Analisi II - 2021/22 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta del 15/6/2022

Esercizio 1. Si consideri il campo scalare definito da

$$f(x,y) = \log(x) + \log(y) + \sqrt{\frac{2(x^2+y^2-1)}{4-(x^2+y^2)}}.$$

(i) Disegnare il dominio di f e dire, giustificando la risposta, se è un insieme aperto, chiuso, compatto, limitato.
(ii) Verificare che f è differenziabile in $(1,1)$ (giustificando la risposta) e, se possibile, scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie cartesiana $z = f(x,y)$ nel punto $(1,1,1)$.
(iii) Calcolare, se possibile e giustificando la risposta, la derivata direzionale di f in $(1,1)$ lungo una generica direzione $v = (v_1, v_2)$.

Soluzione: (i) Il dominio di f è l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ 1 \le x^2+y^2 < 4\}$. A è limitato perché, ad esempio, è contenuto in una palla di centro l'origine e raggio 3. A non è aperto perché $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in A$ ma $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \notin \mathrm{Int}(A)$, A non è chiuso perché il complementare non è aperto: ad esempio $(2,2) \in A^{\complement}$ ma $(2,2) \notin \mathrm{Int}(A^{\complement})$. A non è un insieme compatto perché non è chiuso.

(ii) Osserviamo che la funzione f è di classe C^1 su $\mathrm{Int}(A)$ quindi è ivi differenziabile, in particolare, essendo $(1,1) \in \mathrm{Int}(A)$ si ha che f è differenziabile in $(1,1)$, da cui segue che f ammette piano tangente in $(1,1)$ e derivata direzionale.
Le derivate parziali sono

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{3\sqrt{2}x}{\sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{4-(x^2+y^2)}}}\frac{1}{[4-(x^2+y^2)]^2}, \qquad f_x(x,y) = \frac{1}{y} + \frac{3\sqrt{2}y}{\sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{4-(x^2+y^2)}}}\frac{1}{[4-(x^2+y^2)]^2}.$$

da cui

$$f_x(1,1) = \frac{5}{2}, \quad f_y(1,1) = \frac{5}{2}.$$

Il piano tangente ha equazione cartesiana data da

$$z = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + 1, \quad \text{cioè} \quad 5x + 5y - 2z = 8.$$

(iii) La derivata direzionale si ottiene con la formula del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = f_x(1,1)v_1 + f_y(1,1)v_2 = \frac{5}{2}v_1 + \frac{5}{2}v_2.$$

Esercizio 2. Calcolare o dimostrare che non esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^6 + (y-x)^2)}{x^4+y^2}$$

.
Soluzione: Ricordando che $\arctan t \sim t$ per $t \to 0$, risulta che studiare il limite dato equivale a studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 + (y-x)^2}{x^4+y^2}.$$

Osserviamo che la funzione $g(x,y) = \frac{x^6+(y-x)^2}{x^4+y^2}$ vale identicamente 1 lungo l'asse y, mentre lungo l'asse x si ha $g(x,0) = \frac{x^4+1}{x^2} \to +\infty$ per $x \to 0$. Pertanto il limite dato non esiste.

Esercizio 3. (i) Determinare tutti i punti critici del campo scalare

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$$

e studiare la loro natura.
(ii) Dire se f ammette un punto di minimo o di massimo globale (giustificando la risposta).
Soluzione: (i) Il dominio di f è $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$, $f \in C^2(D)$ e si ha che

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2} + 1.$$

L'unico punto critico di f è $(1,1)$. La matrice Hessiana è data da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix},$$

dunque

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

e dato che $\mathrm{Det}(H_f(1,1)) = 4 - 1 = 3 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 2 > 0$ si ha che $(1,1)$ è un minimo locale.
(ii) f non ammette né massimo ne minimo globale. Infatti basta osservare che f non é limitata né superiormente né inferiormente: considerando la restrizione $f(1,y) = \frac{1}{y} + 1 + y$, si verifica subito che $f(1,y) \to +\infty$, se $y \to +\infty$, e $f(1,y) \to -\infty$, se $y \to -\infty$.

Esercizio 4. Siano $f(x,y) = \log(1+x^2) + y$ e $T(u,v) = (u+2v, 2u+v^2)$.

a) Giustificare l'esistenza di intorni U e V di $(-8,4)$ e $(0,0)$ rispettivamente tali che $T : U \to V$ è biunivoca con funzione inversa T^{-1} di classe C^1.

b) Calcolare $\nabla(f \circ T^{-1})(0,0)$ con l'inversa T^{-1} trovata in a).

Soluzione: Si verifica $T(-8,4) = (0,0)$. T è di classe C^1 e

$$JT(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2v \end{pmatrix}, \qquad \det JT(-8,4) = 4 \neq 0.$$

Quindi il teorema di inversione locale assicura l'esistenza di U, V e T^{-1}. Utilizzando la chain rule,

$$\nabla(f \circ T^{-1})(0,0) = \nabla f(T^{-1}(0,0)) \cdot JT^{-1}(0,0) = \nabla f(-8,4) \cdot [JT(-8,4)]^{-1} = \left(-\frac{129}{130}, \frac{97}{260}\right),$$

visto che $\nabla f(-8,4) = (-16/65, 1)$ e $[JT(-8,4)]^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. Si consideri l'equazione

$$x^2 e^{x^2 - ty} - xy - 1 = e^{1+t} \qquad \text{(con parametro } t \in \mathbb{R}\text{)}.$$

a) Giustificare che per $t = 4$ l'equazione data definisce implicitamente in un intorno di $x = 1$ un'unica funzione $y = \phi(x)$ tale che $\phi(1) = -1$.

b) Giustificare che per ogni valore $t \neq -1$ l'equazione data definisce implicitamente in un intorno di $x = 1$ un'unica funzione $y = \phi(x)$ tale che $\phi(1) = -1$.

c) Per quale valore di t il punto $x = 1$ è un punto stazionario della funzione $g(x) = \phi(x) - x$?

Soluzione: Ponendo $f(x,y) := x^2 e^{x^2 - ty} - xy - 1 - e^{1+t} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ l'equazione è $f(x,y) = 0$.

a) Si verifica che $f(1,-1) = 0$, cioè il punto $P_0 = (1,-1)$ è una soluzione di $f(P_0) = 0$. Si calcola

$$f_y(1,-1) = -tx^2 e^{x^2 - ty} - x\Big|_{(x,y)=(1,-1)} = -te^{1+t} - 1.$$

Quindi $f_y(1,-1) \neq 0$ per $t = 4$. Il teorema della funzione implicita assicura l'esistenza della funzione ϕ richiesta.

b) Dal calcolo precedente $f_y(1,-1)=0$ se e solo se $te^{1+t}=-1$. Questa ugualianza vale esclusivamente per $t=-1$, visto che le curve $s=-et$ e $s=e^{-t}$ si intersecano nel solo punto $(-1,e)$. Quindi il teorema di Dini assicura l'esistenza e unicità di ϕ per ogni valore $t \neq -1$.

c) Si verifica che $f_x(1,-1)=4e^{1+t}+1$ e quindi

$$g'(1)=\phi'(1)-1=-\frac{f_x(1,-1)}{f_y(1,-1)}-1=\frac{4e^{1+t}+1}{1+te^{1+t}}-1=\frac{(4-t)e^{1+t}}{1+e^{1+t}}.$$

Risulta che $g'(1)=0$ se e solo se $t=4$.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A (x^2-1)\,dxdy, \qquad A=\Big\{(x,y) \mid \frac{1}{x^2}\le y\le x\le 3,\ x>0\Big\}.$$

Soluzione: L'integrale equivale a

$$\int_1^3 \Big(\int_{1/x^2}^{x}(x^2-1)\,dy\Big)dx=\int_1^3\Big(x^3-x-1+\frac{1}{x^2}\Big)\,dx=15-\frac{1}{3}.$$

Esercizio 7. Calcolare la massa di un solido con densità di massa $\mu(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ che occupa la regione

$$A=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4, x\le 0, y-z+1\ge 0, z\ge -4\Big\}.$$

Soluzione: Si tratta di calcolare l'integrale triplo

$$\int_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz.$$

Osserviamo che A è z-semplice in quanto

$$A=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4, x\le 0, -4\le z\le y+1\Big\}.$$

Detto $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4, x\le 0\}$, possiamo dunque integrare per fili e otteniamo:

$$\int_A\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iint_C\sqrt{x^2+y^2}\Big(\int_{-4}^{y+1}dz\Big)\,dxdy=\iint_C (y+5)\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Possiamo a questo punto utilizzare le coordinate polari ponendo $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$. Poiché (x,y) varia nel semicerchio C si ha che $\rho\in[0,2], \theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned}\int_A\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz &= \int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\rho^2(\rho\sin\theta+5)\,d\theta d\rho\\ &= \int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\rho^3\sin\theta\,d\theta d\rho+5\int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\rho^2\,d\rho d\theta=\int_0^2\rho^3\,d\rho\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta+5\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2=\frac{40}{3}\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 8. Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza semplice ed assoluta della serie numerica

$$\sum_{n\ge 1}\frac{(\cos\alpha)^n}{n}.$$

Soluzione: Osserviamo che la condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta per ogni valore di α in quanto $|\cos\alpha|\le 1$, e, dato $t\in[0,1]$, si ha che $\lim_{n\to+\infty}\frac{t^n}{n}=0$. Inoltre, se $|\cos\alpha|<1$, allora

$$\frac{|\cos\alpha|^n}{n}\le|\cos\alpha|^n$$

e la serie $\sum_{n\geq 1} |\cos\alpha|^n$ converge perché è una serie geometrica con ragione $q = |\cos\alpha| \in [0,1)$. Pertanto, per il criterio del confronto la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente per ogni $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Se $|\cos\alpha| = 1$ distinguiamo i casi $\cos\alpha = -1$ e $\cos\alpha = 1$. Nel primo caso si ottiene la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge semplicemente per il criterio di Leibniz ma non assolutamente. Nel secondo caso si ottiene la serie armonica che non converge semplicemente. In conclusione, la serie data converge assolutamente (e quindi semplicemente) per ogni $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$, converge semplicemente ma non assolutamente per $\alpha = (2h+1)\pi, h \in \mathbf{Z}$ e non converge neanche semplicemente per $\alpha = 2h\pi, h \in \mathbf{Z}$.