

Tutorato 2

Metodi Matematici della Meccanica Classica - 17 marzo 2025

1. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, A, B, C le matrici associate nella base canonica a due applicazioni lineari $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, g, h le matrici associate nella base canonica a due forme bilineari $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathbb{I} la matrice identità, scrivere in notazione di Einstein le seguenti operazioni:

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$

(d) $C = AB$

(g) $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$

(b) $\mathbb{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$

(e) $h = A^T g A$

(h) $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}g(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

(c) $\mathbf{v}^T g \mathbf{w} = a$

(f) $C = B^{-1}AB$

(i) $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = C\mathbf{u}$

2. Un punto materiale \mathbf{P} di massa m scivola senza attrito, soggetto alla forza peso, all'interno di un cono di semiapertura angolare α , con asse verticale e vertice verso il basso.

(a) Dopo aver scelto opportune coordinate, scrivere la Lagrangiana del sistema.

(b) Scrivere le equazioni del moto.

(c) Caratterizzare i moti ad altezza costante.

3. Si considerino, in un piano orizzontale, due rette incidenti che formano un angolo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Due punti materiali \mathbf{P} e \mathbf{Q} di ugual massa m sono vincolati a muoversi lungo le rette, rispettivamente, e sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. \mathbf{P} , inoltre, è collegato al punto di intersezione delle rette tramite una molla di costante elastica $2k$ e lunghezza a riposo nulla.

(a) Dopo aver scelto opportune coordinate, scrivere la Lagrangiana del sistema.

(b) Scrivere le equazioni del moto.