1 Studio di funzioni al finito, all'infinito e serie di potenze.

Esercizio 1.1

Dimostrare che

$$\cos(z) = a\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,, \qquad |a| \leq 1$$

ha solo soluzioni reali, cioè $\mathrm{Im\{z\}} = 0$.

Soluzione

Scriviamo il coseno in termini di esponenziali:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = a \implies e^{iz} + e^{-iz} = 2a\,.$$

Definendo $w \equiv e^{iz}$ abbiamo

$$w + \frac{1}{w} = 2a \implies w^2 - 2aw + 1 = 0\,.$$

Quest'ultima equazione ha soluzioni

$$w_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}\,.$$

Dato che $|a| \leq 1$, possiamo scrivere $w_{1,2}$ come

$$w_{1,2} = a \pm i\sqrt{1 - a^2}\,.$$

Notiamo che $w_{1,2}$ ha modulo unitario: $|w_{1,2}|^2 = a^2 + \left(\sqrt{1-a^2}\right)^2 = 1$, e scriviamo in termini delle parti reale e immaginaria di z

$$|e^{iz}| = 1 \implies |e^{i(\mathrm{Re\{z\}}+\mathrm{iIm\{z\}})}| = 1 \implies |e^{i\mathrm{Re\{z\}}}\, e^{-\mathrm{Im\{z\}}}| = 1$$

$$\implies |e^{i\mathrm{Re\{z\}}}|\,|e^{-\mathrm{Im\{z\}}}| = 1 \implies |e^{-\mathrm{Im\{z\}}}| = 1\,,$$

da cui segue che $\mathrm{Im\{z\}} = 0$. Questo risultato implica che i zeri del coseno (il caso $a = 0$), sono sempre reali, quindi i soliti valori in campo reale $\pi(1/2 + m)$, con $m \in \mathbb{Z}$.
In modo simile, si può dimostrare il risultato analogo per il seno:

$$\sin(z) = a\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,, \qquad |a| \leq 1 \implies \mathrm{Im\{z\}} = 0.$$

Come prima, il caso $a = 0$ implica che i zeri del seno di variabile complessa z, ha tutti i zeri sulla retta reale.

Esercizio 1.2

Studiare la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2/2}$$

sia al finito che all'infinito. Scrivere la serie intorno a $z = 0$ e determinare il suo raggio di convergenza.

Soluzione

- Studio al finito

  La funzione non ha dei zeri. Invece, ha delle singolarità quando il denominatore si annulla, per $z = \pm\sqrt{2}$. Dato che la funzione si può scrivere come

  $$f(z) = \frac{1}{1 - z^2/2} = \frac{2}{2 - z^2} = \frac{-2}{(z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2})},$$

  si vede che i punti singolari sono poli semplici.

- Studio all'infinito

  Per studiare il comportamento all'infinito di $f(z)$, controlliamo $f(1/t)$ per $t = 0$:

  $$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{1 - 1/(2t^2)} = \frac{2t^2}{2t^2 - 1} \sim -2t^2\,, \qquad \text{per} t \to 0.$$

  Dato che $f(1/t)$ ha uno zero doppio per $t \to 0$, $f(z)$ ha uno zero doppio per $z = \infty$.

- Serie intorno a $z_0 = 0$

  Possiamo partire dalla serie geometrica

  $$\frac{1}{1 - w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k\,,$$

  metendo $w = z^2/2$. Quindi

  $$\frac{1}{1 - z^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^k}\,.$$

  Per trovare il raggio di convergnza possiamo usare la formula di Cauchy-Hadamard, dobbiamo però fare attenzione al fatto che ci sono solo potenze pari. A lezione avete visto due versioni di Cauchy-Hadamard:

  $$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|\,, \qquad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left|\frac{C_n}{C_{n+2}}\right|}\,,$$

con C_n il coefficiente del termine z^n nella serie di Taylor (intorno a z_0):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, (z - z_0)^n \, .$$

Per utilizzare la prima formula di Cauchy-Hadamard è necessario che $C_{n+1} \neq 0$. Nel caso della nostra serie, abbiamo solo potenze pari, quindi per ogni $C_n \neq 0$, vale sempre che $C_{n+1} = 0$, e quindi dobbiamo per forza usare la seconda versione di Cauchy-Hadamard, sapendo che per un valore di k, il coefficiente corrisponde al termine z^{2k}, mentre che per $k+1$, all termine z^{2k+2} (due potenze in più). Quindi

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \sqrt{\left| \frac{1/2^k}{1/2^{k+1}} \right|} = \sqrt{2} \, ,$$

dove abbiamo scritto la formula in termini di k. Si nota che anche se la espressione sopra contiene coefficienti per k e $k+1$, la parte importante è che questi valori corrispondono a termini della serie diverse da due potenze di z.

Controllando le singolarità della funzione, si verifica il raggio di convergenza: la distanza tra il punto di sviluppo ($z_0 = 0$) e la singolarità più vicina (entrambi $z = \pm\sqrt{2}$) è pari a $\sqrt{2}$.

Esercizio 1.3

Studiare la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \cosh(z)\,, \tag{1}$$

sia al finito che all'infinito. Scrivere la serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ e determinare il raggio di convergenza.

Soluzione

Possiamo studiare la funzione scrivendola in termini del coseno:

$$\begin{aligned}
\cos(w) &= \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}, \qquad \text{con} \qquad w \to iz \\
\Longrightarrow \quad \cos(iz) &= \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} \\
\Longrightarrow \quad \cosh(z) &= \cos(iz)\,.
\end{aligned}$$

Da questa relazione tra il coseno e il coseno iperbolico abbiamo:

- Studio al finito

  Come il coseno, il coseno iperbolico non ha delle singolarità al finito.

  Il coseno iperbolico ha zeri semplici per $i\,z \in \{\,\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, ...\}$ oppure per $z \in \{\,\pm i\,\pi/2, \pm i\,3\pi/2, \pm i\,5\pi/2, ...\}$. Possiamo scrivere in modo più compatto come

  $$z = i\,\pi\left(\frac{1}{2} + m\right), \qquad \text{con} \qquad m \in \mathbb{Z}\,.$$

- Studio all'infinito

  Il coseno iperbolico ha una singolarità essenziale come il coseno.

- Serie intorno a $z_0 = 0$

  Usiamo la serie per il coseno:

  $$\begin{aligned}
  \cos(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{2k}\,, \qquad \text{con} \qquad w \to iz \\
  \Longrightarrow \quad \cosh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (iz)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (i^2)^k z^{2k} \\
  \Longrightarrow \quad \cosh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} z^{2k}\,,
  \end{aligned}$$

  e abbiamo

  $$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}\,,$$

con raggio di convregenza infinito, come quello per la serie del coseno. Si nota che la serie per il seno iperbolico si può trovare a partire di quella del seno, con un procedumento analogo. In tal caso si ha

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} .$$

Esercizio 1.4

Studiare la funzione:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2},$$

al finito e all'infinito. Svilupparla in serie intorno a $z_0 = 0$ e determinarne il dominio di convergenza.

Soluzione

- **Studio di funzione al finito**

  Questa è una funzione fratta del tipo

  $$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

  dove a numeratore c'è la funzione $f_1(z) = 1 - \cos z$ e a denominartore la funzione $f_2(z) = z^2$.

  - Studiamo $f_1(z) = 1 - \cos z$
    * Zeri:
      I zeri si trovano risolvendo $\cos(z) = 1$, che corrisponde all'esercizio Esercizio 1.1 , per $a = 1$. Sapiamo quindi che le soluzioni hanno parte immaginaria nulla, ovvero le soluzioni sono quelle del coseno di variabile reale.

      $$\begin{aligned} f_1(z) = 1 - \cos z = 0 \qquad &\Leftrightarrow \quad \cos z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \\ &\Leftrightarrow \quad z = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

      Determiniamo l'ordine di questi zeri.

      (1) $\displaystyle\lim_{z \to 2m\pi} (1 - \cos z) = 0,$ perciò $z = 2m\pi$ è zero di ordine $n \geq 1$.

      (2) $\displaystyle\lim_{z \to 2m\pi} \frac{d}{dz}(1 - \cos z) = \lim_{z \to 2m\pi} \sin z = 0$

      perciò $z = 2m\pi$ è zero di ordine $n \geq 2$.

      (3) $\displaystyle\lim_{z \to 2m\pi} \frac{d^2}{dz^2}(1 - \cos z) = \lim_{z \to 2m\pi} \frac{d}{dz} \sin z = \lim_{z \to 2m\pi} \cos z = 1 \neq 0$

      perciò $z = 2m\pi$ è zero di ordine $n = 2$.
    * Singolarità: La funzione $f_1(z) = 1 - \cos z$ non ha singolarità.
  - Studiamo $f_2(z) = z^2$
    * Zeri: $f_2(z) = z^2$ ha uno zero doppio in $z = 0$.
    * Singolarità: $f_2(z) = z^2$ non ha singolarità.

Quindi per la funzione

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

abbiamo:

- $z = 0$:

$$\begin{array}{c} f_1(z) \text{ ha uno zero di ordine} \\ n_1 = 2 \text{ (doppio) in } z = 0 \\ \text{e} \\ f_2(z) \text{ ha uno zero di ordine} \\ n_2 = 2 \text{ (doppio) in } z = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(z) \text{ è regolare e non nulla in } z = 0$$

- $z = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$:

$$\begin{array}{c} f_1(z) \text{ ha zeri doppi} \\ \text{e} \\ f_2(z) \text{ è regolare e non nulla} \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(z) \text{ ha zeri doppi}$$

Riassumendo,

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

ha zeri semplici in $z = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ e non ha singolarità al finito.

- **Studio di funzione all'infinito**

  Per studiare $f(z)$ all'infinito, controlliamo il comportamento di $f(1/t)$ per $t \to 0$.

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = t^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) .$$

  Il coseno ha una singolarità essenziale per $t = 0$, che non può essere compensata da t^2 (la serie di $f(1/t)$ intorno a $t = 0$ non ha una potenza negativa minima). Quindi, $f(z)$ ha una singolarità essenziale per $z = \infty$.

- **Sviluppo in serie intorno a $z = 0$**

  Poiché $z = 0$ è un punto regolare di $f(z)$, ci aspettiamo che lo sviluppo in serie intorno a questo punto sia uno sviluppo di Taylor. Procediamo usando lo sviluppo in serie del coseno:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2k!}\right] = \frac{1}{z^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k}}{2k!}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k-2}}{2k!}$$

  Ponendo $k' = k - 1$ avremo:

$$f(z) = \sum_{k'=0}^{\infty} (-1)^{k'+2} \frac{z^{2k'}}{(2k'+2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+2)!},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo rinominato $k' \to k$. Abbiamo trovato, come atteso, che lo sviluppo in serie di $f(z)$ non ha potenze negative ed è quindi una serie di Taylor. Il raggio di convergenza della serie è:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\left|\frac{(-1)^k}{(2k+2)!}\frac{(2k+4)!}{(-1)^{k+1}}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{|-(2k+4)(2k+3)|} = \infty.$$

La serie converge in tutto il piano complesso.

Si nota che la formula di Cauchy-Hadamard utilizzata sopra e quella con la radice quadrata, perché la serie della funzione sviluppata ha solo potenze pari. In altre parole, un valore di k corrisponde al termine z^{2k}, mentre che il caso $k+1$ corrisponde alla potenza z^{2k+2} della serie.

Esercizio 1.5

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3} \,,$$

trovare singolarità (al finito e all'infinito), lo sviluppo in serie intorno a $z = 0$, il raggio di convergenza, e calcolare i residui della funzione nei punti singolari.

Soluzione

- **Studio al finito.**

  Al finito, l'unico punto che potrebbe essere singolare è $z = 0$. Possiamo controllare il comportamento per $z = 0$ con tre "metodi" diversi (in realtà sono tre modi di fare la stessa cosa). A seguito vediamo tutti tre, dal più semplice al più lungo.

  - **Metodo 1** A partire dei primi termini della serie del seno intorno a $z = 0$, troviamo una espressione per $z - \sin(z)$:

    $$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}\left(z^5\right) \implies z - \sin(z) = \frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}\left(z^5\right) \,.$$

    Si nota che non abbiamo cambiato il segno del termine $\mathcal{O}(\dots)$, dato che questo simbolo indica solo la potenza dominante dei termini lasciati impliciti, sensa specificare la costante che multiplica a essa. Dalla espressione sopra possiamo dire che

    $$\frac{z - \sin(z)}{z^3} = \frac{\frac{z^3}{3!} + \mathcal{O}\left(z^5\right)}{z^3} = \frac{1}{3!} + \mathcal{O}\left(z^2\right) \,.$$

    Da questo si conclude che $f(z)$ è regolare per $z = 0$ (la serie di potenze e una serie di Taylor, i.e senza potenze negative), e che non si annulla (il primo termine della serie di Taylor è $1/3!$).

  - **Metodo 2** Dato che dobbiamo studiare solo il punto $z = 0$, possiamo controllare se il limite essite. Usando L'Hopital tre volte:

    $$\lim_{z\to 0} \frac{z - \sin(z)}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos(z)}{3z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{6z} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos(z)}{6} = \frac{1}{3!} \,.$$

    Quindi la funzione è regolare e non nulla, con limite per $z \to 0$ uguale a quello trovato nel metodo 1 sopra, pari a $1/3!$. Questo metodo potrebbe richiedere calcoli lunghi (3 derivate nel nostro caso) per altre funzioni.

  - **Metodo 3** Questa è una funzione fratta del tipo

    $$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

    dove a numeratore c'è la funzione $f_1(z) = z - \sin z$ e a denominartore la funzione $f_2(z) = z^3$.

∗ Studiamo $f_1(z) = z - \sin z$

· Zeri:
$f_1(z) = z - \sin z$ ha zeri uno zero solo in $z = 0$. Vediamo l'ordine di questo zero:

(1) $\lim_{z\to 0}(z - \sin z) = 0, \quad$ perciò $z = 0$ è zero di ordine $n \geq 1$.

(2) $\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z - \sin z) = \lim_{z\to 0}(1 - \cos z) = 0,$
perciò $z = 0$ è zero di ordine $n \geq 2$.

(3) $\lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}(z - \sin z) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(1 - \cos z) = \lim_{z\to 0} \sin z = 0,$
perciò $z = 0$ è zero di ordine $n \geq 3$.

(4) $\lim_{z\to 0} \frac{d^3}{dz^3}(z - \sin z) = \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}(1 - \cos z) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \sin z = \lim_{z\to 0} \cos z = 1 \neq 0,$
perciò $z = 0$ è zero di ordine $n = 3$.

· Singolarità: $f_1(z) = z - \sin z$ non ha singolarità

∗ Studiamo $f_2(z) = z^3$

· Zeri: $f_2(z) = z^3$ ha uno zero di ordine 3 in $z = 0$.

· Singolarità: $f_2(z) = z^3$ non ha singolarità

Quindi la funzione

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{z - \sin z}{z^3}$$

non ha zeri e non ha singolarità.

- **Studio all'infinito.**

Studiamo la funzione $f(1/t)$ per $t = 0$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1/t - \sin(1/t)}{1/t^3} = t^2\left(1 - t\sin(1/t)\right) .$$

La funzione $f(1/t)$ ha una singolarità essenziale dovuta al seno, che non può essere compensata dalle potenze di t nella espressione sopra. Quindi, la funzione $f(z)$ ha una singolarità essenziale per $z = \infty$.

- **Sviluppo intorno a $z = 0$ e raggio di convergenza**

Non avendo singolarità, ci aspettiamo che lo sviluppo di Laurent in $z = 0$ sia in realtà uno sviluppo di Taylor. Infatti, sfruttando lo sviluppo del seno abbiamo:

$$f(z) \quad = \quad \frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left[z - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$$

A questo punto estraiamo dalla serie il primo termine che si cancella con z e otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3}\left[z - z - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] \\ &= = -\frac{1}{z^3}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k-2}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Per far vedere esplicitamente che le potenze di z sono tutte positive facciamo la sostituzione $k' = k - 1$:

$$f(z) = -\sum_{k'=0}^{\infty}(-1)^{k'+1}\frac{z^{2k'}}{(2k'+3)!} = \sum_{k'=0}^{\infty}(-1)^{k'}\frac{z^{2k'}}{(2k'+3)!} = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \ldots$$

dove abbiamo usato che $-(-1)^{k'-1} = (-1)^{k'}(-1)^2 = (-1)^{k'}$. Il raggio di convergenza della serie è dato da:

$$\rho = \lim_{k'\to\infty}\sqrt{\left|\frac{(-1)^{k'+2}}{(2k'+3)!}\frac{(2k'+5)!}{(-1)^{k'+3}}\right|} = \lim_{k'\to\infty}\sqrt{|-(2k'+5)(2k'+4)|} = \infty.$$

La serie converge in tutto il campo complesso. Si nota che la formula di Cauchy-Hadamard utilizzata sopra e quella con la radice quadrata, perché la serie della funzione sviluppata ha solo potenze pari. In altre parole, un valore di k corrisponde al termine z^{2k}, mentre che il caso $k+1$ corrisponde alla potenza z^{2k+2} della serie.

- **Residui.**

  Non avendo $f(z)$ nessuna singolarità al finito, abbiamo che i residui in tutti i punti sono nulli al finito.

  Per il punto all'infinito, dobbiamo calcolare

$$\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = \left\{\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{t^2}\, f(1/t)\right)\right\}_{t=0} = \{\mathrm{Res}\,(t\sin(1/t) - 1)\}_{t=0}\ ,$$

  dato che la serie di $\sin(1/t)$ intorno a $t = 0$ ha solo potenze dispari di t, quella per $t\sin(1/t) - 1$ ha solo potenze pari, quindi $d_{-1} = 0$. Questo risultato si poteva anche ottenere usando il fatto che la nostra $f(z)$ non ha delle singolarità al finito, visto che

$$\sum_{z_i\in\mathbb{C}}\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=z_i} + \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = 0$$

Esercizio 1.6: Esame del 13 Febraio 2024 - Esercizio 1(b)

Consideriamo la funzione $f_n(z)$ di variabile complessa z

$$f_n(z) = z\,\frac{\sin(\pi z)}{z^n - 1}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}\,.$$

Studiare le singolarità al finito di $f_n(z)$ e il suo comportamento all'infinito.

Soluzione

Per lo studio delle singolarità al finito della funzione $f_n(z)$ di variabile complessa z

$$f_n(z) = z\,\frac{\sin(\pi z)}{z^n - 1}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}\,,$$

notiamo che le uniche potenziali singolarità si hanno dove si annulla il denominatore $z^n - 1$:

$$z^n - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z^n = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = z_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots n-1\,.$$

Questi sono tutti zeri semplici del denominatore. Tutti questi zeri giacciono sulla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine.
Gli unici punti della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine per cui si annulla anche il numeratore $\sin(\pi z)$ sono $z = \pm 1$, che sono zeri semplici di $\sin(\pi z)$. Solo in quei punti il numeratore potrebbe compensare il denominatore. Il punto $z = 1$ corrisponde al punto z_k con $k = 0$, mentre $z = -1$ corrisponde al punto z_k con $k = n/2$ (solo se n è pari):

$$\begin{aligned} k = 0: &\qquad z_0 = e^{2\pi i\, 0} = 1\,, \\ k = \frac{n}{2}: &\qquad z_{n/2} = e^{2\pi i \frac{n/2}{n}} = e^{i\pi} = -1\,, \qquad \text{per } n \text{ pari}\,. \end{aligned}$$

Si nota che $k = n/2$ non ha delle soluzione se n è dispari, dato che k è sempre intero. Mettendo tutto insieme, dobbiamo escludere sempre il punto z_k con $k = 0$ dall'elenco dei poli. Invece, scludiamo il punto z_k con $k = n/2$ solo per n pari. Pertanto concludiamo che la funzione $f_n(z)$ ha poli semplici in

$$z = z_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}} \quad \text{con:} \quad \begin{aligned} & k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{n/2\}\,, \qquad n \text{ pari}\,, \\ & k \in \{1, \dots, n-1\} \qquad\quad ,\qquad n \text{ dispari}\,. \end{aligned}$$

Per il punto all'infinito, vediamo subito che $z = \infty$ è una singolarità essenziale del seno a numeratore che vince sul resto della funzione.
Pertanto $f_n(z)$ ha singolarità essenziale in $z = \infty$.