

CURVE E INTEGRALI DI LINEA ANALISI III - CDL IN FISICA

VIVINA BARUTELLO, PAOLO CALDIROLI

INDICE

1. Definizioni iniziali, significato fisico, esempi	1
2. Lunghezza di una curva e teorema di rettificabilità	5
3. Esercizi sulle curve	8
4. Curve regolari e cambi di parametrizzazione	10
5. Integrali curvilinei di campi scalari (o di prima specie)	12
6. Esercizi sugli integrali curvilinei di campi scalari	13
7. Esempi di curva non rettificabile e di curva rettificabile ma non C^1	17
8. Curvatura e torsione di una curva regolare in \mathbb{R}^3	19
9. Curve consecutive e unione di curve	19
10. Curve regolari a tratti e integrali di prima specie lungo curve regolari a tratti	20
11. Esempi ed esercizi	21
12. Integrali di linea di campi vettoriali	23
13. Sostegni orientati	25
14. Campi conservativi e potenziali	26
15. Campi radiali	29
16. Esempi notevoli e condizione necessaria affinché un campo sia conservativo	30
17. Condizione sufficiente affinché un campo sia conservativo (lemma di Poincaré)	32
18. Esercizi sui campi conservativi e calcolo del potenziale	34
19. Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi	39
20. Forme differenziali	40
21. Formula di Gauss-Green	42
22. Esercizi sulla formula di Gauss-Green	47

1. DEFINIZIONI INIZIALI, SIGNIFICATO FISICO, ESEMPI

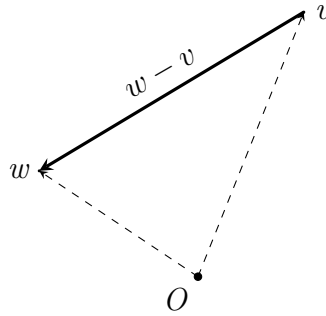
Consideriamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e un intero $N \geq 2$.

Definizione 1.1. Una curva, più precisamente, una curva parametrica in \mathbb{R}^N è una funzione continua $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. In particolare per ogni $t \in I$ si ha che $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$ è un vettore in \mathbb{R}^N . La variabile indipendente $t \in I$ si chiama parametro della curva. L'immagine di γ , cioè l'insieme $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ si chiama sostegno della curva.

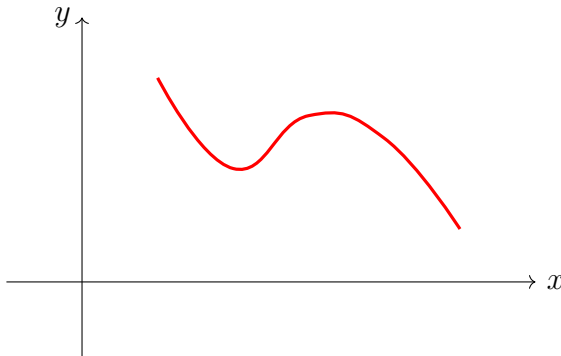
Nel contesto della cinematica del punto, una curva rappresenta il moto di una particella nello spazio euclideo N -dimensionale.

La precedente definizione non costituisce l'unico modo per individuare una curva in \mathbb{R}^N . Ad esempio, la circonferenza nel piano, centrata in $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e di raggio $r > 0$ si può rappresentare nella forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$.

Esempi 1.2. (1) *Fissati due punti $v, w \in \mathbb{R}^N$, il segmento rettilineo che congiunge v con w è la curva $\gamma(t) = (1 - t)v + tw$ con $t \in [0, 1]$. In particolare $\gamma(0) = v$ è il punto iniziale e $\gamma(1) = w$ il punto finale. Il sostegno della curva è il segmento individuato dal vettore $w - v$.*

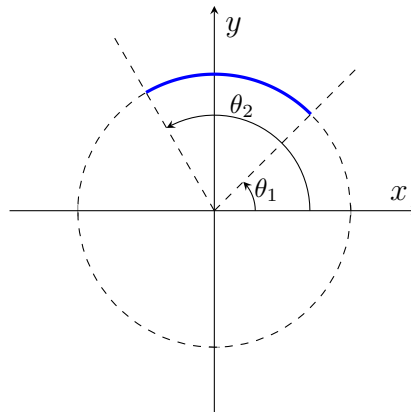


(2) *Una curva piana cartesiana è una curva parametrica della forma $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ dove $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua reale di variabile reale. In questo caso, il sostegno di γ coincide con il grafico di f .*

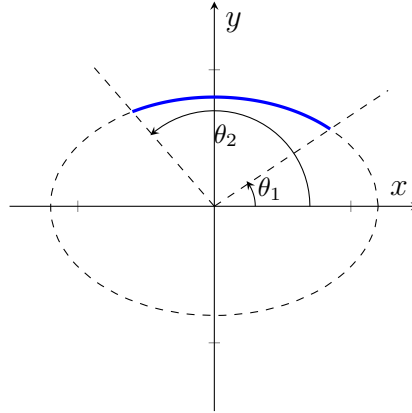


La curva nel disegno a sinistra è una curva cartesiana rispetto al sistema di riferimento disegnato perché ogni retta verticale ha al più un'intersezione con la curva.

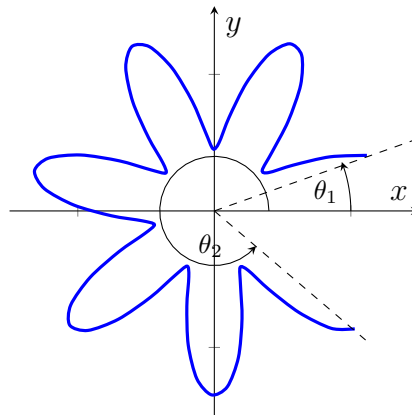
(3) *Un arco di circonferenza è una curva della forma $\gamma(\theta) = R(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ essendo $R > 0$ fissato.*



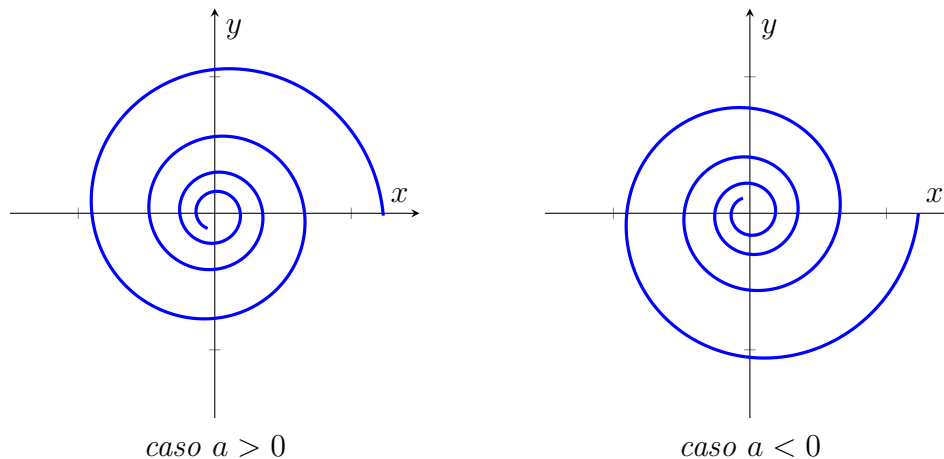
- (4) Un arco di ellisse è una curva della forma $\gamma(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, essendo a e b costanti positive fissate.



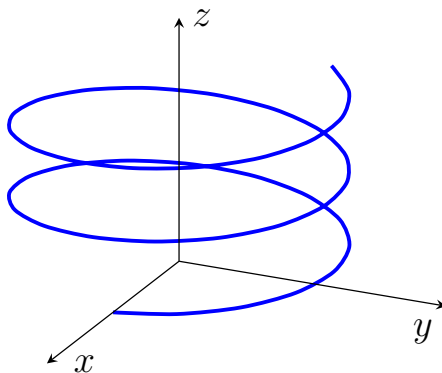
- (5) Una curva piana in forma polare è una curva parametrica della forma $\gamma(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, essendo $\rho: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione continua a valori non negativi.



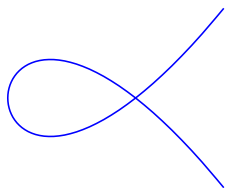
- (6) La spirale logaritmica o “spira mirabilis” di Bernoulli è la curva definita da $\gamma(\theta) = ae^{b\theta}(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \geq 0$. Qui a e b sono costanti reali non nulle. La curva è una spirale percorsa in senso antiorario se $a > 0$, in senso orario se $a < 0$. La distanza del punto dall’origine è data da $\rho(\theta) = |a|e^{b\theta}$, da cui $\theta = \frac{1}{b} \log \frac{\rho}{|a|}$, che spiega la denominazione “spirale logaritmica”.



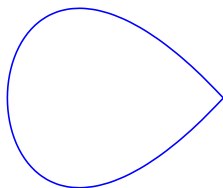
- (7) Un'elica cilindrica è una curva in \mathbb{R}^3 della forma $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, t)$ con $t \in [0, T]$, essendo R e T costanti positive fissate.



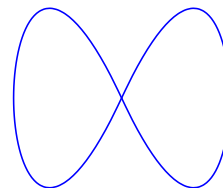
Definizione 1.3. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$, si dice semplice se $\gamma|_{[a,b]}$ è una funzione iniettiva.



curva né chiusa né semplice



curva chiusa e semplice

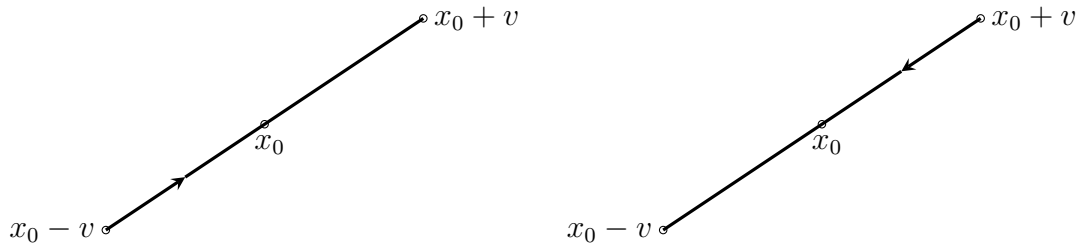


curva chiusa ma non semplice

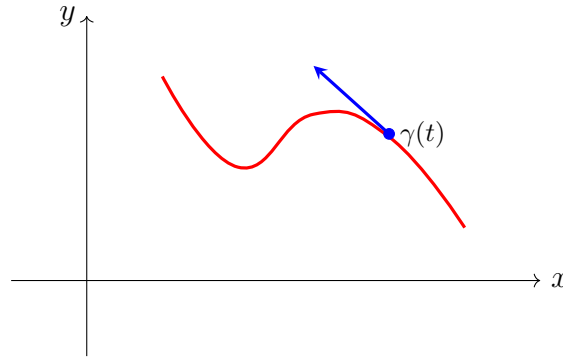
Esempio 1.4. Consideriamo la curva $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ con θ in un certo intervallo chiuso e limitato $I = [\theta_1, \theta_2]$. Le proprietà della curva di essere chiusa e/o di essere semplice dipendono dall'intervallo dei parametri. Se $I = [0, \pi]$, allora γ è semplice ma non chiusa. Se $I = [0, 2\pi]$,

allora γ è semplice e chiusa. Se $I = [0, 3\pi]$, allora γ non è né chiusa né semplice. Se $I = [0, 4\pi]$, allora γ è chiusa ma non semplice.

Il parametro di una curva induce un *verso di percorrenza* o *orientamento* della curva stessa. Ad esempio, fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, le curve $\gamma^+(t) = x_0 + tv$ con $t \in [-1, 1]$ e $\gamma^-(t) = x_0 - tv$ con $t \in [-1, 1]$ rappresentano lo stesso segmento di estremi $x_0 - v$ e $x_0 + v$ ma sono percorse con verso una l'opposto dell'altra.



Definizione 1.5. Data una curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ e fissato $t_0 \in I$, se esiste il vettore $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_N(t_0))$, esso si chiama *vettore derivata* o *vettore tangente* a γ in t_0 . Se t_0 è il primo (rispettivamente, secondo) estremo di I , si prende solo la derivata destra (rispettivamente, sinistra) di γ . La curva γ si dice di classe C^1 su I se $\gamma'(t)$ esiste per ogni $t \in I$ e le funzioni $\gamma'_1, \dots, \gamma'_N: I \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue su I .



Osservazione 1.6. Una stessa curva può essere rappresentata mediante parametrizzazioni diverse. Ad esempio le funzioni $\gamma_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0, \pi]$ e $\gamma_2(\theta) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ parametrizzano entrambe la semicirconferenza unitaria superiore, con lo stesso orientamento. Il vettore tangente dipende dalla parametrizzazione. Ad esempio $\gamma'_1(0) = (0, 1)$ mentre $\gamma'_2(0) = (0, 2)$.

2. LUNGHEZZA DI UNA CURVA E TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ

La lunghezza di una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si definisce tramite approssimazione per poligoni, secondo la seguente costruzione.

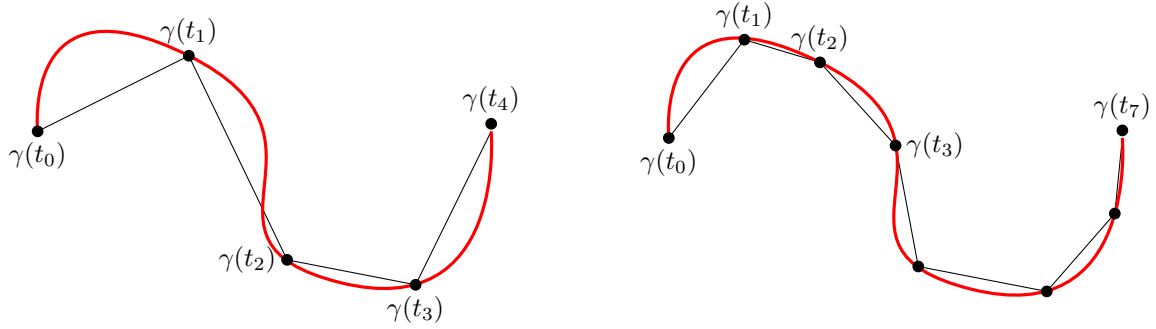
Si introduce la classe \mathbb{P} delle partizioni dell'intervallo $[a, b]$, cioè la famiglia dei sottoinsiemi finiti e ordinati di $[a, b]$ della forma $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ per qualche intero positivo n .

Preso una partizione $P \in \mathbb{P}$, si definisce lunghezza della poligonale su γ corrispondente a P il numero

$$L(P) = \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \quad \text{se } P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

dove in generale, dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^N$, con $|x - y|$ si denota la distanza euclidea tra x e y , cioè

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}.$$



Si osserva che, infittendo la partizione, la lunghezza della poligonale aumenta, cioè, prese $P, P' \in \mathbb{P}$, se $P \subset P'$ allora $L(P) \leq L(P')$.

Definizione 2.1. Si definisce lunghezza della curva γ l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali su γ , al variare delle partizioni di $[a, b]$:

$$L(\gamma) = \sup_{P \in \mathbb{P}} L(P).$$

Se $L(\gamma) < \infty$ la curva γ si dice rettificabile.

Dato che per definizione l'estremo superiore di un insieme è il minimo dei maggioranti, vale che

- $L(\gamma) \geq L(P) \quad \forall P \in \mathbb{P}$
- se $L(\gamma) < \infty$ allora $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathbb{P} : L(P) > L(\gamma) - \varepsilon$.

La definizione di lunghezza di una curva non è operativamente utile. Per il calcolo della lunghezza ci si può avvalere della formula presentata nel seguente importante risultato.

Teorema 2.2 (rettificabilità e calcolo della lunghezza). Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva di classe C^1 allora γ è rettificabile e la sua lunghezza vale

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Si noti che l'essere una curva di classe C^1 costituisce in generale una condizione sufficiente ma non necessaria per la rettificabilità.

Dimostrazione. Iniziamo a provare la rettificabilità e la disuguaglianza

$$(1) \quad L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Presa una qualsiasi partizione $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ di $[a, b]$, la lunghezza della poligonale su γ corrispondente a P si può stimare in questo modo:

$$\begin{aligned}
 L(P) &= \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\
 &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right| \quad (\text{per il teorema fondamentale del calcolo}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)| dt \quad (\text{per la nota proprietà } \left| \int_a^b g \right| \leq \int_a^b |g|) \\
 &= \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (\text{per la nota proprietà } \int_a^b g + \int_b^c g = \int_a^c g).
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} L(P) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

e l'integrale a secondo membro è finito perché, essendo γ di classe C^1 per ipotesi, la funzione $|\gamma'|$ è continua in $[a, b]$. Dunque γ è rettificabile e vale (1). Per provare la disuguaglianza opposta utilizziamo il seguente risultato ausiliario, di cui omettiamo la dimostrazione, che si basa solo sulla definizione di lunghezza e sulle proprietà dell'estremo superiore.

Lemma 2.3 (di decomposizione). *Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva rettificabile, allora per ogni $c \in [a, b]$ anche $\gamma|_{[a, c]}$ e $\gamma|_{[c, b]}$ lo sono e*

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a, c]}) + L(\gamma|_{[c, b]}).$$

Proseguiamo la dimostrazione del teorema, andando ad introdurre la funzione $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$S(t) = L(\gamma|_{[a, t]}) \quad (\text{lunghezza di } \gamma \text{ fino a } t).$$

Osserviamo che $S(a) = 0$ e $S(b) = L(\gamma)$. Il nostro obiettivo è provare che S è derivabile e calcolare la derivata. A tale scopo, fissiamo $t \in [a, b]$ e prendiamo $h > 0$ tale che $t + h \leq b$. Per il lemma di decomposizione,

$$L(\gamma|_{[a, t+h]}) = L(\gamma|_{[a, t]}) + L(\gamma|_{[t, t+h]}),$$

cioè

$$S(t+h) - S(t) = L(\gamma|_{[t, t+h]}).$$

Per definizione di lunghezza, considerando la partizione $\{t, t+h\}$ dell'intervallo $[t, t+h]$ abbiamo che

$$|\gamma(t+h) - \gamma(t)| \leq L(\gamma|_{[t, t+h]}).$$

Quindi, dividendo per h (che è un numero positivo), otteniamo

$$(2) \quad \left| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right| \leq \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\gamma'(s)| ds$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo applicato (1) con $[t, t+h]$ al posto di $[a, b]$. Ora prendiamo il limite per $h \rightarrow 0^+$. Essendo γ derivabile,

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \gamma'(t).$$

Inoltre

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |\gamma'(s)| ds = |\gamma'(t)|$$

perché $|\gamma'|$ è una funzione continua e per il ben noto teorema secondo cui se $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora la funzione $G(t) = \int_a^t g$ è derivabile e $G'(t) = g(t)$, ovvero $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g = g(t)$. Allora, per il teorema del confronto per i limiti, grazie a (3) e (4), da (2) segue che

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = |\gamma'(t)|,$$

cioè S ammette derivata destra in ogni $t \in [a, b]$ e questa vale $|\gamma'(t)|$. Prendendo ora $t \in (a, b]$ e $h < 0$ tale che $t+h \geq a$ e ripetendo un simile ragionamento otteniamo anche che S ammette derivata sinistra in t e vale $|\gamma'(t)|$. In conclusione S è derivabile in $[a, b]$ e $S'(t) = |\gamma'(t)|$ per ogni $t \in [a, b]$. Essendo γ di classe C^1 , anche S risulta di classe C^1 e per il teorema fondamentale del calcolo otteniamo che

$$L(\gamma) = S(b) - S(a) = \int_a^b S'(t) dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad \square$$

3. ESERCIZI SULLE CURVE

Esercizio 3.1. Si consideri la spirale logarimica $\gamma(\theta) = e^{b\theta}(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ e b costante non nulla fissata. Stabilire se tale curva è chiusa, semplice, rettificabile e calcolarne la lunghezza. Essendo $\gamma(0) = (1, 0) \neq e^{2\pi b}(1, 0) = \gamma(2\pi)$ (perché $b \neq 0$), la curva non è chiusa. È semplice perché $|\gamma(t)| = e^{bt}$ è iniettiva in $[0, 2\pi)$, in quanto monotona. La curva è di classe C^1 e quindi rettificabile. In particolare

$$\begin{aligned} \gamma'(\theta) &= be^{b\theta}(\cos \theta, \sin \theta) + e^{b\theta}(-\sin \theta, \cos \theta) = e^{b\theta}(b \cos \theta - \sin \theta, b \sin \theta + \cos \theta) \\ |\gamma'(\theta)| &= e^{b\theta} \sqrt{b^2 + 1} \end{aligned}$$

e, per il teorema 2.2

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} e^{b\theta} \sqrt{b^2 + 1} d\theta = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 + 1} (e^{2\pi b} - 1).$$

Esercizio 3.2. Si consideri la spirale archimedeana $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare la lunghezza di γ .

La curva è di classe C^1 e quindi si può applicare il teorema 2.2. Si ha che

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t) \\ |\gamma'(t)| &= \sqrt{1 + t^2} \end{aligned}$$

e, integrando per parti,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt = t\sqrt{1 + t^2} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}} dt \\ &= 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt + \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} \\ &= 2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} - L(\gamma) + \int_0^{2\pi} \operatorname{arcsinh}'(t) dt \end{aligned}$$

da cui

$$L(\gamma) = \pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2\pi).$$

Esercizio 3.3. Si consideri la curva $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ con $t \in [-1, 1]$. Calcolare la lunghezza di γ e disegnarne il sostegno.

La curva è di classe C^1 . Quindi si può applicare il teorema 2.2. Si ha che

$$\gamma'(t) = (3t^2, 2t), \quad |\gamma'(t)| = 2|t|\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2}$$

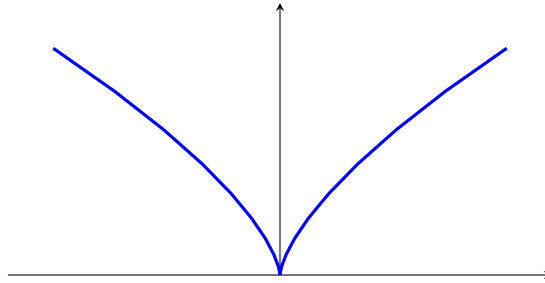
e, per parità,

$$L(\gamma) = \int_{-1}^1 2|t|\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2} dt = \int_0^1 4t\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2} dt = \frac{16}{9} \left[1 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{16}{9} \left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

Per disegnare il sostegno di γ , poniamo $(x, y) = (t^3, t^2)$ e cerchiamo una relazione tra x e y in modo da rappresentare γ come curva cartesiana. Abbiamo che

$$y = t^2 = x^{\frac{2}{3}} \quad \text{con } x \in [-1, 1].$$

Dunque il sostegno di γ coincide con il grafico di $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ con $x \in [-1, 1]$.



Esercizio 3.4. Si consideri la curva astroide data da $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Stabilire se γ è chiusa e semplice. Calcolare la lunghezza di γ e disegnarne il sostegno.

La curva è chiusa perché $\gamma(0) = (1, 0) = \gamma(2\pi)$. Inoltre è semplice perché

$$\begin{cases} t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \\ \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \\ \cos^3 t_1 = \cos^3 t_2 \\ \sin^3 t_1 = \sin^3 t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \\ \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \\ t_1 - t_2 = 2k\pi \\ \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2.$$

La curva è di classe C^1 . Quindi si può applicare il teorema 2.2. Si ha che

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t), \quad |\gamma'(t)| = 3|\cos t \sin t|$$

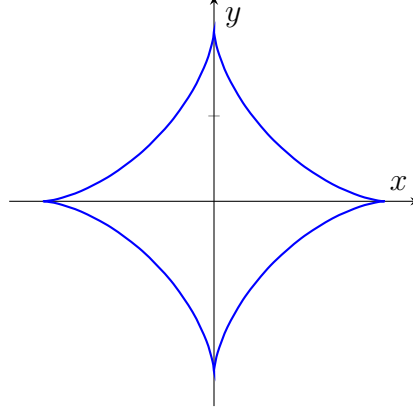
e, essendo la funzione $|\cos t \sin t|$ periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$,

$$L(\gamma) = 3 \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t| dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 12 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

Come nell'esercizio precedente, per disegnare il sostegno di γ , poniamo $(x, y) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ e cerchiamo una relazione tra x e y . Troviamo che

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{con } x \in [-1, 1].$$

Quindi il sostegno di γ è l'unione di due grafici, quello di $f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ con $x \in [-1, 1]$ e quello di $g(x) = -\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ con $x \in [-1, 1]$.



Si noti che, a differenza di γ , la curva cartesiana definita come $\tilde{\gamma}(x) = (x, f(x))$ con $x \in [-1, 1]$ non è di classe C^1 . Idem per quella corrispondente a g . Questo esercizio evidenzia il fatto che lo stesso sostegno può essere descritto mediante parametrizzazioni diverse, che potrebbero non avere la stessa regolarità.

4. CURVE REGOLARI E CAMBI DI PARAMETRIZZAZIONE

Definizione 4.1. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice regolare se è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$.

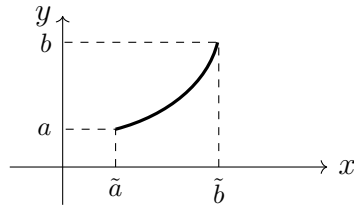
Definizione 4.2. Un cambio di parametrizzazione è una biiezione $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 e tale che $\varphi'(s) \neq 0 \forall s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$.

In particolare un cambio di parametrizzazione $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ è una funzione invertibile, con inversa $\varphi^{-1}: [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ di classe C^1 . Inoltre

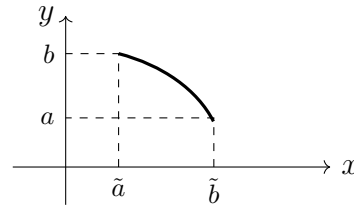
$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \quad \forall t \in [a, b].$$

Da ciò si evince che se $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ è un cambio di parametrizzazione, anche $\varphi^{-1}: [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ lo è.

Osservazione 4.3. Ci sono solo due possibilità, descritte nella figura seguente:



caso $\varphi' > 0$



caso $\varphi' < 0$

Quando il cambio di parametrizzazione φ è crescente, le curve γ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ hanno la stessa orientazione e si dicono equivalenti. Se invece φ è decrescente, le curve γ e $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ percorrono lo stesso sostegno con direzioni opposte.

Vediamo due esempi notevoli di cambi di parametrizzazione.

Esempio 4.4. Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, la funzione $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ definita da $\varphi(s) = a + b - s$ è un cambio di parametrizzazione che inverte il verso di percorrenza di γ . La curva $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ si dice curva opposta a γ e si denota $-\gamma$.

Esempio 4.5. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una curva regolare, cioè di classe C^1 , con $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Consideriamo la funzione $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ già incontrata nella dimostrazione del teorema di rettificabilità, definita come la lunghezza del tratto di curva fino al valore t del parametro, cioè

$$S(t) = L(\gamma|_{[a,t]}) \quad \forall t \in [a, b].$$

Tale funzione si chiama ascissa curvilinea e, per il teorema 2.2, è derivabile con $S'(t) = |\gamma'(t)| \forall t \in [a, b]$. Avendo assunto γ regolare, $S'(t) > 0$ per ogni $t \in [a, b]$ e dunque S è strettamente crescente ed è una biiezione di $[a, b]$ su $[0, L]$ dove $L = L(\gamma)$. Inoltre S è di classe C^1 . Quindi S è un cambio di parametrizzazione. Sia

$$\varphi := S^{-1}: [0, L] \rightarrow [a, b]$$

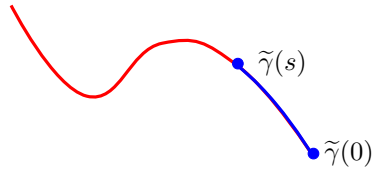
l'inversa di S . Come già osservato, anche φ è un cambio di parametrizzazione. La curva $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(\varphi(s))$ con $s \in [0, L]$ si chiama parametrizzazione naturale o intrinseca di γ ed è l'unica parametrizzazione di γ che soddisfa

$$(5) \quad |\tilde{\gamma}'(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, L]$$

e che preserva il verso di percorrenza di γ . In particolare, si ha che

$$L(\tilde{\gamma}|_{[0,s]}) = s \quad \forall s \in [0, L],$$

perciò si chiama parametrizzazione naturale.



Se $\tilde{\gamma}$ è la parametrizzazione naturale, la lunghezza del tratto di curva da $\tilde{\gamma}(0)$ a $\tilde{\gamma}(s)$ vale s .

Verifichiamo che $\tilde{\gamma}$ soddisfa (5):

$$|\tilde{\gamma}'(s)| = |\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)| = \frac{|\gamma'(\varphi(s))|}{S'(\varphi(s))} = \frac{|\gamma'(\varphi(s))|}{|\gamma'(\varphi(s))|} = 1.$$

Verifichiamo che è l'unica parametrizzazione su $[0, L]$ che soddisfa (5) e che rispetta lo stesso verso di percorrenza indotto da γ . Supponiamo che ci siano due parametrizzazioni γ_1 e γ_2 che soddisfano tali proprietà. Allora γ_1 e γ_2 sono curve equivalenti (nel senso dell'osservazione 4.3) definite entrambe su $[0, L]$, cioè esiste un cambio di parametrizzazione $\psi: [0, L] \rightarrow [0, L]$ tale che $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi$. Quindi, dato che γ_1 e γ_2 soddisfano (5) e ψ è crescente,

$$1 = |\gamma_1'(s)| = |\gamma_2'(\psi(s))| |\psi'(s)| = |\psi'(s)| = \psi'(s) \quad \forall s \in [0, L]$$

Dunque $\psi(s) = s + \text{cost}$ e siccome $\psi(0) = 0$, segue che $\psi(s) = s$, cioè $\gamma_1 = \gamma_2$.

Teorema 4.6 (invarianza della lunghezza di una curva rispetto a cambi di parametrizzazione). Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva regolare e $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ è un cambio di parametrizzazione, allora $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva regolare con lo stesso sostegno di γ e $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$.

Dimostrazione. La prima parte è immediata: la composizione di funzioni di classe C^1 è pure di classe C^1 . Inoltre $\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s) \neq 0$ per ogni $s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ per le ipotesi fatte. Dimostriamo l'invarianza della lunghezza. Possiamo applicare il teorema 2.2 e calcolare

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\tilde{\gamma}'(s)| ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} |\gamma'(\varphi(s))| |\varphi'(s)| ds = \int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} |\gamma'(t)| \frac{|\varphi'(\varphi^{-1}(t))|}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} dt$$

avendo effettuato il cambio di variabili $t = \varphi(s)$. Ora distinguiamo due casi.

Primo caso: $\varphi'(s) > 0 \forall s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Allora $\varphi(\tilde{a}) = a$, $\varphi(\tilde{b}) = b$ e

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L(\gamma).$$

Secondo caso: $\varphi'(s) < 0 \forall s \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Allora $\varphi(\tilde{a}) = b$, $\varphi(\tilde{b}) = a$ e

$$L(\tilde{\gamma}) = - \int_b^a |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L(\gamma). \quad \square$$

Esercizio 4.1. Trovare la parametrizzazione naturale della curva $\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Calcoliamo

$$\gamma'(t) = e^t (\cos t, \sin t) + e^t (-\sin t, \cos t), \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{2} e^t$$

da cui

$$S(t) = \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \sqrt{2} (e^t - 1) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

In particolare $L(\gamma) = \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1)$. Per invertire la funzione $S(t)$, risolviamo l'equazione $S(t) = s$ rispetto a t :

$$s = S(t) \Leftrightarrow s = \sqrt{2} (e^t - 1) \Leftrightarrow t = \log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

Quindi il cambio di parametrizzazione da considerare è la funzione

$$\varphi(s) = \log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \quad \forall s \in [0, \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1)]$$

e la parametrizzazione naturale è

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(s) &= \gamma(\varphi(s)) = e^{\varphi(s)} (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s))) \\ &= \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \left(\cos \left(\log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), \sin \left(\log \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \quad \forall s \in [0, \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1)]. \end{aligned}$$

La correttezza del risultato si può verificare riconoscendo che $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$ per ogni s .

5. INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI SCALARI (O DI PRIMA SPECIE)

Definizione 5.1. Date una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 , con sostegno Γ e una funzione continua $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, si chiama integrale curvilineo di f lungo γ il numero

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Osservazione 5.2. Per le richieste fatte su γ e su f , la funzione integranda è continua su $[a, b]$ e quindi la definizione è ben posta. Osserviamo inoltre che se f è la funzione costante 1 allora $\int_{\gamma} f ds = L(\gamma)$.

Teorema 5.3. *Date due curve regolari $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ che differiscono per un cambio di parametrizzazione, e data una funzione continua $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, dove Γ è il sostegno di γ (e anche di $\tilde{\gamma}$), si ha che*

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\tilde{\gamma}} f ds.$$

La dimostrazione segue dalla definizione di integrale curvilineo ed è uguale a quella dell'invarianza della lunghezza. I dettagli possono essere svolti in autonomia.

Il seguente risultato, che non dimostreremo, garantisce che l'integrale curvilineo di un campo scalare lungo una data curva *regolare e semplice* dipende solo dal sostegno della curva e non dalla parametrizzazione.

Teorema 5.4. *Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono due curve regolari, semplici e con lo stesso sostegno, allora differiscono per un cambio di parametrizzazione.*

Per i teoremi 5.3 e 5.4, se γ è una curva regolare e semplice con sostegno Γ e $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in Γ , poniamo

$$\int_{\Gamma} f ds := \int_{\gamma} f ds$$

e tale scrittura è ben posta perché non dipende dalla parametrizzazione di Γ .

Osservazione 5.5 (significato fisico dell'integrale curvilineo di un campo scalare). *Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva di classe C^1 , con sostegno Γ lungo cui è distribuita una massa (o una carica) e sia $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione (continua) che dà la densità di massa (o di carica) nei punti di Γ . Allora l'integrale curvilineo di f lungo γ rappresenta la massa totale (carica totale) della curva.*

Osservazione 5.6 (significato geometrico dell'integrale curvilineo di un campo scalare). *Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 , con sostegno Γ e sia $f: \Gamma \rightarrow [0, \infty)$ una funzione continua. Allora l'integrale curvilineo di f lungo γ rappresenta l'area della superficie*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \gamma_1(t), y = \gamma_2(t), 0 \leq z \leq f(\gamma(t)), t \in [a, b]\}$$

dove γ_1 e γ_2 sono la prima e la seconda componente di γ .

Definizione 5.7. *Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 si definisce baricentro di γ il punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ le cui coordinate sono date da*

$$\bar{x}_i = \frac{\int_{\gamma} \pi_i ds}{L(\gamma)} \quad i = 1, \dots, N$$

dove $\pi_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione sulla i -esima componente, cioè $\pi_i(x) = x_i$ se $x = (x_1, \dots, x_N)$.

6. ESERCIZI SUGLI INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI SCALARI

Esercizio 6.1. *Calcolare $\int_{\gamma} \sqrt{z} ds$ dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$.*

Si calcola $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)$, da cui $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$. Quindi si applica la definizione 5.1 e si trova

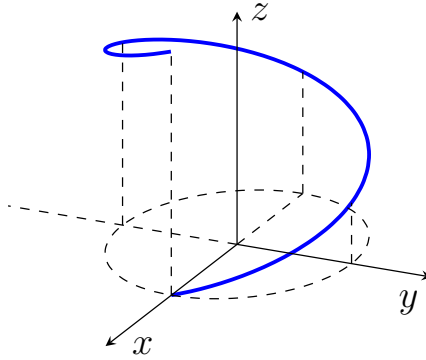
$$\int_{\gamma} \sqrt{z} ds = \int_0^1 \sqrt{t^2} \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{1}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

Esercizio 6.2. Calcolare $\int_{\gamma} \frac{x}{1+y^2} ds$ dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Si calcola $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, da cui $|\gamma'(t)| = 1$. Quindi si applica la definizione 5.1 e si trova

$$\int_{\gamma} \frac{x}{1+y^2} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt = \arctan(\sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 6.3. Trovare il baricentro dell'elica cilindrica $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e R ed h costanti positive fissate.



Chiamiamo $\bar{b} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ il baricentro di γ e applichiamo la definizione 5.7 per calcolarlo. In primo luogo calcoliamo la lunghezza di γ . Si ha che $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t, h)$ e, in particolare, $|\gamma'(t)| = \sqrt{R^2 + h^2}$. Quindi

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Inoltre

$$\int_{\gamma} x ds = \int_0^{2\pi} R \cos t \sqrt{R^2 + h^2} dt = R \sqrt{R^2 + h^2} \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0.$$

Analogamente

$$\int_{\gamma} y ds = \int_0^{2\pi} R \sin t \sqrt{R^2 + h^2} dt = R \sqrt{R^2 + h^2} \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0.$$

Invece

$$\int_{\gamma} z ds = \int_0^{2\pi} ht \sqrt{R^2 + h^2} dt = h \sqrt{R^2 + h^2} \int_0^{2\pi} t dt = h \sqrt{R^2 + h^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2h\pi^2 \sqrt{R^2 + h^2}.$$

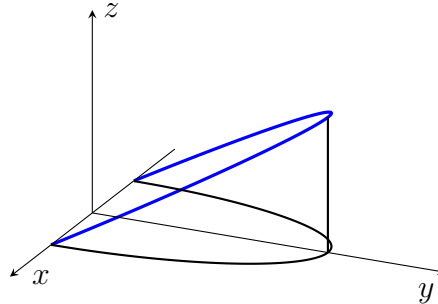
Pertanto, in base alla definizione 5.7, il baricentro di γ è il punto

$$\bar{b} = (0, 0, h\pi).$$

Esercizio 6.4. Disegnare l'insieme $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y\}$ e calcolare l'area della superficie laterale di C .

La condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ individua il cilindro (pieno) con asse l'asse z e la cui sezione è il cerchio

unitario nel piano orizzontale. Di tale cilindro dobbiamo prendere la parte compresa tra i piani di equazione $z = 0$ e $z = y$.



La superficie laterale dell'insieme C si può allora descrivere come l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq z \leq f(\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \pi\}$$

dove $f(x, y) = y$. Allora, per il significato geometrico di integrale curvilineo di un campo scalare (vedi osservazione 5.6), si ha che

$$\text{area}(S) = \int_{\gamma} f \, ds = \int_0^{\pi} \sin t \, dt = -\cos t \Big|_0^{\pi} = 2.$$

Esercizio 6.5. La curva planare $\gamma(\theta) = (1 - \cos \theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ si chiama cardiode. Verificare che tale curva è chiusa e semplice, tracciare un disegno approssimativo del suo sostegno e calcolarne la lunghezza ed il baricentro.

Si tratta di una curva in forma polare $\gamma(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ dove $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$. In generale, se $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e $\rho(\theta)$ e $\rho|_{[\theta_1, \theta_2]}$ si annulla solo una volta, la curva è semplice. Questo è il caso della cardiode perché la funzione $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$ si annulla per $\theta = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, ma solo 0 appartiene a $[0, 2\pi)$. Tale curva è chiusa perché $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (0, 0)$. Un disegno approssimativo della cardiode si può tracciare tenendo conto dal grafico di $\rho(\theta)$ che dà la distanza del punto $\gamma(\theta)$ dall'origine.

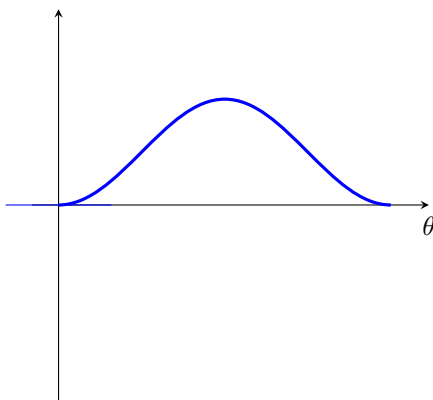
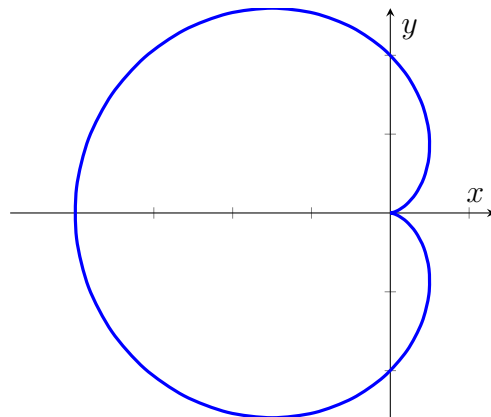


grafico di $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$



cardiode

La cardioide è una curva di classe C^1 e se ne può calcolare la lunghezza con il teorema 2.2. In generale, per curve in forma polare $\gamma(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ si ha che

$$\begin{aligned}\gamma'(\theta) &= (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta) \\ |\gamma'(\theta)| &= \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2}.\end{aligned}$$

Nel caso della cardioide, $\rho'(\theta) = \sin \theta$ e $|\rho'(\theta)| = \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta}$. Allora la lunghezza della cardioide è

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{|\sin \theta|}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta = -2\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta} \Big|_0^\pi \\ &= -4\sqrt{2} (0 - \sqrt{2}) = 8.\end{aligned}$$

Il baricentro della cardioide è il punto $\bar{b} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ dove, per la definizione 5.7,

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \int_\gamma x ds \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{8} \int_\gamma y ds.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma x ds &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) \cos \theta \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta |\sin \theta|}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta - \sqrt{2} \int_\pi^{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta\end{aligned}$$

Per ciascuno dei due integrali possiamo effettuare la sostituzione $t = \cos \theta$ perché il coseno è monotono separatamente in $[0, \pi]$ e in $[\pi, 2\pi]$. Quindi, proseguendo i conti, tenuto conto che $dt = -\sin \theta d\theta$, troviamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma x ds &= -\sqrt{2} \int_1^{-1} \frac{(1-t)t}{\sqrt{1+t}} dt + \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)t}{\sqrt{1+t}} dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)t}{\sqrt{1+t}} dt = 2\sqrt{2} \int_0^2 \frac{(2-s)(s-1)}{\sqrt{s}} ds\end{aligned}$$

avendo effettuato la sostituzione $1+t=s$. Quindi si calcola

$$\int_0^2 \frac{(2-s)(s-1)}{\sqrt{s}} ds = \int_0^2 \left(-s^{\frac{3}{2}} + 3s^{\frac{1}{2}} - 2s^{-\frac{1}{2}} \right) ds = -\frac{2}{5} \sqrt{s} (s^2 - 5s + 10) \Big|_0^2 = -\frac{8\sqrt{2}}{5}$$

e infine, facendo i conti, si trova

$$\bar{x} = -\frac{4}{5}.$$

Per calcolare \bar{y} si può osservare che la cardioide è una curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse e quindi $\bar{y} = 0$. In conclusione, il baricentro della cardioide è il punto $\bar{b} = (-\frac{4}{5}, 0)$.

Esercizio 6.6. Calcolare il baricentro della curva $\gamma(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)$ con $t \in [0, \pi]$ (semi-astroide).

7. ESEMPI DI CURVA NON RETTIFICABILE E DI CURVA RETTIFICABILE MA NON C^1

Consideriamo la curva cartesiana $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ della forma $\gamma(t) = (t, g(t))$ dove

$$g(t) = \begin{cases} t \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) & \text{per } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

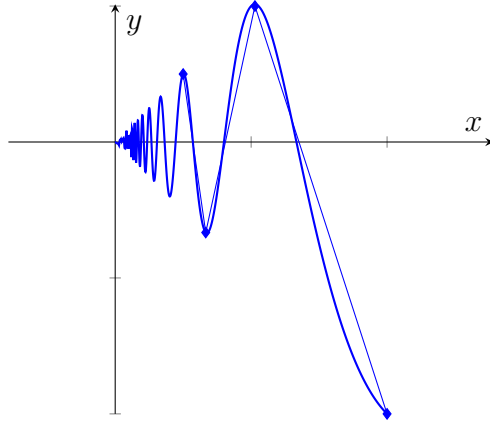


grafico di $t \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)$ e poligonale approssimante

Che γ sia effettivamente una curva è garantito dalla continuità di g in $[0, 1]$. Si osservi, in particolare, che $g(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0^+$. Osserviamo che g è derivabile in $(0, 1]$ con

$$g'(t) = \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) + \frac{\pi}{t} \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)$$

ma non esiste la derivata di g in 0, perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g\left(\frac{1}{2n}\right) - g(0)}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g\left(\frac{1}{2n+1}\right) - g(0)}{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos((2n+1)\pi) = -1.$$

Dunque la curva γ non è di classe C^1 . Proviamo che non è rettificabile. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ consideriamo la partizione $P_k = \{0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$. La lunghezza della poligonale su γ corrispondente a P_k si può stimare così:

$$L(P_k) = |\gamma(0) - \gamma\left(\frac{1}{k}\right)| + |\gamma\left(\frac{1}{k}\right) - \gamma\left(\frac{1}{k-1}\right)| + \dots + |\gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \gamma(1)| > \sum_{n=1}^{k-1} \left| \gamma\left(\frac{1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{1}{n+1}\right) \right|.$$

Per la definizione di distanza euclidea

$$\begin{aligned} \left| \gamma\left(\frac{1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| &= \left| \left(\frac{1}{n}, g\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n+1}, g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^2} \\ &\geq \left| g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = |(-1)^n| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Quindi

$$L(P_k) > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k},$$

che è la ridotta k -esima della serie armonica. Essendo la serie armonica divergente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(P_k) = \infty.$$

Quindi $L(\gamma) = \sup_{P \in \mathbb{P}} L(P) = \infty$.

L'esempio precedente si fonda sul fatto che la lunghezza della curva sul tratto $[\frac{1}{k}, 1]$ si stima con la ridotta k -esima di una serie divergente. Andiamo ora a costruire un esempio di curva che ammette vettore tangente in ogni punto, ma non è di classe C^1 e pur tuttavia è rettificabile. A tale scopo andiamo a modificare la costruzione precedente, per ottenere una curva tale per cui, grosso modo, la lunghezza della curva su tratti $[\frac{1}{k}, 1]$ si stima con la ridotta k -esima della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ che sappiamo essere convergente. Consideriamo la curva cartesiana $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ della forma $\gamma(t) = (t, g(t))$ dove

$$g(t) = \begin{cases} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) & \text{per } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Si ha che

$$g'(t) = \begin{cases} 2t \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) + \pi \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & \text{per } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{per } t = 0. \end{cases}$$

Quindi in particolare g è continua in $[0, 1]$ e γ è effettivamente una curva. Si osservi però che g' non è continua in 0 (verificare!) e dunque γ non è di classe C^1 .

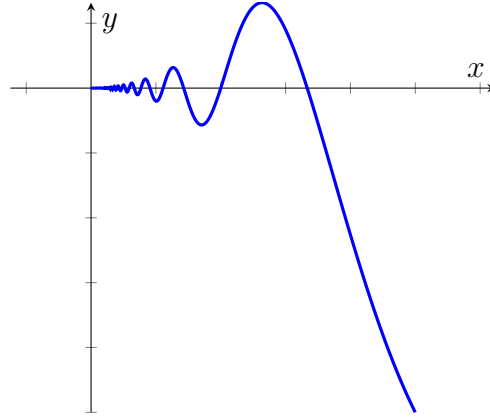


grafico di $t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)$

Si può dimostrare che per una generica curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ vale che

$$L(\gamma) = \sup_{\varepsilon \in (0,1)} L(\gamma|_{[\varepsilon, 1]}).$$

Nel caso in esame, per $\varepsilon \in (0, 1)$ la curva $\gamma|_{[\varepsilon, 1]}$ è di classe C^1 e possiamo stimare

$$L(\gamma|_{[\varepsilon, 1]}) = \int_{\varepsilon}^1 |\gamma'(t)| dt = \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{1 + [g'(t)]^2} dt \leq \int_{\varepsilon}^1 \sqrt{1 + (2 + \pi)^2} dt \leq \sqrt{1 + (2 + \pi)^2}$$

perché $|g'(t)| \leq 2t + \pi \leq 2 + \pi$ per $t \in (0, 1]$. Quindi

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1)} L(\gamma|_{[\varepsilon, 1]}) \leq \sqrt{1 + (2 + \pi)^2}$$

e dunque γ è rettificabile.

8. CURVATURA E TORSIONE DI UNA CURVA REGOLARE IN \mathbb{R}^3

(*) Consideriamo una curva regolare $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata mediante lunghezza d'arco, cioè tale per cui

$$|\gamma'(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, L].$$

Supponiamo γ di classe C^2 cioè le sue componenti sono funzioni due volte derivabili, con derivate seconde continue. Definiamo

$$\begin{aligned} T(s) &:= \gamma'(s) \quad \text{versore tangente a } \gamma \text{ in } s \\ k(s) &:= |\gamma''(s)| \quad \text{curvatura di } \gamma \text{ in } s. \end{aligned}$$

La curvatura misura la rapidità con cui $T(s)$ varia in direzione (e solo in direzione!). Se $k(s) \neq 0$ poniamo

$$N(s) := \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|} \quad \text{versore normale a } \gamma \text{ in } s.$$

Proviamo che i versori tangente e normale sono ortogonali. Siccome $|\gamma'(s)|^2 = 1$ per ogni s , scrivendo $|\gamma'(s)|^2 = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle$ (dove $\langle p, q \rangle$ denota il prodotto scalare tra due vettori $p, q \in \mathbb{R}^3$) e derivando, otteniamo

$$0 = \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle + \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 2\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 2k(s)\langle T(s), N(s) \rangle, .$$

Laddove $k(s) \neq 0$ definiamo inoltre

$$B(s) := T(s) \wedge N(s) \quad \text{versore binormale a } \gamma \text{ in } s$$

dove \wedge denota il prodotto esterno tra vettori di \mathbb{R}^3 . La terna $\{T(s), N(s), B(s)\}$ si chiama *terna di Fréchet* di γ in s ed è costituita da versori mutuamente ortogonali che formano una base in \mathbb{R}^3 .

(6) Se $k(s) \neq 0$, esiste $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tale che $B'(s) = \tau(s)N(s)$.

Il numero $\tau(s)$ si chiama *torsione* di γ in s e misura quanto la curva si discosta dall'essere planare vicino al punto $\gamma(s)$. Dimostriamo (6). Dalla definizione di $B(s)$ otteniamo che

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = \gamma''(s) \wedge \frac{\gamma''(s)}{k(s)} + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s).$$

Quindi $B(s)$ è ortogonale a $T(s)$. D'altra parte, siccome $|B(s)|^2 = 1$, derivando si ottiene che $B(s)$ e $B'(s)$ sono ortogonali. Siccome la terna $\{T(s), N(s), B(s)\}$ è una base, $B'(s)$ deve essere diretto come $N(s)$, cioè vale (6).

9. CURVE CONSECUTIVE E UNIONE DI CURVE

Definizione 9.1. Due curve $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dicono consecutive se $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. In tal caso è possibile costruire la curva unione o giustapposizione di γ_1 e γ_2 (nell'ordine), denotata $\gamma_1 \cup \gamma_2$ e definita così:

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{per } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & \text{per } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

Si noti che $\gamma_1 \cup \gamma_2$ è una funzione continua perché γ_1 e γ_2 sono consecutive. Si osservi anche che nella scrittura $\gamma_1 \cup \gamma_2$ il simbolo di unione non è da intendere in senso insiemistico.

(*) Questa sezione non viene presentata a lezione per motivi di tempo.

Definizione 9.2. Date k curve $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($i = 1, \dots, k$) tali che γ_i e γ_{i+1} sono consecutive per ogni $i = 1, \dots, k-1$, si chiama curva unione o giustapposizione o concatenazione di $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ quella curva così definita

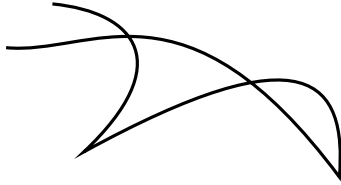
$$\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k := (\dots((\gamma_1 \cup \gamma_2) \cup \gamma_3) \dots) \gamma_k.$$

È facile convincersi che

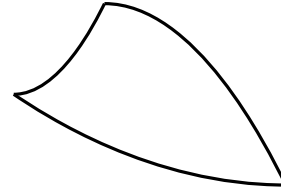
$$L(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k) = \sum_{i=1}^k L(\gamma_i).$$

10. CURVE REGOLARI A TRATTI E INTEGRALI DI PRIMA SPECIE LUNGO CURVE REGOLARI A TRATTI

Definizione 10.1. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice regolare a tratti se è unione di un numero finito di curve regolari consecutive, cioè se esiste una partizione $\{t_0, \dots, t_k\}$ di $[a, b]$ tale che $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è una curva regolare per ogni $i = 1, \dots, k$. In tal caso $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, dove $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$.



curva regolare a tratti né chiusa né semplice



curva regolare a tratti chiusa e semplice

In generale una curva regolare a tratti γ non è regolare. Possiamo comunque definire l'integrale curvilineo di prima specie lungo curve regolare a tratti nel modo seguente.

Definizione 10.2. Data $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ curva regolare a tratti, dove ogni γ_i è regolare, e data una funzione reale f continua sul sostegno di γ , poniamo

$$\int_{\gamma} f \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f \, ds.$$

Anche per le curve regolari a tratti e semplici, l'integrale di prima specie non dipende dalla parametrizzazione:

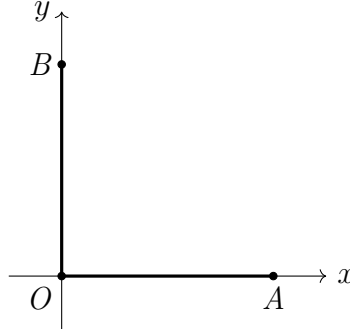
Teorema 10.3. Siano γ e $\tilde{\gamma}$ due curve semplici, regolari a tratti, con lo stesso sostegno Γ . Sia $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\tilde{\gamma}} f \, ds.$$

Possiamo allora scrivere $\int_{\Gamma} f \, ds$ al posto di $\int_{\gamma} f \, ds$ e tale scrittura è ben definita perché non dipende dalla scelta della parametrizzazione.

11. ESEMPI ED ESERCIZI

Esempio 11.1. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y \in [0, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, x \in [0, 1]\}$. Vogliamo rappresentare E come sostegno di una curva regolare a tratti.



L'insieme E si può vedere è l'unione dei segmenti che congiungono $A = (1, 0)$ con $O = (0, 0)$ e $B = (0, 1)$ con O . Parametizziamo tali segmenti nella forma seguente:

\overline{OA} = sostegno di γ_1 , dove $\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 1]$

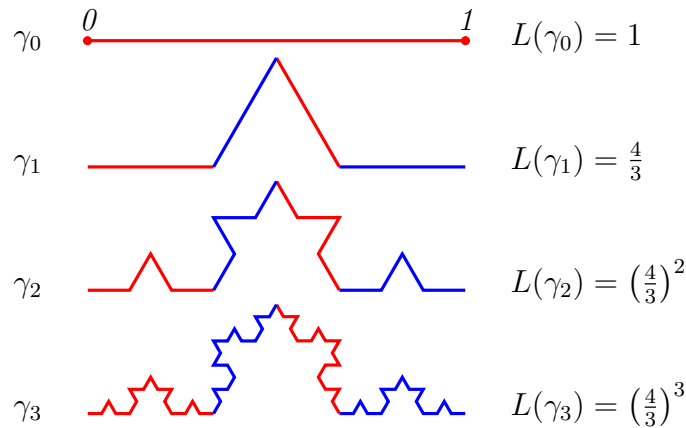
\overline{OB} = sostegno di γ_2 , dove $\gamma_2(t) = (0, t)$ con $t \in [0, 1]$.

Allora E è il sostegno di $(-\gamma_1) \cup \gamma_2$ o anche il sostegno di $(-\gamma_2) \cup \gamma_1$, dove $-\gamma_i$ è la curva opposta di γ_i (vedi definizione 4.4). Invece non avremmo potuto scrivere $\gamma_1 \cup \gamma_2$ né $\gamma_2 \cup \gamma_1$, perché γ_1 e γ_2 non sono curve consecutive, in nessun ordine le si consideri.

Esempio 11.2. La curva $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ con $t \in [-1, 1]$ è di classe C^1 ma non è regolare, perché $\gamma'(0) = (0, 0)$. Per lo stesso motivo non è neppure regolare a tratti. Tuttavia il suo sostegno è anche il sostegno della curva regolare a tratti, ma non regolare, definita da

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} (t^{\frac{3}{2}}, t) & \text{per } t \in [0, 1] \\ (-|t|^{\frac{3}{2}}, |t|) & \text{per } t \in [-1, 0) \end{cases}$$

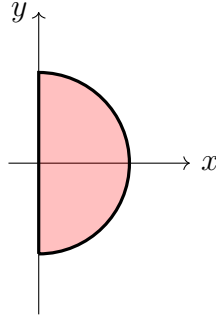
Esempio 11.3 (la curva di Koch). La curva di Koch si ottiene come limite di una successione di curve regolari a tratti definite iterativamente come in figura:



La curva γ_1 si ottiene rimuovendo il terzo medio del segmento unitario e congiungendo i due segmenti residui con i lati obliqui di un triangolo equilatero che ha per base il segmento rimosso. L'algoritmo iterativo con cui si costruisce la curva γ_{k+1} a partire dalla curva γ_k consiste

nel rimpicciolire γ_k di un fattore $1/3$ e replicarla 4 volte sul modulo base definito da γ_1 . Perciò $L(\gamma_{k+1}) = \frac{4}{3} L(\gamma_k)$, da cui $L(\gamma_k) = (\frac{4}{3})^k$ per ogni $k = 1, 2, \dots$. Si dimostra che esiste una curva limite, detta curva di Koch. Tale curva non contiene alcun segmento, non è regolare a tratti e non è rettificabile.

Esercizio 11.1. Sia Γ la frontiera dell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$. Verificare che Γ è il sostegno di una curva regolare a tratti, quindi calcolare $\int_{\Gamma} f ds$ dove $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Consideriamo le curve $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\gamma_2(t) = (0, t)$ con $t \in [-1, 1]$. Osserviamo che Γ è il sostegno di $\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ e anche di $\gamma_2 \cup (-\gamma_1)$. Quindi, sfruttando anche il fatto che l'integrale di un campo scalare non cambia se cambiamo verso di percorrenza ad una curva, abbiamo che

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{-\gamma_2} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds.$$

Calcoliamo

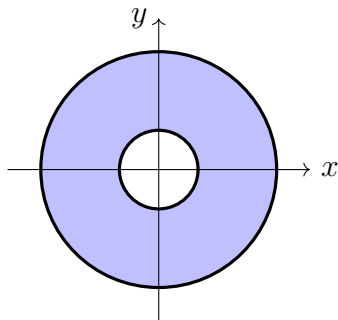
$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma_1(t)) |\gamma_1'(t)| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi$$

e

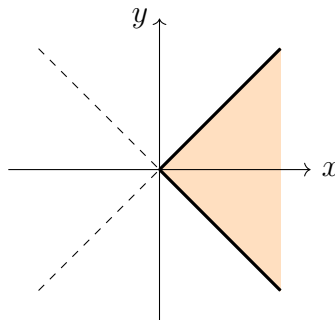
$$\int_{\gamma_2} f ds = \int_{-1}^1 f(\gamma_2(t)) |\gamma_2'(t)| dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Quindi $\int_{\Gamma} f ds = \pi + \frac{2}{3}$.

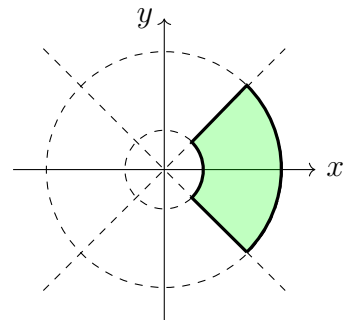
Esercizio 11.2. Sia Γ la frontiera dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, |y| \leq x\}$. Verificare che Γ è il sostegno di una curva regolare a tratti, quindi calcolare $\int_{\Gamma} f ds$ dove $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$.



$$\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$



$$\{(x, y) : |y| \leq x\}$$



l'insieme E

Dal disegno riconosciamo che Γ è l'unione di quattro curve regolari. Poniamo:

$$\Gamma_1 = \text{sostegno di } \gamma_1(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t)) \text{ con } t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Gamma_2 = \text{sostegno di } \gamma_2(t) = (t, t) \text{ con } t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\Gamma_3 = \text{sostegno di } \gamma_3(t) = (\cos(t), \sin(t)) \text{ con } t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Gamma_4 = \text{sostegno di } \gamma_4(t) = (t, -t) \text{ con } t \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right].$$

Si ha che Γ è il sostegno di $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3) \cup \gamma_4$. Quindi, ragionando come nell'esercizio precedente,

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{-\gamma_2} f \, ds + \int_{-\gamma_3} f \, ds + \int_{\gamma_4} f \, ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f \, ds.$$

Possiamo calcolare

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\gamma_1(t)) |\gamma_1'(t)| \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3 e^3 \, dt = \frac{3\pi e^3}{2}$$

e

$$\int_{\gamma_3} f \, ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(\gamma_3(t)) |\gamma_3'(t)| \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e \, dt = \frac{\pi e}{2}.$$

Osserviamo che, siccome f è radialmente simmetrica (dipende solo da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), gli integrali $\int_{\gamma_2} f \, ds$ e $\int_{\gamma_4} f \, ds$ coincidono. In particolare

$$\int_{\gamma_2} f \, ds = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} f(\gamma_2(t)) |\gamma_2'(t)| \, dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}t^2} \sqrt{2} \, dt = e^{\sqrt{2}t} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = e^3 - e.$$

In conclusione $\int_{\Gamma} f \, ds = \frac{3\pi e^3}{2} + \frac{\pi e}{2} + 2(e^3 - e)$.

12. INTEGRALI DI LINEA DI CAMPI VETTORIALI

Definizione 12.1. Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 , con sostegno Γ , e dato un campo vettoriale $\vec{F}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$, cioè una funzione continua su Γ a valori in \mathbb{R}^N , si dice integrale di linea di \vec{F} lungo γ il numero

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

Se γ è una curva chiusa, l'integrale di linea di \vec{F} lungo γ si chiama anche circuitazione di \vec{F} lungo γ e si denota $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Osservazione 12.2. In generale se \vec{a} e \vec{b} sono due vettori di \mathbb{R}^N denotiamo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ il prodotto scalare tra \vec{a} e \vec{b} , dato da $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^N a_i b_i$ dove a_i e b_i è la i -esima componente di \vec{a} e \vec{b} , rispettivamente, con $i = 1, \dots, N$. Quindi, dato un campo vettoriale $\vec{F} = (F_1, \dots, F_N)$, l'integrale di linea di \vec{F} lungo $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ si calcola così:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \int_a^b F_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \, dt.$$

Osserviamo che tutti gli N integrali di Riemann a secondo membro sono ben definiti perché assumendo γ di classe C^1 e \vec{F} continua, le funzioni $t \mapsto F_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t)$ sono continue su $[a, b]$. Notiamo

anche la differenza tra le definizioni di integrale di linea di un campo vettoriale (detto anche integrale di linea di seconda specie) rispetto a quella di integrale di un campo scalare f (integrale di linea di prima specie), in cui si integra $f(\gamma(t))|\gamma'(t)|$.

La definizione (12.1) si estende in modo naturale a curve di classe C^1 a tratti. Se γ è una curva di classe C^1 a tratti in \mathbb{R}^N , cioè esistono k curve $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ di classe C^1 , a due a due consecutive e tali che $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, l'integrale di linea di un campo vettoriale \vec{F} lungo γ si definisce ponendo

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Osservazione 12.3 (Significato fisico di integrale di linea di un campo vettoriale). *L'integrale di linea di un campo vettoriale (o campo di forze) \vec{F} lungo una curva γ misura il lavoro compiuto per spostare un punto materiale soggetto al campo di forze \vec{F} lungo il cammino descritto da γ .*

Teorema 12.4 (proprietà fondamentale dell'integrale di linea di un campo vettoriale). *Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ due curve regolari che differiscono per un cambio di parametrizzazione $\varphi: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$, cioè $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ e sia \vec{F} un campo vettoriale sul sostegno (comune) delle due curve. Allora:*

- (i) se $\varphi' > 0$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ allora $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s};$
- (ii) se $\varphi' < 0$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ allora $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$

In particolare, se $-\gamma$ è la curva opposta di γ , allora $\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$

Questo teorema afferma che se due curve hanno lo stesso sostegno e lo stesso verso di percorrenza (caso $\varphi' > 0$), allora l'integrale di linea di un campo vettoriale non cambia. Se invece hanno lo stesso sostegno ma sono percorse in senso opposto, allora l'integrale di linea di un campo vettoriale ha lo stesso valore assoluto ma segno opposto. Dunque l'integrale di linea di un campo vettoriale non dipende dalla parametrizzazione solo quando si mantiene il verso di percorrenza.

Osservazione 12.5. *A questo proposito notiamo che l'integrale di linea di un campo vettoriale si può interpretare come l'integrale di prima specie della componente tangenziale del campo vettoriale lungo la curva considerata. Infatti, se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva regolare e chiamiamo $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ il versore tangente nel punto $\gamma(t)$, abbiamo che*

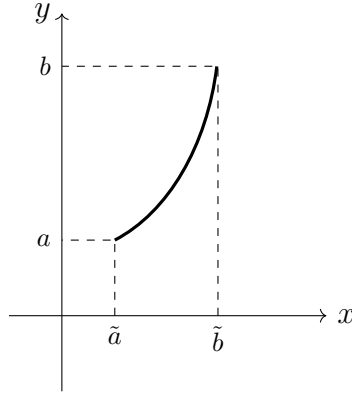
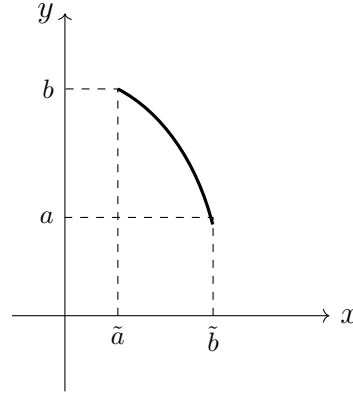
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b [\vec{F}(\gamma(t)) \cdot T(t)] |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} f ds$$

dove $f = \vec{F} \cdot \vec{T}$. Il campo (scalare) f è la componente tangenziale di \vec{F} lungo γ e cambia segno se cambiamo verso di percorrenza lungo la curva.

Dimostrazione del teorema 12.4. Usando la definizione 12.1, la regola di derivazione di funzioni composte e la formula sul cambiamento di variabile negli integrali, abbiamo che

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \vec{F}(\tilde{\gamma}(\tau)) \cdot \tilde{\gamma}'(\tau) d\tau = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} [\vec{F}(\gamma(\varphi(\tau))) \cdot \gamma'(\varphi(\tau))] \varphi'(\tau) d\tau = \int_{\varphi(\tilde{a})}^{\varphi(\tilde{b})} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Ora distinguiamo due casi, a seconda del segno di φ' (che non si annulla mai, essendo un cambio di parametrizzazione).

caso (i): $\varphi' > 0$ caso (ii): $\varphi' < 0$

(i) Se $\varphi' > 0$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, allora $\varphi(\tilde{a}) = a$, $\varphi(\tilde{b}) = b$ e quindi

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

(i) Se $\varphi' < 0$ in $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, allora $\varphi(\tilde{a}) = b$, $\varphi(\tilde{b}) = a$ e quindi

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_b^a \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

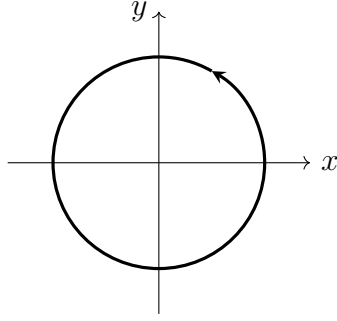
Infine osserviamo che il cambio di parametrizzazione che fa passare da una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ alla curva opposta è la funzione $\varphi(\tau) = a + b - \tau$ per ogni $\tau \in [a, b]$. Siamo quindi nel secondo caso, essendo $\varphi' = -1$. \square

13. SOSTEGNI ORIENTATI

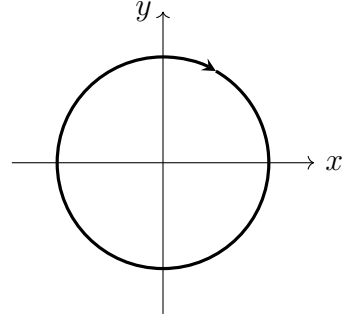
Una curva semplice e regolare $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ induce un verso di percorrenza sul proprio sostegno Γ . Se consideriamo un'altra parametrizzazione $\tilde{\gamma}$ di Γ che differisce da γ per un cambio di parametrizzazione, sono possibili solo due casi: o il cambio di parametrizzazione è una funzione crescente, e in tal caso $\tilde{\gamma}$ induce su Γ lo stesso verso di percorrenza di γ . Oppure il cambio di parametrizzazione è una funzione decrescente, e in tal caso $\tilde{\gamma}$ induce su Γ il verso di percorrenza opposto a quello di γ .

Definizione 13.1. *Il sostegno Γ di una curva semplice e regolare in \mathbb{R}^N si dice orientato se si fissa su Γ un verso di percorrenza, definito da una certa parametrizzazione di Γ .*

Esempio 13.2 (circonferenze orientate positivamente o negativamente). *La circonferenza unitaria antioraria (o orientata positivamente) è il sostegno della curva planare $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$, orientato con il verso di percorrenza di γ . La circonferenza unitaria oraria (o orientata negativamente) è il sostegno della curva opposta $-\gamma(t) = \gamma(2\pi - t) = (\cos(t), -\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$, orientato da $-\gamma$.*



circonferenza orientata in senso antiorario



circonferenza orientata in senso orario

Definizione 13.3. Se Γ è un sostegno orientato in \mathbb{R}^N e \vec{F} è un campo vettoriale su Γ , poniamo

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove γ è una curva regolare e semplice che parametrizza Γ secondo il verso di percorrenza assegnato su Γ .

Osservazione 13.4. Il teorema 12.4 garantisce che la definizione è ben posta, cioè non dipende dalla scelta della parametrizzazione, perché l'integrale di linea di seconda specie non cambia rispetto a cambi di parametrizzazione che preservano l'orientazione.

14. CAMPI CONSERVATIVI E POTENZIALI

Ricordiamo le definizioni di aperto, chiuso, connesso e connesso per archi in \mathbb{R}^N . Fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e un numero $r > 0$, indichiamo con $B_r(x_0)$ la palla euclidea (N -dimensionale) centrata in x_0 e di raggio r , cioè

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}$$

dove $|x - x_0|$ è la distanza euclidea tra i punti x e x_0 .

- Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$.
- Un insieme $C \subset \mathbb{R}^N$ si dice *chiuso* se il suo complementare $\mathbb{R}^N \setminus C$ è aperto.
- La *chiusura* di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è il più piccolo chiuso che contiene E e si denota \overline{E} .
- Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice *connesso* se **non** si può esprimere nella forma $E = E_1 \cup E_2$ dove E_1 ed E_2 sono insiemi non vuoti e disgiunti tali che $E_1 = E \cap A$ ed $E_2 = E \cap C$ con A aperto e C chiuso.
- Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ esiste una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ e $\gamma(t) \in E$ per ogni $t \in [a, b]$.

Osservazione 14.1. Valgono i seguenti fatti:

1. un connesso per archi è connesso;
2. un aperto è connesso se e solo se è connesso per archi;
3. una funzione continua manda connessi in connessi.

Un esempio di insieme connesso ma non connesso per archi è l'insieme definito come unione del grafico della funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ con il segmento sull'asse delle ordinate che unisce i punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$.

Esempi 14.2. Le palle $B_r(x_0)$ sono insiemi aperti connessi e la loro chiusura è data da $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq r\}$. Il semipiano $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ è un aperto connesso di \mathbb{R}^2 , il semipiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ è un chiuso connesso di \mathbb{R}^2 . Più precisamente è la chiusura di S . L'insieme $E = S \cup \{(0, 0)\}$ è connesso e connesso per archi ma non è né chiuso né aperto e $\overline{S} = \overline{E}$. Gli insiemi della forma $\{x \in \mathbb{R}^N : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, dove x_0 è un punto fissato e r_1, r_2 sono due numeri fissati tali che $0 \leq r_1 < r_2$, sono aperti connessi.

Osservazione 14.3. L'unione di aperti è ancora un aperto, ma l'unione di aperti connessi non è detto sia connesso. Ad esempio, l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ è aperto perché unione dei semipiani $S_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ed $S_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ ma non è connesso perché se consideriamo un punto in S_+ e un altro punto in S_- non esiste nessuna curva che congiunga tali punti e il cui sostegno sia tutto contenuto in A .

L'intersezione di una famiglia finita di aperti è ancora un aperto, ma in generale non è detto che l'intersezione di aperti connessi sia ancora connesso (fornire un esempio!).

Definizione 14.4. Dato un aperto (non vuoto) $A \subset \mathbb{R}^N$, un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ si dice conservativo in A se esiste un campo scalare $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\nabla U = \vec{F}$ in A , cioè

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

In tal caso il campo U si chiama potenziale di \vec{F} in A .

Con la scrittura ∇U intendiamo il gradiente di U cioè il campo vettoriale le cui componenti sono le derivate parziali di U :

$$\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial U}{\partial x_N}(x) \right).$$

Osservazione 14.5. L'espressione "campo conservativo" per quei campi vettoriali che ammettono un potenziale è dovuta al fatto che per un sistema fisico sottoposto ad un campo di forze conservativo si conserva l'energia totale. Lo vediamo nel caso più semplice in cui si descrive la dinamica di una particella materiale. Il moto della particella, di massa m , è descritto da una curva $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$ (con $t \in I$ intervallo di \mathbb{R}) che deve soddisfare la legge di Newton

$$mx''(t) = \vec{F}(x(t)) \quad \forall t \in I.$$

Chiamiamo energia totale della particella al tempo t la grandezza (scalare)

$$E(t) = K(t) + V(t)$$

dove

$$K(t) = \frac{m}{2} |x'(t)|^2 = \text{energia cinetica}, \quad V(t) = -U(x(t)) = \text{energia potenziale}$$

essendo U un potenziale del campo \vec{F} , supposto conservativo. Quindi $\nabla U = \vec{F}$. L'energia totale si conserva, nel senso che $E(t) = E(t_0)$ per ogni $t_0, t \in I$. In altre parole,

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0.$$

Infatti, tenuto conto delle espressioni di $K(t)$ e $V(t)$, si ha che

$$\frac{d}{dt} E(t) = m x'(t) \cdot x''(t) - \nabla U(x(t)) \cdot x'(t) = x'(t) \cdot [mx''(t) - \vec{F}(x(t))] = 0$$

per via della legge di Newton.

Esempio importante 1. *Il campo elettrico generato da una carica puntiforme q collocata nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è un campo di forze della forma*

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ed ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto. Il dominio di tale campo è l'insieme $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ che è un aperto di \mathbb{R}^3 . Il campo \vec{F} è conservativo in A con potenziale

$$U(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Infatti U è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ e

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}.$$

Analogamente $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}$ e $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3}$. Dunque $\nabla U = \vec{F}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Le stesse considerazioni si possono ripetere per il **campo gravitazionale generato da un punto materiale** di massa m . In tal caso, se introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'origine coincide con la posizione della particella, il campo gravitazionale ha la forma

$$\vec{F}(x, y, z) = -mG \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

dove G è la costante gravitazionale universale. A parte la costante moltiplicativa, tale campo ha la stessa forma di quello elettrico generato da una carica puntiforme, è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ con potenziale

$$U(x, y, z) = \frac{mG}{r}.$$

Dal prossimo teorema si capisce l'importanza dei campi conservativi: per tali campi il potenziale rappresenta una sorta di primitiva scalare e si può formulare una versione vettoriale del teorema fondamentale del calcolo.

Teorema 14.6 (Integrali di linea di campi conservativi). *Dato un aperto A in \mathbb{R}^N e dato un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$, se \vec{F} è conservativo in A con potenziale $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ allora per ogni curva regolare a tratti $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ con sostegno in A , vale che*

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

In particolare, $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ per ogni curva chiusa, regolare a tratti, con sostegno in A .

Dunque, per il teorema precedente, se \vec{F} è un campo conservativo in un aperto A di \mathbb{R}^N , l'integrale di linea di \vec{F} lungo una curva contenuta in A dipende solo dagli estremi della curva. Pertanto possiamo calcolarlo sostituendo la curva considerata con un'altra, rispetto alla quale il calcolo dell'integrale risulti più facile, purché abbia gli stessi estremi.

Dimostrazione. Discutiamo innanzitutto il caso $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ curva regolare. In tal caso

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [U(\gamma(t))] dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

avendo applicato la regola di derivazione di funzioni composte, in base alla quale

$$\frac{d}{dt} [U(\gamma(t))] = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) = \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

e il teorema fondamentale del calcolo. Esaminiamo ora il caso in cui γ è una curva regolare a tratti, cioè esiste una partizione $\{t_0, \dots, t_k\}$ di $[a, b]$ tale per cui, posto $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ con $i = 1, \dots, k$, si ha che $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ e ogni γ_i è regolare. Allora, applicando la prima parte ad ogni tratto regolare, abbiamo che

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k [U(\gamma(t_i)) - U(\gamma(t_{i-1}))] = -U(\gamma(t_0)) + U(\gamma(t_k)) = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)). \quad \square$$

Corollario 14.7 (Unicità del potenziale a meno di costanti additive). *Dato un aperto A in \mathbb{R}^N e dato un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ conservativo in A , se U_1 e U_2 sono potenziali di \vec{F} in A e se A è connesso, allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $U_1(x) = U_2(x) + c$ per ogni $x \in A$.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $x_0 \in A$. Siccome A è aperto connesso e quindi anche connesso per archi, per ogni $x \in A$ esiste una curva regolare γ che congiunge x_0 con x . Allora, per il teorema 14.6,

$$U_1(x) - U_1(x_0) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = U_2(x) - U_2(x_0).$$

Quindi, posto $c = U_1(x_0) - U_2(x_0)$, otteniamo che $U_1(x) = U_2(x) + c$ per ogni $x \in A$. \square

15. CAMPI RADIALI

Alla luce del teorema 14.6, è naturale chiedersi quando un campo vettoriale è conservativo. In dimensione $N = 1$ tutti i campi sono conservativi. I connessi di \mathbb{R} sono tutti e soli gli intervalli e le funzioni continue $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo aperto di \mathbb{R}) ammettono potenziale dato da $U(x) = \int_{x_0}^x F(s) ds$, essendo $x_0 \in I$ fissato.

La questione diventa più interessante in dimensione $N > 1$. Abbiamo già visto, come esempi fisicamente significativi, che il campo elettrico generato da una carica puntiforme e il campo gravitazionale generato da una particella materiale sono campi conservativi. Si tratta di campi radiali, cioè diretti secondo il vettore uscente dalla sorgente del campo. Più in generale, tutti i campi radiali sono conservativi.

Definizione 15.1. *Un anello aperto in \mathbb{R}^N è un insieme della forma $A = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \in I\}$ dove I è un intervallo aperto in $(0, \infty)$. Un campo vettoriale radiale è una funzione $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ della forma*

$$\vec{F}(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|} \quad \forall x \in A$$

dove A è un anello corrispondente a un intervallo $I \subset (0, \infty)$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Come già osservato, ogni anello è un aperto connesso contenuto in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Quindi l'espressione di $\vec{F}(x)$ è ben definita per ogni $x \in A$. Inoltre risulta $|\vec{F}(x)| = |f(|x|)|$ per ogni $x \in A$ e, in particolare, $|\vec{F}(x)|$ è costante sulle superfici sferiche $\partial B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = R\}$.

Teorema 15.2. *Ogni campo radiale è conservativo sul proprio dominio. Più precisamente, dato un anello aperto A in \mathbb{R}^N e un campo vettoriale radiale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ della forma $\vec{F}(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|}$ ($x \in A$), un potenziale di \vec{F} è $U(x) = g(|x|)$ dove g è una primitiva di f .*

Dimostrazione. Per ogni $x \in A$ calcoliamo

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x) \left[g \left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} \right) \right] = g'(|x|) \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}} = f(|x|) \frac{x_i}{|x|} = F_i(x)$$

cioè $\nabla U = \vec{F}$ in A . Inoltre U è di classe C^1 perché f è continua. \square

Il campo elettrico generato da una carica puntiforme e il campo gravitazionale generato da una particella materiale sono campi radiali sull'anello $A = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ della forma $\vec{F}(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|}$ con $f(r) = \frac{C}{r^2}$ (C costante).

16. ESEMPI NOTEVOLI E CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UN CAMPO SIA CONSERVATIVO

Esempio 16.1. Consideriamo il campo $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ così definito:

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Il dominio di tale campo è il piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che è un aperto connesso di \mathbb{R}^2 . L'integrale di linea di \vec{F} lungo un arco di circonferenza centrato nell'origine misura l'ampiezza (algebrica) dell'arco, in radianti. Infatti, un arco di circonferenza (orientato positivamente) con centro in $(0,0)$ è una curva della forma

$$\gamma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta) \quad \text{con } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

e

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{F}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(-\frac{\sin \theta}{R}, \frac{\cos \theta}{R} \right) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta) d\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Osserviamo in particolare che tale integrale non dipende dal raggio R . Inoltre, se consideriamo la circonferenza antioraria, ottenuta prendendo $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 2\pi$, troviamo che la circuitazione di \vec{F} lungo tale curva chiusa è non nulla. Allora, per il teorema 14.6, il campo \vec{F} non può essere conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

L'esempio appena descritto è importante perché legato al seguente, di interesse fisico.

Esempio importante 2 (campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente). Consideriamo un filo rettilineo infinitamente esteso lungo cui scorre una corrente di intensità I . Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'asse z coincidente con il filo e con verso concorde con quello della corrente. La corrente che scorre nel filo genera un **campo magnetico** che nei punti dello spazio diversi da quelli dell'asse z assume la forma seguente:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{I\mu_0}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto. Il dominio di tale campo è lo spazio tridimensionale senza l'asse z ed è un aperto connesso di \mathbb{R}^3 . Il campo \vec{F} non è conservativo in \mathbb{R}^3 perché possiamo trovare delle curve chiuse in \mathbb{R}^3 lungo cui la circuitazione di \vec{F} è non nulla. Il fatto che \vec{F} non sia conservativo segue allora dal teorema 14.6. In particolare possiamo considerare come curve chiuse le circonferenze centrate in un punto dell'asse z e giacenti su piani orizzontali. Ad esempio:

$$\gamma(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z_0) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi],$$

$z_0 \in \mathbb{R}$ e $R > 0$ fissati. Allora, con calcoli analoghi a quelli dell'esempio precedente, troviamo che

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \frac{I\mu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin \theta}{R}, \frac{\cos \theta}{R}, 0 \right) \cdot (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) d\theta = I\mu_0.$$

Vediamo ora una condizione necessaria per la conservatività.

Teorema 16.2. Se $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un campo conservativo in un aperto A di \mathbb{R}^N e \vec{F} è di classe C^1 , allora

$$(7) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. Siccome $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$ è conservativo in A , ammette un potenziale in A , cioè esiste una funzione $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$F_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Siccome ogni F_i è di classe C^1 , il potenziale U è di classe C^2 e possiamo calcolare le derivate parziali

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \right](x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Essendo U di classe C^2 , per il teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i, j = 1, \dots, N$$

e quindi segue la tesi. \square

Come si evince dalla dimostrazione, l'ipotesi di regolarità C^1 è essenziale.

In dimensione $N = 3$ la condizione (7) sull'uguaglianza delle derivate in croce equivale a scrivere

$$(8) \quad \left[\nabla \wedge \vec{F} \right](x) = 0 \quad \forall x \in A$$

dove ∇ è l'operatore differenziale $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ e \wedge denota il prodotto vettore o prodotto esterno in \mathbb{R}^3 . Il campo $\nabla \wedge \vec{F}$ si chiama **rotore di \vec{F}** e la sua espressione esplicita è

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Un campo vettoriale $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 che verifica l'equazione (8) si dice **irrotazionale**. Quindi il teorema 16.2 in dimensione 3 si può riformulare così:

Teorema 16.3. Dato un aperto connesso A in \mathbb{R}^3 , ogni campo vettoriale conservativo in A e di classe C^1 è irrotazionale.

L'esempio 16.1 mostra che in generale la condizione (7) non è sufficiente per la conservatività. Infatti, per il campo

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

possiamo calcolare

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Dunque vale (7) ma abbiamo visto che il campo non è conservativo.

Lo stesso si può dire per il campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente, esempio importante di campo irrotazionale ma non conservativo sul proprio dominio.

17. CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN CAMPO SIA CONSERVATIVO (LEMMA DI POINCARÉ)

Per la conservatività di un campo vettoriale di classe C^1 gioca un ruolo importante la topologia del dominio. Per spiegare la questione, iniziamo a dare alcune definizioni utili.

Definizione 17.1. *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice*

- *convesso se per ogni $x, y \in E$ si ha che $[x, y] \subset E$, dove $[x, y] = \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\}$;*
- *stellato se esiste $x \in E$ tale che per ogni $y \in E$ si ha che $[x, y] \subset E$. In tal caso E si dice stellato rispetto al punto x .*

Ogni insieme convesso è stellato mentre esistono insiemi stellati che non sono convessi.

Esempi 17.2. *I semispazi sono convessi. Il “piano tagliato” $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$ non è convesso (ad esempio, il segmento che congiunge $(-1, 1)$ con $(-1, -1)$ non è contenuto in E) ma è stellato (rispetto a qualsiasi punto $(x, 0)$ con $x > 0$).*

I concetti di insieme convesso e insieme stellato sono di natura geometrica. Introduciamo ora un concetto di natura topologica.

Definizione 17.3. *Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ e date due curve $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ con sostegni in E , diciamo che γ si può deformare in $\tilde{\gamma}$ in E o γ è omotopa a $\tilde{\gamma}$ in E se esiste una funzione continua $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che*

$$h(0, t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [a, b], \quad h(1, t) = \tilde{\gamma}(t) \quad \forall t \in [a, b], \quad h(s, t) \in E \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times [a, b].$$

La funzione h si chiama deformazione o omotopia. Se $\tilde{\gamma}$ è costante (un punto di E) allora γ si dice contraibile in E .

Definizione 17.4. *Un aperto A in \mathbb{R}^N si dice semplicemente connesso se è un aperto connesso e se ogni curva con sostegno in A è contraibile in A .*

Esempi 17.5. *Ogni aperto stellato è semplicemente connesso ma ci sono insiemi semplicemente connessi che non sono stellati. Ad esempio lo spazio $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$ (dove p è un fissato punto di \mathbb{R}^3) è semplicemente connesso ma non è stellato. Invece in dimensione 2, $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ (dove ora p è un fissato punto di \mathbb{R}^2) è un aperto connesso ma non è semplicemente connesso: le circonferenze centrate in p non sono contraibili in $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Ci si può convincere facilmente che l'insieme costituito dallo spazio euclideo 3-dimensionale privato di una retta non è semplicemente connesso: le circonferenze concatenate con la retta non sono contraibili nell'insieme considerato.*

La proprietà di semplice connessione gioca un ruolo importante rispetto alla questione della conservatività dei campi vettoriali, come espresso dal seguente teorema.

Teorema 17.6 (lemma di Poincaré - condizione sufficiente affinché un campo vettoriale sia conservativo). *Dati un aperto connesso A in \mathbb{R}^N e un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$, se A è semplicemente connesso e F è di classe C^1 e verifica la condizione (7) sull'uguaglianza delle derivate in croce, allora \vec{F} è conservativo in A .*

Se la condizione (7) sull'uguaglianza delle derivate in croce è anche necessaria per la conservatività, l'ipotesi di semplice connessione sul dominio non è necessaria. Ad esempio, i campi radiali sul piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sono conservativi anche se il piano bucato non è semplicemente connesso.

Dimostrazione (solo nel caso A stellato). A meno di traslazioni, possiamo supporre che A sia stellato rispetto a 0, cioè il segmento $[0, x]$ è contenuto in A per ogni $x \in A$. Definiamo

$$U(x) = \int_{[0, x]} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(tx) \cdot x \, dt$$

avendo parametrizzato $[0, x]$ mediante $\gamma(t) = tx$ con $t \in [0, 1]$. La definizione di U è ben posta per via dell'ipotesi fatta su A . Siccome \vec{F} è di classe C^1 possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} [\vec{F}(tx) \cdot x] \, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^N F_j(tx) x_j \right] \, dt = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} [F_j(tx) x_j] \, dt \\ &= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(tx) tx_j + F_j(tx) \delta_{ij} \right] \, dt = \int_0^1 \left[\left(t \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx) x_j \right) + F_i(tx) \right] \, dt \end{aligned}$$

dove δ_{ij} denota la “delta di Kronecker” (cioè $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$) e nella seconda riga abbiamo usato l'ipotesi (7). Ora osserviamo che, per la regola di derivazione di funzione composta,

$$\frac{d}{dt} [t F_i(tx)] = F_i(tx) + t \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx) \frac{d}{dt}(tx_j) = F_i(tx) + t \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(tx) x_j.$$

Quindi

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t F_i(tx)] \, dt = F_i(x).$$

Ciò vale per ogni $x \in A$ e per ogni $i = 1, \dots, N$. Dunque $\nabla U = \vec{F}$ in A e U è di classe C^1 (anzi, C^2). Pertanto U è un potenziale di \vec{F} in A , cioè \vec{F} è conservativo in A . \square

Esempio importante 3. *In base al teorema 17.6, se abbiamo un campo che verifica la condizione necessaria (7) sul suo dominio naturale, possiamo sempre dire che tale campo è conservativo su un qualsiasi sottodominio semplicemente connesso. Ad esempio, il campo*

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

verifica la condizione (7) nel piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ma non è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Lo possiamo restringere al semipiano $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x > 0\}$ che è un aperto convesso, e quindi semplicemente connesso, e dunque, per il teorema 17.6, è conservativo in tale dominio. Un suo potenziale nel semipiano destro è dato dalla funzione

$$U(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Possiamo ampliare ulteriormente il dominio in cui \vec{F} è conservativo, considerando il piano tagliato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$, sul quale un potenziale per \vec{F} è dato da

$$U(x, y) = \begin{cases} \arctan \left(\frac{y}{x} \right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y > 0 \\ \arctan \left(\frac{y}{x} \right) - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

Si noti che tale funzione è di classe C^1 nel piano tagliato ma non può essere estesa ad una funzione continua sul piano buco. L'esempio qui discusso mette in evidenza il fatto che non basta dire se un campo è conservativo ma bisogna precisare il dominio.

18. ESERCIZI SUI CAMPI CONSERVATIVI E CALCOLO DEL POTENZIALE

La teoria fin qui sviluppata ci fornisce strumenti adeguati a stabilire se un dato campo vettoriale \vec{F} su un assegnato dominio A di \mathbb{R}^N è conservativo in tale dominio e, in caso affermativo, come calcolarne un potenziale. Vediamone i passi principali:

- 1) Identifichiamo il dominio A e verifichiamo che sia un aperto connesso.
- 2) Se il dominio A è un anello e il campo \vec{F} è radiale, cioè è costante sulle superfici sferiche, allora possiamo subito concludere che \vec{F} è conservativo in A . Altrimenti proseguiamo come di seguito.
- 3) Controlliamo che \vec{F} sia di classe C^1 e soddisfi le condizioni

$$(9) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{in } A, \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Se tali condizioni non sono soddisfatte possiamo concludere che \vec{F} è conservativo in A .

- 4) Se sono soddisfatte, ci chiediamo se A è semplicemente connesso.
 - a. In caso affermativo, possiamo dire che \vec{F} è conservativo in A .
 - b. Se A non è semplicemente connesso, possiamo calcolare la circuitazione del campo \vec{F} lungo curve chiuse non contraibili, contenute in A , che siano facilmente parametrizzabili. Se troviamo che la circuitazione è non nulla, allora il campo \vec{F} non è conservativo in A .

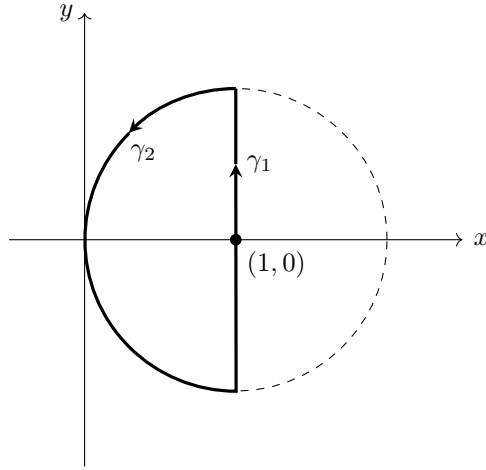
Osserviamo che se troviamo una curva chiusa nel dominio del campo vettoriale considerato lungo la quale la circuitazione del campo è non nulla, possiamo subito concludere che il campo non è conservativo anche senza verificare la validità delle relazioni (9).

Esercizio 18.1. *Stabilire per quali valori del parametro reale a il campo $\vec{F}(x, y) = (ay, x)$ è conservativo in \mathbb{R}^2 . Inoltre per $a = \pm 1$ calcolare la circuitazione di \vec{F} lungo il bordo dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x \leq 1\}$ percorso in senso antiorario.*

Avendo osservato che il campo è di classe C^1 in \mathbb{R}^2 , verifichiamo la condizione necessaria:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow a = 1.$$

Siccome il dominio è semplicemente connesso, possiamo concludere che il campo è conservativo per il solo valore $a = 1$. Disegniamo l'insieme E ed il sostegno orientato Γ definito dal bordo di E percorso in senso antiorario.



Se $a = 1$, la circuitazione di \vec{F} lungo Γ è nulla, perché \vec{F} è conservativo. Invece per $a = -1$, scriviamo Γ come l'unione dei sostegni di

$$\gamma_1(t) = (1, t) \quad \text{con } t \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (1 + \cos t, \sin t) \quad \text{con } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \underbrace{\vec{F}(1, t)}_{\gamma_1} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{\gamma_1'} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{\vec{F}(1 + \cos t, \sin t)}_{\gamma_2} \cdot \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\gamma_2'} dt \\ &= \int_{-1}^1 1 dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [\sin^2 t + (1 + \cos t) \cos t] dt = 2 + \pi + (\sin t) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

Esercizio 18.2. Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{ax + (1-a)y}{(x^2 + y^2)^a}, \frac{ay + (1-a)x}{(x^2 + y^2)^a} \right)$$

dove a è un parametro reale. Trovare il dominio D_a di \vec{F} e stabilire per quali valori di a il campo \vec{F} è conservativo sul proprio dominio.

Per $a \leq 0$ il dominio è $D_a = \mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso. Per $a > 0$ il dominio è $D_a = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, che è un aperto connesso ma non semplicemente connesso. Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \Leftrightarrow ay[ax + (1-a)y] = ax[ay + (1-a)x] \\ &\Leftrightarrow a[axy + (1-a)y^2 - axy - (1-a)x^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow a(1-a)(y^2 - x^2) = 0 \end{aligned}$$

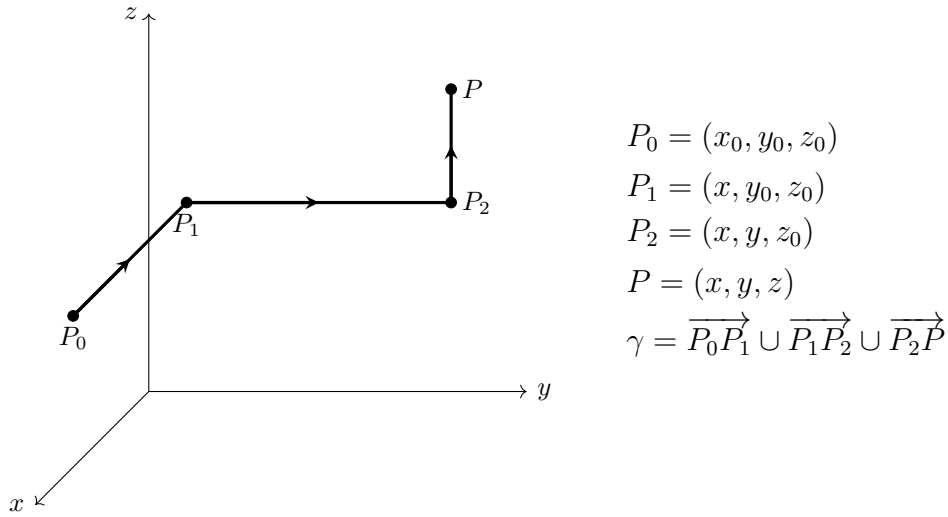
e tale equazione è soddisfatta per ogni $(x, y) \in D_a$ se e solo se $a = 0$ oppure $a = 1$. Se $a = 0$, essendo il dominio D_a semplicemente connesso, il campo è conservativo. Se $a = 1$, essendo il

dominio un anello e il campo radiale, esso è conservativo sul proprio dominio (anche se questo non è semplicemente connesso).

Quando abbiamo un campo vettoriale \vec{F} su un dominio A di \mathbb{R}^N e sappiamo che è conservativo in A possiamo calcolare un potenziale nel modo seguente. Fissiamo un punto $P_0 \in A$ e per ogni altro punto $P \in A$ consideriamo una curva γ con punto iniziale P_0 e punto finale P , data da una poligonale di segmenti paralleli agli assi cartesiani. Quindi calcoliamo

$$U(P) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Il teorema 14.6 ci assicura che il campo scalare così ottenuto è un potenziale di \vec{F} . Il metodo qui descritto si chiama **integrazione lungo poligoni**.



Assumendo per semplicità che il dominio A sia convesso, in dimensione $N = 2$ la formula per il calcolo del potenziale diventa:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x F_1(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y F_2(x, t) dt$$

e fornisce l'unico potenziale che si annulla in (x_0, y_0) . In dimensione $N = 3$ la formula va corretta così:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x F_1(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y F_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z F_3(x, y, t) dt$$

e fornisce l'unico potenziale che si annulla in (x_0, y_0, z_0) .

Un altro metodo di calcolo del potenziale è quello delle **integrazioni parziali**, in cui si risolve il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_N} = F_N \end{cases}$$

integrando di volta in volta rispetto a x_1, \dots, x_N . Si può procedere in qualunque ordine e si sceglie solitamente quello in cui l'integrazione risulta più semplice. Vediamo meglio come si fa nel caso bidimensionale, scrivendo (x, y) al posto di (x_1, x_2) . Dapprima integriamo l'equazione

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$$

ottenendo

$$U(x, y) = \int F_1(x, y) dx + f(y)$$

dove f è una funzione della sola variabile y , ancora da determinare. Chiamiamo

$$\varphi(x, y) = \int F_1(x, y) dx$$

una primitiva di F_1 rispetto a x e deriviamo U rispetto a y :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + f'(y)$$

Quindi scriviamo la seconda equazione

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$$

che assume la forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + f'(y) = F_2(x, y)$$

cioè

$$f'(y) = F_2(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y).$$

Integriamo rispetto a y per trovare f :

$$f(y) = \int \left[F_2(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right] dy.$$

Quindi sostituiamo nell'espressione iniziale e troviamo

$$U(x, y) = \int F_1(x, y) dx + \int \left[F_2(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right] dy.$$

Possiamo controllare la correttezza del risultato calcolando le derivate parziali della funzione U così costruita e verificando che coincidono con le rispettive componenti del campo \vec{F} assegnato. Naturalmente avremmo potuto seguire un altro ordine, integrando prima rispetto ad y e poi rispetto ad x . L'espressione finale di U contiene una costante additiva arbitraria, che può essere fissata imponendo il valore del potenziale in un dato punto del dominio. Il metodo sopra descritto si estende in maniera naturale al caso tridimensionale o maggiore.

Esempio 18.1. *Si consideri il campo vettoriale*

$$\vec{F}(x, y) = \left(xy, \frac{x^2}{2} + y^2 \right)$$

Tale campo risulta conservativo in \mathbb{R}^2 . Determinarne tutti i potenziali.

Applichiamo il metodo delle integrazioni parziali. Se $U(x, y)$ è un potenziale di $\vec{F}(x, y)$, deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$$

e quindi

$$U(x, y) = \int xy \, dx + f(y) = \frac{x^2 y}{2} + f(y)$$

per qualche funzione f ancora da determinare. Inoltre deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + f'(y) = \frac{x^2}{2} + y^2 \Leftrightarrow f'(y) = y^2 \Leftrightarrow f(y) = \frac{y^3}{3} + C$$

con C costante arbitraria, e dunque

$$U(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^3}{3} + C.$$

Al variare di $C \in \mathbb{R}$ queste funzioni sono tutti i potenziali di \vec{F} .

Esempio 18.2. Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{2xz}{1 + (x^2 + y^2)^2}, \frac{2yz}{1 + (x^2 + y^2)^2} + y, \arctan(x^2 + y^2) \right)$$

Tale campo risulta conservativo in \mathbb{R}^3 . Determinarne tutti i potenziali. Inoltre trovare il potenziale che vale 1 nel punto $(1, 0, 1)$.

Applichiamo il metodo delle integrazioni parziali. Convienne partire con la terza componente di \vec{F} , integrando rispetto a z . Otteniamo così

$$U(x, y, z) = z \arctan(x^2 + y^2) + f(x, y)$$

Ora deriviamo rispetto ad x ed eguagliamo l'espressione ottenuta con la prima componente di \vec{F} . Otteniamo così

$$\frac{2xz}{1 + (x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xz}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

da cui $f(x, y) = g(y)$ e dunque

$$U(x, y, z) = z \arctan(x^2 + y^2) + g(y).$$

Infine deriviamo rispetto ad y ed eguagliamo l'espressione ottenuta con la seconda componente di \vec{F} . Otteniamo così

$$\frac{2yz}{1 + (x^2 + y^2)^2} + g'(y) = \frac{2yz}{1 + (x^2 + y^2)^2} + y$$

cioè

$$g'(y) = y$$

e quindi

$$g(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

con C costante. Sostituiamo nell'espressione di U e troviamo

$$U(x, y, z) = z \arctan(x^2 + y^2) + \frac{y^2}{2} + C.$$

Al variare di $C \in \mathbb{R}$ queste funzioni sono tutti i potenziali di \vec{F} . Per trovare quello che vale 1 nel punto $(1, 0, 1)$, prendiamo C tale per cui $U(1, 0, 1) = 1$ cioè

$$\arctan 1 + C = 1.$$

Deve essere $C = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$ e dunque il potenziale che vale 1 in $(1, 0, 1)$ è la funzione

$$U(x, y, z) = z \arctan(x^2 + y^2) + \frac{y^2}{2} + 1 - \frac{\pi}{4}.$$

19. TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEI CAMPI CONSERVATIVI

Teorema 19.1. *Dati un aperto connesso A in \mathbb{R}^N ed un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^N$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) \vec{F} è conservativo in A ;
- (2) $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ per ogni curva chiusa γ con sostegno in A ;
- (3) $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 con sostegno in A e con gli stessi estremi iniziale e finale.

Dimostrazione. (1) \Rightarrow (2) già dimostrato nel teorema 14.6.

(2) \Rightarrow (3). Se γ_1 e γ_2 sono due curve con sostegno in A e con gli stessi estremi iniziale e finale, allora $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ è una curva chiusa. Per l'ipotesi (2) e per le proprietà dell'integrale di linea di campi vettoriali otteniamo

$$0 = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{-\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

cioè (3).

(3) \Rightarrow (1). Fissiamo un punto $x_0 \in A$ e per ogni punto $x \in A$ scegliamo una curva γ_x con punto iniziale x_0 e punto finale x e con sostegno contenuto in A . Tale curva esiste perché A è aperto connesso e quindi connesso per archi. Ora definiamo

$$U(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Dimostriamo che U è un potenziale di \vec{F} in A . Proviamo che, per ogni $x \in A$ e per ogni $i = 1, \dots, N$ esiste la derivata parziale i -esima di U in x e vale $F_i(x)$. A tale scopo consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{U(x + \delta e_i) - U(x)}{\delta} = \frac{1}{\delta} \left[\int_{\gamma_{x+\delta e_i}} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s} \right]$$

dove e_i è l' i -esimo versore della base canonica e $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $|\delta|$ sufficientemente piccolo in modo che sia $x + t e_i \in A$ per ogni $t \in [-|\delta|, |\delta|]$ (ciò è garantito dal fatto che A è aperto). Per l'ipotesi (3) e per le proprietà dell'integrale di linea di campi vettoriali

$$\int_{\gamma_{x+\delta e_i}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_x \cup [x, x+\delta e_i]} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{[x, x+\delta e_i]} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Quindi

$$\frac{U(x + \delta e_i) - U(x)}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_{[x, x+\delta e_i]} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\delta} \int_0^1 \vec{F}(x + t \delta e_i) \cdot (\delta e_i) dt = \int_0^1 F_i(x + t \delta e_i) dt$$

avendo parametrizzato il segmento $[x, x + \delta e_i]$ con la parametrizzazione $\gamma(t) = x + t\delta e_i$ con $t \in [0, 1]$. Quindi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{U(x + \delta e_i) - U(x)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 F_i(x + t\delta e_i) dt = F_i(x)$$

perché F_i è continua. Dunque abbiamo provato che esiste

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Siccome ogni F_i è continua in A , il campo U di classe C^1 . Pertanto U è un potenziale di \vec{F} in A , cioè vale (1). \square

20. FORME DIFFERENZIALI

La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti può essere riformulata col linguaggio delle forme differenziali, in particolare nel contesto delle 1-forme. Indichiamo con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ lo spazio delle applicazioni lineari da \mathbb{R}^N in \mathbb{R} . Ricordiamo che si tratta di uno spazio vettoriale isomorfo a \mathbb{R}^N .

Definizione 20.1. Dato un aperto connesso A in \mathbb{R}^N , una 1-forma differenziale in A è un'applicazione $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e si scrive

$$\omega(x) = F_1(x) dx_1 + \dots + F_N(x) dx_N$$

dove $F_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ è il coefficiente i -esimo della forma ω rispetto alla base (dx_1, \dots, dx_N) dello spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Esempio 20.2. Se $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, il suo differenziale dg è una 1-forma. Più precisamente

$$dg(x) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_N}(x) dx_N.$$

Non tutte le 1-forme si possono rappresentare come differenziali di un campo scalare.

Definizione 20.3. Una forma differenziale ω in A si dice **esatta in** A se esiste un campo scalare $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in A e tale che $\omega = dg$ in A . In tal caso il campo g si chiama potenziale di ω .

Dire che una forma ω è esatta in A equivale a dire che il campo vettoriale $\vec{F} = (F_1, \dots, F_N)$ associato ad essa è conservativo in A . Allora, se i coefficienti della forma sono di classe C^1 , per il teorema 16.2, devono soddisfare le equazioni

$$(10) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

Definizione 20.4. Una forma differenziale ω in A si dice **chiusa in** A se i suoi coefficienti soddisfano (10).

Dunque, data una forma differenziale ω di classe C^1 su un aperto connesso A di \mathbb{R}^N ,

- se ω è esatta in A , allora è anche chiusa in A ,
- se ω è chiusa in A ed A è semplicemente connesso allora ω è anche esatta in A (lemma di Poincaré),
- se ω è chiusa in A , allora ω è localmente esatta in A , cioè per ogni punto $x \in A$ esiste una palla aperta centrata in A in cui ω è esatta.

Esempio 20.5. *La forma differenziale*

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

si chiama **forma argomento**. Tale forma è chiusa nel piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ed è esatta nel piano tagliato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$.

Definizione 20.6. *Data una forma differenziale ω in un aperto connesso A di \mathbb{R}^N e data una curva regolare a tratti γ con sostegno contenuto in A , si pone*

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove \vec{F} è il campo vettoriale associato alla forma ω .

Tenuto conto della notazione

$$\omega(x) = F_1(x) dx_1 + \dots + F_N(x) dx_N,$$

l'integrale della forma ω lungo una curva γ si scrive

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} [F_1(x) dx_1 + \dots + F_N(x) dx_N]$$

che però non è da intendere che si integra F_1 rispetto a x_1 , F_2 rispetto a x_2 , etc. Piuttosto, se

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

dobbiamo intendere dx_i come $\gamma'_i(t)dt$ e integrare rispetto a t tra a e b . Ad esempio, se $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$, abbiamo che

$$\int_{\gamma} x dy = \int_0^{\pi} \gamma_1(t) \gamma'_2(t) dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 20.1. *Trovare tutte le funzioni $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ che rendono esatta su \mathbb{R}^2 la forma*

$$\omega = xy^2 \varphi(x) dx - y \log(\varphi(x)) dy.$$

Quindi, per tali φ , calcolare il potenziale U associato ad ω che si annulla in $(0, 0)$.

Imponiamo la condizione necessaria, ovvero che ω sia una forma chiusa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [xy^2 \varphi(x)] &= \frac{\partial}{\partial x} [-y \log(\varphi(x))] \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow 2xy \varphi(x) = -y \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \varphi'(x) = -2x \varphi^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dunque φ deve soddisfare un'equazione differenziale ordinaria, a variabili separabili, le cui soluzioni sono la funzione identicamente nulla (da escludere perché si chiede $\varphi > 0$) e $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + a}$ con a costante reale. Per avere φ definita su \mathbb{R} dobbiamo prendere $a > 0$. Quindi le funzioni $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ che rendono esatta su \mathbb{R}^2 la forma ω sono esattamente

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + a}$$

con $a > 0$. Fissato $a > 0$, i potenziali $U(x, y)$ della forma

$$\omega = \frac{xy^2}{x^2 + a} dx + y \log(x^2 + a) dy$$

si possono determinare con il metodo di integrazione parziale. In particolare, da

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y \log(x^2 + a)$$

segue che

$$U(x, y) = \frac{y^2}{2} \log(x^2 + a) + f(x)$$

con f da determinare. Quindi deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{xy^2}{x^2 + a}$$

cioè

$$\frac{xy^2}{x^2 + a} + f'(x) = \frac{xy^2}{x^2 + a}$$

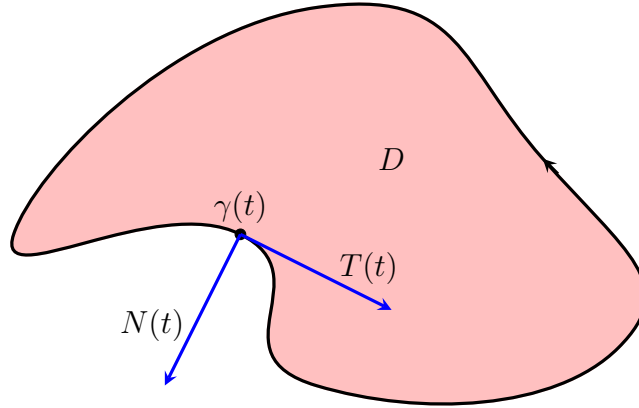
da cui f costante. Dunque i potenziali sono

$$U(x, y) = \frac{y^2}{2} \log(x^2 + a) + C$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Quello (unico) che si annulla in $(0, 0)$ corrisponde a prendere $C = 0$, cioè è il campo $U(x, y) = \frac{y^2}{2} \log(x^2 + a)$.

21. FORMULA DI GAUSS-GREEN

Sono dati un aperto connesso A in \mathbb{R}^2 , un campo vettoriale $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 e una curva chiusa, semplice, regolare a tratti γ con sostegno contenuto in A . Per un famoso risultato della geometria delle curve planari (lemma di Jordan) esiste un insieme chiuso e limitato D tale che ∂D è il sostegno di γ .



Supponiamo che $D \subset A$ e che γ orienti ∂D in modo da percorrerlo in senso antiorario. Cioè, detti $T(t)$ il vettore tangente a γ in t e detta $N(t)$ la normale esterna a D nel punto $\gamma(t)$, si ha che

$$T(t) = \text{rotazione di } \frac{\pi}{2} \text{ di } N(t)$$

per ogni t in cui esiste il vettore tangente.

Teorema 21.1 (Formula di Gauss-Green per una curva chiusa semplice). *Sotto le ipotesi suddette, si ha che*

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy.$$

Osservazione 21.2. (1) *La formula vale per campi 2-dimensionali e per curve chiuse, semplici e planari e lega un integrale unidimensionale, quale è la circuitazione, con un integrale bidimensionale.*

- (2) *È essenziale che la curva sia orientata in senso antiorario e che il campo sia di classe C^1 in tutto il dominio racchiuso da essa.*
- (3) *Se il campo ha poli interni a tale dominio, la formula di Gauss-Green non vale. Ad esempio, per il campo*

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

vale che $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ ma la circuitazione di \vec{F} lungo circonferenze centrate nell'origine è non nulla (vedi esempio 16.1).

- (4) *Se A è semplicemente connesso ed il campo $\vec{F} = (F_1, F_2)$ verifica la condizione*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \quad \text{in } A,$$

allora \vec{F} è conservativo in A e quindi (teorema 14.6)

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0.$$

In tal caso la validità della formula di Gauss-Green è immediata. Dunque la formula di Gauss-Green è significativa nel caso di campi non conservativi e lega la circuitazione lungo una data curva chiusa con un integrale bidimensionale che misura quanto manca al campo per essere conservativo nel dominio racchiuso dalla curva.

Il teorema 21.1 è un caso speciale di un teorema più generale che vedremo più avanti. Vediamo ora un'applicazione importante della formula di Gauss-Green per le curve.

Applicazione 21.3 (calcolo di aree di regioni planari). *Data una curva planare, chiusa, semplice, regolare a tratti γ , possiamo calcolare l'area della regione D racchiusa entro il sostegno di γ con la formula di Gauss-Green, parametrizzando γ in modo che sia percorsa in senso antiorario e scegliendo un campo vettoriale \vec{F} tale per cui*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1.$$

Ad esempio, possiamo prendere $\vec{F}(x, y) = (0, x)$ oppure $\vec{F}(x, y) = (-y, 0)$ oppure, più in generale, $\vec{F}(x, y) = (-\lambda y, (1 - \lambda)x)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi, per la formula di Gauss-Green,

$$\text{area}(D) = \int_D 1 \, dx \, dy = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} x \, dy$$

oppure $\text{area}(D) = -\int_{\gamma} y \, dx$ o anche $\text{area}(D) = -\int_{\gamma} [-\lambda y \, dx + (1 - \lambda)x \, dy]$, a seconda della scelta di \vec{F} . Abbiamo qui usato la notazione delle forme differenziali.

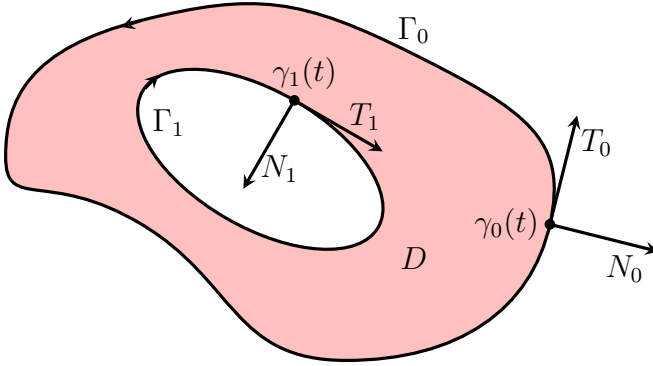
Ad esempio, si vuole calcolare l'area della regione planare racchiusa da un'ellisse di semiassi a e b . Posto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\}$$

parametrizziamo $+\partial D$ mediante $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e calcoliamo

$$\text{area}(D) = \int_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t) dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab.$$

Definizione 21.4. Un dominio regolare in \mathbb{R}^2 è un insieme D chiuso, limitato, la cui parte interna è un aperto connesso non vuoto, e $\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ dove ogni Γ_i è il sostegno di una curva chiusa, semplice e regolare a tratti. Il bordo di D è orientato positivamente e in tal caso si denota $+\partial D$ quando ciascun sostegno Γ_i è orientato in modo che il vettore tangente sia ottenuto come rotazione di $\frac{\pi}{2}$ della normale esterna a D .



$$+\partial D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

Γ_0 orientata in senso antiorario

Γ_1 orientata in senso orario

N_0 = normale esterna a D in $\gamma_0(t)$

T_0 = vettore tangente in $\gamma_0(t)$

N_1 = normale esterna a D in $\gamma_1(t)$

T_1 = vettore tangente in $\gamma_1(t)$

Osservazione 21.5. Se la parte interna di D è un aperto semplicemente connesso allora $+\partial D$ è il sostegno di un'unica curva chiusa, semplice, regolare a tratti e percorsa in senso antiorario.

Definizione 21.6. Dato un dominio regolare D in \mathbb{R}^2 con $+\partial D = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k$, e dato un campo vettoriale $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove A è un aperto connesso contenente D , si definisce

$$\int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_{\Gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \dots + \int_{\Gamma_k} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove ogni Γ_i è il sostegno di una curva regolare e semplice, orientata in modo tale da garantire la corretta orientazione di $+\partial D$.

La definizione di integrale di linea di un campo vettoriale lungo il bordo orientato di un dominio regolare è ben posta perché ogni termine è indipendente dalla parametrizzazione che si sceglie sul sostegno corrispondente (vedi definizione 13.3 e osservazione 13.4).

Teorema 21.7 (formula di Gauss-Green per un dominio regolare). Dati un dominio regolare D in \mathbb{R}^2 e un campo vettoriale $\vec{F} = (F_1, F_2): A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove A è un aperto connesso contenente D , vale che

$$\int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy.$$

la parte interna di un insieme E di \mathbb{R}^N è l'insieme dei punti interni ad E cioè $\{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists r > 0 : B_r(x) \subset E\}$ ed è sempre un insieme aperto. Si può anche definire come l'unione degli aperti contenuti in E o come il più grande aperto contenuto in E .

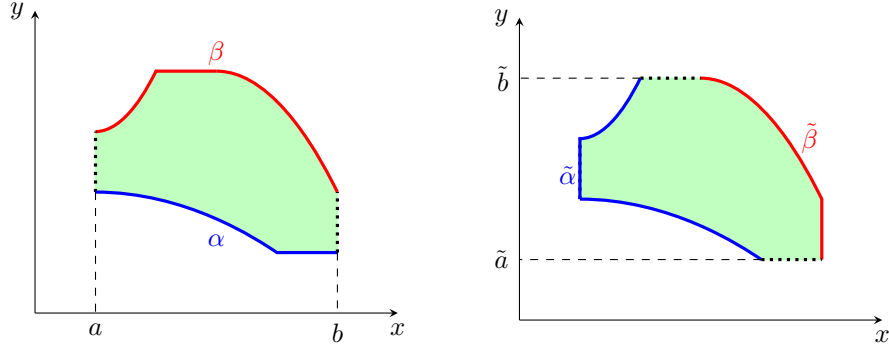
Dimostrazione. Dapprima dimostriamo la formula di Gauss-Green nel caso in cui D sia un *dominio semplice*, ovvero si possa esprimere sia nella forma

$$(11) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

con $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue (si dice, in particolare, che D è y -semplice), sia nella forma

$$(12) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\tilde{a}, \tilde{b}], \tilde{\alpha}(y) \leq x \leq \tilde{\beta}(y)\}$$

con $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue (cioè D è anche x -semplice).



Lo stesso dominio rappresentabile sia nella forma (11) sia nella forma (12).

Introduciamo i campi vettoriali $\vec{F}_1 = (F_1, 0)$ e $\vec{F}_2 = (0, F_2)$. Quindi

$$\int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{+\partial D} \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{+\partial D} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}.$$

Dimostriamo che

$$(13) \quad \int_{+\partial D} \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} = - \int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy \quad \text{e} \quad \int_{+\partial D} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy.$$

Allora, sommando le due formule, troviamo la tesi. Per provare la prima delle due uguaglianze in (13), utilizziamo la rappresentazione di D come dominio y -semplice e calcoliamo

$$\int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) dy = \int_a^b [F_1(x, \beta(x)) - F_1(x, \alpha(x))] dx.$$

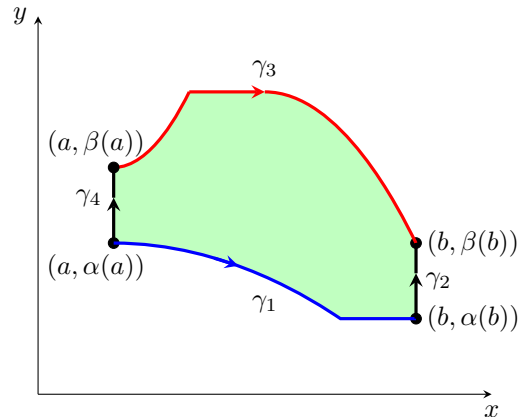
Ora calcoliamo l'integrale di linea, osservando che $+\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (-\gamma_3) \cup (-\gamma_4)$ dove

$$\gamma_1(t) = (t, \alpha(t)) \text{ con } t \in [a, b],$$

$$\gamma_2(t) = (b, t) \text{ con } t \in [\alpha(b), \beta(b)],$$

$$\gamma_3(t) = (t, \beta(t)) \text{ con } t \in [a, b],$$

$$\gamma_4(t) = (a, t) \text{ con } t \in [\alpha(a), \beta(a)].$$



Quindi

$$\int_{+\partial D} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} + \int_{\gamma_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} - \int_{\gamma_3} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} - \int_{\gamma_4} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds}.$$

Ricordando che $\vec{F}_1 = (F_1, 0)$, se scriviamo $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ con $t \in [a_i, b_i]$, abbiamo che

$$\int_{\gamma_i} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_{a_i}^{b_i} F_1(x_i(t), y_i(t)) x'_i(t) dt.$$

In particolare

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_a^b F_1(t, \alpha(t)) dt, \quad \int_{\gamma_3} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_a^b F_1(t, \beta(t)) dt, \quad \int_{\gamma_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_{\gamma_4} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = 0.$$

Dunque

$$\int_{+\partial D} \vec{F}_1 \cdot \vec{ds} = \int_a^b F_1(t, \alpha(t)) dt - \int_a^b F_1(t, \beta(t)) dt = - \int_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy.$$

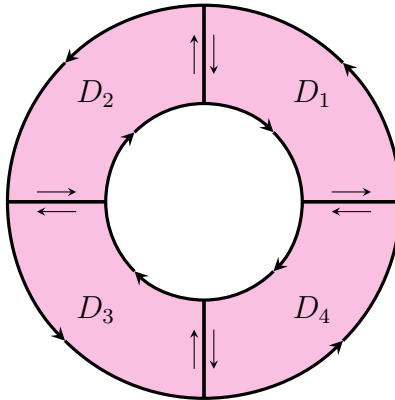
Per provare la seconda uguaglianza in (13) si ragiona in modo analogo, utilizzando la rappresentazione di D come dominio x -semplice. Abbiamo così provato la formula di Gauss-Green per domini semplici. Per ottenere il risultato in totale generalità, si sfrutta il fatto che ogni dominio regolare si può decomporre nell'unione di una famiglia finita di domini semplici, che si intersecano l'un l'altro al più lungo tratti dei bordi. Se $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, con D_i dominio semplice, possiamo applicare quanto già provato a ciascun D_i e otteniamo

$$\int_{D_i} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy = \int_{+\partial D_i} \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Quindi sommiamo su $i = 1, \dots, k$. Da una parte troviamo che

$$\sum_{i=1}^k \int_{D_i} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy = \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy.$$

Nel sommare gli integrali di linea dobbiamo tener conto che se un tratto appartiene al bordo di due sottodomini distinti, è orientato in modo opposto rispetto ai due domini e quindi nella sommatoria i due integrali si compensano l'un l'altro.



Restano solo gli integrali di linea su tratti del bordo di D , orientati nel senso corretto. Pertanto

$$\sum_{i=1}^k \int_{+\partial D_i} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{+\partial D} \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

e così la formula di Gauss-Green è provata. \square

22. ESERCIZI SULLA FORMULA DI GAUSS-GREEN

Esercizio 22.1. Data una qualunque curva chiusa semplice γ in \mathbb{R}^2 che gira intorno all'origine in senso antiorario, calcolare la circuitazione di

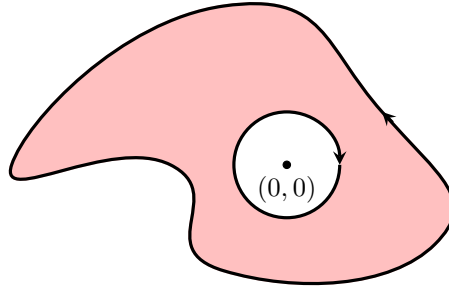
$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

lungo γ .

Per ipotesi, la curva γ parametrizza positivamente il bordo di un dominio regolare D che contiene l'origine come punto interno. Non possiamo applicare la formula di Gauss-Green rispetto a tale dominio, perché \vec{F} non è di classe C^1 in nessun aperto contenente D . Siccome \vec{F} è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (ha un polo nell'origine) consideriamo un disco chiuso D_R centrato nell'origine di raggio $R > 0$ sufficientemente piccolo in modo che D_R stia all'interno di D . Possiamo applicare la formula di Gauss-Green al campo \vec{F} rispetto al dominio

$$\tilde{D} = \{x \in D : |x| \geq R\}$$

perché è un dominio regolare contenuto nell'aperto connesso $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ su cui \vec{F} è di classe C^1 . Osserviamo che $+\partial D = \Gamma \cup \Gamma_R$ dove Γ è il sostegno di γ e $\Gamma_R = \partial D_R$ percorso in senso orario.



La curva $\gamma_R(t) = (R \cos t, R \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ parametrizza la circonferenza di raggio R percorrendola in senso antiorario. Quindi una parametrizzazione di Γ_R è $-\gamma_R$. Ricordiamo che il campo \vec{F} verifica $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Quindi per la formula di Gauss-Green

$$0 = \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy = \int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma_R} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_R} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Quindi, utilizzando calcoli già effettuati nell'esempio 16.1, troviamo

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_R} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi.$$

Esercizio 22.2. Calcolare $\int_{\gamma} x dy$ dove $\gamma(t) = (|t| - \sin t, |t| + \sin t)$ con $t \in [-\pi, \pi]$. Inoltre, sapendo che γ parametrizza una curva chiusa, semplice e regolare a tratti, detta D la regione racchiusa entro il sostegno di γ , dedurre se γ orienta positivamente ∂D e calcolare l'area di D .

Posto $x(t) = |t| - \sin t$ e $y(t) = |t| + \sin t$, calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x dy &= \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t) dt = \int_{-\pi}^0 (-t - \sin t)(-1 + \cos t) dt + \int_0^{\pi} (t - \sin t)(1 + \cos t) dt \\ &= \int_{-\pi}^0 (t - t \cos t + \sin t - \sin t \cos t) dt + \int_0^{\pi} (t + t \cos t - \sin t - \sin t \cos t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (t - \sin t \cos t) dt + 2 \int_0^{\pi} t \cos t dt - 2 \int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= 0 + 2(t \sin t + \cos t) \Big|_0^{\pi} + 2 \cos t \Big|_0^{\pi} = -8. \end{aligned}$$

Si è usato il fatto che la funzione $t - \sin t \cos t$ è dispari e quindi il corrispondente integrale su $[-\pi, \pi]$ è nullo. Inoltre si è calcolato l'integrale di $t \cos t$ con il metodo di integrazione per parti. Sappiamo inoltre che

$$\text{area}(D) = \int_{+\partial D} x dy.$$

Avendo trovato che $\int_{\gamma} x dy = -8$, possiamo dedurre che ∂D è orientato positivamente da $-\gamma$ e che

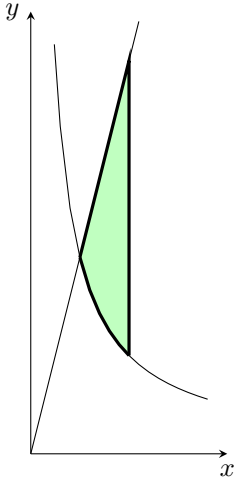
$$\text{area}(D) = \int_{-\gamma} x dy = - \int_{\gamma} x dy = 8.$$

Esercizio 22.3. Calcolare l'area di $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} \leq 1\}$.

Parametizziamo $+\partial D$ mediante la curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ (astroide, vedi esercizio 3.4). Si ha che

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \int_{\gamma} \left(\frac{x}{2} dy - \frac{y}{2} dx \right) = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \\ &= \frac{3}{16} \int_0^{4\pi} \sin^2 \tau d\tau = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Esercizio 22.4. Verificare che l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq 4x\}$ è un dominio regolare e calcolare $\int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ dove $\vec{F}(x, y) = (x - y + y \log y, 1 - x + x \log x)$.



L'insieme D è la regione compresa tra l'iperbole di equazione $y = 1/x$, la retta di equazione $y = 4x$ e la retta verticale di equazione $x = 1$.

D è chiuso e limitato, con parte interna non vuota e $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ dove:

$$\Gamma_1 = \{(t, 4t): \frac{1}{2} \leq t \leq 1\},$$

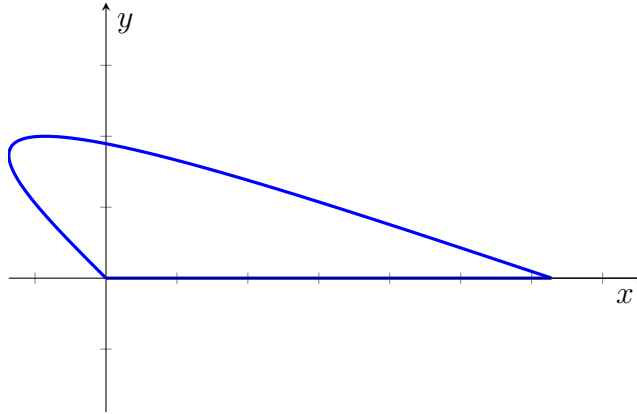
$$\Gamma_2 = \{(t, 1/t): \frac{1}{2} \leq t \leq 1\},$$

$$\Gamma_3 = \{(1, t): 1 \leq t \leq 4\}.$$

Applichiamo la formula di Gauss-Green e troviamo che

$$\begin{aligned}
 \int_{+\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy = \int_D [(-1 + \log x + 1) - (-1 + \log y + 1)] dx dy \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\frac{1}{x}}^{4x} \log x dy \right] dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\frac{1}{x}}^{4x} \log y dy \right] dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(4x - \frac{1}{x} \right) \log x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_{\frac{1}{x}}^{4x} \frac{d}{dy} (y \log y - y) dy \right] dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 4x \log x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} \log x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[(4x \underbrace{\log 4x}_{\log 4 + \log x} - 4x) - \left(\frac{1}{x} \underbrace{\log \frac{1}{x}}_{-\log x} - \frac{1}{x} \right) \right] dx \\
 &= -2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} \log x dx - 4 \log 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 4x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x} \\
 &= -\log^2 1 + \log^2 \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \log 4 + 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \left(\log 1 - \log \frac{1}{2} \right) \\
 &= \log^2 2 - \frac{3}{2} \log 4 + \frac{3}{2} - \log 2 = \log^2 2 - 4 \log 2 + \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Esercizio 22.5. Calcolare l'area della regione D evidenziata in figura



dove la curva nel semipiano superiore è il sostegno di $\gamma(t) = (t - 2 \sin t, \sin t)$ con $t = [0, \pi]$.

Osserviamo che γ parte da $O = (0, 0)$ e finisce in $P = (\pi, 0)$. Quindi $+\partial D = (-\gamma) \cup \overrightarrow{OP}$ e per la formula di Gauss-Green

$$\text{area}(D) = - \int_{+\partial D} y dx = \int_{\gamma} y dx - \int_{\overrightarrow{OP}} y dx = \int_0^{\pi} (\sin t)(1 - 2 \cos t) dt + 0 = (-\cos t - \sin^2 t) \Big|_0^{\pi} = 2.$$