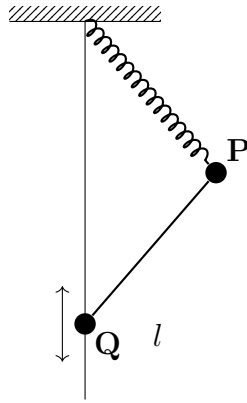


Tutorato 4

Metodi Matematici della Meccanica Classica - 7 aprile 2025

1. Un punto materiale \mathbf{P} di massa m è vincolato a muoversi nel piano verticale $\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \rangle$, dove x, y, z sono coordinate cartesiane ortonormali solidali a un riferimento inerziale. Un secondo punto materiale \mathbf{Q} , di massa M , può scivolare senza attrito lungo l'asse verticale z . I punti \mathbf{P} e \mathbf{Q} sono collegati da un'asta rigida priva di massa di lunghezza ℓ e \mathbf{P} è collegato anche ad un punto fisso tramite una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k . Si supponga che entrambi i punti materiali siano soggetti all'azione della forza peso.



- (a) Scelte opportune coordinate lagrangiane, scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- (b) Scrivere un integrale primo del moto.
- (c) Determinare le configurazioni di equilibrio e caratterizzarne la stabilità.

2. Studiare qualitativamente il moto di un punto materiale \mathbf{P} vincolato a muoversi su una circonferenza verticale di raggio R e collegato, tramite a una molla di lunghezza a riposo nulla, priva di massa e di costante elastica k , a un punto situato sull'asse verticale della circonferenza, a distanza $2R$ dal centro.

3. Si considerino coordinate Lagrangiane $q, s \in \mathbb{R}$ e la Lagrangiana

$$L(q, s) = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + \dot{s}^2) + q^2 + s^2 + \frac{1}{3}(q^2 + s^2)^3 + 2H(q\dot{s} - s\dot{q})$$

dove $m > 0$ e $B \in \mathbb{R}$

- (a) Scrivere l'energia generalizzata \mathcal{H} del sistema.
- (b) Trovare un secondo integrale primo del moto.