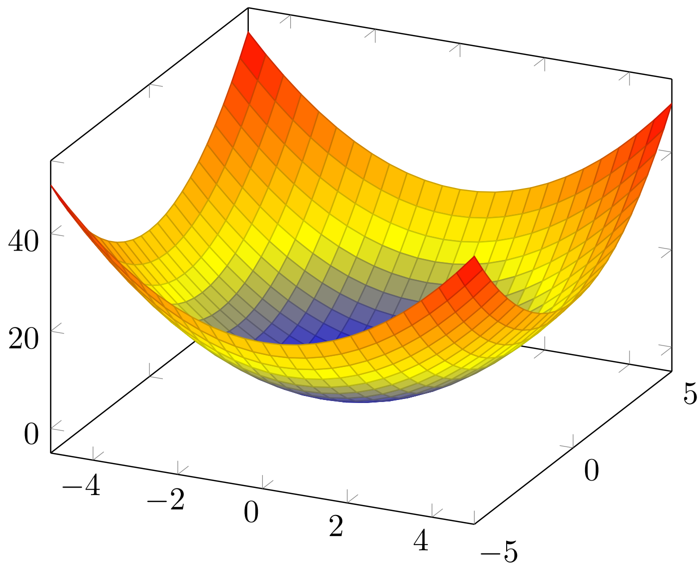
Fisica II

Riassunto da: *" - Mazzoldi, Nigro, Voci"*



Corso di Laurea in Fisica - Corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Settembre 2024

Indice

Elettrostatica

1.1 Campo elettrico

1.1.1 Dipolo elettrico

1.2 Flusso di campo elettrico

Definiamo flusso di un campo vettoriale $\vec{E}$ l'integrale

$$\Phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

dove $\hat{u}_n$ è il versore normale alla porzione infinitesima di superficie $d\Sigma$. Vediamo che il prodotto scalare fa sì che contribuisca solo la componente di campo vettoriale ortogonale alla superficie.

Mostriamo come il flusso *dipenda solo dall'angolo solido sotto il quale la superficie vede la carica*. Prima di tutto qualche osservazione geometrica:

$$\begin{aligned}
d\vartheta &= \frac{ds}{r} \qquad & ds' \cos\alpha = ds \quad &\rightarrow \quad d\vartheta = \frac{ds' \cos\alpha}{r} \\
d\Omega &= \frac{d\Sigma_0}{r^2} \qquad & d\Sigma \cos\alpha = d\Sigma_0 \quad &\rightarrow \quad d\Omega = \frac{d\Sigma \cos\alpha}{r^2}
\end{aligned}$$

Andiamo ora a calcolare il flusso attraverso $d\Sigma$:

$$\begin{aligned}
d\Phi &= \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} |\hat{u}_r||\hat{u}_n| \cos\alpha \, d\Sigma \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} |\hat{u}_r||\hat{u}_n| \, d\Sigma_0 \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, d\Sigma_0 \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \, d\Omega \quad \rightarrow \quad \Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Omega
\end{aligned}$$

Quindi se consideriamo una superficie chiusa si ha un angolo solido

$$d\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

e di conseguenza

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}} \tag{1.1}$$

Se la carica esterna il flusso è nullo (le cariche esterne contribuiscono solo al campo elettrico). Inoltre se consideriamo più cariche, o addirittura una distribuzione omogenea di cariche si hanno i seguenti valori di flusso:

$$\text{distribuzione finita di cariche:} \qquad \oint \vec{E}\cdot\hat{u}_n\,d\Sigma \;=\; \sum_i \frac{q_{i(int)}}{\varepsilon_0}$$

$$\text{distribuzione continua di cariche:} \qquad \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(x,y,z)\,d\tau$$

Rotore di un campo vettoriale

Viene definito rotore del campo elettrico $\vec{E}$ il prodotto vettoriale

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{u}_z$$

Questo rappresenta la capacità del campo elettrico di *formare vortici*, ovvero di generare linee di forza che si richiudono su loro stesse.

Poiché anche il rotore del campo elettrico è un campo vettoriale, è possibile definirne un suo flusso:

$$\Phi(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \int_\Sigma \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)\cdot\hat{u}_n\,d\Sigma$$

Teorema di Stokes

La circuitazione è uguale al flusso del rotore:

$$\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma_\gamma} \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)\cdot\hat{u}_n\,d\Sigma$$

In questo caso è espresso nel caso del campo elettrico dove si ha che la circuitazione è nulla qualunque sia la curva γ (a patto che sia chiusa). Allora il flusso del rotore è nullo qualunque sia la superficie ed è possibile solo se il rotore di $\vec{E}$ è nullo:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$$

Dire che il rotore è nullo equivale a dire che il capo elettrico è **irrotazionale**, ovvero che le sue linee di forza non possono chiudersi su loro stesse; il campo elettrico "non forma vortici".

L'annullarsi del rotore non è un fatto sorprendente. Sappiamo infatti che il rotore di un gradiente è sempre nullo e che il campo elettrostatico conservativo può essere scritto come gradiente della funzione scalare del potenziale elettrostatico V:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\left(-\vec{\nabla}\cdot V\right)$$

1.2.1 Discontinuità di carica