

Università degli Studi di Torino

Appunti di Meccanica Analitica

per il corso di Meccanica Analitica e Statistica

Corso di Laurea in Fisica

A.A. 2024/25

W.M. Alberico, M.B. Barbaro, M. Nardi

Università degli Studi di Torino - Dipartimento di Fisica

e

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Torino

Indice

1	Introduzione	5
2	Richiami di Meccanica	7
2.1	Dinamica di una particella	7
2.1.1	Leggi di conservazione	8
2.2	Dinamica di un sistema di particelle	9
2.2.1	Leggi di conservazione	10
2.2.2	Sistema di riferimento del centro di massa	11
3	Formalismo Lagrangiano	13
3.1	Vincoli e coordinate generalizzate	13
3.2	Principio di d'Alembert ed equazioni di Lagrange	15
3.2.1	Caso particolare: sistema in equilibrio	15
3.2.2	Caso generale: principio di d'Alembert	16
3.2.3	Equazioni di Eulero-Lagrange	16
3.3	Potenziali dipendenti dalla velocità: l'elettromagnetismo	19
3.4	Esempi	21
3.4.1	Moto di una particella non vincolata descritto in coordinate cartesiane	21
3.4.2	Moto di una particella vincolata su un piano fisso: coordinate polari	21
3.4.3	Moto di una particella non vincolata nello spazio	22
3.4.4	Macchina di Atwood	23
3.4.5	Corpo vincolato a scorrere su un filo in rotazione uniforme	24
3.4.6	Corpo su un piano inclinato mobile	24
3.4.7	Spostamenti virtuali e spostamenti reali	25
3.4.8	Pendoli	26
3.4.9	Disco rotolante	27
3.5	Principio di Hamilton	29
4	Teoremi di conservazione e proprietà di simmetria	31
4.1	Momenti generalizzati	31
4.2	Coordinate cicliche	32
4.3	Invarianza per traslazioni: omogeneità dello spazio e conservazione della quantità di moto	33
4.4	Invarianza per rotazioni: isotropia dello spazio e conservazione del momento angolare	34
4.5	Teorema di Emmy Noether	36
4.6	Uniformità del tempo e conservazione dell'energia. Funzione di Hamilton.	36
4.7	Esempi	38
5	Piccole oscillazioni	40
5.1	Equilibrio	40
5.1.1	Classificazione delle configurazioni di equilibrio di un sistema	41
5.1.2	Equilibrio di un sistema a due gradi di libertà	42
5.2	Equazioni del moto nell'intorno di configurazioni di equilibrio stabile	43

5.3	Frequenze normali e modi normali di vibrazione	47
5.3.1	Esempio 1: il pendolo doppio	49
5.3.2	Esempio 2: vibrazioni libere di una molecola lineare triatomica	51
6	Il problema a due corpi: forze centrali	54
6.1	Il problema dei due corpi: riduzione a un problema equivalente con un solo corpo . . .	54
6.1.1	Esempio di moto unidimensionale	56
6.1.2	Esempio di moto bidimensionale	57
6.2	Integrali primi ed equazioni del moto	59
6.2.1	Equazione per le orbite	61
6.2.2	Classificazione delle orbite	61
6.2.3	Il problema di Keplero: le orbite	62
6.3	Teorema del viriale	64
6.4	Complementi ed applicazioni	66
6.4.1	Traiettorie circolari o quasi-circolari	66
6.4.2	Condizione per le orbite chiuse	67
6.4.3	Calcolo del periodo	67
6.4.4	Parametri orbitali del moto dei pianeti	68
6.4.5	Applicazione allo studio dei moti unidimensionali	69
6.4.6	Applicazione: il pendolo sferico	71
7	Formalismo Hamiltoniano	72
7.1	Trasformazioni di Legendre ed equazioni del moto di Hamilton	72
7.1.1	Esempio: Moto di una particella soggetta a forze centrali	75
7.1.2	Esempio: Particella in un campo elettromagnetico	76
7.2	Costanti del moto e coordinate cicliche	76
7.3	Derivazione delle equazioni di Hamilton da un principio variazionale	77
7.4	Azione in funzione delle coordinate e del tempo	78
8	Trasformazioni canoniche e Parentesi di Poisson	80
8.1	Trasformazioni Canoniche	80
8.1.1	Osservazioni	83
8.2	Esempi di trasformazioni canoniche	84
8.2.1	Trasformazioni banali	84
8.2.2	Trasformazioni puntuali	85
8.2.3	Oscillatore armonico	86
8.2.4	Oscillatore armonico smorzato	88
8.2.5	Esempio di un sistema con due gradi di libertà	89
8.2.6	Problema inverso: trovare la funzione generatrice	89
8.3	Parentesi di Poisson	91
8.3.1	Parentesi di Poisson canoniche	92
8.3.2	Esempi di calcolo di parentesi di Poisson: Momento angolare	92
8.4	Formulazione hamiltoniana in termini delle parentesi di Poisson	93
8.4.1	Costanti del moto. Teorema di Poisson	93
8.4.2	Equazioni del moto canoniche	94
8.4.3	Esempi di calcolo di parentesi di Poisson: costanti del moto	95
8.5	Invarianza delle parentesi di Poisson per trasformazioni canoniche	95
8.5.1	Verifica della canonicità di una trasformazione	98
8.5.2	Esempio di trasformazione non canonica	101
8.6	Trasformazioni canoniche infinitesime	102
8.7	Invarianti integrali di Poincaré	105
8.8	Teorema di Liouville	106

9	La teoria di Hamilton-Jacobi	108
9.1	Equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione principale di Hamilton	108
9.1.1	Azione come funzione delle coordinate generalizzate e del tempo	110
9.2	Equazione di Hamilton-Jacobi nel caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo: separazione della variabile tb e funzione caratteristica di Hamilton	111
9.3	Esempi	112
9.4	Separazione delle variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi	115
9.4.1	Esempi con separazione di variabili	116
9.5	Variabili d'azione	117
9.5.1	Caso unidimensionale	117
9.5.2	Caso multidimensionale con variabili separabili	118

Capitolo 1

Introduzione

Queste dispense si riferiscono alla prima parte del corso di Meccanica Analitica e Statistica tenuto per il Corso di Laurea Triennale in Fisica all'Università di Torino. Il corso, di 48 ore, è diviso in due parti, Meccanica Analitica e Meccanica Statistica.

Lo scopo della prima parte di questo corso (Meccanica Analitica) è la presentazione di diverse formulazioni della Meccanica e la loro applicazione a vari problemi fisici.

Nel corso ci occuperemo principalmente di meccanica "classica", ossia non relativistica e non quantistica. La relatività e la meccanica quantistica verranno trattati in corsi successivi.

La meccanica classica si occupa dello studio del moto e delle forze che causano il moto. Tuttavia la sua importanza va ben oltre lo studio del moto dei corpi macroscopici: essa costituisce il fondamento della fisica moderna in quanto fornisce gli strumenti necessari per indagare e capire molti diversi campi della fisica, dalla meccanica strettamente detta all'elettromagnetismo e alla meccanica quantistica. I suoi concetti basilari, come l'energia, l'impulso, il momento angolare e, soprattutto, le leggi di conservazione associate a queste quantità, sono di fondamentale importanza per tutti i rami della fisica. Le funzioni Lagrangiana e Hamiltoniana, che verranno introdotte in questo corso, sono il punto di partenza di tutte le teorie fisiche moderne.

La struttura della prima parte del corso è la seguente:

- Inizieremo rivedendo i principi di base della **meccanica newtoniana**: le leggi del moto di Newton e le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso.
- Poi ci concentreremo sullo studio di **sistemi con vincoli**, per esempio sistemi di una o più particelle che si muovono in un piano o su una determinata superficie.
- Introduciamo quindi i principi della **meccanica lagrangiana e hamiltoniana**, due formulazioni alternative alla meccanica newtoniana che forniscono potenti strumenti per analizzare la dinamica dei sistemi meccanici.
- Presenteremo infine la formulazione alternativa di **Hamilton-Jacobi**.

La meccanica classica (MC), fondata da Galileo Galilei e Isaac Newton, è adatta a descrivere la dinamica di corpi macroscopici che si muovono a velocità molto inferiori alla velocità della luce $c \sim 300000 \text{ Km/s}$.

L'essenza della meccanica newtoniana, studiata nei corsi di base di Fisica, è contenuta nelle tre **leggi di Newton**, che descrivono come gli oggetti si muovono in risposta alle forze che agiscono su di essi:

1. La prima legge di Newton, nota anche come principio d'inerzia, afferma che un oggetto fermo rimarrà fermo e un oggetto in movimento continuerà a muoversi in linea retta a velocità costante, a meno che su di esso non agisca una forza esterna.
2. La seconda legge afferma che l'accelerazione a di un oggetto è direttamente proporzionale alla forza totale F che agisce sull'oggetto e inversamente proporzionale alla sua massa m : $\vec{F} = m\vec{a}$.
3. La terza legge, nota anche come principio di azione e reazione, afferma che per ogni azione esiste una reazione uguale e opposta. Ciò significa che se un oggetto A esercita una forza sull'oggetto B, allora l'oggetto B eserciterà una forza uguale e opposta sull'oggetto A.

Oltre alle leggi di Newton, la meccanica newtoniana include i **principi di conservazione** di alcune osservabili fisiche: l'energia, l'impulso e il momento angolare, che, in determinate condizioni, non variano nel tempo. Questi principi possono essere utilizzati per analizzare il moto dei sistemi meccanici e prevedere il loro comportamento.

La **meccanica lagrangiana** è una formulazione alternativa della meccanica classica sviluppata da Joseph-Louis Lagrange nel 18° secolo. Si basa sul **principio di minima azione**, secondo il quale il percorso di una particella tra due punti è quello che richiede la minima quantità di “azione”, o “sforzo”, per percorrerlo.

Nella meccanica lagrangiana il moto di un sistema viene descritto da una **funzione scalare** chiamata **Lagrangiana**, che dipende dalle coordinate e dalle velocità dei componenti del sistema (o, come vedremo, da generalizzazioni di queste variabili). L'approccio lagrangiano è particolarmente utile per analizzare i sistemi con **vincoli**, come ad esempio particelle che si muovono in un piano o su una superficie.

La **meccanica Hamiltoniana** è un'ulteriore formulazione alternativa della meccanica classica, sviluppata da William Rowan Hamilton nel 19° secolo. Si basa sulla **Hamiltoniana**, anch'essa una **funzione scalare**, legata all'energia totale di un sistema. La Hamiltoniana è funzione delle variabili di posizione e quantità di moto dei componenti del sistema (o, anche in questo caso, loro generalizzazioni). È inoltre, fatto molto importante, la base per la quantizzazione dei sistemi classici e pertanto fondamentale per la formulazione della meccanica quantistica.

La meccanica lagrangiana e quella hamiltoniana forniscono una prospettiva diversa per analizzare i sistemi meccanici, che può essere utile per risolvere problemi che non possono essere risolti facilmente con la meccanica newtoniana.

Ad esse si aggiunge la **teoria di Hamilton-Jacobi**, che ha, come vedremo, diversi vantaggi rispetto ai precedenti formalismi lagrangiano e hamiltoniano in termini di generalità e una analogia diretta con l'equazione di Schrödinger, base della meccanica quantistica.

Per concludere questa breve introduzione, osserviamo che nel secolo scorso la meccanica classica è stata superata dalla meccanica quantistica per quanto riguarda la descrizione del mondo microscopico (governato dalla costante di Planck $h \sim 6.6 \times 10^{-34}$ J-s), e dalla teoria della relatività per la descrizione di fenomeni che coinvolgono velocità prossime a quella della luce c . La meccanica classica può considerarsi il limite delle teorie precedenti per $h \rightarrow 0$ e $v \ll c$. Tuttavia la meccanica hamiltoniana e quella lagrangiana, nella loro versione “classica” presentata in questo corso, costituiscono il punto di partenza per la Meccanica Quantistica, la Meccanica Statistica e la Teoria dei Campi. Perciò la conoscenza della MC nelle sue varie formulazioni è fondamentale per la comprensione di tutta la fisica moderna.

Capitolo 2

Richiami di Meccanica

2.1 Dinamica di una particella

Legge fondamentale della dinamica (o seconda legge di Newton): la quantità di moto ^[*] \vec{p} di una particella soggetta ad una forza (totale) \vec{F} varia nel tempo secondo l'equazione: ^[†]

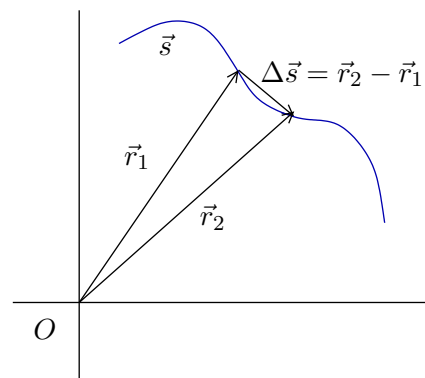
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.1)$$

La velocità istantanea della particella è

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ed è, in ogni punto, tangente alla traiettoria percorsa dalla particella, identificata dalla variabile \vec{s} .

Ricordiamo inoltre che la quantità di moto (classica) è definita come $\vec{p} = m\vec{v}$, per cui la relazione (2.1) si può riscrivere, introducendo l'accelerazione istantanea $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, nel modo seguente:



$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \quad (2.2)$$

Nella relazione precedente è sottinteso che la massa m è costante (altrimenti dovrebbe essere soggetta anch'essa a derivazione): questa ipotesi sarà sistematicamente adottata anche nel seguito, salvo diversa indicazione.

La (2.2) è un'equazione differenziale del second'ordine nell'incognita $\vec{r}(t)$ (assumendo che \vec{F} non contenga derivate di ordine superiore).

Segnaliamo inoltre che la (2.2) è valida solo per velocità piccole rispetto alla velocità della luce nel vuoto c , cioè per $|\vec{v}| \ll c$ ^[‡].

Momento della quantità di moto o momento angolare (rispetto a un punto O):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.3)$$

Momento della forza applicata o torsione (rispetto a un punto O):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.4)$$

^[*]o "impulso", come viene a volte impropriamente chiamato il vettore \vec{p}

^[†]Nella (2.1) e nel seguito, i vettori sono riferiti a un dato sistema di riferimento, individuato da un'origine O .

^[‡]Ricordiamo che $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s = 300 000 km/s.

Relazione fra \vec{L} e \vec{M}

Calcolando la derivata temporale di \vec{L} si ottiene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt};$$

il primo termine dell'ultimo membro è nullo essendo il prodotto vettoriale di due vettori paralleli: $\vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$, quindi tra \vec{M} ed \vec{L} intercorre una relazione analoga alla (2.1):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (2.5)$$

Si noti che sia \vec{M} sia \vec{L} dipendono dal punto O rispetto al quale sono calcolati.

Lavoro di una forza, per l'azione della quale un corpo si sposta dal punto 1 al punto 2:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(v^2)}{dt} dt = \frac{m}{2} \int_{v_1}^{v_2} d(v^2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (2.6)$$

Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.7)$$

Anche questa definizione è valida solo per piccole velocità: $|\vec{v}| \ll c$ (limite non relativistico).

Teorema delle forze vive:

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (2.8)$$

2.1.1 Leggi di conservazione

Alcune grandezze fisiche si conservano nel tempo sotto determinate condizioni. In particolare:

Conservazione della quantità di moto: se la forza totale applicata è nulla (ciò vale, in particolare, per un sistema libero) la quantità di moto si conserva nel tempo:

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{costante}. \quad (2.9)$$

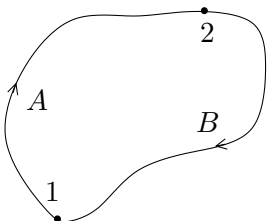
Conservazione del momento angolare: se il momento della forza applicata è nullo, il momento angolare si conserva nel tempo:

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{costante}. \quad (2.10)$$

\vec{M} è nullo sia nel caso, ovvio, in cui $\vec{F} = 0$, sia nel caso in cui la forza applicata è parallela al raggio vettore: $\vec{F} \parallel \vec{r}$ (forze centrali).

Conservazione dell'energia totale

Ricordiamo innanzitutto la definizione di **forza conservativa**. Quando il lavoro di una forza lungo una qualsiasi traiettoria chiusa è nullo la forza si dice *conservativa*:



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{1(A)}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{2(B)}^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.11)$$

ne segue

$$W_{12} = \int_{1(A)}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{1(B)}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = V(1) - V(2) \quad (2.12)$$

Il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} per spostare il corpo da 1 a 2 è indipendente dal cammino seguito e $\vec{F} \cdot d\vec{s} = -dV$ è il *differenziale esatto* di una funzione del punto, $V(\vec{r})$, detta **energia potenziale** o, più semplicemente, **potenziale**.

In generale una forza conservativa è esprimibile come gradiente della funzione scalare $-V(\vec{r})$:

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) . \quad (2.13)$$

Notiamo che il rotore di una forza conservativa è nullo: $\vec{\nabla} \times \vec{F}_c = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V) = 0$.

Considerando il caso di una forza conservativa, dal confronto tra l'equazione (2.8) e la (2.12) si trova

$$W_{12} = T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \quad \implies \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (2.14)$$

quindi la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, ovvero l'**energia totale**, è una quantità conservata:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(\mathbf{r}) = \text{costante}. \quad (2.15)$$

Si noti che in presenza di attrito un sistema non può essere conservativo: infatti in questo caso il prodotto scalare $\vec{F}_a \cdot d\vec{s}$ è negativo su tutto il cammino chiuso (la forza di attrito si oppone allo spostamento) e quindi l'integrale non può essere nullo. Le equazioni (2.11) e, di conseguenza, (2.15) non sono valide se ci sono forze d'attrito (forze dissipative).

2.2 Dinamica di un sistema di particelle

Consideriamo un sistema formato da N particelle^[§]. Distinguiamo tra forze esterne, agenti dall'esterno sulle singole particelle, $\vec{F}_i^{(e)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), e forze interne, dovute all'interazione reciproca tra coppie di particelle, \vec{F}_{ij} ($i \neq j = 1, 2, \dots, N$).

La forza totale che agisce sulla particella i -esima è allora $\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \vec{F}_{ji}$ e la conseguente legge del moto diventa

$$\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \vec{F}_{ji} = \dot{\vec{p}}_i . \quad (2.16)$$

Per le forze interne vale inoltre la terza legge di Newton (le forze che due particelle esercitano l'una sull'altra sono uguali e opposte) :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} . \quad (2.17)$$

Sommando le (2.16) su tutte le particelle:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (j \neq i)}}^N \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)} , \quad (2.18)$$

dove $\vec{F}^{(e)}$ è la risultante delle forze esterne (le forze interne si elidono a coppie per la (2.17)).

Definendo la **quantità di moto totale**, o impulso totale, del sistema:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (2.19)$$

^[§]Le considerazioni di questa sezione si possono estendere anche ai corpi estesi: le sommatorie vanno sostituite da integrali e le masse m_i da $dm = \rho dV$.

ne segue

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} . \quad (2.20)$$

Definiamo anche il **centro di massa** del sistema, situato nel punto \vec{R} :

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (2.21)$$

essendo $M = \sum_i m_i$ la massa totale del sistema di particelle. Assumendo che le masse m_i siano costanti nel tempo, dalla equazione (2.19) segue allora

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = M \frac{d\vec{R}}{dt} , \quad (2.22)$$

e dalla (2.20)

$$\vec{F}^{(e)} = M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} . \quad (2.23)$$

Queste relazioni implicano che il centro di massa (c.m.) del sistema si muove come un punto di massa M concentrata nel c.m. stesso; inoltre le forze interne non hanno alcun effetto sul moto del c.m.

Infine definiamo anche il **momento della quantità di moto totale** (o momento angolare totale) del sistema:

$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i . \quad (2.24)$$

2.2.1 Leggi di conservazione

Se la risultante delle forze esterne è zero (questo vale, in particolare, per un sistema libero), la quantità di moto totale è costante:

$$\vec{F}^{(e)} = 0 \quad \implies \quad \dot{\vec{P}} = 0 \quad \implies \quad \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{costante} .$$

Inoltre dalla prima delle (2.23) si ha:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{costante} ,$$

che equivale a dire che il centro di massa si muove con velocità costante, cioè di moto rettilineo uniforme (come caso particolare, può essere fermo).

Calcoliamo la derivata temporale del momento angolare totale:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i^N \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \vec{F}_{ji} \right) ,$$

e assumiamo le forze interne siano dirette parallelamente al vettore \vec{r}_{ij} congiungente le due particelle interagenti ^[¶]:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \parallel \vec{r}_{ij} . \quad (2.25)$$

^[¶]Questa ipotesi, nota anche come legge "forte" di azione e reazione, non è valida per la forza elettromagnetica; le considerazioni del resto di questo paragrafo non sono applicabili a tale forza, che dovrà quindi essere esaminata separatamente.

Ne segue

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ (j \neq i)}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (j \neq i)}}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (j \neq i)}}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (j \neq i)}}^N \vec{r}_{ji} \times \vec{F}_{ji} = 0$$

poiché i vettori \vec{r}_{ji} e \vec{F}_{ji} sono paralleli.

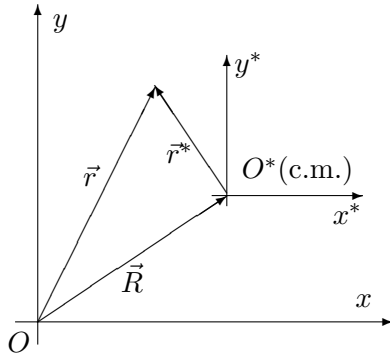
Quindi il momento totale delle forze applicate coincide con il momento delle sole forze esterne:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}. \quad (2.26)$$

Il momento angolare totale si conserva se il momento delle forze esterne è nullo.

2.2.2 Sistema di riferimento del centro di massa

In molte situazioni il moto del centro di massa del sistema in esame non riveste particolare interesse e si preferisce studiare la dinamica (interna) riferita al c.m., scelto come origine del sistema di riferimento (SR). Ovviamente questo sarà un sistema inerziale se sul sistema non agiscono forze esterne (oppure se quelle agenti hanno risultante nulla).



Indicheremo con un asterisco le quantità riferite al SR del c.m.

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_i^* + \vec{R} \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_i^* + \vec{V} \end{aligned} \quad \text{con} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (\text{velocità del c.m.}) \quad (2.27)$$

Relativamente al c.m. le velocità sono:

$$\vec{v}_i^* = \frac{d\vec{r}_i^*}{dt} = \vec{v}_i - \vec{V} \quad (2.28)$$

Riscriviamo ora il momento angolare totale (si assume $m_i^* = m_i$, cioè le masse sono invarianti):

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i^* + \vec{R}) \times (\vec{v}_i^* + \vec{V}) = \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^* + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* \times \vec{V} + \sum_{i=1}^N \vec{R} \times m_i \vec{v}_i^* + \sum_{i=1}^N m_i \vec{R} \times \vec{V}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nel secondo termine compare l'espressione del centro di massa calcolata nel SR del c.m. stesso: $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* = M \vec{R}^* = 0$, e analogamente, nel terzo termine, si ha l'espressione della quantità di moto totale misurata nel c.m. $\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^* = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^* = \vec{P}^*$, che è nulla per definizione, come segue da

$$\vec{P}^* = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^* - \sum_{i=1}^N m_i \vec{R} \right] = \frac{d}{dt} (M \vec{R} - M \vec{R}) = 0.$$

Pertanto l'equazione (2.29) si riduce a

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^* + \sum_{i=1}^N m_i \vec{R} \times \vec{V} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i^* + M \vec{R} \times \vec{V} = \vec{L}^* + \vec{R} \times \vec{P} \quad (2.30)$$

e concludiamo che il momento angolare di un sistema rispetto all'origine O di un SR qualunque è pari al momento angolare del sistema rispetto al c.m. più quello di un punto di massa uguale alla massa totale M concentrata nel c.m. (teorema di König per il momento angolare).

L'energia cinetica totale è:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i^* + \vec{V}) \cdot (\vec{v}_i^* + \vec{V}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{*2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}^2 + \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i^*) \cdot \vec{V} ,$$

ma l'ultimo termine è nullo poiché $\sum (m_i \vec{v}_i^*) = \vec{P}^* = 0$, quindi l'energia cinetica totale risulta

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{*2} = \frac{1}{2} M V^2 + T^* \quad (2.31)$$

e corrisponde alla somma dell'energia cinetica della massa totale M come se fosse concentrata nel c.m. più l'energia cinetica riferita al c.m. stesso (teorema di König per l'energia cinetica).

Capitolo 3

Formalismo Lagrangiano

3.1 Vincoli e coordinate generalizzate

Non sempre la soluzione di un problema di meccanica di un sistema di N particelle si riduce a quella di N equazioni differenziali del tipo

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} . \quad (3.1)$$

Talvolta esistono vincoli che limitano la possibilità di movimento di parti del sistema o del sistema globale (es. corpo rigido, gas in un contenitore, corpo su una superficie rigida, ecc.).

Classificazione dei vincoli

Un vincolo si dice **olonomo** se può essere descritto da una o più funzioni delle coordinate ed eventualmente del tempo:

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0 . \quad (3.2)$$

Un esempio comune è rappresentato da un corpo rigido, costituito da tante particelle vincolate ad avere distanza costante le une dalle altre:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N .$$

Un altro esempio ovvio di vincolo olonomo è quello di una particella vincolata a muoversi lungo una curva o su una superficie.

Vincoli non esprimibili nella forma (3.2) si dicono **anolonomi**. Ad esempio le pareti di un recipiente che contiene gas costituiscono un vincolo anolonomo. Pure anolonomo è la condizione che una particella si muova solo all'esterno di una sfera di raggio a ($r \geq a$). Le forme più comuni di vincoli anolonomi si esprimono tramite disuguaglianze o tramite relazioni che coinvolgono le velocità.

Vincoli indipendenti dal tempo si dicono **scleronomi**, quelli che invece ne dipendono esplicitamente sono detti **reonomi**.

Un esempio di vincolo scleronomo è quello di un pendolo con il punto di sospensione fisso; se invece il punto di sospensione è mobile si ha un vincolo reonomo. Un altro esempio di vincolo reonomo è quello di un punto che può muoversi solo lungo una circonferenza che ruota attorno ad un suo diametro.

L'esistenza di uno o più vincoli fa sí che non tutte le coordinate \vec{r}_i siano indipendenti e quindi neppure le equazioni del moto che le determinano. Inoltre le *forze vincolari* che producono i vincoli stessi (per esempio la reazione di un piano sul quale un corpo è vincolato a muoversi, o la tensione del filo di un pendolo) non sono note a priori: esse fanno parte delle incognite del problema e si possono ricavare solo dalla soluzione del problema in esame. In effetti, la presenza di vincoli deriva dal fatto che sul sistema agiscono forze che, in generale, non possono essere direttamente specificate ma che sono note solo attraverso il loro effetto sul moto del sistema.

Un sistema con N particelle che si muovono nello spazio tridimensionale (x, y, z) possiede, in assenza di vincoli, $3N$ coordinate indipendenti, ossia $3N$ **gradi di libertà**.

Se invece nel sistema esistono vincoli olonomi espressi da k equazioni *indipendenti* del tipo (3.2), si potrebbero utilizzare queste equazioni per eliminare k delle $3N$ coordinate, ottenendo così solo $3N - k$ coordinate indipendenti: si dice allora che il sistema ha $3N - k$ gradi di libertà. Nel seguito useremo la notazione $n = 3N - k$.

Questa riduzione del numero di gradi di libertà può anche essere effettuata introducendo n nuove variabili *indipendenti* q_1, q_2, \dots, q_n , che chiameremo **coordinate generalizzate**. Le vecchie coordinate possono essere espresse in termini delle nuove tramite le equazioni

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \\ \vdots \\ \vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \end{cases} \quad (n = 3N - k), \quad (3.3)$$

che contengono implicitamente i vincoli. Tali equazioni di trasformazione si possono anche considerare come rappresentazioni parametriche delle variabili \vec{r}_i .

Assumeremo che si possa sempre effettuare la trasformazione inversa dalle coordinate q_α alle \vec{r}_i , ossia che le $3N$ equazioni (3.3), insieme alle k condizioni di vincolo, possano essere invertite per fornire le $q_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t)$.

Esempi

- Se un punto può solo muoversi su un piano orizzontale, diciamo (x, y) , esso non ha 3 gradi di libertà (x, y, z) ma solo due, poichè la coordinata z è fissa: $z = z_0$. Le coordinate generalizzate in questo caso sono $3-1=2$, x e y .
- Se inoltre esso può muoversi solo lungo una circonferenza di raggio a ($x^2 + y^2 - a^2 = 0$) i gradi di libertà si riducono a uno, esprimibile con l'angolo θ (che è la coordinata generalizzata):

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta. \end{cases}$$

- Analogamente, se un punto materiale è fissato all'estremità di un'asta rigida di lunghezza l , la cui altra estremità è fissata nell'origine, la condizione $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$ riduce da 3 a 2 i suoi gradi di libertà. Come coordinate generalizzate potremo scegliere, in questo caso, gli angoli θ e φ :

$$\begin{cases} x = l \cos \theta \sin \varphi \\ y = l \sin \theta \sin \varphi \\ z = l \cos \varphi. \end{cases}$$

Le coordinate generalizzate saranno, in generale, diverse da quelle cartesiane, e talvolta risultano più utili anche in assenza di vincoli (ad esempio le coordinate polari sono più convenienti quando le forze sono di tipo centrale). Le coordinate generalizzate non hanno necessariamente le dimensioni di una lunghezza, come nel caso degli esempi precedenti in cui le coordinate generalizzate sono degli angoli (grandezze adimensionali).

Oltre alle coordinate generalizzate introduciamo le **velocità generalizzate**:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt} \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (n = 3N - k). \quad (3.4)$$

Dalle equazioni (3.3) si ottiene

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (3.5)$$

da cui segue un'utile relazione (si presti attenzione alle derivate parziali!)

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ \alpha = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (n = 3N - k) \quad (3.6)$$

Osservazione: le equazioni del moto si possono risolvere compiutamente solo conoscendo le *condizioni iniziali* $\vec{r}_i(t_0)$, $\vec{v}_i(t_0) = \dot{\vec{r}}_i(t_0)$. Tenendo conto dei vincoli e delle (3.3), se conosciamo le $q_\alpha(t_0)$ e $\dot{q}_\alpha(t_0)$, ovvero un insieme di $2n$ ($n = 3N - k$) costanti, allora lo stato iniziale del sistema sarà completamente identificato.

Se ci sono dei vincoli anolonomi, non è possibile utilizzare le condizioni dei vincoli per eliminare le coordinate dipendenti. La trattazione del problema risulta quindi più complicata e dovrà essere esaminata caso per caso. Nel seguito ci limiteremo a considerare solo vincoli olonomi.

Per eliminare la seconda difficoltà introdotta dai vincoli, ovvero l'ignoranza delle forze vincolari, vorremmo poter formulare il problema in modo tale che queste ultime spariscano. Nel prossimo paragrafo vedremo come ottenere questo risultato.

3.2 Principio di d'Alembert ed equazioni di Lagrange

Si chiama **spostamento virtuale** (infinitesimo) - o "variazione infinitesima" - di un sistema un cambiamento *istantaneo* della configurazione del sistema conseguente ad un'arbitraria variazione delle coordinate $\delta \vec{r}_i$, *compatibile con le forze ed i vincoli imposti al sistema ad un dato istante t* . Tale spostamento è chiamato virtuale per distinguerlo da uno spostamento reale $d\vec{r}_i$ che avviene in un intervallo di tempo dt durante il quale forze e vincoli possono cambiare. Gli esempi concreti che studieremo alla fine del capitolo aiuteranno a capire meglio questo concetto (paragrafo 3.4.7).

3.2.1 Caso particolare: sistema in equilibrio

Supponiamo in un primo tempo che il sistema sia *in equilibrio*, ossia che la forza totale agente su ogni sua particella sia nulla: $\vec{F}_i = 0$; quindi è uguale a zero anche il prodotto scalare $\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$, che è il **lavoro virtuale** compiuto dalla forza \vec{F}_i nello spostamento virtuale $\delta \vec{r}_i$. La somma su tutte le particelle di questi prodotti, tutti nulli, sarà ovviamente uguale a zero:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.7)$$

La forza \vec{F}_i si può scomporre nella somma delle forze applicate $\vec{F}_i^{(a)}$ e delle forze vincolari \vec{f}_i , sicché

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.8)$$

Limitiamoci ora a considerare sistemi per i quali il lavoro (virtuale) delle forze vincolari è nullo:

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (3.9)$$

Questa condizione è verificata in molti casi di interesse fisico, in particolare vale per i corpi rigidi (in cui la distanza tra due punti è costante), o per una particella vincolata a muoversi su di una superficie liscia (in cui la reazione vincolare è sempre perpendicolare alla superficie, mentre lo spostamento virtuale è tangente ad essa). Avremo quindi

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.10)$$

ossia il lavoro virtuale delle forze applicate si annulla, relazione nota come **principio dei lavori virtuali**.

Si noti che nell'equazione (3.10) i coefficienti dei $\delta \vec{r}_i$ non sono tutti nulli, cioè in generale $\vec{F}_i^{(a)} \neq 0$ (a differenza delle \vec{F}_i nella (3.7)), perché gli spostamenti virtuali $\delta \vec{r}_i$ non sono tutti linearmente indipendenti ma sono legati dalle condizioni dei vincoli. Per poter annullare i coefficienti della sommatoria bisognerebbe far comparire gli spostamenti virtuali delle coordinate generalizzate δq_α , che sono linearmente indipendenti per costruzione, ma prima di questo passo è meglio procedere ad un'altra generalizzazione.

L'equazione (3.10) soddisfa la richiesta di non contenere le forze vincolari, ma si riferisce ad un problema di *statica*, in quanto discende da una condizione di equilibrio del sistema. Vogliamo ora ricavare una relazione analoga che sia applicabile al moto più generale di un sistema, cioè anche al caso in cui le forze \vec{F}_i non sono tutte nulle.

3.2.2 Caso generale: principio di d'Alembert

Seguendo un procedimento dovuto a d'Alembert, scriviamo le equazioni del moto, $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$, nella forma

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad (3.11)$$

e ripetiamo i passaggi precedenti applicandoli alle “forze” $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i$:

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$$

Separando anche in questo caso le forze applicate da quelle vincolari

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (3.12)$$

e nell'ipotesi che le forze vincolari non compiano lavoro virtuale otteniamo

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (3.13)$$

noto come **principio di d'Alembert**. Abbiamo così raggiunto lo scopo di fare scomparire le forze vincolari: d'ora in poi possiamo sopprimere l'apice ^(a) delle forze applicate senza ambiguità, dato che considereremo solo forze di questo tipo.

3.2.3 Equazioni di Eulero-Lagrange

Per sfruttare questo principio al fine di scrivere le equazioni del moto (senza però far rientrare in gioco le forze vincolari) occorre riscriverlo per coordinate effettivamente indipendenti, ossia in termini delle coordinate generalizzate q_α . Dalle equazioni di trasformazione (3.3) segue che gli spostamenti virtuali $\delta \vec{r}_i$ sono dati da

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \quad (3.14)$$

Si noti che nelle variazioni $\delta \vec{r}_i$ non compare alcuna variazione δt del tempo perché, per definizione, uno spostamento virtuale comporta solo spostamenti delle coordinate ad un tempo t fissato.

Anche le velocità \vec{v}_i , ovviamente, si devono esprimere nelle nuove coordinate:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (3.15)$$

L'equazione (3.13) diventa

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{v}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0 . \quad (3.16)$$

Consideriamo separatamente i due termini:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha \delta q_\alpha, \quad (3.17)$$

avendo introdotto le componenti Q_α delle **forze generalizzate** applicate:

$$Q_\alpha \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} . \quad (3.18)$$

Si noti che le Q_α non hanno necessariamente le dimensioni di una forza, ma il prodotto $Q_\alpha \delta q_\alpha$ deve avere le dimensioni di un lavoro (ossia di energia).

Il secondo termine della (3.16) si può riscrivere come:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha$$

e, utilizzando l'equazione (3.6),

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right] \delta q_\alpha .$$

Nell'ultimo termine è stato scambiato l'ordine delle derivate, poiché $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \sum_{\beta} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t}$ che coincide con $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}$ (come appare evidente dallo sviluppo (3.15)). Quindi

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_\alpha . \quad (3.19)$$

Sostituendo la (3.17) e la (3.19) nella (3.16) otteniamo infine

$$\sum_{\alpha=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha = 0 , \quad (3.20)$$

dove si è indicata con $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$ l'energia cinetica del sistema.

Ricordiamo ora che in presenza di vincoli olonomi (il caso qui considerato) le coordinate q_α sono indipendenti e pertanto anche gli spostamenti virtuali δq_α sono tutti indipendenti tra loro. Ne segue che l'unico modo per soddisfare l'equazione precedente consiste nel richiedere che tutti i coefficienti delle δq_α siano nulli:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (3.21)$$

Queste equazioni sono valide per qualunque di tipo di forza \vec{F}_i , su cui non è stata fatta alcuna ipotesi. Se le forze applicate sono *conservative* ($\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$) le forze generalizzate si possono riscrivere come segue:

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} , \quad (\text{sistemi conservativi}) \quad (3.22)$$

quindi per forze conservative le equazioni (3.21) diventano

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (T - V) = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Infine basterà osservare che V è funzione solo delle coordinate e come tale non dipende dalle velocità generalizzate ($\partial V / \partial \dot{q}_\alpha = 0$, $\forall \alpha$) ^[*]; ciò ci permette di riscrivere le equazioni precedenti come

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (T - V) = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

e definendo la **funzione Lagrangiana**

$$\boxed{\mathcal{L} = T - V} \quad (3.23)$$

è possibile scrivere le **equazioni di Eulero-Lagrange** ^[†]

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n} \quad (3.24)$$

Le equazioni (3.24) costituiscono un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle incognite q_α e la loro soluzione generale contiene $2n$ costanti arbitrarie, che verranno fissate se specifichiamo lo stato del sistema ad un istante iniziale t_0 , ossia se conosciamo $q_\alpha(t_0)$ e $\dot{q}_\alpha(t_0)$.

Osservazioni:

1. Se il sistema non è soggetto a vincoli, le (3.24) valgono anche rispetto alle coordinate cartesiane x_i, y_i, z_i .
2. La moltiplicazione per una costante arbitraria della Lagrangiana di un sistema non altera le equazioni del moto. Lo stesso vale per l'aggiunta di una costante arbitraria, che deve ovviamente avere le stesse dimensioni di \mathcal{L} . La Lagrangiana, come definita nell'Eq. (3.23), ha le dimensioni di un'energia.
3. Data una qualunque funzione differenziabile $F(q, t)$, la Lagrangiana

$$\mathcal{L}'(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) + \frac{dF(q_\alpha, t)}{dt} \quad (3.25)$$

conduce alle stesse equazioni del moto (3.24) ottenute a partire da \mathcal{L} (provare per esercizio). La scelta di \mathcal{L} quindi non è univoca, anche se la forma (3.23) è la più comune per sistemi conservativi.

4. La Lagrangiana di una particella libera è

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Ne derivano le seguenti equazioni del moto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &\implies \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 &\implies p_x = m\dot{x} = \text{cost.} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &\implies \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 &\implies p_y = m\dot{y} = \text{cost.} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &\implies \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0 &\implies p_z = m\dot{z} = \text{cost.} \end{aligned}$$

note dalla meccanica elementare.

^[*]Il caso dell'elettromagnetismo, come è già stato osservato, è molto particolare e verrà esaminato nel paragrafo 3.3.

^[†]a volte indicate semplicemente come equazioni di Lagrange

5. La Lagrangiana di N particelle libere è

$$\mathcal{L} = T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

e le corrispondenti equazioni del moto implicano $\vec{p}_i = \text{costante}$, $\forall i = 1, \dots, N$.

6. Nel caso di vincoli olonomi-scleronomi si ha $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$ e l'energia cinetica è data da:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right)^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \end{aligned} \quad (3.26)$$

ossia è una forma quadratica omogenea nelle velocità generalizzate. ^[‡]

7. Lo scopo principale nel derivare il formalismo lagrangiano è stato di eliminare i gradi di libertà resi superflui dalla presenza dei vincoli (olonomi), ma si sono così ottenuti ulteriori benefici. Infatti il metodo lagrangiano necessita soltanto di due funzioni scalari \mathcal{L} e V e si “perde” la complessità delle equazioni (vettoriali) del moto.

3.3 Potenziali dipendenti dalla velocità: l'elettromagnetismo

Le equazioni di Lagrange si possono scrivere nella forma (3.24) anche se il sistema non è conservativo in senso stretto (ossia non esiste un potenziale V), purché le forze generalizzate si possano ottenere da una funzione $U(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ come segue:

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} \right). \quad (3.27)$$

In tal caso valgono ancora le equazioni di Lagrange con una Lagrangiana data da

$$\mathcal{L} = T - U, \quad (3.28)$$

come si può facilmente verificare sostituendo quest'ultima nelle (3.24). U si dice **potenziale generalizzato** (o potenziale dipendente dalle velocità).

La forza elettromagnetica è un esempio particolarmente importante di questo tipo di potenziali; infatti la forza di Lorentz, che agisce su una carica elettrica q di massa m in moto con velocità \vec{v} in un campo elettrico $\vec{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnetico $\vec{B}(\mathbf{r}, t)$, dipende esplicitamente dalla velocità della particella carica:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (3.29)$$

Dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

si deduce che campo elettrico e campo magnetico si possono esprimere in termini del potenziale scalare $\phi(\mathbf{r}, t)$ e del potenziale vettore $\vec{A}(\mathbf{r}, t)$ nel modo seguente:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.30)$$

^[‡] Si noti che questa forma non è valida se i vincoli sono reonomi.

In questo modo la forza di Lorentz si può scrivere come:

$$\vec{F} = q \left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] \quad (3.31)$$

Se ci fosse solo il primo termine, \vec{F} sarebbe una forza conservativa in senso stretto, come richiesto dalla (2.13). La presenza degli altri termini fa sì che la relazione (2.11) non sia soddisfatta: il lavoro compiuto dalla forza quindi dipende dal cammino seguito e la forza non è conservativa.

Mostriamo ora che la forza di Lorentz può essere espressa nella forma (3.27); osserviamo innanzi tutto che il doppio prodotto vettoriale nella (3.31) può essere esplicitato in componenti, ad esempio nella componente x , come:

$$\begin{aligned} \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_x &= v_y (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z - v_z (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ &= \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} . \end{aligned}$$

Notiamo ora che

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

quindi

$$\left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]_x = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

e la componente x della forza di Lorentz si esprime come:

$$F_x = q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial A_x}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \cancel{\frac{\partial A_x}{\partial t}} \right] .$$

Introducendo il potenziale (generalizzato)

$$U = q\phi - q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (3.32)$$

si vede che la forza generalizzata, data dalla definizione (3.27), coincide con la forza di Lorentz:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial v_x} \right) = q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right] . \quad (3.33)$$

Si noti che il potenziale (3.32) dipende dalla velocità \vec{v} della carica in moto.

In conclusione la Lagrangiana per una particella carica soggetta all'azione di un campo elettromagnetico si può scrivere nella forma

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (3.34)$$

e da essa si possono ricavare le equazioni del moto di Lagrange (3.24) per una particella carica in un campo elettromagnetico.

E' facile verificare che le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana (3.34) forniscono la corretta equazione del moto per una particella carica soggetta alla forza di Lorentz. Infatti, considerando la componente x si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x} + q \frac{dA_x}{dt} = m\ddot{x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{z} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + q \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \\ &= q \left[E_x + \left(\vec{v} \times \nabla \times \vec{A} \right)_x \right] = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)_x \end{aligned}$$

Le relazioni analoghe per le componenti y e z conducono a

$$m\ddot{\vec{r}} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (3.35)$$

3.4 Esempi

3.4.1 Moto di una particella non vincolata descritto in coordinate cartesiane

Consideriamo una particella non soggetta a vincoli, in moto in un campo di forza conservativo descritto dal potenziale V . Le coordinate cartesiane sono indipendenti, data l'assenza di vincoli, quindi possono essere adottate come coordinate generalizzate. Anche le componenti cartesiane della forza coincidono con le componenti generalizzate. Scriviamo la Lagrangiana della particella:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z). \quad (3.36)$$

Scriviamo ora le equazioni del moto di Lagrange. Per la componente x

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

cioè (ripetendo calcoli analoghi per le altre due componenti)

$$m\ddot{x} = F_x \quad m\ddot{y} = F_y \quad m\ddot{z} = F_z \quad (3.37)$$

Ritroviamo così le equazioni di Newton per il moto della particella.

3.4.2 Moto di una particella vincolata su un piano fisso: coordinate polari

Consideriamo una particella vincolata a muoversi su un piano, ad esempio il piano $z = 0$, soggetta ad un campo di forze conservativo. I gradi di libertà sono ovviamente solo due. Possiamo quindi descrivere il moto della particella adottando come coordinate generalizzate la coppia (x, y) oppure possiamo decidere di usare le coordinate polari (r, θ) .

Nel primo caso la Lagrangiana si scrive come

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y, z)$$

e le equazioni del moto che se ne ricavano sono

$$m\vec{a} = -\nabla_2 V = \vec{F}$$

dove $\nabla_2 \equiv \hat{i}\partial_x + \hat{j}\partial_y$ è l'operatore Laplaciano in due dimensioni.

La seconda opzione è a volte più conveniente (per esempio nel caso che il potenziale abbia simmetria centrale: $V = V(r)$). Le equazioni di trasformazione dalle coordinate cartesiane a quelle polari sono

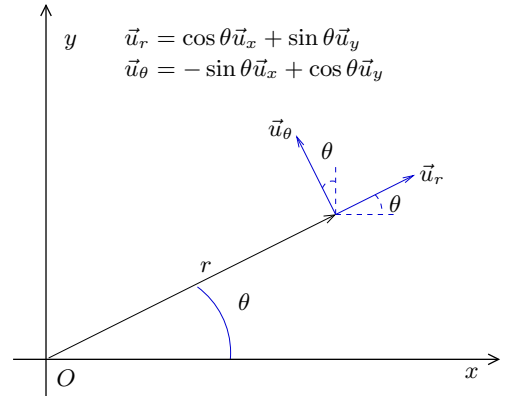
$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

e, in analogia con le (3.15), le velocità sono date da

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}.$$

La Lagrangiana dunque è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r, \theta). \quad (3.38)$$



Notiamo che la velocità, in coordinate polari, è scomposta in una componente radiale ($v_r = \dot{r}$) ed in una tangenziale ($v_\theta = r\dot{\theta}$), corrispondenti a vettori $v_r \hat{u}_r$ e $v_\theta \hat{u}_\theta$ ortogonali tra loro. Ricordiamo che i versori in due dimensioni \hat{u}_r e \hat{u}_θ sono, in coordinate cartesiane:

$$\hat{u}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad \text{e} \quad \hat{u}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \quad (3.39)$$

Per scrivere le equazioni di Lagrange calcoliamo le varie derivate:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

e le equazioni del moto sono:

$$m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (3.40)$$

due equazioni differenziali del secondo ordine accoppiate, la cui soluzione fornisce le leggi orarie $r(t)$ e $\theta(t)$.

Le forze generalizzate sono

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = \vec{F} \cdot \vec{u}_r = F_r$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = F_x (-r \sin \theta) + F_y (r \cos \theta) = \vec{F} \cdot (r \vec{u}_\theta) = r F_\theta.$$

3.4.3 Moto di una particella non vincolata nello spazio

Il moto di una particella non vincolata nello spazio tridimensionale può essere descritto, oltre che in coordinate cartesiane, in coordinate cilindriche o sferiche.

Coordinate cilindriche (o polari piane)

Le coordinate cilindriche sono una scelta conveniente se il potenziale è indipendente dall'angolo θ formato dal vettore \vec{r} con un asse z fisso (simmetria cilindrica). In questo caso basta aggiungere alle coordinate polari piane la coordinata z : le coordinate lagrangiane sono quindi (r, θ, z) .

La Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \theta, z),$$

ed alle equazioni del moto (3.40) se ne aggiunge una terza:

$$m \ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Le componenti della forza generalizzata si ottengono dalle (3.18):

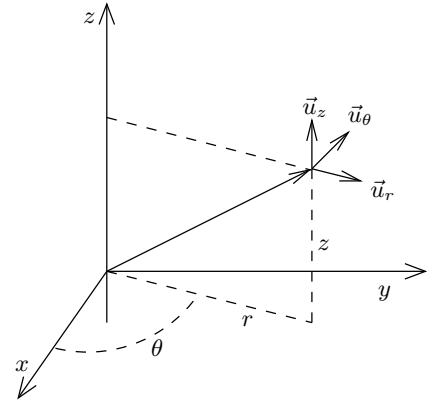
$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = \vec{F} \cdot \vec{u}_r = F_r$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = F_x (-r \sin \theta) + F_y (r \cos \theta) = \vec{F} \cdot (r \vec{u}_\theta) = r F_\theta$$

$$Q_z = F_z.$$

Notiamo che le componenti Q_r e Q_z della forza generalizzata hanno effettivamente le dimensioni di una forza, a differenza della componente Q_θ che ha dimensioni di un'energia. Dalle (3.22) però sappiamo che $Q_\alpha = -\partial V / \partial q_\alpha$ che, in accordo con le relazioni appena trovate, equivale a $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, con l'operatore gradiente espresso in coordinate cilindriche.

L'utilità delle coordinate cilindriche è evidente se il potenziale non dipende dall'angolo θ (simmetria cilindrica) che è quindi una variabile ciclica (come si vedrà nel seguito). In questo caso il sistema di equazioni del moto si semplifica: $p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$ è una costante del moto (componente z del momento angolare). Naturalmente, la componente F_θ della forza si annulla (come anche Q_θ).



Coordinate sferiche (o polari sferiche)

Nel caso di coordinate polari in tre dimensioni le equazioni di trasformazione sono:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta$$

e le velocità sono date da:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} - r \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} + r \sin \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

Per l'energia cinetica si ottiene

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

e la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r, \theta, \phi).$$

Le equazioni del moto sono:

$$m\ddot{r} = mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + mr \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (3.41a)$$

$$mr^2 \ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (3.41b)$$

$$mr^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2mr\dot{r} \sin^2 \theta \dot{\phi} + 2mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (3.41c)$$

Le componenti della forza generalizzata si trovano procedendo come nel paragrafo precedente e sono

$$\begin{aligned} Q_r &= F_x \sin \theta \cos \phi + F_y \sin \theta \sin \phi + F_z \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{u}_r = F_r \\ Q_\theta &= F_x r \cos \theta \cos \phi + F_y r \cos \theta \sin \phi - F_z r \sin \theta = \vec{F} \cdot (r \vec{u}_\theta) = r F_\theta \\ Q_\phi &= -F_x r \sin \theta \sin \phi + F_y r \sin \theta \cos \phi = \vec{F} \cdot (r \sin \theta \vec{u}_\phi) = r \sin \theta F_\phi, \end{aligned}$$

dove

$$\hat{u}_r = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (3.42)$$

$$\hat{u}_\theta = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \quad (3.43)$$

$$\hat{u}_\phi = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}. \quad (3.44)$$

Il maggiore interesse per questo sistema di coordinate risiede nelle semplificazioni che comporta nel caso di un problema a simmetria sferica. Se infatti il potenziale dipende solo dalla distanza radiale, $V(r)$, le equazioni del moto si semplificano, in particolare la (3.41c) diventa

$$\frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad \text{ossia} \quad r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{costante}$$

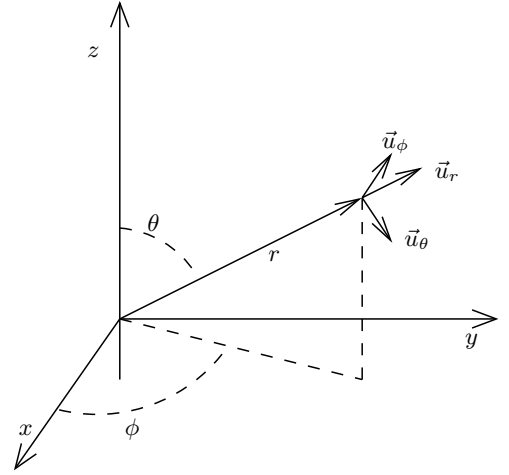
che esprime la conservazione del momento angolare.

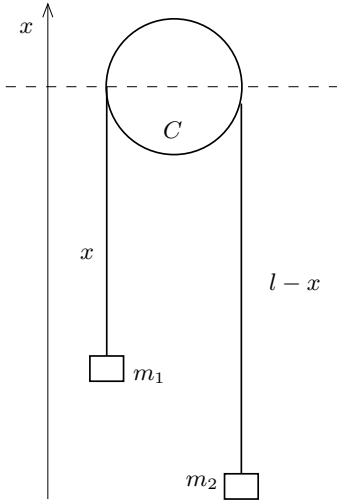
3.4.4 Macchina di Atwood

Due masse, m_1 ed m_2 , sono collegate da un filo inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile, avvolto attorno ad una carrucola C , anch'essa di massa trascurabile, che ruota senza attrito. È un esempio di sistema conservativo, soggetto a vincoli olonomi e scleronomi, che può essere completamente descritto dalla coordinata x del peso m_1 , dal momento che la posizione dell'altro peso resta univocamente determinata dalla lunghezza della corda. C'è, quindi, un solo grado di libertà (si assume che i due pesi possano muoversi solo in verticale, senza dondolare).

Le posizioni delle due masse sono dunque^[§]

^[§]Nello scrivere la coordinata x_2 in funzione di x_1 nella (3.45) non abbiamo considerato il tratto di corda avvolto attorno alla carrucola: è una lunghezza costante e darebbe luogo ad un termine aggiuntivo costante nel potenziale e nella Lagrangiana, del tutto irrilevante per le equazioni del moto.





$$x_1 = x \quad x_2 = l - x \quad (3.45)$$

e le loro velocità

$$v_1 = \dot{x} \quad v_2 = -\dot{x} .$$

L'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 .$$

Scriviamo l'energia potenziale del sistema (l'asse x è orientato verso l'alto)

$$V = m_1gx + m_2g(l - x) = (m_1 - m_2)gx + m_2gl ,$$

quindi la Lagrangiana è (omettendo il termine costante m_2gl , irrilevante ai fini della determinazione dell'equazione del moto)

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - (m_1 - m_2)gx .$$

L'equazione del moto che si ricava $(m_1 + m_2)\ddot{x} = -(m_1 - m_2)g$ può essere facilmente risolta, ottenendo

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} gt^2 + At + B .$$

Le costanti A e B saranno determinate imponendo le condizioni iniziali desiderate.

Allo stesso risultato si giunge anche utilizzando i metodi più elementari, considerando esplicitamente la tensione della fune. Questo semplice esempio mette in evidenza il fatto che le forze vincolari non figurano mai in una descrizione lagrangiana, di conseguenza non possono essere determinate con questo metodo.

3.4.5 Corpo vincolato a scorrere su un filo in rotazione uniforme

Consideriamo un punto materiale di massa m che può scorrere senza attrito lungo un filo rigido che ruota con velocità angolare uniforme ω attorno ad un asse fisso perpendicolare ad esso. Si tratta di un esempio di vincolo dipendente dal tempo (reonomo), per il quale cioè le equazioni di trasformazione dipendono esplicitamente da t :

$$x = r \cos \omega t \quad y = r \sin \omega t .$$

Anche in questo caso c'è un solo grado di libertà: la coordinata radiale r . La velocità ha componenti date da

$$v_x = \dot{r} \cos \omega t - \omega r \sin \omega t \quad v_y = \dot{r} \sin \omega t + \omega r \cos \omega t$$

quindi l'energia cinetica si scrive come

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2) .$$

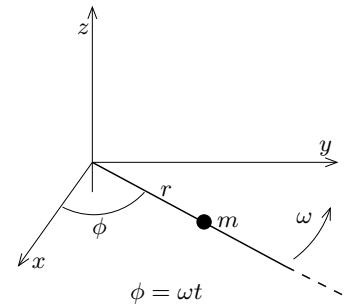
Non ci sono forze esterne, quindi la lagrangiana coincide con l'energia cinetica $\mathcal{L} = T$. L'equazione del moto è allora

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = 0 \quad \ddot{r} = \omega^2 r ,$$

che costituisce il ben noto risultato, secondo il quale il corpo si muove verso l'esterno a causa dell'accelerazione centrifuga. La soluzione della equazione del moto è semplice da ricavare:

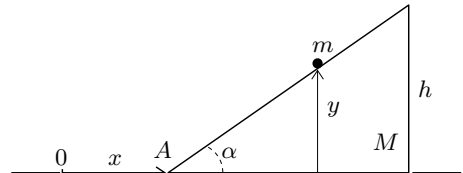
$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} ,$$

avendo indicato con A e B le costanti arbitrarie, da fissare con le condizioni iniziali.



3.4.6 Corpo su un piano inclinato mobile

Un corpo puntiforme di massa m scivola lungo la faccia inclinata di un corpo di massa M (angolo alla base α e altezza h) che, a sua volta, scivola su un piano orizzontale. Un campo gravitazionale uniforme agisce in direzione verticale. Non ci sono attriti.



Lo stato del sistema è completamente definito se conosciamo la posizione x dello spigolo $A^{[¶]}$ del corpo di massa M (piano inclinato) e l'altezza y del corpo puntiforme rispetto alla base del piano. Scegliamo quindi x e y come coordinate generalizzate. La posizione del corpo di massa m si esprime in funzione delle due variabili x e y :

$$x_m = x + \frac{y}{\tan \alpha} \quad y_m = y .$$

(Ovviamente queste relazioni sono valide finché i due corpi restano in contatto. Quando, alla fine dello scivolamento, il corpo m si stacca dal corpo M , m non si muove più sul piano inclinato ma sul piano di base orizzontale, allontanandosi da M . L'equazione del vincolo cambia e anche le equazioni del moto cambieranno in conseguenza.)

L'energia cinetica del corpo di massa M è data da: $T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$,

mentre quella del corpo di massa m è: $T_m = \frac{1}{2} m (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{\dot{y}^2}{\tan^2 \alpha} + \frac{2\dot{x}\dot{y}}{\tan \alpha} \right)$.

L'energia potenziale del corpo di massa m è: $V_m = mgy_m = mgy$. Il corpo di massa M si muove solo orizzontalmente quindi la sua energia potenziale resta costante ed è irrilevante per le equazioni del moto.

Scriviamo quindi la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T_M + T_m - V_m = \frac{m+M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2 \tan^2 \alpha} \dot{y}^2 + \frac{m}{\tan \alpha} \dot{x}\dot{y} - mgy ,$$

da cui si ricavano le equazioni del moto:

$$\frac{\ddot{x}}{\tan \alpha} + \frac{\ddot{y}}{\tan^2 \alpha} = -g \quad \frac{m+M}{m} \ddot{x} + \frac{\ddot{y}}{\tan \alpha} = 0 \quad (3.46)$$

Ricavando \ddot{y} dalla seconda equazione del moto e sostituendolo nella prima, si ottiene una semplice equazione per $x(t)$:

$$\ddot{x} = g \frac{m}{M} \tan \alpha \equiv a_x \quad \Rightarrow \quad x(t) = A + Bt + \frac{1}{2} a_x t^2$$

essendo A e B delle costanti arbitrarie. È immediato ricavare anche la y :

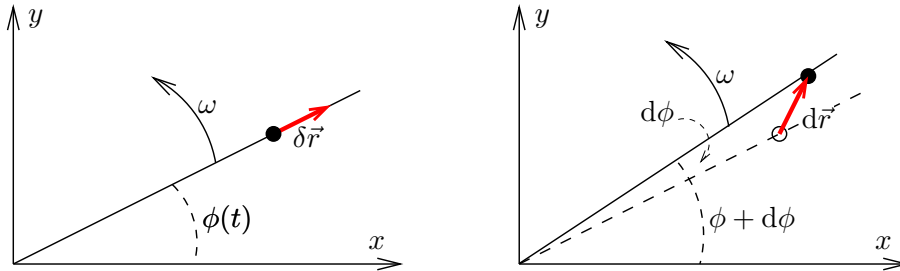
$$\ddot{y} = -g \frac{m+M}{M} \tan^2 \alpha \equiv -a_y \quad \Rightarrow \quad y(t) = C + Dt - \frac{1}{2} a_y t^2$$

Assegnando delle condizioni iniziali è possibile ricavare le costanti A, B, C, D .

3.4.7 Spostamenti virtuali e spostamenti reali

I due esempi precedenti offrono l'occasione di capire concretamente la differenza tra gli spostamenti virtuali e reali, introdotti nel paragrafo 3.2.

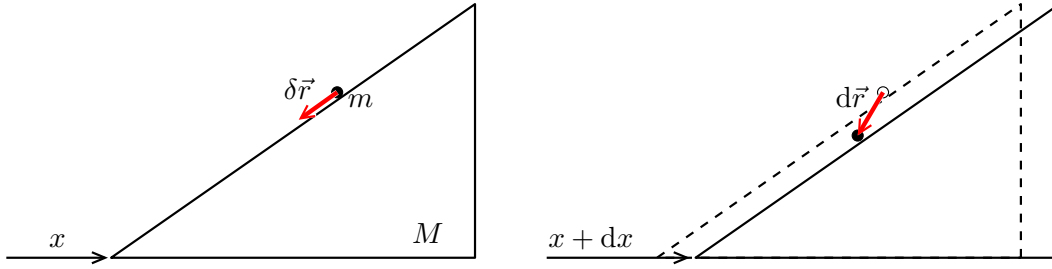
Nella figura seguente esaminiamo il caso del corpo che si muove lungo un filo in rotazione.



Nel grafico di sinistra vediamo la rappresentazione dello spostamento virtuale: il sistema viene considerato ad un certo istante t ed il vincolo (il filo rotante) viene “fissato” in tale istante. Il corpo si muove lungo il filo, come mostrato dal vettore $\delta \vec{r}$. Nel grafico di destra invece consideriamo lo spostamento reale che avviene in un intervallo di tempo infinitesimo dt , durante il quale il filo ruota di un angolo $d\phi$. Lo spostamento compiuto *effettivamente* dal corpo (spostamento reale) è quindi quello indicato dal vettore $d\vec{r}$.

In modo analogo rivediamo l'esempio del corpo sul piano inclinato mobile:

^[¶]Volendo, si può considerare la posizione del baricentro del corpo di massa M , ma ciò è ininfluente per le equazioni del moto perché corrisponde ad aggiungere alla lagrangiana un termine costante.



La figura di sinistra mostra uno spostamento virtuale, preso in un istante t in cui il piano inclinato si trova nella posizione x . La figura di destra mostra invece lo spostamento reale che avviene tenendo conto dello spostamento del piano di un tratto dx nell'intervallo di tempo dt . Da questo esempio appare evidente l'utilità e la potenzialità del formalismo lagrangiano che ha permesso di determinare il moto di questo sistema in modo semplice. L'impostazione e soluzione di questo problema con il metodo tradizionale (leggi di Newton) è molto più complicata!

3.4.8 Pendoli

Pendolo elastico

Consideriamo un oggetto puntiforme di massa m , attaccato ad una estremità di una molla ideale di costante elastica k , lunghezza a riposo l e massa trascurabile. L'altra estremità della molla è fissa. Sul sistema agisce la forza di gravità uniforme.

Scegliamo come coordinate generalizzate la terna r, θ, φ mostrate in figura (le normali coordinate polari sferiche sono r, θ', φ , con $\theta = \pi - \theta'$) in termini delle quali le coordinate cartesiane si esprimono come:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta' = r \cos \varphi \sin \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta' = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \theta' = -r \cos \theta$$

e le velocità sono date da:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi \sin \theta - r \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi \sin \theta + r \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + r \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{z} &= -\dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

L'energia cinetica è quindi:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

L'energia potenziale ha due contributi, quello gravitazionale e quello elastico

$$V = mgh + \frac{1}{2} k(r - l)^2 = mg(l - r \cos \theta) + \frac{1}{2} k(r - l)^2$$

dove h è la distanza della massa m dalla posizione di equilibrio: $\theta = 0$, $r = l$. Possiamo scrivere la Lagrangiana:

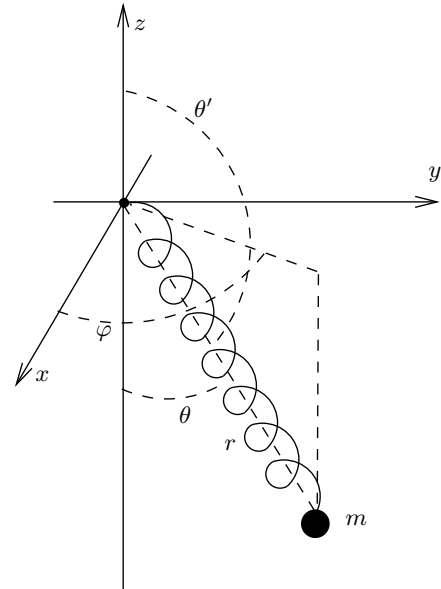
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mg(l - r \cos \theta) - \frac{1}{2} k(r - l)^2.$$

Equazione di Lagrange per r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= m r \dot{\theta}^2 + m r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + m g \cos \theta - k(r - l) & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt} m \dot{r} = m \ddot{r} \\ \Rightarrow & \ddot{r} = r \dot{\theta}^2 + r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + g \cos \theta - \frac{k}{m}(r - l). \end{aligned}$$

Equazione di Lagrange per θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - m g r \sin \theta & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta} \\ \Rightarrow & 2 r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} = r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - g r \sin \theta. \end{aligned}$$



Equazione di Lagrange per φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) \\ \Rightarrow & & \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) &= 0 ; \end{aligned}$$

dall'ultima equazione si ottiene immediatamente $r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = A = \text{costante}$ (la costante A si ricava dalle condizioni iniziali), ma questo semplifica di poco il problema. Si ottiene il sistema di equazioni differenziali accoppiate:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + g \cos \theta - \frac{k}{m}(r - l) \\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - gr \sin \theta \\ r^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta = A \end{cases} \quad (3.47)$$

che non si sa risolvere esattamente per via analitica.

Pendolo sferico

Se nell'esempio precedente la molla viene sostituita da un'asta rigida di lunghezza l (e di massa trascurabile) si ottiene il pendolo sferico. I gradi di libertà ora sono due e le coordinate generalizzate sono θ e φ . La Lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta . \quad (3.48)$$

Per ottenere le equazioni del moto basta procedere come nell'esempio precedente, tenendo presente che $r = l = \text{costante}$. Si ottiene

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{l} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \sin^2 \theta = A \end{cases} \quad (3.49)$$

e anche per questo sistema la soluzione non può essere espressa per mezzo di funzioni analitiche elementari.

Pendolo semplice

Se nell'esempio del pendolo sferico introduciamo un'ulteriore semplificazione, cioè poniamo $\varphi = 0$ (il pendolo oscilla nel piano xz) perdiamo un altro grado di libertà. L'unica variabile generalizzata ora è θ . La Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

e l'equazione del moto è

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (3.50)$$

che è la ben nota equazione del moto del pendolo semplice, la cui soluzione esatta non può però essere espressa tramite funzioni semplici. Nel caso particolare di piccole oscillazioni tuttavia l'equazione stessa e la relativa soluzione assumono una forma particolarmente semplice. Consideriamo quindi il limite $\theta \ll 1$: possiamo usare l'approssimazione $\sin \theta \simeq \theta$ e l'equazione (3.50) diventa quella del moto armonico semplice:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta = -\omega^2 \theta$$

la cui soluzione è

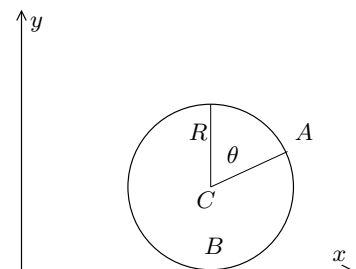
$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \alpha) ,$$

essendo A e α delle costanti arbitrarie.

3.4.9 Disco rotolante

Consideriamo un disco di massa M e raggio R , che rotola sul piano $z = 0$, lungo l'asse x . Per definire completamente lo stato del disco sono sufficienti due variabili: l'ascissa x del centro C del disco (l'ordinata è fissa: $y = R$, questa è una condizione di vincolo), e l'angolo θ che il raggio passante per il punto A del disco (scelto arbitrariamente, purché diverso da C) forma con la verticale.

Se il disco può scivolare le variabili x e θ sono indipendenti ed il sistema ha due gradi di libertà (il punto B di contatto del disco con il piano di base può avere qualsiasi velocità)



Ma se il disco può solo rotolare il centro C ruota attorno al punto di contatto B e vale la condizione:

$$\dot{x} = R\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad x = R\theta + x_0, \quad (3.51)$$

e la costante x_0 è determinabile dalle condizioni iniziali. Il sistema ha allora solo un grado di libertà, la scelta tra x o θ come variabile indipendente è, in generale, arbitraria. Notiamo che il vincolo, espresso inizialmente in termini delle velocità, è integrabile: posto nella forma finale $x = R\theta + x_0$ è chiaramente un vincolo olonomo.

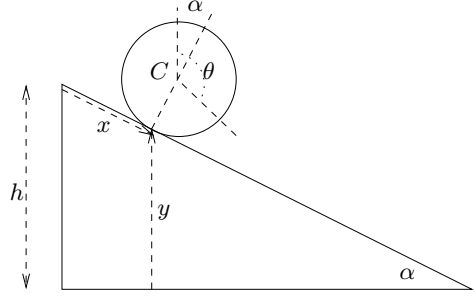
L'energia cinetica è data dalla somma di due contributi: l'energia cinetica del centro di massa più l'energia cinetica relativa al centro di massa stesso (vedere (2.31)):

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}(MR^2 + I)\dot{\theta}^2,$$

(I è il momento di inerzia^[III] del disco) e coincide con la Lagrangiana.

Supponiamo ora che il disco rotoli lungo un piano inclinato (fisso). La posizione del disco è individuata dalla coordinata x (misurata lungo il piano a partire dal vertice superiore) punto di contatto con il piano. L'angolo di rotazione è legato a x dall'equazione del vincolo $R\theta = x$ e il sistema ha sempre un grado di libertà, ma ora l'energia potenziale non è nulla perché c'è la gravità che agisce in direzione verticale. Le coordinate del centro del disco sono:

$$\begin{aligned} x_C &= x \cos \alpha + R \sin \alpha \\ y_C &= y + R \cos \alpha = h - x \sin \alpha + R \cos \alpha, \end{aligned}$$



e le componenti della sua velocità sono: $\dot{x}_C = \dot{x} \cos \alpha$, $\dot{y}_C = -\dot{x} \sin \alpha$. Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2$$

Energia potenziale: $V = Mgy_C = Mg(h - x \sin \alpha + R \cos \alpha)$.

Possiamo quindi scrivere la lagrangiana (omettiamo i termini costanti del potenziale):

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2 + Mgx \sin \alpha.$$

L'equazione del moto si ottiene facilmente:

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} = Mg \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{MR^2}}.$$

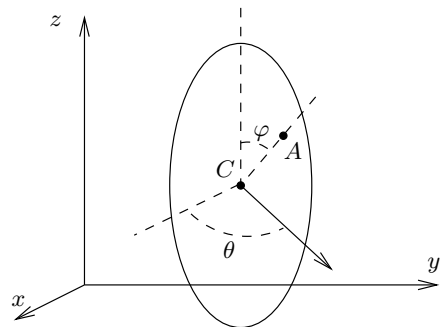
Osserviamo che il disco scende con un'accelerazione, e quindi una velocità, minore di quella con cui scenderebbe un oggetto puntiforme ($g \sin \alpha$).

Tornando a considerare il rotolamento su un piano orizzontale, se la direzione del moto non è prestabilita, ad esempio lungo l'asse x , i gradi di libertà aumentano.

Si consideri ad esempio un disco di spessore trascurabile che ruota liberamente, mantenendosi verticale, sul piano xy : la posizione del disco è individuata dalle coordinate (x, y) del centro del disco (la terza coordinata è fissa $z = R$, per il vincolo imposto), dall'angolo φ di rotazione attorno al proprio asse (è utile, anche in questo caso, scegliere un punto A arbitrario -ma diverso dal centro- del disco per specificare la rotazione) e dall'angolo θ formato tra la direzione dell'asse del disco e l'asse x .

La velocità del centro C è $R\dot{\varphi}$, la sua direzione è ortogonale all'asse del disco (il cui versore ha componenti $(\cos \theta, \sin \theta)$) per cui

$$\dot{x} = R\dot{\varphi} \sin \theta \quad \dot{y} = -R\dot{\varphi} \cos \theta.$$

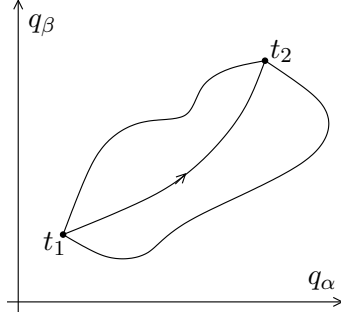


I gradi di libertà sono quindi due, grazie al vincolo appena scritto la cui forma è simile a (3.51), ma queste due equazioni non sono integrabili (senza prima aver risolto il problema!), quindi il vincolo in questo caso è anolonomo. Per trattare questi sistemi si usano delle tecniche particolari che qui non esamineremo.

^[III] Se il disco è omogeneo $I = \frac{1}{2}MR^2$, se invece tutta la massa è concentrata sulla circonferenza esterna $I = MR^2$. Le stesse formule di questo paragrafo sono valide anche nel caso di una sfera omogenea ($I = \frac{2}{5}MR^2$) o cava ($I = \frac{2}{3}MR^2$).

3.5 Principio di Hamilton

Definiamo lo **spazio delle configurazioni** di un sistema, descritto da coordinate generalizzate q_1, q_2, \dots, q_n , uno spazio n -dimensionale ogni punto del quale rappresenta la configurazione istantanea del sistema stesso. Con il passare del tempo il punto rappresentativo si muove nello spazio delle configurazioni descrivendo una traiettoria che corrisponde all'evoluzione temporale del sistema.



Consideriamo nel seguito sistemi per i quali è possibile definire una Lagrangiana (cioè sistemi conservativi più il caso dell'elettromagnetismo). L'**azione** del sistema è definita da

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t) dt \quad (3.52)$$

dove agli istanti t_1 e t_2 il sistema occupa le posizioni definite dagli insiemi di valori $q_\alpha(t_1)$ e $q_\alpha(t_2)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$).

Notiamo che, poiché la Lagrangiana ha le dimensioni di energia, l'azione ha le dimensioni di energia \times tempo (o anche lunghezza \times impulso).

Nello spazio delle configurazioni esistono infinite traiettorie diverse che uniscono i punti $q_\alpha(t_1)$ e $q_\alpha(t_2)$. Il **principio di Hamilton** (o di **minima azione**) stabilisce che il moto di un sistema dal tempo t_1 al tempo t_2 avviene lungo quella traiettoria, nello spazio delle configurazioni, che rende estrema (minima o massima) l'azione:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t) dt = 0 \quad (3.53)$$

essendo fissati (e noti) i valori delle coordinate negli estremi del cammino di integrazione:

$$q_\alpha(t_1) = q_{\alpha 1} \quad q_\alpha(t_2) = q_{\alpha 2} . \quad (3.54)$$

A differenza del principio dei lavori virtuali, quello di Hamilton è un *principio variazionale*, applicato ad una quantità integrale, ossia ad un'espressione globale del moto del sistema fra due istanti di tempo fissati.

Si può dimostrare che il principio di Hamilton è equivalente alle equazioni di Lagrange, ovvero che:

i) Se vale il principio variazionale (3.53), se ne possono dedurre le equazioni di Lagrange (3.24).

ii) se valgono le equazioni di Lagrange (3.24), il principio variazionale (3.53) è soddisfatto.

Dimostriamo che il principio di Hamilton implica le equazioni di Lagrange come condizione necessaria. La variazione dell'azione (3.53) si può realizzare sostituendo le $q_\alpha(t)$ che producono una certa traiettoria con altre coordinate infinitamente vicine

$$q_\alpha(t) \rightarrow q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t) , \quad (3.55)$$

essendo le $\delta q_\alpha(t)$ variazioni *arbitrarie infinitesime*, tali che

$$\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (3.56)$$

che assicurano la validità delle condizioni al contorno richieste (3.54). Al tempo stesso le velocità generalizzate $\dot{q}_\alpha(t)$ varieranno nel modo seguente

$$\dot{q}_\alpha(t) \rightarrow \dot{q}_\alpha(t) + \delta \dot{q}_\alpha(t) = \dot{q}_\alpha(t) + \frac{d}{dt} (\delta q_\alpha(t)) . \quad (3.57)$$

La variazione infinitesima dell'azione si potrà quindi scrivere come:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(q_\alpha + \delta q_\alpha, \dot{q}_\alpha + \delta \dot{q}_\alpha; t) - \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t)] dt .$$

Sviluppando \mathcal{L} al primo ordine negli infinitesimi δq_α e $\delta \dot{q}_\alpha$ si ottiene:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_\alpha + \delta q_\alpha, \dot{q}_\alpha + \delta \dot{q}_\alpha; t) - \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t) = \cancel{\mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t)} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) - \cancel{\mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t)}$$

e usando la (3.57) in un'integrazione per parti:

$$\sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} (\delta q_\alpha) = \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} - \sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt .$$

Il termine finito si annulla identicamente a causa delle condizioni al contorno (3.56). Pertanto il principio di Hamilton assume la forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha dt = 0 . \quad (3.58)$$

Quest'ultima equazione vale per tempi t_1 e t_2 arbitrari perciò, affinché l'integrale si annulli, deve essere identicamente nullo l'integrando. Quindi, per ogni istante t (compreso tra t_1 e t_2):

$$\sum_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha(t) = 0 ,$$

ma le quantità δq_α sono arbitrarie (e linearmente indipendenti, in quanto coordinate generalizzate), quindi ogni termine della somma si deve annullare separatamente :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n$$

Ciò dimostra che se vale il principio di Hamilton devono essere soddisfatte le equazioni di Lagrange.

La condizione di sufficienza (ii) è immediata da dimostrare. Infatti se valgono le eq. di Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

l'integrando della (3.58) è identicamente nullo e il principio di Hamilton è soddisfatto.

L'equivalenza dimostrata tra principio di Hamilton ed equazioni del moto di Lagrange ci permette di adottare il primo come principio basilare della meccanica, in luogo delle equazioni di Newton. Inoltre esso è la via maestra da percorrere quando si vogliono trattare sistemi che esulano dalla meccanica, come nella teoria dei campi.

Notiamo che se due Lagrangiane differiscono solo per la *derivata totale rispetto al tempo* di una funzione arbitraria delle coordinate e del tempo:

$$\tilde{\mathcal{L}}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t) = \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t) + \frac{d}{dt} f(q_\alpha; t)$$

le equazioni del moto restano invariate. Questa proprietà, già mostrata nella (3.25), si può dedurre in modo più semplice ed elegante a partire dal principio di Hamilton. Infatti l'azione \tilde{S} ottenuta dalla Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ differisce da quella calcolata con \mathcal{L} solo per una costante:

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\mathcal{L}}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q_\alpha; t) dt = S + \left[f(q_\alpha(t_2); t_2) - f(q_\alpha(t_1); t_1) \right] .$$

Pertanto, visto che $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$, sarà $\delta \tilde{S} = \delta S$. Le due Lagrangiane \mathcal{L} e $\tilde{\mathcal{L}}$ generano perciò le stesse equazioni del moto.

In generale diremo che la Lagrangiana di un sistema è definita solo a meno della derivata totale rispetto al tempo di una qualsiasi funzione delle coordinate e del tempo.

Capitolo 4

Teoremi di conservazione e proprietà di simmetria

Le equazioni di Lagrange fin qui considerate sono un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine (nel tempo), la cui soluzione richiede, in tutto, $2n$ costanti di integrazione, tipicamente determinate dalle condizioni iniziali $q_\alpha(t_0)$ e $\dot{q}_\alpha(t_0)$. Talvolta siamo in grado di integrare tali equazioni, trovando una soluzione esplicita per la legge oraria del moto: $q_\alpha = f_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$.

Ma molto più frequentemente il problema in esame non è completamente integrabile e non è possibile ottenere una soluzione esplicita completa delle equazioni del moto. Tuttavia tale informazione non è sempre indispensabile e la conoscenza di altre caratteristiche del sistema, ottenibile senza integrare le equazioni del moto, può risultare ancora più utile.

Importanti proprietà della *natura* del moto del sistema si possono dedurre da leggi di conservazione generali o dalle sue proprietà di simmetria. Consideriamo pertanto gli **integrali primi del moto**, che, nella forma più generale, si possono rappresentare con relazioni del tipo:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) = \text{costante} \quad (4.1)$$

e sono equazioni differenziali del primo ordine. Tali relazioni ci danno informazioni importanti sul sistema fisico. In particolare esse includono le leggi di conservazione richiamate nel Cap.2 e le corrispondenti **costanti del moto**, cioè le grandezze (del sistema) che non variano nel tempo.

4.1 Momenti generalizzati

Come primo esempio consideriamo un sistema di N masse puntiformi soggette a forze conservative che dipendono solo dalle posizioni:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) .$$

Derivando, per esempio, rispetto a \dot{x}_i , otteniamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) = m_i \dot{x}_i = p_{xi}$$

che è la componente x della quantità di moto dell' i -esima particella. Questo risultato ci suggerisce un'estensione del concetto di momento (in questo esempio momento lineare o quantità di moto): definiamo il **momento generalizzato** associato alla coordinata q_α come

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (4.2)$$

Spesso p_α viene anche detto **momento canonico** o **momento coniugato** alla coordinata q_α .

Osserviamo che se la coordinata q_α ha le dimensioni di una lunghezza, allora p_α ha le dimensioni di una quantità di moto (dato che la Lagrangiana ha sempre le dimensioni di energia). Se invece q_α ha dimensioni diverse da una lunghezza, allora anche le dimensioni di p_α cambiano.

Consideriamo ad esempio di una particella libera di muoversi nel piano (x, y) e utilizziamo le coordinate polari:

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta .$$

Se la particella non è soggetta a forze, $\mathcal{L} = T$ ossia

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) ,$$

come abbiamo visto nel paragrafo 3.4.2. I momenti coniugati, rispettivamente, a r e θ risultano

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} ;$$

p_r ha effettivamente le dimensioni di una quantità di moto, mentre p_θ ha le dimensioni di un momento angolare (essendo infatti associato ad una variabile angolare):

$$[p_\theta] = \text{massa} \times \text{lunghezza}^2 \times \text{tempo}^{-1} .$$

In ogni caso i prodotti rp_r e θp_θ (e in generale $q_\alpha p_\alpha$) hanno le dimensioni di un'azione.

Se il potenziale dipende dalla velocità (come nel caso dell'elettromagnetismo) i momenti coniugati differiscono dalla definizione usuale di quantità di moto, anche in coordinate cartesiane. Nel caso dell'elettromagnetismo, utilizzando la (3.34), possiamo scrivere la Lagrangiana di un sistema di N particelle di masse m_i , tutte dotate di carica q , soggette alla forza di Lorentz, come

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left[T(\dot{\vec{r}}_i) - q\phi(\vec{r}_i) + q\vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i \right] .$$

Quindi, per esempio,

$$p_{xi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_x \qquad \text{ossia} \qquad \vec{p}_i = m\vec{v}_i + q\vec{A} . \quad (4.3)$$

Il momento coniugato alla coordinata \vec{r} non è la quantità di moto $m\vec{v}_i$, ma contiene un termine aggiuntivo proporzionale al potenziale vettore \vec{A} .

4.2 Coordinate cicliche

Se la Lagrangiana di un sistema non dipende da una certa coordinata q_α (ma può dipendere dalla corrispondente velocità \dot{q}_α) allora tale coordinata si dice **ciclica** o *ignorabile*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_\alpha \text{ ciclica}$$

Dalle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha}$$

segue che se q_α è ciclica allora

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{dp_\alpha}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_\alpha = \text{costante}} \quad (4.4)$$

Il momento coniugato ad una coordinata ciclica è una costante del moto, ossia è una quantità che si conserva. E' un esempio di integrale primo del moto, espresso nella forma (4.1) dalla relazione $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0$.

E' utile sottolineare che la coordinata ciclica q_α deve essere una coordinata generalizzata, e quindi indipendente dalle altre coordinate. Per capire l'importanza di questa precisazione consideriamo il caso del disco rotolante (sezione 3.4.9), la cui Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + M g x \sin \alpha.$$

Si potrebbe erroneamente pensare che la variabile θ sia ciclica poiché \mathcal{L} non ne dipende esplicitamente, e dedurne che il momento coniugato a θ , $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta}$ sia costante nel tempo, cioè che il momento angolare $L_z = M r^2 \dot{\theta}$ sia conservato. Questo ragionamento è sbagliato perchè le coordinate θ e x non sono indipendenti ($\dot{x} = r \dot{\theta}$) e quindi non possono essere entrambe coordinate Lagrangiane: il momento angolare di questo sistema, infatti, non è conservato.

L'equazione (4.4) costituisce un integrale primo del moto e può essere usata per eliminare la coordinata ciclica q_α dal problema, che risulta così formulato in termini delle rimanenti coordinate Lagrangiane [*].

Esaminiamo ora alcuni importanti proprietà di invarianza e le leggi di conservazione ad esse associate.

4.3 Invarianza per traslazioni: omogeneità dello spazio e conservazione della quantità di moto

L'omogeneità dello spazio implica che le proprietà meccaniche di un sistema non sono alterate da un'arbitraria traslazione dell'intero sistema. Ciò vale se il sistema non è soggetto a forze esterne, sia pure conservative, che renderebbero lo spazio inhomogeneo per il sistema stesso, per effetto del campo di forza in questione.

Consideriamo un sistema isolato di N particelle, non soggette a vincoli. Come coordinate generalizzate scegliamo le coordinate cartesiane delle particelle stesse. Consideriamo dunque una traslazione infinitesima arbitraria su *tutte le coordinate del sistema*

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{\varepsilon} \qquad \delta \vec{r}_i \equiv \vec{r}'_i - \vec{r}_i = \vec{\varepsilon}$$

(si noti che $\vec{\varepsilon}$ non dipende dall'indice i : la traslazione in questione riguarda l'intero sistema). La conseguente variazione della Lagrangiana è [†]

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{\varepsilon}.$$

Poiché il sistema non è alterato, per ipotesi, da tale traslazione

$$\delta \mathcal{L} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{\varepsilon} = 0,$$

e, per l'arbitrarietà di $\vec{\varepsilon}$:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = 0.$$

[*]Utilizzando questo metodo (di Routh) si riesprime \mathcal{L} in modo che non dipenda più dalla velocità generalizzata \dot{q}_α ma solo dal momento generalizzato p_α , che può essere considerata come una costante di integrazione. Le rimanenti integrazioni coinvolgeranno quindi solo le altre coordinate, non cicliche. Torneremo su questo metodo quando tratteremo il formalismo Hamiltoniano.

[†]Si noti che $\delta \dot{\vec{r}}_i = 0$: le velocità non sono modificate dalla traslazione delle coordinate.

Sostituendo questa relazione nelle equazioni di Lagrange

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \right] = 0 ,$$

ricaviamo, usando la definizione (4.2),

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} = 0 \quad \text{ossia} \quad \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P} = \text{costante} . \quad (4.5)$$

In questo caso i momenti generalizzati sono le quantità di moto $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ e \vec{P} è la quantità di moto totale del sistema. Abbiamo così dimostrato che *la quantità di moto totale di un sistema è un integrale del moto collegato alla omogeneità dello spazio: esso si conserva se la Lagrangiana è invariante per traslazioni.*

Si osservi che questa legge di conservazione è valida solo se

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0 ,$$

cioè se il sistema è isolato. Ritroviamo così la legge di conservazione dell'impulso totale di un sistema isolato, che vale anche quando i suoi costituenti interagiscono tra loro (nel qual caso i singoli impulsi \vec{p}_i non sono costanti).

Questo teorema si può facilmente generalizzare al caso in cui la Lagrangiana è invariante per traslazioni *in una certa direzione* individuata da un vettore \hat{n} :

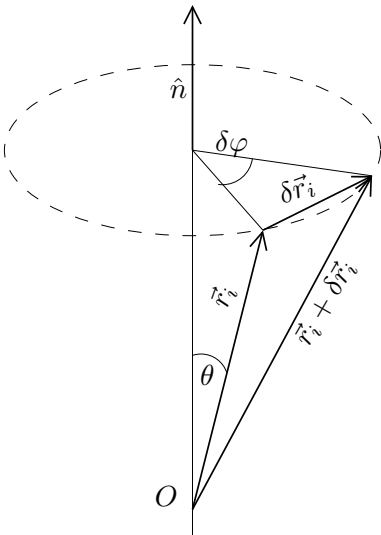
$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{\varepsilon} \quad \text{con} \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon \hat{n} . \quad (4.6)$$

In questo caso la componente della quantità di moto totale del sistema *in quella stessa direzione* è conservata:

$$\vec{P} \cdot \hat{n} = \text{costante} . \quad (4.7)$$

4.4 Invarianza per rotazioni: isotropia dello spazio e conservazione del momento angolare

Si dice che lo spazio è isotropo per un sistema meccanico se le proprietà del sistema non variano quando esso viene ruotato di un angolo arbitrario.



Consideriamo un sistema isolato e senza vincoli e compiamo una rotazione infinitesima $\delta\varphi$ intorno ad un asse arbitrario, di vettore \hat{n} , con

$$\delta\vec{\varphi} = \hat{n} \delta\varphi .$$

Per effetto della rotazione il raggio vettore dell' i -esima particella cambierà come segue:

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i \quad (4.8)$$

dove (vedi figura)

$$|\delta\vec{r}_i| = r_i \sin\theta \delta\varphi = |\hat{n} \times \vec{r}_i| \delta\varphi = |\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i| ;$$

vettorialmente possiamo scrivere (se i vettori sono orientati come in figura)

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i = \delta \varphi \hat{n} \times \vec{r}_i . \quad (4.9)$$

L'invarianza del sistema rispetto a tale rotazione implica che la Lagrangiana sia invariante rispetto alla variazione (4.8):

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{r}_i + \delta \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i + \delta \dot{\vec{r}}_i; t) - \mathcal{L}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i; t) = 0.$$

Sviluppiamo e utilizziamo le equazioni del moto:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i \right) = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \dot{\vec{r}}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) \cdot \delta \vec{r}_i \right] = \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \delta \vec{r}_i \right) = 0. \quad (4.10)$$

Notiamo che, a differenza del caso delle traslazioni, ora $\delta \dot{\vec{r}}_i \neq 0$; infatti

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_i) = \delta \dot{\varphi} \hat{n} \times \vec{r}_i + \delta \vec{\varphi} \times \dot{\vec{r}}_i.$$

Utilizzando, nella (4.10), la definizione di momento coniugato $\vec{p}_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\vec{r}}_i$ (qui coincidente con la definizione di quantità di moto, $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$) e la (4.9), si ottiene

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) \delta \varphi = 0$$

e usando la proprietà ciclica del prodotto misto ^[‡]

$$\delta \mathcal{L} = \hat{n} \cdot \left(\frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) \delta \varphi = 0 .$$

La relazione precedente deve valere per una variazione arbitraria $\delta \varphi$, quindi

$$\hat{n} \cdot \left(\frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) = 0 \quad \text{cioè} \quad \hat{n} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

essendo $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ il momento angolare (totale) del sistema rispetto ad O . Ne segue che

$$\hat{n} \cdot \vec{L} = \text{costante}$$

ossia l'invarianza della Lagrangiana per rotazioni attorno all'asse \hat{n} implica la conservazione della componente del momento angolare lungo lo stesso asse \hat{n} .

Se questa invarianza vale qualunque sia il versore \hat{n} , allora si conserva il vettore completo \vec{L} , ossia **l'isotropia dello spazio implica la conservazione del momento angolare del sistema**. In altre parole, il momento angolare totale del sistema è un integrale primo del moto associato all'invarianza per rotazioni della Lagrangiana.

Come nel caso della quantità di moto, osserviamo che se il sistema è composto da più parti, il momento angolare delle singole parti può cambiare (per effetto delle forze interne), ma il momento angolare *totale* è costante.

[‡] $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

4.5 Teorema di Emmy Noether

I due esempi precedenti sono casi particolari di un teorema generale, dovuto a Emmy Noether, che lega le proprietà di invarianza (o *simmetrie*) della Lagrangiana alla conservazione nel tempo di grandezze fisiche.

Il teorema di Noether asserisce che se la Lagrangiana $\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t)$ è invariante sotto la trasformazione

$$q_\alpha \rightarrow q_\alpha + \delta q_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (4.11)$$

e le coordinate generalizzate $q_\alpha(t)$ sono soluzioni delle equazione del moto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha}, \quad (4.12)$$

allora la quantità

$$Q \equiv \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \quad (4.13)$$

è una costante del moto: $\dot{Q} = 0$. Inversamente, se Q è conservata, \mathcal{L} è invariante sotto le trasformazioni (4.11).

Per dimostrarlo basta considerare la variazione della Lagrangiana per la trasformazione (4.11):

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \delta q_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) + \sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha = \dot{Q}, \end{aligned}$$

dove si sono usate l'ipotesi (4.12) e la definizione (4.13).

Ne segue immediatamente che Q è conservata se e solo se $\delta \mathcal{L} = 0$: ad ogni simmetria della Lagrangiana corrisponde una "carica" conservata Q e, viceversa, ad ogni costante del moto si può associare una simmetria della Lagrangiana.

4.6 Uniformità del tempo e conservazione dell'energia. Funzione di Hamilton.

Un altro risultato che ci si aspetta di poter dedurre nell'ambito della formulazione lagrangiana è la conservazione dell'energia totale per sistemi in cui le forze siano derivabili da potenziali dipendenti solo dalla posizione.

Di fatto è possibile dimostrare un teorema di conservazione generale di cui la conservazione dell'energia è un caso particolare.

Si consideri una Lagrangiana generica, funzione delle coordinate generalizzate q_α e delle rispettive velocità generalizzate \dot{q}_α ed, eventualmente, del tempo. La dipendenza esplicita dal tempo può essere dovuta sia all'eventuale dipendenza dal tempo del potenziale, sia alla presenza di vincoli reonomi. In questo caso la derivata totale di \mathcal{L} rispetto al tempo è:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

e, utilizzando le equazioni di Lagrange,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{\alpha} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left(\frac{d}{dt} \dot{q}_{\alpha} \right) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (4.14)$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \mathcal{L} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 .$$

Definendo la **funzione Hamiltoniana** (o "funzione energia") ^[§]

$$h(q_1 \cdots q_n, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n; t) = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \mathcal{L} , \quad (4.15)$$

la relazione precedente può essere riscritta come

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} .$$

Ricaviamo così un risultato fondamentale: **se la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, ossia se $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$, la funzione energia h è una costante del moto.** Detto in altre parole, h è una quantità conservata e la (4.15) definisce un integrale primo del moto.

È importante sottolineare che la (4.14) dimostra anche che, in generale, *la Lagrangiana non è una costante del moto*, anche nel caso in cui non dipenda esplicitamente dal tempo.

Mostriamo ora che la funzione h rappresenta proprio (sotto certe condizioni) l'energia totale del sistema.

Consideriamo un sistema soggetto solo a *vincoli indipendenti dal tempo e conservativo*, tale cioè che esista un potenziale non dipendente dalle velocità; in tal caso anche la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, ossia

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \implies \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_{\alpha}, \dot{q}_{\alpha}) .$$

Ciò equivale a dire che il tempo scorre in modo uniforme per il sistema. Per quanto abbiamo appena visto, la funzione di Hamilton h definita dalla (4.15) è una costante del moto per questo sistema. Cerchiamo di capirne il significato fisico.

Osserviamo innanzitutto che se i vincoli sono olonomi-scleronomi allora T è una funzione quadratica omogenea delle velocità generalizzate, come mostrato dalla (3.26). Per il teorema di Eulero sulle forme omogenee ^[¶] si ha quindi

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = 2T . \quad (4.16)$$

Inoltre

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \quad (4.17)$$

^[§] La funzione h è identica in valore alla funzione Hamiltoniana $H = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} p_{\alpha} - \mathcal{L}$ che verrà introdotta nei prossimi capitoli. Qui usiamo una notazione diversa per sottolineare che h è funzione delle $2n$ variabili indipendenti $\{q_{\alpha}\}$ e $\{\dot{q}_{\alpha}\}$, oltre che del tempo, mentre la Hamiltoniana H verrà trattata come una funzione delle $2n$ variabili indipendenti $\{q_{\alpha}, p_{\alpha}\}$ (e del tempo).

^[¶] Ricordiamo che la definizione di funzione omogenea di grado k è: $f(\lambda x_1, \cdots \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \cdots x_n)$; se k è intero, f è un polinomio di grado k . Il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee asserisce che se f è una funzione omogenea di grado k delle variabili x_i , allora $\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$. Si può anche enunciare dicendo che f è autofunzione dell'operatore $\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con autovalore k .

poiché V non dipende dalle \dot{q}_α . Ne segue che la funzione h (4.15) è:

$$h = \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - \mathcal{L} = 2T - (T - V) = T + V, \quad (4.18)$$

che coincide con l'energia meccanica totale del sistema. Quindi **per sistemi conservativi soggetti a vincoli olonomi-scleronomi la funzione di Hamilton h coincide con l'energia totale del sistema**. La Hamiltoniana è conservata in conseguenza dell'uniformità del tempo, come abbiamo appena visto.

Abbiamo quindi dimostrato che l'identificazione della funzione (4.15) con l'energia totale richiede di essere in presenza di vincoli olonomi-scleronomi e di avere un potenziale non dipendente dalle velocità. Inoltre h è una costante del moto se la Lagrangiana \mathcal{L} non dipende esplicitamente dal tempo. Ovvero

1. $\left. \begin{array}{l} \text{vincoli olonomi-scleronomi} \\ \text{sistema conservativo} \end{array} \right\} \Rightarrow h = E = T + V$
2. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h \text{ conservata: } \frac{dh}{dt} = 0.$

Notiamo che questi due risultati, $h = \text{energia totale}$ e $h = \text{costante nel tempo}$, sono del tutto indipendenti tra loro, dato che provengono da condizioni diverse. Può capitare che un sistema sia soggetto a vincoli dipendenti dal tempo (reonomi) ma che la Lagrangiana non dipenda esplicitamente dal tempo: $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$. In questo caso h è una costante del moto, ma non è uguale all'energia totale del sistema. La funzione h dipende infatti, sia nel suo valore che nella sua forma funzionale, dalla scelta di coordinate generalizzate. Se queste, ad esempio, sono in rotazione, h varierà nel tempo. Diverso è il caso della Lagrangiana, che è definita da una formula $\mathcal{L} = T - V$ i cui termini hanno un significato ben preciso (energia cinetica e potenziale): un cambiamento di coordinate generalizzate può cambiare la forma *funzionale* di \mathcal{L} ma non il suo *valore numerico*. Al contrario l'uso di un diverso sistema di coordinate generalizzate nella definizione (4.15) può portare ad una quantità completamente differente, con diverso significato fisico, e addirittura in un sistema di coordinate h potrebbe conservarsi mentre in un altro potrebbe variare nel tempo.

Riassumendo, abbiamo dimostrato le seguenti relazioni fra le proprietà di invarianza (simmetrie) della Lagrangiana e la conservazione delle corrispondenti grandezze fisiche, ovvero la relazione fra l'esistenza di coordinate cicliche e leggi di conservazione:

- \mathcal{L} invariante per traslazioni lungo la direzione $\hat{n} \Rightarrow \vec{P} \cdot \hat{n} = \text{costante del moto}$
- \mathcal{L} invariante per rotazioni intorno a un asse di direzione $\hat{n} \Rightarrow \vec{L} \cdot \hat{n} = \text{costante del moto}$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ invarianza per traslazioni del tempo $\Rightarrow h$ (funzione energia) = costante del moto

Riesaminiamo ora, alla luce di questi teoremi, alcuni degli esempi discussi alla fine del capitolo precedente.

4.7 Esempi

1. Per la particella considerata nell'esempio 3.4.1, assumiamo che il potenziale dipenda da una sola coordinata, come ad esempio in un campo gravitazionale uniforme (assumendo l'asse z orientato verso l'alto):

$$V(z) = mgz.$$

Le equazioni del moto (3.37) diventano

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = 0 \quad m\ddot{z} = F_z = -mg.$$

È immediato vedere che le componenti p_x e p_y della quantità di moto della particella sono costanti del moto, in accordo con il fatto che le variabili x e y sono cicliche; la componente p_z invece varia. La traiettoria descritta da un corpo soggetto a questo potenziale è data dalla sovrapposizione di un moto uniforme in direzione x e y e da un moto uniformemente accelerato in direzione verticale: la ben nota parabola.

In questo esempio la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, non ci sono vincoli e la forza è conservativa: in base ai ragionamenti del paragrafo 4.6 concludiamo che l'energia totale $E = T + V$ è una costante del moto.

2. Anche all'esempio studiato nel paragrafo 3.4.6 (corpo su un piano inclinato mobile) si possono applicare le stesse considerazioni: la variabile x è ciclica ed il suo momento coniugato

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m + M)\dot{x} + \frac{m}{\tan \alpha} \dot{y}$$

è conservato, come è evidente dalla seconda delle equazioni (3.46). Esso ha il significato fisico di *componente orizzontale della quantità di moto del centro di massa*, che si muove di moto uniforme in direzione orizzontale (dove non ci sono forze applicate), mentre si muove di moto accelerato in direzione verticale, a causa della forza di gravità. Anche in questo caso $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$, il vincolo è olonomo-scleronomo e la forza (peso) è conservativa: di conseguenza l'energia totale è un'altra costante del moto.

3. Per la particella dell'esempio 3.4.1, supponiamo che il potenziale abbia simmetria centrale cioè sia della forma $V = V(r)$ (non dipende dall'angolo θ , che è perciò una variabile ciclica). La Lagrangiana del sistema è quindi invariante per rotazioni attorno all'asse z e, in base a quanto visto nel paragrafo 4.4, la componente z del momento angolare totale è conservata. Come nei precedenti esempi di forze conservative, ed essendo il sistema non soggetto a vincoli, l'energia totale è conservata.
4. Nel pendolo elastico e nel pendolo sferico del paragrafo 3.4.8 la variabile φ è ciclica ed il suo momento canonicamente coniugato, rispettivamente

$$\begin{aligned} p_\varphi &= mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = \text{costante} && \text{pendolo elastico} \\ p_\varphi &= m \dot{\varphi} \sin^2 \theta = \text{costante} && \text{pendolo sferico} \end{aligned}$$

è una costante del moto. Il significato fisico di p_φ , in entrambi i casi, è la componente z del momento angolare, che si conserva poiché entrambi i sistemi godono della simmetria per rotazioni attorno all'asse verticale passante per il punto di sospensione. Anche in questi casi l'energia totale è costante.

Capitolo 5

Piccole oscillazioni

Una classe di problemi meccanici per i quali è conveniente usare il formalismo Lagrangiano è quella di sistemi che oscillano intorno a posizioni di equilibrio.

La teoria delle piccole oscillazioni trova largo impiego, per le sue applicazioni, in diversi campi della Fisica, come ad esempio l'acustica, la fisica atomica e molecolare e la teoria dei circuiti elettrici. Essa apre inoltre la strada alla trattazione della meccanica dei sistemi continui e dei campi.

In questo capitolo mostreremo che se le deviazioni del sistema dalle condizioni di equilibrio stabile sono sufficientemente piccole il moto può essere descritto come quello di un sistema di oscillatori armonici accoppiati e illustreremo le tecniche per risolvere questo sistema.

5.1 Equilibrio

Consideriamo un sistema di N punti materiali con n gradi di libertà che obbedisce alle equazioni del moto di Lagrange (3.24).

È lecito chiedersi se possano esistere soluzioni di queste equazioni in cui tutte le coordinate generalizzate sono costanti nel tempo, in cui cioè tutti i punti del sistema sono fermi in una posizione: in questo caso il sistema è in *equilibrio*. Se le coordinate sono costanti, allora le velocità generalizzate sono nulle:

$$q_\alpha(t) = q_{0\alpha} = \text{costante} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad \implies \quad \dot{q}_{0\alpha} = 0 .$$

Nelle configurazioni di equilibrio l'energia cinetica è, a sua volta, nulla e la Lagrangiana coincide, a meno del segno, con l'energia potenziale: $\mathcal{L} = -V$.

Supponiamo inoltre che il sistema sia sottoposto a forze conservative e quindi l'energia potenziale sia funzione solo della posizione: $V = V(\{q_\alpha\})$ e che i vincoli siano indipendenti dal tempo: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$, $\forall i = 1, \dots, N$. In queste ipotesi l'energia cinetica, come abbiamo già visto, è una forma quadratica omogenea delle velocità generalizzate:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n M_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (5.1)$$

con

$$M_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \quad (5.2)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_\alpha} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \sum_{\beta=1}^n M_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \beta=1}^n \frac{\partial M_{\gamma\beta}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\gamma \dot{q}_\beta + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} &= 0 . \end{aligned}$$

All'equilibrio, che indicheremo per brevità con $q_0 \equiv (q_{01}, \dots, q_{0n})$, le velocità generalizzate sono nulle ($\dot{q}_\alpha = 0, \forall \alpha$) e quindi

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right|_{q_0} = -Q_\alpha|_{q_0} = 0 : \quad (5.3)$$

le configurazioni di equilibrio del sistema sono quelle in cui l'energia potenziale ha derivata nulla, cioè il potenziale ha un "estremo" (massimo, minimo o punto a sella). In modo del tutto equivalente, diremo che il sistema è in equilibrio quando le forze generalizzate agenti su di esso sono uguali a zero. [*]

Se la configurazione iniziale è quella di equilibrio, q_0 , e le velocità iniziali sono tutte nulle, $\dot{q}_0 = 0$, il sistema continuerà a essere in equilibrio indefinitamente: le coordinate $q_{\alpha 0}$ saranno soluzioni delle equazioni del moto in qualunque istante t .

5.1.1 Classificazione delle configurazioni di equilibrio di un sistema

Intuitivamente, è facile convincersi che quando l'equilibrio è stabile l'estremo del potenziale V deve essere un minimo. Supponiamo infatti che il sistema sia perturbato a partire dalla sua posizione di equilibrio e sia dE il corrispondente aumento di energia. Se la funzione V nella posizione di equilibrio è minima, ogni spostamento da questa posizione farà aumentare V . Per la conservazione dell'energia, le velocità dovranno allora diminuire fino ad annullarsi e ciò indica che il moto ha luogo in una regione limitata attorno alla posizione di equilibrio. D'altra parte, se per spostamenti dalla posizione di equilibrio V diminuisce (cioè se l'estremo è un massimo), l'energia cinetica e le velocità cresceranno indefinitamente e ciò corrisponde a un moto non confinato intorno alla posizione di equilibrio.

I diversi tipi di equilibrio si classificano in base al comportamento del sistema per piccoli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio stessa:

$$q_{\alpha 0} \rightarrow q_{\alpha 0} + \delta q_\alpha .$$

Nel caso di un sistema a un solo grado di libertà descritto dalla coordinata lagrangiana q , l'equilibrio si dice *stabile* se una piccola perturbazione dalla posizione di equilibrio ha come risultato solo un piccolo movimento attorno alla posizione di riposo e il sistema tende a tornare nella configurazione iniziale. In questo caso il potenziale $V(q)$ è minimo all'equilibrio e aumenta allontanandosi da esso (esempio: un pendolo a riposo).

L'equilibrio si dice *instabile* se una perturbazione infinitesima produce un moto che non è limitato attorno alla posizione di riposo. In questo caso il potenziale $V(q)$ è massimo all'equilibrio e diminuisce allontanandosi da esso (esempio: un uovo messo dritto).

L'equilibrio si dice *indifferente* se una trasformazione $q_0 \rightarrow q_0 + \delta q$ conduce ancora a una configurazione di equilibrio. In questo caso il potenziale $V(q)$ è costante (esempio: una matita appoggiata su un tavolo).

Per sistemi con n gradi di libertà, queste condizioni possono valere indipendentemente per ciascuna coordinata lagrangiana. In tutti i casi, come già osservato, le equazioni di Lagrange in una configurazione di equilibrio diventano

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0$$

[*] Se il sistema è soggetto a vincoli dipendenti dal tempo, e quindi la (5.1) è sostituita dalla forma più generale

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^n N_\alpha \dot{q}_\alpha + R(q_1, \dots, q_n), \quad (5.4)$$

è facile dimostrare che le configurazioni di equilibrio corrispondono agli estremi del "potenziale efficace" $V_{eff} \equiv V - R$:

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} (V - R) = 0. \quad (5.5)$$

e le configurazioni di equilibrio si trovano quindi cercando gli estremi del potenziale. Per definizione diremo che il sistema si trova in una configurazione di equilibrio

- **stabile** se l'equilibrio è stabile rispetto alla variazione di *tutte* le coordinate: in questo caso il potenziale $V(q_1, \dots, q_n)$ è minimo;
- **instabile** se esiste almeno una coordinata rispetto alla quale l'equilibrio è instabile: il potenziale $V(q_1, \dots, q_n)$ ha di solito un punto a sella, o un massimo nel caso particolare in cui ci sia instabilità rispetto a tutte le coordinate;
- **indifferente** se esistono una o più direzioni rispetto alle quali l'equilibrio è indifferente - $V(q_1, \dots, q_n)$ costante - e lungo le altre direzioni V è minimo (altrimenti si tratterebbe di equilibrio instabile).

5.1.2 Equilibrio di un sistema a due gradi di libertà

Consideriamo il caso particolare di un sistema con due gradi di libertà corrispondenti alle coordinate lagrangiane q_1 e q_2 . Per classificarne le configurazioni di equilibrio è utile introdurre la matrice Hessiana, i cui elementi sono le derivate seconde dell'energia potenziale

$$H(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad H_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 V(q_1, q_2)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}$$

e studiarne il determinante nel punto stazionario $q_0 = (q_{10}, q_{20})$, nel quale $\left. \frac{\partial V}{\partial q_1} \right|_{q_0} = \left. \frac{\partial V}{\partial q_2} \right|_{q_0} = 0$:

$$H_0 = \det H(q_{10}, q_{20}) = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix} = V_{11}V_{22} - V_{12}V_{21}$$

dove $V_{\alpha\beta} \equiv H_{\alpha\beta}(q_{10}, q_{20})$.

Ricordiamo che

- se $H_0 > 0$ e $V_{11} > 0$ il punto q_0 è un minimo del potenziale
- se $H_0 > 0$ e $V_{11} < 0$ il punto q_0 è un massimo del potenziale
- se $H_0 < 0$ il punto q_0 è un punto a sella
- se $H_0 = 0$ non si può concludere nulla sulla natura del punto di equilibrio, che occorre studiare con altri metodi.

Esempio

Un sistema materiale, situato nel piano verticale xy , è costituito da un punto materiale di massa m , indicato con P , che si muove su una circonferenza di raggio a e centro O , ed è collegato mediante una molla ideale (costante elastica k , lunghezza a riposo nulla) ad un altro punto materiale Q di massa m , vincolato a muoversi sull'asse x . Sul sistema agisce la forza di gravità, non ci sono attriti. Scegliamo come coordinate generalizzate l'angolo θ che individua il punto P sulla circonferenza e l'ascissa x del punto Q . Abbiamo:

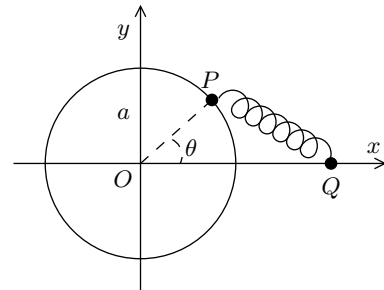
$$x_P = a \cos \theta \quad y_P = a \sin \theta \quad x_Q = x \quad y_Q = 0$$

L'energia potenziale totale è

$$V = mg(y_P + y_Q) + \frac{1}{2}k \overline{PQ}^2 = mga \sin \theta + \frac{1}{2}k(a^2 + x^2 - 2ax \cos \theta)$$

e i punti di equilibrio si ricavano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\ x - a \cos \theta = 0 \\ mga \cos \theta + kax \sin \theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \cos \theta \\ \cos \theta (mg + ka \sin \theta) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$



Le due posizioni $(x = 0, \theta = \frac{\pi}{2})$ e $(x = 0, \theta = -\frac{\pi}{2})$ sono di equilibrio, per ogni valore dei parametri a , m e k . Se poi $ka > mg$ compare un'altra coppia di posizioni di equilibrio, simmetriche rispetto all'asse verticale:

$$\left(a\sqrt{1 - \left(\frac{mg}{ka}\right)^2}, -\arcsin \frac{mg}{ka} \right) \quad \left(-a\sqrt{1 - \left(\frac{mg}{ka}\right)^2}, \pi + \arcsin \frac{mg}{ka} \right) \quad (5.7)$$

Consideriamo prima il caso $ka < mg$, in cui ci sono solo due punti di equilibrio; dallo studio della funzione V attorno a questi punti stazionari, ricaviamo che $(x = 0, \theta = \frac{\pi}{2})$ è instabile (punto a sella) mentre $(x = 0, \theta = -\frac{\pi}{2})$ è stabile.

Nel caso invece in cui $ka > mg$, le due configurazioni $(x = 0, \theta = \pm \frac{\pi}{2})$ sono entrambe instabili (punti a sella), mentre i due nuovi punti dati dalle (5.7) sono stabili.

Si noti che in tutte le configurazioni di equilibrio $x = x_Q = x_P$, cioè la molla è verticale: il punto Q si trova quindi all'interno della circonferenza o su di essa.

Lo studio delle equazioni del moto si può continuare normalmente. L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_Q^2 + \dot{y}_Q^2) = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

e la lagrangiana risulta (omettendo un termine costante irrilevante)

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mga\sin\theta - \frac{k}{2}x^2 + kax\cos\theta.$$

Equazioni del moto:

$$m\ddot{x} = -kx + ka\cos\theta \quad m\ddot{\theta} = -mg\cos\theta - kx\sin\theta.$$

È possibile ritrovare i punti di equilibrio anche dalle equazioni del moto, cercando le soluzioni costanti, cioè imponendo che tutte le velocità e tutte le accelerazioni siano nulle. Si ritrovano così le equazioni del sistema (5.6).

5.2 Equazioni del moto nell'intorno di configurazioni di equilibrio stabile

Considereremo ora il moto del sistema nelle immediate vicinanze di una configurazione di equilibrio *stabile*. Poiché gli spostamenti dalla posizione di equilibrio devono essere piccoli, si può sviluppare ogni funzione in serie di Taylor attorno alla posizione di equilibrio e tenere conto solo dei termini di ordine più basso. Indicheremo con η_α le variazioni che le coordinate generalizzate subiscono a partire dalla posizione di equilibrio:

$$q_\alpha(t) = q_{0\alpha} + \eta_\alpha(t) \quad (5.8)$$

e assumeremo queste variazioni come nuove coordinate generalizzate per descrivere il moto.

Sviluppando in serie l'energia potenziale attorno a q_0 , cioè intorno a $\eta_\alpha = 0 \ \forall \alpha = 1, \dots, n$, si ottiene:

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right)_{q_0} \eta_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_{q_0} \eta_\alpha \eta_\beta + \dots \quad (5.9)$$

I termini lineari in η_α sono automaticamente nulli in virtù delle condizioni di equilibrio. Il primo termine della serie rappresenta l'energia potenziale nella posizione di equilibrio; si può rendere uguale a zero anche questo termine, cambiando lo zero arbitrario del potenziale in modo da farlo coincidere col potenziale corrispondente alla posizione di equilibrio. In prima approssimazione quindi, V si riduce ai soli termini quadratici:

$$V(q_1, \dots, q_n) \simeq \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right)_{q_0} \eta_\alpha \eta_\beta \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} V_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta, \quad (5.10)$$

dove si sono indicate le derivate seconde di V calcolate all'equilibrio con le costanti $V_{\alpha\beta}$, dipendenti solo dai valori che le coordinate lagrangiane assumono in corrispondenza alla configurazione di equilibrio q_0 . Risulta evidente dalla loro stessa definizione che queste costanti sono simmetriche: $V_{\alpha\beta} = V_{\beta\alpha}$.

Anche per l'energia cinetica si può ottenere uno sviluppo in serie analogo. La (5.1) può essere riscritta come

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\alpha \dot{\eta}_\beta. \quad (5.11)$$

In generale, i coefficienti $M_{\alpha\beta}$ sono funzioni delle coordinate q_α , ma pure essi possono essere sviluppati in serie di Taylor attorno alla configurazione di equilibrio:

$$M_{\alpha\beta}(q_1, \dots, q_n) = M_{\alpha\beta}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \sum_{\gamma} \left(\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma} \right)_{q_0} q_\gamma + \dots \quad (5.12)$$

Poiché la (5.11) è già quadratica nelle $\dot{\eta}_\alpha$, si ottiene T al più basso ordine di approssimazione trascurando tutti i termini, escluso il primo, dello sviluppo in serie di ogni $M_{\alpha\beta}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\alpha \dot{\eta}_\beta \quad \text{con} \quad T_{\alpha\beta} \equiv M_{\alpha\beta}(q_{01}, \dots, q_{0n}). \quad (5.13)$$

È evidente che anche le costanti $T_{\alpha\beta}$ devono essere simmetriche sotto lo scambio di α con β , poiché i singoli termini della (5.13) non cambiano per lo scambio di indici.

Dalle (5.10) e (5.13) si ottiene che la Lagrangiana *linearizzata* è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (T_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\alpha \dot{\eta}_\beta - V_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta) \quad (5.14)$$

e conduce alle seguenti equazioni del moto linearizzate:

$$\sum_{\beta} T_{\alpha\beta} \ddot{\eta}_\beta + \sum_{\beta} V_{\alpha\beta} \eta_\beta = 0, \quad \forall \alpha = 1, \dots, n \quad (5.15)$$

dove si è fatto uso esplicitamente delle proprietà di simmetria dei coefficienti $T_{\alpha\beta}$ e $V_{\alpha\beta}$. Ciascuna delle equazioni (5.15) dipenderà, in generale, da *tutte* le coordinate η_α ed è questo sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti e accoppiate che deve essere risolto per ricavare il moto attorno alla posizione di equilibrio.

In alcuni casi (per esempio se le coordinate lagrangiane sono quelle cartesiane) l'energia cinetica può essere scritta in forma diagonale: $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \delta_{\alpha\beta}$. In questo caso la Lagrangiana e le conseguenti equazioni del moto diventano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(T_\alpha \dot{\eta}_\alpha^2 - \sum_{\beta} V_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \right) \Rightarrow T_\alpha \ddot{\eta}_\alpha + \sum_{\beta} V_{\alpha\beta} \eta_\beta = 0, \quad (5.16)$$

che formano ancora un sistema di equazioni differenziali accoppiate.

Le equazioni (5.15) possono essere espresse in forma matriciale. Indicando con \mathbf{T} e \mathbf{V} le matrici $n \times n$ reali e simmetriche di elementi $T_{\alpha\beta}$ e $V_{\alpha\beta}$, con $\boldsymbol{\eta}$ il vettore colonna di elementi η_α (con $\alpha = 1, \dots, n$) e con $\boldsymbol{\eta}^T$ il suo trasposto, la Lagrangiana linearizzata si può riscrivere come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\eta}) \quad (5.17)$$

e le equazioni del moto come

$$\mathbf{T} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{V} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \quad (5.18)$$

Osserviamo innanzitutto che le equazioni (5.15) sono lineari: ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione. Occorre quindi trovare n soluzioni linearmente indipendenti, e l'integrale generale sarà una generica combinazione lineare del sistema, con coefficienti fissati dalle condizioni iniziali.

Queste equazioni del moto sono accoppiate perchè le matrici \mathbf{T} e \mathbf{V} in (5.18) non sono diagonali. Se lo fossero, cioè se fosse $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ e $V_{\alpha\beta} = V_\alpha \delta_{\alpha\beta}$, si otterrebbe immediatamente dalle (5.15) un sistema di n equazioni disaccoppiate

$$\ddot{\eta}_\alpha + \lambda_\alpha \eta_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\eta}_\alpha + \lambda_\alpha \eta_\alpha = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, n \quad (5.19)$$

con $\lambda_\alpha = T_\alpha/V_\alpha$, di soluzione

$$\eta_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \phi_\alpha) \quad (5.20)$$

ovvero una soluzione in cui ogni coordinata oscilla intorno alla posizione di equilibrio $\eta_\alpha = 0$ con frequenza $\omega_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha}$. Si noti che $V_\alpha = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha^2} \right|_{q_0} > 0$ poiché q_0 è una configurazione di equilibrio stabile (rispetto a tutte le coordinate lagrangiane) e $T_\alpha > 0$, quindi $\lambda_\alpha > 0$. Le $2n$ costanti di integrazione a_α e ϕ_α saranno fissate dalle condizioni iniziali $\eta_\alpha(0)$ e $\dot{\eta}_\alpha(0)$ al tempo $t = 0$.

Il problema della soluzione delle equazioni del moto (5.15), o, in forma matriciale, (5.18), si riduce quindi a quello di diagonalizzare simultaneamente le matrici \mathbf{T} e \mathbf{V} .

Per farlo, seguendo tecniche standard, cerchiamo un nuovo sistema di coordinate $\{\zeta_\alpha\}$ legato alle vecchie coordinate $\{\eta_\alpha\}$ da una trasformazione lineare invertibile \mathbf{A}

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}^T = \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{A}^T \quad (5.21)$$

tale che

$$\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{1} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n), \quad (5.23)$$

cioè che le matrici che rappresentano l'energia cinetica e potenziale siano, in questa nuova base, diagonali e che l'energia cinetica sia rappresentata in questa base dalla matrice identità.

Sostituendo la (5.21) nella (5.18) e moltiplicando a sinistra per \mathbf{A}^T si verifica che il sistema (5.18) si riduce allora ad un sistema di n equazioni disaccoppiate

$$\ddot{\boldsymbol{\zeta}} + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0} \Rightarrow \ddot{\zeta}_\alpha + \lambda_\alpha \zeta_\alpha = 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, n. \quad (5.24)$$

La Lagrangiana si scriverà, in termini delle nuove coordinate, come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} \boldsymbol{\zeta} \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}} - \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\zeta} \right) \quad (5.25)$$

somma di n Lagrangiane indipendenti

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \left(\dot{\zeta}_\alpha^2 - \lambda_\alpha \zeta_\alpha^2 \right) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{L}_\alpha. \quad (5.26)$$

Le soluzioni delle (5.24) sono

$$\text{se } \lambda_\alpha > 0 : \quad \zeta_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \phi_\alpha) \quad \text{con } \omega_\alpha \equiv \sqrt{\lambda_\alpha} \quad (5.27)$$

$$\text{se } \lambda_\alpha < 0 : \quad \zeta_\alpha = C e^{-l_\alpha t} + D e^{+l_\alpha t} \quad \text{con } l_\alpha \equiv \sqrt{-\lambda_\alpha} \quad (5.28)$$

Se esistono dei λ_α negativi, la (5.28) mostra che le corrispondenti coordinate ζ_α - e quindi anche le η_α , che ne sono combinazioni lineari - si allontanano indefinitamente col tempo t dalla posizione di equilibrio, che risulta quindi instabile. Pertanto, se partiamo da una configurazione di equilibrio stabile dovremo necessariamente trovare *tutti* i λ_α positivi: $\lambda_\alpha = \omega_\alpha^2 > 0$. Tutte le soluzioni ζ_α nell'intorno di un punto di equilibrio stabile saranno pertanto di tipo oscillatorio (5.27).

Le nuove coordinate ζ_α , che oscillano con frequenze definite ω_α , si chiamano **coordinate normali** o **modi normali di vibrazione** e permettono, come abbiamo visto, di disaccoppiare il sistema di equazioni differenziali (5.15).

Cerchiamo ora la matrice \mathbf{A} che soddisfa le (5.22) e (5.23).

Caso $\mathbf{T} = \mathbf{1}_n$

Consideriamo, per il momento, il caso particolare in cui \mathbf{T} è la matrice identità $\mathbf{1}$ ($T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$). Allora l'unica matrice da diagonalizzare è \mathbf{V} e per farlo, come noto, occorre trovare gli autovalori λ_α risolvendo l'equazione secolare

$$\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{1}_n) = 0 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (5.29)$$

e i corrispondenti autovettori $\zeta^{(\alpha)}$ tali che

$$\mathbf{V} \zeta^{(\alpha)} = \lambda_\alpha \zeta^{(\alpha)} \quad (5.30)$$

dove \mathbf{V} è la matrice a n righe e n colonne di elementi $V_{\alpha\beta}$ e $\zeta^{(\alpha)}$ un vettore a n dimensioni di componenti a_α :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \zeta^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} a_1^{(\alpha)} \\ a_2^{(\alpha)} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n^{(\alpha)} \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Poiché \mathbf{V} è simmetrica e reale, i corrispondenti autovalori sono reali. Inoltre gli autovalori $\lambda_\alpha = \omega_\alpha^2$ sono tutti positivi poiché la matrice \mathbf{V} è definita positiva.

Con gli n autovettori $\zeta^{(\alpha)}$ si costruisce la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \cdots & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \cdots & a_2^{(n)} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

che diagonalizza \mathbf{V} mediante una trasformazione di similitudine (5.23). Inoltre, gli n autovettori $\zeta^{(\alpha)}$ sono fra loro ortogonali e la matrice di diagonalizzazione \mathbf{A} è, di conseguenza, ortogonale: $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{1}$. Tutto ciò è ben noto dalla geometria elementare.

Caso \mathbf{T} diagonale

Nel caso un po' più generale in cui \mathbf{T} non sia semplicemente l'identità ma sia comunque una matrice diagonale, è sufficiente riscalarle opportunamente le coordinate generalizzate per ricondursi al caso precedente:

$$T_{\alpha\beta} = m_\alpha \delta_{\alpha\beta} \rightarrow \eta'_\alpha = \sqrt{m_\alpha} \eta_\alpha$$

Caso generale: \mathbf{T} non diagonale

Nel caso ancora più generale che stiamo considerando, invece, \mathbf{T} non è diagonale e dobbiamo diagonalizzare simultaneamente \mathbf{T} e \mathbf{V} .

In questo caso l'equazione secolare diventa

$$\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}) = \begin{vmatrix} V_{11} - \lambda T_{11} & V_{12} - \lambda T_{12} & V_{13} - \lambda T_{13} & \cdots \\ V_{21} - \lambda T_{21} & V_{22} - \lambda T_{22} & & \\ V_{31} - \lambda T_{31} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{vmatrix} = 0, \quad (5.33)$$

che è, come prima, un'equazione algebrica di n -esimo grado in λ : le sue radici forniscono le frequenze per le quali le equazioni del moto hanno una soluzione non banale. Si noti tuttavia che in questo caso le λ_α non sono gli autovalori della matrice \mathbf{V} perchè \mathbf{T} non è diagonale.

Inserendo questi valori di λ_α nelle equazioni

$$\mathbf{V} \boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)} = \lambda_\alpha \mathbf{T} \boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)} \quad (5.34)$$

(analoghe alle (5.30) per \mathbf{T} non diagonale) si ricavano quindi i vettori $\boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)}$. Si noti però che in questa equazione l'azione di \mathbf{V} su $\boldsymbol{\zeta}$ non è semplicemente quella di riprodurre il vettore moltiplicato per il fattore λ , come nel problema ordinario agli autovalori. In questo caso, l'“autovettore” $\boldsymbol{\zeta}$ è tale che \mathbf{V} agendo su $\boldsymbol{\zeta}$ produce una quantità multipla di ciò che produce \mathbf{T} agendo su $\boldsymbol{\zeta}$.

Si può dimostrare ^[†] che anche in questo caso

1. gli “autovalori” λ per i quali l'equazione (5.34) risulta soddisfatta sono tutti reali come conseguenza del fatto che le matrici \mathbf{T} e \mathbf{V} sono reali e simmetriche, e che devono essere tutti positivi se il punto stazionario intorno al quale abbiamo sviluppato il potenziale è un punto di equilibrio stabile:

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha^*, \quad \lambda_\alpha > 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, n \quad (5.35)$$

Inoltre i corrispondenti “autovettori” $\boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)}$ sono “ortonormali”, nel senso che

$$\boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)\mathbf{T}} \mathbf{T} \boldsymbol{\zeta}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.36)$$

Se \mathbf{T} fosse la matrice identità questa sarebbe l'ordinaria relazione di ortonormalità di due vettori. In questo caso, invece, la si può considerare una condizione di ortonormalità in uno spazio che non è in generale cartesiano, ma possiede assi obliqui, e nel quale la matrice di elementi $T_{\alpha\beta}$ rappresenta il tensore della metrica.

2. La matrice \mathbf{A} data dalla (5.32), formata con gli “autovettori” $\boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)}$, diagonalizza simultaneamente sia \mathbf{T} che \mathbf{V} :

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{1} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \mathbf{V} \mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda}, \quad (5.38)$$

come richiesto nelle (5.22) e (5.23).

Il metodo appena esposto si può vedere come una generalizzazione di un problema agli autovalori.

5.3 Frequenze normali e modi normali di vibrazione

Riassumendo, la procedura da seguire per risolvere le equazioni del moto linearizzate

$$\sum_{\beta} T_{\alpha\beta} \ddot{\eta}_{\beta} + \sum_{\beta} V_{\alpha\beta} \eta_{\beta} = 0, \quad \forall \alpha = 1, \dots, n \quad (5.39)$$

è la seguente:

1. si trovano le frequenze di oscillazione dei modi normali risolvendo l'equazione secolare

$$\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0, \quad (5.40)$$

che fornisce n soluzioni ω_α , con $\alpha = 1, \dots, n$;

^[†]H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, ed. Addison Wesley, cap.6

2. per ogni modo normale ω_α si risolve l'equazione matriciale (sistema di n equazioni algebriche)

$$\mathbf{V} \boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \mathbf{T} \boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)} \quad (5.41)$$

che fornisce i corrispondenti “autovettori”

$$\boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} a_1^{(\alpha)} \\ a_2^{(\alpha)} \\ \vdots \\ a_n^{(\alpha)} \end{pmatrix}; \quad (5.42)$$

3. la matrice $n \times n$ \mathbf{A} che ha come colonne i vettori $\boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)}$, data dalla (5.32), rende simultaneamente diagonali le matrici \mathbf{T} e \mathbf{V} :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} = \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (5.43)$$

Ne segue che Lagrangiana si può esprimere come una somma di n Lagrangiane indipendenti, ciascuna corrispondente a un modo normale, cioè a una frequenza ω_α : $\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{L}_\alpha$ e le corrispondenti equazioni del moto si disaccoppiano.

Le equazioni del moto sono pertanto soddisfatte da soluzioni di tipo oscillatorio della forma

$$\boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)}(t) = \boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)} \cos(\omega_\alpha t + \phi_\alpha), \quad (5.44)$$

corrispondenti, in generale (se non c'è degenerazione), a un insieme di n frequenze normali ω_α , con $\alpha = 1, \dots, n$.

L'integrale generale delle equazioni

$$\mathbf{T} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{V} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad (5.45)$$

che governano le piccole oscillazioni sarà dato da una sovrapposizione di oscillazioni corrispondenti a tutte le frequenze possibili:

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)}(t) = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \boldsymbol{\zeta}^{(\alpha)} \cos(\omega_\alpha t + \phi_\alpha) \quad (5.46)$$

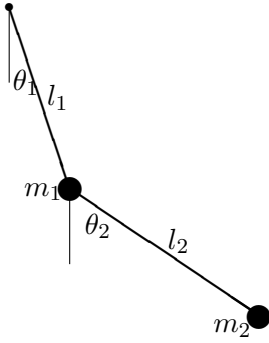
dove i coefficienti c_α e le fasi ϕ_α sono determinate dalle condizioni iniziali.

Se si sposta leggermente il sistema dalla sua posizione di equilibrio e poi lo si lascia libero, esso compirà delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, con frequenze $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Le soluzioni dell'equazione (5.40) sono anche chiamate **frequenze di vibrazione libera** o **frequenze di risonanza** del sistema.

E' utile sottolineare che le coordinate normali non sono le coordinate fisiche del sistema, che ne sono combinazioni lineari. Ogni coordinata normale corrisponde a una vibrazione del sistema di data frequenza e queste oscillazioni componenti sono i **modi normali di vibrazione**. Relativamente a ogni modo di vibrazione, tutte le particelle vibrano con la stessa frequenza. Il moto completo si costruisce come somma dei modi normali, pesati con le opportune ampiezze contenute nei coefficienti c_α . Questa differenza risulta chiara dai seguenti esempi.

5.3.1 Esempio 1: il pendolo doppio

Un pendolo doppio è un sistema costituito da un punto materiale pesante di massa m_1 sospeso ad un filo flessibile e inestensibile di lunghezza l_1 e da un secondo pendolo di massa m_2 sospeso sotto di esso ad un filo di lunghezza l_2 . Il sistema si muove in un piano verticale, sotto l'azione della forza peso.



Supporremo per semplicità $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$.

Il sistema ha due gradi di libertà.

Scegliamo come coordinate lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 , legati alle coordinate cartesiane x_i e y_i dalle relazioni:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1 & y_1 &= -l \cos \theta_1 \\ x_2 &= x_1 + l \sin \theta_2 & y_2 &= y_1 - l \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (5.47)$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & \dot{y}_1 &= l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 & \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + l \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (5.48)$$

Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m l^2 (2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) . \quad (5.49)$$

Energia potenziale

$$V = mgy_1 + mgy_2 = -mgl (2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) . \quad (5.50)$$

Lo studio di V mostra che la posizione $\theta_1 = \theta_2 = 0$ è di equilibrio stabile, mentre le altre posizioni che estremizzano l'energia potenziale, $(\theta_1, \theta_2) = (0, \pi)$, $(\pi, 0)$ e (π, π) , sono di equilibrio instabile.

Sviluppiamo quindi V intorno a $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$:

$$V \simeq \frac{1}{2}mgl (2 \theta_1^2 + \theta_2^2) , \quad (5.51)$$

dove abbiamo trascurato termini costanti inessenziali. Analogamente, lo sviluppo dell'energia cinetica fino all'ordine θ^2 conduce a

$$T \simeq \frac{1}{2}m l^2 (2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) . \quad (5.52)$$

Si noti che in questo caso V è diagonale nelle variabili θ_1, θ_2 mentre T contiene termini misti $\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$. Dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m l^2 (2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) - \frac{1}{2}mgl (2 \theta_1^2 + \theta_2^2) \quad (5.53)$$

si ottengono le equazioni del moto (accoppiate) nell'intorno della posizione equilibrio

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\omega_0^2\theta_1 = 0 \quad (5.54)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = 0 , \quad (5.55)$$

dove $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ è la frequenza di un pendolo semplice di lunghezza l .

Per disaccoppiare queste equazioni cerchiamo le coordinate normali seguendo il procedimento illustrato prima.

Le matrici rappresentative di T e V sono

$$\mathbf{T} = ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = mgl \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

e l'equazione che fornisce le frequenze di risonanza

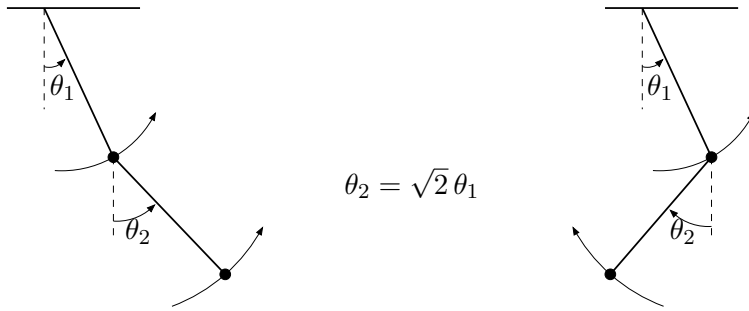
$$\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = (ml)^2 \begin{vmatrix} 2g - 2l\omega^2 & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \omega^2 = (2 \mp \sqrt{2}) \omega_0^2 \equiv \omega_{\mp}^2. \quad (5.57)$$

I modi normali $\zeta^{(\mp)}$ si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\zeta^{(-)} &= \omega_-^2 \mathbf{T}\zeta^{(-)} \\ \mathbf{V}\zeta^{(+)} &= \omega_+^2 \mathbf{T}\zeta^{(+)} \end{aligned} \quad (5.58)$$

le cui soluzioni sono

$$\zeta^{(-)} = c_- \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \zeta^{(+)} = c_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5.59)$$



Nel modo $\zeta^{(-)}$ i due pendoli oscillano in fase con ampiezze diverse (l'ampiezza di oscillazione del pendolo 2 è $\sqrt{2}$ volte quella del pendolo 1) e con la stessa frequenza $\omega_- = \omega_0 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Nel modo $\zeta^{(+)}$ i due pendoli oscillano in opposizione di fase con ampiezze diverse (l'ampiezza di oscillazione del pendolo 2 è $\sqrt{2}$ volte quella del pendolo 1) e con frequenza $\omega_+ = \omega_0 \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Per determinare i coefficienti di normalizzazione c_- e c_+ dobbiamo imporre

$$\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad (5.60)$$

dove \mathbf{A} è la matrice costruita disponendo i vettori $\zeta^{(-)}$ e $\zeta^{(+)}$ rispettivamente nella prima e seconda colonna, ovvero:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_- & c_+ \\ \sqrt{2}c_- & -\sqrt{2}c_+ \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} c_- & \sqrt{2}c_- \\ c_+ & -\sqrt{2}c_+ \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

La matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A}$ è effettivamente diagonale e i suoi elementi diagonali valgono 1 se

$$c_-^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4ml^2} \quad \text{e} \quad c_+^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4ml^2}. \quad (5.62)$$

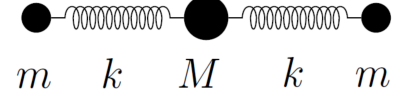
E' facile verificare, utilizzando le (5.61) e (5.56), che $\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\omega_-^2, \omega_+^2)$.

La trasformazione $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}$ permette infine di passare dalle coordinate normali alle coordinate angolari $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ e le trasformazioni (5.47) alle coordinate cartesiane x_i, y_i .

5.3.2 Esempio 2: vibrazioni libere di una molecola lineare triatomica

Consideriamo un semplice modello di molecola triatomica lineare illustrato nella figura, con un atomo interno di massa M e due atomi esterni di masse uguali m .

Sia k la costante elastica delle molle e b la distanza di equilibrio fra gli atomi. Consideriamo solo vibrazioni longitudinali e denotiamo con $x_1 < x_2 < x_3$ le coordinate dei tre atomi e con x_i^0 ($i=1,2,3$) le corrispondenti posizioni di equilibrio.



L'energia potenziale del sistema è

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2 \quad (5.63)$$

(all'equilibrio $V = 0$ poiché $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = b$).

Introducendo gli spostamenti dalle posizioni di equilibrio $\eta_i = x_i - x_i^0$, l'energia potenziale diventa

$$V = \frac{k}{2} (\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3) \quad (5.64)$$

ed è rappresentata dalla matrice (reale e simmetrica)

$$\mathbf{V} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Analogamente l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} (m\dot{\eta}_1^2 + M\dot{\eta}_2^2 + m\dot{\eta}_3^2) \quad (5.66)$$

è rappresentata dalla matrice (reale, simmetrica e diagonale)

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Dalla Lagrangiana $\mathcal{L} = T - V$ si ricavano le seguenti equazioni del moto per

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta}_1 + k\eta_1 &= k\eta_2 \\ M\ddot{\eta}_2 + 2k\eta_2 &= k(\eta_1 + \eta_3) \\ m\ddot{\eta}_3 + k\eta_3 &= k\eta_2 \end{aligned} \quad (5.68)$$

accoppiate nelle coordinate $\eta_i(t)$.

Per disaccoppiarle seguiamo la procedura appena illustrata.

L'equazione secolare

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}| = \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.69)$$

ha tre soluzioni distinte

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}. \quad (5.70)$$

- La soluzione $\omega_1 = 0$ non corrisponde ad un moto oscillatorio. Le equazioni del moto per la coordinata normale $\zeta^{(1)}$ di componenti a_1, a_2, a_3 sono $\ddot{\zeta}^{(1)}(t) = 0$ e hanno soluzione $\dot{\zeta}^{(1)}(t)_i = \text{costante}$, $\forall i=1,2,3$: la molecola è traslata rigidamente lungo il suo asse senza che l'energia potenziale cambi. Siamo quindi nel caso di equilibrio indifferente.

Ne segue che i gradi di libertà vibrazionali della molecola non sono tre ma due. Il terzo grado di libertà è associato alla traslazione del centro di massa del sistema senza vibrazione.

- La soluzione $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ è la frequenza di una massa m attaccata all'estremità libera di una molla di costante elastica k . E' ragionevole aspettarsi che solo i due atomi di massa m partecipino a questo modo di vibrazione, mentre l'atomo centrale di massa M rimane stazionario.
- La soluzione $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}$ è quindi il solo modo di vibrazione a cui partecipa l'atomo M .

Per verificare queste ipotesi calcoliamo i corrispondenti “autovettori” $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ e $\zeta^{(3)}$. Risolviamo cioè il sistema di equazioni

$$\mathbf{V}\zeta^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \mathbf{T}\zeta^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (5.71)$$

Si noti che ogni “autovalore” ω_α genera un sistema di tre equazioni algebriche per le componenti del corrispondente “autovettore”:

$$\omega_\alpha \Rightarrow \sum_{\gamma=1}^3 V_{\beta\gamma} a_\gamma^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2 \sum_{\gamma=1}^3 T_{\beta\gamma} a_\gamma^{(\alpha)} \quad \beta = 1, 2, 3 \quad (5.72)$$

La risoluzione del sistema (5.72) insieme alla “condizione di normalizzazione”

$$\zeta^{(\alpha)T} \mathbf{T} \zeta^{(\alpha)} = 1 \rightarrow m \left(a_1^{(\alpha)}\right)^2 + M \left(a_2^{(\alpha)}\right)^2 + m \left(a_3^{(\alpha)}\right)^2 = 1 \quad (5.73)$$

conduce ai seguenti risultati per i modi normali di vibrazione:

$$\zeta^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \zeta^{(3)} = \sqrt{\frac{1}{2m(1+2m/M)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

Il primo modo, $\zeta^{(1)}$, corrisponde alla situazione in cui i coefficienti a_i sono uguali fra loro, cioè, come previsto, ad un moto traslatorio globale della catena. La sua equazione del moto è infatti

$$\ddot{\zeta}^{(1)}(t) = 0 \rightarrow \dot{\zeta}^{(1)}(t) = \mathbf{A}_1 = \text{costante} \rightarrow \zeta^{(1)}(t) = \mathbf{A}_1 t + \mathbf{B}_1.$$

Il secondo modo, $\zeta^{(2)}$, obbedisce all'equazione del moto

$$\ddot{\zeta}^{(2)}(t) = \omega_2^2 \zeta^{(2)}(t) \rightarrow \zeta^{(2)}(t) = \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t) + \mathbf{B}_2 \sin(\omega_2 t)$$

con $\omega_2 = \sqrt{k/m}$: in questo modo le coordinate η_1 e η_3 oscillano in opposizione di fase con ampiezze uguali, mentre $\eta_2 = 0$.

Nel terzo modo

$$\ddot{\zeta}^{(3)}(t) = \omega_3^2 \zeta^{(3)}(t) \rightarrow \zeta^{(3)}(t) = \mathbf{A}_3 \cos(\omega_3 t) + \mathbf{B}_3 \sin(\omega_3 t)$$

con $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}$: gli atomi 1 e 3 oscillano in fase con ampiezze uguali, mentre l'atomo centrale oscilla con ampiezza doppia e fase opposta rispetto a 1 e 2.

La matrice di trasformazione \mathbf{A} formata dai tre vettori (5.74) sulle sue colonne è tale che $\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2)$, come si può facilmente verificare. Si noti che \mathbf{A} non è ortogonale. Inoltre \mathbf{A} rende diagonale la matrice \mathbf{V} trasformandola in $\mathbf{\Lambda}$, ma gli elementi diagonali di $\mathbf{\Lambda}$ non sono gli autovalori di \mathbf{V} .

Infine, per passare dalle coordinate normali $\zeta^{(\alpha)}$ alle coordinate “fisiche” $\eta^{(\alpha)}$ occorre applicare la trasformazione (5.21) $\eta = \mathbf{A}\zeta$, che fornisce:

$$\eta_1 = x\zeta_1 + y\zeta_2 + \frac{M}{m}z\zeta_3 \quad (5.75)$$

$$\eta_2 = x\zeta_1 - 2z\zeta_3 \quad (5.76)$$

$$\eta_3 = x\zeta_1 - y\zeta_2 + \frac{M}{m}z\zeta_3, \quad (5.77)$$

dove abbiamo definito per brevità $x = \frac{1}{\sqrt{2m+M}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2m}}$ e $z = \sqrt{\frac{m}{2M(2m+M)}}$. Dalle espressioni (5.75-5.77) si vede esplicitamente che le coordinate η_i , che denotano gli spostamenti degli atomi della molecola dalle loro posizioni di equilibrio, sono combinazioni lineari dei modi normali di vibrazione.

La trasformazione inversa $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}^T \mathbf{T}\boldsymbol{\eta}$ fornisce

$$\zeta_1 = xm\eta_1 + xm\eta_2 + xm\eta_3 \quad (5.78)$$

$$\zeta_2 = ym\eta_1 - ym\eta_3 \quad (5.79)$$

$$\zeta_3 = zM\eta_1 - 2Mz\eta_2 + Mz\eta_3. \quad (5.80)$$

Capitolo 6

Il problema a due corpi: forze centrali

In questo capitolo verrà esaminato, utilizzando il formalismo lagrangiano, il problema del moto di due corpi interagenti con una forza che dipende solo dalla loro distanza ed è diretta lungo la loro congiungente (forza centrale). Non tutti i problemi di questo tipo possono essere risolti, in modo esplicito, in termini di funzioni elementari note; tuttavia molte caratteristiche importanti possono essere dedotte utilizzando gli strumenti introdotti finora.

6.1 Il problema dei due corpi: riduzione a un problema equivalente con un solo corpo

Consideriamo due corpi, di masse m_1 ed m_2 , che interagiscono mutuamente tramite una forza di tipo centrale. Supporremo che non esistano forze esterne. Una forza centrale è una forza di tipo conservativo, il cui potenziale di interazione dipende solo dal modulo del vettore posizione relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ dei due corpi:

$$V(|\vec{r}|) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = V(r) .$$

Questo sistema ha 6 gradi di libertà (le tre coordinate di ognuna delle due particelle) e quindi ci sono 6 coordinate generalizzate indipendenti.

Possiamo inizialmente scrivere la Lagrangiana in funzione delle coordinate (\vec{r}_1, \vec{r}_2) e delle velocità $(\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2)$ delle due masse:

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) ; \quad (6.1)$$

tuttavia la forma stessa del potenziale suggerisce di scegliere come coordinate lagrangiane la coordinata relativa \vec{r} e quella del centro di massa \vec{R} :

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2} \qquad \boxed{\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}} . \quad (6.2)$$

Tali relazioni si possono facilmente invertire, ottenendo

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} . \quad (6.3)$$

Riscriviamo la Lagrangiana in termini di \vec{r} , \vec{R} e delle loro derivate temporali:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1\dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} \right)^2 - V(r) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r) . \end{aligned}$$

Definendo la massa totale M e la massa ridotta μ :

$$M = m_1 + m_2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$$

la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r) \equiv \mathcal{L}_{\text{CM}} + \mathcal{L}_{\text{rel}} \quad (6.4)$$

dove si è messo in evidenza che \mathcal{L} dipende da $\dot{\vec{R}}$ ma *non* da \vec{R} . Ciò implica che le tre coordinate del centro di massa (CM) sono coordinate cicliche e quindi gli impulsi coniugati, ossia le tre componenti di $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$, sono costanti del moto. Com'era prevedibile, per un sistema non soggetto a forze esterne, il centro di massa è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme: le equazioni del moto per \vec{R} non presentano particolare interesse.

Ben più interessante risulta il moto relativo, la cui Lagrangiana è

$$\mathcal{L}_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r) . \quad (6.5)$$

I gradi di libertà, ora, sono 3 (le tre componenti di \vec{r}): il problema del moto di due masse interagenti si è ridotto al problema di un singolo corpo, con massa pari alla massa ridotta μ , soggetto ad una forza centrale con centro di forza in $\vec{r} = 0$. Notiamo che tutte le informazioni sul tipo di interazione reciproca tra i due corpi (cioè il potenziale $V(r)$) compaiono solo nella Lagrangiana del moto relativo.

Osservazione 1: Queste considerazioni si possono estendere anche al caso in cui il sistema sia sottoposto all'effetto di un campo di forze esterno *uniforme*. Consideriamo ad esempio il campo gravitazionale: alla lagrangiana (6.1) dovremo sottrarre il contributo $V_g = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$, ma dalle relazioni (6.3), scritte per le componenti z , troveremo:

$$V_g = m_1 g \left(Z + \frac{m_2}{m_1 + m_2} z \right) + m_2 g \left(Z - \frac{m_1}{m_1 + m_2} z \right) = (m_1 + m_2) g Z = M g Z$$

e, nuovamente, la Lagrangiana si scompone in una parte che descrive il moto del centro di massa ed una per il moto relativo. \mathcal{L}_{rel} è identica al caso considerato sopra, mentre \mathcal{L}_{CM} ora è

$$\mathcal{L}_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 - M g Z = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} M \dot{Y}^2 + \frac{1}{2} M \dot{Z}^2 - M g Z .$$

Risolvendo le equazioni del moto si trova che il centro di massa si muove di moto uniforme nelle direzioni x e y , mentre è uniformemente accelerato in direzione $-z$. In conclusione otteniamo che, mentre il moto relativo dei due corpi risente del tipo di interazione che si esercita tra di loro, il moto del centro di massa può dipendere solo da un eventuale campo di forze esterno (omogeneo).

Se il campo esterno invece non è uniforme, il potenziale “aggiuntivo” avrà la forma $V_{\text{est}} = V_{\text{est}}(\vec{r}_1) + V_{\text{est}}(\vec{r}_2)$ che, in generale, non si può esprimere in modo semplice in termini di \vec{R} e \vec{r} : l'uso di queste variabili sarà allora poco conveniente.

Osservazione 2: In termini delle variabili \vec{R} ed \vec{r} le equazioni del moto sono disaccoppiate. Questo è conseguenza del fatto che la Lagrangiana si esprime come somma di due termini, \mathcal{L}_{CM} ed \mathcal{L}_{rel} , dipendenti ciascuno da una sola delle due variabili (e dalla sua velocità). Questa proprietà si può generalizzare al caso di più di due corpi: se in un sistema descritto dalle variabili generalizzate (q_1, q_2, \dots, q_n) la Lagrangiana risulta somma di due termini in cui le variabili sono separate in due gruppi, come ad esempio:

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \mathcal{L}_1(q_1, \dots, q_j, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_j, t) + \mathcal{L}_2(q_{j+1}, \dots, q_n, \dot{q}_{j+1}, \dots, \dot{q}_n, t) ,$$

allora il sistema di equazioni differenziali di Lagrange si scompone in due sistemi indipendenti: il primo composto da j equazioni (del secondo ordine, accoppiate tra loro) nelle variabili (q_1, q_2, \dots, q_j) , il secondo composto da $(n - j)$ equazioni nelle variabili $(q_{j+1}, q_{j+2}, \dots, q_n)$.

Osservazione 3: Nel caso di masse uguali, $m_1 = m_2 = m$, il centro di massa ha coordinate $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$, $M = 2m$, $\mu = m/2$.

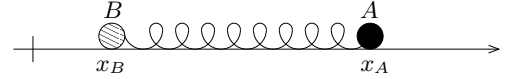
Osservazione 4: Se $m_1 \gg m_2$, il centro di massa coincide praticamente con la posizione della massa 1 (la più pesante), $\vec{R} \simeq \vec{r}_1$, mentre la massa ridotta coincide praticamente con la massa più piccola, $\mu \simeq m_2$.

6.1.1 Esempio di moto unidimensionale

Consideriamo due corpi puntiformi A e B , di masse m_A ed m_B , collegati da un molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo a . I due corpi sono vincolati a muoversi, senza attrito, lungo una retta orizzontale, che assumeremo coincidere con l'asse x .

Siano x_A ed x_B le coordinate dei due corpi.

L'energia cinetica totale e l'energia potenziale (elastica) sono



$$T = \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_B^2 \quad V = V_{el} = \frac{1}{2}k(x_B - x_A - a)^2 .$$

La Lagrangiana risulta

$$\mathcal{L}(x_A, x_B, \dot{x}_A, \dot{x}_B) = T - V = \frac{1}{2}m_A\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{x}_B^2 - \frac{1}{2}k(x_B - x_A - a)^2 .$$

Non ci sono coordinate cicliche. Ottenere le equazioni del moto è molto semplice, si trova:

$$\begin{cases} m_A\ddot{x}_A = -k(x_A - x_B - a) \\ m_B\ddot{x}_B = k(x_A - x_B - a) \end{cases} \quad (6.6)$$

Si tratta di un sistema di equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, che potrebbe essere risolto direttamente. Tuttavia risulta molto più semplice affrontare questo problema passando alle variabili del centro di massa e relativa. Poniamo perciò

$$X = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \quad x = x_B - x_A . \quad (6.7)$$

La Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, \dot{X}) = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - a)^2 , \quad M = m_A + m_B , \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} .$$

Risulta subito evidente il vantaggio di usare queste coordinate: la variabile X è ciclica! Questo significa che il suo momento canonicamente coniugato è conservato:

$$p_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} = MV_0 = \text{costante} .$$

Un'altra costante del moto è l'energia totale, poiché \mathcal{L} non dipende esplicitamente dal tempo.

È immediato allora scrivere la legge oraria con cui si muove il centro di massa:

$$X(t) = V_0 t + X_0 ,$$

essendo V_0 ed X_0 delle costanti di integrazione da determinare imponendo le condizioni iniziali.

Per il moto relativo l'equazione di Lagrange è:

$$\mu\ddot{x} = -k(x - a) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a , \quad \text{dove} \quad \omega^2 \equiv k/\mu .$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui risoluzione procede attraverso i seguenti passi:

1. Trovare la soluzione generale x_{om} dell'omogenea associata: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$$x_{om}(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t ,$$

essendo C e D delle costanti di integrazione.

2. Trovare una soluzione particolare x_p dell'equazione completa

In questo caso è immediato vedere che la funzione costante $x_p = a$ è la soluzione cercata.

3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione completa come somma di x_{om} e x_p :

$$x(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t + a . \quad (6.8)$$

A questo punto (e non prima!) si possono imporre le condizioni iniziali per trovare le costanti C e D .

In conclusione, abbiamo trovato che il centro di massa del sistema dei due corpi considerati si muove di moto rettilineo uniforme, mentre i due corpi oscillano in modo armonico l'uno rispetto all'altro. Il moto relativo non è influenzato da quello del centro di massa, e viceversa.

È possibile scrivere le soluzioni per le coordinate x_A e x_B delle due masse, attraverso le relazioni inverse delle (6.7) (si vedano le (6.3)):

$$x_A(t) = X(t) - \frac{m_B}{m_A + m_B}x(t) = V_0 t + \left(X_0 - \frac{m_B}{M}a\right) - \frac{m_B}{M}(C \cos \omega t + D \sin \omega t) \quad (6.9a)$$

$$x_B(t) = X(t) + \frac{m_A}{m_A + m_B}x(t) = V_0 t + \left(X_0 + \frac{m_A}{M}a\right) + \frac{m_A}{M}(C \cos \omega t + D \sin \omega t) \quad (6.9b)$$

Possiamo determinare le costanti di integrazione X_0, V_0, C, D imponendo le condizioni iniziali:

$$x_A(0) = x_{A0} \quad x_B(0) = x_{B0} \quad \dot{x}_A(0) = u_{A0} \quad \dot{x}_B(0) = u_{B0}$$

che possono essere tradotte per le variabili X e x :

$$X(0) = \frac{m_A x_{A0} + m_B x_{B0}}{m_A + m_B} \quad \dot{X}(0) = \frac{m_A u_{A0} + m_B u_{B0}}{m_A + m_B} \quad x(0) = x_{B0} - x_{A0} \quad \dot{x}(0) = u_{B0} - u_{A0}$$

da cui si ricava:

$$X_0 = \frac{m_A x_{A0} + m_B x_{B0}}{m_A + m_B} \quad V_0 = \frac{m_A u_{A0} + m_B u_{B0}}{m_A + m_B} \quad C = x_{B0} - x_{A0} - a \quad D = \frac{u_{B0} - u_{A0}}{\omega}.$$

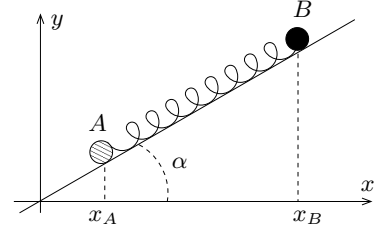
Con questo, abbiamo risolto in maniera completa il problema.

Ovviamente allo stesso risultato si può anche giungere risolvendo direttamente il sistema (6.6), ma così facendo l'interpretazione fisica in termini del moto del centro di massa e relativo è meno trasparente.

Come semplice estensione di questo calcolo, consideriamo lo stesso sistema di due masse puntiformi in moto unidirezionale lungo una retta inclinata di un angolo α , sottoposte ad un campo di gravità uniforme. Al potenziale elastico dobbiamo aggiungere quello gravitazionale:

$$V_g = m_A g y_A + m_B g y_B = M g X \tan \alpha,$$

(notare che $y_{A,B} = x_{A,B} \tan \alpha$ a causa del vincolo costituito dalla retta).



La Lagrangiana diventa perciò:

$$\mathcal{L}(x, X, \dot{x}, \dot{X}) = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 - M g \tan \alpha X + \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - a)^2 = \mathcal{L}_{\text{CM}} + \mathcal{L}_{\text{rel}},$$

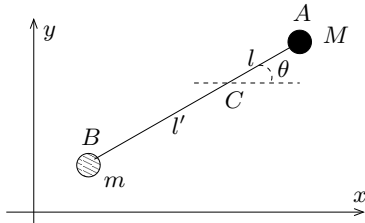
e il problema può essere facilmente risolto. La soluzione per il moto relativo è invariata (oscillazione armonica semplice di pulsazione $\sqrt{k/\mu}$, eq. (6.8)), mentre il centro di massa si muove ora con accelerazione uniforme:

$$X(t) = -\frac{1}{2} g \tan \alpha t^2 + V_0 t + X_0.$$

L'unica costante del moto, in questo caso, è l'energia totale.

6.1.2 Esempio di moto bidimensionale

Consideriamo due corpi puntiformi, A e B , di masse, rispettivamente, M ed m , uniti da una sbarretta rigida di lunghezza a e massa trascurabile. I due corpi sono vincolati a muoversi, senza attrito, su un piano orizzontale, che scegliamo come piano x, y (o $z = 0$).



Osserviamo, innanzi tutto, che il sistema ha tre gradi di libertà, perché le due masse sono vincolate a stare ad una distanza fissa (a) tra di loro. Scegliamo perciò, come coordinate generalizzate, le coordinate (x, y) del centro di massa C , e l'angolo θ di rotazione della sbarretta rispetto all'asse x .

Il centro di massa si trova, lungo l'asta che unisce i due corpi, a distanza l da A ed l' da B , con $l + l' = a$. Scriviamo direttamente le coordinate dei due corpi in funzione delle variabili x, y e θ :

$$\begin{aligned} x_A &= x + l \cos \theta & x_B &= x - l' \cos \theta \\ y_A &= y + l \sin \theta & y_B &= y - l' \sin \theta \end{aligned} \quad (6.10)$$

Determiniamo le lunghezze l ed l' in funzione delle masse:

$$x = \frac{M x_A + m x_B}{M + m} = \frac{M}{M + m}(x + l \cos \theta) + \frac{m}{M + m}(x - l' \cos \theta) = x + \frac{\cos \theta}{M + m}(M l - m l')$$

da cui $(Ml - ml') \cos \theta = 0$ che, dovendo valere per ogni valore di θ (il centro di massa non si sposta lungo la sbarra mentre questa ruota!) implica

$$Ml = ml' \quad (6.11a)$$

quindi, poiché $l + l' = a$, si trova

$$l = \frac{ma}{M+m} \quad l' = \frac{Ma}{M+m} \quad (6.11b)$$

(è facile vedere che, se le due masse sono uguali, le formule precedenti dicono che il centro di massa sta esattamente nel punto medio della sbarretta).

Le velocità delle due masse sono:

$$\begin{aligned} \dot{x}_A &= \dot{x} - l \sin \theta \dot{\theta} & \dot{x}_B &= \dot{x} + l' \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_A &= \dot{y} + l \cos \theta \dot{\theta} & \dot{y}_B &= \dot{y} - l' \cos \theta \dot{\theta} \end{aligned} \quad (6.12)$$

e la Lagrangiana, che coincide con l'energia cinetica totale, essendo l'energia potenziale costante, risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T &= \frac{M}{2} (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) = \\ &= \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} + 2l \cos \theta \dot{y} \dot{\theta}) + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l'^2 \dot{\theta}^2 + 2l' \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} - 2l' \cos \theta \dot{y} \dot{\theta}) = \\ &= \frac{M+m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (Ml^2 + ml'^2) \dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{M}}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\mu}{2} a^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

avendo definito la massa totale $\mathcal{M} = m + M$ e la ridotta $\mu = mM/\mathcal{M}$ (sono anche state usate le (6.11)).
Notiamo che *tutte* le coordinate sono cicliche^[*]: sono quindi costanti del moto tutti i momenti coniugati:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \mathcal{M} \dot{x} = \text{costante} \\ p_y &= \mathcal{M} \dot{y} = \text{costante} \end{aligned} \right\} \quad \text{componenti della quantità di moto totale}$$

$$p_\theta = \mu a^2 \dot{\theta} = \text{costante} \quad \text{momento angolare totale rispetto al centro di forza}$$

Concludiamo che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, mentre le due masse ruotano attorno ad esso con velocità angolare costante.

Un'altra costante del moto è l'energia totale, che coincide con l'energia cinetica totale.

È banale, a questo punto, scrivere la soluzione delle equazioni del moto:

$$x(t) = \frac{p_x t}{M+m} + \alpha \quad y(t) = \frac{p_y t}{M+m} + \beta \quad \theta(t) = \frac{p_\theta t}{\mu a^2} + \gamma$$

essendo $p_x, p_y, p_\theta, \alpha, \beta$ e γ le costanti di integrazione, che potremmo calcolare conoscendo le condizioni iniziali.

Se, ad esempio, al tempo $t = 0$:

$$\begin{aligned} x_A(0) &= a & y_A(0) &= 0 & x_B(0) &= 0 & y_B(0) &= 0 \\ \dot{x}_A(0) &= 0 & \dot{y}_A(0) &= 0 & \dot{x}_B(0) &= 0 & \dot{y}_B(0) &= u \end{aligned}$$

troviamo, utilizzando le (6.10) e (6.12)

$$p_x = 0 \quad p_y = mu \quad p_\theta = -\mu a u \quad \alpha = \frac{Ma}{m+M} \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0$$

e la soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali imposte è:

$$x(t) = \frac{Ma}{m+M} = l' \quad y(t) = \frac{mu}{M+m} t \quad \theta(t) = -\frac{u}{a} t$$

È interessante notare che, nel limite $M \rightarrow \infty$, le stesse condizioni iniziali danno

$$x(t) = a \quad y(t) = 0 \quad \theta(t) = -\frac{u}{a} t,$$

il centro di massa ora coincide con il corpo A , che resta fermo, mentre la massa m ruota attorno ad esso.

^[*]Ricordiamo che l'esistenza ed il numero di variabili cicliche dipende dalla scelta del sistema di coordinate generalizzate. Se, in questo esempio, avessimo scelto come coordinate generalizzate (x_A, y_A, θ) la variabile θ non sarebbe stata ciclica.

6.2 Integrali primi ed equazioni del moto

Abbiamo visto che il problema di due corpi interagenti, senza forze esterne, si può scomporre nello studio del moto del centro di massa e di quello relativo. Il moto del centro di massa è banale e non presenta particolare interesse. Nel seguito lasceremo pertanto cadere la parte di Lagrangiana relativa al moto del centro di massa $\mathcal{L}_{\text{CM}} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2$ per concentrarci invece sulla *Lagrangiana del moto relativo*. Studieremo, in particolare, il caso di forze centrali, in cui la forza tra i due corpi dipende solo dalla loro distanza relativa ed è diretta lungo la loro congiungente; vale inoltre il principio di azione e reazione^[†]. Il problema dei due corpi si riduce così allo studio di un corpo solo, di massa pari alla massa ridotta, in un campo di forze centrali.

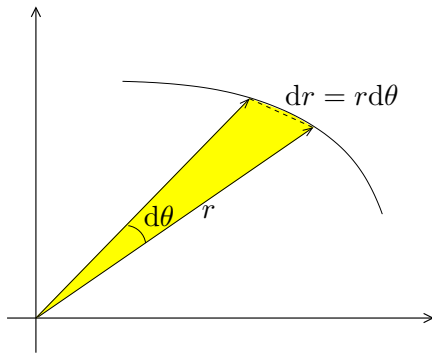
Come si è detto in precedenza, in presenza di forze centrali il momento angolare del sistema rispetto al centro di forza, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, è una costante del moto. I vettori \vec{r} e \vec{p} sono in ogni istante perpendicolari al vettore \vec{L} costante: *il moto si svolge quindi in un piano*, il piano ortogonale al momento angolare. Il numero di coordinate indipendenti si riduce quindi a due, che sceglieremo come coordinate polari r, θ nel piano ortogonale a \vec{L} .

Riprendendo l'equazione (6.5) scriveremo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - V(r) .$$

Come si è già osservato, θ è una coordinata ciclica ed il momento coniugato corrispondente (che è il momento angolare^[‡]) si conserva:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} \equiv l = \text{costante} . \quad (6.13)$$



L'equazione (6.13) implica la cosiddetta **legge delle aree**: infatti $dA = \frac{1}{2}r(rd\theta)$ è l'area spazzata dal raggio vettore nel tempo dt (area ombreggiata in figura) e la velocità areolare è

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{l}{\mu} \quad (6.14)$$

e risulta essere, a sua volta, una costante del moto. Nel caso della forza gravitazionale, tale risultato è la famosa II Legge di Keplero; qui vediamo che la sua validità non si limita alle forze proporzionali a $1/r^2$, ma si estende ad ogni tipo di forza centrale.

Consideriamo ora l'equazione di Lagrange per la coordinata r :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \quad \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 .$$

Tenendo conto della (6.13) potremo anche scrivere, eliminando $\dot{\theta}$,

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (6.15)$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine per $r(t)$. Osserviamo che si può scrivere:

$$-\frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \right) = \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} ,$$

^[†]Restano quindi escluse, da questa trattazione, le forze magnetiche che dipendono dalla velocità delle particelle e non sono dirette lungo la congiungente.

^[‡]Più precisamente, il momento coniugato a θ è la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto, ma si è già visto che, in caso di forze centrali, tale componente è l'unica non nulla.

avendo introdotto il *potenziale efficace* V_{eff} , somma del potenziale “vero” $V(r)$ e del “potenziale centrifugo” $l^2/2\mu r^2$ derivante dal moto angolare.

Supponendo di saper risolvere l’equazione (6.15), per completare lo studio del moto basterà sostituire la soluzione trovata $r(t)$ nella (6.13) e risolvere l’equazione differenziale (del primo ordine) per θ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2(t)} . \quad (6.16)$$

In realtà per risolvere un problema di forze centrali risulta in generale più conveniente far uso dell’altro, importante, integrale primo del moto, ossia l’energia totale $E = T + V$ che è costante:

$$E = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) . \quad (6.17)$$

Notiamo che l’equazione (6.17) è formalmente identica a quella di un moto unidimensionale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) .$$

Possiamo quindi considerare il moto radiale (relativo) sotto l’azione di forze conservative come equivalente ad un moto unidimensionale in cui al potenziale corrispondente alle forze “reali” agenti sul sistema, $V(r)$ (corrispondente ad una forza “reale” $F = -dV/dr$), sostituiamo un potenziale effettivo

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) ,$$

corrispondente ad una forza effettiva

$$F_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dV}{dr} .$$

Il primo termine di F_{eff} corrisponde ad una forza centrifuga derivante dal moto angolare del sistema. Essa si annulla, infatti, se $l = 0$.

L’ equazione (6.17) può essere invertita per ricavare \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)} \quad (6.18)$$

e questa equazione si può risolvere separando le variabili e integrando fra t_0 e t . Si ottiene così:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}} \rightarrow t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r') - \frac{l^2}{2\mu r'^2} \right)}} , \quad (6.19)$$

dove $r_0 = r(t_0)$. Ricavata la soluzione $r(t)$ dell’equazione (6.19), il moto sarà completamente determinato ricavando anche $\theta(t)$ dalla risoluzione dell’equazione del primo ordine (6.16), con la condizione iniziale $\theta(t_0) = \theta_0$:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')} . \quad (6.20)$$

Ovviamente la forma esplicita delle (6.19) e (6.20) dipenderanno dalla forma del potenziale $V(r)$, che qui non è stata specificata.

6.2.1 Equazione per le orbite

È possibile ottenere direttamente l'equazione delle traiettorie (orbite), ossia $r = r(\theta)$ (oppure $\theta = \theta(r)$) combinando tra loro le equazioni (6.16) e (6.19):

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}$$

e integrando

$$\theta = \theta_0 + \frac{l}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r') - \frac{l^2}{2\mu r'^2} \right)}} = \theta_0 + \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu V(r')}{l^2} - \frac{1}{r'^2}}} . \quad (6.21)$$

L'integrale appena scritto non è sempre riconducibile a funzioni elementari note, quindi non è sempre possibile ottenere l'equazione della traiettoria in forma analitica esatta. Ad esempio, se il potenziale è proporzionale ad una potenza della distanza, cioè se $V(r) = ar^{n+1}$ (escludendo il caso $n = -1$, che corrisponderebbe ad una forza nulla), si trova che è possibile scrivere la soluzione in termini di funzioni trigonometriche se $n = 1, -2, -3$. Per altri valori di n si possono avere soluzioni sotto forma di funzioni ellittiche, ma in generale la soluzione (6.21) si deve trovare per via numerica, o ricorrendo ad approssimazioni.

Tuttavia, senza bisogno di risolvere l'integrale (6.21), si possono ricavare informazioni qualitative sulla traiettoria, come illustreremo nei prossimi paragrafi.

6.2.2 Classificazione delle orbite

Dalla equazione (6.18) si deduce che, per valori fissati di E ed l , il moto può avvenire solo nella regione in cui

$$E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \geq 0 \quad \text{ossia} \quad E \geq V_{\text{eff}}(r) .$$

Questa regione è detta **classicamente permessa**. Al di fuori di questa regione, l'energia cinetica della particella sarebbe negativa e la sua velocità immaginaria.

Per proseguire occorre specificare la forma del potenziale. Consideriamo due esempi.

Esempio 1: potenziale newtoniano-coulombiano

Consideriamo, a titolo illustrativo, una forza attrattiva del tipo

$$F = -\frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha > 0) .$$

In tal caso $V = -\alpha/r$. Il potenziale efficace, somma del potenziale reale e di quello centrifugo, è illustrato in figura 6.1.

Per $r \rightarrow 0$ prevale il termine centrifugo ed il potenziale diverge nell'origine, mentre per grandi r domina il potenziale attrattivo della forza reale, ossia il potenziale efficace tende a zero da valori negativi. Di conseguenza, il potenziale efficace ha un minimo assoluto $V_{\text{eff}}^{\min} < 0$.

Consideriamo ora tre tipici valori dell'energia totale: $E_1 > 0$, $E_2 = 0$, $V_{\text{eff}}^{\min} < E_3 < 0$, mostrati in figura 6.1. La condizione $E \geq V_{\text{eff}}(r)$ implica, nei tre casi, le seguenti limitazioni sulla regione di r permessa:

$$\begin{aligned} E_1 : & \quad r \geq r_1 \\ E_2 : & \quad r \geq r_2 \\ E_3 : & \quad r_3 \leq r \leq r'_3 \end{aligned}$$

Nei primi due casi l'orbita è aperta e i due corpi possono allontanarsi fino a distanza infinita. Poiché $\dot{r} = v_r$ è proporzionale a $\sqrt{E - V_{\text{eff}}}$, sia per $E = E_1$ che per $E = E_2$ il sistema avrà velocità radiale

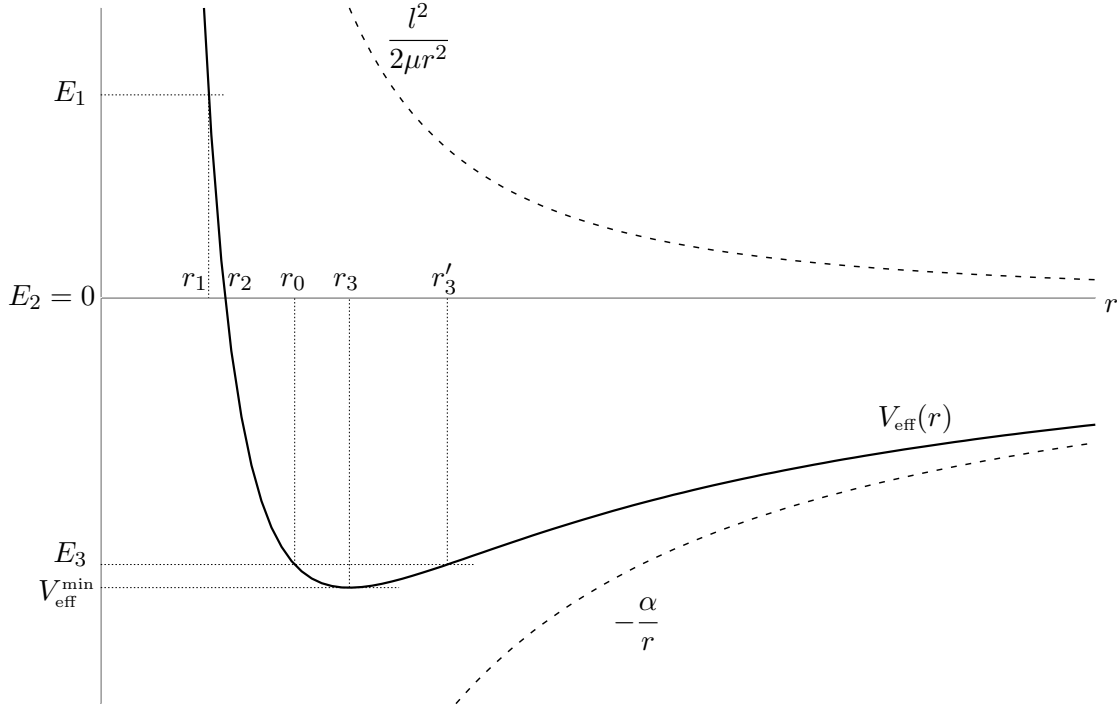


Figura 6.1 Potenziale Newtoniano-Coulombiano

nulla in r_1 o, rispettivamente, in r_2 che sono quindi *punti di inversione* del moto radiale. A distanza infinita, invece, i due casi si distinguono perché, con E_1 si ha $v_\infty \neq 0$, mentre con E_2 la velocità all'infinito si annulla.

Il caso $E = E_3$, invece, è qualitativamente diverso in quanto il moto radiale è limitato sia inferiormente che superiormente, nell'anello di raggi r_3 ed r'_3 : si parla in tal caso di **moto legato** fra le *distanze apsidali* r_3 ed r'_3 (che sono i punti di inversione per il moto confinato).

Un caso molto particolare è quello in cui $E = V_{\text{eff}}^{\min}$: l'unico valore possibile per r è r_0 (in cui il potenziale ha il minimo): l'orbita è circolare e la velocità radiale v_r è identicamente nulla.

Esempio 2: potenziale elastico

Un altro esempio interessante è il moto armonico, corrispondente a

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2 \qquad F = -kr$$

e illustrato in figura 6.2. Tranne il caso $l = 0$, in cui per qualsiasi $E > 0$ il moto risulta armonico semplice, negli altri casi ($l \neq 0$) il moto è possibile, se $E > V_{\text{eff}}^{\min}$, solo per $r_1 \leq r \leq r_2$. La traiettoria risultante, composizione di due moti armonici su assi ortogonali, è generalmente ellittica. Nei punti apsidali (cioè di minimo e massimo allontanamento dall'origine) la velocità radiale è nulla.

Nel caso particolare in cui $E = V_{\text{eff}}^{\min}$ il moto è circolare.

6.2.3 Il problema di Keplero: le orbite

Consideriamo ora il caso particolare, molto importante, di potenziale coulombiano-newtoniano

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

e classifichiamo le orbite corrispondenti in base al valore dell'energia E .

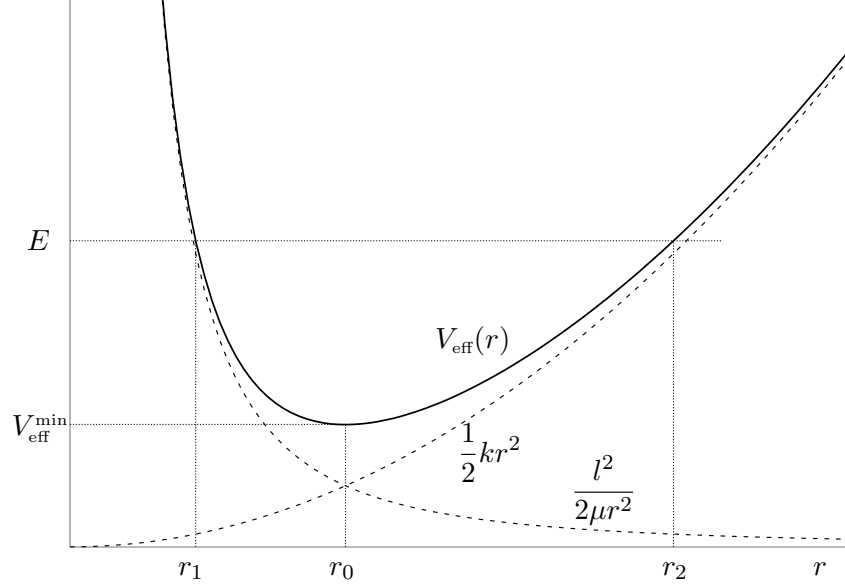


Figura 6.2 Potenziale armonico (o elastico)

L'equazione (6.21) diventa

$$\theta = \theta_0 + \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{l^2} \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{1}{r^2}}} = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu}{l^2} E + \frac{2\mu\alpha}{l^2} u - u^2}} \quad (6.22)$$

avendo effettuato il cambiamento di variabile di integrazione $u = 1/r$ ($du = -dr/r^2$). L'integrale ottenuto è della forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left(-\frac{b + 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right)$$

con $a = \frac{2\mu}{l^2} E$, $b = \frac{2\mu\alpha}{l^2}$, $c = -1$, da cui

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\frac{4\mu^2\alpha^2}{l^4} + \frac{8\mu E}{l^2}} = \frac{2\mu\alpha}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu\alpha^2}}.$$

Quindi la soluzione dell'integrale nella (6.22), scrivendo $\theta' = \theta_0 + \beta$, dove β è la costante risultante dal limite inferiore dell'integrale, è

$$\theta - \theta' = -\arccos \left(\frac{\frac{l^2}{\mu\alpha} u - 1}{\sqrt{1 + 2l^2 E/\mu\alpha^2}} \right)$$

ovvero, tornando a $r = 1/u$ e sfruttando la parità della funzione coseno:

$$\cos(\theta - \theta') = \frac{\frac{l^2}{\mu\alpha r} - 1}{\sqrt{1 + 2l^2 E/\mu\alpha^2}}$$

e infine

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu\alpha^2}} \cos(\theta - \theta') \right\}. \quad (6.23)$$

Questa è l'equazione dell'orbita nel problema di Keplero, dove la costante α è (dalla legge di gravitazione universale) $\alpha = Gm_1m_2$ ^[§]. Definiamo l'**eccentricità**

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu\alpha^2}} \quad (6.24)$$

e riscriviamo la (6.23) nella forma

$$r = \frac{l^2/\mu\alpha}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta')} . \quad (6.25)$$

Questa è l'equazione di una conica in coordinate polari (con l'origine in uno dei due fuochi) e possiamo facilmente individuare i casi particolari considerati nel paragrafo 6.2.2 per diversi valori di energia:

$$\begin{array}{lll} E > 0 : & \implies & \epsilon > 1 \quad (\text{iperbole}) \\ E = 0 : & \implies & \epsilon = 1 \quad (\text{parabola}) \\ E < 0 : & \implies & \epsilon < 1 \quad (\text{ellisse}) \end{array}$$

Inoltre se $\epsilon = 0$ (cosa che avviene solo per il valore particolare di $E = -\mu\alpha^2/2l^2$) l'orbita si riduce ad una circonferenza di raggio (costante) $r = l^2/\mu\alpha$ ^[¶]. Infine, se $E < -\mu\alpha^2/2l^2$ l'eccentricità diventa immaginaria e l'equazione della traiettoria perde significato. Ritroviamo perciò il limite inferiore dell'energia (in funzione del momento angolare l) visto nel paragrafo 6.2.2.

Gli stessi risultati sono applicabili anche al caso dell'interazione coulombiana tra due particelle, una delle quali si intende a riposo nell'origine, l'altra in moto orbitale (trascurando le forze magnetiche dovute al moto della particella!). In questo caso $\alpha = -q_1q_2/4\pi\epsilon_0$; se le due particelle hanno carica opposta, $\alpha > 0$ e tutte le considerazioni precedenti si applicano tali e quali. Se invece le due particelle hanno cariche dello stesso segno si ha $\alpha < 0$: l'unico modo affinché la (6.25) abbia senso (cioè sia $r > 0$) è che $\epsilon > 1$ e $\cos(\theta - \theta') < 0$. L'unica traiettoria possibile è un'iperbole, più precisamente si tratta del ramo di iperbole più lontano dal fuoco (mentre nel caso di forza attrattiva il ramo di iperbole interessato è quello che “gira attorno” al fuoco^[||]).

6.3 Teorema del viriale

Un'altra proprietà del moto sotto l'azione di forze centrali può essere ricavata come caso particolare di un teorema generale valido per un gran numero di sistemi: il teorema del viriale. È un teorema di natura statistica, che coinvolge medie temporali di grandezze meccaniche ed è stato introdotto per studiare la termodinamica dei gas (è anche detto teorema di Clausius).

Consideriamo un generico sistema di masse puntiformi m_i a cui sono applicate le forze \vec{F}_i (ivi incluse le eventuali forze vincolari). Le equazioni fondamentali del moto sono

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i .$$

Definiamo ora la quantità (la somma è su tutte le particelle del sistema):

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i ; \quad (6.26)$$

la sua derivata rispetto al tempo risulta

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \left(\dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_i m_i \vec{v}_i^2 ;$$

^[§] È facile verificare che la combinazione $2l^2 E/\mu\alpha^2$ è adimensionale.

^[¶] La condizione per un'orbita circolare in campo gravitazionale è l'equilibrio tra la forza di attrazione α/r^2 e la forza centrifuga $\mu v^2/r$; ricordando che $v = l/\mu r$ si trova proprio $r = l^2/\mu\alpha$.

^[||] È facile vedere dalla (6.25) che, nel caso di traiettoria iperbolica, non tutti i valori di θ sono permessi: la condizione $r > 0$ implica $\cos(\theta - \theta') > -1/\epsilon$; i valori di θ per cui $r \rightarrow \infty$ definiscono le direzioni degli asintoti.

l'ultimo termine è il doppio dell'energia cinetica totale, quindi

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2T .$$

Calcoliamo ora la media temporale della precedente equazione tra i tempi $t = 0$ e $t = \tau$:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \overline{2T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i},$$

avendo indicato con una barra la media temporale dei termini a secondo membro. Il primo membro può essere integrato:

$$\frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] = \overline{2T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} .$$

Il primo membro di quest'ultima espressione si annulla se il moto è periodico (di periodo τ). Ma anche nel caso di moto non periodico, se coordinate e velocità di tutte le particelle restano finite (in modo tale che G sia limitata), il primo membro può essere reso piccolo a piacere (al limite, nullo) prendendo τ sufficientemente grande (al limite, $\tau \rightarrow \infty$). Ne segue che

$$\boxed{\overline{2T} = - \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}} \quad (6.27)$$

relazione nota come **teorema del viriale**. In questa forma il teorema viene usato in teoria cinetica dei gas per studiare l'equazione di stato di gas imperfetti (interagenti). In particolare, nel caso di gas perfetti, esso permette di ricavare l'equazione di stato $PV = N_B K T$.

Assumendo poi che il campo di forza sia conservativo ($\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$), la (6.27) diventa

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i (\vec{\nabla}_i V) \cdot \vec{r}_i} ; \quad (6.28)$$

nel caso $N = 1$, che è il caso che ci interessa nello studio del moto di un corpo soggetto a una forza centrale,

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r} . \quad (6.29)$$

Questa relazione è particolarmente utile quando il potenziale è una funzione omogenea di grado α ^[**] e quindi, in particolare, se V dipende da r come una potenza: $V \propto r^\alpha$. Infatti, in tal caso, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee:

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = \alpha V(r)$$

e quindi

$$\overline{T} = \frac{\alpha}{2} \overline{V} . \quad (6.30)$$

Poiché, in ogni caso, l'energia è una costante del moto,

$$\overline{T} + \overline{V} = E$$

segue (purché sia $\alpha \neq -2$)

$$\overline{T} = \frac{\alpha}{\alpha + 2} E , \quad \overline{V} = \frac{2}{\alpha + 2} E \quad (\alpha \neq -2) . \quad (6.31)$$

Esempi

^[**]Ricordiamo che una funzione $f(x)$ è omogenea di grado α se $f(cx) = c^\alpha f(x)$.

1. Per piccole oscillazioni armoniche ($\alpha = 2$)

$$\bar{T} = \bar{V} = \frac{E}{2}. \quad (6.32)$$

2. Per il potenziale gravitazionale o coulombiano invece $\alpha = -1$. Bisogna limitarsi a considerare il caso di orbite confinate (per rispettare la condizione di moto in una regione finita, indispensabile per giungere alla (6.27)) e allora l'energia totale è negativa:

$$\bar{T} = -E, \quad \bar{V} = 2E \quad (6.33)$$

e pertanto

$$\bar{T} = -\frac{\bar{V}}{2}. \quad (6.34)$$

6.4 Complementi ed applicazioni

6.4.1 Traiettorie circolari o quasi-circolari

Abbiamo visto nelle pagine precedenti che per un valore del momento angolare l assegnato (non nullo) si ha un'orbita circolare se il potenziale efficace ha un minimo od un massimo ad una distanza r_0 dal centro di forza e se l'energia totale è pari a $E = V_{\text{eff}}(r_0)$. Dalla relazione (6.17) ricaviamo allora che, in un'orbita circolare la velocità radiale è identicamente nulla: $\dot{r} = 0$. La velocità ha, quindi, solo componente tangenziale:

$$v = v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_0},$$

che risulta essere costante. Il moto circolare è uniforme. Il periodo di rivoluzione è

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Sviluppiamo il potenziale efficace in serie di Taylor attorno ad un punto $r = r_0$:

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{eff}}(r_0) + V'_{\text{eff}}(r_0)(r - r_0) + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(r_0)(r - r_0)^2 + \mathcal{O}((r - r_0)^3),$$

avendo indicato con V' e V'' le derivate del potenziale rispetto a r . Se r_0 è un punto estremo del potenziale efficace, allora $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0$ e la relazione precedente si può scrivere come:

$$V_{\text{eff}}(r) \simeq V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(r_0)(r - r_0)^2 \equiv E + B(r - r_0)^2. \quad (6.35)$$

Osserviamo innanzi tutto che la condizione di estremo del potenziale efficace in r_0 implica:

$$V'_{\text{eff}}(r_0) = V'(r_0) - \frac{l^2}{\mu r_0^3} = 0 \quad \implies \quad F(r_0) = -V'(r_0) = -\frac{l^2}{\mu r_0^3},$$

ossia che la forza $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ deve essere attrattiva per poter dare luogo ad orbite circolari.

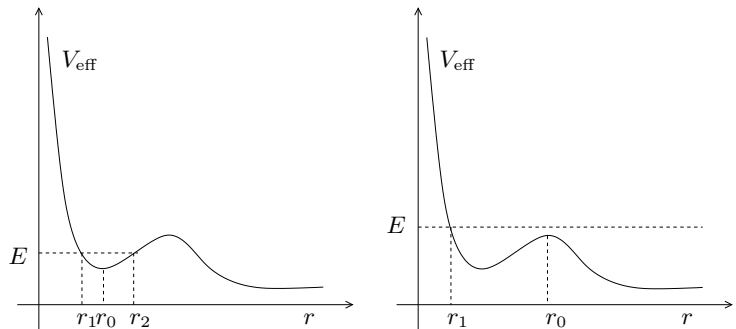
Ricordando inoltre la definizione di momento angolare, $l = \mu r_0 v$, si ha anche che $F(r_0) = -v^2/r_0$, ossia che la forza attrattiva bilancia la forza centrifuga.

Supponiamo ora che l'energia totale non sia esattamente uguale a $V_{\text{eff}}(r_0)$ ma che sia leggermente maggiore di questo valore. Sono possibili due casi:

i) Se $V_{\text{eff}}(r_0)$ è un minimo, l'orbita è confinata pur non essendo più circolare, in quanto la distanza radiale varia da un minimo r_1 ad un massimo r_2 entrambi prossimi ad r_0 . Si dice che l'orbita circolare $r = r_0$ (che si avrebbe se l'energia fosse esattamente uguale a $V_{\text{eff}}(r_0)$) è *stabile*.

ii) Se $V_{\text{eff}}(r_0)$ è un massimo, l'orbita, in generale, non è confinata. La distanza radiale è limitata inferiormente da un valore r_1 , dovuto alla repulsione centrifuga, ma superiormente può essere sia limitata che illimitata, a seconda della natura del potenziale di interazione. In ogni caso r varia notevolmente e l'orbita $r = r_0$ è detta *instabile*.

La stabilità dell'orbita dipende dunque dal segno della derivata seconda del potenziale efficace in r_0 (parametro B dell'equazione (6.35)) e si può dimostrare che solo potenziali di interazione $V(r)$ che si annullano all'infinito più lentamente di $1/r^2$ possono dare luogo a traiettorie circolari stabili.



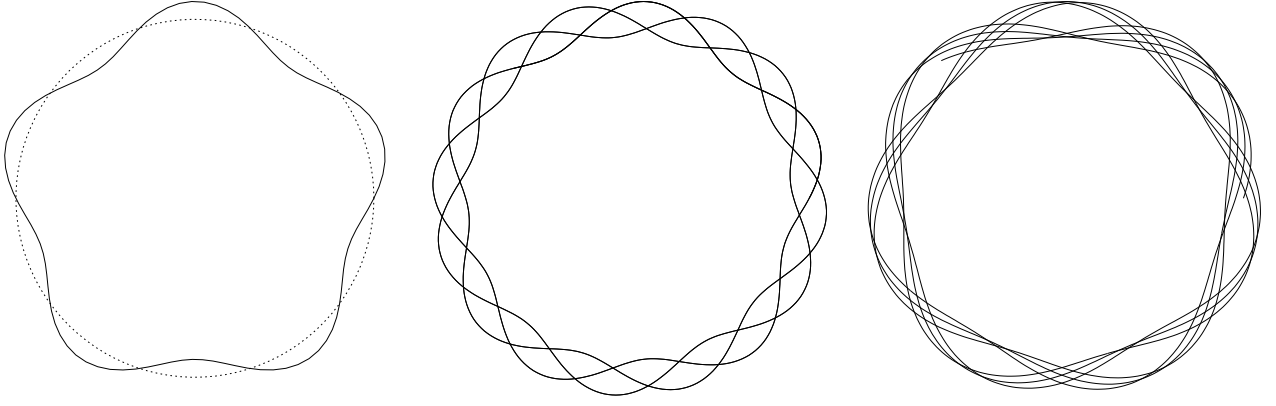


Figura 6.3 Esempi di traiettorie “quasi-circolari”, eq. (6.36). Sinistra: $\beta = 5$, la traiettoria è chiusa (la linea tratteggiata è la traiettoria circolare, per confronto). Centro: $\beta = 16/3$, l’orbita si chiude con 3 rivoluzioni complete attorno al centro di forza. Destra: $\beta = \sqrt{12}$, l’orbita è aperta, pur essendo confinata in una regione finita dello spazio.

Consideriamo l’equazione del moto per la variabile r (6.15) nell’intorno di un punto di minimo del potenziale efficace:

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + V'(r) = 0 \quad \text{ossia} \quad \mu \ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r),$$

e usando lo sviluppo (6.35)

$$\mu \ddot{r} = -2B(r - r_0).$$

Si tratta dell’equazione per un oscillatore armonico semplice con pulsazione $\beta = \sqrt{\frac{2B}{\mu}}$ e la cui soluzione generale è:

$$r(t) = a \cos(\beta t + \alpha) + r_0, \quad (6.36)$$

cioè il raggio vettore oscilla in modo armonico attorno al raggio dell’orbita circolare r_0 . Se β è un numero razionale, $\beta = \frac{k_1}{k_2}$, dopo k_2 rivoluzioni l’orbita si chiude. Viceversa se β è un numero irrazionale, l’orbita non è periodica: il raggio vettore resterà sempre compreso tra $r_0 - a$ ed $r_0 + a$ ma senza mai tornare su un punto già occupato in precedenza. Alcuni esempi sono mostrati in figura 6.3

6.4.2 Condizione per le orbite chiuse

A seconda della forma del potenziale $V(r)$ e dei valori delle costanti l ed E , il valore di $r(t)$ (oppure $r(\theta)$) può essere limitato inferiormente, cioè $r \geq r_{\min}$ (eventualmente $r_{\min} = 0$) oppure può variare tra un valore massimo ed uno minimo, cioè $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$.

Nel primo caso il moto radiale è superiormente illimitato, cioè la particella, nel suo moto, può arrivare da distanza infinita ed eventualmente ritornarci.

Nel secondo caso, il moto della particella è confinato in un regione limitata del piano, compresa nell’anello di raggi r_{\min} ed r_{\max} , ma questo non implica necessariamente che la sua orbita sia chiusa, cioè che il moto sia periodico. Affinché l’orbita si chiuda è necessario che si verifichi la condizione

$$\Delta\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} - \frac{2\mu V(r')}{l^2} - \frac{1}{r'^2}}} = 2\pi \frac{k}{k'}$$

dove k e k' sono numeri interi. Infatti, solo in questo caso, dopo k' “semiperiodi” $\Delta\theta$ uno dei due corpi avrà completato k rivoluzioni complete intorno all’altro e tornerà nel punto di partenza. È possibile dimostrare (teorema di Bertrand) che gli unici potenziali capaci di dare luogo a orbite chiuse, nel caso di moto confinato, per valori arbitrari di l ed E sono il potenziale armonico $V = \frac{1}{2}kr^2$ e quello newtoniano-coulombiano $V = -\alpha/r$ (quest’ultimo solo per $\alpha > 0$ e con $E < 0$). È infine possibile che l’orbita sia circolare, cioè che $r(t) = r_0 = \text{costante}$. Ciò può avvenire, per diverse forme del potenziale, solo per particolari valori di l ed E : occorre infatti che il potenziale efficace abbia per $r = r_0$ un estremo (massimo o minimo) e l’energia totale deve verificare la condizione $E = V_{\text{eff}}(r_0)$. Ovviamente un’orbita circolare è chiusa e periodica.

6.4.3 Calcolo del periodo

Nel caso di orbita chiusa ha senso chiedersi quale sia il periodo di rivoluzione, cioè dopo quanto tempo il corpo torna al punto di partenza.

Nel caso di orbita semplice, tale cioè ad ogni valore di θ corrisponda un solo valore di r , è sufficiente calcolare l’integrale nell’equazione (6.20) per ricavare il valore T tale che $\theta(T) = \theta_0 + 2\pi$.

Nel ricavare la velocità radiale (6.18) abbiamo trascurato la radice negativa: significa semplicemente che tutte le equazioni successive valgono anche per il cambio $dr \rightarrow -dr$, in altre parole il moto del corpo è simmetrico rispetto ai punti di inversione del moto radiale (in cui $dr/dt = 0$). Se nella traiettoria ci sono due punti di inversione, r_{\min} ed r_{\max} , il tempo necessario per andare da r_{\min} ad r_{\max} è uguale a quello per andare da r_{\max} ad r_{\min} . Definiamo

$$\tau = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - V(r') - \frac{l^2}{2\mu r'^2} \right)}}. \quad (6.37)$$

Se per andare da r_{\min} ad r_{\max} il corpo percorre mezzo angolo giro, il periodo sarà allora, in base alla (6.19):

$$T = 2\tau$$

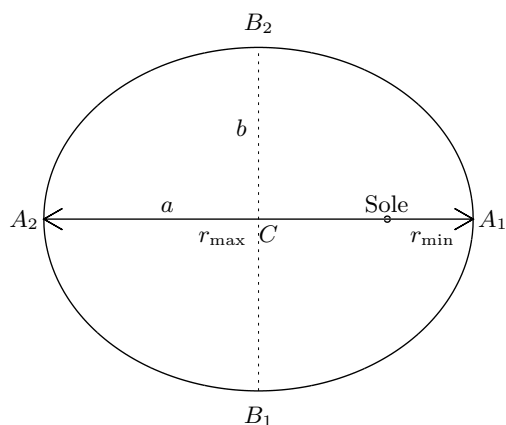
In generale, se l'angolo percorso è una frazione di angolo giro $\Delta\theta = 2\pi k/k'$ (con k e k' numeri interi), dopo un tempo

$$T = k' \tau$$

la particella sarà tornata al punto di partenza, girando k volte attorno all'origine.

6.4.4 Parametri orbitali del moto dei pianeti

Consideriamo un pianeta in orbita attorno al Sole: poichè il suo moto è confinato, la sua orbita può essere solo ellittica (l'orbita circolare viene considerata un caso particolare di ellisse). Il punto $r = 0$ indicherà la posizione del Sole (in uno dei fuochi dell'ellisse) che, nell'ipotesi che la massa del Sole sia molto più grande di quella del pianeta, coincide con il centro di massa del sistema Sole-pianeta. In questa approssimazione, inoltre, la massa ridotta coinciderà con la massa del pianeta m .



L'equazione della traiettoria del pianeta è data dalla formula (6.25), che qui riscriveremo ponendo, per comodità, $\theta' = 0$:

$$r = \frac{l^2/m\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta} . \quad (6.38)$$

L'ellisse corrisponde ad un valore dell'eccentricità $e < 1$.

Il punto di massimo avvicinamento del pianeta, A_1 (perielio), corrisponde a $\theta = 0$, in cui il denominatore assume il valore massimo $1 + e$; il punto dell'orbita più lontano dal Sole, viceversa, è in $\theta = \pi$ (A_2 , afelio). Le distanze massima e minima sono dunque:

$$r_{\min} = \frac{l^2}{m\alpha(1+\epsilon)} \quad \text{e} \quad r_{\max} = \frac{l^2}{m\alpha(1-\epsilon)}$$

ed il semiasse maggiore è

$$a = \frac{1}{2} (r_{\max} + r_{\min}) = \frac{l^2}{m\alpha(1 - \epsilon^2)}$$

Ricordando la definizione dell'eccentricità (6.24), ricaviamo che la lunghezza del semiasse maggiore (quello che contiene i fuochi) dipende solo dall'energia totale e non dal momento angolare:

$$a = -\frac{\alpha}{2E} \text{ .}$$

Per calcolare il semiasse minore, conviene riscrivere l'equazione della traiettoria in coordinate cartesiane, ponendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r \cos \theta$; si trova così:

$$(1 - \epsilon^2)x^2 + y^2 + \frac{2\epsilon l^2}{m\alpha}x = \frac{l^4}{m^2\alpha^2}$$

da cui vediamo che il centro dell'ellisse è il punto $C\left(-\frac{\epsilon l^2}{m\alpha(1-\epsilon^2)}, 0\right)$, ed i punti B_1 e B_2 si trovano calcolando l'intersezione tra l'ellisse e la retta parallela all'asse y passante per C . Si trova così:

$$b = \frac{l^2}{m\alpha\sqrt{1-\epsilon^2}} = a\sqrt{1-\epsilon^2}.$$

Da quest'ultima relazione troviamo

$$\epsilon = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} = \frac{c}{a},$$

essendo c la distanza del centro C dal fuoco. L'eccentricità è dunque la distanza fuoco-centro rapportata al semiasse maggiore.

Osserviamo che se $\epsilon = 0$, allora $b = a$ e l'ellisse diventa una circonferenza (l'origine coincide con il fuoco).

Ricordiamo che la velocità areolare (6.14) è costante (proporzionale al momento angolare) e sapendo che l'area dell'ellisse è $A = \pi ab$ è facile ricavare il periodo di rivoluzione:

$$T = \frac{A}{V_A} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{3/2},$$

che è proporzionale alla lunghezza del semiasse maggiore elevata alla potenza $3/2$: questa è la cosiddetta “III legge di Keplero”.

Possiamo determinare la velocità del pianeta in ogni punto della sua traiettoria. Scomponiamo il vettore velocità nella sua componente radiale e tangenziale:

$$\vec{v} = v_r \hat{u}_r + v_\theta \hat{u}_\theta \quad \text{con} \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}.$$

Dalla (6.13) e dall'equazione della traiettoria (6.38) ricaviamo

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{l}{mr} = \frac{\alpha}{l}(1 + \epsilon \cos \theta),$$

da cui si vede che la velocità tangenziale *non* è costante: essa è massima al perielio e minima all'afelio. La velocità radiale si calcola derivando la traiettoria (6.38) rispetto al tempo:

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l^2}{m\alpha} \frac{\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \frac{l}{mr^2} = \frac{\alpha\epsilon}{l} \sin \theta;$$

anche la componente radiale della velocità varia lungo la traiettoria, annullandosi nei due punti apsidali.

6.4.5 Applicazione allo studio dei moti unidimensionali

Quanto ricavato nei paragrafi precedenti può essere applicato anche allo studio del moto unidimensionale, che assumeremo essere lungo l'asse x , di un corpo di massa m soggetto ad un potenziale $V(x)$.

Nelle formule viste in precedenza, scriveremo x al posto di r ed m al posto di μ . Ovviamente tutte le equazioni che coinvolgono la variabile angolare θ , qui non hanno senso.

Come esempio, studiamo il moto di una particella di massa m nel potenziale a “doppia buca”

$$V(x) = a^2 x^4 - b^2 x^2,$$

essendo a e b dei parametri costanti. Scriviamo la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - a^2 x^4 + b^2 x^2,$$

e l'equazione del moto:

$$m\ddot{x} = -4a^2 x^3 + 2b^2 x,$$

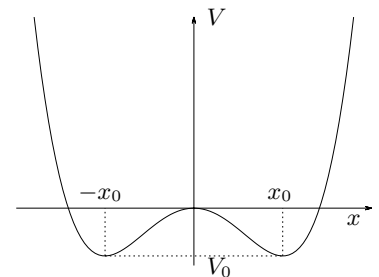
in cui riconosciamo la legge di Newton per un corpo su cui agisce la forza $F(x) = -V'(x) = -4a^2 x^3 + 2b^2 x$. Integrando l'equazione differenziale si ottiene l'informazione completa sul moto del corpo, ma ciò che a noi interessa in questo contesto è di trarre alcune informazioni anche senza effettuare l'integrazione esplicita.

Il potenziale ha la forma illustrata in figura: ha un massimo in $x = 0$ e due minimi in $x = \pm x_0 = \pm b/a\sqrt{2}$, in cui il potenziale assume il valore $V_0 = V(x_0) = -b^4/4a^2$.

L'energia totale è $E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$, e poiché l'energia cinetica non può essere negativa, le regioni di moto permesso sono quelle in cui $E \geq V(x)$.

A seconda del valore di E il moto del corpo assume caratteristiche diverse:

- $E < V_0$: impossibile.
- $E = V_0$: il corpo può stare solo in una delle due posizioni $x = \pm x_0$ e la sua energia cinetica è nulla, cioè il corpo è fermo, in equilibrio stabile.
- $V_0 < E < 0$: il corpo è confinato in una delle due “buche” di potenziale, in prossimità di $x = x_0$ oppure di $x = -x_0$, oscillando tra due posizioni limite (punti di inversione). Il corpo non può passare da una buca all'altra.
- $E = 0$: il corpo può trovarsi tra i punti estremi $-b/a$ e $+b/a$ (zeri del potenziale). In $x = 0$ la sua energia cinetica è nulla ed il corpo è fermo in equilibrio instabile. Anche nei punti estremi l'energia cinetica è nulla, ma agisce la forza $F = -V'(x)$ che fa muovere il corpo.



- $E > 0$: il corpo oscilla tra due posizioni limite da una parte all'altra del potenziale. La sua energia cinetica è massima in corrispondenza delle due buche di potenziale, vale esattamente E in $x = 0$ e si annulla nei punti di inversione.

I punti di inversione si ottengono risolvendo l'equazione $E = V(x)$, che in questo caso è una biquadratica: $a^2 x^4 - b^2 x^2 - E = 0$. Chiamando x_1^2 ed x_2^2 le sue radici:

$$x_1^2 = \frac{b^2 + \sqrt{b^4 - 4a^2 E}}{2a^2} \quad x_2^2 = \frac{b^2 - \sqrt{b^4 - 4a^2 E}}{2a^2}$$

si ha che, nel caso $E > 0$ la soluzione x_2^2 è negativa e i valori di x corrispondenti sono immaginari. Invece la x_1^2 è positiva e fornisce i due punti di inversione; la particella quindi oscilla tra $-x_1$ e $+x_1$.

Nel caso $E < 0$, sia x_1^2 che x_2^2 sono positive: otteniamo così le due regioni di moto permesso: tra $-x_1$ e $-x_2$ oppure tra x_2 ed x_1 .

Il moto unidimensionale, se è confinato, è sempre periodico (a meno che il corpo non stia fermo in una posizione di equilibrio).

Volendo calcolare il periodo di oscillazione si può applicare una relazione analoga alla (6.37). Ricavando infatti la velocità dall'energia totale si ha

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \{E - V(x)\}}$$

da cui, osservando che il moto tra i due punti di inversione corrisponde ad un semiperiodo, si ha

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \{E - V(x)\}}} = \sqrt{2m} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (6.39)$$

Nel caso del potenziale a doppia buca appena visto, la (6.39) non dà un integrale particolarmente utile da calcolare. Molto più interessante è il calcolo del periodo di oscillazione per un potenziale del tipo

$$V(x) = A|x|^\alpha$$

in cui A ed α sono parametri positivi. È ovvio che solo valori di E positivi sono ammissibili. I punti di inversione sono $x = \pm x_0$ con

$$E = A|x_0|^\alpha \quad \Rightarrow \quad x_0 = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/\alpha}$$

Il periodo è

$$T = \sqrt{2m} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - A|x|^\alpha}} = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - Ax^\alpha}},$$

avendo sfruttando, nell'ultimo passaggio, la simmetria del potenziale. Con un cambio della variabile di integrazione $Ax^\alpha = Eu^\alpha$ si ottiene:

$$T = \frac{2\sqrt{2m}}{A^{1/\alpha}} E^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^\alpha}}. \quad (6.40)$$

Con l'integrale scritto in modo esplicito nella forma (6.40) il calcolo si considera concluso, ma volendo fare i raffinati si può effettuare un ulteriore cambio di variabile, ponendo $u^\alpha = v$: l'integrale si trasforma nella rappresentazione integrale della funzione beta di Eulero, il cui risultato si esprime in termini della funzione Γ :

$$T = \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha A^{1/\alpha}} E^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}} \int_0^1 v^{\frac{1}{\alpha} - 1} (1 - v)^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha A^{1/\alpha}} E^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha A^{1/\alpha}} E^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}\right)}. \quad (6.41)$$

Osserviamo che solo nel caso $\alpha = 2$ il periodo T è indipendente dall'energia totale E : è il caso del potenziale armonico e ciò che abbiamo trovato è l'isocronia delle oscillazioni per questo potenziale, un risultato ben noto. Ponendo $\alpha = 2$ e $A = \frac{k}{2}$ nella (6.41) (o nella (6.40)) si ottiene il periodo dell'oscillatore armonico:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Anche nel caso unidimensionale esiste la possibilità di avere moto in una regione illimitata: se il potenziale non tende a $+\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$, il corpo si può allontanare, se ha energia sufficiente, all'infinito, in una o entrambe le direzioni.

Si consideri ad esempio il potenziale lineare $V(x) = ax$, con $a > 0$, a cui corrisponde una forza costante $\vec{F} = -a\hat{u}_x$. Se il corpo ha energia E , il suo moto è limitato superiormente da $x_{\max} = E/a$ ma non c'è alcun punto di inversione inferiore: il corpo può allontanarsi all'infinito in direzione $-x$, con accelerazione uniforme, e la sua energia cinetica cresce indefinitamente.

Come altro esempio, si consideri il potenziale $V = \frac{-V_0}{1+a^2 x^2}$ ($V_0 > 0$), che ha un minimo pari a $-V_0$ nell'origine e tende a zero per $x \rightarrow \pm\infty$. Il valore minimo possibile per l'energia del corpo è $E = -V_0$, che corrisponde ad avere il corpo fermo, in equilibrio stabile, nell'origine. Per $-V_0 < E < 0$ il moto del corpo è confinato nella regione compresa tra i due punti di inversione $\pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-V_0}{E}} - 1$. Per $E \geq 0$, infine, il moto è illimitato in entrambe le direzioni, ma l'energia cinetica non cresce indefinitamente: il suo valore asintotico è $T = E$.

6.4.6 Applicazione: il pendolo sferico

Alcuni dei metodi di calcolo in questo capitolo possono essere applicati anche a sistemi con simmetria assiale, come ad esempio il pendolo sferico visto nel paragrafo (3.4.8). La Lagrangiana è data dall'equazione (3.48): la variabile φ è ciclica, quindi il suo impulso generalizzato p_φ , che coincide con la componente z del momento angolare, è costante:

$$p_\varphi = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = L_z = \text{costante} . \quad (6.42)$$

Scriviamo l'energia totale^[††]:

$$E = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + U(\theta) ,$$

avendo introdotto il “potenziale” $U(\theta)$, per brevità di scrittura. Si può ricavare $\dot{\theta}$ e, separando le variabili, si ottiene l'equazione:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} [E - U(\theta)]}} , \quad (6.43)$$

che si può ricondurre ad un integrale ellittico di prima specie. Utilizzando la (6.42) si ottiene anche:

$$\varphi = \frac{L_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{E - U(\theta)}} , \quad (6.44)$$

che si può esprimere come integrale ellittico di seconda specie. Gli integrali ellittici sono funzioni speciali ben studiate in matematica: di esse conosciamo rappresentazioni integrali, sviluppi in serie, limiti e molte altre proprietà. Il risultato espresso tramite le (6.43) e (6.44) è quindi completo.

Osserviamo che le equazioni (6.43) e (6.44) hanno senso solo se $E > U(\theta)$: questa condizione definisce la regione del moto permessa per la variabile θ . La sua frontiera si trova risolvendo l'equazione $E = U(\theta)$, che è un'equazione algebrica di terzo grado in $\cos \theta$. Anche senza risolverla esplicitamente, possiamo dedurre che ha 3 radici reali: infatti se $L_z \neq 0$ l'angolo θ non può assumere i valori 0 e π (cioè il corpo non può raggiungere l'asse z) perché sarebbe impossibile soddisfare la (6.42); θ deve essere quindi limitato sia inferiormente che superiormente, $\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}$, e l'equazione $E = U(\theta)$ in $\cos \theta$ ha 2 radici reali nell'intervallo $(-1, 1)$, segue che anche la terza radice non può che essere reale ma deve essere al di fuori di questo intervallo (altrimenti si aprirebbe un'altra regione di variabilità per θ che comprenderebbe l'asse z). Gli angoli limite θ_{\min} e θ_{\max} determinano sulla sfera di raggio l la posizione di due circonferenze tra le quali è compresa la traiettoria del pendolo.

Se $L_z = 0$, allora $\dot{\varphi} = 0$ ed il pendolo oscilla in un piano verticale fisso ($\varphi = \text{costante}$), percorrendo un arco di cerchio massimo (o l'intero cerchio, se l'energia è sufficiente ad arrivare nel punto più alto): si ha un pendolo semplice, la cui soluzione è data sempre dalla (6.43).

^[††]ricordiamo che l'angolo θ , per come era stato introdotto nel paragrafo (3.4.8), è il supplementare dell'angolo che il raggio vettore forma con la direzione positiva dell'asse z .

Capitolo 7

Formalismo Hamiltoniano

In questo capitolo studieremo una formulazione diversa della meccanica, nota come *meccanica hamiltoniana*. Dal punto di vista fisico, il metodo hamiltoniano è del tutto equivalente a quello lagrangiano, studiato nei capitoli precedenti, ma la sua importanza risiede nel fornire un'impostazione teorica adatta ad essere estesa a molte altre aree della fisica. Nella meccanica classica essa pone le basi per lo sviluppo della teoria di Hamilton-Jacobi, della teoria delle perturbazioni e della teoria del caos; al di fuori della meccanica classica, l'approccio hamiltoniano costituisce il linguaggio in cui è formulata la meccanica quantistica.

Nel seguito considereremo sempre sistemi olonomi soggetti a forze conservative, ossia che derivino da un potenziale dipendente solo dalla posizione, oppure associabili ad un potenziale generalizzato dipendente anche dalla velocità della forma vista nel paragrafo 3.3.

7.1 Trasformazioni di Legendre ed equazioni del moto di Hamilton

Il moto di un sistema con n gradi di libertà è descritto dalle n equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (7.1)$$

che sono equazioni differenziali *del second'ordine* la cui soluzione è completamente specificata se sono date $2n$ condizioni iniziali, per esempio i valori delle variabili $q_\alpha(t_0)$ e $\dot{q}_\alpha(t_0)$ a un certo istante t_0 ^[*]. Nell'approccio lagrangiano, come abbiamo visto, lo stato del sistema a un certo istante è rappresentato da un punto nello spazio n -dimensionale delle configurazioni e la sua evoluzione temporale corrisponde a una traiettoria in questo spazio. Le n variabili indipendenti sono le coordinate lagrangiane q_α e le \dot{q}_α sono semplicemente le loro derivate rispetto al tempo. E' importante ricordare che nel formalismo lagrangiano le coordinate q_α *devono* essere indipendenti.

La formulazione hamiltoniana della meccanica è basata su un approccio fondamentalmente diverso, sebbene equivalente. In questo caso vogliamo descrivere il moto attraverso *equazioni differenziali del prim'ordine*. Poiché le condizioni iniziali restano ovviamente $2n$, dovremo avere $2n$ equazioni differenziali indipendenti del prim'ordine in $2n$ *variabili indipendenti*.

Lo stato del sistema a un certo istante, nel formalismo hamiltoniano, sarà quindi rappresentato da un punto in uno spazio $2n$ -dimensionale, detto **spazio delle fasi**, le cui coordinate sono $2n$ variabili *indipendenti*.

In pratica, vogliamo dimezzare l'ordine delle equazioni differenziali del moto raddoppiando il numero di variabili indipendenti. A questo scopo, è naturale scegliere la metà di queste variabili come le n coordinate lagrangiane q_α . Le altre n variabili indipendenti sono i **momenti coniugati** (o

[*] Questa non è l'unica scelta di condizioni iniziali. Si potrebbero dare, per esempio, i valori delle q_α a due istanti diversi t_1 e t_2 , e il sistema di equazioni differenziali sarebbe ugualmente completamente determinato.

generalizzati)

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}(q_\beta, \dot{q}_\beta, t)}{\partial \dot{q}_\alpha} . \quad (7.2)$$

Questa non è l'unica scelta possibile ma porta, come vedremo, a una formulazione quasi simmetrica rispetto ai due set di variabili.

Dal punto di vista strettamente matematico, il passaggio dalla formulazione lagrangiana a quella hamiltoniana della meccanica corrisponde a un cambiamento di variabili dall'insieme $(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ a (q_α, p_α, t) , che si ottiene mediante una trasformazione di Legendre.

Trasformazioni di Legendre: caso di due variabili

Consideriamo una funzione di due variabili indipendenti $f(x, y)$ tale che

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \equiv u dx + v dy$$

avendo posto

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} , \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} . \quad (7.3)$$

Vogliamo ora considerare u e y come variabili indipendenti e passare dalla base (x, y) alla base (u, y) in modo che le quantità differenziali siano espresse in termini di du e dy . Definiamo a tal fine una funzione

$$g = f - ux$$

e calcoliamo il suo differenziale:

$$dg = df - u dx - x du = \cancel{u dx} + v dy - \cancel{u dx} - x du = -x du + v dy$$

da cui vediamo che g è proprio della forma desiderata poiché è una funzione delle variabili (u, y) . Notiamo che, nella equazione precedente,

$$\frac{\partial g}{\partial u} = -x , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = v$$

che sono le relazioni, valide per la funzione g , analoghe alle (7.3).

Consideriamo alcuni esempi di trasformate di Legendre usate in termodinamica.

Per trasformazioni termodinamiche reversibili la prima legge della termodinamica si può scrivere in forma differenziale come

$$dU = T dS - P dV ,$$

dove l'energia interna $U(S, V)$ è scritta come funzione dell'entropia S e del volume V del gas, e la temperatura T e la pressione P sono date da

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad \text{e} \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V} .$$

Il potenziale termodinamico detto *entalpia* $H(S, P)$ è una funzione di S e P generata dalla trasformazione di Legendre

$$H = U + PV$$

tale che

$$dH = dU + P dV + V dP = T dS + V dP \quad \text{con} \quad T = \frac{\partial H}{\partial S} \quad \text{e} \quad V = \frac{\partial H}{\partial P} .$$

L'entalpia è utile (perché costante) nel caso di trasformazioni isoentropiche ($dS = 0$) e isobariche ($dP = 0$).

Per trasformazioni di tipo isoterma ($dT = 0$) e isobarico ($dP = 0$) è più conveniente utilizzare un potenziale termodinamico dipendente da T e P . Esso si può ottenere da H con la seguente trasformazione di Legendre

$$G = H - TS \quad \text{con} \quad dG = T dS + V dP - T dS - S dT = -S dT + V dP .$$

Il potenziale $G(T, P)$ è noto come *funzione di Gibbs* o *energia libera di Gibbs*.

Infine, per trasformazioni di tipo isoterma ($dT = 0$) e isocoro ($dV = 0$) si usa l'*energia libera di Helmholtz* $F(T, V)$ generata dalla trasformazione di Legendre

$$F = U - TS \quad \text{da cui} \quad dF = -P dV - S dT \quad \text{con} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial V} \quad \text{e} \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} .$$

La trasformazione di Legendre che determina il passaggio dalla funzione $\mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ ad una funzione che dipenda dalle q_α e dai p_α , ma non dalle \dot{q}_α , è una generalizzazione della trasformazione sopra illustrata al caso di più variabili.

Il differenziale della Lagrangiana $\mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ (analoga alla funzione f):

$$d\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (7.4)$$

si può scrivere, usando la definizione (7.2) e le equazioni di Lagrange, come

$$d\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^n (\dot{p}_\alpha dq_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (7.5)$$

La **Hamiltoniana** H (analoga alla funzione $-g$) è generata dalla trasformazione di Legendre

$$H(q_\alpha, p_\alpha, t) \equiv \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \dot{q}_\alpha - \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) . \quad (7.6)$$

Infatti, da un lato intenderemo H come funzione delle coordinate e dei momenti generalizzati (e del tempo), per cui:

$$dH = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt , \quad (7.7)$$

dall'altro, differenziando il secondo membro della (7.6) e usando la (7.5), otteniamo

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{\alpha} (p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha) - d\mathcal{L} \\ &= \sum_{\alpha} (p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha - p_\alpha d\dot{q}_\alpha) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt . \end{aligned} \quad (7.8)$$

Ora il confronto diretto tra la (7.7) e la (7.8) fornisce le seguenti $2n$ relazioni

$$\boxed{\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.} \quad (7.9)$$

a cui si aggiunge

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}} .$$

Le equazioni (7.9) sono note come **equazioni del moto di Hamilton** o **equazioni del moto canoniche** e costituiscono un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine, in sostituzione delle n equazioni di Lagrange, che sono del secondo ordine. I due sistemi di equazioni differenziali sono del tutto equivalenti. Per caratterizzare completamente lo stato del sistema occorreranno le $2n$ costanti $q_\alpha(t_0)$ e $p_\alpha(t_0)$ che rappresentano le condizioni iniziali nel formalismo hamiltoniano.

Come già detto, l'insieme delle (q_α, p_α) costituisce un iperspazio a $2n$ dimensioni, che prende il nome di **spazio delle fasi**. In esso ogni punto individua, ad un certo istante, lo stato del sistema. Tale punto descrive, in funzione del tempo, una traiettoria nello spazio delle fasi che rappresenta l'evoluzione dell'intero sistema.

Si noti che la funzione Hamiltoniana H (7.6) è identica, nella definizione e quindi nel valore numerico, alla *funzione energia* h definita nella (4.15). La differenza fra H e h è che le due funzioni dipendono da variabili diverse. Mentre h , come \mathcal{L} , dipende dalle q_α e \dot{q}_α (e eventualmente da t), H deve sempre essere espressa in funzione delle q_α , p_α (e t). E' corretto usare simboli diversi per h e H perché la dipendenza funzionale dalle relative variabili è diversa.

Consideriamo ora la derivata totale di H rispetto al tempo:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) + \frac{\partial H}{\partial t},$$

ossia, sfruttando le equazioni del moto di Hamilton (7.9)

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Quindi l'Hamiltoniana è una *costante del moto* se la Lagrangiana (e pertanto la stessa H) non dipende esplicitamente dal tempo.

7.1.1 Esempio: Moto di una particella soggetta a forze centrali

Usiamo un sistema di coordinate generalizzate polari (r, θ, ϕ) . L'energia potenziale è data da una funzione $V(r)$, che dipende solo dalla distanza r dal centro di forza, e la Lagrangiana è (vedere paragrafo 3.4.2):

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(r) = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r).$$

I momenti generalizzati sono:

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \quad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

La funzione Hamiltoniana si ottiene facilmente:

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r)$$

e si vede chiaramente che essa coincide con l'energia totale.

Nel caso di forze centrali, abbiamo visto che il momento angolare si conserva (conseguenza dell'isotropia del sistema); il moto allora si svolge su un piano e, senza perdita di generalità possiamo scegliere gli assi coordinati in modo che questo piano sia (x, y) . In coordinate polari ciò equivale a porre $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta} = 0$ (quindi $p_\theta = 0$). Lagrangiana ed Hamiltoniana si semplificano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - V(r) \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r)$$

Le equazioni del moto di Hamilton sono

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{dt} &= \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{dp_\phi}{dt} &= \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad \implies \quad p_\phi = \text{costante} . \\ \frac{dr}{dt} &= \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \end{aligned}$$

Le ultime due equazioni danno la definizione esplicita di p_r e p_ϕ (da cui vediamo che la costante del moto p_ϕ è proprio il momento angolare), mentre le prime due equazioni coincidono, una volta effettuate le sostituzioni per p_r e p_ϕ , con le equazioni di Lagrange (3.40).

7.1.2 Esempio: Particella in un campo elettromagnetico

Abbiamo visto, nel paragrafo 3.3, che la Lagrangiana di una particella non relativistica di carica elettrica q che si muove in un campo elettromagnetico è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v}.$$

Prendendo come coordinate generalizzate un sistema di coordinate cartesiane di posizione, la Lagrangiana si può riscrivere come

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \frac{m\dot{x}_i^2}{2} - q\phi + q \sum_{i=1}^3 A_i \dot{x}_i,$$

con i potenziali ϕ ed \vec{A} dipendenti dalle x_i e dal tempo. I momenti canonici sono

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i \quad \text{da cui} \quad \dot{x}_i = \frac{p_i - qA_i}{m}$$

e l'Hamiltoniana è

$$H = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi \quad (7.10)$$

che rappresenta l'energia totale della particella.

7.2 Costanti del moto e coordinate cicliche

Come abbiamo visto nel paragrafo 4.2, una coordinata q_α è *ciclica* se non compare esplicitamente nella Lagrangiana, ossia se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0$; le equazioni del moto di Lagrange allora comportano che il suo momento coniugato $p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}$ sia costante. Ma per le equazioni del moto di Hamilton

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

quindi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0$, oltre ad implicare $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \dot{p}_\alpha = 0$, implica anche

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$$

quindi una coordinata ciclica non compare esplicitamente neanche nella funzione di Hamilton, come si poteva vedere direttamente anche dalla definizione (7.6). Inoltre se $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$ allora $\dot{p}_\alpha = 0$ e p_α è conservato.

I teoremi di conservazione ricavati nel capitolo 4 per la Lagrangiana sono validi anche per l'Hamiltoniana:

- Se l'Hamiltoniana di un sistema è invariante per traslazioni in una direzione individuata dal versore \hat{n} , allora la componente della quantità di moto totale del sistema parallela ad \hat{n} , cioè $\vec{P} \cdot \hat{n}$, si conserva. Se l'invarianza esiste per traslazioni in qualsiasi direzione (omogeneità dello spazio), allora si conserva il vettore completo \vec{P} .
- Se l'Hamiltoniana di un sistema è invariante per rotazioni attorno ad un asse individuato dal versore \hat{n} , allora la componente del momento della quantità di moto totale del sistema parallela ad \hat{n} , cioè $\vec{L} \cdot \hat{n}$, si conserva. Se l'invarianza esiste per rotazioni attorno ad un asse arbitrario (isotropia dello spazio), allora si conserva il vettore completo \vec{L} .

- Se l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo essa è una costante del moto. Questa proprietà era stata dimostrata nel paragrafo 4.6, ma la si può ricavare direttamente dalle equazioni del moto di Hamilton:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

quindi H è una costante del moto ($\frac{dH}{dt} = 0$) se e solo se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Inoltre, come abbiamo dimostrato nel Cap. 4, se le trasformazioni che definiscono le coordinate generalizzate q_α non dipendono esplicitamente dal tempo ($\vec{r}_i = \vec{r}(q_1 \cdots q_n)$) e il potenziale non dipende dalle velocità ($V = V(q_1 \cdots q_n)$), allora $H = T + V$ è l'energia del sistema. Anche se una sola di queste due condizioni non è soddisfatta può succedere che H sia una costante del moto ma non sia l'energia del sistema.

7.3 Derivazione delle equazioni di Hamilton da un principio variazionale

Anche le equazioni canoniche (7.9) si possono ricavare dal principio variazionale di Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0.$$

Utilizzando la (7.6) avremo infatti

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(q_{\alpha}, p_{\alpha}, t) \right] = 0, \quad (7.11)$$

relazione che viene comunemente chiamata **principio di Hamilton modificato**. Perché "modificato"? Innanzitutto perché nel formalismo hamiltoniano l'integrale (7.11) deve essere valutato lungo traiettorie nello spazio delle fasi ($2n$ -dimensionale) anziché nello spazio delle configurazioni (n -dimensionale) come accade nel formalismo lagrangiano: le variabili q_{α} e p_{α} devono essere considerate indipendenti e quindi variate indipendentemente. Di conseguenza l'integrando nella (7.11) deve essere espresso in funzione di queste variabili e delle loro derivate, e contiene le \dot{q}_{α} solo nel termine $p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}$ e le q_{α} solo nella Hamiltoniana H .

Consideriamo il primo termine del secondo membro della (7.11):

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha} \left(\dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} + p_{\alpha} \frac{d}{dt} (\delta q_{\alpha}) \right) = \\ &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha} (\dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \dot{p}_{\alpha} \delta q_{\alpha}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\alpha} (\dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \dot{p}_{\alpha} \delta q_{\alpha}) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$p_{\alpha} \frac{d}{dt} (\delta q_{\alpha}) = \frac{d}{dt} (p_{\alpha} \delta q_{\alpha}) - \delta q_{\alpha} \frac{dp_{\alpha}}{dt}$$

e il fatto che il termine integrato si annulla per le usuali condizioni al contorno $\delta q_{\alpha}(t_1) = \delta q_{\alpha}(t_2) = 0$. La variazione dell'azione (7.11) diventa allora

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{\alpha} (\dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \dot{p}_{\alpha} \delta q_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} \right) \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{\alpha} \left(\dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left(\dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (7.12)$$

e data l'indipendenza e l'arbitrarietà di tutte le variazioni δp_α , δq_α , la (7.12) risulta del tutto equivalente alle equazioni di Hamilton (7.9):

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \forall \alpha = 1, \dots, n. \quad (7.13)$$

Sottolineiamo ancora che i momenti p_α (a differenza delle \dot{q}_α) sono qui elevati allo stato di *variabili indipendenti*, con variazioni δp_α altrettanto indipendenti. Questa è la differenza fondamentale fra le formulazioni lagrangiana e hamiltoniana; nessuno fra i sistemi di coordinate q_α e dei momenti p_α deve essere considerato più “importante” dell'altro. I termini “coordinate” e “momenti” assumono un significato generale: sono semplicemente la separazione delle variabili indipendenti che descrivono il moto del sistema in due gruppi che hanno fra loro una relazione quasi simmetrica espressa dalle equazioni di Hamilton.

7.4 Azione in funzione delle coordinate e del tempo

Fino ad ora si è definita l'azione come

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) dt \quad (7.14)$$

avendo fissato gli istanti di tempo t_1 e t_2 , nonché la configurazione del sistema in tali istanti: $q_\alpha(t_1)$ e $q_\alpha(t_2)$. In tal modo l'azione è un numero, di cui si calcola la variazione di valore quando nell'integrando si usino cammini diversi $q_\alpha + \delta q_\alpha$, pur sempre tra gli stessi istanti t_1 e t_2 , e con le configurazioni iniziale e finale invariate ($\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$).

D'altra parte, tra tutti i cammini possibili solo uno rende l'azione estrema (minima) e sarà quello effettivamente percorso dal sistema nello spazio delle configurazioni, obbedendo alle equazioni del moto (di Lagrange).

Vogliamo ora definire l'azione come una quantità caratteristica del sistema, durante tutto il moto del sistema lungo il suo cammino effettivo, ossia con leggi orarie $q_\alpha(t)$ che soddisfano le equazioni di Lagrange. A tal fine consideriamo l'azione tra un istante fissato t_1 ed un generico istante t :

$$S = \int_{t_1}^t \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t') dt' \equiv S(q_\alpha(t), t). \quad (7.15)$$

L'azione S è pertanto funzione delle coordinate e del tempo nel limite superiore di integrazione. Consideriamo ora la variazione dell'azione corrispondente al passaggio da un cammino $q_\alpha(t)$ che soddisfa le equazioni di Lagrange ad uno infinitamente prossimo $q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$, essendo

$$\delta S = \sum_\alpha \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt}(\delta q_\alpha) \right) dt = \sum_\alpha \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right|_{t_1}^t + \int_{t_1}^t \sum_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha dt.$$

Nel termine integrato $\delta q_\alpha(t_1) = 0$ (come prima), mentre in generale sarà $\delta q_\alpha(t) \neq 0$; d'altra parte l'integrando del secondo termine è identicamente nullo perché lungo il cammino descritto dalle $q_\alpha(t)$ le equazioni del moto sono soddisfatte. Quindi la variazione dell'azione si riduce a

$$\delta S = \sum_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha. \quad (7.16)$$

Da qui si ottiene

$$\frac{\delta S}{\delta q_\alpha} \equiv \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha,$$

che, se le q_α sono le coordinate cartesiane, diventa $\vec{\nabla} S = \vec{p}$. Se il sistema è conservativo e vale la relazione

$$\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) = E \quad \text{cioè} \quad |\vec{p}| = \sqrt{2m[E - V(\vec{r})]}$$

otteniamo

$$|\vec{\nabla} S| = \sqrt{2m[E - V(\vec{r})]}$$

che ci fornisce direttamente le proprietà dell'azione come funzione delle coordinate.

Per ottenere la dipendenza di S dal tempo consideriamone la derivata totale rispetto a t ; dalla definizione (9.11) segue

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} ,$$

ma è anche

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} . \quad (7.17)$$

Quindi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} = \mathcal{L} = -H + \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} ,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione della funzione di Hamilton H . Abbiamo quindi ricavato che

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H .$$

Questa, sostituita nella (7.17), ci permette di scrivere il differenziale dell'azione come funzione delle coordinate lagrangiane e del tempo

$$\boxed{dS = \sum_{\alpha} p_{\alpha} dq_{\alpha} - H dt} \quad (7.18)$$

e di scrivere l'azione come

$$S = \int \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} dq_{\alpha} - H dt \right) .$$

Capitolo 8

Trasformazioni canoniche e Parentesi di Poisson

La formulazione hamiltoniana, di per sé, non è in grado di ridurre le difficoltà pratiche della risoluzione della maggior parte dei problemi meccanici concreti, infatti le equazioni del moto sono equivalenti a quelle che si ottengono con il metodo lagrangiano. La vera importanza del metodo hamiltoniano è nel nuovo approccio alla meccanica classica. Il mettere sullo stesso livello le coordinate ed i momenti coniugati, considerate variabili indipendenti tra loro, favorisce la massima libertà nella scelta delle quantità fisiche chiamate genericamente “coordinate” e “momenti”. Il risultato è un approccio più astratto al problema meccanico, generalizzabile ad altri contesti fisici. Da questa formulazione della meccanica classica, infatti, prendono spunto sia la meccanica statistica che la teoria quantistica.

8.1 Trasformazioni Canoniche

Consideriamo un particolare problema per il quale la soluzione delle equazioni canoniche è banale: si tratta del caso in cui la funzione Hamiltoniana è una costante del moto e *tutte* le coordinate q_α sono cicliche. Essendo, per le equazioni di Hamilton,

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$$

segue che tutti i momenti coniugati sono costanti

$$p_\alpha = \beta_\alpha ,$$

e poiché H non può dipendere esplicitamente dal tempo (per l'ipotesi che sia costante del moto) né dalle q_α , la si potrà scrivere come

$$H = H(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) .$$

Le equazioni di Hamilton per le coordinate risultano allora

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \beta_\alpha} = \omega_\alpha .$$

A loro volta le ω_α , essendo funzioni solo delle costanti β_α , saranno costanti nel tempo e le equazioni precedenti sono facilmente integrabili. La loro soluzione è

$$q_\alpha = \omega_\alpha t + \gamma_\alpha ,$$

dove γ_α sono delle costanti di integrazione determinate dalle condizioni iniziali.

Per quanto banale, questo caso non è di puro interesse accademico, come potrebbe sembrare. Si è già visto infatti che lo stesso sistema può essere descritto da diversi sistemi di coordinate: per il moto su un piano, ad esempio, possiamo scegliere la coppia (x, y) o la coppia (r, θ) ; quando le forze agenti sul sistema sono di tipo centrale, l'Hamiltoniana non dipende da θ , che è quindi una coordinata ciclica, associata al momento angolare l , che è una costante del moto. Al contrario, né x né y sarebbero coordinate cicliche. Quindi il numero di coordinate cicliche dipende dalla scelta delle coordinate generalizzate ed è lecito chiedersi se per ogni problema fisico esista una scelta, particolarmente felice, di coordinate per cui risultino *tutte* cicliche. Una volta trovato tale insieme di coordinate, il resto della soluzione sarebbe banale. Normalmente le coordinate che si presentano

come le più immediate per formulare un problema non saranno cicliche e quindi occorrerà ricavare un metodo per trasformare un insieme di coordinate in un altro che potrebbe essere più conveniente.

Le trasformazioni incontrate nei capitoli precedenti portavano da un insieme di coordinate $\{q_\alpha\}$ ad un altro, che indicheremo con $\{Q_\alpha\}$, con delle relazioni del tipo

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q, t) , \quad (8.1)$$

dette anche **trasformazioni puntuali** (tali cioè che le Q dipendano dalle q ed eventualmente da t). Le trasformazioni di coordinate per il passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari o cilindriche (viste nei paragrafi 3.4.2 e 3.4.2) sono di questo tipo. Ora tuttavia anche i momenti canonici sono variabili indipendenti a tutti gli effetti e possiamo estendere il concetto precedente a trasformazioni simultanee delle coordinate e dei momenti:

$$\begin{cases} Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t) \\ P_\alpha = P_\alpha(q, p, t) . \end{cases} \quad (8.2)$$

Entrambe le trasformazioni (8.2) dipenderanno sia dalle coordinate generalizzate che dai momenti: sono trasformazioni nello spazio delle fasi, mentre le (8.1) sono trasformazioni nello spazio delle configurazioni.

Si dicono **Trasformazioni Canoniche** (o di contatto) delle trasformazioni del tipo (8.2) in cui le nuove variabili Q_α e P_α sono ancora canoniche, cioè tali che esista una funzione $K(Q, P, t)$ che dia delle equazioni del moto, per le variabili Q_α e P_α , ancora nella forma hamiltoniana:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} .$$

La funzione K sarà allora l'Hamiltoniana del problema, espressa nel nuovo insieme di coordinate e di momenti. Vediamo quali relazioni devono sussistere tra la "vecchia" Hamiltoniana H e la "nuova" K affinché ciò avvenga. Le Q_α e P_α sono coordinate canoniche se soddisfano il principio di Hamilton modificato (7.11):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - K(Q, P, t) \right] dt = 0 \quad (8.3a)$$

Ma anche le vecchie coordinate soddisfano l'analoga relazione:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(q, p, t) \right] dt = 0 . \quad (8.3b)$$

Naturalmente imporre che le equazioni (8.3a) e (8.3b) valgano simultaneamente non significa che gli integrandi debbano essere uguali. La forma generale del principio di Hamilton modificato richiede che le variazioni siano nulle agli estremi e quindi gli integrandi possono differire per la derivata totale rispetto al tempo di un'arbitraria funzione $F \equiv F(q, p, Q, P, t)$ (purché derivabile) delle coordinate dello spazio delle fasi. Infatti

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta [F(q(t_2), p(t_2), Q(t_2), P(t_2), t_2) - F(q(t_1), p(t_1), Q(t_1), P(t_1), t_1)] = 0$$

in quanto le variazioni agli estremi sono, per definizione, nulle. Scriveremo pertanto

$$\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - H(q, p, t) = \sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt} . \quad (8.4)$$

La funzione F è detta **funzione generatrice** della trasformazione di coordinate in quanto, una volta specificata F , le relazioni di trasformazione (8.2) risultano completamente definite, come vedremo tra poco. Per ottenere le relazioni tra le vecchie e le nuove variabili, F dovrà dipendere da entrambe; quindi, a parte il tempo t , F potrà dipendere da $4n$ variabili, di cui però solo $2n$ sono indipendenti, se devono valere le (8.2). Inoltre, per generare la trasformazione canonica, F dovrà dipendere sia dalle vecchie che dalle nuove variabili (cioè da n variabili p o q e n variabili P o Q). Quindi esisteranno quattro tipologie possibili per la funzione generatrice:

$$F_1(q, Q, t) , \quad F_2(q, P, t) , \quad F_3(p, Q, t) , \quad F_4(p, P, t) .$$

Consideriamo questi quattro casi separatamente per capire meglio in che senso F genera la trasformazione.

- $F = F_1(q, Q, t)$

L'equazione (8.4) si scriverà dunque come

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(q, p, t) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \quad (8.5)$$

ossia, scrivendo esplicitamente l'ultimo termine,

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(q, p, t) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} - K(Q, P, t) + \sum_{\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} \dot{Q}_{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial t} ; \quad (8.6)$$

questa relazione è identicamente soddisfatta solo se i coefficienti delle \dot{q}_{α} e \dot{Q}_{α} sono uguali nelle due espressioni, ossia se

$$p_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} F_1(q, Q, t) \quad (8.7a)$$

$$P_{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial Q_{\alpha}} F_1(q, Q, t) \quad (8.7b)$$

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (8.7c)$$

Le n equazioni (8.7a) coinvolgono solo le variabili $p_{\alpha}, q_{\alpha}, Q_{\alpha}$ e t e si possono risolvere (ammettendo ovviamente che possano essere invertite) per esprimere le Q_{α} come $Q_{\alpha}(p, q, t)$; una volta trovate queste n relazioni e sostituite nelle (8.7b) si potranno ricavare le rimanenti equazioni di trasformazione $P_{\alpha} = P_{\alpha}(p, q, t)$. Infine la (8.7c) ci dà la relazione tra la vecchia e la nuova Hamiltoniana. Si noti che per trovare $K(Q, P, t)$ occorre esprimere tutte le quantità a secondo membro della (8.7c) in termini delle variabili Q e P , invertendo le trasformazioni canoniche per ottenere le $q_{\alpha}(Q, P, t)$ e $p_{\alpha}(Q, P, t)$.

Notiamo anche che, per come sono state derivate, le trasformazioni dalle p_{α}, q_{α} alle P_{α}, Q_{α} sono sicuramente trasformazioni canoniche in quanto le nuove variabili soddisfano, per costruzione, il principio variazionale di Hamilton (7.11).

- $F = F_2(q, P, t)$

Possiamo passare dalle variabili (q, Q) (da cui dipende F_1) alle (q, P) (da cui dipende F_2) tramite una trasformazione di Legendre:

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{\alpha} P_{\alpha} Q_{\alpha}. \quad (8.8)$$

Infatti

$$\begin{aligned} dF_2 &= \sum_{\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt + \sum_{\alpha} P_{\alpha} dQ_{\alpha} + \sum_{\alpha} Q_{\alpha} dP_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} (p_{\alpha} dq_{\alpha} - P_{\alpha} dQ_{\alpha} + P_{\alpha} dQ_{\alpha} + Q_{\alpha} dP_{\alpha}) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (8.9)$$

dove abbiamo usato le (8.7a) e (8.7b). Quindi F_2 è effettivamente una funzione delle variabili q_{α} e P_{α} : $F_2 \equiv F_2(q, P, t)$. D'altra parte dF_2 si può anche scrivere come

$$dF_2 = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} dP_{\alpha} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt. \quad (8.10)$$

Dal confronto delle (8.9) e (8.10) si ottengono le equazioni di trasformazione

$$p_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} F_2(q, P, t) \quad (8.11a)$$

$$Q_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial P_{\alpha}} F_2(q, P, t) \quad (8.11b)$$

e

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (8.11c)$$

da cui segue

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (8.11d)$$

- $F = F_3(p, Q, t)$

Di nuovo colleghiamo F_3 ad F_1 tramite una trasformazione di Legendre:

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_{\alpha} p_{\alpha} q_{\alpha} .$$

Seguendo il procedimento del caso precedente, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} dF_3 &= \sum_{\alpha} (p_{\alpha} d\overline{q_{\alpha}} - P_{\alpha} dQ_{\alpha} - \overline{p_{\alpha}} dq_{\alpha} - q_{\alpha} dp_{\alpha}) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial F_3}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} + \frac{\partial F_3}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha} \right) + \frac{\partial F_3}{\partial t} dt , \end{aligned}$$

da cui segue

$$q_{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} F_3(p, Q, t) \quad (8.12a)$$

$$P_{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial Q_{\alpha}} F_3(p, Q, t) \quad (8.12b)$$

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_3}{\partial t} . \quad (8.12c)$$

- $F = F_4(p, P, t)$

Questa volta F_4 si potrà collegare a F_1 tramite una doppia trasformazione di Legendre:

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_{\alpha} p_{\alpha} q_{\alpha} + \sum_{\alpha} P_{\alpha} Q_{\alpha}$$

e da

$$\begin{aligned} dF_4 &= \sum_{\alpha} (\overline{p_{\alpha}} d\overline{q_{\alpha}} - \overline{P_{\alpha}} d\overline{Q_{\alpha}} - \overline{p_{\alpha}} dq_{\alpha} - q_{\alpha} dp_{\alpha} + \overline{P_{\alpha}} dQ_{\alpha} + Q_{\alpha} dP_{\alpha}) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial F_4}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} + \frac{\partial F_4}{\partial P_{\alpha}} dP_{\alpha} \right) + \frac{\partial F_4}{\partial t} dt , \end{aligned}$$

si deriva l'ultimo set di trasformazioni canoniche:

$$q_{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} F_4(p, P, t) \quad (8.13a)$$

$$Q_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial P_{\alpha}} F_4(p, P, t) \quad (8.13b)$$

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_4}{\partial t} . \quad (8.13c)$$

8.1.1 Osservazioni

- Generalizzando quello che abbiamo detto nel caso della funzione F_1 , le trasformazioni dalle (q_{α}, p_{α}) alle (Q_{α}, P_{α}) , qualunque sia la forma della funzione generatrice, sono sicuramente trasformazioni canoniche in quanto le nuove variabili soddisfano, per costruzione, il principio variazionale di Hamilton (7.11). L'esistenza stessa di una funzione generatrice è quindi garanzia della canonicità della trasformazione.

Viceversa, nel ragionamento successivo alle equazioni (8.3), abbiamo visto che ogni trasformazione canonica ammette (almeno) una funzione generatrice.

Si deduce che: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione dalle variabili (q_{α}, p_{α}) a delle nuove variabili (Q_{α}, P_{α}) sia canonica è che esista una funzione generatrice.*

- Notiamo che in tutti i casi considerati, se la funzione generatrice non dipende esplicitamente dal tempo, allora

$$K(Q, P) = H(q, p) = H(q(Q, P), p(Q, P))$$

ossia la nuova Hamiltoniana si ottiene direttamente dalla vecchia sostituendovi le espressioni di q_{α} e p_{α} in termini delle nuove variabili.

- Spesso la scelta del tipo di funzione generatrice è arbitraria: la stessa trasformazione canonica può essere ottenuta in vari modi. Altre volte può capitare che, per qualche particolare trasformazione canonica, uno o più dei tipi di funzioni generatrici considerati in precedenza non esista, o che abbia una forma molto complicata, difficile da usare.
- Per trasformazioni canoniche in sistemi con molti gradi di libertà, possono esistere funzioni generatrici di tipo misto; ad esempio, per passare dal sistema di variabili (q_1, q_2, p_1, p_2) al sistema (Q_1, Q_2, P_1, P_2) può essere conveniente usare una funzione generatrice $F = F(q_1, Q_1, q_2, P_2, t)$: una funzione, cioè di tipo F_1 per il passaggio da (q_1, p_1) a (Q_1, P_1) , ma di tipo F_2 per il passaggio da (q_2, p_2) a (Q_2, P_2) . In tal caso le trasformazioni canoniche si ottengono dalle formule:

$$p_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \quad p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \quad P_1 = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_1} \quad Q_2 = \frac{\partial F_2}{\partial P_2} \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

- Le trasformazioni canoniche verificano le proprietà caratteristiche dei gruppi di trasformazioni:
 1. *Esiste l'elemento unità*: infatti la trasformazione identica $(Q_\alpha = q_\alpha \text{ e } P_\alpha = p_\alpha)$ è, ovviamente, canonica.
 2. *Esiste l'elemento inverso*: infatti se una trasformazione $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ è canonica, anche la trasformazione inversa $(Q, P) \rightarrow (q, p)$ è canonica.
 3. *La moltiplicazione è un'operazione interna*: l'applicazione di due trasformazioni canoniche definisce una trasformazione che è a sua volta canonica (e definisce la "moltiplicazione" del gruppo). Infatti se le due trasformazioni di variabili dalle variabili $(q, p) \rightarrow (q', p')$ e $(q', p') \rightarrow (q'', p'')$ sono canoniche, allora si può sicuramente definire una trasformazione diretta dalle (q, p) alle (q'', p'') e tale trasformazione è canonica.
 4. La moltiplicazione è un'operazione *associativa*.

Vedremo nel prossimo paragrafo alcuni esempi di trasformazioni canoniche.

8.2 Esempi di trasformazioni canoniche

8.2.1 Trasformazioni banali

Consideriamo la funzione generatrice

$$F_2(q, P) = \sum_{\beta} q_{\beta} P_{\beta} . \quad (8.14)$$

La trasformazione da essa ottenuta è^[*]

$$p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta} \frac{\partial q_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} P_{\beta} = \sum_{\beta} \delta_{\alpha\beta} P_{\beta} = P_{\alpha} \quad Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} . \quad (8.15)$$

Le nuove coordinate coincidono con le vecchie ed altrettanto fanno i momenti. Si tratta della trasformazione identica.

Lo stesso effetto può essere ottenuto dalla funzione generatrice

$$F_3(p, Q) = - \sum_{\beta} p_{\beta} Q_{\beta} ,$$

infatti queste due funzioni generatrici sono collegate tra loro da una trasformazione di Legendre:

$$F_3 = F_2 - pq - PQ .$$

La conclusione (ovvia) che si può trarre è che la trasformazione identica è canonica.

In questo caso le funzioni generatrici $F_1(q, Q)$ e $F_3(p, P)$ non esistono perché le variabili (q, Q) e (p, P) sono legate dalle relazioni (8.15) e quindi non sono tra loro indipendenti.

^[*] $\delta_{\alpha\beta}$ è il simbolo di Krönecker, definito come $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} .$

Un'altra trasformazione molto semplice è quella generata da

$$F_1(q, Q) = \sum_{\beta} q_{\beta} Q_{\beta}$$

cioè

$$p_{\alpha} = \frac{\partial F_1}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha} \qquad P_{\alpha} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_{\alpha}} = -q_{\alpha} .$$

Le nuove coordinate coincidono con i vecchi momenti, ed i nuovi momenti coincidono, a meno del segno, con le vecchie coordinate. Questa funzione generatrice scambia tra loro coordinate e momenti! La stessa trasformazione è ottenuta anche dalla funzione generatrice

$$F_4(p, P) = \sum_{\beta} p_{\beta} P_{\beta}$$

che è legata alla precedente da una trasformazione di Legendre

$$F_4 = F_1 - qp + QP.$$

Si poteva capire che la trasformazione che permette questo scambio è canonica anche senza calcolare la funzione generatrice: bastava osservare che le equazioni del moto di Hamilton (7.9) sono invarianti per lo scambio $q_{\alpha} \leftrightarrow -p_{\alpha}$. Si noti inoltre che questa trasformazione non può essere generata da una funzione di tipo F_2 o F_3 perché le variabili (q, P) e (p, Q) non sono indipendenti.

Questo esempio mette in risalto l'assoluta indipendenza delle coordinate e dei momenti generalizzati. Nella formulazione Hamiltoniana entrambi sono necessari a descrivere il moto del sistema e la distinzione tra di essi è sostanzialmente una questione di nomenclatura. Si possono infatti scambiare i nomi ed i ruoli tra le coordinate e gli impulsi senza dover cambiare nulla più che un segno. Ormai nulla è rimasto, nella formulazione teorica, dell'originario concetto delle q_{α} come coordinate spaziali e delle p_{α} come quantità di moto.

8.2.2 Trasformazioni puntuali

Come già detto, le trasformazioni puntuali sono trasformazioni del tipo

$$Q_{\alpha} = f_{\alpha}(q_1, \dots, q_n, t), \quad (8.16)$$

tali cioè che le nuove coordinate Q_{α} dipendono solo dalle vecchie coordinate q (ed eventualmente dal tempo) e non dai momenti p . Tali trasformazioni possono essere generate da una funzione generatrice della forma:

$$F_2(q, P, t) = \sum_{\beta} f_{\beta}(q_1, \dots, q_n, t) P_{\beta} + g(q_1, \dots, q_n, t), \quad (8.17)$$

dove le funzioni f_{β} sono indipendenti ed invertibili. La trasformazione di coordinate generata è infatti

$$Q_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{\alpha}} = f_{\alpha}(q_1, \dots, q_n, t) \quad (8.18)$$

ed è quindi puntuale. Inoltre

$$p_{\alpha} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} P_{\beta} + \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}}. \quad (8.19)$$

Dato che, per ipotesi, le f_{α} sono un insieme di funzioni indipendenti, anche le Q_{α} saranno indipendenti. Inoltre per poter esprimere le q in funzione delle Q occorre che tali funzioni siano anche invertibili.

La nuova Hamiltoniana è data da

$$K(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P), t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Da quanto osservato nel paragrafo (8.1.1), l'esistenza della funzione generatrice (8.18) è sufficiente per concludere che **ogni trasformazione puntuale è canonica**.

Si noti che la funzione g nella funzione generatrice (8.17) non altera le trasformazioni delle coordinate Q , ma solo quelle dei momenti P . Scegliendo, per esempio, $g = 0$ si ottiene la funzione generatrice $F_2(q, P, t) =$

$\sum_{\beta} f_{\beta}(q_1, \dots, q_n, t) P_{\beta}$ e quindi $p_{\alpha} = \sum_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} P_{\beta}$. Si noti che in una trasformazione puntuale le nuove Q_{α} dipendono solo dalle vecchie q_{α} , ma le P_{α} dipendono sia dalle q_{α} che dalle p_{α} , come si vede dalla (8.19).

Come esempio, consideriamo una *trasformazione ortogonale*, ossia una trasformazione

$$Q_i = a_{ij} q_j ,$$

(a_{ij} sono coefficienti costanti) che conserva la norma di un vettore:

$$\sum_{i=1}^n q_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i^2 .$$

I coefficienti della trasformazione devono soddisfare la relazione

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} . \quad (8.20)$$

In tre dimensioni, una trasformazione ortogonale è una normale rotazione spaziale. Ogni trasformazione ortogonale è invertibile e la matrice della trasformazione inversa coincide con la trasposta ($A^{-1} = A^T$):

$$(a^{-1})_{ij} = a_{ji} .$$

Per una trasformazione ortogonale canonica poniamo

$$F_2 = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(q_1, \dots, q_n) P_{\alpha} \quad \text{con} \quad f_{\alpha} = Q_{\alpha} = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} q_{\beta}$$

per cui

$$F_2 = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} q_{\beta} P_{\alpha} .$$

Le trasformazioni per i momenti sono:

$$p_{\gamma} = \frac{\partial F_2}{\partial q_{\gamma}} = \sum_{\alpha} a_{\alpha\gamma} P_{\alpha} .$$

Per risolvere tali equazioni rispetto alle P_{α} moltiplichiamo ambo i membri per $a_{\beta\gamma}$ e sommiamo su γ :

$$\sum_{\gamma} a_{\beta\gamma} p_{\gamma} = \sum_{\alpha, \gamma} a_{\beta\gamma} a_{\alpha\gamma} P_{\alpha} = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} P_{\alpha} = P_{\beta} ,$$

dove si è sfruttata la relazione di ortogonalità (8.20). L'ultima equazione mostra che anche la trasformazione dei momenti è ortogonale.

8.2.3 Oscillatore armonico

Consideriamo un oscillatore armonico unidimensionale la cui Hamiltoniana è

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e cerchiamo una trasformazione canonica da (q, p) a (Q, P) tale che la coordinata Q sia ciclica. La forma di H suggerisce di cercare una trasformazione del tipo

$$p(Q, P) = f(P) \cos Q , \quad q(Q, P) = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q \quad (8.21)$$

in modo tale che la nuova Hamiltoniana

$$K = \frac{f^2(P)}{2m} (\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m} \equiv K(P)$$

non dipenda da Q . Le (8.21) implicano la seguente relazione tra q e p :

$$p = m\omega q \cot Q . \quad (8.22)$$

Per determinare la funzione $f(P)$ che rende questa trasformazione canonica, cerchiamo una funzione generatrice di tipo $F_1(q, Q)$, per cui devono valere le relazioni

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad (8.23)$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}. \quad (8.24)$$

Integrando la prima, e ricordando che q e Q sono indipendenti, si ottiene

$$F_1(q, Q) = \int p(q, Q) dq = m\omega \cot Q \int q dq = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q + g(Q)$$

dove g è una funzione arbitraria della sola variabile Q . Per determinare g sostituiamo (8.25) nella seconda relazione, che fornisce

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q} - g'(Q). \quad (8.25)$$

Dal confronto con la (8.21) segue che $f(P) = \sqrt{2m\omega P}$ e $g'(Q) = 0 \rightarrow g(Q) = \text{costante} = 0$, dove abbiamo fissato a zero il valore della funzione costante g , che è arbitrario. Quindi

$$q(Q, P) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q. \quad (8.26)$$

Per trovare $p(Q, P)$ usiamo la (8.23):

$$p(Q, P) = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (8.27)$$

e la nuova Hamiltoniana è

$$K(P) = \omega P. \quad (8.28)$$

La nuova coordinata Q è ciclica, quindi la soluzione delle equazioni del moto è particolarmente semplice:

$$\begin{aligned} \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 & \implies P = P_0 = \text{costante} \\ \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega & \implies Q(t) = \omega t + B, \end{aligned}$$

essendo P_0 e B delle costanti di integrazione. La soluzione per le vecchie variabili si scrive immediatamente usando le (8.26) e (8.27):

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + B) \quad p(t) = \sqrt{2m\omega P_0} \cos(\omega t + B),$$

che è la ben nota soluzione dell'oscillatore armonico. Osserviamo che la costante P_0 è proporzionale all'energia dell'oscillatore, come si vede dalla (8.28). Ritroviamo così un altro risultato ben noto: l'energia di un oscillatore è proporzionale al quadrato della sua ampiezza.

Osserviamo infine che la funzione generatrice (8.25) non è l'unica che produce la trasformazione (8.26), (8.27). Con una trasformazione di Legendre possiamo infatti trovare una funzione di tipo diverso, ad esempio:

$$F_3 = F_1 - pq = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q - pq = -\frac{p^2}{2m\omega} \tan Q.$$

che genera la stessa trasformazione. È possibile trovare pure le funzioni di tipo F_2 ed F_4 , ma hanno un aspetto molto più complicato:

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + PQ = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q + PQ = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} q \sqrt{2P - m\omega q^2} + P \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \right) \\ F_4 &= F_1 - pq + PQ = F_3 + PQ = -\frac{p}{2m\omega} \sqrt{2m\omega P - p^2} + P \arccos \left(\frac{p}{\sqrt{2m\omega P}} \right). \end{aligned}$$

8.2.4 Oscillatore armonico smorzato

Consideriamo un sistema unidimensionale la cui Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = e^{2\gamma t} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} a q^2 \right)$$

con γ e a parametri positivi.

Si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -e^{2\gamma t} a q \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = e^{2\gamma t} m \dot{q} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = e^{2\gamma t} m \ddot{q} + 2\gamma e^{2\gamma t} m \dot{q}$$

da cui si ottiene l'equazione del moto:

$$e^{2\gamma t} (m \ddot{q} + 2\gamma m \dot{q} + a q) = 0 \quad \text{cioè} \quad m \ddot{q} + 2\gamma m \dot{q} + a q = 0 ,$$

poiché il fattore $e^{2\gamma t}$ è sicuramente diverso da zero. Si riconosce l'equazione del moto di un oscillatore armonico libero (di pulsazione $\omega = \sqrt{a/m - \gamma^2}$) smorzato (costante di smorzamento γ).

Il momento canonico è

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = e^{2\gamma t} m \dot{q} \quad \text{da cui} \quad \dot{q} = e^{-2\gamma t} \frac{p}{m}$$

e la Funzione Hamiltoniana è

$$H = p \dot{q} - \mathcal{L} = p e^{-2\gamma t} \frac{p}{m} - e^{2\gamma t} \frac{m}{2} e^{-4\gamma t} \frac{p^2}{m^2} + e^{2\gamma t} \frac{1}{2} a q^2 = e^{-2\gamma t} \frac{p^2}{2m} + e^{2\gamma t} \frac{a}{2} q^2$$

H ha il significato fisico di energia totale, ma non è conservata, a causa della presenza del termine dissipativo che si manifesta nella dipendenza esplicita dal tempo.

Effettuiamo la trasformazione canonica generata da

$$F(q, P, t) = e^{\gamma t} q P ,$$

che è una funzione generatrice di tipo F_2 , dipendente dal tempo.

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = e^{\gamma t} P \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = e^{\gamma t} q \quad (q = e^{-\gamma t} Q) \quad (8.29)$$

e la nuova Hamiltoniana è

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = e^{-2\gamma t} \frac{e^{2\gamma t} P^2}{2m} + e^{2\gamma t} \frac{a}{2} e^{-2\gamma t} Q^2 + \gamma F_2 = \frac{P^2}{2m} + \frac{a}{2} Q^2 + \gamma Q P$$

La nuova Hamiltoniana K non dipende esplicitamente dal tempo: essa è costante del moto, ma non ha più il significato fisico di energia totale. Le nuove equazioni del moto sono:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{P}{m} + \gamma Q \quad (8.30a)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -aQ - \gamma P \quad (8.30b)$$

che è un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Per risolverlo si segue un procedimento standard: deriviamo rispetto al tempo la (8.30a) e sostituiamo \dot{P} dato dalla (8.30b):

$$\ddot{Q} = \frac{\dot{P}}{m} + \gamma \dot{Q} = -\frac{\gamma}{m} P - \frac{a}{m} Q + \gamma \dot{Q} ,$$

e sostituiamo P ricavato dalla (8.30a), per ottenere un'equazione che contiene solo Q e le sue derivate:

$$\ddot{Q} = -\gamma (\dot{Q} - \gamma Q) - \frac{a}{m} Q + \gamma \dot{Q} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} = \left(\gamma^2 - \frac{a}{m} \right) Q .$$

Sono possibili tre casi:

- Se $\beta^2 \equiv \gamma^2 - \frac{a}{m} > 0$ la soluzione generale per la Q è $Q(t) = A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}$.
- Se $\gamma^2 - \frac{a}{m} = 0$ la soluzione generale è $Q(t) = A' t + B'$.
- $\omega^2 \equiv \frac{a}{m} - \gamma^2 > 0$ la soluzione generale è $Q(t) = A'' \cos \omega t + B'' \sin \omega t$.

Per ognuno dei tre casi la soluzione generale per la P si ottiene dalla (8.30a) $P = m(\dot{Q} - \gamma Q)$, dopodiché è facile tornare alle variabili originali con le (8.29): si ottiene il ben noto andamento dell'oscillatore armonico (libero) smorzato, nei tre casi di smorzamento forte ($\gamma^2 - \frac{a}{m} > 0$), critico ($\gamma^2 - \frac{a}{m} = 0$) e debole ($\gamma^2 - \frac{a}{m} < 0$).

8.2.5 Esempio di un sistema con due gradi di libertà

Vogliamo studiare il moto del sistema a due gradi di libertà la cui Hamiltoniana è

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m} (p_2 - kq_1)^2$$

utilizzando la trasformazione canonica generata da

$$F = kq_1Q_2 - p_2Q_2 + p_2P_1.$$

F è funzione delle variabili (q_1, P_1, p_2, Q_2) , si tratta quindi di una funzione generatrice di tipo misto: F_2 per la prima coppia di variabili (q_1, p_1) , F_3 per la seconda coppia (q_2, p_2) . Le equazioni di trasformazione sono

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial F}{\partial q_1} = kQ_2 & Q_1 &= \frac{\partial F}{\partial P_1} = p_2 \\ q_2 &= -\frac{\partial F}{\partial p_2} = Q_2 - P_1 & P_2 &= -\frac{\partial F}{\partial Q_2} = p_2 - kq_1 \end{aligned}$$

che, riscritte per esplicitare le vecchie variabili in funzione delle nuove, danno

$$q_1 = \frac{1}{k}(Q_1 - P_2) \quad q_2 = Q_2 - P_1 \quad p_1 = kQ_2 \quad p_2 = Q_1. \quad (8.31)$$

La nuova Hamiltoniana è

$$K = \frac{k^2 Q_2^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m}$$

Le variabili Q_1 e P_1 ora sono cicliche, mentre per le altre due variabili abbiamo trovato l'hamiltoniana di un oscillatore armonico semplice. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= 0 & \dot{P}_1 &= 0 & \implies & Q_1 &= A & P_1 &= B \\ \dot{Q}_2 &= \frac{P_2}{m} & \dot{P}_2 &= -\frac{k^2}{m}Q_2 & \implies & Q_2(t) &= C \cos\left(\frac{k}{m}t + \alpha\right) & P_2(t) &= -Ck \sin\left(\frac{k}{m}t + \alpha\right) \end{aligned}$$

essendo A, B, C, α delle costanti di integrazione. La soluzione può ora essere scritta in termini delle vecchie variabili, con le (8.31):

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{A}{k} + C \sin\left(\frac{k}{m}t + \alpha\right) \\ q_2(t) &= C \cos\left(\frac{k}{m}t + \alpha\right) - B \\ p_1(t) &= Ck \cos\left(\frac{k}{m}t + \alpha\right) \\ p_2(t) &= A \end{aligned}$$

e le costanti di integrazione possono essere determinate conoscendo le condizioni iniziali.

8.2.6 Problema inverso: trovare la funzione generatrice

A volte, osservando l'Hamiltoniana di un sistema, ci si accorge che una certa trasformazione può semplificare sensibilmente il problema. Occorre però assicurarsi che la trasformazione auspicata sia canonica, ed un modo per farlo è trovare una sua funzione generatrice.

Come esempio consideriamo un sistema la cui Hamiltoniana sia

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{a}{2}q^2.$$

Osservando la forma di H ci accorgiamo che se potessimo eseguire una trasformazione canonica da (q, p) a (Q, P) della forma

$$q = \sqrt{\frac{2}{a}}P^\beta \sinh(\gamma Q) \quad p = \sqrt{2m}P^\beta \cosh(\gamma Q) \quad (8.32)$$

essendo β e γ delle costanti, la nuova Hamiltoniana assumerebbe la forma $H = P^{2\beta}$, cioè la variabile Q risulterebbe ciclica (e le equazioni del moto sarebbero banali). Vogliamo quindi scoprire se, scegliendo le costanti β e γ in modo opportuno, è possibile trovare una trasformazione canonica della forma (8.32). Il modo più semplice e diretto per farlo consiste nel cercarne la funzione generatrice.

Ricavando P dalla prima delle (8.32) e sostituendolo nella seconda otteniamo:

$$P = \left(\sqrt{\frac{a}{2}} \frac{q}{\sinh(\gamma Q)} \right)^{1/\beta} \quad p = \sqrt{am} q \coth(\gamma Q) . \quad (8.33)$$

Siamo riusciti ad esprimere p e P in funzione di q e Q , quindi cercheremo una funzione generatrice di tipo $F_1(q, Q)$, tale che

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad \text{e} \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} .$$

Dalle equazioni di trasformazione (8.33):

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = \sqrt{am} q \coth(\gamma Q) \quad \implies \quad F_1 = \frac{\sqrt{am}}{2} q^2 \coth(\gamma Q) + f(Q) ,$$

essendo $f(Q)$ una funzione incognita della sola variabile Q . Deriviamo F_1 rispetto a Q :

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\sqrt{am}}{2} q^2 \frac{-\gamma}{\sinh^2(\gamma Q)} + f'(Q)$$

e confrontando con l'equazione che definisce P delle (8.33) vediamo che le due espressioni sono compatibili solo se

$$f'(Q) = 0 , \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \gamma = \sqrt{\frac{a}{m}} .$$

La funzione incognita f deve essere una costante: siccome la funzione generatrice è sempre definita a meno di una costante (si usano solo le sue derivate!), scegliamo $f = 0$. La funzione generatrice, in definitiva, è

$$F_1 = \frac{\sqrt{am}}{2} q^2 \coth \left(\sqrt{\frac{a}{m}} Q \right)$$

e la trasformazione da essa generata è

$$p = \sqrt{am} q \coth \left(\sqrt{\frac{a}{m}} Q \right) \quad P = \frac{aq^2}{2 \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{a}{m}} Q \right)}$$

ossia, risolvendo per q e p ,

$$q = \sqrt{\frac{2P}{a}} \sinh \left(\sqrt{\frac{a}{m}} Q \right) \quad p = \sqrt{2mP} \cosh \left(\sqrt{\frac{a}{m}} Q \right) \quad (8.34)$$

che sono proprio della forma voluta (8.32). La nuova Hamiltoniana è

$$K(Q, P) = K(P) = P$$

e le equazioni del moto sono semplicissime:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 1 & \implies & Q = t + c_1 \\ \dot{P} &= 0 & \implies & P = c_2 \end{aligned}$$

per cui la soluzione generale è:

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2c_2}{a}} \sinh \left(\sqrt{\frac{a}{m}} (t + c_1) \right) = A \sinh \left(\sqrt{\frac{a}{m}} t + \alpha \right) \\ p(t) &= \sqrt{2mc_2} \cosh \left(\sqrt{\frac{a}{m}} (t + c_1) \right) = A \sqrt{am} \cosh \left(\sqrt{\frac{a}{m}} t + \alpha \right) , \end{aligned}$$

con una conveniente ridefinizione delle costanti di integrazione.

La scelta di una funzione generatrice di tipo F_1 non era obbligata: se, ad esempio, avessimo ricavato P dalla seconda delle (8.32) per sostituirlo nella prima, avremmo avuto q e P espresse in funzione di p e Q , per cui avremmo potuto cercare una funzione di tipo F_3 , trovando

$$F_3(p, Q) = -\frac{p^2}{2\sqrt{am}} \tanh\left(\sqrt{\frac{a}{m}} Q\right)$$

(è facile verificare che F_3 si può ottenere da F_1 con una trasformazione di Legendre), generatrice della stessa trasformazione (8.34).

8.3 Parentesi di Poisson

Date due funzioni derivabili delle variabili canoniche e del tempo, $f(p_\alpha, q_\alpha, t)$ e $g(p_\alpha, q_\alpha, t)$, si definisce **parentesi di Poisson** di f e g la seguente espressione:

$$\{f, g\}_{p,q} = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right). \quad (8.35)$$

Essa gode delle seguenti proprietà (f , g e h sono funzioni delle variabili canoniche e c è una costante):

1. Antisimmetria (ovvia!):

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \quad (8.36)$$

2. Per le proprietà di linearità della derivata

$$\{f + h, g\} = \{f, g\} + \{h, g\} \quad (8.37a)$$

$$\{cf, g\} = c\{f, g\} \quad (8.37b)$$

3. Per la regola di derivazione di un prodotto di funzioni^[†]

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h \quad (8.38)$$

infatti

$$\{f, gh\} = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \left[\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} h + g \frac{\partial h}{\partial p_\alpha} \right] - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \left[\frac{\partial g}{\partial q_\alpha} h + g \frac{\partial h}{\partial q_\alpha} \right] \right)$$

4. **Identità di Jacobi:**

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (8.39)$$

Questa identità si dimostra facilmente sviluppando le parentesi di Poisson più interne e usando le proprietà mostrate sopra. L'importanza dell'identità di Jacobi discende dal fatto che, talvolta, permette di ottenere nuove costanti del moto (vedere paragrafo 8.4.1).

^[†]L'ordine in cui si scrivono i fattori "esterni" (g o h) nella (8.38), rispetto alle parentesi di Poisson è irrilevante in quanto f , g ed h sono funzioni di variabile reale (o, al più, complessa) e quindi obbediscono alla proprietà commutativa. Tuttavia l'ordine in cui compaiono nella (8.38) è trasferibile (sostituendo le parentesi di Poisson con le relazioni di commutazione) anche al caso di grandezze quantistiche (operatori), per le quali l'algebra non è più, in generale, commutativa.

8.3.1 Parentesi di Poisson canoniche

Le parentesi di Poisson così scritte sono relazioni valide qualunque siano le funzioni f e g . Particolarmente importanti sono le parentesi di Poisson calcolate per le variabili canoniche q_α e p_α .

Poiché l'insieme delle q_α è indipendente dall'insieme delle p_α si ha:

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} = 0 \quad \text{mentre} \quad \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, n$$

pertanto è possibile ricavare le **parentesi di Poisson canoniche**:

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \sum_\gamma \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\gamma} \frac{\partial q_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial q_\beta}{\partial q_\gamma} \right) = 0 \quad (8.40a)$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = \sum_\gamma \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\gamma} \frac{\partial p_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\gamma} \right) = 0 \quad (8.40b)$$

$$\{q_\alpha, p_\beta\} = \sum_\gamma \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\gamma} \frac{\partial p_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial p_\beta}{\partial q_\gamma} \right) = \sum_\gamma \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \quad (8.40c)$$

Come caso particolare della (8.35), se una delle funzioni f e g coincide con una coordinata q_α o con un momento p_α , la parentesi di Poisson si riduce semplicemente ad una derivata parziale dell'altra funzione:

$$\{f, q_\alpha\} = -\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \quad \{f, p_\alpha\} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} . \quad (8.41)$$

8.3.2 Esempi di calcolo di parentesi di Poisson: Momento angolare

Calcoliamo le parentesi di Poisson formate dalle componenti cartesiane della quantità di moto \vec{p} e del momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ di un punto materiale. Ci saranno, in tutto, 9 parentesi di Poisson, per tutte le combinazioni di componenti. Il calcolo si effettua utilizzando le parentesi di Poisson canoniche e le proprietà indicate nel paragrafo (8.3).

$$\begin{aligned} \{p_x, L_x\} &= \{p_x, yp_z - zp_y\} = 0 \\ \{p_x, L_y\} &= \{p_x, zp_x - xp_z\} = -\{p_x, x\}p_z = p_z \\ \{p_x, L_z\} &= \{p_x, xp_y - yp_x\} = \{p_x, x\}p_y = -p_y . \end{aligned}$$

Con permutazioni cicliche degli indici (x, y, z) si ottengono le altre 6 parentesi di Poisson.

L'utilizzo della δ di Kronecker e del tensore antisimmetrico^[†] ε_{ijk} consente però di ricavare, e scrivere, in modo compatto tutte le relazioni cercate. Siano p_i e $L_j = \varepsilon_{jmn}x_m p_n$ (è sottintesa la somma sugli indici ripetuti m, n) due componenti qualsiasi, rispettivamente, della quantità di moto e del momento angolare. La loro parentesi di Poisson è

$$\{p_i, L_j\} = \varepsilon_{jmn} \{p_i, x_m p_n\} = \varepsilon_{jmn} \{p_i, x_m\} p_n = \varepsilon_{jmn} (-\delta_{im}) p_n = -\varepsilon_{jin} p_n = \varepsilon_{ijn} p_n ,$$

che coincide con il risultato precedente.

Con la stessa tecnica è possibile calcolare le parentesi di Poisson delle componenti del momento angolare, tenendo presente la proprietà del tensore antisimmetrico (è sottintesa la somma su i nel primo membro):

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (8.42)$$

Per due componenti qualsiasi di \vec{L} si ha (sono sottintese le somme sugli indici ripetuti k, l, m, n)

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \{\varepsilon_{ikl} x_k p_l, \varepsilon_{jmn} x_m p_n\} = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (x_m \{x_k, p_n\} p_l + x_k \{p_l, x_m\} p_n) = \\ &= \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (\delta_{kn} x_m p_l - \delta_{lm} x_k p_n) = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmk} x_m p_l - \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jln} x_k p_n \end{aligned}$$

da cui, osservando che, per definizione, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ (le permutazioni cicliche degli indici sono permutazioni pari):

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= (\delta_{lj} \delta_{im} - \delta_{lm} \delta_{ij}) x_m p_l - (\delta_{in} \delta_{kj} - \delta_{ij} \delta_{kn}) x_k p_n = \\ &= x_i p_j - \cancel{\delta_{ij} \vec{r} \times \vec{p}} - x_j p_i + \cancel{\delta_{ij} \vec{r} \times \vec{p}} = \varepsilon_{ijk} L_k , \end{aligned}$$

[†] Il tensore antisimmetrico è definito come segue:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i, j, k \text{ è una permutazione pari di } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{se } i, j, k \text{ è una permutazione dispari di } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{se due o più indici sono uguali} \end{cases}$$

che esprime in modo compatto $\{L_x, L_y\} = L_z$ e permutazioni cicliche.

Dimostriamo il seguente teorema: *se f è una funzione scalare delle coordinate e dell'impulso di una particella, la sua parentesi di Poisson con una componente qualsiasi del momento angolare è zero.*

Una funzione scalare può dipendere da \vec{r} e \vec{p} solo attraverso le combinazioni $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ e $\vec{r} \cdot \vec{p} = xp_x + yp_y + zp_z$. Per le (8.41) possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \{f, x\} &= -\frac{\partial f}{\partial p_x} = -\frac{\partial f}{\partial |\vec{p}|} \frac{\partial |\vec{p}|}{\partial p_x} - \frac{\partial f}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})} \frac{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})}{\partial p_x} = -\frac{\partial f}{\partial |\vec{p}|} \frac{p_x}{|\vec{p}|} - \frac{\partial f}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})} x \\ \{f, p_x\} &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial |\vec{r}|} \frac{\partial |\vec{r}|}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})} \frac{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial |\vec{r}|} \frac{x}{|\vec{r}|} + \frac{\partial f}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})} p_x, \end{aligned}$$

e analoghe relazioni per $\{f, y\}$, $\{f, p_y\}$, $\{f, z\}$, $\{f, p_z\}$.

Quindi

$$\begin{aligned} \{f, L_z\} &= \{f, xp_y - yp_x\} = \{f, x\}p_y + x\{f, p_y\} - \{f, y\}p_x - y\{f, p_x\} = \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial |\vec{p}|} \frac{p_x}{|\vec{p}|} - \frac{\partial f}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})} x\right)p_y + x\left(\frac{\partial f}{\partial |\vec{r}|} \frac{y}{|\vec{r}|} + \frac{\partial f}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})} p_y\right) + \\ &\quad - \left(-\frac{\partial f}{\partial |\vec{p}|} \frac{p_y}{|\vec{p}|} - \frac{\partial f}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})} y\right)p_x - y\left(\frac{\partial f}{\partial |\vec{r}|} \frac{x}{|\vec{r}|} + \frac{\partial f}{\partial (\vec{r} \cdot \vec{p})} p_x\right) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra $\{f, L_x\} = \{f, L_y\} = 0$

8.4 Formulazione hamiltoniana in termini delle parentesi di Poisson

Le parentesi di Poisson permettono di riscrivere in modo più compatto, e simmetrico, le equazioni del moto canoniche e i teoremi di conservazione.

8.4.1 Costanti del moto. Teorema di Poisson

Consideriamo la derivata totale rispetto al tempo di una generica funzione f delle variabili canoniche:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} \right)$$

e usando le equazioni canoniche di Hamilton (7.9) per esprimere \dot{q}_{α} e \dot{p}_{α} :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (8.43)$$

Se poi f non dipende esplicitamente dal tempo,

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}, \quad (8.44)$$

quindi una grandezza $f(p_{\alpha}, q_{\alpha})$ che non dipende esplicitamente dal tempo è *costante del moto* se la sua parentesi di Poisson con l'Hamiltoniana è nulla:

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \{f, H\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = \text{costante}.$$

Se invece la grandezza $f(p_{\alpha}, q_{\alpha}, t)$ ha una dipendenza esplicita da t , per la (8.43) la condizione che sia una costante del moto è che sia

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = \text{costante}. \quad (8.45)$$

Con le parentesi di Poisson è, a volte, possibile trovare nuove costanti del moto. Dimostreremo ora il **Teorema di Poisson**: *Se f e g sono due costanti del moto, allora anche la loro parentesi di Poisson è una costante del moto.*

A questo scopo occorrerà far uso dell'identità di Jacobi (8.39) e della seguente identità, ottenuta calcolando la derivata parziale rispetto al tempo della definizione (8.35):

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} . \quad (8.46)$$

Siano f e g due grandezze fisiche, costanti del moto. Se non dipendono esplicitamente dal tempo, cioè se $\{f, H\} = 0$ e $\{g, H\} = 0$, allora l'identità di Jacobi implica che

$$\{\{f, g\}, H\} = \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0 ,$$

cioè $\{f, g\}$ è una costante del moto.

Se invece almeno una delle due costanti del moto f o g dipende esplicitamente dal tempo, deve valere la (8.45):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} = 0 . \quad (8.47)$$

Calcoliamo esplicitamente la derivata totale rispetto al tempo di $\{f, g\}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{\{f, g\}, H\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{\{f, g\}, H\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} , \end{aligned}$$

avendo fatto uso della (8.46) e dell'identità di Jacobi. Sfruttando ora l'antisimmetria (8.36) e la linearità (8.37a) delle parentesi di Poisson possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} + \{\{f, H\}, g\} + \{f, \{g, H\}\} = \\ &= \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \right], g \right\} + \left\{ f, \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

quindi, anche in questo caso, $\{f, g\}$ è una costante del moto.

Non si pensi, tuttavia, di poter generare in questo modo un numero illimitato di costanti del moto! Per un sistema isolato con n gradi di libertà, il numero di costanti del moto è, al più, $2n - 1$. In molti casi quindi la costante del moto ottenuta con $\{f, g\}$ è una combinazione delle altre costanti o, addirittura, è un numero, quindi di nessuna utilità pratica.

8.4.2 Equazioni del moto canoniche

Dall'equazione (8.44) si ha:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, H\} \quad (8.48a)$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\} . \quad (8.48b)$$

È facile verificare che queste relazioni coincidono con le equazioni del moto di Hamilton (7.9):

$$\begin{aligned} \{q_\alpha, H\} &= \sum_\beta \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial H}{\partial q_\beta} \right) = \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \{p_\alpha, H\} &= \sum_\beta \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial H}{\partial p_\beta} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial H}{\partial q_\beta} \right) = \sum_\beta (-\delta_{\alpha\beta}) \frac{\partial H}{\partial q_\beta} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \end{aligned}$$

Dalle espressioni (8.48) è evidente la forma simmetrica delle equazioni del moto di Hamilton nel formalismo delle parentesi di Poisson.

8.4.3 Esempi di calcolo di parentesi di Poisson: costanti del moto

Consideriamo un corpo di massa m sottoposto ad un campo gravitazionale di potenziale $V = -\alpha/r$ (con $\alpha > 0$). Sappiamo che il suo moto si svolge in un piano. Utilizziamo pertanto coordinate polari nel piano.

L'Hamiltoniana è

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

Vogliamo dimostrare che la grandezza $A = p_r p_\theta \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} p_\theta^2 - m\alpha \cos \theta$ è una costante del moto.

Le variabili $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ sono canoniche, quindi per esse valgono le parentesi di Poisson canoniche. Possiamo pertanto calcolare la derivata di A rispetto al tempo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} = \{A, H\} = \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial A}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \frac{\partial A}{\partial p_\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} = \quad (8.49)$$

$$= \left\{ p_r p_\theta \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} p_\theta^2 - m\alpha \cos \theta, \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right\} \quad (8.50)$$

Utilizziamo le proprietà delle parentesi di Poisson per semplificare questa espressione:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{p_r p_\theta}{2mr^2} \{\sin \theta, p_\theta^2\} + \frac{\sin \theta p_\theta^3}{2m} \left\{ p_r, \frac{1}{r^2} \right\} - \alpha \sin \theta p_\theta \left\{ p_r, \frac{1}{r} \right\} + \quad (8.51)$$

$$+ \frac{p_\theta^2}{2mr^2} \{\cos \theta, p_\theta^2\} + \frac{\cos \theta p_\theta^2}{2m} \left\{ \frac{1}{r}, p_r^2 \right\} - \frac{m\alpha}{2mr^2} \{\cos \theta, p_\theta^2\} = 0 \quad (8.52)$$

Quindi la grandezza A è una costante del moto.

8.5 Invarianza delle parentesi di Poisson per trasformazioni canoniche

Teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione*

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t) \quad (8.53)$$

$$P_\alpha = P_\alpha(q, p, t) \quad (8.54)$$

sia canonica è che rimangano invariate le parentesi di Poisson di due funzioni qualsiasi, f e g , sotto tale trasformazione, ossia:

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}, \quad (8.55)$$

dove i suffissi (Q, P) e (q, p) indicano rispetto a quali variabili si calcolano le parentesi di Poisson:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right) \\ \{f, g\}_{Q,P} &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial P_\alpha} \frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Come casi particolari, la condizione (8.55) implica l'invarianza delle parentesi di Poisson canoniche:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{q,p} = \{Q_\alpha, Q_\beta\}_{Q,P} = 0 \quad (8.56a)$$

$$\{P_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \{P_\alpha, P_\beta\}_{Q,P} = 0 \quad (8.56b)$$

$$\{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \{Q_\alpha, P_\beta\}_{Q,P} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (8.56c)$$

Per dimostrare il teorema, riscriviamo innanzitutto la parentesi di Poisson $\{f, g\}_{q,p}$ come segue:

$$\begin{aligned}
 \{f, g\}_{q,p} &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right) \\
 &= \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} + \frac{\partial g}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial g}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \right) \right] \\
 &= \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial g}{\partial Q_{\beta}} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \right) + \frac{\partial g}{\partial P_{\beta}} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \right) \right] \\
 &= \sum_{\beta} \left[\frac{\partial g}{\partial Q_{\beta}} \{f, Q_{\beta}\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_{\beta}} \{f, P_{\beta}\}_{q,p} \right] \tag{8.57}
 \end{aligned}$$

Questa relazione vale qualsiasi siano le funzioni f e g . Riscriviamola con le sostituzioni

$$i) \quad f \rightarrow Q_{\gamma} \quad \text{e} \quad g \rightarrow f$$

$$\{Q_{\gamma}, f\}_{q,p} = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial f}{\partial Q_{\beta}} \{Q_{\gamma}, Q_{\beta}\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial P_{\beta}} \{Q_{\gamma}, P_{\beta}\}_{q,p} \right] \tag{8.58}$$

$$ii) \quad f \rightarrow P_{\gamma} \quad \text{e} \quad g \rightarrow f$$

$$\{P_{\gamma}, f\}_{q,p} = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial f}{\partial Q_{\beta}} \{P_{\gamma}, Q_{\beta}\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial P_{\beta}} \{P_{\gamma}, P_{\beta}\}_{q,p} \right] \tag{8.59}$$

$$iii) \quad f \rightarrow Q_{\gamma} \quad \text{e} \quad g \rightarrow H$$

$$\{Q_{\gamma}, H\}_{q,p} = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial H}{\partial P_{\beta}} \{Q_{\gamma}, P_{\beta}\}_{q,p} + \frac{\partial H}{\partial Q_{\beta}} \{Q_{\gamma}, Q_{\beta}\}_{q,p} \right] \tag{8.60}$$

$$iv) \quad f \rightarrow P_{\gamma} \quad \text{e} \quad g \rightarrow H$$

$$\{P_{\gamma}, H\}_{q,p} = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial H}{\partial P_{\beta}} \{P_{\gamma}, P_{\beta}\}_{q,p} + \frac{\partial H}{\partial Q_{\beta}} \{P_{\gamma}, Q_{\beta}\}_{q,p} \right]. \tag{8.61}$$

Ci limiteremo a considerare *trasformazioni indipendenti dal tempo*, per le quali $\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial t} = 0$ e $K(Q, P) = H(q, p)$. In questo caso, ricordando che, per una generica funzione $f(q, p)$ vale

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

le (8.60) e (8.61) diventano

$$\dot{Q}_{\gamma} = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial H}{\partial P_{\beta}} \{Q_{\gamma}, P_{\beta}\}_{q,p} + \frac{\partial H}{\partial Q_{\beta}} \{Q_{\gamma}, Q_{\beta}\}_{q,p} \right] \tag{8.62a}$$

$$\dot{P}_{\gamma} = \sum_{\beta} \left[\frac{\partial H}{\partial P_{\beta}} \{P_{\gamma}, P_{\beta}\}_{q,p} + \frac{\partial H}{\partial Q_{\beta}} \{P_{\gamma}, Q_{\beta}\}_{q,p} \right]. \tag{8.62b}$$

Condizione necessaria

Fatte queste premesse, dimostriamo che la condizione di conservazione delle parentesi di Poisson è necessaria affinché la trasformazione sia canonica, ovvero:

$$\text{Ipotesi: } \exists K = H \quad / \quad \dot{Q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial P_{\alpha}} \quad \text{e} \quad \dot{P}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial Q_{\alpha}} \quad \implies \quad \text{Tesi: } \{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}.$$

Usiamo l'ipotesi per riscrivere le (8.62a) come

$$\dot{Q}_\gamma = \sum_\beta \left[\dot{Q}_\beta \{Q_\gamma, P_\beta\}_{q,p} - \dot{P}_\beta \{Q_\gamma, Q_\beta\}_{q,p} \right] \quad (8.63a)$$

$$\dot{P}_\gamma = \sum_\beta \left[\dot{Q}_\beta \{P_\gamma, P_\beta\}_{q,p} - \dot{P}_\beta \{P_\gamma, Q_\beta\}_{q,p} \right], \quad (8.63b)$$

soddisfatte se e solo se

$$\{Q_\gamma, Q_\beta\}_{q,p} = \{P_\gamma, P_\beta\}_{q,p} = 0 \quad (8.64a)$$

$$\{Q_\gamma, P_\beta\}_{q,p} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (8.64b)$$

Abbiamo così provato, come parte della dimostrazione, che *le parentesi di Poisson canoniche sono invarianti sotto una trasformazione canonica*.

Usando ora queste relazioni nelle (8.58) e (8.59) possiamo scrivere

$$\{Q_\gamma, f\}_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial P_\gamma} \quad (8.65)$$

$$\{P_\gamma, f\}_{q,p} = -\frac{\partial f}{\partial Q_\gamma} \quad (8.66)$$

e sostituendo infine queste relazioni nelle (8.57) otteniamo

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_\beta \left[\frac{\partial f}{\partial Q_\beta} \frac{\partial g}{\partial P_\beta} - \frac{\partial f}{\partial P_\beta} \frac{\partial g}{\partial Q_\beta} \right] = \{f, g\}_{Q,P}, \quad (8.67)$$

come volevamo dimostrare.

Condizione sufficiente

Dimostriamo ora che la condizione di conservazione delle parentesi di Poisson è sufficiente affinché la trasformazione sia canonica, ovvero:

$$\text{Ipotesi: } \{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \implies \text{Tesi: } \exists K = H \quad / \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha} \text{ e } \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha}.$$

La dimostrazione è immediata. Infatti, usando l'ipotesi, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_\alpha &= \{Q_\alpha, H\}_{q,p} = \{Q_\alpha, H\}_{Q,P} = \{Q_\alpha, K\}_{Q,P} = \sum_\beta \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial Q_\beta} \frac{\partial K}{\partial P_\beta} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial P_\beta} \frac{\partial K}{\partial Q_\beta} \right) = \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial K}{\partial P_\beta} = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} \\ \dot{P}_\alpha &= \{P_\alpha, H\}_{q,p} = \{P_\alpha, H\}_{Q,P} = \{P_\alpha, K\}_{Q,P} = \sum_\beta \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial Q_\beta} \frac{\partial K}{\partial P_\beta} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial P_\beta} \frac{\partial K}{\partial Q_\beta} \right) = -\sum_\beta \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial K}{\partial Q_\beta} = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha}, \end{aligned}$$

cioè le nuove variabili soddisfano le equazioni di Hamilton, con $K = H$.

In questo modo abbiamo dimostrato che l'invarianza delle parentesi di Poisson implica che la trasformazione $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t)$, $P_\alpha = P_\alpha(q, p, t)$ è canonica.

Abbiamo così completato la dimostrazione del teorema

$$\forall f, g: \quad \{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \iff (q, p) \rightarrow (Q, P) \text{ trasformazione canonica} \quad (8.68)$$

almeno per le trasformazioni non dipendenti dal tempo [8].

[8] Per generalizzare questo risultato a trasformazioni coinvolgenti il tempo $Q_\alpha = Q_\alpha(q, p, t)$, $P_\alpha = P_\alpha(q, p, t)$ è più semplice considerare una trasformazione "intermedia" ad un tempo t_0 fissato:

$$(q_\alpha, p_\alpha) \rightarrow (Q_{0\alpha}, P_{0\alpha}) \quad \text{con} \quad Q_{0\alpha} = Q_{0\alpha}(q, p, t_0), \quad P_{0\alpha} = P_{0\alpha}(q, p, t_0)$$

che è una trasformazione formalmente indipendente dal tempo, per la quale vale il ragionamento esposto sopra. Non resta poi che considerare la trasformazione

$$(Q_{0\alpha}, P_{0\alpha}) \rightarrow (Q_\alpha, P_\alpha)$$

che, come mostrato nel paragrafo 8.6, è una trasformazione canonica (la cui generatrice è l'Hamiltoniana stessa).

Corollario

È inoltre immediato verificare che

$$\forall f, g : \quad \{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \quad \Leftrightarrow \quad \{Q, P\}_{q,p} = \{Q, P\}_{Q,P} = \{q, p\}_{q,p}, \quad (8.69)$$

ovvero che le parentesi di Poisson di due funzioni qualunque restano invariate sotto la trasformazione dalle (q, p) alle (Q, P) se e solo se restano invariate le parentesi di Poisson canoniche. Infatti da un lato le parentesi di Poisson canoniche sono casi particolari delle $\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$ (il che prova l'implicazione \Rightarrow), dall'altro se le parentesi di Poisson canoniche sono conservate vale:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right) \\ &= \sum_{\alpha\beta\gamma} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Q_{\gamma}} \frac{\partial Q_{\gamma}}{\partial p_{\alpha}} + \frac{\partial g}{\partial P_{\gamma}} \frac{\partial P_{\gamma}}{\partial p_{\alpha}} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial Q_{\gamma}} \frac{\partial Q_{\gamma}}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial g}{\partial P_{\gamma}} \frac{\partial P_{\gamma}}{\partial q_{\alpha}} \right) \right] \\ &= \sum_{\beta\gamma} \left[\frac{\partial f}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial g}{\partial Q_{\gamma}} \{Q_{\beta}, Q_{\gamma}\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial g}{\partial P_{\gamma}} \{P_{\beta}, P_{\gamma}\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial g}{\partial P_{\gamma}} \{Q_{\beta}, P_{\gamma}\}_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial g}{\partial Q_{\gamma}} \{P_{\beta}, Q_{\gamma}\}_{q,p} \right] \\ &= \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial f}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial g}{\partial P_{\beta}} - \frac{\partial f}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial g}{\partial Q_{\beta}} \right] \delta_{\alpha\beta} = \{f, g\}_{Q,P}, \end{aligned} \quad (8.70)$$

(il che prova l'implicazione \Leftarrow)

Il teorema si può quindi enunciare nella forma equivalente

$$(q, p) \rightarrow (Q, P) \text{ trasformazione canonica} \quad \Leftrightarrow \quad \{Q, P\}_{q,p} = \{Q, P\}_{Q,P} = \{q, p\}_{q,p}. \quad (8.71)$$

La trasformazione $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ è canonica se e solo se lascia invariate le parentesi di Poisson canoniche.

8.5.1 Verifica della canonicità di una trasformazione

Le parentesi di Poisson offrono un metodo molto comodo per verificare se una certa trasformazione dall'insieme di variabili (q_{α}, p_{α}) all'insieme (Q_{α}, P_{α}) è canonica. È sufficiente verificare che, per il nuovo insieme di variabili, valgano le parentesi di Poisson canoniche (8.40). Vediamo alcuni esempi.

Sistemi unidimensionali

Consideriamo, in un sistema unidimensionale, la trasformazione di variabili

$$Q = pe^{-q} \quad P = -p^{\alpha} e^{\beta q},$$

in cui α e β sono dei parametri costanti. La trasformazione è canonica se e solo se $\{Q, P\}_{q,p} = 1$ (le altre parentesi di Poisson $\{Q, Q\}$ e $\{P, P\}$ sono banalmente nulle):

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = -pe^{-q}(-\alpha)p^{\alpha-1}e^{\beta q} - e^{-q}(-\beta)p^{\alpha}e^{\beta q} = p^{\alpha}e^{(\beta-1)q}(\alpha + \beta).$$

Affinché il risultato sia identicamente 1 è necessario che i parametri abbiano dei valori particolari: $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Solo per questi valori la trasformazione data è canonica, e ha la forma

$$Q = pe^{-q} \quad P = -e^q.$$

È facile trovare la funzione generatrice, che è possibile scrivere in una delle seguenti forme:

$$F_1 = Qe^q \quad F_3 = p - p \ln \frac{p}{Q} \quad F_4 = -p \ln(-P).$$

Non esiste una funzione generatrice di tipo F_2 perché a causa della relazione $P = -e^q$ le variabili q e P non possono essere indipendenti tra loro.

Consideriamo, come secondo esempio, la trasformazione di variabili

$$Q = \ln \frac{\sin p}{q} \qquad P = q \cotg p .$$

È ovvio che tale trasformazione ha senso solo nel dominio di (q, p) in cui l'argomento del logaritmo è positivo e la funzione cotangente è finita. Assumeremo che tali condizioni siano soddisfatte.

In questo caso si tratta di verificare che $\{Q, P\}_{q,p} = 1$ (le altre parentesi di Poisson $\{Q, Q\}$ e $\{P, P\}$ sono banalmente nulle):

$$\{Q, P\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{1}{q} \frac{-q}{\sin^2 p} - \frac{\cos p}{\sin p} \cotg p = \frac{1 - \cos^2 p}{\sin^2 p} = 1 ,$$

e quindi la trasformazione data è canonica. La sua funzione generatrice si può scrivere in una delle seguenti forme (legate tra loro da trasformazioni di Legendre):

$$\begin{aligned} F_1 &= \sqrt{e^{-2Q} - q^2} + q \arcsin(qe^Q) \\ F_2 &= P - \frac{P}{2} \log(q^2 + P^2) + q \arctan \frac{q}{P} \\ F_3 &= e^{-Q} \cos p \\ F_4 &= P + P \log \frac{\cos p}{P} \end{aligned}$$

Sistemi multidimensionali

Consideriamo, per un sistema in due dimensioni, la trasformazione

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\alpha} (\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2) & p_x &= -\frac{\alpha}{2} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2) \\ y &= \frac{1}{\alpha} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2) & p_y &= -\frac{\alpha}{2} (\sqrt{2P_1} \sin Q_1 - P_2) \end{aligned} \quad (8.72)$$

e verifichiamone la canonicità. Occorrerà calcolare 6 parentesi di Poisson, con tutte le combinazioni tra impulsi e coordinate. Osserviamo che non è necessario invertire le equazioni di trasformazione per ottenere le nuove variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2) in funzione delle vecchie (x, y, p_x, p_y) : la verifica si può effettuare calcolando le parentesi di Poisson rispetto alle nuove variabili. Per esempio

$$\{x, y\}_{Q,P} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial x}{\partial Q_i} \frac{\partial y}{\partial P_i} - \frac{\partial x}{\partial P_i} \frac{\partial y}{\partial Q_i} \right] = 0 .$$

Analogamente si trova

$$\{x, p_x\}_{Q,P} = 1 \qquad \{x, p_y\}_{Q,P} = 0 \qquad \{y, p_x\}_{Q,P} = 0 \qquad \{y, p_y\}_{Q,P} = 1 \qquad \{p_x, p_y\}_{Q,P} = 0$$

che dimostra che la trasformazione data è canonica, per ogni valore del parametro α .

Questa trasformazione è utile per studiare il moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme in direzione ortogonale al piano del moto della particella. Per un campo magnetico uniforme in direzione z e di modulo B , si può scegliere come potenziale vettore:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \qquad \text{cioè} \qquad A_x = -\frac{1}{2} y B, \quad A_y = \frac{1}{2} x B, \quad A_z = 0 ,$$

così l'Hamiltoniana è (vedere paragrafo 7.1.2)

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(p_x - \frac{qB}{2} y \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y + \frac{qB}{2} x \right)^2$$

Applicando la trasformazione (8.72) con $\alpha = \sqrt{qB}$, la nuova Hamiltoniana diventa semplicemente:

$$K = \frac{qB}{2m}(Q_2^2 + P_2^2) .$$

Le equazioni del moto si risolvono facilmente (per (Q_2, P_2) si ha un oscillatore armonico, Q_1 e P_1 sono cicliche); ponendo $\omega = qB/m$ si trova:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \gamma_1 & Q_2 &= c_2 \sin(\omega t + \gamma_2) \\ P_1 &= c_1 & P_2 &= c_2 \cos(\omega t + \gamma_2) \end{aligned}$$

essendo $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ delle costanti di integrazione. La soluzione per le variabili originarie si ottiene sostituendo le espressioni appena trovate nelle (8.72).

Trasformazioni puntuali

Abbiamo visto nel paragrafo (8.2.2) che è possibile scrivere la funzione generatrice per una trasformazione puntuale

$$Q_\alpha = f_\alpha(q_1, \dots, q_n, t), \quad P_\alpha = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} p_\beta \quad (8.73)$$

e questo è sufficiente per dimostrarne la canonicità. Vogliamo ora verificarlo, come esercizio, utilizzando le parentesi di Poisson.

In generale si ha

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{q,p} = \{f_\alpha(q, t), f_\beta(q, t)\} = \sum_\gamma \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\gamma} \frac{\partial f_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_\gamma} \right) = 0 ,$$

poichè le f_α sono funzioni soltanto delle (vecchie) coordinate (q_γ) e non degli impulsi (p_γ) .

$$\{P_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \sum_\gamma \left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial q_\gamma} \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial P_\beta}{\partial q_\gamma} \right) = 0 ,$$

perché le variabili P_α e q_α sono, per la definizione della F_2 , indipendenti.

$$\{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \sum_\gamma \left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\gamma} \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial P_\beta}{\partial q_\gamma} \right) = \sum_\gamma \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\gamma} \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma} . \quad (8.74)$$

Per completare il calcolo conviene riscrivere la seconda delle (8.18) nella forma:

$$p_\alpha = \sum_\beta f_{\alpha\beta} P_\beta + \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \quad (8.75)$$

dove $f_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial f_\beta}{\partial q_\alpha}$ sono gli elementi di una matrice $n \times n$, che può essere invertita. Siano $\tilde{f}_{\gamma\alpha}$ gli elementi della matrice inversa, cioè tale che:

$$\sum_\alpha \tilde{f}_{\gamma\alpha} f_{\alpha\beta} = \delta_{\gamma\beta} .$$

Moltiplichiamo entrambi i membri della (8.75) per $\tilde{f}_{\gamma\alpha}$ e sommiamo su α :

$$\sum_\alpha \tilde{f}_{\gamma\alpha} p_\alpha = \sum_{\beta\alpha} \tilde{f}_{\gamma\alpha} f_{\alpha\beta} P_\beta + \sum_\alpha \tilde{f}_{\gamma\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} = P_\gamma + \sum_\alpha \tilde{f}_{\gamma\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \quad \Rightarrow \quad P_\gamma = \sum_\alpha \tilde{f}_{\gamma\alpha} \left(p_\alpha - \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right)$$

da cui ricaviamo le derivate delle P_α rispetto ai vecchi impulsi:

$$\frac{\partial P_\gamma}{\partial p_\alpha} = \tilde{f}_{\gamma\alpha}$$

e la (8.74) diventa:

$$\{Q_\alpha, P_\beta\}_{q,p} = \sum_\gamma \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\gamma} \frac{\partial P_\beta}{\partial p_\gamma} = \sum_\gamma f_{\gamma\alpha} \tilde{f}_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}$$

come volevamo dimostrare.

Come esempio concreto consideriamo la trasformazione da coordinate cartesiane a polari nel piano, utilizzando le parentesi di Poisson e le trasformazioni

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (8.76)$$

$$p_r = \cos \theta p_x + \sin \theta p_y = \frac{xp_x + yp_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad p_\theta = -r \sin \theta p_x + r \cos \theta p_y = xp_y - yp_x \equiv L_z \quad (8.77)$$

Calcoliamo quindi le parentesi di Poisson canoniche per le “nuove” variabili, considerate come funzioni delle vecchie:

$$\{r, \theta\}_{x,y} = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right\} = 0, \quad (8.78)$$

come è ovvio, dato che nessuna delle nuove variabili dipende dagli impulsi p_x, p_y .

$$\begin{aligned} \{r, p_r\}_{x,y} &= \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{xp_x + yp_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, p_x \right\} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, p_y \right\} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d}{dy} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1, \end{aligned}$$

avendo usato le (8.41). Quindi

$$\{r, p_\theta\}_{x,y} = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, xp_y - yp_x \right\} = x \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, p_y \right\} - y \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}, p_x \right\} = \frac{xy - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (8.79)$$

Allo stesso modo si verificano anche le restanti parentesi di Poisson:

$$\{\theta, p_r\}_{x,y} = 0 \quad \{\theta, p_\theta\}_{x,y} = 1 \quad \{p_r, p_\theta\}_{x,y} = 0.$$

È facile verificare che valgono le parentesi di Poisson canoniche per le (x, y, p_x, p_y) considerate come funzioni di $(r, \theta, p_r, p_\theta)$ secondo le (8.78) e (8.79):

$$\begin{array}{lll} \{x, y\}_{r,\theta} = 0 & \{x, p_x\}_{r,\theta} = 1 & \{x, p_y\}_{r,\theta} = 0 \\ \{y, p_x\}_{r,\theta} = 0 & \{y, p_y\}_{r,\theta} = 1 & \{p_x, p_y\}_{r,\theta} = 0 \end{array}$$

8.5.2 Esempio di trasformazione non canonica

Consideriamo l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico semplice:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{a}{2} q^2$$

ed eseguiamo la trasformazione dalle variabili (q, p) alle variabili (Q, P) tale che

$$p = P \cos Q \quad q = \frac{1}{\sqrt{am}} P \sin Q. \quad (8.80)$$

Con questa trasformazione l'Hamiltoniana originaria diventa l'Hamiltoniana di una particella libera:

$$\tilde{H} = \frac{P^2}{2m}.$$

Per quanto attraente possa sembrare questa trasformazione, essa non è canonica, infatti

$$\{q, p\}_{Q,P} = \frac{1}{\sqrt{am}} \{P \sin Q, P \cos Q\} = \frac{P}{\sqrt{am}} \neq 1,$$

cioè le nuove variabili (Q, P) *non sono canoniche*.

Vediamo cosa ciò comporta per le equazioni del moto. Per le variabili originarie le equazioni del moto sono:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -aq \quad (8.81)$$

con la ben nota soluzione

$$q(t) = \frac{c}{\sqrt{am}} \sin \left(\sqrt{\frac{a}{m}} t + \gamma \right) \qquad p(t) = c \cos \left(\sqrt{\frac{a}{m}} t + \gamma \right) . \quad (8.82)$$

Le equazioni del moto per le nuove variabili si trovano derivando rispetto al tempo le trasformazioni (8.80),

$$\dot{p} = \dot{P} \cos Q - P \dot{Q} \sin Q \qquad \dot{q} = \frac{1}{\sqrt{am}} \left(\dot{P} \sin Q + P \dot{Q} \cos Q \right) ,$$

e sostituendole nelle (8.81):

$$\dot{P} \sin Q + P \dot{Q} \cos Q = \sqrt{\frac{a}{m}} P \cos Q \qquad \dot{P} \cos Q - P \dot{Q} \sin Q = -\sqrt{\frac{a}{m}} P \sin Q , \quad (8.83)$$

che, con qualche manipolazione algebrica, diventano

$$\dot{P} = 0 \qquad \dot{Q} = \sqrt{\frac{a}{m}} \neq \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} . \quad (8.84)$$

Appare evidente che le equazioni del moto per le nuove variabili (8.84) *non hanno* la forma canonica $\dot{Q} = \partial \tilde{H} / \partial P$, $\dot{P} = -\partial \tilde{H} / \partial Q$, ma non per questo cessano di essere valide come equazioni del moto; risolvendole si trova

$$P(t) = c \qquad Q(t) = \sqrt{\frac{a}{m}} t + \gamma ,$$

che sostituite nelle (8.80) danno:

$$q(t) = \frac{c}{\sqrt{am}} \sin \left(\sqrt{\frac{a}{m}} t + \gamma \right) \qquad p(t) = c \cos \left(\sqrt{\frac{a}{m}} t + \gamma \right) .$$

che sono proprio le soluzioni esatte (8.82). Questo esempio mostra che le trasformazioni canoniche non sono le uniche trasformazioni possibili. Esse sono trasformazioni delle variabili molto particolari, che soddisfano requisiti molto restrittivi e la loro grande importanza risiede nel fatto che la teoria di Hamilton-Jacobi, una delle tecniche più potenti per la risoluzione di problemi fisici, è basata proprio su delle trasformazioni canoniche.

8.6 Trasformazioni canoniche infinitesime

Il concetto di trasformazioni canoniche infinitesime riguarda i casi in cui le nuove variabili differiscono dalle vecchie solo per quantità infinitesime; pertanto si terrà conto solo di termini lineari in tali variazioni. Poniamo

$$\begin{cases} Q_\alpha = q_\alpha + \delta q_\alpha \\ P_\alpha = p_\alpha + \delta p_\alpha \end{cases} \quad (8.85)$$

La funzione generatrice di tale trasformazione differirà per una quantità infinitesima dalla funzione generatrice della trasformazione identica (8.14). Se scegliamo come funzione generatrice una funzione di secondo tipo, questa avrà la forma:

$$F_2(q, P) = \sum_{\beta} q_{\beta} P_{\beta} + \varepsilon G(q, P) \quad (8.86)$$

dove ε è il parametro infinitesimo della trasformazione. Le equazioni di trasformazione saranno:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_\alpha} \\ p_\alpha &= \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = P_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \end{aligned}$$

ovvero

$$P_\alpha = p_\alpha - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \delta p_\alpha = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \quad (8.87a)$$

$$Q_\alpha = q_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \delta q_\alpha = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \quad (8.87b)$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è posto $\partial G / \partial P_\alpha \simeq \partial G / \partial p_\alpha$, trascurando infinitesimi di ordine superiore in ε . La funzione G viene chiamata, con un linguaggio un po' improprio, "funzione generatrice" della trasformazione infinitesima.

Si può stabilire un'importante relazione tra le parentesi di Poisson e le trasformazioni infinitesime; consideriamo la variazione (infinitesima) di una generica funzione $u(q, p)$ conseguente alle (8.85):

$$\delta u = u(q_\alpha + \delta q_\alpha, p_\alpha + \delta p_\alpha) - u(q_\alpha, p_\alpha) .$$

Sviluppando in serie di Taylor intorno a (q_α, p_α) e tenendo solo termini del primo ordine in ε avremo

$$\delta u = \sum_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right) = \varepsilon \sum_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \right)$$

dove l'ultimo passaggio segue dalle (8.87). Pertanto

$$\delta u = \varepsilon \{u, G\} . \quad (8.88)$$

In particolare ciò vale per l'Hamiltoniana del sistema:

$$\delta H = \varepsilon \{H, G\} . \quad (8.89)$$

Se G è una costante del moto, deve valere $\dot{G} = \{G, H\} = 0$ (per la definizione (8.86) G non dipende esplicitamente dal tempo) e quindi $\delta H = 0$: possiamo concludere che

le costanti del moto sono funzioni generatrici di trasformazioni infinitesime che lasciano invariata l'Hamiltoniana.

Esempi

1. L'impulso come generatore di traslazioni infinitesime

Consideriamo un sistema in cui la coordinata q_α è ciclica, ed il suo momento coniugato p_α è quindi una costante del moto: $\dot{p}_\alpha = 0 = \{p_\alpha, H\}$. Chiediamoci qual è la trasformazione infinitesima generata da

$$G = p_\alpha .$$

Dalle (8.87) segue che

$$\begin{aligned} \delta q_\beta &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_\beta} = \varepsilon \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} = \varepsilon \delta_{\alpha\beta} \\ \delta p_\beta &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\beta} = 0 . \end{aligned}$$

La corrispondente trasformazione

$$\begin{aligned} q'_\alpha &= q_\alpha + \varepsilon \\ q'_\beta &= q_\beta & (\beta \neq \alpha) \\ p'_\beta &= p_\beta & \forall \beta \end{aligned}$$

è una traslazione infinitesima lungo la direzione α .

2. Il momento angolare come generatore di rotazioni infinitesime

Consideriamo un sistema invariante per una rotazione di un angolo θ arbitrario attorno ad un asse. L'Hamiltoniana del sistema non può dipendere da θ , che sarà una variabile ciclica. Senza perdita di generalità, possiamo orientare gli assi cartesiani in modo che l'asse z coincida con l'asse di simmetria. La corrispondente costante del moto è

$$p_\theta = xp_y - yp_x = L_z, \quad (8.90)$$

ovvero la componente z del momento angolare. Qual è la trasformazione infinitesima generata da $G = L_z$? Dalle (8.87) si ricava

$$\begin{aligned} \delta x &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_x} = -\varepsilon y \quad \longrightarrow \quad x' = x - \varepsilon y \\ \delta y &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_y} = +\varepsilon x \quad \longrightarrow \quad y' = y + \varepsilon x \\ \delta z &= 0 \quad \longrightarrow \quad z' = z \end{aligned}$$

cioè una rotazione di un angolo infinitesimo $d\theta = \varepsilon$ intorno all'asse z .

Le stesse trasformazioni si ottengono per le componenti del momento \vec{p} :

$$\begin{aligned} \delta p_x &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial x} = -\varepsilon p_y \quad \longrightarrow \quad p'_x = p_x - \varepsilon p_y \\ \delta p_y &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial y} = +\varepsilon p_x \quad \longrightarrow \quad p'_y = p_y + \varepsilon p_x \\ \delta p_z &= 0 \quad \longrightarrow \quad p'_z = p_z. \end{aligned}$$

Se l'asse di rotazione fosse individuato da un versore \hat{n} , la funzione generatrice corrispondente sarebbe

$$G = \vec{L} \cdot \hat{n}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che *il momento angolare genera le rotazioni spaziali del sistema*.

Ricordiamo che il momento angolare canonico (cioè il momento canonicamente coniugato ad una variabile angolare) non è sempre il momento angolare meccanico, come il momento canonicamente coniugato non coincide sempre con la quantità di moto meccanica, come si è visto nel paragrafo 4.1 (eq. (4.3)).

3. La Hamiltoniana come generatore di traslazioni temporali

Particolarmente interessante è il caso in cui $G = H(q, p)$ ed $\varepsilon = dt$ (intervallo di tempo infinitesimo). Le (8.87) forniscono allora, usando le equazioni di Hamilton,

$$\delta q_\alpha = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha dt = dq_\alpha \quad (8.91a)$$

$$\delta p_\alpha = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha dt = dp_\alpha. \quad (8.91b)$$

Le relazioni (8.91) stabiliscono che la *Hamiltoniana* è la *funzione generatrice delle traslazioni temporali*, ovvero di quelle trasformazioni canoniche infinitesime che cambiano le coordinate ed i momenti all'istante t nei valori che essi assumono all'istante $t + dt$, evolvendo sulla base delle equazioni del moto. In altre parole il moto di un sistema in un intervallo di tempo finito si può considerare come una successione di trasformazioni canoniche infinitesime generate dall'Hamiltoniana.

8.7 Invarianti integrali di Poincaré

Tra le espressioni rilevanti che restano invarianti per trasformazioni canoniche vi sono alcune espressioni integrali. Si è già definito lo spazio delle fasi come quello caratterizzato dalle $2n$ variabili $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Il **Teorema di Poincaré** stabilisce che *l'integrale*

$$J_1 = \iint_S \sum_{\alpha} dq_{\alpha} dp_{\alpha} = \iint_S \sum_{\alpha} dQ_{\alpha} dP_{\alpha} \quad (8.92)$$

è invariante per trasformazioni canoniche, essendo S una superficie bi-dimensionale arbitraria nello spazio delle fasi.

Per provare l'invarianza dell'integrale (8.92) partiamo dall'osservazione che per specificare un punto su una superficie bidimensionale sono necessari (e sufficienti) due parametri, che chiameremo u e v . Sulla superficie, quindi, $q_{\alpha} = q_{\alpha}(u, v)$, $p_{\alpha} = p_{\alpha}(u, v)$. L'elemento di superficie $dq_{\alpha} dp_{\alpha}$ si trasforma nel corrispondente $du dv$ tramite lo Jacobiano

$$\frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial q_{\alpha} / \partial u & \partial p_{\alpha} / \partial u \\ \partial q_{\alpha} / \partial v & \partial p_{\alpha} / \partial v \end{vmatrix} = \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} - \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial u} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial v} \quad (8.93)$$

ossia

$$dq_{\alpha} dp_{\alpha} = \left| \frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} \right| du dv .$$

Pertanto l'invarianza di J_1 sotto trasformazioni canoniche si può riscrivere come segue:

$$\iint_S \sum_{\alpha} \frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} du dv = \iint_S \sum_{\alpha} \frac{\partial(Q_{\alpha}, P_{\alpha})}{\partial(u, v)} du dv$$

che, per l'arbitrarietà della regione di integrazione, equivale a dimostrare che

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} = \sum_{\alpha} \frac{\partial(Q_{\alpha}, P_{\alpha})}{\partial(u, v)} \quad (8.94)$$

ossia che la somma degli jacobiani è invariante.

Consideriamo allora una trasformazione canonica generata da una $F_2(q, P, t)$ ^[¶]. Si ha che

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_{\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial u} \right) .$$

Ma F_2 dipende da u attraverso la dipendenza da u delle q e delle P , ossia

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial q_{\beta}}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial u} \right) = \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \frac{\partial q_{\beta}}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial u} \right) .$$

Analogamente esprimeremo $\partial p_{\alpha} / \partial v$ come

$$\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial q_{\beta}}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial v} \right) = \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \frac{\partial q_{\beta}}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial v} \right)$$

^[¶] La scelta di una funzione di tipo F_2 è arbitraria, ma la dimostrazione che segue può essere ripetuta con poche, ovvie, modifiche per ogni tipo di funzione generatrice.

e sostituendo nello Jacobiano (8.93):

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} = \sum_{\alpha} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} & \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \frac{\partial q_{\beta}}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial v} & \sum_{\beta} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \frac{\partial q_{\beta}}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial v} \right) \end{array} \right|.$$

Per le proprietà dei determinanti, si possono portare i simboli di sommatoria fuori dal determinante e così anche qualsiasi fattore comune a tutti i termini di una colonna. In questo modo si ottiene:

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} & \frac{\partial q_{\beta}}{\partial u} \\ \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial v} & \frac{\partial q_{\beta}}{\partial v} \end{array} \right| + \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial u} \\ \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial v} & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial v} \end{array} \right|. \quad (8.95)$$

Il primo dei due termini a secondo membro è il prodotto di un fattore simmetrico rispetto allo scambio degli indici $\alpha \leftrightarrow \beta$ ($\partial^2 F_2 / \partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}$) per un fattore antisimmetrico (il determinante, che cambia segno scambiando tra loro le colonne), quindi una volta sommato su α e β dà zero. Possiamo sostituire tale termine con un altro nullo (per lo stesso motivo), ma più utile alla successiva elaborazione, e cioè con

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_{\alpha} \partial P_{\beta}} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u} & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial u} \\ \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial v} & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial v} \end{array} \right|.$$

Inserendo questo nella (8.95) e riaccorpando di nuovo i determinanti otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{\partial(q_{\alpha}, p_{\alpha})}{\partial(u, v)} &= \sum_{\beta} \left| \begin{array}{cc} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_{\alpha} \partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial u} \right) & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial u} \\ \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_{\alpha} \partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_{\alpha} \partial P_{\beta}} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial v} \right) & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial v} \end{array} \right| = \\ &= \sum_{\beta} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_{\beta}} \right) & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_{\beta}} \right) & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial v} \end{array} \right| = \sum_{\beta} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial u} & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial u} \\ \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial v} & \frac{\partial P_{\beta}}{\partial v} \end{array} \right| = \sum_{\beta} \frac{\partial(Q_{\beta}, P_{\beta})}{\partial(u, v)}, \end{aligned}$$

che dimostra il teorema di Poincaré, espresso dalle relazioni (8.92) ovvero (8.94).

Analogamente si può dimostrare che è invariante per trasformazioni canoniche la quantità

$$J_4 = \iiint\limits_{\mathcal{S}_4} \sum_{\alpha, \beta} dq_{\alpha} dp_{\alpha} dq_{\beta} dp_{\beta} = \iiint\limits_{\mathcal{S}_4} \sum_{\alpha, \beta} dQ_{\alpha} dP_{\alpha} dQ_{\beta} dP_{\beta}$$

essendo \mathcal{S}_4 una superficie arbitraria di 4 dimensioni nello spazio delle fasi e, con catene successive di ragionamento, che anche la quantità

$$J_n = \iint \cdots \int_{\Gamma} dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 \cdots dq_n dp_n = \iint \cdots \int_{\Gamma} dQ_1 dP_1 dQ_2 dP_2 \cdots dQ_n dP_n, \quad (8.96)$$

per un volume arbitrario Γ dello spazio delle fasi, è invariante. Di fatto, l'invarianza di J_n equivale ad affermare che **il volume nello spazio delle fasi è invariante per trasformazioni canoniche**.

8.8 Teorema di Liouville

Consideriamo ora quei *sistemi complessi* che sono oggetto di studio nella meccanica statistica, sistemi in cui il numero di componenti è così grande (tipicamente dell'ordine del numero di Avogadro, $\sim 10^{23}$) da rendere impraticabile l'usuale descrizione in termini di equazioni del moto per ciascun componente. Tipicamente le condizioni iniziali sono note solo in modo incompleto, per esempio si conosce solo l'energia di una certa quantità di gas, oppure pressione o temperatura, ma sicuramente non la posizione e la velocità di ognuna delle sue molecole.

La meccanica statistica può fare predizioni sulle proprietà *medie* o “macroscopiche” del sistema prendendo in considerazione il moto di un gran numero di sistemi identici (copie del sistema fisico), che sono ugualmente compatibili con lo stesso stato macroscopico pur corrispondendo a punti diversi nello spazio delle fasi, ovvero a scelte diverse per coordinate e momenti dei costituenti microscopici: essi costituiscono l'*ensemble statistico*.

La media delle quantità desiderate viene fatta, appunto, sull'ensemble. Ogni sistema dell'ensemble ha condizioni iniziali diverse, ma tutte compatibili con le informazioni macroscopiche note, ed è rappresentato da un punto diverso nello spazio delle fasi (q_{α}, p_{α}) . L'ensemble occupa quindi un certo *volume* nello spazio delle fasi.

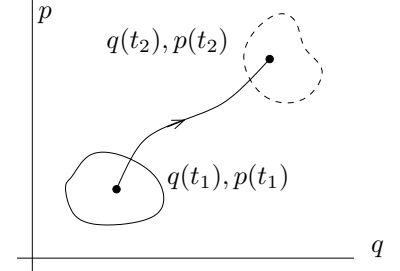
Il **Teorema di Liouville** asserisce che *la densità di sistemi nell'intorno di un dato sistema, nello spazio delle fasi, resta costante nel tempo.*

Detto dN il numero di sistemi in una regione infinitesima, di volume dV , dello spazio delle fasi, la variazione nel tempo della densità $D = dN/dV$ è espressa da

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \{D, H\} \quad (8.97)$$

dove $\{D, H\}$ è dovuta alla variazione nel tempo delle $2n$ coordinate e momenti del sistema (dipendenza implicita dal tempo), mentre $\partial D/\partial t$ nasce dalla dipendenza esplicita della densità dal tempo.

In figura è schematizzata l'evoluzione temporale del volume infinitesimo che contiene i sistemi nell'intorno di un punto dell'ensemble. Il numero dei sistemi all'interno del volumetto disegnato rimane costante nel tempo perché un sistema inizialmente all'interno non può uscirne né un sistema inizialmente esterno può entrarci dentro. Infatti, in entrambi i casi, il sistema in uscita o in entrata dovrebbe attraversare la superficie che delimita il volumetto occupando così, ad un certo istante, la stessa posizione nello spazio delle fasi di un sistema che fa parte del bordo.



Poiché l'evoluzione nel tempo di un sistema è determinata in modo univoco dalle condizioni iniziali, due sistemi coincidenti ad un istante t continueranno, da lì in poi, a muoversi assieme (si pensi al moto come ad una successione di trasformazioni canoniche generate da H). Quindi nessun sistema dell'ensemble può lasciare il volume dV , né altri esterni possono aggiungersi a quelli presenti, e dN sarà costante nel tempo.

Per quanto riguarda dV , si è dimostrato nella (8.96) che un volume infinitesimo nello spazio delle fasi è invariante per trasformazioni canoniche e quindi anche per la variazione nel tempo delle $(q(t), p(t))$, vista come successione di trasformazioni di contatto generate da H . Ciò dimostra che D è costante nel tempo:

$$D = \frac{dN}{dV} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \frac{dD}{dt} = 0 ,$$

che prova il teorema di Liouville. Dalla (8.97) segue poi:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\{D, H\} .$$

Quando il sistema si trova all'equilibrio statistico, la densità di stati non deve dipendere esplicitamente dal tempo, cioè $\partial D/\partial t = 0$ e quindi

$$\{D, H\} = 0 \quad \text{all'equilibrio.}$$

In tal caso D è una costante del moto del sistema e potrà essere espressa in termini di costanti del moto appropriate per il sistema fisico in esame.

Capitolo 9

La teoria di Hamilton-Jacobi

Si è già segnalata l'opportunità di trasformazioni canoniche che forniscano un nuovo insieme (Q, P) in cui tutte le coordinate sono cicliche e quindi tutti i momenti sono costanti.

Nella teoria di Hamilton-Jacobi ci spingiamo ancora oltre, nella ricerca di una trasformazione canonica dall'insieme di variabili (q, p) ^[*] ad un nuovo insieme (Q, P) *tutte costanti*: $Q_\alpha = b_\alpha$, $P_\alpha = a_\alpha$. Tali costanti saranno legate ai $2n$ valori iniziali di coordinate e momenti, (q_0, p_0) , al tempo $t = t_0$. Con questa trasformazione, le relazioni tra le vecchie e le nuove variabili canoniche saranno proprio le soluzioni delle equazioni del moto:

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(q_0, p_0, t) \\ p_\alpha = p_\alpha(q_0, p_0, t) \end{cases} \quad (9.1)$$

che esprimono le $(q(t), p(t))$ in funzione dell'insieme dei valori iniziali (q_0, p_0) e del tempo.

9.1 Equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione principale di Hamilton

Come considerazione ovvia osserviamo che le nuove variabili saranno automaticamente costanti nel tempo se l'Hamiltoniana trasformata è nulla ($K = 0$); infatti in tal caso

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} = 0 \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} = 0.$$

Se F è la funzione generatrice della trasformazione canonica desiderata varrà anche la relazione

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

e quindi $K = 0$ implica

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (9.2)$$

Consideriamo F come funzione delle q_α e delle P_α (queste ultime sono costanti), ossia una funzione di tipo $F_2(q, P, t)$. Facciamo uso delle equazioni di trasformazione $p_\alpha = \partial F_2 / \partial q_\alpha$ e sostituiamo nella (9.2), ottenendo

$$H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0,$$

nota come equazione di Hamilton-Jacobi, che può essere letta come un'equazione differenziale a derivate parziali in $(n+1)$ variabili (q_1, \dots, q_n, t) , la cui soluzione fornisce la funzione generatrice desiderata.

^[*]Ricordiamo che, nella notazione semplificata, (q, p) sta per $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$, quindi la notazione (Q, P) è da intendere come $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n)$ e

Con notazione “standard” indichiamo quest’ultima con S ^[†], anche detta **funzione principale di Hamilton**. Scriviamo quindi l’**equazione di Hamilton-Jacobi** come:

$$\boxed{H\left(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} . \quad (9.3)$$

L’integrazione dell’equazione di Hamilton-Jacobi ci fornirà la dipendenza di S dalle variabili $(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, ma non dai nuovi momenti P_α . D’altra parte una soluzione completa della (9.3) contiene anche $(n+1)$ costanti di integrazione, una delle quali sarà additiva. Notiamo infatti che nell’equazione di Hamilton-Jacobi compaiono solo le derivate di S , ma non la funzione stessa, quindi se S è una soluzione della (9.3), anche $S' = S + k$, con k costante, soddisfa la stessa equazione. Per lo stesso motivo una costante additiva non influisce sulle trasformazioni generate da S e può quindi essere ignorata. Ciò riduce a n il numero di costanti di integrazione, nessuna delle quali semplicemente additiva (perché potrebbe essere assorbita nella costante k), che entrano nella funzione principale di Hamilton:

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n, t) \equiv S(q, a, t) \quad (a_\alpha = \text{costanti})$$

ossia S è funzione delle n variabili q_α e di n costanti di integrazione indipendenti a_α (nessuna additiva), nonché del tempo. Senza alcuna restrizione possiamo scegliere le a_α assumendo che siano proprio i nuovi momenti:

$$P_\alpha = a_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, n . \quad (9.4)$$

In tal caso le trasformazioni che forniscono le “nuove” coordinate (costanti) sono

$$Q_\alpha = b_\alpha = \frac{\partial}{\partial a_\alpha} S(q, a, t) \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (9.5)$$

che, risolte in forma esplicita per le q_α , ossia

$$q_\alpha = q_\alpha(a, b, t) \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (9.6)$$

permettono di esprimere le coordinate q_α in funzione del tempo e delle $2n$ costanti (a, b) . Sostituendo le soluzioni (9.6) nell’altra metà delle trasformazioni

$$p_\alpha = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} S(q, a, t) \quad (9.7)$$

si ottengono i momenti p_α in funzione del tempo e delle $2n$ costanti (a, b) :

$$p_\alpha = p_\alpha(a, b, t) \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (9.8)$$

Infine, per ottenere le soluzioni delle equazioni del moto nella forma desiderata (9.1), cioè in funzione delle condizioni iniziali (q_0, p_0) anziché delle costanti di integrazione (a, b) , basta utilizzare le (9.6) e (9.8) al tempo $t = t_0$ per ottenere

$$\begin{aligned} a_\alpha &= a_\alpha(q_0, p_0) \\ b_\alpha &= b_\alpha(q_0, p_0) . \end{aligned}$$

Ciò dimostra che *risolvendo l’equazione di Hamilton-Jacobi si ottiene una soluzione completa al problema meccanico*, in accordo con le (9.1).

Osservazione 1: dal punto di vista formale, possiamo dire che l’equazione di Hamilton-Jacobi è un’unica equazione differenziale a derivate parziali in $(n+1)$ variabili equivalente alle $2n$ equazioni

^[†]Sarà chiaro fra poco che S è proprio l’azione del sistema lungo la curva del moto.

differenziali (ordinarie e del prim'ordine) di Hamilton, una corrispondenza più generale del caso considerato qui. Qui possiamo far risalire l'equivalenza al fatto che il punto di partenza è, in entrambi i casi, il principio variazionale di Hamilton.

Osservazione 2: il significato della funzione principale di Hamilton S si può ottenere considerando la sua derivata totale rispetto al tempo:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial S}{\partial t}$$

e, tenendo conto delle equazioni (9.3) e (9.7) ^[‡],

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H(p, q) = \mathcal{L} .$$

Integrando sul tempo si ottiene:

$$S = \int \mathcal{L} dt + \text{cost.} \quad (9.9)$$

pertanto la funzione principale di Hamilton differisce, al più, per una costante dall'integrale di azione già considerato in precedenza, dove abbiamo assunto che lungo il cammino di integrazione le coordinate $q_{\alpha}(t)$ soddisfino le equazioni del moto. L'integrale d'azione (9.9) va quindi inteso lungo il cammino "fisico" del sistema. L'identificazione della funzione generatrice S con l'azione implica una estensione della definizione di azione, da integrale definito, come è stata intesa finora, a integrale indefinito, come nella (9.9).

9.1.1 Azione come funzione delle coordinate generalizzate e del tempo

In realtà fino ad ora abbiamo definito l'azione come

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_{\alpha}, \dot{q}_{\alpha}, t) dt \quad (9.10)$$

avendo fissato gli istanti di tempo t_1 e t_2 , nonché la configurazione del sistema in tali istanti: $q_{\alpha}(t_1)$ e $q_{\alpha}(t_2)$. In tal modo l'azione è un numero (con dimensioni), di cui abbiamo calcolato la variazione di valore quando nell'integrando si usano cammini diversi $q_{\alpha} + \delta q_{\alpha}$ tra istanti fissati t_1 e t_2 , e con le configurazioni iniziale e finale invariate ($\delta q_{\alpha}(t_1) = \delta q_{\alpha}(t_2) = 0$).

Abbiamo visto che, secondo il principio di Hamilton, tra tutti i cammini possibili solo uno rende l'azione estrema (minima), quello effettivamente percorso dal sistema nello spazio delle configurazioni, obbedendo alle equazioni del moto (di Lagrange), o nello spazio delle fasi, obbedendo alle equazioni di Hamilton.

Vogliamo ora caratterizzare l'azione come una quantità caratteristica del sistema, durante tutto il moto *lungo il suo cammino effettivo*, lungo il quale le leggi orarie $q_{\alpha}(t)$ soddisfano le equazioni di Lagrange. A tal fine consideriamo l'azione tra un istante fissato t_1 ed un generico istante t :

$$S = \int_{t_1}^t \mathcal{L}(q(t'), \dot{q}(t'), t') dt' \equiv S(q(t), t) . \quad (9.11)$$

L'azione S è pertanto vista ora come una funzione delle coordinate e del tempo nel limite superiore di integrazione, che viene considerato variabile e non più soggetto alla condizione $\delta q_{\alpha}(t_2) = 0$. L'azione (9.11) è esattamente la funzione (9.9) che interviene nella equazione di Hamilton-Jacobi.

^[‡]ciò equivale a supporre che le equazioni del moto siano soddisfatte.

Per verificarlo consideriamo una variazione dell'azione che porta da un cammino $q_\alpha(t)$ ad uno infinitamente prossimo $q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$, essendo $q_\alpha(t)$ un cammino "fisicamente possibile", ossia soluzione delle equazioni del moto del sistema

$$\delta S = \sum_\alpha \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt'} (\delta q_\alpha) \right) dt' = \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^t + \int_{t_1}^t \sum_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha dt' .$$

Nel termine integrato $\delta q_\alpha(t_1) = 0$ (come prima), mentre in generale sarà $\delta q_\alpha(t) \neq 0$; d'altra parte l'integrando del secondo termine è identicamente nullo perché lungo il cammino considerato le equazioni del moto sono soddisfatte. Quindi la variazione dell'azione si riduce a

$$\delta S = \sum_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha \delta q_\alpha , \quad (9.12)$$

da cui si ottiene

$$\frac{\delta S}{\delta q_\alpha} \equiv \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha .$$

Per ottenere la dipendenza di S dal tempo consideriamone la derivata totale rispetto a t ; dalla definizione (9.11) segue

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} ,$$

ma è anche, dalla (9.11),

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha .$$

Quindi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha = \mathcal{L} = -H + \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha , \quad (9.13)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione della Hamiltoniana H . Abbiamo quindi ricavato che

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H ,$$

che coincide con l'equazione di Hamilton-Jacobi (9.3).

Possiamo scrivere infine il differenziale dell'azione come funzione delle coordinate e del tempo come

$$dS = \sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha - H dt \quad (9.14)$$

e l'azione stessa come

$$S = \int \left(\sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha - H dt \right) .$$

9.2 Equazione di Hamilton-Jacobi nel caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo: separazione della variabile t e funzione caratteristica di Hamilton

Se l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, l'equazione di Hamilton-Jacobi per S , Eq. (9.3), diventa

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \right) = 0 . \quad (9.15)$$

Questa struttura ci permette di separare, in S , la dipendenza dal tempo da quella delle altre variabili, ponendo:

$$S(q_\alpha, a_\alpha, t) = W(q_\alpha, a_\alpha) - a_1 t . \quad (9.16)$$

Sostituito nella (9.15), questo *Ansatz* per S ci permette di trasformare l'equazione di Hamilton-Jacobi nella forma seguente:

$$\boxed{H\left(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = a_1} . \quad (9.17)$$

Notiamo infatti che l'espressione (9.16) implica $\partial S/\partial q_\alpha = \partial W/\partial q_\alpha$. La (9.17) è un'equazione differenziale stazionaria (cioè indipendente dal tempo) per la funzione W , detta **funzione caratteristica di Hamilton**. Essa mette anche in evidenza il fatto che l'Hamiltoniana è una costante del moto (che si identifica con l'energia, $a_1 = E$).

Notiamo anche che la funzione W genera una trasformazione canonica diversa da quella generata da S . Infatti, mentre per la trasformazione generata da $S(q, a, t)$ si ha

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial a_\alpha} - \delta_{\alpha 1} t ,$$

e

$$K = H - a_1 = 0 ,$$

per la trasformazione generata dalla funzione $W(q, a)$ si ha

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \quad \tilde{Q}_\alpha = \frac{\partial W}{\partial a_\alpha}$$

e la nuova Hamiltoniana è ora

$$\tilde{K} = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H = a_1 \neq 0 .$$

Pertanto tutte le coordinate e tutti i momenti tranne $P_1 = a_1$ sono ancora variabili cicliche, perchè non compaiono nell'espressione di \tilde{K} . Invece il momento $P_1 = a_1$ compare esplicitamente in \tilde{K} e coincide con l'Hamiltoniana H del sistema.

Le equazioni del moto per le \tilde{Q}_α diventano:

$$\dot{\tilde{Q}}_\alpha = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial a_\alpha} = \delta_{\alpha 1} ,$$

la cui soluzione è immediata:

$$\tilde{Q}_1 = t + b_1 = \frac{\partial W}{\partial a_1} \quad (9.18)$$

$$\tilde{Q}_\alpha = b_\alpha = \frac{\partial W}{\partial a_\alpha} \quad \alpha \neq 1 \quad (9.19)$$

e l'unica coordinata che non sia semplicemente una costante del moto coincide, di fatto, con il tempo. Il momento canonico ad essa coniugato, $P_1 = a_1$, è l'Hamiltoniana del sistema.

Queste considerazioni stabiliscono una relazione di coniugazione canonica tra Hamiltoniana e tempo.

9.3 Esempi

1. L'oscillatore armonico unidimensionale

Consideriamo l'oscillatore armonico unidimensionale, la cui Hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 .$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi si scriverà, con $S = S(q, a, t)$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 .$$

Poiché H non dipende esplicitamente dal tempo possiamo considerare la funzione caratteristica W , ponendo

$$S(q, a, t) = W(q, a) - at$$

e quindi

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = a .$$

Risolvendo rispetto a $\frac{\partial W}{\partial q}$ si ottiene

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m \left(a - \frac{m\omega^2}{2} q^2 \right)}$$

cioè

$$W(q, a) = m\omega \int dq \sqrt{\frac{2a}{m\omega^2} - q^2} \quad S(q, a, t) = m\omega \left(\int dq \sqrt{\frac{2a}{m\omega^2} - q^2} \right) - at \quad (9.20)$$

Di solito non è davvero necessario effettuare l'integrazione, in quanto ciò che realmente serve sono solo le derivate di W e di S , che possono essere ottenute direttamente dalla (9.20). La nuova coordinata (costante) è

$$Q = b = \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2a}{m\omega^2} - q^2}} - t \quad (9.21)$$

ovvero

$$t + b = \frac{1}{\omega} \arcsin \left(q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2a}} \right) .$$

Invertendo quest'ultima relazione e ponendo $\phi = \omega b$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2a}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (9.22)$$

che è la familiare soluzione dell'oscillatore armonico. Per trovare il momento coniugato si usa l'equazione di trasformazione (9.7), con la (9.20):

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2ma - m^2\omega^2 q^2} = \sqrt{2ma} \cos(\omega t + \phi) \quad (9.23)$$

Nelle soluzioni (9.22) e (9.23) compaiono le costanti a e b , che non sono direttamente date dalle condizioni iniziali q_0 e p_0 . Per trovare un collegamento esplicito tra le costanti a e b e le condizioni iniziali del moto occorre scrivere le soluzioni al tempo $t = t_0$

$$q_0 = q(t_0) = \sqrt{\frac{2a}{m\omega^2}} \sin(\omega t_0 + \omega b) \quad (9.24)$$

$$p_0 = p(t_0) = \sqrt{2ma} \cos(\omega t_0 + \omega b) \quad (9.25)$$

e da queste ricavare $a(q_0, p_0)$ e $b(q_0, p_0)$

Supponendo che a $t = 0$ l'oscillatore sia a riposo ($p_0 = 0$) ma spostato dalla sua posizione di equilibrio ($q_0 \neq 0$) si ottiene pertanto

$$\sqrt{\frac{2a}{m\omega^2}} \sin(\omega b) = q_0 \quad \text{e} \quad \sqrt{2ma} \cos(\omega b) = 0 \quad (9.26)$$

da cui

$$b = \frac{\pi}{2\omega} \quad \text{e} \quad a = \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2. \quad (9.27)$$

La costante a coincide quindi con l'energia totale (costante) dell'oscillatore (come ci aspettavamo dalla (9.17)):

$$a = E = H(p_0, q_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2.$$

Sostituendo infine le (9.27) nelle (9.22) e (9.23) si ottiene la soluzione

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos(\omega t) \\ p(t) &= -m\omega q_0 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

2. Consideriamo un sistema unidimensionale descritto dall'Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{q^2} + q^2.$$

Le equazioni del moto canoniche sono

$$\dot{q} = \frac{2p}{q^2} \qquad \dot{p} = \frac{2p^2}{q^3} - 2q,$$

o l'equivalente equazione di Lagrange $q\ddot{q} + \dot{q}^2 + 4 = 0$ ^[§], la cui risoluzione non è affatto semplice.

Tentiamo perciò di affrontare questo problema con il metodo di Hamilton-Jacobi. Poiché non c'è dipendenza esplicita dal tempo, scriviamo la funzione principale di Hamilton come

$$S = W - at,$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione W è:

$$\frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + q^2 = a \quad \implies \quad \frac{\partial W}{\partial q} = \pm q \sqrt{a - q^2}.$$

per cui

$$W(q, a) = \mp \frac{1}{3} (a - q^2)^{3/2}$$

Quindi

$$Q = b = \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial a} - t \longrightarrow t + b = \frac{\partial W}{\partial a} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{a - q^2}.$$

La vecchia coordinata q si ottiene invertendo questa relazione:

$$q^2 = a - 4(t + b)^2 \quad \implies \quad q(t) = \pm \sqrt{a - 4(t + b)^2},$$

che è la soluzione cercata. Il vecchio momento p è

$$p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm q \sqrt{a - q^2} = \pm 2(t + b) \sqrt{a - 4(t + b)^2}.$$

La scelta del segno nelle equazioni per $q(t)$ e $p(t)$ è possibile conoscendo le condizioni iniziali.

Osserviamo che l'equazione di trasformazione $p = \partial W / \partial q$ dà direttamente la traiettoria nello spazio delle fasi, $p = \pm q \sqrt{E - q^2}$.

^[§]In questo caso la Lagrangiana è $\mathcal{L} = p\dot{q} - H = \frac{1}{4}q^2\dot{q}^2 - q^2$

9.4 Separazione delle variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi

Quanto detto nelle pagine precedenti può far pensare che l'introduzione del metodo di Hamilton-Jacobi porti un vantaggio pratico, ai fini della risoluzione delle equazioni del moto, assai modesto. L'equazione di Hamilton-Jacobi infatti, in quanto equazione differenziale alle derivate parziali, può risultare piuttosto complicata da risolvere. In certe situazioni, tuttavia, è possibile separare le variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi e questo sarà un grosso aiuto nel risolvere le equazioni. In sostanza, il metodo di Hamilton-Jacobi si rivela realmente vantaggioso nell'utilizzo pratico solo quando questa separazione è possibile.

Una coordinata q_α si dice **separabile** nell'equazione di Hamilton-Jacobi se la funzione principale di Hamilton può essere scomposta nella somma di due parti, una delle quali dipende solo dalla coordinata q_α mentre l'altra dipende da tutte le altre variabili. Se, ad esempio, la coordinata separabile è q_1 , allora l'Hamiltoniana deve essere tale da poter scrivere

$$S(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n, t) = S_1(q_1, a_1, \dots, a_n, t) + S'(q_2, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n, t)$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi può essere divisa in due equazioni disaccoppiate, una per S_1 e l'altra per S' .

Analogamente, si dice che l'equazione di Hamilton-Jacobi è **completamente separabile** se tutte le coordinate sono separabili; la funzione principale di Hamilton sarà allora data dalla somma di n funzioni, ciascuna delle quali dipende da una sola variabile:

$$S = \sum_{\alpha} S_{\alpha}(q_{\alpha}, a_1, \dots, a_n, t)$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi si dividerà in n equazioni differenziali del tipo

$$H_{\alpha} \left(q_{\alpha}, \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}}, a_1, \dots, a_n, t \right) + \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial t} = 0 ,$$

dove l'unica variabile coinvolta è q_{α} . Si è ottenuto così un insieme di n equazioni differenziali, disaccoppiate, alle derivate parziali.

Se l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, la stessa separazione si opera sulla funzione caratteristica W e, per ogni S_{α} , si ha

$$S_{\alpha}(q_{\alpha}, a_1, \dots, a_n, t) = W_{\alpha}(q_{\alpha}, a_1, \dots, a_n) - a_{\alpha} t$$

che fornisce le n equazioni di Hamilton-Jacobi ristrette

$$H_{\alpha} \left(q_{\alpha}, \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}}, a_1, \dots, a_n \right) = a_{\alpha} .$$

Queste sono n equazioni differenziali ordinarie, che in generale si possono ricondurre a quadrature.

Nel passaggio da S a W si è operato una parziale separazione di variabile: quella temporale. Infatti, ponendo (più in generale)

$$S(q_{\alpha}, a_{\alpha}, t) = W(q_{\alpha}, a_{\alpha}) + S'(t, a_{\alpha}) ,$$

l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$H \left(q_{\alpha}, \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}} \right) + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0 .$$

Poiché il primo termine dipende solo dalle q_{α} ed il secondo solo dal tempo, l'equazione può essere soddisfatta per qualsiasi valore delle variabili solo se i due termini sono, separatamente, uguali alla stessa costante, con il segno opposto:

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = -a_1 \qquad H \left(q_{\alpha}, \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}} \right) = a_1 .$$

Dalla prima relazione segue $S' = -a_1 t$, come si era già posto in precedenza.

Nella pratica le applicazioni utili del metodo di Hamilton-Jacobi coinvolgono molto spesso Hamiltoniane che non dipendono esplicitamente dal tempo, per cui t è separabile.

Si può dimostrare che una qualsiasi coordinata ciclica è sempre separabile. Supponiamo, ad esempio, che q_1 sia ciclica, cioè $\partial H / \partial q_1 = 0$. Allora il suo momento coniugato, p_1 , è costante e porremo $p_1 = \gamma$. L'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica diventa

$$H \left(q_2, \dots, q_n, \gamma, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n} \right) = a_1 . \quad (9.28)$$

Cerchiamo una soluzione separata della forma

$$W = W_1(q_1, a_1, \dots, a_n) + W'(q_2, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n) ,$$

quindi la (9.28) dovrà contenere solo la funzione W' mentre la W_1 è la soluzione dell'equazione differenziale (ordinaria)

$$p_1 = \gamma = \frac{\partial W_1}{\partial q_1}$$

che dà, banalmente,

$$W_1 = \gamma q_1 . \quad (9.29)$$

Quindi la funzione caratteristica è

$$W = W' + \gamma q_1 .$$

Abbiamo perciò dimostrato che ogni coordinata ciclica contribuisce alla funzione caratteristica (o alla funzione principale) di Hamilton con un termine della forma (9.29) ed è quindi separabile.

Naturalmente, la possibilità di separare le variabili, come di trovare variabili cicliche, dipende dalla scelta di sistema di coordinate.

9.4.1 Esempi con separazione di variabili

1. Moto in un campo di forze centrali

Consideriamo ora il moto di un corpo di massa m sotto l'azione di una forza centrale con potenziale $V(r)$. Sappiamo già che il moto avviene in un piano (quello ortogonale al vettore momento angolare \vec{L} , che è conservato), quindi usiamo le coordinate polari nel piano (r, θ) e la Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) .$$

L'Hamiltoniana corrispondente è

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r)$$

ed è, come \mathcal{L} , ciclica in θ . Possiamo allora separare le variabili r e θ nella funzione caratteristica W , ponendo

$$W = W_1(r) + l\theta \quad (l = \text{cost})$$

tale che

$$p_r = \frac{dW_1}{dr} \quad \text{e} \quad p_\theta = l .$$

Otteniamo così l'equazione di Hamilton-Jacobi nella forma

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} \right] + V(r) = a$$

($a = E$ = energia totale) da cui segue

$$\frac{dW_1}{dr} = \sqrt{2m(a - V(r)) - \frac{l^2}{r^2}}$$

ovvero

$$W(r, \theta, a, l) = \int dr \sqrt{2m(a - V(r)) - \frac{l^2}{r^2}} + l\theta .$$

Infine (vedere (9.21)):

$$t + b_1 = \frac{\partial W}{\partial a} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(a - V(r)) - l^2/r^2}},$$

che coincide con la (6.19), e

$$b_2 = \frac{\partial W}{\partial l} = - \int \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(a - V(r)) - l^2/r^2}} + \theta$$

che è la (6.21) (equazione dell'orbita).

2. Un altro esempio con separazione di variabili

Sia data l'Hamiltoniana, per un sistema bidimensionale,

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}x^2(p_y^2 - \cos y) .$$

Anche in questo caso le equazioni del moto canoniche non sembrano particolarmente agevoli da risolvere direttamente. Procediamo quindi con il metodo di Hamilton-Jacobi, osservando che la variabile y ed il suo momento coniugato p_y compaiono solamente nel fattore $(p_y^2 - \cos y)$, per cui si può cercare la funzione caratteristica di Hamilton nella forma separata:

$$W(x, y, a, b) = A(x, a, b) + B(y, a, b) , \quad (9.30)$$

dove a e b sono i nuovi impulsi, con $a = E$. L'equazione di Hamilton-Jacobi è

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \frac{x^2}{2} \left[\left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 - \cos y \right] = a .$$

L'unico modo affinché questa equazione venga soddisfatta, è che l'espressione dentro la parentesi quadra sia una costante, in modo che la funzione A non abbia nessuna dipendenza da y (come deve essere, avendo imposto la (9.30)). Poniamo quindi

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 - \cos y = b \quad \Rightarrow \quad B = \pm \int dy \sqrt{b + \cos y}$$

e l'equazione per la funzione A diventa

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 = 2a - bx^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pm \int dx \sqrt{2a - bx^2}.$$

Non è indispensabile calcolare esplicitamente gli integrali (anzi, di solito non conviene!) perché ci servono solo le derivate di A e B . Le nuove coordinate sono:

$$\begin{aligned} t + c_1 &= \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial A}{\partial a} = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2a - bx^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{b}{2a}} x \right) \\ c_2 &= \frac{\partial W}{\partial b} = \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial B}{\partial b} = \mp \int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{2a - bx^2}} + \pm \int \frac{dy}{2\sqrt{b + \cos y}}, \end{aligned}$$

che danno, in modo implicito, x ed y in funzione del tempo, cioè la soluzione del problema.

9.5 Variabili d'azione

In fisica sono particolarmente rilevanti quei sistemi in cui il moto è periodico. Molto spesso, più che i dettagli della forma delle orbite è interessante ricavare le frequenze del moto. Si possono considerare due tipi fondamentali di moto periodico:

1. Sia q che p sono funzioni periodiche del tempo, con la stessa frequenza ν . Questa situazione è tipica di sistemi oscillanti, come l'oscillatore armonico. Dopo un periodo $T = 1/\nu$, q e p tornano ai valori iniziali e l'orbita del sistema nello spazio delle fasi è una curva chiusa.
2. Pur non essendo q periodica, quando $q = q_0 + n\Delta q$, con n intero, il sistema ripassa per una certa configurazione. Questa situazione vale, per esempio, per un corpo rigido che ruota attorno ad un asse, se identifichiamo con q l'angolo di rotazione e poniamo $\Delta q = 2\pi$. L'orbita nello spazio delle fasi non è più chiusa, ma p è una funzione periodica di q , con periodo Δq . I valori di q in questo caso non sono limitati, ma possono crescere indefinitamente.

Questi sistemi possono essere convenientemente trattati con una variante del metodo di Hamilton-Jacobi, che consiste nell'assumere come momenti, invece delle costanti di integrazione a_α (come nelle (9.4)) un insieme di costanti indipendenti J_i , definite opportunamente, funzioni delle a_α e note come **variabili d'azione**.

Nel seguito considereremo sistemi la cui Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, cominciando, per semplicità, a trattare il caso unidimensionale.

9.5.1 Caso unidimensionale

È dato un sistema con un solo grado di libertà, la cui Hamiltoniana è conservata:

$$H(q, p) = \text{costante} = \alpha.$$

Questa relazione permette di definire, in modo implicito, p in funzione di q :

$$p = p(q, \alpha). \quad (9.31)$$

Effettuiamo una trasformazione da (q, p) alle nuove variabili (w, J) , dove il "nuovo momento" è la variabile d'azione definita come

$$J = \oint p dq \quad (9.32)$$

e l'integrazione è estesa ad un periodo completo. Si noti che J ha le dimensioni di un momento angolare. Dalla (9.31) segue che J è una funzione della sola α (o, equivalentemente, che α è una funzione della sola J), per cui la funzione caratteristica di Hamilton si può scrivere come

$$W = W(q, J).$$

La coordinata generalizzata w , coniugata a J , è nota come **variabile d'angolo** ed è definita dall'equazione di trasformazione

$$w = \frac{\partial W}{\partial J}.$$

L'equazione del moto per w è

$$\dot{w} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \nu(J) = \text{costante} \quad (9.33)$$

e la sua soluzione è

$$w = \nu t + b ,$$

ossia w è una funzione lineare del tempo (generalizzazione della (9.18)). Il vantaggio delle variabili azione-angolo risiede nel significato fisico che si può attribuire a ν . Si consideri infatti la variazione di w al variare di q in un ciclo completo:

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial W}{\partial J} dq = \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq ,$$

dove, nell'ultimo passaggio, la derivazione rispetto a J è stata scambiata con l'operazione di integrazione perché J è una costante.

Ricordiamo ora che la funzione caratteristica W è una funzione generatrice di tipo F_2 , per cui $\partial W / \partial q = p$ e, per la definizione (9.32), si ha

$$\Delta w = \frac{d}{dJ} \oint p dq = \frac{d}{dJ} J = 1 .$$

La variabile w varia dunque di un'unità per ogni ciclo completo del sistema. Se τ è il periodo, dalla (9.33) si ha anche:

$$\Delta w = 1 = \nu \tau \quad \text{cioè} \quad \nu = \frac{1}{\tau} ,$$

che ci permette di identificare ν con la frequenza del moto. Abbiamo quindi visto come l'uso delle variabili azione-angolo permette di ottenere la frequenza (o il periodo) del moto senza bisogno di ricavare una soluzione completa del moto del sistema: dalla (9.33) si vede che basta scrivere l'Hamiltoniana in funzione di J e calcolarne poi la derivata.

Come esempio, consideriamo nuovamente l'oscillatore armonico. L'Hamiltoniana (energia) è (con $\omega = \sqrt{k/m}$):

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad \text{da cui} \quad p = \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q^2} .$$

L'integrale che definisce la variabile d'azione si può integrare facilmente:

$$J = \oint p dq = \oint \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q^2} dq = \frac{2E}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = E \frac{2\pi}{\omega} .$$

Invertendo il risultato si ha

$$E = \frac{\omega}{2\pi} J \quad \text{da cui} \quad \nu = \frac{dE}{dJ} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

che è la ben nota frequenza dell'oscillatore armonico lineare.

9.5.2 Caso multidimensionale con variabili separabili

Le variabili azione-angolo sono vantaggiose anche per il moto di alcuni sistemi a più gradi di libertà nell'ipotesi che esista (almeno) un insieme di coordinate in cui l'equazione di Hamilton-Jacobi sia completamente separabile. Come già segnalato in precedenza, considereremo solo sistemi conservativi, in cui H cioè non dipende esplicitamente dal tempo e si può usare la funzione caratteristica di Hamilton.

Un sistema è completamente separabile se la funzione caratteristica di Hamilton può essere espressa come somma di n termini, ciascuno dei quali dipende da solo una delle coordinate q_α (ed, eventualmente, dalle costanti di integrazione):

$$W(q_1, \dots, q_n, a_1 \dots a_n) = \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha(q_\alpha, a_1 \dots a_n) ,$$

e, di conseguenza, le sue equazioni del moto possono essere espresse nella forma

$$p_\alpha = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} W_\alpha(q_\alpha, a_1 \dots a_n) \quad (9.34)$$

per cui ogni p_α è espresso in funzione della sua coordinata coniugata e delle n costanti di integrazione:

$$p_\alpha = p_\alpha(q_\alpha, a_1 \dots a_n) .$$

Quest'ultima relazione è l'equazione dell'orbita della proiezione del punto rappresentativo del sistema sul piano (q_α, p_α) dello spazio delle fasi. È possibile definire le variabili azione-angolo del sistema solo se le equazioni dell'orbita per tutte le coppie (q_α, p_α) sono periodiche, in uno dei due tipi definiti all'inizio del paragrafo 9.5. Questo non implica necessariamente che il moto del sistema sia, nel complesso, periodico perché le varie frequenze sono, in generale diverse tra loro. Solo se tutte le frequenze sono in rapporti razionali tra loro si ha un moto effettivamente periodico. Nel caso contrario il sistema non percorre una traiettoria chiusa nello spazio ma descrive una "figura di Lissajous" aperta; un moto di questo tipo viene detto *condizionatamente periodico*. Uno dei vantaggi dell'uso delle variabili azione-angolo è proprio quello di poter valutare tutte le frequenze coinvolte in un moto condizionatamente periodico senza bisogno di risolvere completamente il moto.

Generalizzando la (9.32), le variabili d'azione vengono definite come integrali su periodi completi dell'orbita nel piano (q_α, p_α) :

$$J_\alpha = \oint p_\alpha dq_\alpha .$$

Se una delle coordinate separate è ciclica, il suo momento coniugato è costante e l'orbita corrispondente nel piano (q_α, p_α) è una retta: si può considerare come un caso particolare di moto periodico in cui il periodo è arbitrario. È conveniente, in questo caso, assumere un periodo per la coordinata ciclica pari a 2π , per cui la variabile-azione corrispondente è

$$J_\alpha = 2\pi p_\alpha \quad (\text{se } q_\alpha \text{ è ciclica}) .$$

Usando la (9.34) si può scrivere:

$$J_\alpha = \oint \frac{\partial W_\alpha(q_\alpha, a_1 \dots a_n)}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$$

in cui q_α è semplicemente una variabile di integrazione. Ciascuna variabile di azione è quindi funzione solo delle n costanti di integrazione che vengono dalla soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Inoltre dall'indipendenza di ciascuna delle singole coppie di variabili (q_α, p_α) segue che le J_α sono un sistema di n funzioni indipendenti delle a_α e quindi possono essere scelti come i nuovi momenti coniugati costanti. Esprimendo le a_α in funzione delle variabili di azione, la funzione caratteristica W diventa

$$W = \sum_{\alpha=1}^n W_\alpha(q_\alpha, J_1 \dots J_n)$$

mentre l'Hamiltoniana diventa funzione delle sole J_α :

$$H = a_1 = H(J_1 \dots J_n) .$$

Si definiscono le variabili angolari coniugate alle variabili di azione attraverso le equazioni di trasformazione:

$$w_\alpha = \frac{\partial W}{\partial J_\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial W_\beta(q_\beta, J_1 \dots J_n)}{\partial J_\alpha} ,$$

si noti che, in generale, w_α è funzione di tutte le q_α . Le equazioni del moto per le variabili angolari sono:

$$\dot{w}_\alpha = \frac{\partial H(J_1 \dots J_n)}{\partial J_\alpha} = \nu_\alpha(J_1 \dots J_n) = \text{costante} , \quad \text{per cui} \quad w_\alpha = \nu_\alpha t + b_\alpha .$$

Le costanti ν_α si possono identificare con le frequenze del moto periodico, ma la dimostrazione è decisamente più complicata che nel caso unidimensionale. Si noti che, in generale, ogni grado di libertà ha una frequenza diversa.