Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 30 novembre 2012

Esercizio 1 (punti 6). (i) Determinare il raggio di convergenza ρ e l'intervallo (aperto) di convergenza I della serie di potenze reali

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^{n+1}}{n\,(\log 2)^n} x^n.$$

(ii) Studiare il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza I.

(iii) La serie di potenze converge uniformemente in qualche intervallo di $\mathbb{R}$? In particolare, converge uniformemente in $[0, \frac{1}{4}]$?

Soluzione i) Risulta che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n \log^n 2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n \log^n 2}} = \frac{2}{\log 2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}} = \frac{2}{\log 2}.$$

Dunque risulta che il raggio di convergenza è $\rho = \frac{\log 2}{2} = \log\sqrt{2}$. Pertanto, l'intervallo aperto di convergenza è $I = \left(-\frac{\log 2}{2}, \frac{\log 2}{2}\right)$.

(ii) Per $x = -\frac{\log 2}{2}$, si ottiene la serie a termini negativi

$$\sum_{n\geq 1} \frac{-2}{n} = -2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

che non converge.
Per $x = \frac{\log 2}{2}$ si ottiene la serie

$$2 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge semplicemente per il criterio di Leibniz ma non converge assolutamente.

(iii) Dal teorema sul cerchio di convergenza, si ottiene che la serie converge totalmente (e quindi anche uniformemente) su ogni intervallo della forma $(-\delta, \delta)$, con $0 < \delta < \frac{\log 2}{2}$; in particolare, c'e' convergenza uniforme in ogni intervallo della forma $[0, \delta]$ con $0 < \delta < \frac{\log 2}{2}$.

Essendo $1/4 < \frac{\log 2}{2}$ (infatti $\sqrt{e} < 2$) si trova che la serie di potenze converge uniformemente su $[0, 1/4]$.

Accenniamo al fatto che grazie al criterio di Abel (poichè la serie converge semplicemente in $x = \frac{\log 2}{2}$) si ottiene che la serie di potenze converge uniformemente su $[-\delta, \frac{\log 2}{2}]$ per ogni $\delta \in (0, \frac{\log 2}{2})$.

Esercizio 2 (punti 5). Si consideri il dominio chiuso e limitato $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dall'asse y e dai sostegni delle curve:

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}_1(t) &= (t, e^t(1-t)), \quad t \in [0,1] \\ \overline{\gamma}_2(t) &= (\cos t, \sin t), \quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, 0]. \end{aligned}$$

(i) Utilizzando la formula di Gauss-Green, calcolare l'area del dominio D.

(ii) Si consideri la superficie cartesiana S di equazione $z = x^2 + y$, con $(x, y) \in D$ (D è il dominio in (i)). Si calcoli l'integrale di superficie (di campo scalare)

$$\int_S \frac{2}{\sqrt{2 + 4x^2}}\, dS.$$

Soluzione Per la formula di Gauss-Green (essendo D un dominio regolare piano) si ha:

$$A = area(D) = \iint_D dxdy = \int_{+\partial D} -ydx.$$

Il bordo orientato positivamente $+\partial D$ e' l'unione del sostegno orientato di $\bar{\gamma}_2$, del sostegno orientato di $-\bar{\gamma}_1$ ($-\bar{\gamma}_1$ e' la curva opposta di $\bar{\gamma}_1$, avente lo stesso sostegno ma verso di percorrenza opposto) e del sostegno orientato di $-\bar{\gamma}$, con $\bar{\gamma}(t) = (0, t)$, $t \in [-1, 1]$. Dunque

$$A = \int_{\bar{\gamma}_2} (-y)dx - \int_{\bar{\gamma}_1} (-y)dx - \int_{\bar{\gamma}} (-y)dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} (-\sin t)(-\sin t)dt - \int_0^1 (-e^t(1-t))dt - \int_{-1}^{1} 0\, dt = \frac{\pi}{4} + e - 2.$$

(ii) Usando $\bar{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y)$ si trova:

$$\int_S \frac{2}{\sqrt{2+4x^2}}\, dS = \iint_D \frac{2}{\sqrt{2+4x^2}}\, |\bar{r}_x(x, y) \wedge \bar{r}_y(x, y)|\, dxdy$$

$$= \iint_D \frac{2}{\sqrt{2+4x^2}} \sqrt{1 + (4x^2+1)}\, dxdy = 2\, area(D) = \pi/2 + 2e - 4.$$

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri il campo vettoriale $\bar{F}_a$ (dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$)

$$\bar{F}_a(x, y, z) = \left(y\, e^{y^2} + axz,\ xe^{y^2} + 2xy^2 e^{y^2}, x^2 + 2z\right)$$

(i) Si determini il dominio D_a di $\bar{F}_a$.
(ii) Per quali valori di a, $\bar{F}_a$ e' conservativo in D_a?
(iii) Calcolare un potenziale di $\bar{F}_a$ (in corrispondenza a quei valori di a per cui e' conservativo).
(iv) In corrispondenza a quei valori di a per cui $\bar{F}_a$ e' conservativo si consideri il campo vettoriale $\bar{G}_a$:

$$\bar{G}_a(x, y, z) = \bar{F}_a(x, y, z) + \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 0\right).$$

Determinare il dominio di $\bar{G}_a$. $\bar{G}_a$ è conservativo nel suo dominio di definizione?

Soluzione. (i) $D_a = D = \mathbb{R}^3$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.
(ii) Poniamo $\bar{F}_a = (F_1, F_2, F_3)$. Si ha che $\bar{F}_a \in C^1(D)$. Verifichiamo le condizioni necessarie affinche' $\bar{F}_a$ sia conservativo in D; in ogni $(x, y, z) \in D$, deve valere:

$$\begin{cases} \partial_y F_1 = \partial_x F_2 \\ \partial_z F_1 = \partial_x F_3 \\ \partial_z F_2 = \partial_y F_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{y^2} + 2y^2 e^{y^2} = e^{y^2} + 2y^2 e^{y^2} \\ ax = 2x \\ 0 = 0 \end{cases} \iff a = 2.$$

Essendo D semplicemente connesso, le precedenti condizioni sono anche sufficienti; dunque $\bar{F}_2$ e' conservativo su D.
(iii) Posto $\bar{F}_2 = \bar{F}$, calcoliamo un potenziale $U : D \to \mathbb{R}$ per $\bar{F}$. Il potenziale U di $\bar{F} = \bar{F}_1$ deve soddisfare le seguenti tre condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = F_3. \end{cases}$$

Integrando la prima condizione rispetto a x otteniamo:

$$U(x,y,z) = \int (y\,e^{y^2} + 2xz)\;dx = xy\,e^{y^2} + x^2 z + C(y,z)$$

(con la funzione $C(y,z)$ da determinare). Dalla seconda condizione (derivando la U così ottenuta rispetto a y) abbiamo

$$xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2} + \partial_y C(y,z) = xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}$$

che implica $C(y,z) = h(z)$. Dalla terza condizione (derivando la U fin qui ottenuta rispetto a z) otteniamo:

$$x^2 + h'(z) = x^2 + 2z$$

che implica $h(z) = c + z^2$, $c \in \mathbb{R}$.
Il potenziale e'

$$U(x,y,z) = xye^{y^2} + x^2 z + z^2 + c. \tag{1}$$

(iv) Il dominio di $\bar{G}_a = \bar{G}$ e' $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z)\ :\ (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{asse\ z\}$ che e' connesso ma non e' semplicemente connesso. Il campo $\bar{G}$ e' irrotazionale su A ma questo non basta per poter concludere che e' conservativo su A.

Con il metodo delle integrazioni parziali si trova un potenziale V per $\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 0\right)$ su A:

$$V(x,y,z) = (x^2+y^2)^{-1/2}$$

(osserviamo anche che $\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$ e' radiale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

Dunque $\bar{G}$ e' conservativo su A e ammette potenziale $U+V$:

$$xye^{y^2} + x^2z + z^2 + (x^2+y^2)^{-1/2} + c.$$

Esercizio 4 (punti 8) Sia dato il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z) = (yz^2, 0, 0).$$

(i) Calcolare direttamente il flusso I del rotore di $\bar{F}$ attraverso il sostegno S della superficie

$$\bar{r}(u,v) = (u^2\cos v, u^2 \sin v, u), \quad (u,v) \in D,$$

con $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 2,\ \ 0 \le v \le 2\pi\}$ (versore normale indotto da $\bar{r}$).

(ii) Calcolare il flusso descritto al punto precedente utilizzando il Teorema di Stokes. Specificare quale e' il bordo intuitivo di S.

(iii) Il flusso attraverso S appena calcolato è un flusso entrante o uscente (rispetto al solido delimitato da S, dal piano $z = 1$ e dal piano $z = 2$)? Giustificare la risposta.

Soluzione:

(i) Si ha

$$rot\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2yz, -z^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Inoltre abbiamo che

$$\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u\cos v & 2u \sin v & 1 \\ -u^2 \sin v & u^2 \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u^2\cos v, -u^2 \sin v, 2u^3), \quad (u,v) \in D.$$

Il flusso I richiesto è quindi dato da

$$I = \iint_D (0, 2u^3 \sin v, -u^2) \cdot (-u^2 \cos v, -u^2 \sin v, 2u^3)\, du\, dv$$

$$= \iint_D (-2u^5 \sin^2 v - 2u^5)\, du\, dv = \int_1^2 du \int_0^{2\pi} (-2u^5 \sin^2 v - 2u^5) dv = -63\pi.$$

(ii) Il bordo di D orientato positivamente $(+\partial D)$ può essere parametrizzato dalle curve $\bar{\gamma}_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$, dove

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(t) &= (t, 0), \quad t \in [1, 2] \\ \bar{\gamma}_2(t) &= (2, t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ -\bar{\gamma}_3(t) &= (t, 2\pi), \quad t \in [1, 2] \\ -\bar{\gamma}_4(t) &= (1, t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Di conseguenza, il trasformato $\bar{r}(+\partial D)$ del bordo di D orientato positivamente è parametrizzato dalle curve $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$, dove

$$\begin{aligned} \bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) &= (t^2, 0, t), \quad t \in [1, 2] \\ \bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) &= (4 \cos t, 4 \sin t, 2), \quad t \in [0, 2\pi] \\ -\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3(t) &= (t^2, 0, t), \quad t \in [1, 2] \\ -\bar{r} \circ \bar{\gamma}_4(t) &= (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Utilizzando il Teorema di Stokes si ha che il flusso I è dato dall'integrale curvilineo $I = \int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s}$. Quindi, osservando che $-\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3 = \bar{r} \circ \bar{\gamma}_1$, si ha:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^4 \int_{\bar{r} \circ \bar{\gamma}_j} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} - \int_{-\bar{r} \circ \bar{\gamma}_4} \bar{F} \cdot d\bar{s} \\ &= \int_0^{2\pi} 16 \sin t \cdot (-4 \sin t) dt - \int_0^{2\pi} \sin t \cdot (-\sin t) dt = -63\pi. \end{aligned}$$

Il bordo intuitivo di S e' formato dalle circonferenze $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2$ (posta sul piano $z = 2$) e dalla circonferenza $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_4$ posta sul piano $z = 1$.

(iii) Si noti che la superficie puo' essere rappresentata come superficie cartesiana di equazione

$$z = (x^2 + y^2)^{1/4}, \quad (x, y) \in C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Dalla parametrizzazione della superficie abbiamo che il versore normale indotto e'

$$\bar{n}(u, v) = \frac{\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u, v)}{|\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u, v)|} = \frac{(-u^2 \cos v, -u^2 \sin v, 2u^3)}{\sqrt{u^4 + 16u^6}}, \quad (u, v) \in D.$$

Guardando le prime due componenti $\frac{-u^2 \cos v}{\sqrt{u^4+16u^6}}$ e $\frac{-u^2 \sin v}{\sqrt{u^4+16u^6}}$ si vede che $\bar{n}$ punta sempre verso l'interno del solido.

In alternativa si puo' osservare che vale sempre $\bar{n}(u, v) \cdot k = \frac{2u^3}{\sqrt{u^4+16u^6}} > 0$, $(u, v) \in D$ (il versore normale punta sempre verso l'alto); tenendo presente la concavita' della superficie $z = (x^2 + y^2)^{1/4}$ si ritrova che $\bar{n}$ punta verso l'interno del solido.

Il flusso $\int_S rot\bar{F} \cdot \bar{n}\, dS$ e' quindi calcolato nella direzione entrante.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]* Si studi la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\,\mathrm{sen}(n^x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(facoltativo: si studi la convergenza totale della serie di funzioni).

Soluzione. Per $x = 0$ si ottiene la serie a termini positivi

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\,\mathrm{sen}(1)$$

che diverge perchè il termine generale non tende a 0 per $n \to \infty$ e' cosi' non viene verificata la condizione necessaria per la convergenza semplice.

In modo simile per $x > 0$ non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza semplice. Dunque, per $x > 0$ la serie non converge neanche semplicemente.

Per $x < 0$, risulta che $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{sen}(n^x) = 0$. Inoltre, $\mathrm{sen}(n^x) > 0$, $n \geq 1$, quindi la serie e' a termini positivi per $x < 0$ e converge assolutamente se e solo se converge semplicemente. Osserviamo inoltre che per $x < 0$, si ha $\mathrm{sen}(n^x) \sim n^x$ per $n \to \infty$. Dunque,

$$\sqrt{n}\,\mathrm{sen}(n^x) \sim \frac{1}{n^{-x-\frac{1}{2}}}.$$

Per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, si conclude che la serie converge assolutamente se e solo se $-x - \frac{1}{2} > 1$ ovvero se e solo se $x < -\frac{3}{2}$. In conclusione la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente per $x < -\frac{3}{2}$. Non converge (neanche semplicemente) $x \geq -3/2$.

Per quanto riguarda la convergenza totale, osserviamo che, fissato $\delta < -\frac{3}{2}$, per ogni $x \in (-\infty, \delta]$,

$$|\sqrt{n}\,\mathrm{sen}(n^x)| \leq \sqrt{n}\,|n^x| \leq \sqrt{n}\,n^{\delta}.$$

Essendo $\sum_{n\geq 1} n^{1/2+\delta}$ convergente segue che c'e' convergenza totale in ogni intervallo $(-\infty, \delta]$ con $\delta < -3/2$.

Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 18 Dicembre 2012

Esercizio 1 (punti 5). Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{2x^2+3x-2}.$$

i) Si determini lo sviluppo in serie di McLaurin di f (ovvero si sviluppi f in serie di potenze centrate in 0).
ii) Si determinino il raggio e l'intervallo (aperto) di convergenza I della serie ottenuta.
iii) Si studi il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo I.

Soluzione. i) Osserviamo che $2x^2+3x-2 = (2x-1)(x+2)$. Possiamo allora decomporre $f(x)$ in fratti semplici e otteniamo per $|x| < 1/2$

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-2x} + \frac{3}{x+2}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-2x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{5}\left[\sum_{n\geq 0}(2x)^n + \frac{3}{2}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{x}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{5}\sum_{n\geq 0}\left[2^n + \frac{3(-1)^n}{2^{n+1}}\right]x^n.$$

ii) Osserviamo che il coefficiente $a_n = 2^n + \frac{3(-1)^n}{2^{n+1}}$ è positivo per ogni n e dunque

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + \frac{3(-1)^n}{2^{n+1}}} = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + \frac{3(-1)^n}{2^{2n+1}}} = 2.$$

Dunque il raggio di convergenza è $\rho = \frac{1}{2}$ e l'intervallo (aperto) di convergenza è $I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
iii) Per quanto riguarda il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo I, osserviamo che per $x = \frac{1}{2}$ si ottiene la serie

$$\sum_{n\geq 0}\left[1 + \frac{3(-1)^n}{2^{2n+1}}\right]$$

che non converge neanche semplicemente perchè il termine generale non tende a 0 per $n \to \infty$. Una situazione analoga si presenta per $x = -\frac{1}{2}$, per il quale valore si ottiene la serie

$$\sum_{n\geq 0}\left[(-1)^n + \frac{3}{2^{2n+1}}\right].$$

Dunque, la serie non converge in nessuno degli estremi di I.

Esercizio 2 (punti 5).
(i) Calcolare l'area della superficie cartesiana di equazione $z = 5 - 2x$,

$$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 2, \ \ y \geq 0\}.$$

(ii) Calcolare l'area della *superficie laterale* del solido

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 2, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq 5-2x\}.$$

Soluzione. (i) Posto $f(x,y) = 5-2x$, si deve calcolare

$$\iint_D \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1+4}\,dxdz = \pi\sqrt{5}.$$

(ii) ~~Le equazioni parametriche della superficie laterale del cilindroide sono~~

$$\cancel{\bar{r}(\theta,z) = (\sqrt{2}\cos\theta, y = \sqrt{2}\sin\theta, z),}$$

~~con $(\theta, z) \in E = \{(\theta, z) \,:\, \theta \in [0, \pi],\ 0 \le z \le 5 - 2\sqrt{2}\cos\theta\}$.~~

~~Risulta $\bar{r}_\theta = (-\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta, 0)$, $\bar{r}_z = (0, 0, 1)$. Pertanto, $\bar{r}_\theta \wedge \bar{r}_z = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 0)$. Di conseguenza, l'area della superficie laterale è~~

$$\cancel{\iint_S dS = \iint_E |\bar{r}_\theta \wedge \bar{r}_z| \, d\theta dz = \int_0^\pi d\theta \int_0^{5-2\sqrt{2}\cos\theta} \sqrt{2}\, dz = 5\sqrt{2}\pi.}$$

Lo svolgimento del punto (ii) è riportato a pag. 5.

Esercizio 3 (punti 8). Si consideri la forma differenziale ω_a, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$,

$$\omega_a(x, y) = \frac{-3a(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}\, dy,$$

(i) Determinare il dominio di ω_a

(ii) Determinare per quali valori di a ω_a e' chiusa in D.

(iii) In corrispondenza a quei valori di a per cui ω_a e' chiusa, calcolare l'integrale di ω_a sulla curva $\bar{\gamma}$, cioe'

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega_a,$$

dove $\bar{\gamma}$ e' la circonferenza $x^2 + (y-1)^2 = 16$, percorsa in senso antiorario; stabilire se esistono dei valori di a per i quali ω_a e' esatta in D.

(iv) Si consideri la curva $\bar{\phi}(t) = (2\sin t, 2\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Dopo aver disegnato il dominio piano delimitato dai sostegni di $\bar{\gamma}$ e $\bar{\phi}$, calcolare utilizzando la formula di Gauss-Green

$$\int_{\bar{\phi}} \omega_a$$

(in corrispondenza a quei valori di a per i quali ω_a e' chiusa).

(v) In corrispondenza a quei valori di a per i quali ω_a e' chiusa calcolare $\int_{\bar{\gamma}_1} \omega_a$ dove $\bar{\gamma}_1(t) = (\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione. (i) Si ha $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \neq (0, 1)\}$. Si noti che il dominio e' connesso ma non e' semplicemente connesso.

(ii) Poniamo $F_1(x, y) = \frac{-3a(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$, $F_2(x, y) = \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$, $(x, y) \in D$. Osserviamo che F_1 ed $F_2 \in C^1(D)$.

Per verificare che ω_a e' chiusa in D, occorre verificare che $\partial_y F_1(x, y) = \partial_x F_2(x, y)$, $(x, y) \in D$. Risulta:

$$\begin{cases} \partial_y F_1 & = \frac{3a(y-1)^2 - 3ax^2}{(x^2+(y-1)^2)^2} \\ \\ \partial_x F_2 & = \frac{-x^2+(y-1)^2}{(x^2+(y-1)^2)^2} \end{cases},$$

dunque ω_a e' chiusa in D se e solo se $a = 1/3$.

(iii) Posto $\omega_{1/3} = \omega$, risulta con $\bar{\gamma}(t) = (4\cos t, 4\sin t + 1)$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} I = \int_{\bar{\gamma}} \omega &= \int_{\bar{\gamma}} (F_1 dx + F_2 dy) \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{(-4\sin t)}{16}(-4\sin t) + \frac{4\cos t}{16}(4\cos t) \Big) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Poiche' $\bar{\gamma}$ e' una curva chiusa e regolare (con sostegno contenuto in D) e $I \neq 0$, ω non e' esatta in D.

Dunque per $a = 1/3$ la forma differenziale ω_a non e' esatta. Neanche per altri valori di a diversi da $1/3$ la forma puo' essere esatta poiche' per tali valori non e' neanche chiusa. Quindi non esistono valori di a per cui ω_a e' esatta.

(iv) Indichiamo con E il dominio delimitato dai sostegni di $\bar{\gamma}$ e $\bar{\phi}$. Si tratta di un dominio regolare piano (ammissibile per il teorema di Gauss-Green).

Essendo F_1 ed F_2 di classe C^1 su E (E non contiene la singolarita' $(0,1)$), possiamo applicare la formula di Gauss-Green su E e trovare

$$\int_{+\partial E} \omega = \iint_E \big(\partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y)\big) dxdy = 0.$$

Il bordo orientato positivamente $+\partial E$ e' l'unione del sostegno orientato di γ e del sostegno di ϕ (quest'ultimo e' percorso in senso *orario*). Dunque

$$0 = \int_{+\partial E} \omega = \int_{\bar{\gamma}} \omega + \int_{\bar{\phi}} \omega$$

da cui $\int_\phi \omega = -\int_{\bar{\gamma}} \omega = -2\pi$.

(v) Osserviamo subito che $\bar{\gamma}_1$ e' regolare ed ha il sostegno in D (e' una circonferenza di centro 0 e raggio 1/2).

Il sostegno di $\bar{\gamma}_1$ e' contenuto nel dominio semplicemente connesso $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2/3\}$ e ω (essendo chiusa) e' esatta in H (piu' precisamente la restrizione di ω ad H e' esatta). Dunque

$$\int_{\bar{\gamma}_1} \omega = 0.$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z) = \big(z^2 - 1 + y, 0, zy\big)\,.$$

(i) Si calcoli direttamente il flusso I del rotore di $\bar{F}$, attraverso il sostegno S della superficie $\bar{r}$,

$$\bar{r}(u,v) = \big(v - u, u^2, v\big)\,, \quad (u,v) \in D,$$

dove $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u^2 + v^2 \le 1,\ v \ge 0\}$ (il versore normale $\bar{n}$ alla superficie è quello indotto dalla parametrizzazione assegnata).
(ii) Si calcoli il precedente flusso I usando il teorema di Stokes.
(iii) Scrivere la parametrizzazione opposta per $\bar{r}$.

Soluzione.
(i) Si tratta di calcolare

$$I = \iint_S rot\bar{F} \cdot \bar{n}\, dS = \iint_D rot\bar{F}(\bar{r}(u,v)) \cdot \bar{r}_u \wedge \bar{r}_v\, dudv.$$

Risulta che $\bar{r}_u(u,v) = (-1, 2u, 0)$, $\bar{r}_v(u,v) = (1,0,1)$ e $\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u,v) = (2u, 1, -2u)$.

Calcoliamo rot$\bar{F}$.

$$rot\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 - 1 + y & 0 & zy \end{vmatrix} = (z, 2z, -1), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Perciò

$$I = \iint_D (v, 2v, -1) \cdot (2u, 1, -2u)\, dudv = \iint_D (2uv + 2v + 2u)\, dudv$$
$$= 2 \iint_D v\, dudv = 2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}.$$

(ii) Parametrizziamo il bordo orientato positivamente di D, $+\partial D$, attraverso le curve $\bar{\gamma}_i(t)$, $i = 1, 2$,

$$\bar{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi], \qquad \bar{\gamma}_2(t) = (t, 0),\ t \in [-1, 1].$$

Il trasformato di $+\partial D$ attraverso $\bar{r}$, cioè $\bar{r}(+\partial D)$, si parametrizza attraverso le curve $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_i(t)$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} &\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (\sin t - \cos t, \cos^2 t, \sin t), \quad [0, \pi], \\ &(\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2)(t) = (-t, t^2, 0), \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Ora calcoliamo il flusso di $\mathrm{rot}\bar{F}$ attraverso S, usando il teorema di Stokes, cioè calcoliamo l'integrale curvilineo $J = \int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s}$. Risulta:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{2} \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i} \bar{F} \cdot d\bar{s} \\ &= \int_0^{\pi} (0, 0, \cos^2 t \sin t) \cdot (-\cos t + \sin t, -2\cos t \sin t, \cos t) dt \\ &\quad + \int_{-1}^{1} (t^2 - 1, 0, 0) \cdot (-1, 2t, 0) dt \\ &= -\int_0^{\pi} \cos^3 t \sin t \, dt + \int_{-1}^{1} (1 - t^2) dt = 0 + 2\int_0^1 (1 - t^2) dt = 4/3. \end{aligned}$$

(iii) La parametrizzazione opposta e' $\bar{q} : D' \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{q}(u', v') = (u' - v', (v')^2, u'),$$

$(u', v') \in D' = \{(u', v') \ : \ (u')^2 + (v')^2 \le 1, \ \ u' \ge 0\}$.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n \ge 1} x^{2n} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}\, x^n}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R},\ x \ne 0.$$

Soluzione. Osserviamo che la serie non è definita in $x = 0$. Inoltre, poiché $\cos t \le 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la serie è a termini non negativi per ogni x fissato e non nullo. Dunque, essa converge semplicemente se e solo se converge assolutamente. Inoltre risulta che

$$x^{2n} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}x^n}\right)\right) \le x^{2n}.$$

Pertanto, per confronto con la serie geometrica $\sum_{n \ge 1} x^{2n}$ che converge per $|x| < 1$, anche la serie data converge per $|x| < 1, x \ne 0$. Per $|x| \ge 1$ si osserva che $\frac{1}{\sqrt{n}x^n} \to 0$ per $n \to \infty$ in quanto

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}x^n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}|x|^n} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Poiché $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$, risulta allora:

$$x^{2n} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}x^n}\right)\right) \sim x^{2n} \cdot \frac{1}{2nx^{2n}} = \frac{1}{2n}$$

e dunque la serie diverge per confronto con la serie armonica. In conclusione la serie converge assolutamente e semplicemente se e solo se $|x| < 1, x \ne 0$.

Svolgimento dell'esercizio 2, punto (ii)

Il solido C è così costruito: detto

$$\widetilde{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq 0\}$$

il semicilindro verticale la cui sezione è il semicerchio di raggio $\sqrt{2}$ di centro nell'origine e con $y \geq 0$, il solido C è la parte di $\widetilde{C}$ compresa tra i piani di equazioni $z = 0$ e $z = 5 - 2x$. Detta S la sua superficie laterale, si ha che

$$S = S_1 \cup S_2$$

dove

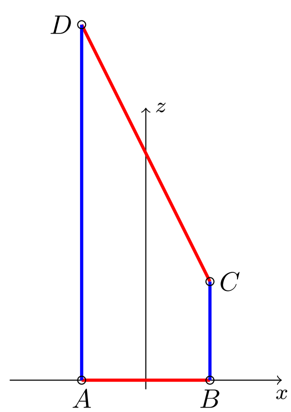
$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2,\ y = 0,\ 0 \leq z \leq 5 - 2x\}$$

è una parte di piano e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 2,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 5 - 2x\}$$

è una parte di superficie cilindrica. Più precisamente, S_1 è un trapezio contenuto nel piano $y = 0$ e delimitato tra le rette così definite:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ z = 5 - 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$



L'area di S_1 si calcola in modo elementare:

$$\text{area}(S_1) = \frac{\left(\overline{AD} + \overline{BC}\right)\,\overline{AB}}{2} = \frac{\left[(5 + 2\sqrt{2}) + (5 - 2\sqrt{2})\right] 2\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}\,.$$

L'area di S_2 si può calcolare sfruttando il significato geometrico dell'integrale curvilineo del primo tipo:

$$\text{area}(S_2) = \int_\gamma f\,ds \quad \text{essendo} \quad \gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) \quad (t \in [0, \pi]) \quad \text{e} \quad f(x, y) = 5 - 2x$$

e risulta allora

$$\text{area}(S_2) = \int_0^\pi f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt = \int_0^\pi (5 - 2\sqrt{2}\cos t)\sqrt{2}\,dt = 5\pi\sqrt{2}\,.$$

Oppure si introducono le equazioni parametriche per S_2

$$r(\theta, z) = \left(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, z\right) \quad \text{con} \quad (\theta, z) \in D = \{(\theta, z) \ : \ 0 \le \theta \le \pi,\, 0 \le z \le 5 - 2\sqrt{2}\cos\theta\}$$

e si calcola l'area mediante la definizione

$$\text{area}(S_2) = \int_D |r_\theta \wedge r_z| \, d\theta \, dz = \int_0^\pi \left(\int_0^{5-2\sqrt{2}\cos\theta} \sqrt{2} \, dz \right) d\theta = \int_0^\pi (5\sqrt{2} - 4\cos\theta) \, d\theta = 5\pi\sqrt{2}\,.$$

In conclusione $\text{area}(S) = 10\sqrt{2} + 5\pi\sqrt{2}$.

Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 9 Luglio 2013

Esercizio 1 (punti 6). Sia data la serie di potenze complesse

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n - in^{2n}}{(n!)^2} z^n.$$

i) Se ne determini il raggio di convergenza (puo' essere utile ricordare che $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ per $n\to\infty$).
ii) Si dica se la serie converge in $z = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.
iii) La serie converge uniformemente nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1/10\}$? (giustificare la risposta).

Soluzione. i) Detto $a_n = \dfrac{\cos n - in^{2n}}{n!^2}$, risulta $|a_n| = \dfrac{\sqrt{\cos^2 n + n^{4n}}}{n!^2}$. Pertanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\cos^2(n+1) + (n+1)^{4(n+1)}}}{(n+1)!^2} \cdot \frac{(n!)^2}{\sqrt{\cos^2 n + n^{4n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\cos^2(n+1) + (n+1)^{4(n+1)}}}{(n+1)^2(\sqrt{\cos^2 n + n^{4n}})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}(n+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\cos^2(n+1)}{(n+1)^{4(n+1)}} + 1}{\frac{\cos^2 n}{n^{4n}} + 1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2.
\end{aligned}$$

Pertanto, il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho = e^{-2}$.
Poiché $\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right| = \sqrt{\frac{5}{6}} > e^{-2}$, la serie non converge nel punto dato.
iii) Per il teorema del cerchio di convergenza la serie converge uniformemente in ogni cerchio di centro $z = 0$ e raggio $r < e^{-2}$. Poiché $\frac{1}{10} < e^{-2}$, allora la serie converge uniformemente nel cerchio $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1/10\}$.

Esercizio 2 (punti 5). Siano $f(x,y) = y^2$ e sia ∂E la frontiera dell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, \ \ x \geq 0, \ \ x \leq y\}.$$

(i) Disegnare ∂E e calcolare l'integrale curvilineo di *prima specie*

$$\int_{\partial E} f \, ds.$$

(ii) Indicare una possibile interpretazione fisica del precedente integrale curvilineo.

Soluzione.
(i) ∂E e' l'unione dei sostegni delle curve

$$\bar{\gamma}_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,2], \ \bar{\gamma}_2 : \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos t \\ y = 1 + \sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}], \quad \bar{\gamma}_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,2],$$

Pertanto,

$$\int_{\partial E} f \, ds = \int_{\bar{\gamma}_1} f \, ds + \int_{\bar{\gamma}_2} f \, ds + \int_{\bar{\gamma}_3} f \, ds.$$

$$= \int_0^2 t^2 dt + \sqrt{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1 + \sqrt{2}\sin t)^2 dt + \sqrt{2} \int_0^2 t^2 dt = \frac{8 + 11\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\pi.$$

(ii) L'integrale precedente indica, per esempio, la massa di un filo avente la forma di ∂E e densita' lineare di massa $f(\bar\gamma(t))$ dove $\bar\gamma(t)$ e' una parametrizzazione regolare a tratti e semplice di ∂E.

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri la forma differenziale ω

$$\omega(x,y) = \Big(\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\Big)dx + \Big(\frac{x}{x+y} + y^2\Big)dy.$$

(i) Determinare e disegnare il dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ di ω.

(ii) Verificare che la forma differenziale ω e' esatta in D;

(iii) Calcolare il potenziale di ω che si annulla in (1,1);

(iv) Calcolare l'integrale di linea $\int_{\bar\gamma} \omega_0$, dove $\bar\gamma(t) = (2+\cos t, 2+\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ e

$$\omega_0(x,y) = \Big(\log(x+y) + \frac{x}{x+y} + y\Big)dx + \Big(\frac{x}{x+y} + y^2\Big)dy.$$

Soluzione. (i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > -x\}$ e' aperto semplicemente connesso.

(ii) Essendo D semplicemente connesso per verificare che ω e' esatta e' sufficiente provare che e' chiusa.

Poniamo $F_1(x,y) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y}$, $F_2(x,y) = \frac{x}{x+y} + y^2$, $(x,y) \in D$. Osserviamo che F_1 ed $F_2 \in C^1(D)$. Per verificare che ω e' chiusa in D, occorre verificare che $\partial_y F_1(x,y) = \partial_x F_2(x,y)$, $(x,y) \in D$. Risulta:

$$\partial_y F_1 = \frac{y}{(x+y)^2}; \quad \partial_x F_2 = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad (x,y) \in D.$$

(iii) Determiniamo prima un potenziale $U : D \to \mathbb{R}$.

Deve valere $\partial_y U(x,y) = y^2 + \frac{x}{x+y}$. Integrando rispetto a y, si trova:

$$U(x,y) = x\log(x+y) + \frac{y^3}{3} + c(x)$$

dove $c(x)$ e' una funzione da determinare. Imponiamo che

$$U_x(x,y) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y}.$$

Segue che $\frac{d}{dx}c(x) = 0$, da cui $c(x) = c$ e' una costante. Per determinare il potenziale richiesto imponiamo

$$U(1,1) = \log 2 + \frac{1}{3} + c = 0;$$

otteniamo

$$U(x,y) = x\log(x+y) + \frac{y^3}{3} - \log 2 - \frac{1}{3}$$

(iv) Osserviamo che $\omega_0 = \omega + y dx$. Dunque il dominio di ω_0 e' ancora D. La curva γ e' regolare e chiusa con sostegno in D. Si ha

$$I = \int_{\bar\gamma} \omega_0 = \int_{\bar\gamma} \omega + \int_{\bar\gamma} y dx.$$

Poiche' $\int_{\bar\gamma} \omega = 0$ resta

$$I = \int_{\bar\gamma} y dx = -\int_0^{2\pi} (2+\sin t)\sin t dt = -\pi$$

(in alternativa si può applicare la formula di Gauss-Green e ottenere

$$I = \int_{\bar{\gamma}} \omega_0 = \int_{(x-2)^2+(y-2)^2 \le 1} (\partial_x F_2 - \partial_y F_1) dxdy = -\int_{(x-2)^2+(y-2)^2 \le 1} dxdy = -\pi).$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(x^2, x, z^2 y\right).$$

(i) Calcolare il flusso del rotore di $\bar{F}$, attraverso la porzione di superficie cartesiana S di equazione

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \text{con} \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \le 2\}$$

(orientata in modo che il versore normale indotto dalla parametrizzazione sia rivolto verso l'alto).
(ii) Si calcoli il precedente flusso, usando il teorema di Stokes (quindi calcolando un integrale curvilineo).
(iii) Usando il teorema di Stokes si calcoli l'integrale curvilineo

$$J = \int_{\bar{\phi}} \bar{F} \cdot \bar{d}s$$

dove $\bar{\phi}$ e' il sostegno della curva intersezione tra la superficie $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\}$ e la superfice cartesiana $z = \sqrt{x^2+y^2}$, sostegno percorso in senso *orario* se guardato dall'alto (con un osservatore posto lungo l'asse z).

Soluzione. (i) S e' parametrizzata da $\bar{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$, $(x,y) \in D$. Si tratta di calcolare

$$I = \iint_S rot\bar{F} \cdot \bar{n}\, dS = \iint_D rot\bar{F}(\bar{r}(x,y)) \cdot \bar{r}_x \wedge \bar{r}_y \, dxdy.$$

Risulta che $\bar{r}_x(x,y) = (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}})$, $\bar{r}_y(x,y) = (0, 1, \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}})$ e

$$\bar{r}_x \wedge \bar{r}_y(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = (\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1), \quad (x,y) \in D.$$

Calcoliamo rot$\bar{F}$.

$$rot\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & x & z^2 y \end{vmatrix} = (z^2, 0, 1), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Percio'

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (4 - x^2 - y^2, 0, 1) \cdot (\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1)\ dxdy \\ &= \iint_D (x\sqrt{4 - x^2 - y^2}\ + 1) dxdy = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{4 - r^2} dr + 2\pi \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

(ii) Parametrizziamo il bordo orientato positivamente di D, $+\partial D$, attraverso la curva

$$\bar{\gamma}_1(t) = \sqrt{2}(\cos t, \sin t), \ t \in [0, 2\pi],$$

Consideriamo ora il trasformato del bordo $+\partial D$ attraverso $\bar{r}$, cioe' $\bar{r}(+\partial D)$. Questo si parametrizza attraverso la curva $\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1(t)$,

$$\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ora calcoliamo il flusso di rot$\bar{F}$ usando il teorema di Stokes, cioe' calcoliamo l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\bar{r}(+\partial D)} \bar{F} \cdot d\bar{s}.$$

Risulta:

$$I = \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t, \sqrt{2}\cos t, 2\sqrt{2}\sin t) \cdot (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-2\sqrt{2}\cos^2 t \sin t + 2\cos^2 t)dt = 2\pi.$$

(iii) Si vede facilmente che la curva intersezione e'

$$-\bar{\phi}(t) = \bar{r}\circ\bar{\gamma}_1(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}), \quad t \in [0, 2\pi]$$

($\bar{\phi}$ e' percorsa in verso opposto rispetto a $\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1$). Dunque applicando il teorema di Stokes con la precedente superficie cartesiana si trova

$$J = \int_{\bar{\phi}} \bar{F} \cdot \bar{ds} = -\iint_D rot\bar{F}(\bar{r}(x,y)) \cdot \bar{r}_x \wedge \bar{r}_y \, dxdy. = -2\pi.$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\big(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\big)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(facoltativo: discutere la convergenza uniforme della serie).

Soluzione. Osserviamo che la serie è a termini positivi, dunque per essa la convergenza puntuale e quella assoluta sono equivalenti. Inoltre, dalle relazioni asintotiche note si ha:

$$\sqrt{n}\big(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\big)^x \sim \sqrt{n}\frac{1}{n^{2x}} = \frac{1}{n^{2x-\frac{1}{2}}}.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie converge puntualmente se e solo se converge puntualmente la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2x-\frac{1}{2}}},$$

cioè se e solo se $2x - \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si osserva che la serie converge uniformemente su ogni intervallo della forma $[\delta, +\infty)$, con $\delta > \frac{3}{4}$. Infatti, per $n \geq 2$ risulta $0 < e^{\frac{1}{n^2}} - 1 < 1$ e dunque per $x > \delta$ si ha:

$$\sqrt{n}\big(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\big)^x \leq \sqrt{n}\big(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\big)^\delta \sim \frac{1}{n^{2\delta-\frac{1}{2}}}.$$

Poiché per $\delta > \frac{3}{4}$ la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2\delta-\frac{1}{2}}}$$

converge, allora la serie data converge uniformemente per il criterio di Weierstrass su $[\delta, +\infty)$.

Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 17 settembre 2013

Esercizio 1 (punti 6).

(i) Determinare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{3in}(n3^n i - 6^n)}{4^n i + n^2}(z-i)^n.$$

(ii) La serie converge in $z = \frac{1}{2}i$? (motivare la risposta)

(iii) La serie converge uniformemente in $D = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : x^2+(y-1)^2 < 1\}$? (motivare la risposta)

Soluzione.

(i) Posto $a_n = \frac{e^{3in}(n3^n i-6^n)}{4^n i+n^2}$ abbiamo che

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n^2 3^{2n} + 6^{2n}}}{\sqrt{4^{2n}+n^4}} \sim \frac{6^n}{4^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Utilizzando il criterio della radice, otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3/2.$$

da cui abbiamo che il raggio di convergenza è $2/3$.

(ii) Dal punto precedente e dai teoremi sulle serie di potenze complesse deduciamo che la serie converge per gli z tali che $|z-i| < 2/3$; poichè $|\frac{1}{2}i - i| = 1/2 < 2/3$ abbiamo che la serie converge (anche assolutamente) in $z = \frac{1}{2}i$.

(iii) La serie non puo' convergere uniformemente in D; infatti la serie data non converge (neanche semplicemente) negli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z-i| > 2/3$. Se consideriamo per esempio $z_0 = \frac{1}{4}i$ questo punto verifica $|z_0 - i| > 2/3$ e $z_0 \in D$.

Esercizio 2 (punti 5). Sia

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2+2y^2 \le z \le 4-2x^2-2y^2\}.$$

(i) Usando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale $\bar{F}(x,y,z) = (-x, z, 1)$ uscente dalla superficie ∂A bordo di A.
(ii) Calcolare direttamente il flusso uscente (senza usare il teorema della divergenza).

Soluzione. (i) Il flusso ϕ richiesto è dato da

$$\phi = \iiint_A \mathrm{div}\bar{F}\, dxdydz = \iiint_A (-1)\, dxdydz = -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} dxdy \int_{2(x^2+y^2)}^{4-2x^2-2y^2} dz$$

$$= -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} [4-2x^2-2y^2-2(x^2+y^2)]dxdy = -2\pi\int_0^1 (4-4r^2)rdr = -2\pi.$$

(ii) Il bordo di A e' dato dalle superfici cartesiane $z = 2x^2+2y^2$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$, e $z = 4-2x^2-2y^2$, $(x,y) \in D$.

Dunque usando le parametrizzazioni cartesiane standard si ottiene

$$\phi = \iint_D (-x, 4-2x^2-2y^2, 1)\cdot(4x,4y,1)dxdy - \int_D (-x, 2x^2+2y^2, 1)\cdot(-4x,-4y,1)dxdy$$

$$= \iint_D (-x, 4-2x^2-2y^2, 1)\cdot(4x,4y,1)dxdy + \int_D (-x, 2x^2+2y^2, 1)\cdot(4x,4y,-1)dxdy$$

$$= -\iint_D 8x^2 dxdy = -2\pi.$$

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(-\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}, -\frac{xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}, \cos z - \frac{xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}\right).$$

(i) Determinare il dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ di $\bar{F}$. D è connesso? D è semplicemente connesso?

(ii) Verificare che il campo $\bar{F}$ è conservativo in D calcolandone un potenziale.

(iii) Calcolare l'integrale curvilineo di seconda specie $\int_{\bar{\gamma}} \bar{F}\cdot d\bar{s}$, dove $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin^4 t, t)$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Soluzione. (i) Risulta $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \neq (0,0)\}$ ovvero D è $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse x. Pertanto D è connesso ma non semplicemente connesso.
(ii) Per determinare un potenziale U utilizziamo il metodo delle integrazioni parziali; si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}} \\ \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = \cos z - \frac{xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}} \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ricava che $U(x,y,z) = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \alpha(y,z)$. Sostituendo poi nella seconda equazione si ottiene $\frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,z) = 0$ da cui quindi segue che $\alpha(y,z) = \beta(z)$. Infine sostituendo l'espressione di U trovata nella terza equazione si ottiene $\beta'(z) = \cos z$ da cui segue che $\beta(z) = \sin z + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione, il campo $\bar{F}$ è conservativo e il suo generico potenziale $U : D \to \mathbb{R}$ è della forma

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \sin z + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(iii) Poiché $\bar{F}$ è conservativo in D e la curva $\bar{\gamma}(t)$ e regolare a tratti e ha il sostegno contenuto in D, risulta che

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{F}\cdot d\bar{s} = U(\bar{\gamma}(\pi)) - U(\bar{\gamma}(\pi/2)) = U(-1,0,\pi) - U(0,1,\pi/2) = -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{\pi} - 1.$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(x+y, z^2, x\right).$$

(i) Si calcoli il flusso del rotore di $\bar{F}$, attraverso il sostegno della superficie

$$\bar{r}(u,v) = (u+v^2, u^2, v), \qquad (u,v) \in D,$$

dove $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1, u \geq 0\}$ (versore normale indotto da $\bar{r}$).

(ii) Si calcoli il precedente flusso, usando il teorema di Stokes.
(iii) La superficie $\bar{r}$ è semplice?

Soluzione. (i) Il rotore di $\bar{F}$ è dato da

$$\text{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & z^2 & x \end{vmatrix} = (-2z, -1, -1).$$

Inoltre, essendo $\bar{r}_u(u,v) = (1, 2u, 0)$ e $\bar{r}_v(u,v) = (2v, 0, 1)$, risulta che

$$\bar{r}_u(u,v) \wedge \bar{r}_v(u,v) = (2u, -1, -4uv).$$

Pertanto il flusso I richiesto è dato da

$$I = \iint_D (-2v, -1, -1) \cdot (2u, -1, -4uv) dudv = \iint_D dudv = \text{area}(D) = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Utilizzando il teorema di Stokes, osserviamo che $+\partial D$ si parametrizza con $\bar{\gamma}_1(t)$ e $(-\bar{\gamma}_2)(t)$ dove

$$\bar{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\bar{\gamma}_2(t) = (0, t), \quad t \in [-1, 1].$$

Pertanto, per il teorema di Stokes, il flusso I è dato da:

$$I = \int_{\bar{r}(+\partial D)} \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1} \bar{F} \cdot \bar{ds} - \int_{-(\bar{r}\circ\bar{\gamma}_2)} \bar{F} \cdot \bar{ds}.$$

Osserviamo che

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (\cos t + \sin^2 t, \cos^2 t, \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

mentre

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) = (t^2, 0, t), \quad t \in [-1, 1].$$

Pertanto, osservando che gli integrali di funzioni dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine sono nulli si ottiene:

$$\int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1} \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1)(t) \cdot (\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1)'(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 t \sin t - \sin t + \cos t \sin t - 2\cos t \sin^3 t + \cos^2 t + \cos t \sin^2 t)\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \cos t \sin^2 t)\, dt = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}.$$

Inoltre,

$$\int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_2} \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_{-1}^{1} \bar{F}(\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2)(t) \cdot (r \circ \bar{\gamma}_2)'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (2t^3 + t^2)\, dt = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}.$$

Risulta dunque che $I = \frac{\pi}{2}$.
(iii) Dati due punti $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$ tali che $\bar{r}(u_1, v_1) = \bar{r}(u_2, v_2)$ risulta, eguagliando componente per componente,

$$\begin{cases} u_1 + v_1^2 = u_2 + v_2^2 \\ u_1^2 = u_2^2 \\ v_1 = v_2 \end{cases}.$$

Dalla seconda identità, poiché $u \geq 0$ su D, segue che $u_1 = u_2$, mentre dalla terza si ha che $v_1 = v_2$, pertanto $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Dunque, la superficie $\bar{r}$ è semplice.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]* Si studi la convergenza semplice e assoluta della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{3^n}{\log(n)\ (x-5)^n}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 5.$$

(è facoltativo lo studio della convergenza totale).

Soluzione. Studiamo subito la convergenza assoluta, ovvero studiamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n\geq 2} \frac{3^n}{\log(n)\,|x-5|^n}$$

dipendente da $x \neq 5$. Applicando il test della radice si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n}{\log(n)\,|x-5|^n}\right)^{1/n} = \frac{3}{|x-5|}.$$

Dunque c'e' convergenza assoluta se $|x-5| > 3$ ovvero $x \in (-\infty, 2) \cup (8, +\infty)$.

Invece se $|x-5| < 3$, non c'è convergenza neanche semplice.

Se $x = 8$ si trova

$$\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{1}{\log(n)}$$

La serie converge (solo semplicemente) per il criterio di Leibniz. Se $x = 2$ si trova $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log(n)}$ che non converge (questo segue dal criterio del confronto, poiche' $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log(n)}$ e' a termini positivi e vale $\frac{1/n}{1/\log(n)} \to 0$ per $n \to \infty$).

Si ha convergenza totale in $(-\infty, r)$ per $r < 2$ e in $(r, +\infty)$ se $r > 8$. Per verificare la convergenza totale in $(-\infty, r)$ osserviamo che

$$\sup_{x\in(-\infty,r)} \left\{\frac{3^n}{\log(n)\ |x-5|^n}\right\} = \sup_{y\in(-\infty,r-5)} \left\{\frac{3^n}{\log(n)\ |y|^n}\right\} \leq \frac{3^n}{\log(n)\ |r-5|^n}, \quad n \geq 1,$$

e $\sum_{n\geq 2} \frac{3^n}{\log(n)\ |r-5|^n}$ converge per il criterio della radice (essendo $r < 2$). In modo simile si prova la convergenza totale in $(r, +\infty)$ se $r > 8$.