Tutoraggio di Fisica 3

2025 – Corso A/B – 1

A cura di: Alessandro Boschetti [`email: alessandro.boschetti@unito.it`]
Marzia Nardi [`email: nardi@to.infn.it`]

1 Si consideri un'onda e.m. che si propaga in un mezzo omogeneo (costante dielettrica ε, permeabilità magnetica μ), nella direzione del vettore d'onda $\mathbf{k}$ e siano $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ i vettori dei campi in certo un punto dello spazio ed in un certo istante. È noto, dalla teoria (conseguenza delle equazioni di Maxwell), che il vettore d'onda $\mathbf{k}$ è parallelo al prodotto vettoriale $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, ossia vale la relazione tra versori $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_E \times \mathbf{u}_B$, e che inoltre $|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{E}|}{v}$ $\quad (v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu})$.
Facendo uso di queste relazioni e
(a) supponendo noti $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{E}$, ricavare $\mathbf{B}$.
(b) supponendo noti $\mathbf{k}$ e $\mathbf{B}$, ricavare $\mathbf{E}$.

2 Si consideri un'onda e.m. piana con lunghezza d'onda $\lambda = 1$ cm e si supponga che per $t = 10$ s la fase del suo campo elettrico nel punto $\mathbf{r} = 1(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)$ cm sia $\phi = \pi/2$. Assumendo che l'onda si stia propagando parallelamente alla direzione determinata da $\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z$, determinare che fase ϕ' ha l'onda nel punto $\mathbf{r}' = (2\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)$ cm nello stesso istante t.

3 Si consideri la seguente onda piana nel vuoto:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (0, 0, E_0 \sin(k(y + ct))$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (-B_0 \sin(k(y + ct)), 0, 0)$$

con $k = 9.93 \cdot 10^6$ rad/m ed $E_0 = 450\,\mathrm{V/m}$, $B_0 > 0$.
Determinare il verso di propagazione dell'onda, la sua intensità, la sua frequenza e lunghezza d'onda, il suo stato di polarizzazione, il valore di B_0.

4 Un'onda elettromagnetica piana di pulsazione $\omega = 6.0 \cdot 10^{14}\,\mathrm{rad/s}$ si propaga nel vuoto lungo l'asse y. Essa è polarizzata linearmente con il campo $\mathbf{E}$ che forma un angolo $\theta = 45°$ con il piano yz ed ha ampiezza $E_0 = 1.4 \cdot 10^3$ V/m. Scrivere l'equazione dell'onda per il campo elettrico, il campo $\mathbf{B}$ ed il vettore di Poynting.

5 Un osservatore è situato a 8 m da una sorgente di onde e.m. che irradia in modo uniforme in tutte le direzioni. L'intensità del segnale misurato dall'osservatore è di 1.24 W/m^2. Calcolare:
(a) la potenza della sorgente;
(b) i valori massimi dei campi elettrico e magnetico misurati dall'osservatore;
(c) a che distanza dalla sorgente è situato un altro osservatore che misura un valore efficace del campo magnetico pari a 1 μT

6 Il 14 settembre 2015 gli interferometri LIGO ad Hanford (Washington) e Livingston (Louisiana) hanno misurato per la prima volta l'onda gravitazionale (GW150914) emessa nella collisione e fusione di due buchi neri, avvenuta alla distanza di 1.3 miliardi di anni luce dalla Terra. Si stima che l'energia emessa in questo evento sia equivalente a 3 masse solari ($M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg), in un intervallo di tempo di 0.15 s.
(a) Calcolare la potenza media emessa.
(b) Calcolare l'intensità media del segnale giunto sulla Terra.
(c) Sapendo che la frequenza media misurata è di 150 Hz e assumendo che le onde gravitazionali si propaghino con la velocità della luce, calcolare la lunghezza d'onda osservata.

7 Il campo elettrico in una regione di spazio (vuoto) è dato dall'espressione: $\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{u}_z E_0 \sin(kx)\cos(\omega t)$ con $E_0 = 10$ V/m, $k = 10^{-3}\pi$ rad/m. Descrivere le caratteristiche di tale campo, in particolare determinare i punti in cui l'ampiezza è massima e quelli in cui è minima. Determinare il campo $\mathbf{B}$ ad esso associato. Calcolare infine il vettore di Poynting ed il suo valor medio nel tempo.

8 Un'onda elettromagnetica piana, di lunghezza d'onda $\lambda = 3.18$ m, si propaga in un mezzo con una permettività $\epsilon_r = 2$ e permeabilità $\mu_r = 1$. In un punto dello spazio il vettore campo elettrico ha forma $\vec{E} = 10\,\cos(\omega t + \alpha)\hat{u}_z$ V/m ed il campo magnetico ha versore $\hat{u}_x$. Illustrare graficamente la situazione presentata.

(a) Determinare la frequenza ν dell'onda.
(b) Determinare l'ampiezza del campo magnetico B.
(c) Determinare k e ω.
(d) Determinare il vettore di Poynting e l'intensità del campo elettromagnetico nel medesimo punto.

Risultati

1. (a) $\mathbf{B} = \frac{1}{v|\mathbf{k}|}\mathbf{k} \times \mathbf{E}$; (b) $\mathbf{E} = \frac{v}{|\mathbf{k}|}\mathbf{B} \times \mathbf{k}$, con $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$

2. $\phi' = 2.81\,\pi$ rad.

3. direzione $-y$, $I = 269$ W/m^2, $\nu = 4.7\ 10^{14}$ Hz, $\lambda = 0.63\,\mu$m, polarizz. lineare con $\mathbf{E}$ lungo z, $B_0 = 1.5 \cdot 10^{-6}$ T

4. $\mathbf{E}(y,t) = 990\,(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z)\cos\left(2 \cdot 10^6\, y - 6 \cdot 10^{14}\, t + \phi\right)$ V/m (x, y in metri, t in secondi; ϕ è una fase costante arbitraria), $\mathbf{B}(y,t) = 3.3 \cdot 10^{-6}\,(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_z)\cos\left(2 \cdot 10^6\, y - 6 \cdot 10^{14}\, t + \phi\right)$ T, $\mathbf{S}(y,t) = 5.2 \cdot 10^3\,\mathbf{u}_y \cos^2\left(2 \cdot 10^6\, y - 6 \cdot 10^{14}\, t + \phi\right)$ W/m^2

5. (a) $P = 997$ W; (b) $E_0 = 30.6$ V/m, $B_0 = 1.02 \cdot 10^{-7}$ T; (c) $d = 0.58$ m

6. (a) $\overline{W} = 3.6 \cdot 10^{48}$ W; (b) $\overline{I} = 2 \cdot 10^{-3}$ W/m^2; (c) 2000 km

7. Onda stazionaria lungo l'asse x, lunghezza d'onda $\lambda = 2$ km, frequenza $\nu = 1.5\ 10^5$ Hz, nodi: $x_n = n$ km ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), ventri: $x_n = 0.5(2n+1)$ km;
$\mathbf{B}(x,t) = \mathbf{u}_y B_0 \cos(kx)\sin(\omega t)$, con $B_0 = 3.3\ 10^{-8}$ T, il campo B ha nodi dove E ha ventri e viceversa;
$\mathbf{S}(x,t) = -\mathbf{u}_x S_0 \sin(2kx)\sin(2\omega t)$, $S_0 = \frac{E_0 B_0}{4\mu_0} = 66.4$ mW/m^2, S cambia verso in modo oscillante: il valor medio nel tempo è 0

8. a) $\nu = 6.67 \cdot 10^7$ Hz; b) $B_0 = 4.72 \cdot 10^{-8}$ T; c) $k = 1.98$ rad/m, $\omega = 4.19 \cdot 10^8$ rad/s; d) $\vec{S} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0 \mu_r}\cos^2(\omega t + \alpha)\hat{u}_y$, $\overline{I} = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0 \mu_r} = 0.18 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$