Università degli Studi di Torino Scuola di Scienze della Natura Corso di Laurea in Fisica A.A. 2022-23	**ANALISI MATEMATICA 1**	8 febbraio 2023

Soluzioni d'esame.

Quiz 1 (*2.5 punti*) Sia y la soluzione del problema di Cauchy $y'(x) = x^2 y$, $y(0) = 1$. Il $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ vale

☐ 0

☐ $-\infty$

■ $+\infty$

☐ 1

[Si tratta di una equazione a variabili separabili. La soluzione $y \equiv 0$ non soddisfa la condizione iniziale. La soluzione è $y(x) = e^{x^3/3}$ e risulta $\lim_{x\to+\infty} e^{x^3/3} = +\infty$].

Quiz 2 (*2.5 punti*) Si consideri l'equazione in campo complesso

$$6z^2 + 4z + 2 = 0.$$

Indicare quale fra le seguenti affermazioni è falsa.

☐ La somma delle soluzioni ha parte immaginaria nulla.

☐ La differenza delle soluzioni ha parte reale nulla.

☐ Il prodotto delle soluzioni ha parte immaginaria nulla.

■ Il rapporto delle soluzioni ha parte reale nulla.

[L'equazione ha come soluzioni due numeri complessi coniugati $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ non nulli. Allora $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ e $z/\bar{z} = z^2/|z|^2$. Quindi il rapporto delle soluzioni non ha parte reale nulla.]

Quiz 3 (*2.5 punti*) Sia $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^\alpha + 1}{x^{\alpha+2}\log x}\,dx$

☐ è convergente se e solo se $\alpha > 1$

■ è convergente

☐ è convergente se e solo se $0 < \alpha \leq 1$

☐ è divergente

[Si ha, per $x \geq 2$, $\frac{x^\alpha+1}{x^{\alpha+2}\log x} \leq \frac{x^\alpha+1}{x^{\alpha+2}\log 2}$. Poiché l'integrale $\int_2^{+\infty} \frac{x^\alpha+1}{x^{\alpha+2}\log 2}\,dx$ converge qualunque sia $\alpha > 0$ (per il criterio del confronto asintotico), usando il criterio del confronto si deduce che l'integrale dato converge.]

Esercizio 4 (*8.5 punti*). Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-|x|}\sqrt{x^2-4x+3}.$$

Studiare la funzione f determinando: dominio, eventuali simmetrie, segno e zeri, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di monotonia, eventuali massimi e minimi. Tracciare poi un grafico qualitativo.

Il dominio dom f è l'insieme degli $x \in \mathbf{R}$ per i quali il radicando non è negativo. Poiché l'equazione $x^2-4x+3=0$ ha come soluzioni $x_\pm = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$, sarà dom $f =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$. Poiché la radice e l'esponenziale sono non negativi e continui anche f è non negativa e continua sul suo dominio, e risulta $f(1) = 0 = f(3)$. Inoltre,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0;$$

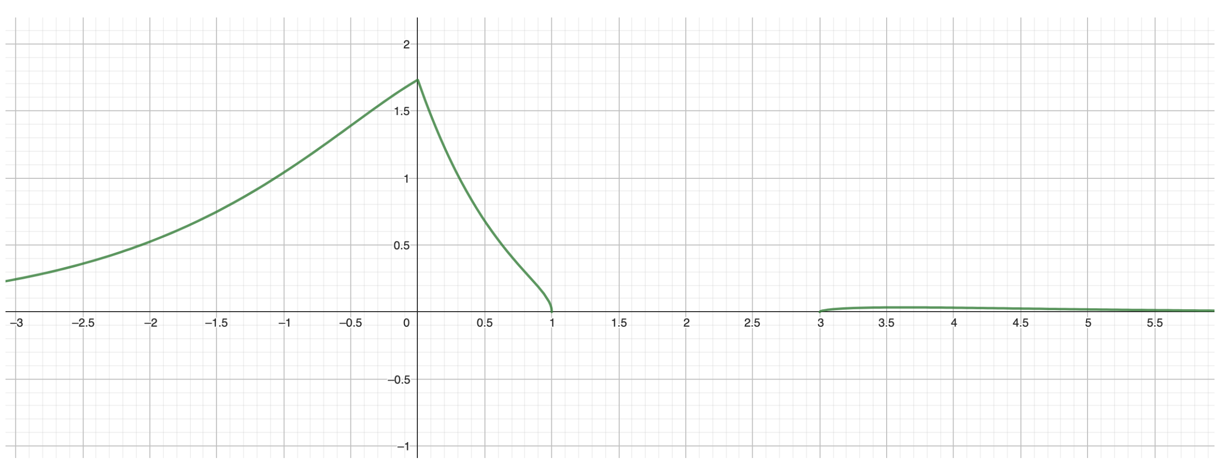
la retta $y = 0$ è quindi un asintoto orizzontale.
La funzione f è certamente derivabile in $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]3, +\infty[$, e la sua derivata è

$$f'(x) = e^{-|x|}\left(-\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2-4x+3} + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}\right) = e^{-|x|}\,\frac{-x(x^2-4x+3)+|x|(x-2)}{|x|\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

Per $x < 0$ $f'(x) = e^{x}\,\frac{-x(x^2-4x+3)-x(x-2)}{-x\sqrt{x^2-4x+3}} = e^{x}\,\frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ che tende a $\sqrt{3}/3$ per $x \to 0^-$, mentre per $x > 0$ $f'(x) = e^{-x}\,\frac{-x(x^2-4x+3)+x(x-2)}{x\sqrt{x^2-4x+3}} = e^{-x}\,\frac{-x^2+5x-5}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ che tende a $-5\sqrt{3}/3$ per $x \to 0^+$; quindi f non è derivabile in 0, dove c'è un punto angoloso.
Si osserva anche che

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} f'(x) = +\infty.$$

I punti $(1, 0)$ e $(3, 0)$ sono dunque punti a tangente verticale.
Per $x < 0$ $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 3x + 1 \geq 0$, quindi $f'(x) \geq 0$ $\forall x < 0$ essendo le radici del trinomio entrambe positive; se ne deduce che f è crescente in $]-\infty, 0[$. Per $x > 0$ $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 5x + 5 \leq 0$. Essendo $\frac{5-\sqrt{5}}{2} \in (1, 3)$ e $\frac{5+\sqrt{5}}{2} > 3$, segue che f è decrescente in $]0, 1[$ e in $[\frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$, mentre è crescente in $]3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}[$. Ne segue che 0 e $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ sono punti di massimo. Essendo $f(\frac{5+\sqrt{5}}{2}) < \sqrt{3} = f(0)$, 0 è punto di massimo assoluto. I punti $x = 1$ e $x = 3$ sono punti di minimo assoluto.



Esercizio 5 (*7 punti*). Calcolare i seguenti integrali definiti:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 - x - 2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^x} + e^x}\,dx$

(a) Per l'integrazione di una funzione razionale, scomponiamo il denominatore $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ e scriviamo la funzione integranda in fratti semplici

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

con A, B due costanti da determinare. Si ha

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A + B}{(x+1)(x-2)}$$

e per l'identità dei polinomi l'equazione vale se e solo se

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases}$$

ovvero per $A = 1/3$ e $B = 2/3$. Sostituendo i fratti semplici nell'integrale da calcolare si deduce

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 - x - 2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{(x+1)}\,dx + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{(x-2)}\,dx = -\frac{1}{3}\log 2.$$

(b) Si procede mediante la sostituzione $y = \sqrt{2 - e^x}$ nell'integrale. In questo modo gli estremi di integrazione diventano 1 e 0, e inoltre $2 - y^2 = e^x$ e $-2y\,dy = e^x\,dx$. Sostituendo nell'integrale definito si ottiene

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^x} + e^x}\,dx = -2\int_1^0 \frac{y}{y + 2 - y^2}\,dy = -2\int_0^1 \frac{y}{y^2 - y - 2}\,dy$$

che è l'integrale definito calcolato al punto precedente (a). In conclusione

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^x} + e^x}\,dx = \frac{2}{3}\log 2.$$

Esercizio 6 (*7 punti*). Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{x^2} \log(1 + x^2) - x^2.$$

(a) Utilizzando gli sviluppi notevoli, determinare il polinomio di Taylor di f centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$.

(b) Determinare il valore del limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin^4 x}.$$

(a) Per $t \to 0$ si ha

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2), \qquad \log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

e dunque, per $x \to 0$,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4), \qquad \log(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} e^{x^2} \log(1 + x^2) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4 + o(x^4) = x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \end{aligned}$$

e dunque

$$f(x) = \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Ne segue che il polinomio di Taylor di f centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ è $P(x) = \frac{x^4}{2}$.
(b) Dal punto (a) si ha che $f(x) \sim \frac{x^4}{2}$ per $x \to 0$. Essendo invece $\sin^4 x = (\sin x)^4 \sim x^4$ si deduce che il limite vale $\frac{1}{2}$