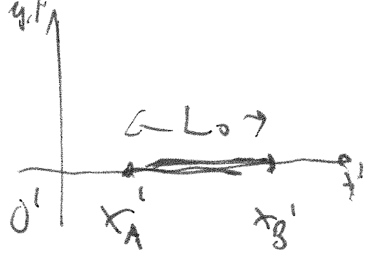
Contrazione delle lunghezze

Consideriamo un'asta rigida a riposo nel sistema O', allineata all'asse x, come in figura.



La sua lunghezza "a riposo" è

$$L_0 \equiv L' = x_B' - x_A' \qquad (90)_r$$

L'osservatore O, che vede l'asta muoversi verso dx con velocità v, deve misurare le posizioni dei due estremi nello stesso istante $t_A = t_B$ per valutare la lunghezza L della sbarra. Dalle TL $(87)_r$ abbiamo

$$\begin{cases} x_B' = \gamma(x_B - v t_B) = \gamma(x_B - v t) \\ x_A' = \gamma(x_A - v t_A) = \gamma(x_A - v t) \end{cases} \qquad (91)_r$$

e quindi

$$L_0 = x_B' - x_A' = \gamma(x_B - \cancel{vt} - x_A + \cancel{vt}) = \gamma L \,. \qquad (92)_r$$

Si ha dunque, nel SR O che vede la sbarra muoversi con velocità v, una contrazione della lunghezza della sbarra stessa:

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\, L_0} \qquad (93)_r$$

- le dimensioni $\perp$ al moto non si contraggono, per cui il volume di un oggetto si contrae dello stesso fattore:

$$\boxed{V = \frac{V_0}{\gamma}} \qquad (94)_r$$

e le densità vengono moltiplicate per γ.

• Applicazione: sciami di muoni cosmici

I muoni (μ^-) sono particelle elementari di massa $\sim 200\, m_e$ (dove m_e è la massa dell'elettrone) che decadono secondo la reazione

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \qquad (95)_r$$

neutrino muonico — antineutrino

con una vita media nel SR in cui sono a riposo pari a

$$\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}\ s \qquad (96)_r$$

Ciò significa che se al tempo $t=0$ vi sono n_0 muoni, al tempo $t>0$ ne rimangono

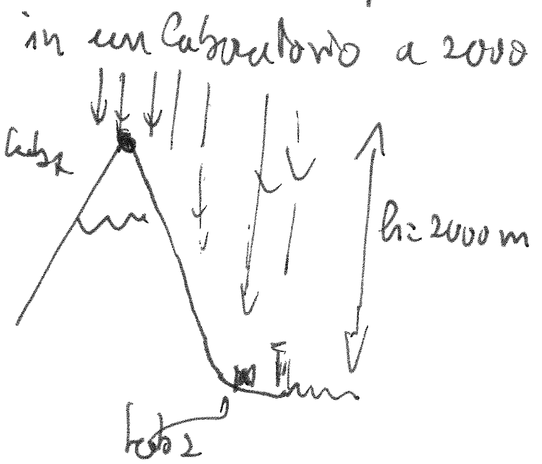
$$n(t) = n_0\, e^{-t/\tau_0} \qquad (97)_r$$

Dunque il loro numero $n(t)$ decade dunque rapidamente:

$$n(\tau_0) = \frac{n_0}{e} \sim \frac{n_0}{3}$$

$$n(3\tau_0) = \frac{n_0}{e^3} \sim \frac{n_0}{20} \sim 5\% \text{ di } n_0 \qquad (98)_r$$

Sono stati svolti esperimenti in cui si misura il flusso di muoni cosmici in un laboratorio a 2000 m sul livello del mare e uno a livello del mare



• I muoni della radiazione cosmica hanno una velocità (nel SR Terra) molto vicina a c:

$$v = 0.995\, c \qquad (99)_r$$

quindi percorrono la distanza aggiuntiva tra i due laboratori h in

$$\Delta t = \frac{h}{v} = \frac{2000\ m}{0.995 \times 3 \times 10^{8}\ m/s} \sim 0.7 \times 10^{-6}\ s \qquad (100)_r$$

- Se non vi fosse la dilatazione dei tempi, la vita media dei muoni sarebbe τ_0 anche nel SR terrestre. Si avrebbe allora

$$\frac{\Delta t}{\tau_0} = \frac{0.7 \times 10^{-6}}{2.2 \times 10^{-6}} \sim 3 \qquad (101)_r$$

per cui il flusso atteso a livello mare sarebbe

$$n_{mare} = n_{2000} \times e^{-3} \sim 5\% \text{ di } n_{2000} \qquad (102)_r$$

Questo è in fortissimo disaccordo coi dati sperimentali!!

- Tenendo conto della dilatazione dei tempi, la vita media nel SR terrestre è

$$\tau = \gamma\,\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(0.995)^2}}\,\tau_0 \sim 10\,\tau_0 \qquad (\beta = 0.995) \qquad (103)_r$$

$$\sim 2.2 \times 10^{-5}\ s$$

Pertanto

$$\frac{\Delta t}{\tau} \sim \frac{0.7 \times 10^{-6}}{2.2 \times 10^{-5}} \sim 0.3$$

e il numero atteso è

$$n_{mare} = n_{2000} \times e^{-0.3} \sim 75\% \text{ di } n_{2000} \qquad (103)_r$$

che è in accordo coi dati sperimentali!

- Lo stesso risultato può essere raggiunto lavorando nel SR dei muoni stessi.

In tal caso, i muoni vedono il dislivello h (analogo a una sbarra rigida nella discussione generale) contratto:

$$h' = \frac{h}{\gamma} = \frac{2000\,m}{10} = 200\,m \qquad (104)_r$$

Impiegando secondo i muoni sulla montagna, il muone impiega $\Delta t' = \frac{h'}{v} = \frac{200\,m}{0.995\times 3\times 10^{8}\,m/s} \sim 6.7\times 10^{-7}\,s \qquad (105)_r$

per raggiungerli. nel frattempo il loro numero è diventato

$$n_{mare} = n_{2000}\times e^{-\Delta t'/\tau_0} = n_{2000}\times e^{-\frac{6.7\times 10^{-7}\,s}{2.2\times 10^{-6}\,s}} = n_{2000}\,e^{-0.3}$$

misurati dal lab che li ha raggiunti

$$\sim 0.75\, n_{2000} \qquad (106)_r$$

in accordo con la $(103)_r$.

Composizione relativistica delle velocità

Dalle TL $(81)_r$, differenziando, abbiamo [NB qui v è la velocità relativa che entra nelle TL $\to \gamma = \gamma(v)$ ...]

$$\cancel{u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dt}{dt'} = \gamma\left(\frac{dx}{dt}-v\right)\cdot\frac{1}{\gamma(1}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = \gamma\left(\dfrac{dx}{dt} - v\right) \\[2ex] \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{dy}{dt}, \quad \dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{dz}{dt} \\[2ex] \dfrac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{dx}{dt}\right) \end{cases} \qquad (107)_r$$

Se x, y, z, t erano le coordinate di un punto materiale osservato nel SR O allora

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt} \qquad (108)_r$$

sono le componenti della sua velocità. Nel SR O' le velocità attribuite al punto sono

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx'}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dt'} = \gamma(u_x - v)\dfrac{1}{\gamma\left(1-\beta\frac{u_x}{c}\right)} = \dfrac{u_x - v}{1-\beta\frac{u_x}{c}} \\[2ex] u'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy'}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dt'} = u_y \dfrac{1}{\gamma\left(1-\beta\frac{u_x}{c}\right)} = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1-\beta\frac{u_x}{c}\right)} \\[2ex] u'_z = \dfrac{dz'}{dt'} = \quad \dots \quad = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1-\beta\frac{u_x}{c}\right)} \end{cases} \qquad (109)_r$$

~~Dun~~ Riassumendo:

$$\boxed{u'_x = \frac{u_x - v}{1-\beta\frac{u_x}{c}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1-\beta\frac{u_x}{c}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1-\beta\frac{u_x}{c}\right)}} \qquad (110)_r$$

⇒ Legge di composizione relativistica delle velocità

• Limite galileiano

Se $v \ll c$, $\beta \ll 1$, ($e\ u_x \ll c$) le trasformazioni $(110)_r$ si riducono a

$$\boxed{u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z} \qquad (111)_r$$

cioè alla composizione galileiana delle velocità.

• Costanza della velocità della luce

Le T.L. sono state costruite in modo che tutti gli osservatori attribuiscano la stessa velocità c alla luce. Controlliamo che ciò è consistentemente riprodotto dalle trasformazioni $(110)_r$.

. Supponiamo che l'osservatore O osservi un raggio luminoso diretto verso dx nella direzione x: gli attribuirà dunque

$$u_x = c, \quad u_y = u_z = 0 \qquad (112)_r$$

Per l'osservatore O', esso avrà

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{c-v}{1-\beta \frac{c}{c}} = \dfrac{c-v}{1-\frac{v}{c}} = c\,\dfrac{\cancel{c-v}}{\cancel{c-v}} = c \\ u'_y = 0 \\ u'_z = 0 \end{cases} \qquad (113)_r$$

• Supponiamo ora che il raggio luminoso viaggi, per O, in direzione generica; ovverosia che $|\vec{u}|^2 = c^2$. Dalla $(110)_r$ segue che

$$|\vec{u}'|^2 = \frac{1}{\left(1-\beta\frac{u_x}{c}\right)^2}\left\{(u_x - v)^2 + (1-\beta^2)\,u_y^2 + (1-\beta^2)\,u_z^2\right\} =$$

$$= \frac{c^2}{c^2 - 2v u_x + \beta^2 u_x^2}\left\{(1-\beta^2)\overbrace{(u_x^2+u_y^2+u_z^2)}^{=c^2} + \beta^2 u_x^2 - 2u_x v + v^2\right\}$$

$$= \frac{c^2}{c^2 - 2v u_x + \beta^2 u_x^2}\left\{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \beta^2 u_x^2 - 2u_x v + \cancel{v^2}\right\}$$

$$= c^2 \cdot \frac{\cancel{c^2 - 2u_x v + \beta^2 u_x^2}}{\cancel{c^2 - 2u_x v + \beta^2 u_x^2}} = c^2 \qquad (114)_r$$

- La composizione relativistica delle velocità si generalizza al caso in cui il moto relativo sia in una direzione generica $\vec{v}$
- In tal caso è sufficiente decomporre la velocità $\vec{u}$ nella sua parte parallela e trasversa rispetto a $\vec{v}$, ed applicare le (110)r. $\left(\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)$

$$\vec{u} = u_\parallel \hat{v} + \vec{u}_\perp \qquad (115)_r$$

con

$$u_\parallel = \vec{u}\cdot\hat{v} \quad , \quad \vec{u}_\perp = \vec{u} - u_\parallel \hat{v} \qquad (116)_r$$

Si avrà allora

$$\begin{cases} u'_\parallel = \dfrac{u_\parallel - v}{1 - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}} \\[2ex] \vec{u}'_\perp = \dfrac{\vec{u}_\perp}{\gamma\cdot\left(1 - \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)} \end{cases} \qquad (117)_r$$

~~Il gruppo di invarianza della Relatività Speciale~~

~~Cerchiamo ora di caratterizzare meglio il gruppo delle trasformazioni che preservano l'invariante relativistico Δs^2. Infatti abbiamo acquisito che gli osservatori inerziali per il principio della costanza della luce devono essere collegati in modo da preservare preservare l'annullarsi della di Δs^2:~~

$$\cancel{\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta \vec{x}^2 = 0 \Rightarrow \Delta s'^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta \vec{x}'^2 = 0} \qquad (118)_r$$

Il gruppo di invarianza della Relatività Speciale

- Per il principio della costanza della velocità della luce, la trasformazione tra due ~~osservatori~~ inerziali deve preservare l'annullarsi dell'invariante Δs^2 (vedi le eq. (64)r, (66)r):

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta \vec{x}^{\,2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta s'^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta \vec{x}'^2 \qquad (118)_r$$

- Siccome la trasformazione è lineare, tuttavia, essa preserva di conseguenza l'invariante stesso: si deve dunque avere

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2 \qquad (119)_r$$

- Sempre per la linearità, possiamo imporre questa condizione a livello infinitesimo (cioè per piccole trasformazioni). Consideriamo dunque

$$\boxed{ds^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^{\,2}} \qquad (120)_r$$

- Il gruppo ~~delle~~ di invarianza della R.S. è dunque formato dalle trasformazioni lineari che preservano ds^2;

- Utilizziamo la seguente notazione (già parzialmente introdotta)

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \qquad (121)$$

È comune usare indici greci di metà alfabeto per indicare queste ~~4~~ direzioni spazio-temporali, e scrivere dunque x^μ $(\mu = 0,1,2,3)$.

L'invariante ds^2 si può ~~dunque~~ allora esprimere come

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad (122)_r$$

con

$$\boxed{\eta_{00}=-1, \quad \eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=1, \quad \eta_{\mu\nu}=0 \text{ se } \mu\neq\nu} \qquad (123)_r$$

Infatti il membro di ds della $(122)_r$ vale

$$\begin{aligned}
&\eta_{00}\,dx^0dx^0 + \cancel{\eta_{01}}\,dx^0dx^1 + \cancel{\eta_{02}}\,dx^0dx^2 + \cancel{\eta_{03}}\,dx^0dx^3 \\
&+\cancel{\eta_{10}\,dx^1dx^0} + \eta_{11}\,dx^1dx^1 + \cancel{\eta_{12}\,dx^1dx^2} + \cancel{\eta_{13}}\,dx^1dx^3 \\
&+\cancel{\eta_{20}\,dx^2dx^0} + \cancel{\eta_{21}}\,dx^2dx^1 + \eta_{22}\,dx^2dx^2 + \cancel{\eta_{23}}\,dx^2dx^3 \\
&+\cancel{\eta_{30}\,dx^3dx^0} + \cancel{\eta_{31}\,dx^3}dx^1 + \cancel{\eta_{32}}\,dx^3dx^2 + \eta_{33}\,dx^3dx^3
\end{aligned} \qquad (124)_r$$

e quindi coincide col membro di sinistra della $(123)_r$.

• ~~Possiamo organizzare $\eta_{\mu\nu}$ come le componenti di una matrice 4×4:~~

$$\cancel{\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad (125)_r$$

• Usando la convenzione di Einstein per gli indici ripetuti:

$$\sum_\mu a_\mu b^\mu \Rightarrow a_\mu b^\mu \qquad (125)_r$$

l'invariante ds^2 della $(122)_r$ si riscrive semplicemente come

$$\boxed{ds^2 = dx^\mu \eta_{\mu\nu}\, dx^\nu} \qquad (126)_r$$

• Possiamo anche usare una snella notazione matriciale, introducendo il quadrivettore colonna di componenti dx^μ:

$$dX = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \qquad (127)_r$$

e ~~la matrice~~ vedendo $\eta_{\mu\nu}$ come le componenti della matrice 4×4

$$\boxed{\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad (128)_r$$

~~In~~ così da scrivere semplicemente

$$\boxed{ds^2 = dx^T \eta\, dx} \qquad (129)_r$$

(N.B. i prodotti sono prodotti matriciali righe per colonne). Questa espressione è analoga all'espressione della distanza (inf.ma) euclidea in $\mathbb{R}^3$, vedi l'eq (14)$_r$:

$$dl^2 = d\vec{x}^T \cdot \mathbb{1} \cdot d\vec{x} \qquad (130)_r$$

• ~~Invarianza~~ ~~ds^2~~ Il ds^2 è banalmente ~~lascia~~ preservato dalle traslazioni spazio-temporali:

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_0 \\ t' = t - t_0 \end{cases} \qquad \vec{x}_0,\ t_0 \text{ costanti} \qquad (131)_r$$

che già erano simmetrie della meccanica classica, vedi la (4)$_r$ e (5)$_r$. Possiamo compattare le (131)$_r$ in notazione 4-dimensionale:

$$x'^\mu = x^\mu - x_0^\mu \qquad (132)_r$$

Siccome si ha

$$dx'^\mu = d(x^\mu - x_0^\mu) = dx^\mu \qquad (133)_r$$

(x_0^μ è costante), ovvero sia in notazione matriciale $dx' = dx$, l'invariante non cambia: $ds'^2 = ds^2$.

- Possiamo poi avere trasformazioni lineari omogenee

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu} \qquad (134)_r$$

ovverossia, in notazione matriciale

$$\boxed{x' = \Lambda x} \qquad (135)_r$$

con Λ una matrice costante. Si ha

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, dx^\nu, \qquad \text{equi cioè} \qquad dx' = \Lambda \cdot dx \qquad (136)_r$$

Pertanto

$$ds'^2 = dx'^T \cdot \eta \cdot dx' = (\Lambda dx)^T \cdot \eta \cdot dx = dx^T \Lambda^T \eta \Lambda \, dx \qquad (137)_r$$

La richiesta di invarianza $ds'^2 = ds^2$ diviene quindi

$$dx^T \Lambda^T \eta \Lambda \, dx = dx^T \eta \, dx \qquad (138)_r$$

cioè si traduce nella richiesta che la matrice Λ soddisfi la proprietà

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta}\,. \qquad (139)_r$$

cioè che preservi la matrice η. Esplicitando gli indici,

$$\Lambda \to \Lambda^\mu{}_\nu, \qquad (\Lambda^T)_\mu{}^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu, \qquad \eta \to \eta_{\mu\nu} \qquad (140)_r$$

la condizione $(139)_r$ si può scrivere come ~~$(\Lambda^T)_\mu{}^\rho \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma$~~

$$(\Lambda^T)_\mu{}^\rho \, \eta_{\rho\sigma} \, \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \qquad (141)_r$$

prodotti matriciali

ovverosia