Fisica 3 - Seconda parte a.a. 2020/21

Relatività Speciale

- Nella meccanica classica vale il principio di relatività:

  - le leggi fondamentali della meccanica sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali, che possono essere in moto relativo uniforme tra di loro (1)

- il moto è dunque soltanto relativo all'interno della classe dei ~~s.r.~~ sistemi di riferimento (S.R.) inerziali: non esiste un S.R. inerziale privilegiato
- Il ruolo privilegiato della classe dei S.R. inerziali verrà superato solo nella Relatività Generale
- Per fissare le idee, ci focalizziamo sulla meccanica di un punto materiale.

Si assume che esista un osservatore inerziale O - che può essere realizzato come un osservatore così distante da tutti gli altri corpi da non esserne influenzato, per il quale la legge fondamentale della dinamica è

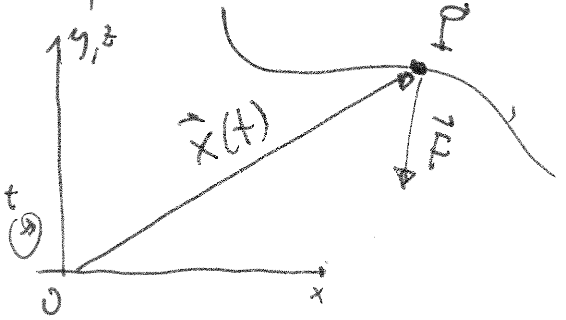
$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}} \qquad (2)$$

La formulazione (2) di questa legge presuppone che O abbia stabilito un suo S.R (che chiameremo K). Questo richiede

i) la scelta di origine e direzione degli assi cartesiani (e di un'unità di misura delle lunghezze)

iii) la scelta di origine (e unità di misura) del tempo

In questo modo l'osservatore O è in grado di attribuire le coordinate $\vec{x}(t)$ al punto materiale P misurando la posizione ed anche il tempo, tramite orologi in ogni punto, tutti in linea di principio sincronizzabili



• Il gruppo di invarianza della meccanica classica

Qual è la classe dei SR K' associati ad osservatori O' nei quali la legge fondamentale (2) rimane valida nella stessa forma?

In altre parole: qual è il gruppo di trasformazioni

$$t, \vec{x} \longrightarrow t'(t,\vec{x}),\ \vec{x}'(t,\vec{x}) \qquad (3)_r$$

che preservano l'equazione di Newton (2)?

• N.B. Facciamo l'assunzione che (anche se non c'è uno spazio assoluto) esista un tempo assoluto nel senso che esso fluisce nello stesso modo per tutti gli osservatori. Considereremo dunque come unica possibilità non banale il cambiamento di origine della scala temporale

$$t' = t - t_0 \qquad (4)_r$$

• Le trasformazioni $\vec{x}'(t,\vec{x})$ che cerchiamo devono lasciare l'accelerazione invariante, o trasformarla in modo omogeneo agendo nello stesso modo sulla forza $\vec{F}$.

- Tra queste vi sono ovviamente le <u>traslazioni spaziali</u>

$$\vec{x}' = \underset{\uparrow\,\text{costante}}{\vec{x} - \vec{x}_0} \qquad (5)_r$$

corrispondenti alla scelta da parte dell'osservatore O' di un SR K' con origine diversa, ma con gli assi allineati. La traslazione (5) lascia le distanze invariate, a fortiori lascia invariate le velocità e le accelerazioni:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{d(\vec{x} - \vec{x}_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} \qquad (6)_r$$

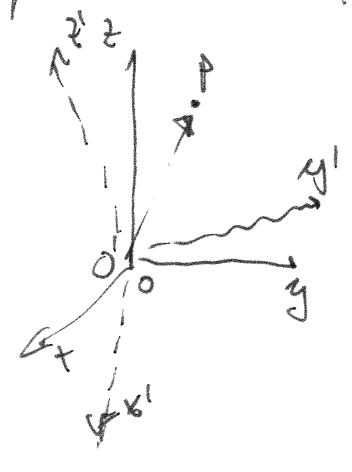
La forza è un vettore ma, non essendo cambiate le direzioni degli assi, mantiene le stesse componenti:

$$\vec{F}'(\vec{x}') = \vec{F}(\vec{x}) \qquad (7)_r$$

dunque

$$\vec{F}' = m\vec{a}' \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \qquad (8)_r$$

- Anche le <u>rotazioni rigide</u> degli assi cartesiani preservano l'eq. di Newton. Se l'osservatore O' ha scelto lo stesso origine ma ha ruotato gli assi abbiamo (per il vettore delle componenti)



$$\vec{x}' = R\vec{x} \qquad (9)_r$$

dove R è una matrice 3×3 ortogonale, cioè tale che

$$R^T R = \mathbb{1} \qquad (10)_r$$

(essa dipende da 3 parametri angolari, ad es. gli angoli di rotazioni successive nei 3 piani coordinati). L'eq. la condizione (10)r ci assicura che queste trasformazioni ruotano i vettori preservandone la norma:

$$|\vec{x}|^2 = \vec{x}^T\vec{x} \longrightarrow (R\vec{x})^T R\vec{x} = \vec{x}^T \underbrace{R^T R}_{=\mathbb{1}} x = \vec{x}^T\vec{x} = |\vec{x}|^2 \qquad (11)_r$$

Abbiamo, sotto queste trasformazioni,

$\vec{v}' = R\vec{v}$, $\vec{a}' = R\cdot\vec{a}$ e anche $\vec{F}'(\vec{x}') = R\vec{F}(\vec{x})$, dato che la forza è un vettore. L'eq. di Newton si trasforma covariantemente:

$$\begin{array}{ccc} \vec{F} - m\vec{a} & \rightarrow & R\cdot(\vec{F} - m\vec{a}) \\ \| & & \| \\ \vec{0} & \longrightarrow \text{implica} & \vec{0} \end{array} \qquad (12)_r$$

- Facciamo ora una ~~piccola~~ pausa per rimarcare alcune proprietà delle rotazioni, che ci saranno utili come analogia per le trasformazioni relativistiche.

- Il gruppo delle trasformazioni ortogonali in 3 dimensioni è indicato come $O(3)$. Le matrici ~~R ∈ O(3)~~ $R \in O(3)$ possono solo avere determinante ± 1:

$$\det(R^T R) = \det \mathbb{1} = 1 \Rightarrow \underbrace{(\det R^T)}_{\det R}(\det R) = 1 \Rightarrow (\det R)^2 = 1 \qquad (13)_r$$

- Il gruppo $O(3)$ è composto di due parti distinte (disconnesse)

  - $SO(3) \subset O(3)$ è il sottogruppo delle matrici ortogonali con $\det R = 1$ (rotazioni proprie)

  - le matrici ortogonali con $\det = -1$ si possono ottenere moltiplicando le per uno specifico elemento $\in O(3)$ con $\det = -1$, ad esempio $P = -\mathbb{1}$ che rappresenta la parità spaziale: $\vec{x} \to -\vec{x}$. Le matrici di $SO(3)$

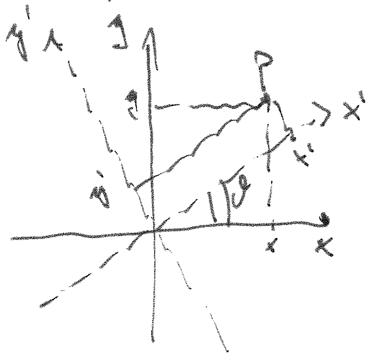
- Le trasformazioni ortogonali preservano la distanza tra due punti nello spazio. A livello infinitesimo, definendo

$$dl^2 = \sum_i (dx^i)^2 \underset{\text{convenzione di Einstein}}{\equiv} dx^i \delta_{ij} dx^j = d\vec{x}^T \mathbb{1} \cdot dx \qquad (14)_r$$

abbiamo

$$dl'^2 = (R \cdot d\vec{x})^T \mathbb{1} \cdot R d\vec{x} = d\vec{x}^T \underbrace{R^T \mathbb{1} R}_{=\mathbb{1}} d\vec{x} = dl^2 \qquad (15)_r$$

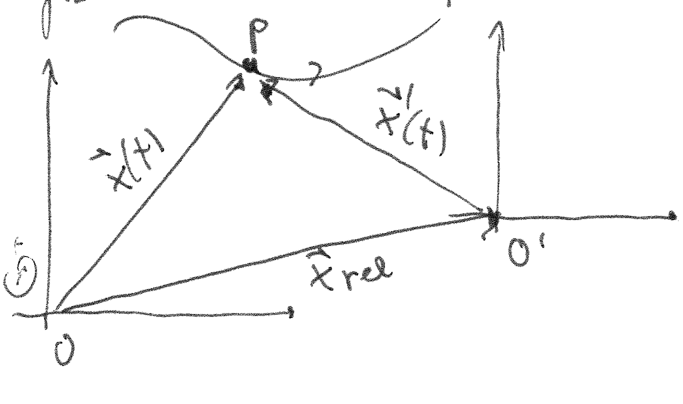
- Il sottogruppo delle rotazioni in un piano fissato, ad esempio il piano (xy), dipende da un solo angolo di rotazione e si ha



$$\begin{cases} x' = \cos\theta \, x - \sin\theta \, y \\ y' = \sin\theta \, x + \cos\theta \, y \end{cases} \Rightarrow R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (16)_r$$

- Oltre a traslazioni temporali, traslazioni spaziali e rotazioni, abbiamo ancora le <u>trasformazioni di Galileo</u> tra osservatori in moto relativo uniforme.

Consideriamo un osservatore O' in moto relativo rispetto all'osservatore inerziale O, con un sistema di riferimento K' che non ruota nel tempo.
Tenendo conto della possibilità di effettuare traslazioni e rotazioni non si perde di generalità assumendo che gli assi coordinati siano allineati e le due origini coincidano al tempo $t = t' = 0$.



$$\vec{x}'(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_{rel}(t) \qquad (17)_r$$

(con $\vec{x}_{rel}(0) = \vec{0}$)

Da questo segue

$$\boxed{\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{rel}} \qquad (18)_r$$

cioè la legge di composizione delle velocità, e

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_{rel} \qquad (19)_r$$

. Se il moto relativo è uniforme, cioè

$$\vec{v}_{rel} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{rel} = \vec{0} \qquad (20)_r$$

si ha

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a}} \qquad (21)_r$$

Come in $(7)_r$, la forza resta uguale come vettore: $\vec{F}\,'(\vec{x}\,') = \vec{F}(\vec{x})$, per cui

$$\vec{F}\,' = m\vec{a}\,' \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a} \qquad (22)_r$$

Dunque le trasformazioni di Galileo

$$\boxed{\vec{x}\,' = \vec{x} - \underbrace{\vec{v}_{rel}}_{\text{costante}}\, t} \qquad (23)_r$$

preservano l'eq. di Newton. Notiamo che esse preservano la distanza spaziale tra due eventi (misurata allo stesso ~~istante~~ tempo):

$$d\vec{x}\,'\Big|_{dt=0} = d(\vec{x} - \vec{v}_{rel}\,t)\Big|_{dt=0} = d\vec{x} - \vec{v}_{rel}\,dt\Big|_{dt=0} = d\vec{x} \qquad (24)_r$$

$\Rightarrow dl^2 = (d\vec{x})^2\big|_{dt=0}$ è invariante.

. Sfruttando la possibilità di effettuare rotazioni, possiamo sempre scegliere la direzione del moto ~~consec~~ relativo come direzione dell'asse x. In tal caso le trasf di Galileo si riducono a

$$\begin{cases} x' = x - v_{rel}\, t \\ y' = y, \quad z' = z \end{cases} \qquad (25)_r$$

- In definitiva, il gruppo di invarianza delle leggi della meccanica classica è dato dalla composizione delle trasformazioni che abbiamo descritto:

$$\begin{aligned} &- \text{traslazione temporale (1 parametro: } t_0) \\ &- \quad \text{"} \quad \text{spaziale (3 parametri: } \vec{x}_0) \\ &- \text{rotazioni spaziali (3 parametri: angoli di rotazione)} \\ &- \text{trasformazioni di Galileo (3 parametri: } \vec{v}_{rel}) \end{aligned} \qquad (26)_r$$

Questo gruppo a 10 parametri è detto Gruppo di Galileo.

- Incompatibilità tra elettromagnetismo e trasformazioni di Galileo

Le leggi fondamentali dell'e.m, le equazioni di Maxwell, sono invarianti (o covarianti) per traslazioni temporali e spaziali (nel vuoto) (dove e altri) e per rotazioni, come è semplice vedere.
Non sono invece invarianti sotto le trasformazioni di Galileo.

- Ad esempio, consideriamo la componente x dell'equazione di Faraday (3):

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \qquad (27)_r$$

Sotto la trasformazione $(25)_r$ si ha (ricordiamo che $t' = t$)

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - v_{rel}\frac{\partial}{\partial x'} \qquad (28)_r$$

cosicché la $(27)_r$ diventa

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} - \underbrace{v_{rel}\frac{\partial B_x}{\partial x'}}_{\text{termine in più}} = 0 \qquad (29)_r$$

e non si riesce a trovare una trasformazione dei campi $\vec{E} \to \vec{E}'$, $\vec{B} \to \vec{B}'$ che consenta di riscriverla nella forma

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = 0 \qquad (30)_r$$

- L'inconsistenza delle eq. di Maxwell con le trasformazioni di Galileo emerge nel modo più ~~da~~ eclatante ~~nel~~ dal fatto che, nel vuoto, esse implicano che i campi e.m. soddisfano l'equazione delle onde con velocità di propagazione $c := (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$, vedi l'eq. (25) della parte di CEM.
- Per via della composizione galileiana delle velocità, eq. $(18)_r$, la velocità dell'onda c non può essere la medesima per tutti gli osservatori inerziali!
- In effetti, è facile vedere direttamente che l'equazione delle onde non è invariante per una trasformazione di Galileo
- Sotto le trasformazioni di Galileo $(25)_r$ si ha, oltre le $(28)_r$, anche

$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$, per cui

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \dots = \Delta' \qquad (31)_r$$

ma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v_{rel}\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v_{rel}\frac{\partial}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v_{rel}\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + v_{rel}^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \qquad (32)r$$

Pertanto l'equazione delle onde per una funzione u si trasforma come segue

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} - 2v_{rel}\frac{\partial^2 u'}{\partial t'\partial x'} + v_{rel}^2\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}\right) + \Delta' u'$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} + \Delta' u' + \underbrace{\frac{2v_{rel}}{c^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial t'\partial x'} - \frac{1}{c^2}v_{rel}^2\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}}_{\text{termini aggiuntivi.}} \qquad (33)r$$

- Il valore di c ~~misurato~~ che compare nelle equazioni di Maxwell è quello misurato da quale osservatore?

Negli usuali fenomeni ondulatori meccanici (onde in una corda tesa, onde sulla superficie del mare, ...) vi è un S.R. privilegiato, quello del mezzo in cui si propagano le onde. (Ma questo non è in contrasto col principio di relatività: un altro osservatore inerziale, usando le stesse leggi fondamentali ma tenendo conto del fatto che per lui il mezzo è in movimento arriverebbe ad una descrizione più complicata ma equivalente.

- L'ipotesi inizialmente accettata come naturale dalla maggior parte dei fisici fu che esistesse un mezzo ("l'etere") che permea tutto lo spazio e funga da mezzo di propagazione per le onde e-m (senza avere nessun effetto per i fenomeni meccanici non elettromagnetici)

- Questo violerebbe il principio di relatività, perché il SR dell'etere sarebbe un SR privilegiato.

- Se si prende per buona queste ipotesi, ogni osservatore O solidale con l'etere vede le onde e.m (tra cui la luce) propagarsi isotropicamente con velocità (in modulo) c

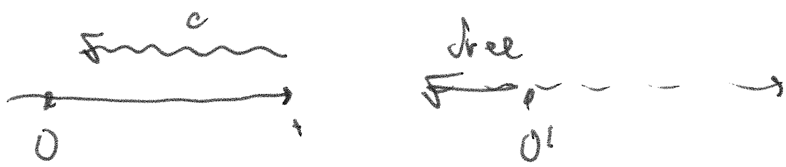
- Un osservatore O' in moto rispetto all'etere attribuirà ai raggi luminosi propagazione non isotropa con velocità in modulo diverse ~~nelle varie~~ a seconda delle direzioni. Ad esempio, se O' va verso O ($v_{rel}<0$) e osserva un raggio luminoso diretto verso di lui:

attribuisce al segnale luminoso la velocità (34)r

$$c' = c + v_{rel}$$

(se è valida la composizione galileiana delle velocità)

Se osserva un raggio luminoso che si allontana da lui:



gli attribuisce la velocità (35)r

$$c' = c - v_{rel}$$

- La verifica sperimentale di questi effetti è molto difficile dato che per tutti gli osservatori noti c' è molto vicino a $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Dunque per i SR che utilizzeremo abitualmente

$$v_{rel}/c \ll 1 \qquad (36)_r$$

- Ciononostante vi sono degli apparati, realizzati già a fine '800, che dovrebbero essere in grado di registrare tali effetti. Ad esempio, l'esperimento di Michelson & Morley che descriveremo a breve

- In realtà è mai stato rilevato alcun effetto dell'etere: si è sempre trovato che tutti gli osservatori inerziali attribuiscono isotropicamente una velocità di modulo c alla luce.

- L'esperimento di Michelson & Morley

Un modo per ottenere velocità relative v_{rel} alte è di sfruttare il moto di rivoluzione terrestre ~~attorno~~.

Approssimando l'orbita terrestre ad una circonferenza di raggio

$$R = 1\ u.a \sim 150 \times 10^{6}\ Km = 1.5 \times 10^{11}\ m \qquad (37)_r$$

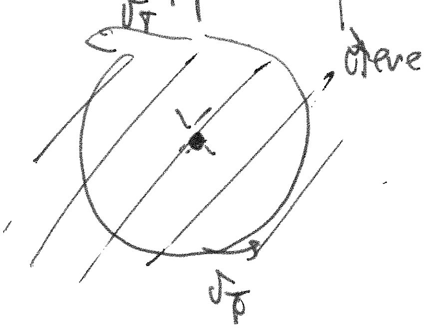
e di periodo

$$T = 1\,\text{anno} = 365 \times 24 \times 3600 \sim 3 \times 10^{7}\ s \qquad (38)_r$$

la velocità della Terra nel suo moto di rivoluzione è

$$v_T = \omega R = \frac{2\pi}{T} R = 2\pi \frac{1.5 \times 10^{11}\ m}{3 \times 10^{7}\ s} \sim 3 \times 10^{4}\ m/s \qquad (39)_r$$

- Non sappiamo quale sia il moto relativo tra il sole e l'etere. Tuttavia,



durante la rivoluzione, la Terra inevitabilmente andrà incontro all'etere, con velocità relativa

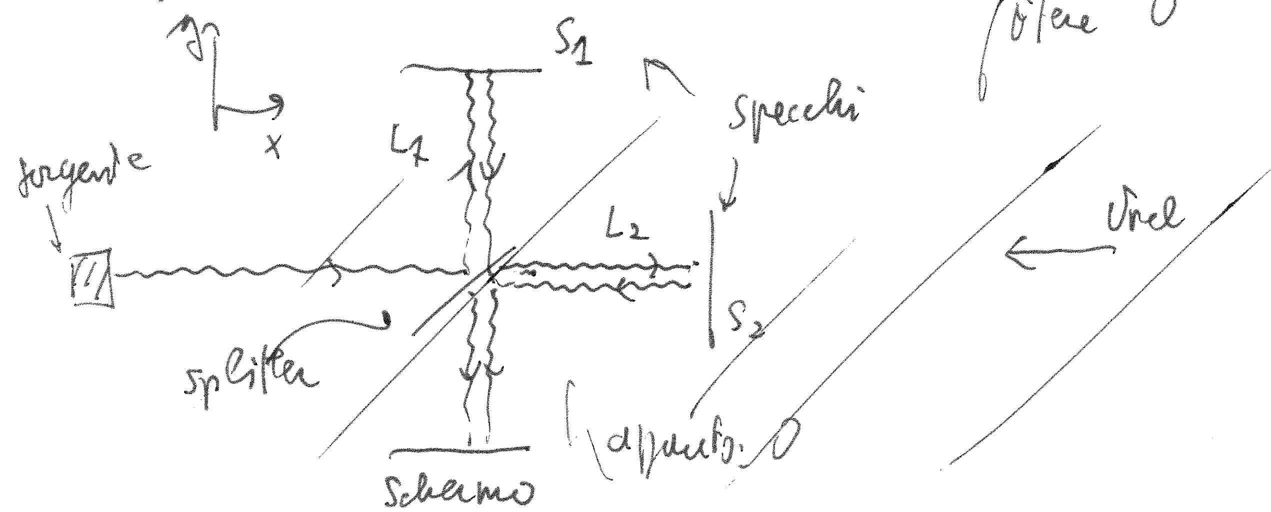
$$v_{rel} \simeq v_T$$

(e nei punti opposti dell'orbita farà il contrario). In tale situazione

$$\frac{v_{rel}}{c} \sim \frac{3\times10^4}{3\times10^8} \sim 10^{-4} \qquad (40)_r$$

che è piccolo ma non piccolissimo.

• Per mettere in luce questi possibili piccoli effetti di composizione delle velocità, M & M usarono un interferometro.



$(41)_r$

Supponiamo per semplicità che l'etere si muova, come in figura, verso sinistra con velocità v_{rel}. [In generale non è così ma si può tener conto dell'angolo tra la direzione di moto dell'etere e il braccio orizzontale dell'interferometro con semplici considerazioni trigonometriche]. Usando la composizione galileiana delle velocità

1) per il raggio (1) che, sia all'andata che al ritorno, deve muoversi in direzione y nel sistema del laboratorio, si deve avere $v_x = 0$. Siccome

$$0 = v_x = c_x - v_{rel} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{c_x}_{\text{nel SR dell'etere}} = v_{rel} \qquad (42)_r$$

Siccome nell'etere $|\vec{c}| = c$, avremo

(nel SR etere) $$c_y = \pm\sqrt{c^2 - v_{rel}^2} \quad \begin{cases} + & \text{all'andata} \\ - & \text{al ritorno} \end{cases} \qquad (43)_r$$

Dunque il tempo impiegato (che riceve due contributi uguali all'andata e al ritorno) è

$$t_1 = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2 - v_{rel}^2}} = \frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} \qquad (44)_r$$

2) Per il raggio (2)

* all'andata il segnale ha la velocità $v_+ = c - v_{rel}$
* al ritorno " $v_+ = -(c + v_{rel})$ $(45)_r$

Dunque esso impiega il tempo

$$t_2 = \frac{L_2}{c - v_{rel}} + \frac{L_2}{c + v_{rel}} = \frac{2L_2 c}{c^2 - v_{rel}^2} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{(1 - v_{rel}^2/c^2)} \qquad (46)_r$$

• La differenza di tempi di percorrenza è dunque (chiamando $\beta = v_{rel}/c$)

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L_2}{c}\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{2L_1}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \sim$$

$$\simeq \frac{2}{c}\left\{ L_2 (1 + \beta^2 + \dots) - L_1 (1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \dots) \right\} = \qquad (47)_r$$

$$= \frac{2}{c}(L_2 - L_1) + \frac{\beta^2}{c}(2L_2 - L_1) + \dots$$

Se l'interferometro ha $L_1 \simeq L_2 \overset{=L}{}$ (a meno di imperfezioni costruttive) allora

$$\Delta t = \frac{\beta L}{c} + \dots \qquad (48)_r$$

. Per l'apparato di M&M, $L = 11\,m$ e, se $v_{rel} \sim v_T$, abbiamo $\beta \sim 10^{-4}$ (vedi la $(40)_r$) e quindi

$$\Delta t \sim \frac{11}{3\times10^{8}} \cdot 10^{-8}\,s \sim 3\times10^{-16}\,s \qquad (49)_r$$

che è molto piccolo ma ~~[illegible]~~ rivelabile dall'interferometro.

Infatti, la ricombinazione dei due raggi luminosi modula l'ampiezza risultante, ~~[illegible]~~ interferenza dipendente dalla differenza di cammino ottico del raggio cammino (nel SR etere) tramite il fattore

$$\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(L_1 - L_2 - c\,\Delta t\right)\right] \qquad (50)_r$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce utilizzata.

- Ruotando di $90°$ i due bracci (di modo che L è ora quello orizzontale) Δt rimane uguale ma il fattore modulante diviene

$$\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(L_2 - L_1 - c\,\Delta t\right)\right] = \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(L_1 - L_2 + c\,\Delta t\right)\right] \qquad (51)_r$$

Le due espressioni sono diverse e l'effetto dovrebbe essere misurabile. Per M e M, si aveva $\lambda \sim 5\times10^{-7}\,m$ per cui

$$\frac{2\pi}{\lambda}\,c\,\Delta t \sim \frac{2\pi}{5\times10^{-7}} \cdot 3\times10^{8} \cdot 3\times10^{-16} \sim 0.9 \qquad (52)_r$$

- Tuttavia, pur ripetendo l'esperimento in svariati momenti, in differenti configurazioni e da parte di molti gruppi, non è mai stato visto alcun effetto.

- [Spiegazione di Fitzgerald e Lorentz: contrazione "meccanica" per effetti elettromagnetici del braccio in moto rispetto all'etere.
V. ~~B~~ Vedi Barone]