Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 25 novembre 2015

Esercizio 1 (punti 6). Si consideri la seguente serie di potenze reali:

$$\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n}{2^n} \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) x^n.$$

a) Si determinino il raggio di convergenza e l'intervallo (aperto) di convergenza della serie.

b) Si determini il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Soluzione. a) Osserviamo che

$$\left|\frac{(-1)^n}{2^n} \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)\right| = -\frac{1}{2^n}\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = \frac{1}{2^n}\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right).$$

Pertanto, utilizzando il test della radice, si ottiene:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)} &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)\right)^{1/n} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)\right)^{1/n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n-2}\right)^{1/n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Pertanto, il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho = 2$ e l'intervallo aperto di convergenza è $I = (-2, 2)$.
b) Per $x = -2$, si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n\geq 3} \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right),$$

che è una serie a termini negativi. Questa ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n\geq 3} -\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = \sum_{n\geq 3}\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right),$$

che diverge positivamente per confronto con la serie armonica in quanto

$$\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right) \sim \frac{3}{n-2} \sim \frac{3}{n} \qquad \textit{per} \quad n\to\infty.$$

Per $x = 2$ si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n\geq 3}(-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = \sum_{n\geq 3}(-1)^{n+1}\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = \sum_{n\geq 3}(-1)^{n+1}\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right).$$

Quest'ultima è una serie di Leibniz in quanto la successione $b_n = \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$ è positiva, decrescente e tende a 0 per $n\to\infty$. Pertanto, converge semplicemente. La serie non converge invece assolutamente perchè la serie dei moduli è la serie $\sum_{n\geq 3}\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$ che abbiamo verificato che diverge positivamente.

Esercizio 2 (punti 5). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x, y) = (2x^2 + 2y^2, (x + y)^2).$$

Si calcoli l'integrale curvilineo di seconda specie di $\bar{F}$ lungo il bordo del triangolo D di vertici $(1,1),(2,2)$ e $(1,3)$ percorso in senso orario sia utilizzando la definizione di integrale curvilineo sia applicando la formula di Gauss-Green.

Soluzione. Denotiamo il bordo di D percorso in senso orario con $-\partial D$. Risulta che $-\partial D = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \gamma_3$, dove $\bar{\gamma}_1(t) = (t, 4-t), t \in [1,2], -\bar{\gamma}_2(t) = (t,t), t \in [1,2], \bar{\gamma}_3(t) = (1,t), t \in [1,3]$. e $-\bar{\gamma}_2(t)$ denota la curva opposta di $\bar{\gamma}_2(t)$. Risulta allora:

$$\int_{-\partial D} \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_{\bar{\gamma}_1} \bar{F} \cdot \bar{ds} - \int_{-\bar{\gamma}_2} \bar{F} \cdot \bar{ds} + \int_{\bar{\gamma}_3} \bar{F} \cdot \bar{ds}$$

$$= \int_1^2 (2t^2 + 2(4-t)^2, 16) \cdot (1,-1)\, dt - \int_1^2 (4t^2, 4t^2) \cdot (1,1)\, dt + \int_1^3 (2+2t^2, (1+t)^2) \cdot (0,1)\, dt$$

$$= \int_1^2 (4t^2 - 16t + 16)\, dt - \int_1^2 8t^2\, dt + \int_1^3 (1 + t^2 + 2t)\, dt$$

$$= \left[\frac{4}{3}t^3 - 8t^2 + 16t\right]_1^2 - \left[\frac{8}{3}t^3\right]_1^2 + \left[t + \frac{t^3}{3} + t^2\right]_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Utilizzando la formula di Gauss-Green, si ha:

$$\int_{-\partial D} \bar{F} \cdot \bar{ds} = -\iint_D (2x - 2y)\, dxdy = 2 \iint_D (y - x)\, dxdy$$

$$= 2 \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (y-x)\, dy = 2 \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2} - xy\right]_x^{4-x} dx$$

$$= 2 \int_1^2 \left(\frac{(4-x)^2}{2} - 4x + \frac{3}{2}x^2\right) dx = 2\left[-\frac{(4-x)^3}{6} - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3\right]_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{ax + by}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{cx + dy}{x^2 + y^2}\, dy.$$

a) Si determini il dominio D di ω.

b) Si determinino i valori dei parametri a, b, c, d per i quali ω è chiusa.

c) Per tali valori si calcoli l'integrale di ω lungo la circonferenza $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$.

d) Si determinino i valori dei parametri a, b, c, d per i quali ω è esatta e per tali valori si calcoli una primitiva di ω.

Soluzione. Ci limitiamo a considerare il caso in cui $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$, osservando che in caso contrario si ottiene la forma differenziale identicamente nulla che è ovviamente definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è esatta. L'integrale al punto c) in questo caso è nullo perchè la curva $\bar{\gamma}$ è chiusa. Sia quindi $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$. Il dominio di ω è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Osserviamo che si tratta di un dominio non semplicemente connesso.
b) Si ha che ω è chiusa se e solo se per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ vale:

$$\partial_y \left(\frac{ax + by}{x^2 + y^2}\right) = \partial_x \left(\frac{cx + dy}{x^2 + y^2}\right) \Leftrightarrow \frac{bx^2 - by^2 - 2axy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{cy^2 - cx^2 - 2dxy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow bx^2 - by^2 - 2axy = cy^2 - cx^2 - 2dxy \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases}.$$

Sostituendo i valori trovati si ottiene che ω è chiusa se e solo se è della forma

$$\omega = \frac{ax+by}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-bx+ay}{x^2+y^2}\,dy,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.
c) Risulta:

$$\int_{\bar\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (a\cos t + b\sin t, a\sin t - b\cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = -b\int_0^{2\pi} dt = -2\pi b.$$

d) Per essere esatta, la forma deve essere in particolare chiusa. Inoltre, la circuitazione lungo una qualsiasi curva chiusa deve essere nullo, quindi per il punto c), deve essere $b = 0$. Ci riduciamo quindi alla forma

$$\omega = \frac{ax}{x^2+y^2}\,dx + \frac{ay}{x^2+y^2}\,dy,$$

con $a \in \mathbb{R}$. Poiché il dominio non è semplicemente connesso, non possiamo concludere che ω è esatta, ma dobbiamo vedere per quali valori di a esiste una primitiva. Usando il metodo delle integrazioni parziali, si ottiene immediatamente

$$U(x,y) = \frac{a}{2}\log(x^2+y^2) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. Pertanto, la forma differenziale ω è esatta per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per $b = c = 0$, $d = a$.

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar F(x,y,z) = (0, x^2, 1).$$

a) Calcolare (direttamente) il flusso del rotore di $\bar F$ attraverso la superficie parametrica $\bar r(u,v) = (u^2, v, u)$ con $(u,v) \in D$, dove

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, 1 - v \leq u \leq 2 - v\}.$$

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

c) La superficie $\bar r$ è semplice? È regolare?

Soluzione. a) Osserviamo che il campo $\bar F$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e

$$\text{rot}\ \bar F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,2x).$$

L'insieme D è il parallelogramma di vertici $(1,0), (2,0), (1,1)$ e $(0,1)$. Inoltre, $\bar r_u(u,v) = (2u, 0, 1), \bar r_v(u,v) = (0,1,0)$, da cui segue che

$$(\bar r_u \wedge \bar r_v)(u,v) = (-1, 0, 2u).$$

Pertanto, il flusso richiesto è

$$\begin{aligned}\Phi = \iint_D (0,0,2u^2)\cdot(-1,0,2u)\,dudv = \iint_D 4u^3\,dudv = \int_0^1 dv \int_{1-v}^{2-v} 4u^3\,du \\ = \int_0^1 [(2-v)^4 - (1-v)^4]\,dv = \left[-\frac{1}{5}(2-v)^5 + \frac{1}{5}(1-v)^5\right]_0^1 = 6.\end{aligned}$$

b) Si ha $+\partial D = \bar\gamma_1 \cup \bar\gamma_2 \cup \bar\gamma_3 \cup \bar\gamma_4$, dove $\bar\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \in [1,2], -\bar\gamma_2(t) = (t, 2-t), t \in [1,2], -\bar\gamma_3(t) = (t,1)$, $t \in [0,1], \bar\gamma_4(t) = (t, 1-t)$, $t \in [0,1]$. Pertanto $\bar r(+\partial D) = \bigcup_{i=1}^{4} (\bar r \circ \bar\gamma_i)$, dove

$$\begin{aligned} \bar r \circ \bar\gamma_1(t) &= (t^2, 0, t), \quad t \in [1,2] \\ -\bar r \circ \bar\gamma_2(t) &= (t^2, 2-t, t), \quad t \in [1,2] \\ -\bar r \circ \bar\gamma_3(t) &= (t^2, 1, t), \quad t \in [0,1] \\ \bar r \circ \bar\gamma_4(t) &= (t^2, 1-t, t) \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Per il teorema di Stokes, il flusso Φ è dato da:

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{\bar r \circ \bar\gamma_i} & \bar F(\bar r(\bar\gamma_i(t))) \cdot (\bar r \circ \bar\gamma_i)'(t)\, dt \\ &= \int_1^2 (0, t^4, 1) \cdot (2t, 0, 1)\, dt - \int_1^2 (0, t^4, 1) \cdot (2t, -1, 1)\, dt \\ &- \int_0^1 (0, t^4, 1) \cdot (2t, 0, 1)\, dt + \int_0^1 (0, t^4, 1) \cdot (2t, -1, 1)\, dt \\ &= \int_1^2 dt - \int_1^2 (1 - t^4)\, dt - \int_0^1 dt + \int_0^1 (1 - t^4)\, dt \\ &= 1 - \left[t - \frac{t^5}{5} \right]_1^2 - 1 + \left[t - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 6. \end{aligned}$$

c) La superficie $\bar r$ è semplice in quanto $\bar r(u,v) = \bar r(u',v') \Leftrightarrow (u^2, v, u) = (u'^2, v', u')$. L'uguaglianza tra le ultime due componenti implica che $(u,v) = (u',v')$, dunque $\bar r$ è iniettiva. La superficie è anche regolare perchè $(\bar r_u \wedge \bar r_v)(u,v) = (-1, 0, 2u) \neq (0,0,0)$ per ogni $(u,v) \in D$.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n e^{-n \sin x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(Facoltativo: Si discuta la convergenza uniforme della serie di funzioni).

Soluzione. Si tratta di una serie a segni alterni. Per la periodicità della funzione seno, possiamo limitarci a studiare la serie per $x \in [0, 2\pi)$. Osserviamo che se x è tale che $\sin x \leq 0$ ovvero $\pi \leq x < 2\pi$, il termine generale della serie non tende a 0 e dunque la serie non può convergere neanche semplicemente. Resta da analizzare il caso in cui $x \in (0, \pi)$. Studiamo prima la convergenza assoluta, dunque consideriamo la serie

$$\sum_{n \geq 0} e^{-n \sin x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per il criterio della radice si ha che

$$\sqrt[n]{e^{-n \sin x}} = e^{-\sin x} < 1,$$

poiché $\sin x > 0$, pertanto la serie converge assolutamente. Dunque, la serie converge assolutamente per $2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, mentre non converge neanche semplicemente per $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si ha che la serie converge uniformemente su $(2k\pi + \delta, (2k+1)\pi - \delta)$ per ogni $\delta \in (0, \pi/2)$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Infatti, essendo per x fissato in tale intervallo una serie di Leibniz e detta $f(x)$ la funzione somma, si ha:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-n \sin x} \right| \leq e^{-(N+1) \sin x},$$

da cui segue che

$$\sup_{2k\pi+\delta<x(2k+1)\pi-\delta} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{-n \sin x} \right| \leq e^{-(N+1)\sin\delta} \to 0 \quad per \quad N \to \infty.$$

La serie non converge uniformemente su $(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$, altrimenti convergerebbe uniformemente anche in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$. Questo però è falso perchè negli estremi dell'intervallo non converge neanche semplicemente.

Corso di laurea in Fisica
Analisi III
Correzione della prova scritta del 14 dicembre 2015

Esercizio 1 (6 punti). Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 8}.$$

i) Si determini lo sviluppo in serie di McLaurin di f.
ii) Si determinino il raggio di convergenza e l'intervallo (aperto) di convergenza I della serie ottenuta.
iii) Si studi il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo I.

Soluzione. i) Osserviamo che $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$. Decomponendo f in fratti semplici si ottiene:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+4} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)}.$$

Pertanto, per $|x| < 2$ si ha:

$$f(x) = \frac{1}{6}\left[-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n\geq 0}\left(-\frac{x}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}\left[\frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{1}{2^n}\right]x^n.$$

ii) Osserviamo che la serie ottenuta è la somma di due serie di potenze di raggi di convergenza 2 e 4 rispettivamente, pertanto il raggio di convergenza della serie somma è $\rho = 2$ e l'intervallo (aperto) di convergenza è $I = (-2, 2)$.
iii) Per $x = -2$ si ottiene la serie numerica $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2^n} - (-1)^n\right]$ che non converge perchè il termine generale non ammette limite per $n \to \infty$. Per $x = 2$ si ottiene la serie numerica $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{6}\left[\frac{(-1)^n}{2^n} - 1\right]$, che non converge perchè il termine generale tende a $-\frac{1}{6}$ per $n \to \infty$.

Esercizio 2 (5 punti). Utilizzando il teorema della divergenza, si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\bar{F}(x, y, z) = (2xz + y, x, yz)$$

entrante nel solido

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Soluzione. Poiché il campo $\bar{F}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e C è un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$, il teorema della divergenza ci dice che il flusso Φ *uscente* da C è uguale a

$$\iiint_C \mathrm{div}\bar{F}(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_C (2z + y)\, dxdydz.$$

Per ottenere il flusso entrante basta dunque cambiare segno al valore dell'integrale scritto sopra. Utilizzando le coordinate sferiche si ottiene:

$$\iiint_C (2z+y)\,dxdydz = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\theta(2\rho\cos\theta+\rho\sin\theta\sin\varphi)\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho^3\,d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\,d\theta + \int_0^1 \rho^3\,d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}.$$

Pertanto, il flusso entrante è uguale a $-\frac{3\pi}{16}$.

Esercizio 3 (7 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x,y,z) = \left(-\frac{a}{\sqrt{y-x}} + 3e^{z^2}, \frac{b}{\sqrt{y-x}} - z\cos(yz), 6xze^{z^2} - ay\cos(yz)\right).$$

dipendente dai parametri reali a, b.
i) Si determini, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ il dominio $D_{a,b}$ del campo.
ii) Si determinino i valori di a e b per i quali $\bar{F}_{a,b}$ è conservativo.
iii) Per tali valori si calcoli il potenziale del campo che si annulla in $(-1,0,0)$.

Soluzione. i) Risulta che se $(a,b) \neq (0,0)$ il dominio del campo è il semispazio $D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > x\}$, mentre per $(a,b) = (0,0)$ si ottiene $D_{0,0} = \mathbb{R}^2$.
ii) In entrambi i casi il dominio è semplicemente connesso, pertanto i valori che rendono conservativo il campo sono tutti e soli quelli per i quali esso è irrotazionale ovvero per cui valgono le relazioni

$$\begin{cases} \partial_x\left(\frac{b}{\sqrt{y-x}} - z\cos(yz)\right) = \partial_y\left(-\frac{a}{\sqrt{y-x}} + 3e^{z^2}\right) \\ \partial_x\left(6xze^{z^2} - ay\cos(yz)\right) = \partial_z\left(-\frac{a}{\sqrt{y-x}} + 3e^{z^2}\right) \\ \partial_y\left(6xze^{z^2} - ay\cos(yz)\right) = \partial_z\left(\frac{b}{\sqrt{y-x}} - z\cos(yz)\right) \end{cases}.$$

Calcolando le derivate si ottiene

$$\begin{cases} \frac{b}{2}(y-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{a}{2}(y-x)^{-\frac{3}{2}} \\ 6ze^{z^2} = 6ze^{z^2} \\ -a\cos(yz) + ayz\sin(yz) = -\cos(yz) + yz\sin(yz) \end{cases}.$$

Le relazioni scritte sopra sono tutte soddisfatte se e solo se $a = b = 1$. Questi sono tutti e soli i valori per i quali il campo è conservativo.
iii) Calcoliamo ora il generico potenziale U di $\bar{F}_{1,1}$. Usando il metodo delle integrazioni parziali, si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{y-x}} + 3e^{z^2} \\ \partial_y U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{y-x}} - z\cos(yz) \\ \partial_z U(x,y,z) = 6xze^{z^2} - y\cos(yz) \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ottiene che

$$U(x,y,z) = 2\sqrt{y-x} + 3xe^{z^2} + \alpha(y,z).$$

Derivando tale funzione rispetto a y e sostituendola nella seconda equazione segue che

$$\partial_y \alpha(y,z) = -z\cos(yz),$$

da cui segue che $\alpha(y,z) = -\sin(yz) + \beta(z)$. Sostituendo infine la funzione

$$U(x,y,z) = 2\sqrt{y-x} + 3xe^{z^2} - \sin(yz) + \beta(z)$$

nella terza equazione si ricava che $\beta'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, dunque $\beta(z)$ è costante. Dunque, il generico potenziale di $\bar{F}_{1,1}$ è

$$U(x,y,z) = 2\sqrt{y-x} + 3xe^{z^2} - \sin(yz) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere quello che si annulla nel punto $(-1,0,0)$, basta sostituire queste coordinate nell'espressione di U e si ottiene $2-3+c=0$, da cui segue che $c=1$.

Esercizio 4 (8 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = (0, xz, y).$$

i) Si calcoli, utilizzando la definizione di flusso, il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso il paraboloide di equazione $x = y^2 + z^2 + 1$, $(y,z) \in D$, dove

$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq y^2 + z^2 \leq 2,\ z \geq |y|\}.$$

ii) Si calcoli il flusso precedente utilizzando il teorema di Stokes.
iii) Si dica se il flusso in questione è entrante o uscente.

Soluzione. i) Risulta

$$\mathrm{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & xz & y \end{vmatrix} = (1-x, 0, z).$$

La superficie si può parametrizzare come $\bar{r}(u,v) = (u^2+v^2+1, u, v)$ $(u,v) \in D$, da cui segue che $(\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v)(u,v) = (1, -2u, -2v)$. Pertanto, il flusso richiesto è

$$\begin{aligned}\Phi = &\iint_D \mathrm{rot}\bar{F}(\bar{r}(u,v)) \cdot (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v)(u,v)\, dudv \\ &= \iint_D (-u^2 - v^2, 0, v) \cdot (1, -2u, -2v)\, dudv \\ &= \iint_D (-u^2 - 3v^2)\, dudv = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{15}{16} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (-1 - 2\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{15}{16} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (-2 + \cos(2\theta))\, d\theta = -\frac{15}{16}(\pi + 1).\end{aligned}$$

ii) Poiché il campo è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e la superficie è di classe C^2 su D, possiamo calcolare il flusso precedente usando il teorema di Stokes. Risulta:

$$\Phi = \int_{\bar{r}(+\partial D)} \bar{F} \cdot \bar{ds}.$$

Ora si ha $+\partial D = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3 \cup \bar{\gamma}_4$, dove

$$\bar{\gamma}_1(t) = (t, t),\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \qquad \bar{\gamma}_2(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t), t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\bar{\gamma}_3(t) = (t, -t),\ t \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \quad -\bar{\gamma}_4(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right),\ t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

dove $-\bar{\gamma}_4(t)$ denota da curva opposta di $\bar{\gamma}_4(t)$. Pertanto,

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (2t^2 + 1, t, t),\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) = (3, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t), t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3(t) = (2t^2 + 1, t, -t),\ t \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right],$$

$$-\bar{r} \circ \bar{\gamma}_4(t) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right),\ t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Dunque risulta:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{4} \int_{\bar{r}j\circ\bar{\gamma}_i} \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (0, 2t^3 + t, t) \cdot (4t, 1, 1)\, dt$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (0, 3\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t) \cdot (0, -\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t)\, dt$$

$$+ \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (0, -2t^3 - t, t) \cdot (4t, 1, -1)\, dt$$

$$- \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(0, \frac{3}{2\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right) \cdot \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\, dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2t^3 + 2t)\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (2\cos^2 t - 6\sin^2 t)\, dt$$

$$+ \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t^3 - 2t)\, dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\cos^2 t - \frac{3}{4}\sin^2 t\right)\, dt$$

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2t^3 + 2t)\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{3}{2}\cos^2 t - \frac{21}{4}\sin^2 t\right)\, dt$$

$$2\left[\frac{t^4}{2} + t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(-\frac{15}{8} + \frac{27}{8}\cos(2t)\right)\, dt$$

$$= \frac{39}{16} - \frac{15}{16}\pi - \frac{27}{8} = -\frac{15}{16}(\pi + 1).$$

iii) Poiché la superficie è una superficie cartesiana, il versore indotto dalla parametrizzazione cartesiana standard forma con il versore $\bar{i}$ dell'asse x un angolo di ampiezza minore di $\pi/2$. Inoltre il paraboloide ha l'asse coincidente con l'asse x e la concavità rivolta nel senso crescente delle x, dunque il flusso in questione è entrante.

Esercizio 5 (4 punti). Si studi la convergenza puntuale (o semplice) ed assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \cdot \frac{n+n^x}{n^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(Facoltativo: si discuta la convergenza totale della serie).

Soluzione. Si tratta di una serie a segni alterni. Studiamo prima la convergenza assoluta ovvero la convergenza semplice della serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+n^x}{n^3}$. Risulta che

$$\frac{n+n^x}{n^3} \sim \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se} \quad x<1 \\ \frac{2}{n^2} & \text{se} \quad x=1 \\ \frac{1}{n^{3-x}} & \text{se} \quad x>1 \end{cases} \qquad \text{per} \quad n\to\infty.$$

Pertanto, la serie converge assolutamente se e solo se $x<2$ per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata. Per quanto riguarda la convergenza semplice, osserviamo che se $x\geq 3$, il termine generale della serie non tende a 0, quindi la serie non può convergere semplicemente, mentre per $x<2$ la convergenza semplice è assicurata dalla convergenza assoluta. Restano da considerare i valori $x\in[2,3)$. Osserviamo che

$$b_n = \frac{n+n^x}{n^3} = \frac{n^x}{n^3}\left(1+\frac{1}{n^{x-1}}\right) = \frac{1}{n^{3-x}}\left(1+\frac{1}{n^{x-1}}\right),$$

che per $x\in[2,3)$ è il prodotto di due successioni positive, decrescenti e che tendono a 0, pertanto b_n è positiva, decrescente e tende a 0. Per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente per $x\in[2,3)$. In conclusione, la serie converge semplicemente per $x<3$ e assolutamente per $x<2$.

Per quanto riguarda la convergenza totale, poiché quest'ultima implica la convergenza assoluta, va discussa solo su $(-\infty,2)$. La serie converge totalmente sugli intervalli $(-\infty,r]$ per ogni $r<2$. Infatti, prendendo ad esempio $r\in(1,2)$ si ha:

$$\sup_{x\leq r}\left|(-1)^n\cdot\frac{n+n^x}{n^3}\right| \leq \frac{n+n^r}{n^3} \leq \frac{2}{n^{3-r}}$$

e la serie $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{2}{n^{3-r}}$ converge perchè $3-r>1$. La serie non converge totalmente su $(-\infty,2)$, altrimenti convergerebbe totalmente su $(-\infty,2]$, ma questo è impossibile perchè implicherebbe la convergenza assoluta in $x=2$.

Corso di Studi in Fisica

Prova scritta di Analisi III del 4 luglio 2016

Esercizio 1 (punti 6). Si consideri la seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{2n}+in}{(n!)^2 e^{in!}}\, z^n.$$

a) Determinare il raggio di convergenza e il cerchio (aperto) di convergenza.

b) Dire se la serie converge assolutamente in $z = -\frac{i}{4}$.

c) Dire per quali $R > 0$ la serie converge uniformemente in $\overline{B}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.

Soluzione. a) Sia $a_n = \dfrac{n^{2n}+in}{(n!)^2 e^{in!}}$. Risulta allora

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n^{4n}+n^2}}{(n!)^2}.$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^{4(n+1)}+(n+1)^2}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{\sqrt{n^{4n}+n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = e^2.\end{aligned}$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie è $\rho = e^{-2}$ e la serie converge assolutamente nel cerchio aperto

$$B_{e^{-2}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < e^{-2}\}.$$

b) Poiché $\left|-\frac{i}{4}\right| = \frac{1}{4} > e^{-2}$, la serie non converge nel punto dato.
c) La serie converge uniformemente in $\overline{B}_R$ per ogni $R < e^{-2}$.

Esercizio 2 (punti 6). Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dx - \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dy.$$

Si calcoli l'integrale di ω lungo il bordo dell'insieme

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}$$

percorso in senso orario, sia utilizzando la definizione di integrale curvilineo di seconda specie sia mediante la formula di Gauss-Green.

Soluzione. Osserviamo che il bordo dell'insieme C è dato dal sostegno della curva $-\bar{\gamma}(t)$ dove $\bar{\gamma}(t) = \bigcup_{i=1}^{3} \bar{\gamma}_i(t)$ e

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_1(t) &= (t,0), \qquad t \in [-1,0],\\ \bar{\gamma}_2(t) &= (\cos t, \sin t), \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\\ \bar{\gamma}_3(t) &= (0,t), \qquad t \in [0,1].\end{aligned}$$

Si ha:

$$\int_{\bar{\gamma}_1} \omega = \int_{-1}^{0}\left(\frac{t}{1+t^2}, 0\right)\cdot(1,0)\,dt = \int_{-1}^{0}\frac{t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\log 2,$$

$$\int_{\bar\gamma_2}\omega=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\cos t}{2},-\frac{\sin t}{2}\right)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\sin t\,dt=\frac{1}{2},$$
$$\int_{\bar\gamma_3}\omega=\int_0^1\left(0,-\frac{t}{1+t^2}\right)\cdot(0,1)\,dt=-\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\log 2.$$

Pertanto, risulta che l'integrale richiesto è

$$I=\int_{-\bar\gamma}\omega=-\sum_{i=1}^{3}\int_{\bar\gamma_i}\omega=-\frac{1}{2}+\log 2.$$

Utilizzando il teorema di Gauss-Green, risulta che

$$I=-\iint_C(Q_x-P_y)\,dxdy$$

dove $P(x,y)=\frac{x}{1+x^2+y^2}$ e $Q(x,y)=-\frac{y}{1+x^2+y^2}$. Si ha allora:

$$I=-\iint_C\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^1\frac{4\rho^3\cos\theta\sin\theta}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho d\theta=$$
$$=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^1\frac{\rho^3}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho.$$

Osserviamo che

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2},$$

mentre

$$\int_0^1\frac{\rho^3}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{4\rho^3+4\rho}{1+\rho^4+2\rho^2}\,d\rho-\int_0^1\frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\log(1+\rho^4+2\rho^2)\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[(1+\rho^2)^{-1}\right]_0^1=\frac{1}{4}\log 4-\frac{1}{4}.$$

Da ciò segue che $I=-\frac{1}{2}+\log 2$.

Esercizio 3 (punti 7). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar F_a(x,y,z)=\left(ax+y\cos(xy),x\cos(xy)-3ze^{yz}+1-\sin(ay),-3ye^{yz}\right).$$

a) Si determini il dominio D_a di $\bar F_a$.

b) Si determinino i valori del parametro a per i quali $\bar F_a$ sia conservativo in D_a.

c) Per tali valori si calcoli il potenziale di $\bar F_a$ che si annulla nell'origine.

d) Si calcoli il lavoro compiuto da $\bar F_a$ per spostare un punto materiale lungo la curva

$$\bar\gamma(t)=\left(t^2-1,t,t^4+t^2+1\right),\quad t\in[0,1].$$

Soluzione. a) $D_a=\mathbb{R}^3$ per ogni $a\in\mathbb{R}$.
b) Poiché il dominio è semplicemente connesso, basta determinare i valori di a per i quali il campo è irrotazionale. Osserviamo che

$$\mathbf{rot}\bar F_a(x,y,z)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_y(ax+y\cos(xy))=\partial_x(x\cos(xy)-3ze^{yz}+1-\sin(ay))\\ \partial_x(-3ye^{yz})=\partial_z(ax+y\cos(xy))\\ \partial_y(-3ye^{yz})=\partial_z(x\cos(xy)-3ze^{yz}+1-\sin(ay))\end{cases}.$$

È facile osservare che le condizioni scritte sopra sono verificate per ogni $a \in \mathbb{R}$. Pertanto, il campo $\bar{F}_a$ è conservativo per ogni $a \in \mathbb{R}$.
c) Per calcolare il potenziale usiamo il metodo delle integrazioni parziali risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y,z) = ax + y\cos(xy) \\ \partial_y U(x,y,z) = x\cos(xy) - 3ze^{yz} + 1 - \sin(ay) \\ \partial_z U(x,y,z) = -3ye^{yz} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $U(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2 + \sin(xy) + \alpha(y,z)$. Derivando tale funzione rispetto a z e sostituendo nella terza equazione si ottiene $\partial_z \alpha(y,z) = -3ye^{yz}$ da cui segue che $\alpha(y,z) = -3e^{yz} + \beta(y)$. Pertanto si ha

$$U(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2 + \sin(xy) - 3e^{yz} + \beta(y).$$

Infine derivando U rispetto a y e sostituendo nella seconda equazione del sistema si ottiene $\beta'(y) = 1 - \sin(ay)$. Per $a = 0$ si ha $\beta(y) = y + k, k \in \mathbb{R}$, mentre per $a \neq 0$ si ottiene $\beta(y) = y + \frac{1}{a}\cos(ay) + k, k \in \mathbb{R}$. Pertanto, il generico potenziale è:

$$U_a(x,y,z) = \frac{a}{2}x^2 + \sin(xy) - 3e^{yz} + y + \frac{1}{a}\cos(ay) + k \qquad \text{se} \quad a \neq 0$$

mentre per $a = 0$ si ottiene

$$U_0(x,y,z) = \sin(xy) - 3e^{yz} + y + k.$$

Nel primo caso il potenziale che si annulla nell'origine si ottiene per $k = 3 - \frac{1}{a}$, nel secondo per $k = 3$.
d) Essendo il campo conservativo, per ogni $a \in \mathbb{R}$, il lavoro richiesto è

$$W_a = U_a(\bar{\gamma}(1)) - U_a(\bar{\gamma}(0)) = U_a(0,1,3) - U_a(-1,0,1).$$

Per $a \neq 0$ risulta: $W_a = -3e^3 + 4 - \frac{a}{2} + \frac{\cos a - 1}{a}$, mentre per $a = 0$ si ottiene $W_0 = -3e^3 + 4$.

Esercizio 4 (punti 7). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(y + z^2, z, y\right).$$

(a) Si calcoli l'integrale curvilineo di seconda specie di $\bar{F}$ lungo la curva

$$\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 1), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

(b) Si calcoli l'integrale del punto (a) utilizzando il teorema di Stokes (suggerimento: si determini un'opportuna superficie di $\mathbb{R}^3$ il cui bordo coincida con il sostegno della curva $\bar{\gamma}$).

Soluzione. a) L'integrale richiesto è

$$I = \int_0^{2\pi} \bar{F}(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin t + 1, 1, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \cos t)\,dt = -\pi.$$

Osserviamo che il sostegno di $\bar{\gamma}$ coincide col bordo intuitivo della superficie cartesiana $\bar{r}(x,y) = (x,y,1)$ con $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Pertanto, risulta che l'integrale I si può calcolare come flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie. Si ha

$$\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y + z^2 & z & y \end{vmatrix} = (0, 2z, -1).$$

Si ha dunque:

$$I = \iint_D (0, 2, -1) \cdot (0, 0, 1)\, dxdy = -\text{Area}(D) = -\pi.$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 0} e^{-|x|^n}$$

Facoltativo: discutere la convergenza totale della serie.

Soluzione. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, la serie data è a termini positivi, dunque convergenza semplice ed assoluta sono equivalenti nel nostro caso. Inoltre risulta

$$\lim_{n \to \infty} e^{-|x|^n} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ e^{-1} & \text{se} \quad x = \pm 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 1 \end{cases} .$$

Pertanto la condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta se e solo se $|x| > 1$. Per tali valori, utilizzando il criterio del rapporto si osserva che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{-|x|^{n+1}}}{e^{-|x|^n}} = \lim_{n \to \infty} e^{-|x|^{n+1} + |x|^n} = \lim_{n \to \infty} e^{|x|^n (1 - |x|)} = 0.$$

Pertanto, la serie converge assolutamente per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. La convergenza non può essere uniforme su tale insieme, altrimenti la serie convergerebbe uniformemente anche sulla chiusura, quindi su $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e questo non si verifica. Converge invece totalmente su $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 1$. Infatti su tale insieme si ha:

$$e^{-|x|^n} \leq e^{-\delta^n}$$

ed è facile verificare che la serie $\sum_{n \geq 0} e^{-\delta^n}$ è convergente per il criterio del rapporto.

Corso di Studi in Fisica

Prova scritta di Analisi III del 13 settembre 2016

Esercizio 1 (punti 5). Sia data la seguente serie di potenze reali:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare il raggio di convergenza e l'intervallo (aperto) di convergenza.

(b) Discutere la convergenza negli estremi dell'intervallo di convergenza.

(c) Discutere la convergenza uniforme della serie.

(d) Utilizzando il teorema di scambio tra serie ed integrale, calcolare la somma della serie nei punti in cui essa converge.

Soluzione. (a) Poiché $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$, si ha che il raggio di convergenza della serie è $\rho = 1$. Pertanto, la serie converge puntualmente nell'intervallo aperto $(-1, 1)$.
(b) Per $x = \pm 1$ si ottengono rispettivamente le serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ che convergono entrambe assolutamente per confronto con la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Pertanto, la serie converge puntualmente in $[-1, 1]$.
(c) Per il teorema di Abel la serie converge anche uniformemente su $[-1, 1]$.
(d) Per $x = 0$ ovviamente la somma vale 0. Per $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ fissato, poiché la serie converge uniformemente, possiamo applicare il teorema di scambio tra serie ed integrale e otteniamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] x^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \int_0^x t^{n-1}\, dt - \frac{1}{x} \sum_{n\geq 1} \int_0^x t^n\, dt \\
&= \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{1-t}\, dt \\
&= -\log(1-x) + 1 + \frac{1}{x}\log(1-x) = 1 + \frac{1-x}{x}\log(1-x).
\end{aligned}$$

Inoltre, poiché c'è convergenza uniforme su $[-1, 1]$, la funzione somma $f(x)$ è continua anche negli estremi e dunque vale

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \lim_{x\to -1^+} \left[1 + \frac{1-x}{x}\log(1-x)\right] = 1 - 2\log 2$$

e

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{x\to 1^-} \left[1 + \frac{1-x}{x}\log(1-x)\right] = 1.$$

N.B.: In alternativa si può osservare che per $x = 1$ si ottiene la serie di Mengoli che è una serie telescopica con somma 1.

Esercizio 2 (punti 6). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x, y, z) = (xy + z, ye^z, xz).$$

Calcolare il flusso di $\bar{F}$ uscente dal bordo del solido

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

sia utilizzando la definizione di flusso sia applicando il teorema della divergenza.

Soluzione. Denotiamo con D l'insieme

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u\}.$$

Utilizzando la definizione di flusso osserviamo che ∂C è costituito da quattro facce corrispondenti ai sostegni delle seguenti superfici e alle seguenti normali esterne:

$$\bar{r}_1(u, v) = (0, u, v) \qquad (u, v) \in D, \qquad \bar{n}_e = (-1, 0, 0),$$

$$\bar{r}_2(u, v) = (u, 0, v) \qquad (u, v) \in D, \qquad \bar{n}_e = (0, -1, 0),$$

$$\bar{r}_3(u, v) = (u, v, 0) \qquad (u, v) \in D, \qquad \bar{n}_e = (0, 0, -1),$$

$$\bar{r}_4(u, v) = (u, v, 1 - u - v) \qquad (u, v) \in D, \qquad \bar{n}_e = (1, 1, 1).$$

Pertanto il flusso uscente Φ_e è dato dalla somma dei quattro flussi $\Phi_{i,e}$ uscenti attraverso le facce $\bar{r}_i(D), i = 1, 2, 3, 4,$ del tetraedro C.

$$\Phi_{1,e} = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (v, ue^v, 0) \cdot (-1, 0, 0)\, dv = \int_0^1 du \int_0^{1-u} -v\, dv = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u)^2\, du = -\frac{1}{6};$$

$$\Phi_{2,e} = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (v, 0, uv) \cdot (0, -1, 0)\, dv = 0;$$

$$\Phi_{3,e} = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (uv, v, 0) \cdot (0, 0, -1)\, dv = 0;$$

$\Phi_{4,e} = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (uv + 1 - u - v, ve^{1-u-v}, u - u^2 - uv) \cdot (1, 1, 1)\, dv =$

$$\int_0^1 du \int_0^{1-u} (1 - v + ve^{1-u-v} - u^2)\, dv = \int_0^1 \left[v - \frac{v^2}{2} - u^2 v - ve^{1-u-v} - e^{1-u-v} \right]_0^{1-u} du$$

$$= \int_0^1 \left[1 - u - \frac{(1 - u)^2}{2} - u^2 + u^3 - 2 + u + e^{1-u} \right] du$$

$$= \left[u - \frac{u^2}{2} + \frac{(1 - u)^3}{6} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} - 2u + \frac{u^2}{2} - e^{1-u} \right]_0^1 = e - \frac{9}{4}.$$

Pertanto, il flusso uscente da ∂C è $\Phi_e = e - \frac{9}{4} - \frac{1}{6} = e - \frac{29}{12}$.

Utilizzando il teorema della divergenza, il flusso richiesto è dato da:

$$\iiint_C \operatorname{div} \bar{F}(x, y, z)\, dxdydz.$$

Calcoliamo l'integrale triplo. Si ha:

$$\iiint_C \operatorname{div} \bar{F}(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_C (x+y+e^z)\,dxdydz =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} (x+y+e^z)\,dx = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \left[\frac{x^2}{2} + xy + xe^z\right]_0^{1-y-z} dy$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \left[\frac{(1-y-z)^2}{2} + y(1-y-z) + (1-y-z)e^z\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{6}(1-y-z)^3 + \frac{y^2}{2}(1-z) - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{2}e^z(1-y-z)^2\right]_0^{1-z} dz$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}(1-z)^3 + \frac{e^z}{2}(1-z)^2\right] dz$$

$$= \left[-\frac{1}{12}(1-z)^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}e^z(1-z)^2\right]_0^1 + \int_0^1 e^z(1-z)\,dz = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} - 1 + e - 1 = e - \frac{29}{12}.$$

Esercizio 3 (punti 7). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{\alpha,\beta}(x,y,z) = \left(\frac{y-1}{x+1}, \frac{2y(z-1)}{1+\beta y^2} + \log(1+x), z + \log\left(\frac{\alpha y^2}{2} + 1\right)\right)$$

dipendente dai parametri reali $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

(a) Determinare il dominio $D_{\alpha,\beta}$ di $\bar{F}_{\alpha,\beta}$.

(b) Determinare i valori di α e β per i quali $\bar{F}_{\alpha,\beta}$ sia conservativo in $D_{\alpha,\beta}$.

(c) Per tali valori calcolare il generico potenziale di $\bar{F}_{\alpha,\beta}$.

(d) Per i valori di cui al punto (b) calcolare il lavoro compiuto da $\bar{F}_{\alpha,\beta}$ per spostare un punto materiale lungo la curva

$$\bar{\gamma}(t) = \left(t^2+1, t^4, t^2+1\right), \quad t \in [0,1].$$

Soluzione. (a) Per ogni $\alpha > 0, \beta > 0$ fissati si ha che $D_{\alpha,\beta} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > -1\}$.
(b) Poiché il dominio è semplicemente connesso, risulta che $\bar{F}_{\alpha,\beta}$ è conservativo su $D_{\alpha,\beta}$ se e solo se $\mathbf{rot}\bar{F}_{\alpha,\beta} = \bar{0}$. Osserviamo che

$$\partial_x F_{\alpha,\beta,2}(x,y,z) = \partial_y F_{\alpha,\beta,1}(x,y,z) = \frac{1}{x+1}$$

e che

$$\partial_x F_{\alpha,\beta,3}(x,y,z) = \partial_z F_{\alpha,\beta,1}(x,y,z) = 0.$$

Pertanto $\bar{F}_{\alpha,\beta}$ è irrotazionale se e solo se

$$\partial_z F_{\alpha,\beta,2}(x,y,z) = \frac{2y}{1+\beta y^2} = \frac{2\alpha y}{2+\alpha y^2} = \partial_y F_{\alpha,\beta,3}(x,y,z),$$

il che vale se e solo se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Per tutti e soli questi valori il campo è conservativo.
(c) Per calcolare il generico potenziale di $\bar{F}_{2,1}$, utilizziamo il metodo delle integrazioni parziali e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y,z) = \frac{y-1}{x+1} \\ \partial_y U(x,y,z) = \frac{2y(z-1)}{1+y^2} + \log(1+x) \\ \partial_z U(x,y,z) = z + \log\left(\frac{\alpha y^2}{2} + 1\right) \end{cases} .$$

Dalla prima equazione si ricava $U(x,y,z) = (y-1)\log(x+1) + h(y,z)$. Derivando rispetto a y e sostituendo nella seconda equazione si ottiene che

$$\partial_y h(y,z) = \frac{2y(z-1)}{1+y^2} + k(z),$$

da cui $h(y,z) = (z-1)\log(1+y^2) + k(z)$. Infine, dalla terza equazione segue che

$$\partial_z U(x,y,z) = k'(z) + \log(1+y^2) = z + \log(1+y^2),$$

da cui si ottiene che $k(z) = \frac{z^2}{2} + c, c \in \mathbb{R}$. Dunque il generico potenziale del campo $\bar{F}_{2,1}$ è:

$$U(x,y,z) = (y-1)\log(x+1) + (z-1)\log(1+y^2) + \frac{z^2}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(d) Poiché il campo è conservativo nel suo dominio e il sostegno della curva $\bar{\gamma}$ è tutto contentuo in $D_{\alpha,\beta}$ risulta:

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{F}_{2,1} \cdot \bar{ds} = U(\bar{\gamma}(1)) - U(\bar{\gamma}(0)) = 2\log 2 + \frac{3}{2}.$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(x, 0, y^2\right).$$

(a) Calcolare (direttamente) il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie

$$\bar{r}(u,v) = (v\cos u, u\sin v, v), \qquad (u,v) \in D,$$

dove $D = [0,2\pi] \times [0,\pi]$.

(b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il Teorema di Stokes.

(c) La superficie data è regolare? È semplice?

Soluzione. (a) Risulta $\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = (2y,0,0)$. Inoltre, vale:

$$\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u,v) = (\sin v, v\sin u, -\cos u \sin v - uv\sin u\cos v).$$

Il flusso richiesto è pertanto:

$$\Phi = \iint_D (2u\sin v, 0, 0) \cdot (\sin v, v\sin u, -\cos u\sin v - uv\sin u\cos v)\, dudv$$
$$= \int_0^{2\pi} u\, du \int_0^{\pi} 2\sin^2 v\, dv = 2\pi^3.$$

(b) Utilizzando il teorema di Stokes, osserviamo che il bordo $+\partial D = \bigcup_{i=1}^{4} \bar{\gamma}_i(t)$, dove $\bar{\gamma}_1(t) = (t,0), t \in [0,2\pi], \bar{\gamma}_2(t) = (2\pi,t), t \in [0,\pi], -\bar{\gamma}_3(t) = (t,\pi), t \in [0,2\pi], -\bar{\gamma}_4(t) = (0,t), t \in [0,\pi]$. Pertanto, il trasformato del bordo è dato dall'unione delle curve

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (0,0,0), \quad t \in [0,2\pi], \qquad \bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) = (t, 2\pi\sin t, t), \quad t \in [0,\pi],$$

$$-\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3(t) = (\pi\cos t, 0, \pi), \quad t \in [0,2\pi], \qquad -\bar{r} \circ \bar{\gamma}_4(t) = (t,0,t), \quad t \in [0,\pi].$$

Pertanto, per il teorema di Stokes, si ha:

$$
\begin{aligned}
\Phi = \sum_{i=1}^{4} \int_{\bar r \circ \bar\gamma_i} \bar F \cdot d\bar s = \int_0^\pi (t, 0, 4\pi^2 \sin^2 t) \cdot (1, 2\pi \cos t, 1)\, dt \\
- \int_0^{2\pi} (\pi \cos t, 0, 0) \cdot (-\pi \sin t, 0, 0)\, dt - \int_0^\pi (t, 0, 0) \cdot (1, 0, 1)\, dt \\
= \int_0^\pi (t + 4\pi^2 \sin^2 t)\, dt + \pi^2 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt - \int_0^\pi t\, dt \\
= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi^3 + 0 - \frac{\pi^2}{2} = 2\pi^3.
\end{aligned}
$$

(c) La superficie $\bar r$ non è regolare perché ad esempio si ha che $\bar r_u \wedge \bar r_v(u, 0) = \bar 0$ per ogni $u \in [0, 2\pi]$. La superficie non è neanche semplice, perché se prendiamo $(u, v) = (0, 0)$ e $(u', v') = (\pi, 0)$ si ha $\bar r(u, v) = \bar r(u', v')$.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) ed assoluta della serie di funzioni:

$$
\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right|, \qquad x \in \mathbb{R}.
$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi, dunque la convergenza puntuale e quella assoluta sono equivalenti. Osserviamo che per ogni x fissato si ha:

$$
\frac{1}{\sqrt{n}} + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^3}{6\sqrt{n^3}} + o\left(\frac{x^3}{\sqrt{n^3}} \right), \qquad n \to \infty.
$$

Pertanto, se $x \neq -1$, risulta:

$$
\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right| \sim \frac{|x+1|}{n}, \qquad n \to \infty,
$$

pertanto la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica. Invece, per $x = -1$ si ha:

$$
\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right| \sim \frac{|x|^3}{6n^2}, \qquad n \to \infty
$$

e dunque la serie converge. In conclusione, la serie converge assolutamente solo per $x = -1$ e non converge neanche semplicemente per $x \neq -1$.