1 Numeri Complessi.

Exercise 1.1

Trovare modulo e fase (in gradi e in radianti) di

$$z = -5 + 5i$$

poi scrivere z in forma polare.

Soluzione

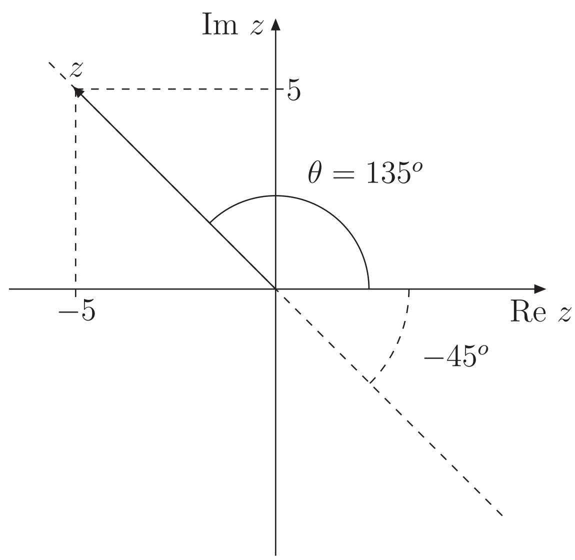
Si trovano modulo $\rho = |z|$ e fase $\theta = \arg z$:

$$\rho = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}, \qquad \tan\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = -1.$$

Il calcolo di θ è complicato dal fatto che la tangente di un angolo definisce l'angolo solo a meno di π:

$$\theta = \arctan(-1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & = -45^o \\ \frac{3}{4}\pi & = 135^o \end{cases}$$

Per scegliere quale dei due angoli è quello giusto, guardiamo z nel piano complesso:



Ricavando la posizione di z dalle coordinate cartesiane, dobbiamo scegliere:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} = 135^o,$$

Si scrive quindi z in forma polare:

$$z = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Exercise 1.2

Trovare parte reale e immaginaria, modulo e fase di:

$$z = \frac{3-2i}{-1+i}$$

Soluzione

Si moltiplicano numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, in modo da avere al denominatore un numero reale

$$z = \frac{(3-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-5-i}{2} = -\frac{5}{2} - i\frac{1}{2},$$

quindi si trova che

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{5}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}.$$

Si può scrivere z in forma polare, $z = \rho e^{i\theta}$, con $\rho = |z|$ (modulo di z) e $\theta = \arg z$ (fase di z). Si ha:

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{2}}, \qquad \tan\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{1}{5}.$$

Il calcolo di θ è complicato dal fatto che la tangente di un angolo definisce l'angolo solo a meno di π:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \begin{cases} 0.197\,\mathrm{rad} \\ 3.339\,\mathrm{rad} \end{cases}$$

Poiché sia la parte reale che la parte immaginaria di z sono negative, z sta nel terzo quadrante, quindi θ deve essere compreso tra π e $3\pi/2$. Quindi la fase vale:

$$\theta = \arg z = 3.339\,\mathrm{rad} = 191.2^{\mathrm{o}}.$$

Exercise 1.3

Dati

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}},$$

calcolare z_1^*, z_2^*, $|z_1|^2$, $|z_2|^2$, $z_1 z_2$, $z_1 z_2^*$, $z_1^* z_2$.

Soluzione

I complessi coniugati sono dati da:

$$z_1^* = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \qquad\qquad z_2^* = 3e^{-i\frac{\pi}{3}},$$

I moduli sono dati da:

$$|z_1|^2 = \rho_1^2 = 4^2 = 16, \qquad |z_2|^2 = \rho_2^2 = 3^2 = 9.$$

Gli altri prodotti sono dati da:

$$z_1\, z_2 = \rho_1\ e^{i\theta_1}\, \rho_2\, e^{i\theta_2} = \rho_1\, \rho_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} = 12\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 12\, i,$$

$$z_1\, z_2^* = \rho_1\ e^{i\theta_1}\, \rho_2\, e^{-i\theta_2} = \rho_1\, \rho_2\, e^{i(\theta_1-\theta_2)} = 12\, e^{-i\frac{\pi}{6}},$$
$$z_1^*\, z_2 = \rho_1\ e^{-i\theta_1}\, \rho_2\, e^{i\theta_2} = \rho_1\, \rho_2\, e^{i(-\theta_1+\theta_2)} = 12\, e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

L'ultimo calcolo si poteva anche fare:

$$z_1^*\, z_2 = (z_1\, z_2^*)^* = \left(12\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^* = 12\, e^{i\frac{\pi}{6}},$$

sfruttando il fatto che per qualunque numero complesso z vale:

$$(z^*)^* = (x - i\, y)^* = x + i\, y = z.$$

Exercise 1.4

Dimostrare che

$$|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

Soluzione

Si scrivono z_1 e z_2, generici numeri complessi, in forma polare:

$$z_1 = \rho_1\, e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = \rho_2\, e^{i\theta_2}.$$

Il loro prodotto è

$$z_1\, z_2 = \rho_1\, e^{i\theta_1}\, \rho_2\, e^{i\theta_2} = \rho_1\, \rho_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

quindi

$$|z_1\, z_2| = \rho_1\, \rho_2 = |z_1|\,|z_2|.$$

Exercise 1.5

Dimostrare la disuguaglianza triangolare:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Soluzione

Si eleva il primo membro della disuguaglianza al quadrato e si svolge il modulo quadro:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^*.$$

Scriviamo ora z_1 e z_2 in coordinate polari

$$z_1 = \rho_1 \, e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = \rho_2 \, e^{i\theta_2},$$

e otteniamo:

$$|z_1 + z_2|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1 \, \rho_2 \, [e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + e^{i(-\theta_1 + \theta_2)}] = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 \, \rho_1 \, \rho_2 \, \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Quella ricavata non è altro che la formula di Carnot per il modulo della somma di due vettori, dove ρ_1 e ρ_2 sono i moduli dei due vettori e $\theta_1 - \theta_2$ è l'angolo compreso tra i vettori. Ora, essendo il coseno di un angolo sempre minore di o ugaule a 1

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \leq 1,$$

avremo:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 \, \rho_1 \, \rho_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \, |z_1| \, |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Estraendo la radice quadrata di entrambi i membri riconosciamo la disuguaglianza triangolare che volevamo dimostrare.

Exercise 1.6

Calcolare

$$(1+i)^8$$

Soluzione

Poniamo $z = (1+i)$ in forma polare. In questo caso abbiamo

$$\rho = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \theta = \arg z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

dove per la determinazione di θ abbiamo tenuto conto che z è nel primo quadrante. Quindi

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}},$$

da cui si ricava

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\, e^{i\,8\pi/4} = 16\, e^{2\pi i} = 16.$$

Exercise 1.7

Trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = -1$$

Soluzione

Se z fosse un numero reale scriveremmo subito:

$$z = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Poiché invece z è un numero complesso, il calcolo della radice si complica. Infatti occorre scrivere il numero complesso -1 esplicitando tutte le sue possibili fasi:

$$-1 = e^{i(\pi+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Questo è necessario perché, quando si estrae la radice, il pezzo della fase $2k\pi\, i$ dà numeri complessi differenti a seconda del valore di k:

$$z = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \left(e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{2k\pi}{3}}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

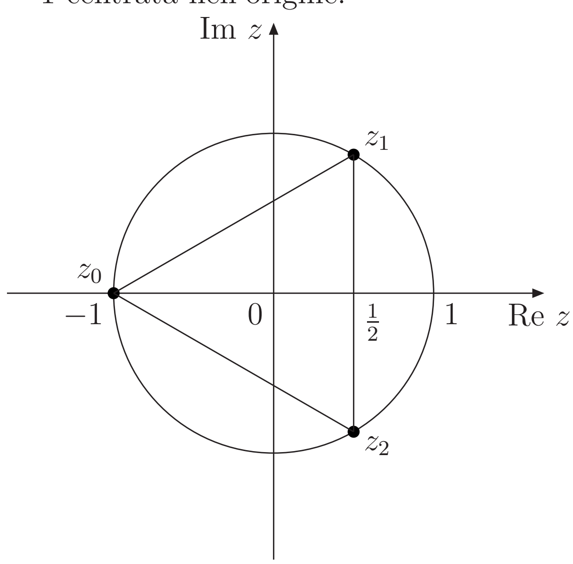
Considerando tutti i valori possibili di k, si hanno 3 radici distinte:

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad (k=0),\\
z_1 &= e^{i\pi} = -1, \qquad (k=1),\\
z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad (k=2).
\end{aligned}$$

Gli altri valori di k danno radici che coincidono con queste. Per esempio:

$$\begin{aligned}
z_{-1} &= e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}-2\pi i} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = z_2, \qquad (k=-1)\\
z_3 &= e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}+2\pi i} = e^{i\frac{\pi}{3}} = z_0, \qquad (k=3)
\end{aligned}$$

Le tre radici z_0, z_1, z_2 costituiscono i veritici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio $r = 1$ centrata nell'origine:



In questo caso, estraendo la radice di un numero reale (-1), le radici si dispongono in maniera simmetrica rispetto all'asse reale.

Exercise 1.8

Trovare i numeri complessi z tali che

$$(z-1)^3 = -i$$

Soluzione

Ponendo $z - 1 = w$, si deve risolvere:

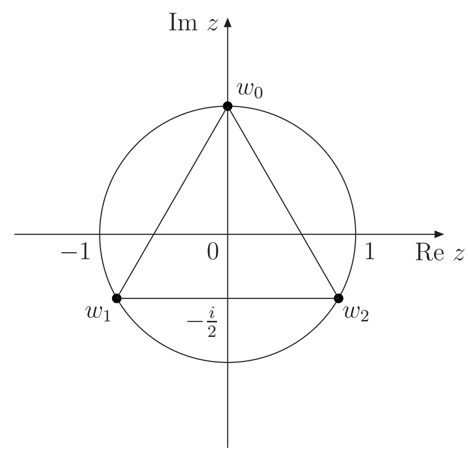
$$w^3 = -i,$$

da cui

$$\Longrightarrow \qquad w = (-i)^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{1}{3}(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3})}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

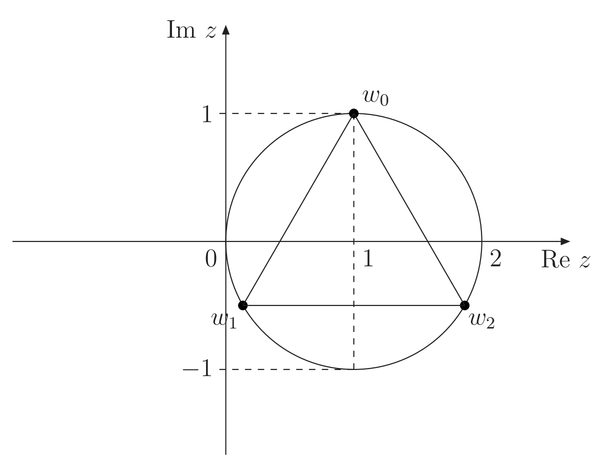
Esistono 3 radici distinte w_0, w_1, w_2, disposte su una circonferenza di raggio 1, che si ricavano sostituendo $k = 0, 1, 2$ nell'esponenziale:

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = i, && (k=0), \\ w_1 &= e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, && (k=1), \\ w_2 &= e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, && (k=2). \end{aligned}$$



I valori di w sono disposti sui vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 1 centrata in $z = 0$. In questo caso, estraendo la radice di un numero immaginario $(-i)$, le radici si dispongono in maniera simmetrica rispetto all'asse immaginario.
Le soluzioni dell'equazione iniziale si ottengono ricordando che $z = w + 1$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 + e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i, \\ z_1 &= 1 + e^{i\frac{7\pi}{6}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \\ z_2 &= 1 + e^{i\frac{11\pi}{6}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}. \end{aligned}$$



Le soluzioni sono disposte sui vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 1 centrata in $z = 1$.

Exercise 1.9

Trovare le soluzioni dell'equazione

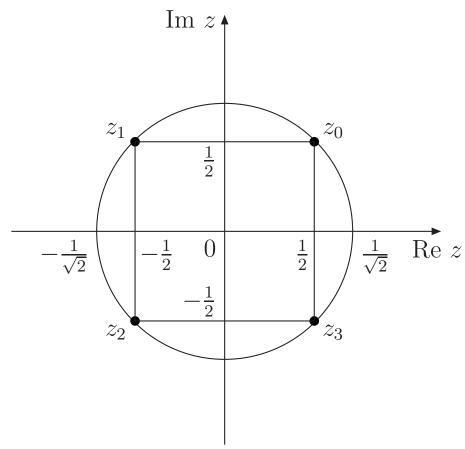
$$4z^4 + 1 = 0$$

Soluzione

$$z = \left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\, e^{i(\pi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

L'equazione ha 4 soluzioni distinte:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, && (k=0),\\
z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, && (k=1),\\
z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, && (k=2),\\
z_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, && (k=3).
\end{aligned}$$



Le soluzioni sono disposte sui vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di raggio $1/\sqrt{2}$ centrata in $z = 0$. Come nell'esercizio 9, estraendo la radice di un numero reale $(-1/4)$, le radici si dispongono in maniera simmetrica rispetto all'asse reale.

Exercise 1.10

Trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0$$

Soluzione

L'equazione è di sesto grado, pertanto avrà sei soluzioni distinte. Ponendo $t = z^3$, l'equazione diventa

$$t^2 + 7t - 8 = 0\,,$$

e ammette soluzioni $t = -8$ e $t = 1$.

- Se $t = -8$ allora $z^3 = -8$, da cui

  $$z = (-8)^{1/3} = 2\,(-1)^{1/3} = 2\,e^{i/3(\pi+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  con $k = 0, 1, 2$. Queste sono le tre soluzioni distinte:

  $$\begin{aligned} z_0 &= 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}, && (k = 0),\\ z_1 &= 2\,e^{i\pi} = -2, && (k = 1),\\ z_2 &= 2\,e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}, && (k = 2). \end{aligned}$$

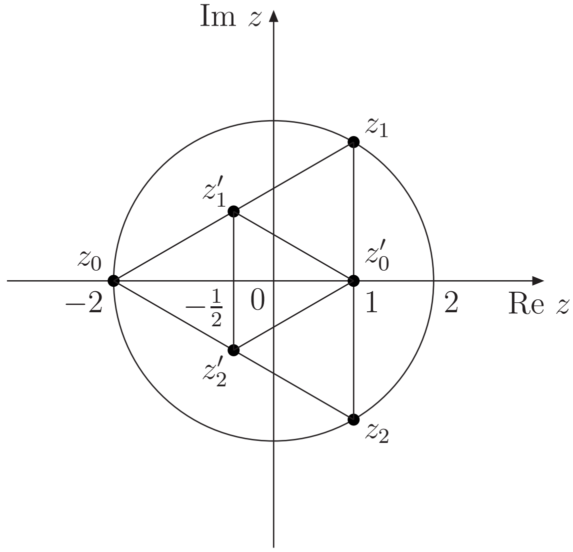
- Se $t = 1$ allora $z^3 = 1$, da cui

  $$z = (1)^{1/3} = e^{i/3(2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

  con $k = 0, 1, 2$. Anche in questo caso ci sono tre soluzioni distinte:

  $$\begin{aligned} z'_0 &= 1, && (k = 0),\\ z'_1 &= e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, && (k = 1),\\ z'_2 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, && (k = 2). \end{aligned}$$

Ci sono quindi 6 soluzioni distinte. Le prime tre sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio $\rho = 2$ centrata nell'origine. Le altre tre sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio $\rho' = 1$ centrata nell'origine, come mostrato in figura.


Im z
z_1
z'_1
z_0
z'_0
-2
$-\frac{1}{2}$
0
1
2
Re z
z'_2
z_2

Exercise 1.11

Trovare le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + iz = 0$$

Soluzione

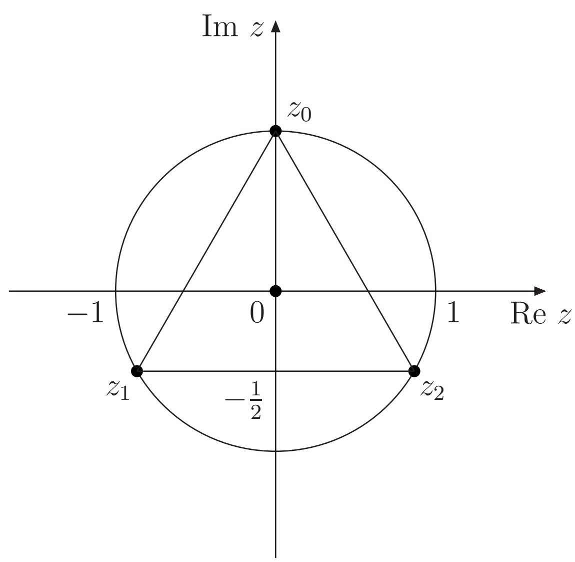
L'equazione è di quarto grado, avrà quindi 4 soluzioni distinte. Riscrivendo l'equazione nella forma $z(z^3 + i) = 0$, troviamo due classi di soluzioni:

$$z = 0 \qquad z = (-i)^{1/3} = e^{i/3(3\pi/2+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo quindi le quattro radici distinte

$$\begin{aligned}
z &= 0, \\
z_0 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = i, && (k = 0), \\
z_1 &= e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, && (k = 1), \\
z_2 &= e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, && (k = 2).
\end{aligned}$$

tre delle quali si dispongono sui vertici del triangolo rappresentato in figura, mentre la quarta è situata nell'origine.



Exercise 1.12

Determinare l'insieme di punti del piano complesso definiti dalla relazione

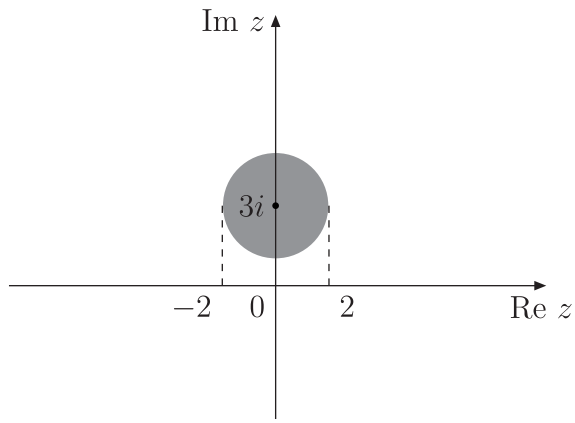
$$|z - 3i| < 2$$

Soluzione

Poniamo $w = z - 3i$. La condizione $|w| < 2$ è soddisfatta da tutti i punti w del piano complesso all'interno della circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 (bordo escluso). z è traslato rispetto a w di $+3i$:

$$z = w + 3i,$$

quindi nel campo complesso di z, la condizione $|z - 3i| < 2$ individua l'insieme di punti all'interno della circonferenza di raggio 2 centrata in $z_0 = 3i$, mostrata in figura, bordo escluso.



Exercise 1.13

Determinare l'insieme di punti del piano complesso definiti dalla relazione

$$|z| < \arg z + \pi, \qquad \arg z \in (-\pi, \pi]$$

Soluzione

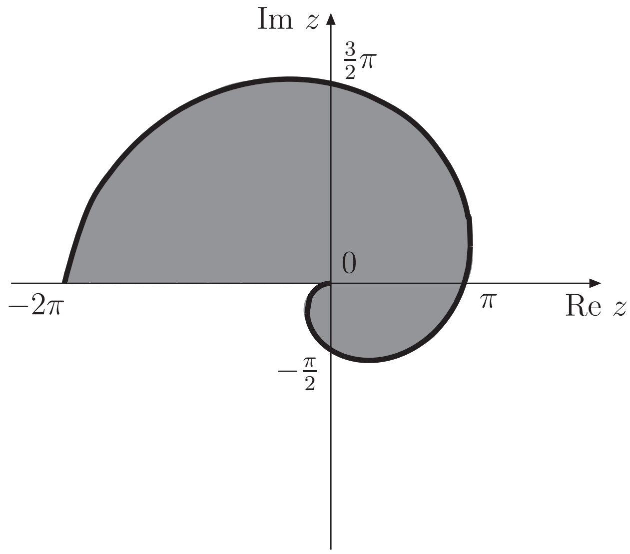
Ponendo $z = \rho e^{i\theta}$ l'equazione diventa

$$\rho < \theta + \pi.$$

Al variare di θ tra $-\pi$ e $+\pi$, sulla curva

$$\rho = \theta + \pi.$$

ρ cresce da 0 a 2π, descrivendo la spirale rappresentata in figura.



L'insieme cercato è la parte di piano interna alla spirale.

2 Funzioni olomorfe, condizioni di Cauchy-Riemann, funzioni armoniche.

Exercise 2.1

Trovare dove le funzioni:

(a) $f(z) = c$,

(b) $f(z) = z$,

(c) $f(z) = \frac{1}{z}$,

(d) $f(z) = z^*$,

(e) $f(z) = |z|^2$.

sono olomorfe.

Soluzione

Per determinare dove la funzione $f(z)$ è olomorfa, guardiamo dove il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

è finito e indipendente dal modo in cui h va a 0. Se definiamo

$$h = \rho\, e^{i\theta}, \qquad\qquad h^* = \rho\, e^{-i\theta},$$

allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+\rho\, e^{i\theta}) - f(z)}{\rho\, e^{i\theta}}$$

Quindi $f(z)$ sarà olomorfa in tutti i punti z in cui

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

è finito e indipendente da θ (con $h = \rho\, e^{i\theta}$).

(a) $f(z) = c$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito e indipendente da θ, da cui segue che $f(z) = c$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

(b) $f(z) = z$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{z+h-z}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito e indipendente da θ, da cui segue che $f(z) = z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

(c) $f(z) = \frac{1}{z}$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{\frac{1}{z+h}-\frac{1}{z}}{h} = \frac{z-(z+h)}{(z+h)z\,h} = \frac{z-z-h}{(z+h)z\,h} = \\ &= \frac{-h}{(z+h)z\,h} = -\frac{1}{(z+h)z}.\end{aligned}$$

Il limite $\rho \to 0$ del rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = -\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{(z+h)z} = -\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{(z+\rho\,e^{i\theta})z} = -\frac{1}{z^2}$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto indipendente da θ e finito dappertutto, tranne in $z = 0$. Quindi $f(z) = 1/z$ è olomorfa in $\mathbb{C} - \{0\}$.

(d) $f(z) = z^*$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{z^*+h^*-z^*}{h} = \frac{h^*}{h} = \frac{\rho\,e^{-i\theta}}{\rho\,e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito, ma dipende sempre da θ. Quindi $f(z) = z^*$ non è olomorfa in nessun punto di $\mathbb{C}$.

(e) $f(z) = |z|^2$:

Il rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} = \frac{(z^*+h^*)(z+h)-z^*z}{h} \\ &= \frac{z^*z+h^*z+z^*h+h^*h-z^*z}{h} = \frac{h^*z+z^*h+h^*h}{h}.\end{aligned}$$

Il limite $\rho \to 0$ del rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{h^*z+z^*h+|h|^2}{h} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\,e^{-i\theta}\,z+z^*\,\rho\,e^{i\theta}+\rho^2}{\rho\,e^{i\theta}} \\ &= \lim_{\rho\to 0}\frac{e^{-i\theta}\,z+z^*\,e^{i\theta}+\rho}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}\,z+z^*\,e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}\,z+z^*\end{aligned}$$

Quindi $\lim_{\rho \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito, ma dipende sempre da θ (tranne in $z=0$). Quindi $f(z)=|z|^2$ non è olomorfa in nessun punto di $\mathbb{C}$ (neanche in $z=0$, perché l'olomorficità richiede la derivabilità in un intorno, mentre $f(z)$ è derivabile solo in $z=0$, ma non in un suo intorno).

Exercise 2.2

Studiare dove la funzione

$$f(z) = z^3$$

è olomorfa.

Soluzione

Per studiare l'olomorficità della funzione si può procedere in più modi:

- Prima di tutto si può notare che $f(z)$ non dipende da z^*, quindi ci aspettiamo che

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

  sia indipendente dal modo in cui h va a zero per qualunque z. Quindi la funzione è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

- Alternativamente possiamo studiare il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{(z+h)^3 - z^3}{h} = \frac{z^3 + 3z^2 h + 3zh^2 + h^3 - z^3}{h} \\ &= \frac{3z^2 h + 3zh^2 + h^3}{h} = 3z^2 + 3zh + h^2 \end{aligned}$$

  Il limite $\rho \to 0$ del rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\rho \to 0} (3z^2 + 3zh + h^2) = \lim_{\rho \to 0} (3z^2 + 3z\rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{2i\theta}) = 3z^2$$

  Quindi $\lim_{\rho \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto finito e indipendente da θ, da cui segue che $f(z) = z^3$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

- Infine possiamo verificare se le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte. Scriviamo $z = x + iy$ nella $f(z)$:

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y^3\right) = u(x,y) + iv(x,y).$$

  Quindi identifichiamo:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \qquad v(x,y) = 3x^2 y - y^3$$

  Calcoliamo ora le derivate di u e v rispetto ad x e y.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

  Le derivate parziali sono funzione continue in campo reale. Inoltre, valgono le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

  quindi $f(z)$ è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$.

Exercise 2.3

Studiare dove la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z-4}$$

è olomorfa.

Soluzione

Per studiare l'olomorficità della funzione si può procedere in più modi:

- Prima di tutto si può notare che $f(z)$ non dipende da z^*, quindi ci aspettiamo che

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

sia indipendente dal modo in cui h va a zero per qualunque $z \neq 4$ (dove $f(z)$ non è definita). Quindi la funzione è olomorfa su tutto $\mathbb{C} - \{4\}$.

- Possiamo studiare il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{\frac{1}{z+h-4} - \frac{1}{z-4}}{h} = \frac{(z-4)-(z+h-4)}{(z+h-4)(z-4)\,h} \\ &= \frac{-h}{(z+h-4)(z-4)\,h} = -\frac{1}{(z+h-4)(z-4)}. \end{aligned}$$

Il limite $\rho \to 0$ del rapporto incrementale in questo caso vale:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= -\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{(z+h-4)(z-4)} \\ &= -\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{(z+\rho e^{i\theta}-4)(z-4)} = -\frac{1}{(z-4)^2} \end{aligned}$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ è dappertutto indipendente da θ e finito dappertutto, tranne in $z = 4$. Quindi $f(z) = \frac{1}{z-4}$ è olomorfa in $\mathbb{C} - \{4\}$.

- Infine possiamo verificare se le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte. Scriviamo $z = x + iy$ nella $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{x+iy-4} = \frac{1}{(x-4)+iy} = \frac{(x-4)-i\,y}{(x-4)^2+y^2} = \frac{x-4}{(x-4)^2+y^2} + i\,\frac{-y}{(x-4)^2+y^2}$$

Quindi identifichiamo:

$$u(x,y) = \frac{x-4}{(x-4)^2+y^2}, \qquad v(x,y) = \frac{-y}{(x-4)^2+y^2}.$$

$f(z)$ è continua in tutto il campo complesso, tranne in $z = 4$: $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono continue e derivabili in $\mathbb{R}^2 - (4,0)$.

Calcoliamo ora le derivate di u e v rispetto ad x e y.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-(x-4)^2 + y^2}{\left[(x-4)^2 + y^2\right]^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y(x-4)}{\left[(x-4)^2 + y^2\right]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2y(x-4)}{\left[(x-4)^2 + y^2\right]^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-(x-4)^2 + y^2}{\left[(x-4)^2 + y^2\right]^2}.$$

Valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, quindi $f(z)$ è olomorfa in tutto il campo complesso, eccetto il punto $z = 4$ (cioè $(x, y) = (4, 0)$. Dove è definita, ovvero $\mathbb{C} - \{4\}$, la derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(x-4)^2 + y^2}{\left[(x-4)^2 + y^2\right]^2} + i\frac{2y(x-4)}{\left[(x-4)^2 + y^2\right]^2} \\ &= \frac{-(z^*-4)^2}{(z-4)^2(z^*-4)^2} = -\frac{1}{(z-4)^2}. \end{aligned}$$

Exercise 2.4

Usare le condizioni di Cauchy-Riemann per provare che la funzione

$$f(z) = \cos z$$

è olomorfa.

Soluzione

Per poter applicare le condizioni di Cauchy-Riemann, dobbiamo separare parte reale $u(x, y)$ e parte immaginaria $v(x, y)$ di $f(z)$:

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy).$$

Ora vediamo che

$$\begin{aligned} \cos(iy) &= \frac{e^{i(i\,y)} + e^{-i(i\,y)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y \\ \sin(iy) &= \frac{e^{i(i\,y)} - e^{-i(i\,y)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = -i\,\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i\,\sinh y \end{aligned}$$

Quindi abbiamo:

$$\cos z = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Pertanto

$$u(x, y) = \cos x \cosh y, \qquad v(x, y) = -\sin x \sinh y.$$

Calcoliamo quindi le derivate rispetto ad x e y per verificare le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \sinh y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cosh y.$$

Le condizioni di Cauchy-Riemann sono verificate e le derivate di u e v sono continue, quindi $\cos z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

Exercise 2.5

Usare le condizioni di Cauchy-Riemann per provare che la funzione

$$f(z) = \sin z,$$

è olomorfa.

Soluzione

Si ha

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Pertanto

$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \qquad v(x, y) = \cos x \sinh y.$$

Calcolando le derivate

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sinh y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y.$$

Vediamo che le condizioni di Cauchy-Riemann sono rispettate, e che le derivate di u e v sono continue, quindi $\sin z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$.

Exercise 2.6

Dimostrare che la funzione

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

è armonica e trovare la funzione olomorfa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Soluzione

Calcoliamo prima di tutto le derivate prime e seconde di $u(x, y)$ che entrano nell'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x.$$

Quindi abbiamo:

$$\Delta_2\, u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ora costruiamo, a meno di una costante, la parte immaginaria $v(x, y)$ della funzione olomorfa $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ con le condizioni di Cauchy-Riemann. La prima condizione di Cauchy-Riemann ci assicura che:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

Da qui segue che

$$v(x, y) = \int dy\, (3x^2 - 3y^2) = 3x^2 y - y^3 + C(x).$$

Visto che abbiamo integrato in dy, la costante d'integrazione C è appunto una costante rispetto alla variabile y, ma sarà in generale una funzione di x. Determiniamo ora $C(x)$ grazie alla seconda condizione di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Per usarla, calcoliamo dalla $v(x, y)$ appena ricavata:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \frac{dC}{dx}$$

Inserendo nei due membri della seconda condizione di Cauchy-Riemann quanto ricavato, abbiamo:

$$6xy + \frac{dC}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy.$$

Da qui otteniamo:

$$\frac{dC}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x) = K$$

Quindi per $v(x, y)$ otteniamo:

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + K$$

e la funzione olomorfa $f(z)$ è:

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + iK = (x + iy)^3 + iK = z^3 + iK.$$

Si può notare che la $f(z)$ dipende da x e y solo nella combinazione $z = x + iy$ e non dipende da $z^* = x - iy$, come deve essere per una funzione olomorfa.

Exercise 2.7

Dimostrare che la funzione

$$v(x,y) = e^{-y}\sin x.$$

è armonica e trovare la funzione olomorfa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Soluzione

Calcoliamo prima di tutto le derivate prime e seconde di $v(x,y)$ che entrano nell'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}\cos x, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -e^{-y}\sin x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}\sin x, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^{-y}\sin x.$$

Quindi abbiamo:

$$\Delta_2\, v(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ora costruiamo, a meno di una costante, la parte reale $u(x,y)$ della funzione olomorfa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con le condizioni di Cauchy-Riemann. La prima condizione di Cauchy-Riemann ci assicura che:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}\sin x$$

Da qui segue che

$$u(x,y) = \int dx\,(-e^{-y}\sin x) = e^{-y}\cos x + C(y).$$

Visto che abbiamo integrato in dx, la costante d'integrazione C è appunto una costante rispetto alla variabile x, ma sarà in generale una funzione di y. Determiniamo ora $C(y)$ grazie alla seconda condizione di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Per usarla, calcoliamo dalla $u(x,y)$ appena ricavata:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}\cos x + \frac{dC}{dy}$$

Inserendo nei due membri della seconda condizione di Cauchy-Riemann quanto ricavato, abbiamo:

$$-e^{-y}\cos x + \frac{dC}{dy} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(e^{-y}\cos x).$$

Da qui otteniamo:

$$\frac{dC}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x) = K$$

Quindi per $u(x,y)$ otteniamo:

$$u(x,y) = e^{-y}\cos x + K$$

e la funzione olomorfa $f(z)$ è:

$$f(z) = e^{-y}(\cos x + i\sin x) + K = e^{-y}e^{ix} + K = e^{i(x+iy)} + K = e^{iz} + K.$$

Si può notare che la $f(z)$ dipende da x e y solo nella combinazione $z = x + iy$ e non dipende da $z^* = x - iy$, come deve essere per una funzione olomorfa.

Exercise 2.8

Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x, y) = \sin x(e^{-\alpha y} + e^y)$$

può essere considerata la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$? Determinare tale $f(z)$.

Soluzione

Condizione necessaria affinché $u(x, y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa è la sua armonicità, ovvero

$$\Delta_2 \, u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

In questo caso

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x(e^{-\alpha y} + e^y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x(e^{-\alpha y} + e^y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x(-\alpha e^{-\alpha y} + e^y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x(\alpha^2 e^{-\alpha y} + e^y).$$

Quindi abbiamo:

$$0 = -\sin x(e^{-\alpha y} + e^y) + \sin x(\alpha^2 e^{-\alpha y} + e^y) = \sin x(\alpha^2 - 1)e^{-\alpha y},$$

da cui segue:

$$\alpha = \pm 1,$$

pertanto

$$u(x, y) = \sin x(e^{\mp y} + e^y).$$

Ora costruiamo, a meno di una costante, la parte immaginaria $v(x, y)$ della funzione olomorfa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con le condizioni di Cauchy-Riemann. Calcoliamo le derivate della $u(x, y)$ trovata:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x(e^{\mp y} + e^y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x(\mp e^{\mp y} + e^y),$$

La prima condizione di Cauchy-Riemann ci assicura che:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x(e^{\mp y} + e^y).$$

Da qui segue che

$$v(x, y) = \int dy \, \cos x(e^{\mp y} + e^y) = \cos x(\mp e^{\mp y} + e^y) + C(x).$$

Visto che abbiamo integrato in dy, la costante d'integrazione C è appunto una costante rispetto alla variabile y, ma sarà in generale una funzione di x. Determiniamo ora $C(x)$ grazie alla seconda condizione di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Per usarla, calcoliamo dalla $v(x, y)$ appena ricavata:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x(\mp e^{\mp y} + e^y) + \frac{dC}{dx}$$

Inserendo nei due membri della seconda condizione di Cauchy-Riemann quanto ricavato, abbiamo:

$$-\sin x(\mp e^{\mp y} + e^y) + \frac{dC}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\Big[\sin x(\mp e^{\mp y} + e^y)\Big]$$

Da qui otteniamo:

$$\frac{dC}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x) = K$$

Quindi per $v(x, y)$ otteniamo:

$$v(x, y) = \cos x(\mp e^{\mp y} + e^y) + K$$

e la funzione olomorfa $f(z)$ è:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sin x(e^{\mp y} + e^y) + i\cos x(\mp e^{\mp y} + e^y) + iK \\
&= (\sin x \mp i\cos x)e^{\mp y} + (\sin x + i\cos x)e^y + iK \\
&= \mp i(\cos x \pm i\sin x)e^{\mp y} + i(\cos x - i\sin x)e^y + iK \\
&= \mp ie^{\pm ix}e^{\mp y} + ie^{-ix}e^y + iK \\
&= \mp ie^{\pm i(x+iy)} + ie^{-i(x+iy)} + iK \\
&= \mp ie^{\pm iz} + ie^{-iz} + iK \\
&= i\Big[e^{-iz} \mp e^{\pm iz} + K\Big].
\end{aligned}$$

Si può notare che la $f(z)$ dipende da x e y solo nella combinazione $z = x + iy$ e non dipende da $z^* = x - iy$, come deve essere per una funzione olomorfa.
Per $\alpha = +1$, avremo quindi:

$$f(z) = i\left[e^{-iz} - e^{+iz} + K\right] = -i\left[e^{iz} - e^{-iz} - K\right] = 2\left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} - \frac{K}{2i}\right] = 2\,\sin z + cost.$$

Per $\alpha = -1$, avremo invece:

$$f(z) = i\left[e^{-iz} + e^{-iz} + K\right] = 2\,i\,e^{-iz} + cost.$$