(A) \leq \min\{r, n\}$$

*dimostrazione*

Sia  $B'$  la riduzione a scala di  $B$ .

Sappiamo che  $r_2$  di  $B'$  comincia con almeno uno zero,  $r_3$  con almeno 2 zeri,  $r_4$  con almeno 3 zeri e così via.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{n+1} \text{ è tutta di zeri} \Rightarrow R_j \text{ è tutta di zeri } \forall j \geq n+1$$

Se il rango è il numero di righe non nulle, e le righe dalla  $n+1$  in poi sono tutte nulle, allora il rango è sicuramente minore o uguale a  $n$ . ■

### 2.1 Operazioni tra matrici

E' ammessa la somma tra matrici dello stesso ordine  $\mathbb{R}^{r \times n}$  e sono ammesse la proprietà commutativa, associativa, esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'opposto. Il prodotto  $A \cdot B$  è ammesso se il numero di righe della prima è uguale al numero di colonne della seconda, ovvero se  $A \in \mathbb{R}^{r \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Per il prodotto sono valide la proprietà associativa, la distributiva del prodotto rispetto alla somma.

## Prodotto come combinazione lineare

Un altro modo per descrivere il prodotto tra matrici è come *combinazione lineare di vettori colonna*:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

può anche essere scritto come:

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

## La trasposta di una matrice

Definizione: matrice trasposta

Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{r,n}$ , si dice trasposta di  $A$  ( ${}^t A$ ) la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne di  $A$ : Se  $A = (a_{ij})$ ,  ${}^t A = (a_{ji})$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad {}^t A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

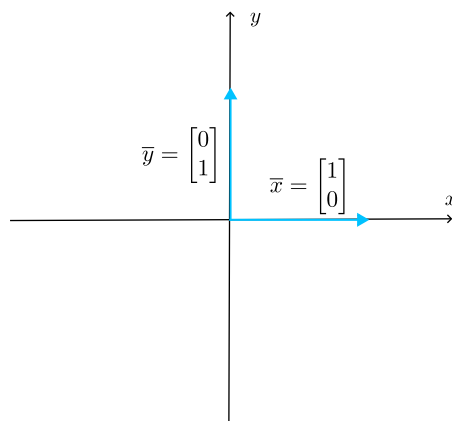
Proprietà delle matrici trasposte:

1.  ${}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B$ ;
2.  ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

## Interpretazione geometrica delle matrici

Dopo aver parlato di vettori, approfondiamo il concetto di *matrice* e il suo comportamento come *spazio vettoriale*. Più in particolare vedremo il prodotto tra matrici come trasformazioni lineari dello spazio vettoriale (linearmente perché nessuna linea viene curvata e l'origine rimane fissata). Questa interpretazione di una matrice rende i conti più facili ed intuitivi.

Diciamo di avere due vettori giacenti sui due assi:

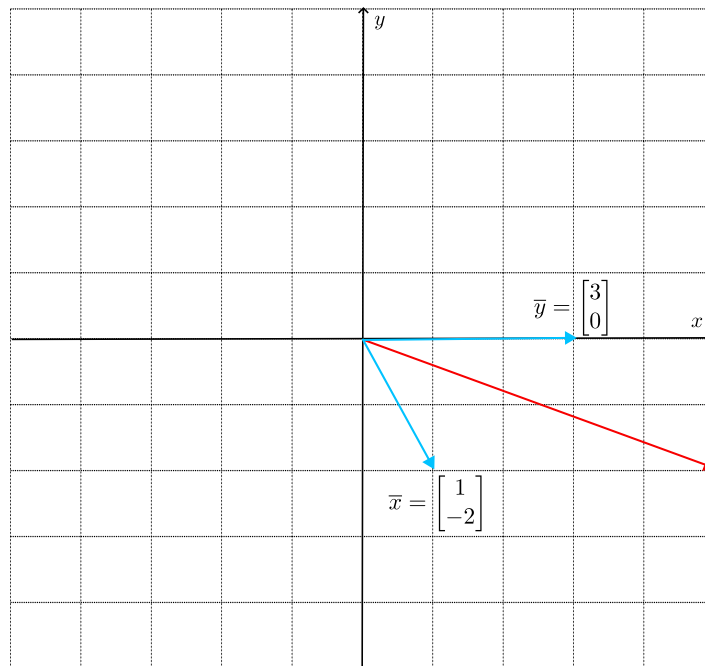


Diciamo ora di avere una matrice  $A$  che descrive dove questi due vettori cadono a seguito della trasformazione da essa descritta; la matrice  $A$  basta per descrivere dove cadrà ogni vettore  $(x,y)$ .

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se, come abbiamo detto prima, le linee non vengono deformate, il vettore che nel primo grafico sarebbe stato  $(1,1)$ , nel secondo è intuitivo pensare che ora sia  $(4,-2)$ ; Il prodotto tra le matrici lo conferma.



Possiamo arrivare alla conclusione che ogni matrice può essere interpretata come una trasformazione dello spazio, a prescindere dall'ordine della matrice.

**Prodotto come composizione di trasformazioni** Se applichiamo più trasformazioni consecutive, quindi tramite più matrici, interpretiamo la composizione di queste trasformazioni come il prodotto tra le matrici.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'ordine di composizione va letto da destra verso sinistra: viene eseguita prima la **blu**, poi la **rossa** (cosa tipica delle notazione delle funzioni:  $f(g(x))$ ).

Pensando in questi termini, prodotto come composizione di trasformazioni, comprendiamo perché  $AB \neq BA$ ; e la proprietà associativa diventa chiara e logica:  $A(BC) = (AB)C$  in quanto l'ordine delle trasformazioni rimane invariato.

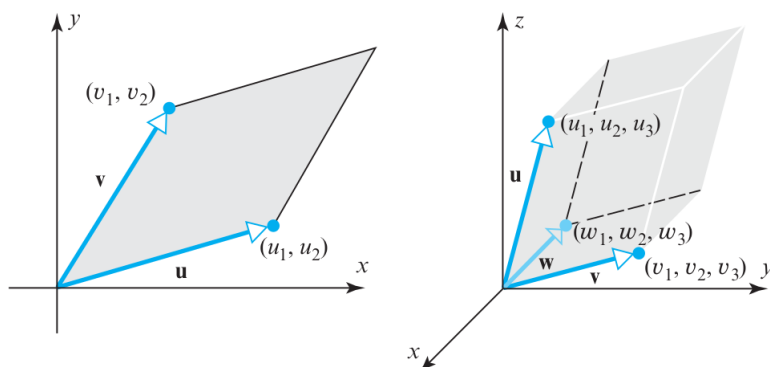


## 2.2 Determinante

### Interpretazione geometrica del determinante

Il determinante di una matrice geometricamente rappresenta il fattore di "stretching" di un'area, o volume tridimensionale o n-dimensionale (qualunque cosa sia).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 3$$



### Calcolo del determinante

Il determinante di una matrice è una funzione  $\det : \mathbb{R}^{nn} \Rightarrow \mathbb{R}$  che verifica queste due proprietà:

1. Se  $a$  è un numero reale, ossia una matrice di ordine uno quadrata, allora  $\det(a) = a$ .
2. Se  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  allora  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Dallo sviluppo del caso due notiamo che compaiono due addendi ciascuno dei quali è il prodotto di due fattori. I due fattori nei due prodotti di iniziano entrambi uno con un 1 e uno con un 2 per poi seguire con le *permutazioni di (1, 2)* : (1, 2), (2, 1). Perché il secondo prodotto ha un  $-$  davanti? Il segno è dettato dalla *parità* della permutazione, ovvero: per arrivare alla coppia (1, 2) si devono attuare degli scambi, se il numero di scambi è pari, il segno non cambia, se gli scambi sono dispari, il segno cambia.

esempio

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

Definizione: determinante

Il determinante di una matrice quadrata  $A = (a_{ij})$  di ordine  $n$  è dato da:

$$\sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

dove  $\sigma$  è una qualsiasi permutazione dei numeri  $1, 2, \dots, n$  e  $\epsilon(\sigma)$  è il suo segno.

### Come cambia il determinante dopo le 3 mosse?

1.  $\det^t(A) = \det(A)$ ;
2. Se  $A'$  si ottiene scambiando due righe o due colonne di  $A$ , allora  $\det(A') = -\det(A)$ ;
3. Se faccio moltiplico una riga per un numero reale  $\lambda$  allora  $\det(A^1) = \lambda^n \det(A)$ ;

4. Se aggiungo a una riga un multiplo di un'altra riga il determinante non cambia;
5. Una matrice con due righe o colonne uguali ha determinante nullo;
  - (a) data la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $rk(A) = n \iff \det(A) \neq 0$
  - (b) analogamente  $rk(A) < n \iff \det(A) = 0$
6.  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$
7. **Teorema di Binet:**  $\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ ;
8.  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ ;

*dimostrazione determinante (2)*

È conseguenza della definizione di determinante e del fatto che lo scambio di due righe comporta il cambiamento di segno di ciascuna permutazione. Per esempio, nel caso della matrice quadrata di ordine 2 si ha:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Se scambio due righe:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{11} + a_{21}a_{12}$$

■

*dimostrazione determinante (5a)*

Operando su una matrice  $A$  e la rendo  $A'$  a scala triangolare superiore. So allora che  $\det(A') = \lambda \cdot \det(A)$  e  $\det(A) \neq 0 \iff \det(A') \neq 0$ . Quindi  $a'_{ij} \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .  
Cioè  $A'$  ha  $n$  righe non nulle, quindi  $rk(A') = n$ .

■

*dimostrazione determinante (8)*

Per il teorema di Binet:

$$AA^{-1} = I \quad A^{-1} = \frac{I}{A} \quad \det(A^{-1}) = \det\left(\frac{I}{A}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

■

**osservazioni su matrici inverse** Se il determinante di una matrice è uguale a zero, significa che la matrice è non invertibile. Questo perché il determinante descrive, anche se non esplicitamente, il numero di soluzioni del sistema di equazioni associato.

Il determinante è infatti strettamente legato al **rango**: se il rango, ovvero il numero di righe non nulle, di una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  è minore di  $n$  sappiamo che il determinante vale 0 e che di conseguenza il sistema *non può avere una singola soluzione*. Infatti se la matrice ha una riga nulla o più, le soluzioni saranno infinite e legate a uno o più parametri liberi.

Se il sistema associato alla matrice  $A$  non ha una singola soluzione è chiaro come non possa esistere una matrice  $A'$  inversa che soddisfi:

$$AA^{-1} = I \quad A^{-1} = \frac{I}{A}$$

L'equazione ha infatti una sola soluzione se e solo se  $A$  fosse unicamente definita.

## 2.3 Teoremi di Laplace

I teoremi di Laplace permettono di semplificare i conti nel calcolo del determinante di una matrice  $n \times n$  a conti di un determinante  $(n-1) \times (n-1)$ . I conti vengono semplificati perché si procede a scegliere un elemento  $a_{ij}$  nella matrice (vedremo perché di solito è uno in una riga o colonna con tanti zeri), "nascondendo" tutti gli elementi della riga e colonna del nostro candidato e andremo a calcolare il determinante della matrice "rimanente", questo determinante lo chiameremo **minore** di  $a_{ij}$  e lo indichiamo con  $M_{ij}$ . Ora serve definire il **cofattore**; il cofattore di  $a_{ij}$  è il numero  $A_{ij}$  definito dalla formula:

$$A_{ij} = (-1)^{ij} \cdot M_{ij}$$

Vediamo come il fattore  $(-1)^{ij}$  da segno positivo o negativo se la posizione di  $a_{ij}$  è pari o dispari ( $a_{11}$  è pari,  $a_{12}$  è dispari...).

### Primo Teorema di Laplace

Fissata la riga  $i$ -esima, il determinante di una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  è dato dalla somma di tutti i prodotti tra gli elementi della riga e i rispettivi cofattori (questo metodo funziona anche con le colonne) :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

### Secondo Teorema di Laplace

In una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  la somma dei prodotti tra gli elementi di una riga (o colonna) e i cofattori di una riga parallela è zero:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} \\ &= \sum_{h=1}^n a_{hi} A_{hj} \quad i \neq j \end{aligned}$$

*verifica*

È conseguenza evidente della proprietà (2) del determinante secondo la quale *se scambio due righe o colonne a una matrice allora il suo determinante cambia di segno*. Si può interpretare come lo sviluppo del determinante di una matrice in cui, nel primo caso, la riga  $j$ -esima coincide con la riga  $i$ -esima e nel secondo caso, la colonna  $j$ -esima coincide con la riga  $i$ -esima.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Se per esempio scegliamo di moltiplicare gli elementi della prima riga per i complementi della seconda abbiamo:

$$\begin{aligned} &a \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= abi - ach - bai + bcg + cah - cbg = 0 \end{aligned}$$

## 2.4 Matrici inverse

Definizione: matrice invertibile

Una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  si dice invertibile se  $\exists$  una matrice  $X$  tale che  $AX = XA = I$ .

### Proprietà generali delle matrici inverse

1. Se esiste una matrice inversa allora questa è univocamente determinata e la chiamo  $A^{-1}$ ;
2.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
3. Se  $A, B$  sono invertibili non è detto che lo sia  $A + B$ ;
4.  $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

*dimostrazione (1)*

Supponiamo che  $X$  e  $X'$  soddisfino:

$$XA = I = AX$$

$$X'A = I = AX'$$

$$XAX = \begin{matrix} (XA)X' = IX' = X' \\ X(AX') = XI = X \end{matrix} \rightarrow XA = AX'$$

Abbiamo dimostrato che se esiste una  $X$  inversa a sinistra per  $A$  ed esiste una  $X'$  inversa a destra per  $A$ , allora  $X = X'$  e quindi  $A$  è invertibile e  $X$  è la sua inversa.

*dimostrazione (2)*

Vedo se la candidata ad inversa  $B^{-1}A^{-1}$  soddisfa le proprietà richieste:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = \dots = I$$

■

*Teorema*

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , se  $\det(A) \neq 0$  allora esiste l'inversa di  $A$  ed è:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

*dimostrazione*

Dai teoremi di Laplace so che:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

ovvero che la somma dei prodotti tra tutti gli elementi di una riga di  $A$  e i rispettivi cofattori è uguale o a 0 o al determinante di  $A$ .

Ovvero che il prodotto tra la matrice  $A$  e la trasposta della matrice dei cofattori di  $A$  ( $\text{adj}A$ ) si può scrivere come:

$$A \cdot \text{adj}A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix} = \det A \cdot I$$

Possiamo notare quindi che dopo le opportune operazioni ci si riconduce alla formula iniziale. ■

*Teorema*

Una matrice  $A$  è invertibile  $\iff$  il rango è massimo ( $\text{rk}A = n$ ).

Possiamo dire che risolvere  $Ax = I$  sia equivalente a scrivere  $x$  per colonne e risolvere il seguente sistema:

$$(*) \begin{cases} A\bar{x}_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ A\bar{x}_2 = (0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \end{cases}$$

*dimostrazione*

$\Rightarrow$  (dimostro che il rango è massimo) So che  $A$  è invertibile: esiste  $A^{-1}$ .  
Considero:

$$A^{-1} A \cdot \bar{x}_1 = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow I \cdot \bar{x}_1 = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x}_1 = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{esiste una sola soluzione} \Rightarrow \text{par. lib.} = 0 \Rightarrow \text{rk} A = n$$

### Calcolo della matrice inversa 1

Il primo metodo consiste nello svolgimento di un'equazione matriciale:

$$AX = I$$

Che si risolve come:

$$(A|I) = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

### Calcolo della matrice inversa 2

Possiamo calcolare la matrice inversa anche a partire dalla nozione di determinante dopo aver parlato dei teoremi di Laplace.

Definizione: matrice aggiunta

Si dice **matrice aggiunta** di  $A$  la trasposta della matrice contenente i *cofattori* di  $A$ :

$$\text{Adj}(A)_{ij} = [A_{ji}]$$

Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

I teoremi di Laplace più la matrice adiacente ci permettono di determinare in modo esplicito la formula dell'inversa.

## 2.5 Teorema di Cramer

Subito dopo aver descritto un nuovo modo per calcolare la matrice inversa vediamo come può tornare utile nella risoluzione di sistemi lineari con  $n$  incognite e  $n$  equazioni.

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \cdot \bar{b}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 & A_{12}b_2 & \dots & A_{1n}b_n \\ A_{21}b_1 & A_{22}b_2 & \dots & A_{2n}b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}b_1 & A_{n2}b_2 & \dots & A_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

da cui:

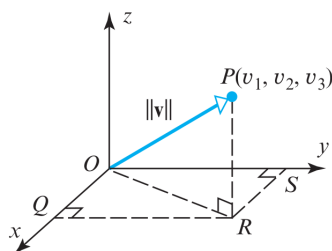
$$x_i = \frac{1}{\det(A)} (b_1 A_{2i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni})$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \det(\bar{a}_1 | \bar{a}_2 \dots | \bar{b} | \dots | \bar{a}_n)$$

### 3 Prodotto scalare e vettoriale

Prima di parlare di prodotto scalare è necessario introdurre due concetti fondamentali:

1. **Lunghezza** di un vettore che d'ora in poi chiameremo *norma*;
2. **Angolo** tra due vettori.

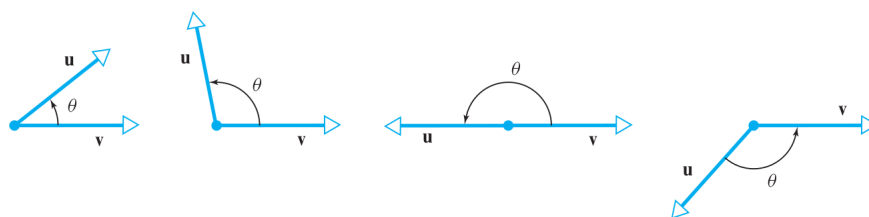


La norma del vettore è definita dalla formula:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Vedremo come saranno di estrema importanza i vettori di norma 1, o vettori unitari. Per esempio in  $V_3$  i vettori unitari sono  $i, j, k$ . In generale per *normalizzare* un vettore basta dividerlo per la sua lunghezza, quindi per la sua norma:

$$u = \frac{v}{\|v\|}.$$



Per quanto riguarda l'angolo tra due vettori invece prenderemo in considerazione solo la parte compresa tra 0 e  $\pi$ .

Ora che sappiamo cosa sono norma di un vettore e angolo tra vettori possiamo parlare di **prodotto scalare**. E' infatti necessario introdurre un'operazione moltiplicativa "utile" per vettori in  $\mathbb{R}^2$  e in  $\mathbb{R}^3$ .

Definizione: prodotto scalare

Il prodotto scalare (in  $V_3$ )  $x \cdot y$  di due vettori  $x$  e  $y$  in  $V_3$  è la funzione:

$$\cdot: V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

così definita:

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \hat{x}y.$$

Dalla definizione troviamo altre due espressioni di norma e angolo (notare come ora il concetto di angolo sia esteso a tutto  $\mathbb{R}^n$ ):

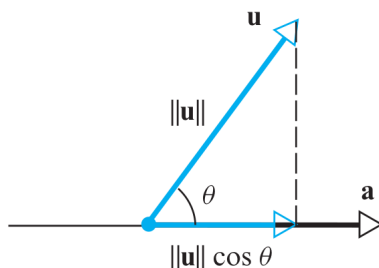
$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} \quad \cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

#### 3.1 Proprietà del prodotto scalare

- $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in V_3$ ;
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ ;
- $(\lambda x) \cdot z = \lambda x \cdot z = x \cdot (\lambda z)$ ;
- $x \cdot x \geq 0 \quad = 0 \iff x = 0$ .

### 3.2 Interpretazione geometrica del prodotto scalare

Il prodotto scalare  $\|a\| \|u\| \cos \theta$  non è altro che il prodotto della lunghezza di uno dei due vettori ( $\|a\|$ ) per la proiezione ortogonale con segno dell'altro sul primo ( $\|u\| \cos \theta$ ).



*Teorema: vettore proiezione ortogonale*

Dati due vettori  $x$  e  $y$  non nulli il vettore proiezione ortogonale di  $y$  su  $x$  è:

$$p = \frac{x \cdot y}{\|x\|^2} x.$$

*dimostrazione*

Il mio obiettivo è quello di scrivere la proiezione di  $u$  su  $a$  in questa forma:

$$p = * \frac{a}{\|a\|}.$$

dove "\*" indica la lunghezza della proiezione. Guardando la figura in alto sappiamo che la proiezione  $\|p\| = \|u\| \cos \theta$ . Quindi:

$$p = \|u\| \cos \theta \frac{a}{\|a\|}.$$

Per eliminare il coseno di theta risaliamo alla formula di prodotto scalare:

$$u \cdot a = \|u\| \|a\| \cos \theta \quad \longrightarrow \quad \|u\| \cos \theta = \frac{u \cdot a}{\|a\|}.$$

Quindi:

$$p = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a.$$

*Teorema di Pitagora generalizzato*

Dati  $u$  e  $v$  vettori ortogonali tra loro in  $\mathbb{R}^n$  con prodotto standard, allora

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

la dimostrazione è molto semplice, il termine  $2u \cdot v$  vale zero.

### 3.3 Prodotto vettoriale

*Definizione: prodotto vettoriale*

Il prodotto vettoriale (in  $V_3$ )  $x \cdot y$  di due vettori  $x$  e  $y$  in  $V_3$  è la funzione:

$$\wedge : V_3 \times V_3, \quad \longrightarrow \quad (x, y) \mapsto x \wedge y.$$

così definita:

$$x \wedge y = \|x \wedge y\| \|x\| \|y\| \sin \hat{x}y.$$

Il verso del vettore risultante dal prodotto vettoriale ha il verso che segue la *regola della mano destra*. Possiamo anche scrivere il prodotto scalare tramite lo sviluppo di determinanti in questo modo:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j, + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k \right).$$

### Proprietà del prodotto vettoriale

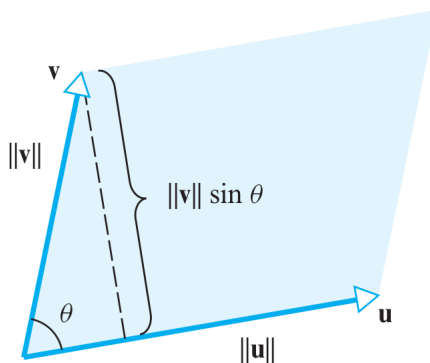
- $u \wedge v = -(v \wedge u)$  ;
- $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$  ;
- $k(u \wedge v) = ku \wedge v = u \wedge kv$  ;
- $u \wedge u = 0$

### Interpretazione geometrica del prodotto vettoriale

Dati  $u$  e  $v$  vettori in uno spazio tridimensionale, dall'identità di Lagrange sappiamo che:

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \\ &= -\|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Da questo possiamo notare che il prodotto vettoriale può essere inteso anche come area del parallelogramma che ha come lati i due vettori.



## 3.4 Prodotto misto

Definizione: Prodotto misto

Dati due vettori  $u$  e  $v$ , allora

$$u \cdot (v \wedge w).$$

è chiamato prodotto misto di  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

Geometricamente il prodotto misto rappresenta  $\frac{1}{6}$  del volume del tetraedro formato dai tre vettori.



## 4 Spazi Vettoriali

Definizione: Spazio Vettoriale

Si definisce **spazio vettoriale** sul campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$  un certo insieme  $V$  nel quale sono definite le seguenti operazioni:

1. somma  $+$ :  $V \times V \longrightarrow V$ .

2. prodotto  $\cdot$ :  $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ .

Un gruppo  $(V, \times)$  si dice *commutativo* (o Abeliano) se  $v \times y = y \times v \quad \forall x, y \in V$

### Proprietà della somma

1. commutativa:  $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$

2. associativa:  $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y \in V$

3. esistenza dell'elemento neutro:  $\exists 0 \in V : 0 + x = x + 0, \quad \forall x, y \in V$

4. esistenza dell'opposto:  $\forall x \in V \exists -x \in V : x + (-x) = (-x) + x = 0$

### Proprietà del prodotto

1. (diciamo) distributiva:  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2.  $(\lambda + \mu) \cdot \bar{x} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x}, \quad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.  $(\lambda \cdot \mu) \bar{x} = \lambda(\mu \cdot \bar{x}), \quad \forall x, y \in V$

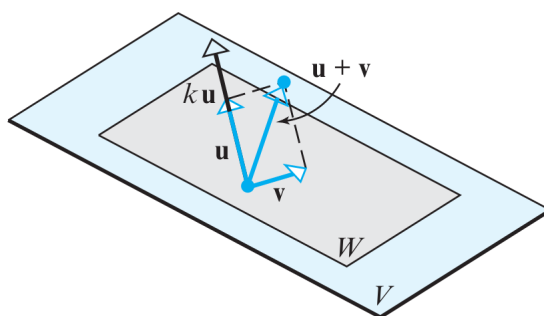
4.  $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}, \quad \forall x, y \in V$

### 4.1 Sottospazi vettoriali

Definizione: sottospazio vettoriale

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale,  $W \subseteq V$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  se  $W$  è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di  $V$ , quindi rispetto alle operazioni di *somma* e *prodotto*.

- Se ho 2 elementi  $\bar{x}, \bar{y} \in W \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in W$ ;
- Se ho 2 elementi  $\bar{x} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \bar{x} \in W$ .



In figura vediamo come  $u$  e  $v$  siano contenuti in  $W$  ma la loro somma no.

*Esempio fondamentale di sottospazio vettoriale*

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di  $m$  equazioni in  $n$  incognite è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$ . L'insieme delle soluzioni di

$$AX = O \quad A \in \mathbb{R}^{m,n}, X \in \mathbb{R}^{n,1}, O \in \mathbb{R}^{m,1}$$

è detto *nullspace* e coincide con l'insieme

$$N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n | AX = O\}$$

Dati  $X_1$  e  $X_2 \in N(A)$  si deve dimostrare che

$$\lambda X_1 + \mu X_2 \in N(A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

che sviluppando

$$A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda AX_1 + \mu AX_2 = O.$$

### + Somma di due sottospazi

La somma di due sottospazi è il più piccolo sottospazio contenente l'unione dei due e si esprime come l'insieme di tutti i vettori ottenuti dalla somma di vettori appartenenti ai sottospazi sommati.

$$W_1 + W_2 = \{\bar{x} \in V : \bar{x} = \bar{y} + \bar{z} \quad y \in W_1, \quad z \in W_2\}.$$

Quindi  $W_1 + W_2$  contiene  $W_1$  e contiene  $W_2$  e  $W_1 + W_2$  è sottospazio.

*dimostrazione*

Possiamo dire che è sottospazio se la somma tra ogni vettore ricade in esso così come il prodotto tra ogni vettore e uno scalare.

Prendiamo due vettori  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  entrambi  $\in W_1 + W_2$ :

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad \bar{x}_1 \in W_1, \quad \bar{x}_2 \in W_2.$$

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \quad \bar{y}_1 \in W_1, \quad \bar{y}_2 \in W_2.$$

$$\begin{aligned} (+) \Rightarrow \quad \bar{x} + \bar{y} &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \\ &= (\bar{x}_1 + \bar{y}_1) + (\bar{x}_2 + \bar{y}_2) \Rightarrow \in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cdot) \Rightarrow \quad \lambda(\bar{x} + \bar{y}) &= \lambda\bar{x}_1 + \lambda\bar{x}_2 + \lambda\bar{y}_1 + \lambda\bar{y}_2 \\ &= \lambda(\bar{x}_1 + \bar{y}_1) + \lambda(\bar{x}_2 + \bar{y}_2) \Rightarrow \in W_1 + W_2 \end{aligned}$$

**Definizione: Somma diretta**

$(V, +, \cdot)$  spazio vettoriale,  $W_1, W_2 \leq V$ . Diciamo che la somma  $W_1 + W_2$  è una somma diretta se ogni  $\bar{x} \in W_1 + W_2$  si scrive in modo unico come  $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$  con  $\bar{x}_1 \in W_1$  e  $\bar{x}_2 \in W_2$ .

La somma verrà scritta come:

$$W_1 \oplus W_2 = V.$$

**Proposizione** In  $V$  spazio vettoriale,  $W_1, W_2 \leq V$ . Allora:

$$W_1 \text{ e } W_2 \text{ sono in somma diretta} \iff W_1 \cap W_2 = \{\bar{0}\}.$$

*dimostrazione*

$\Leftarrow$  se esiste un  $x$  con almeno 2 decomposizioni  $\Rightarrow \exists \bar{z} \in W_1 \cap W_2, \bar{z} \neq \bar{0}$ .

Prendo allora tale  $\bar{x}$  che si scompone in due coordinate  $x$  e in due  $y$ :

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2, \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2, \quad \bar{y}_1 \neq \bar{y}_2.$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{y}_1 + \bar{y}_2.$$

$$\bar{y}_1 - \bar{x}_1 = \bar{x}_2 - \bar{y}_2 = \bar{z}.$$

Il vettore  $\bar{z}$  è contenuto sia in  $W_1$  sia in  $W_2$ , quindi  $W_1 \cap W_2 \neq \bar{0}$ .

Contronominale: se  $W_1 \cap W_2 \neq \{\bar{0}\} \Rightarrow$  non ho unicità di scrittura

$\Rightarrow$  Se  $\bar{z} \in W_1 \cap W_2, \bar{z} \neq \bar{0}$ .

$$x \in W_1 + W_2.$$

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{z} + \bar{x}_2 - \bar{z}.$$

■

### $\cap$ Intersezione di due sottospazi

L'intersezione di due sottospazi vettoriali  $W_1$  e  $W_2$  contiene tutti i vettori contenuti sia in  $W_1$  sia in  $W_2$ .

*Teorema: l'intersezione è sottospazio*

Immediata conseguenza delle definizioni di sottospazio vettoriale e di intersezione. Se  $W_1$  e  $W_2$  sono sottospazi allora lo deve essere anche  $W_1 \cap W_2$ .

## 4.2 Combinazione lineare

*Definizione: combinazione lineare*

Dato  $V$  spazio vettoriale,  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V$ , una composizione lineare di  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$  è una struttura del tipo  $\lambda_1 \bar{v}_1, \dots, \lambda_n \bar{v}_n$  con ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

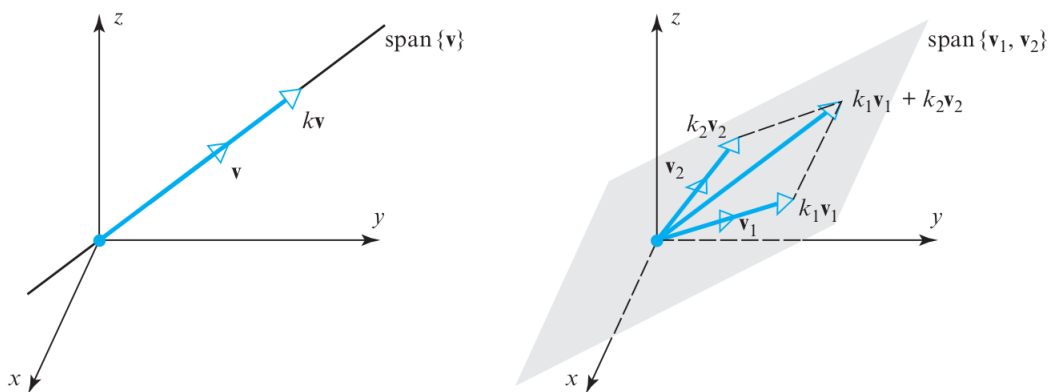
Ogni sottospazio possiamo dire essere generato da combinazioni lineari dei vettori che lo generano.

*Teorema*

Se  $S = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$  è un insieme di vettori non nullo contenuto in  $V$ , allora:

L'insieme  $W = \mathcal{L}((w_1), (w_2), \dots, (w_r))$ , è il **più piccolo** sottospazio di  $V$  che contiene tutti i vettori di  $S$ .

In questo caso si dice che  $W$  è **generato** da  $S$ .



E' importante riconoscere che gli insiemi di generatori *non sono unici*. Per esempio qualsiasi vettore non nullo sulla linea in figura sarebbe generatore di  $v$ . Sono generatori tutte le combinazioni lineari di un insieme di generatori.

### 4.3 Indipendenza lineare

Diciamo di avere uno spazio  $xy$  con vettori standard  $i$  e  $j$ . Ogni vettore in  $xy$  può essere espresso in modo unico come combinazione lineare di  $i$  e  $j$ . Supponiamo ora di introdurre una terza coordinata  $w$  a 45 gradi tra gli assi  $x$  e  $y$ .

Questo terzo asse risulta essere totalmente superfluo poiché lui stesso può essere espresso come combinazione lineare di  $i$  e  $j$  per cui non aiuta a descrivere nessun vettore sul piano.

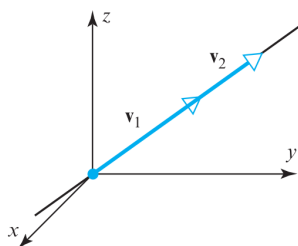
**Definizione: Vettori linearmente indipendenti**

Dato un insieme di vettori  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ , questo è detto *linearmente indipendente* se nessun vettore in  $V$  può essere espresso come combinazione lineare di uno degli altri. Quindi se e solo se:

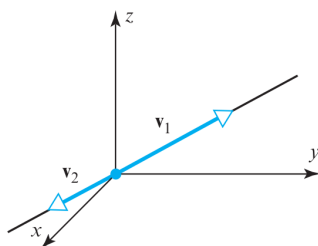
$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0.$$

è risolto solo da  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ .

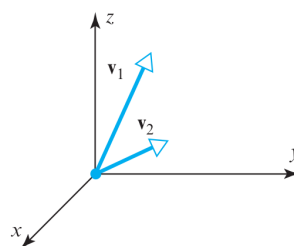
Un insieme di vettori linearmente indipendenti si dice **libero**.



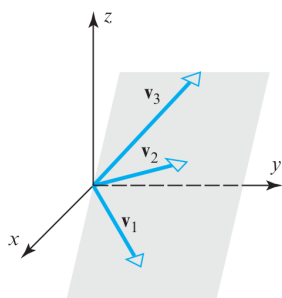
*l.d.*



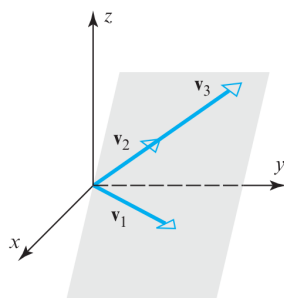
*l.i.*



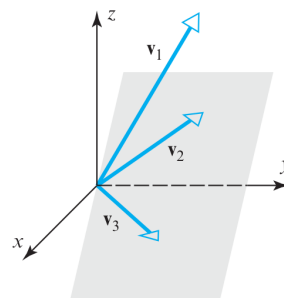
*l.i.*



*l.d.*



*l.d.*



*l.i.*

## 4.4 Basi

Ora che sappiamo cosa sono un insieme di generatori e un insieme di vettori linearmente indipendenti possiamo definire il concetto di base.

### Definizione: Base

Viene chiamata base di  $V$  un insieme di vettori che **genera**  $V$  e al contempo è linearmente indipendente.

### Teorema

Data una base  $\mathcal{B} = \{v_1 + v_2 + \dots + v_n\}$  ogni vettore  $v \in V$  può essere espresso nella forma

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

in un solo modo.

### dimostrazione

Diciamo che esista un'altra combinazione lineare che esprime  $v$ ; abbiamo:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

allora una scrittura meno l'altra deve essere uguale zero

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n - k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = 0$$

$$(c_1 - k_1) v_1 + (c_2 - k_2) v_2 + \dots + (c_n - k_n) v_n = 0$$

da ciò risulta che

$$c_1 - k_1 = c_2 - k_2 = \dots = c_n - k_n = 0$$

$$c_i = k_i \quad \forall i \in 1, \dots, n.$$

## 4.5 Cambiamento di base

In moltissimi casi risulta più comodo esprimere un vettore rispetto a una base diversa da quella di partenza.

Se cambiamo da una base  $\mathcal{B}$  a una  $\mathcal{B}'$  come saranno correlate le componenti  $[v]_{\mathcal{B}}$  e  $[v]_{\mathcal{B}'}$ ?

Le vecchie coordinate sono legate alle nuove dalla seguente equazione:

$$[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}'}$$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  è detta **matrice del cambiamento di base** e ha nelle colonne i vettori della base di partenza rispetto la base di arrivo. Quindi la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$  a  $\mathcal{B}' = e_1, \dots, e_n$  sarà:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left[ \begin{array}{c|c|c} [v_1]_{\mathcal{B}'} & \dots & [v_n]_{\mathcal{B}'} \end{array} \right]$$

### Teorema

Detta  $M$  la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$ , allora  $M^{-1}$  è la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ .

$$\left( M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \right)^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

### Metodo per trovare la matrice di cambiamento di base

Per trovare la matrice di cambiamento di base si può utilizzare un metodo simile a quello impiegato per trovare la matrice inversa: si scrive la matrice orlata con a sinistra la base  $\mathcal{B}$  e a destra la base  $\mathcal{B}'$ . Quindi si riduce per righe fino a quando la matrice non ha la forma

$$\left[ I \mid M_B^{B'} \right]$$

## 4.6 Spazio delle righe, delle colonne, Nullspace

Prendiamo in esame la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \cdots & a_{r,n} \end{bmatrix}$$

Chiamiamo spazio delle colonne l'insieme dei vettori colonna nella matrice  $A$  e spazio delle righe l'insieme dei vettori riga in  $A$ . Il **nullspace** di  $A$  invece (introdotto nel capitolo sui sistemi lineari) ricordiamo essere la soluzione dell'equazione  $AX = 0$ .

**C(A) e nullspace** Che relazione intercorre tra lo spazio delle colonne e il nullspace? Scriviamo l'equazione  $Ax = b$  per colonne:

$$Ax = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n = b$$

da questa scrittura notiamo che  $b$  può essere scritto come combinazione lineare delle colonne di  $A$ . Allora  $b \in C(A)$ ,  $b$  fa parte dello spazio delle colonne di  $A$ .

## 4.7 Rank

## 5 Applicazioni Lineari

Le applicazioni lineari sono particolari tipi di *funzioni* che preservano la struttura di spazio vettoriale.

$$f: V \longrightarrow W \quad V, W \text{ sottospazi vettoriali}$$

**Definizione: Applicazione lineare**

Dati due spazi vettoriali reali  $V, W$ , si dice applicazione lineare o **omomorfismo** o trasformazione lineare da  $V$  in  $W$  una funzione

$$f: V \longrightarrow W.$$

che verifica le seguenti proprietà:

$$f(0) = 0$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

per ogni  $x$  e  $y$  in  $V$  e per ogni  $\lambda$  e  $\mu$  in  $\mathbb{R}$ .

**Teorema fondamentale delle applicazioni lineari**

Dati  $V$  e  $W$  spazi vettoriali,

$$\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \text{ base di } V$$

$$\mathcal{C} = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \text{ insieme di vettori in } W.$$

Allora esiste ed è **unica** l'applicazione lineare

$$f: V \longrightarrow W \text{ t.c.}$$

$$f(\bar{v}_i) = \bar{a}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

In altre parole per assegnare un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali  $V$  e  $W$ , di cui almeno  $V$  di dimensione finita, è sufficiente conoscere le immagini dei vettori di una base di  $V$ .

**dimostrazione**

$$\bar{x} \in V.$$

$$\bar{x} = x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + \dots + x_n \bar{v}_n.$$

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + \dots + x_n \bar{v}_n) \\ &= x_1 f(\bar{v}_1) + x_2 f(\bar{v}_2) + \dots + x_n f(\bar{v}_n) \\ &= x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n \end{aligned}$$

Viceversa se definiamo  $f$  dicendo che

$$f(\bar{x}) = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n.$$

Allora

- $f$  è lineare:  $f(\lambda \bar{x} + \mu \bar{y}) = \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y})$ .
- $f(\bar{v}_i) = \bar{a}_i \quad \forall i$

Quindi definire un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali equivale a *conoscere le immagini degli elementi di una base del dominio*.

## 6 Autovettori, autovalori

### 6.1 Automorfismi e sottospazi invarianti

Definizione: Automorfismo

Un endomorfismo **anche biiettivo** (quindi isomorfismo) lo chiamiamo **automorfismo**. Dato  $f: V \rightarrow V$  posso associare a  $f$  la matrice rappresentativa  $M^{\mathcal{B}}(f)$ .

$$f \text{ automorfismo} \iff M^{\mathcal{B}}(f) \text{ invertibile} \iff \det M^{\mathcal{B}}(f) \neq 0$$

Definizione: Sottospazio invariante

Dato un sottospazio  $W$  e un vettore  $w \in W$  il sottospazio si dice invariante se  $f(w) \subseteq W$ .

Un sottospazio invariante è, per esempio, un *autospatio*; infatti i vettori di un autospatio sono multipli delle loro immagini:  $f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ .

### 6.2 Autovettori e autovalori

Definizione: Autovettori

Data l'endomorfismo  $f: V \rightarrow V$  un vettore  $\bar{x} \in V$   $\bar{x} \neq \bar{0}$  si dice **autovettore** se

$$f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$$

- Lo scalare  $\lambda$  è l'**autovalore** associato a  $\bar{x}$ .
- $V_\lambda$  si dice **autospatio** associato a  $\lambda$  ed è l'insieme di tutti gli autovettori  $\{\bar{x} \in V : f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}\}$ .

Quindi chiamiamo autovettori tutti quei vettori che vengono mandati da una certa funzione  $f$  in multipli di loro stessi. Ora dobbiamo occuparci di come trovare questi autovettori e i corrispondenti autovalori.

Diciamo di avere  $A$  matrice associata all'endomorfismo  $f: V \rightarrow V$ , per trovare gli autovalori impostiamo la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= \lambda \bar{x} \\ A\bar{x} - \lambda \bar{x} &= \bar{0} \\ (A - \lambda I)\bar{x} &= \bar{0} \end{aligned}$$

L'uguaglianza è rappresentata da un sistema omogeneo che ha soluzioni non banali solo se il rango della matrice  $A - \lambda I$  non è massimo, quindi solo se il determinante è uguale a 0.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Il polinomio risultante dall'equazione viene chiamato *polinomio caratteristico* di  $A$ :  $P_A(\lambda)$ . Le radici del polinomio caratteristico sono i nostri autovalori:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & & \\ & a_{22} - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \text{polinomio di grado } n \text{ in } \lambda$$



$$\begin{aligned}
&= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) \\
&= \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n.
\end{aligned}$$

Dato un certo polinomio caratteristico, è chiamata *molteplicità algebrica* il numero di volte che un certo  $\lambda_0$  annulla il polinomio:  $m_a(\lambda_0)$ .

**Un altro punto di vista** Abbiamo detto che per trovare gli autovalori dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$(A - \lambda I) \bar{x} = \bar{0}$$

Dal capitolo sul determinante di una matrice sappiamo che il determinante rappresenta un fattore di stretching; nel nostro caso serve che un vettore non nullo ( $\bar{x}$ ) venga mandato in zero dalla matrice  $A - \lambda I$ , l'unico caso in cui questo è possibile è quando il determinante di tale matrice è uguale a zero.

**Autospazi** Vale la pena soffermarsi su cosa sono, come si trovano e su alcune proprietà degli autospazi. Per trovare un autospazio  $V_{\lambda_0}$  associato a un autovalore  $\lambda_0$  si calcola il nullspace della matrice  $A - \lambda_0 I$ :

$$V_{\lambda_0} = N(A - \lambda_0 I)$$

Il numero di generatori del nullspace, ovvero la sua dimensione, viene chiamata *molteplicità geometrica*:  $m_g(\lambda_0)$

1. Ogni vettore  $\bar{x} \in V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$  si scrive in modo unico come  $\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_k$  con  $x_j \in V_{\lambda_j}$ , ovvero gli autospazi associati agli autovalori di un certo polinomio caratteristico sono in **somma diretta**.

Questo implica

$$\dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) = \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_k}.$$

2. La molteplicità geometrica di un autospazio è minore o uguale alla molteplicità algebrica:

$$m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0).$$

*dimostrazione*

Diciamo di avere un autospazio  $V_{\lambda_0}$  di dimensione  $k$  ( $k = m_g(\lambda_0)$ ) sottospazio vettoriale di  $V$  di dimensione  $n$ .

Prendo una base di  $V_{\lambda_0}$   $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$  e la completo ad una base di  $V$ :

$$\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_n\}$$

La matrice associata sarà:

$$M^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & & \\ 0 & \lambda_0 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Sappiamo che nelle prime  $k$  colonne c'è  $\lambda_0 I$ , nelle rimanenti  $n - k$  colonne invece, non sappiamo dire cosa ci sia. Rimaniamo con una matrice del genere:

$$M^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_k & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad B \in \mathbb{R}^{k, n-k}, \quad C \in \mathbb{R}^{n-k, n-k}$$

Ora tenendo a mente che l'obiettivo è dimostrare che la molteplicità geometrica di  $\lambda_0$  sia minore o uguale alla molteplicità algebrica, ovvero la molteplicità algebrica (il numero di radici reali del polinomio caratteristico) sia almeno  $k$ , andiamo a calcolare i nostri lambda.

$$\det(M^{\mathcal{B}}(f) - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda_0 I_k - \lambda I_k & B \\ 0 & C - \lambda I \end{vmatrix} = 0$$

$$= (\lambda_0 - \lambda)^k (C - \lambda I) = 0$$

L'ultima uguaglianza conferma che la molteplicità algebrica di  $\lambda_0$  sia almeno uguale a  $k$ .

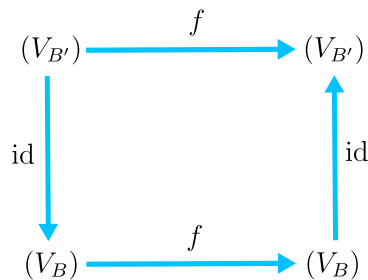
**Teorema** Una matrice quadrata associata a una funzione  $f$  è invertibile se e solo se  $\lambda = 0$  non è un suo autovalore.  
 Se ci riflettiamo, se esiste un  $\lambda_0 = 0$ , vuol dire che la funzione manda un vettore non nullo in un vettore nullo:

$$f(\bar{x}) = 0\bar{x}.$$

Questo ci dice che la funzione è *non-iniettiva* e che di conseguenza non può essere biettiva, condizione necessaria perché una funzione sia invertibile.

## 7 Diagonalizzazione

Scopo principale della diagonalizzazione sarà quello di trovare basi di soli autovettori. Il processo è schematizzato in questo modo:



Data una matrice scritta rispetto alla base  $B'$  la si riscrive rispetto alla base  $B$ , si applica la trasformazione lineare  $f$  e si ritorna alla base  $B'$ .

$$M_{B'}^{B'}(f) = M_{B'}^B(\text{id}) M_B^B(f) M_B^{B'}(\text{id}).$$

Quindi se chiamiamo

$$A = M_B^B(f) \quad A' = M_{B'}^{B'}(f) \quad P = M_B^{B'}(\text{id}).$$

possiamo riscrivere la precedente come:

$$A' = P^{-1}AP.$$

Diremo che  $A'$  è **simile** a  $A$ . Le matrici simili condividono molte caratteristiche:

1.  $A$  e  $P^{-1}AP$  hanno stesso determinante;

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \det(A) \det(P) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

2.  $A$  invertibile  $\iff A'$  invertibile;

3.  $A$  e  $A'$  hanno stesso *rango*, *nullspace*, *polinomio caratteristico*.

Allo scopo di diagonalizzare una matrice le matrici simili sono essenziali, infatti, una matrice quadrata  $A$  si dice **diagonalizzabile** se è simile a un'altra matrice diagonale.

### 7.1 Criteri di diagonalizzabilità

$f: V \longrightarrow V$  endomorfismo. Sono equivalenti:

1.  $f$  diagonalizzabile;
2.  $P_f(\lambda)$  ha solo radici reali e per ogni  $\lambda_j$  si ha  $m_g(\lambda_j) = m_a(\lambda_j)$ ;

3. Se gli autovalori sono tutti distinti,  $\dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim(V_{\lambda_k}) = \dim(V)$ ;

4. Se gli autovalori sono tutti distinti,  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ .

*dimostrazione 1  $\Rightarrow$  2*

Sia  $f$  diagonalizzabile e  $\mathcal{B}$  base di autovettori.

$$M^B(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda_1 \\ \ddots \\ \lambda_1 \end{matrix}} \right\} m_1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda_2 \\ \ddots \\ \lambda_k \end{matrix}} \right\} m_2 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda_k \end{matrix}} \right\} m_k \end{matrix}$$

$$P_f(\lambda) = \det(M^B(f) - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$$

Il polinomio ha solo radici reali; il massimo grado del polinomio lo si trova sommando gli esponenti:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = \dim V$$

Infatti il numero di colonne della matrice è uguale alla dimensione di  $V$  (essendo le colonne sicuramente linearmente indipendenti) ed è uguale al numero di righe, uguale a  $m_1 + \dots + m_k$ .

Ora dobbiamo dimostrare che per ogni  $\lambda_j$  si ha  $m_g(\lambda_j) = m_a(\lambda_j)$ .

Troviamo il sottospazio associato a  $\lambda_1$ :

$$V_{\lambda_1} = N(M^B(f) - \lambda_1 I)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2 - \lambda_1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_k - \lambda_1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_k - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \ddots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m_1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda_2 - \lambda_1 \\ \ddots \\ \lambda_k - \lambda_1 \end{matrix}} \right\} m_2 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda_k - \lambda_1 \end{matrix}} \right\} m_k \end{matrix}$$

Le prime righe (contrassegnate da  $m_1$ ) sono nulle, quindi il rank della matrice è  $\text{rk} M^B(f) = \dim V - m_1$ . Quindi la dimensione del nullspace è

$$\dim V - \text{rank}(A - \lambda_1 I) = m_1$$

$$\Rightarrow m_g(\lambda_1) = m_a(\lambda_1) = m_1$$

— dimostrazione  $2 \Rightarrow 3$  —

Sappiamo che il polinomio caratteristico si scompone in equazioni lineari:

$$P_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}.$$

Dalla dimostrazione precedente sappiamo che la molteplicità algebrica è uguale a quella geometrica. Ricordando che  $m_g(\lambda_j) = \dim(V_{\lambda_j})$  e che  $m_j = m_a(\lambda_j)$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = \dim V$$

$$m_g(\lambda_j) = m_a(\lambda_j)$$

$$m_a(\lambda_1) + \dots + m_a(\lambda_k) = \dim V$$

$$\Rightarrow \dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim(V_{\lambda_k}) = \dim V.$$

— dimostrazione:  $3 \Rightarrow 4$  —

$$\dim(V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}) = \dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim V_{\lambda_k} = \dim V$$

Sappiamo infatti che  $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$  è un sottospazio di  $V$  con la stessa dimensione.

— dimostrazione  $4 \Rightarrow 1$  —

So che  $V$  si decompone in somma diretta di autospazi

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$

Ora prendo una base per ogni autospazio

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \text{base per} & V_{\lambda_1} \\ \vdots & & \vdots \\ B_k & \text{base per} & V_{\lambda_k} \end{array}$$

Sappiamo che  $B$  base di  $V$  si ottiene unendo tutte le basi  $B_1, \dots, B_k$  degli autospazi:

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

$B$  è fatta da autovettori, quindi  $f$  diagonalizzabile.

## 7.2 Endomorfismi autoaggiunti

Definizione: Endomorfismo autoaggiunto

Chiamiamo **autoaggiunto** l'endomorfismo nel qual vale:

$$f(\bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} f(\bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$$

Ora che abbiamo studiato le applicazioni lineari che hanno come matrice associata una matrice simmetrica, introduciamo un teorema fondamentale.

**Teorema spettrale** Dato  $(V, \cdot)$  euclideo e  $f \in \text{End}(V)$ , allora:

$$f \text{ autoaggiunto} \iff \exists \mathcal{B} \text{ ortonormale di autovettori}$$

In particolare:

$$f \text{ autoaggiunto} \Rightarrow f \text{ diagonalizzabile.}$$

*dimostrazione*

$\Leftarrow$  Diretta conseguenza della proposizione: se  $B$  ortonormale di autovettori,  $M^B(f)$  è diagonale (quindi simmetrica).

$\Rightarrow$  Dimostriamo che esiste una base ortonormale di autovettori in tre punti:

1. Voglio solo radici reali;
2. Mostro che gli autospazi sono ortogonali fra loro;
3. Mostro che  $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = V$ .

1)  $f$  autoaggiunto  $\Rightarrow P_f(\lambda)$  ha solo radici reali.

Il polinomio  $P_f(\lambda)$  avrà  $n$  radici complesse ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ). Sappiamo che ogni radice complessa viene accoppiata con il suo coniugato, per questo, faremo vedere che vale

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

Troviamo gli autovalori:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\exists x \in \mathbb{C}^n \quad \text{t.c.} \quad AX = \lambda X$$

Trovo lambda coniugato:

$$\bar{A}X = \overline{\lambda X} \rightarrow A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

Ho trovato che  $\bar{X}$  è autovettore di  $A$  con autovalore  $\bar{\lambda}$ . Adesso mostriamo che  $\lambda = \bar{\lambda}$ :

$${}^t\bar{X}AX = {}^t\bar{X}\lambda X = \lambda {}^t\bar{X}X$$

$$({}^t\bar{X}A)X = {}^t(A\bar{X})X = \bar{\lambda} {}^t\bar{X}X$$

poiché siamo partiti da due espressioni uguali la loro differenza deve essere uguale a zero:

$$\lambda {}^t\bar{X}X - \bar{\lambda} {}^t\bar{X}X = 0 \rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})({}^t\bar{X}X) = 0$$

poiché

$${}^t\bar{X}X = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$$

sappiamo che

$$(\lambda - \bar{\lambda})({}^t\bar{X}X) = 0 \iff \lambda = \bar{\lambda}$$

2) *Gli autospazi sono ortogonali fra loro.*

Prendo due vettori appartenenti a due autospazi diversi:

$$\bar{x} \in V_\lambda, \bar{y} \in V_\mu \quad \lambda \neq \mu$$

$$f(\bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot f(\bar{y})$$

$$\lambda \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \mu \bar{y}$$

$$(\lambda - \mu)\bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \iff \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$$

3) *Gli autospazi sono in somma diretta-ortogonale.*

Per dimostrare che la somma degli autospazi coincide con tutto  $V$  è necessario mostrare  $W$  insieme degli autospazi è  $= V$ , e quindi che  $W^\perp = \{\vec{0}\}$ . Procederemo in questo ordine:

1. Iniziamo col mostrare che  $W^\perp$  è un sottospazio invariante;

2. Studiando la restrizione di  $f$  a  $W^\perp$  mostriamo che in esso non possono esserci autovettori.

3.1) Se  $W \leq V$  è invariante per  $f$ , allora lo è anche  $W^\perp$ . Voglio far vedere che se  $\vec{x} \in W^\perp$  allora  $f(\vec{x}) \in W^\perp$ . Diciamo di avere un vettore  $\vec{w} \in W$ :

$$f(\vec{x}) \cdot \vec{w} = \vec{x} \cdot f(\vec{w}) = 0$$

quindi  $f(\vec{x}) \in W^\perp$  e  $W^\perp$  è sottospazio invariante.

3.2) Ora supponiamo che  $W \neq V$  e che di conseguenza  $W^\perp \neq \{\vec{0}\}$ . Studiamo la restrizione di  $f$  a  $W^\perp$ :

$$f : W^\perp \rightarrow W^\perp$$

Visto che vale

$$f(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot f(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in W^\perp$   $f|_{W^\perp}$  è **autoaggiunto** e possiamo usare le dimostrazioni precedenti. Per lo *step 1* infatti  $P_{f|_{W^\perp}}(\lambda)$  ha solo radici reali e quindi

$$\exists \vec{x} \in W^\perp, \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

Questo ci dice che esistono autovettori  $\vec{x} \in W^\perp$  e che quindi  $W^\perp$  deve essere contenuto in  $W$  insieme che contiene tutti gli autospazi, vero solo se  $W^\perp = \vec{0}$  e quindi  $W = V$ .

**Corollario** Sia una matrice  $A$  simmetrica,  $A$  è sempre diagonalizzabile. Esiste allora una matrice  $D$  diagonale e una  $P$  invertibile tale che:

$$D = P^{-1}AP$$

E' inoltre possibile individuare una matrice ortogonale  $Q$  tale che:

$$D = Q^{-1}AQ = {}^tQAQ.$$

Dato l'endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  con  $(V, \cdot)$  euclideo, sono equivalenti:

1.  $f$  autoaggiunto;
2.  $\forall B$  ortonormale,  $M^B(f)$  è simmetrica.
3.  $\exists B$  ortonormale t.c.  $M^B(f)$  simmetrica.

*dimostrazione 1  $\Rightarrow$  2*

Prendo  $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  base ortonormale e due vettori  $\vec{x}$  e  $\vec{y} \in V$ .

Scritti come vettori colonna abbiamo  $X, Y, AX$  e  $AY$  rispettivamente per  $x, y, f(x)$  e  $f(y)$ . Possiamo riscrivere (poiché il prodotto è standard)

$$f(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot f(\vec{y})$$

come

$${}^t(AX)Y = {}^tXAY$$

$${}^tX {}^tAY = {}^tXAY.$$

dalla quale risulta che  $A = {}^tA$ .

## 8 Forme bilineari

### 8.1 Diagonalizzazione

Data la forma bilineare simmetrica  $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , l'obiettivo è quello di definire un buon prodotto scalare in modo che l'endomorfismo definito da

$$f(\tilde{x}) \cdot \tilde{y} = \phi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

sia **autoaggiunto**. Se l'endomorfismo è autoaggiunto posso utilizzare il teorema spettrale per diagonalizzare la matrice associata (la stessa associata a  $\phi$ ).

Prendo una base  $\mathcal{B} = \{\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_n\}$  e definisco due vettori nello spazio

$$\tilde{x} = x_1 \tilde{v}_1 + \dots + x_n \tilde{v}_n$$

$$\tilde{y} = y_1 \tilde{v}_1 + \dots + y_n \tilde{v}_n$$

Definisco ora un prodotto scalare:

$$\tilde{x} \cdot \tilde{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Rispetto a questo prodotto scalare la nostra **base è ortonormale**.

Definisco ora l'endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  determinato univocamente da  $f(\tilde{v}_i)$ . Precisiamo le componenti di  $f(\tilde{v}_i)$  rispetto a ogni  $\tilde{v}_j$ . Le componenti, poiché la base  $\mathcal{B}$  è ortonormale rispetto al prodotto scalare sono date da

$$f(\tilde{v}_i) = \phi(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) \tilde{v}_j$$