Analisi I

Riassunto da: ""

corso A

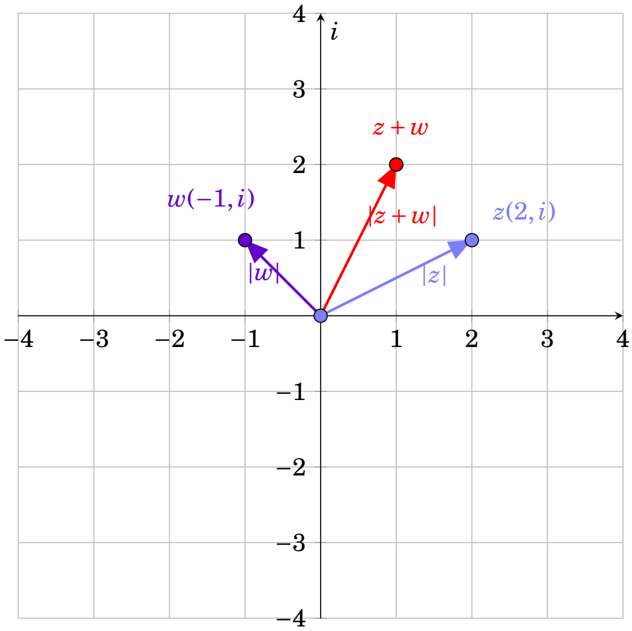
Università degli studi di Torino, Torino

settembre 2023

Indice

1 Numeri Complessi

L'insieme dei numeri reali può essere esteso con le proprietà delle operazioni di somma e prodotto valide in esso. L'estensione dà vita all'insieme dei numeri complessi che chiamiamo $\mathbb{C}$.



Questo ampliamento permette la risoluzione di qualsiasi equazione algebrica. Il Teorema Fondamentale dell'algebra afferma che qualsiasi polinomio a coefficienti reali o complessi di grado $n, n \in \mathbb{N}$ ammette almeno una radice complessa, da cui segue che un qualsiasi polinomio a coefficienti reali o complessi di grado n ammette sempre n radici complesse contate con le relative molteplicità.

I numeri complessi possono essere indicati con tre differenti notazioni:

1. Cartesiana: $z = (x + iy)$
2. Trigonometrica: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
3. Esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$

Ogni notazione ha i suoi vantaggi grafici o di calcolo, per questo preferiremo una notazione ad un'altra in casi specifici. In generale un numero complesso è formato dal una *parte reale* $x = Re(z)$ e da una *parte immaginaria* $y = Im(z)$, dal punto di vista algebrico $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ hanno le stesse proprietà anche se nel caso dei numeri complessi non è possibile definire un "ordine" compatibile con le operazioni.

1.1 Operazioni algebriche

Le operazioni di somma e differenza sono definite dalla semplice somma o differenza tra parti reali e parti immaginarie. Il prodotto tra due numeri complessi si comporta in modo simile al comportamento di seno e coseno nelle operazioni di somma:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Il reciproco di un numero complesso espresso come $\frac{1}{z}$ si può riscrivere moltiplicando sopra e sotto per il complesso coniugato di $z = x - iy$:

$$\frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

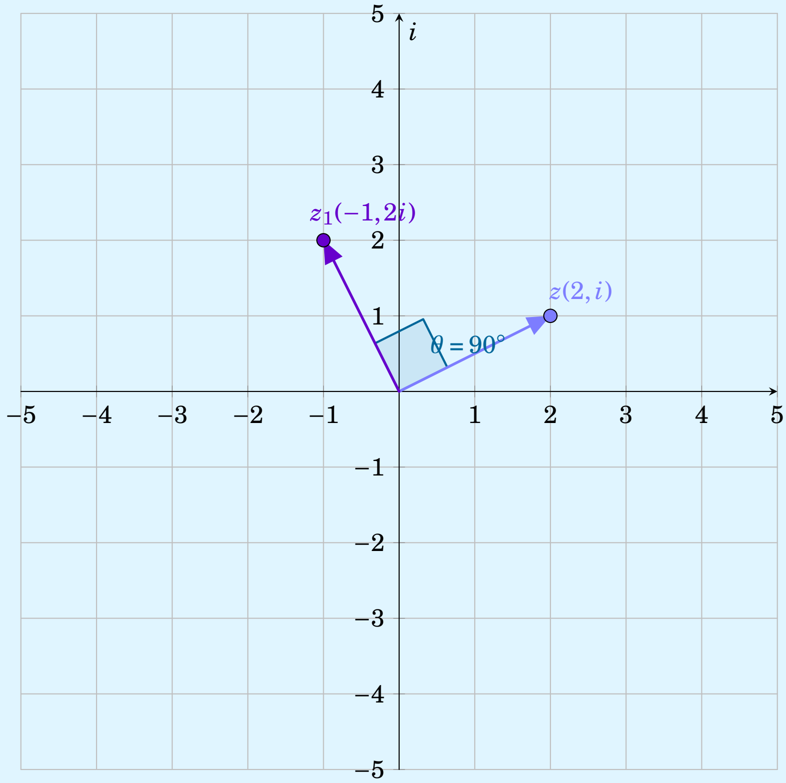
Nel caso di potenze di un numero complesso la notazione esponenziale è particolarmente funzionale. In generale z^n eleva alla n il modulo ρ e l'argomento:

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Un fatto interessante che spiega perché la parte immaginaria dei numeri complessi è situata a 90° in senso antiorario rispetto alla parte reale è che se moltiplichiamo un qualsiasi numero complesso per i, questo subirà una rotazione di 90° in senso antiorario.

es

Prendiamo $z = 2 + i$ e $w = i$: ora $z \cdot w = (2 + i)(i)$ sappiamo essere uguale a $-1 + 2i$.



Sappiamo anche che moltiplicare per i è equivalente a moltiplicare per un certo numero complesso $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$; da ciò notiamo che l'argomento θ è anche l'angolo di traslazione di un qualsiasi altro numero complesso l moltiplicato per w, ovvero per i.

Quindi possiamo decidere di che angolo traslare qualsiasi numero complesso scegliendo opportunamente l'argomento θ di un altro numero complesso da moltiplicare.

2 Logica

2.1 Proposizioni

Definiamo una *proposizione logica* è un enunciato del quale si può inequivocabilmente dire se è vero o falso. Attraverso le proposizioni logiche possiamo ottenere operazioni logiche espresse da simboli specifici detti *connettivi logici*:

$$\begin{array}{ll} \text{negazione logica} & \neg p(\text{"non p"}) \\ \text{congiunzione logica} & p \wedge q(\text{"p e q"}) \\ \text{disgiunzione logica} & p \vee q(\text{"p o q"}) \end{array}$$

In matematica molti enunciati sono del tipo "se p è vera, è vera anche q" in cui p è condizione sufficiente affinché q sia vera; in questo caso che q sia vera è condizione necessaria affinchè lo sia anche p. Questi tipi di enunciati sono detti implicazioni logiche:

$$\text{implicazione logica} \qquad p \Rightarrow q(\text{"p implica q"})$$

$$\text{biimplicazione logica} \qquad p \Longleftrightarrow q(\text{"p equivale a q"})$$

Vengono poi definite delle regole per *negare* le implicazioni o per scriverle in modo logicamente equivalente (nella loro forma *contronominale*):

$$\text{contronominale} \qquad (p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

2.2 Predicati

Un predicato logico è un enunciato dipendente da uno o più argomenti ed è indicato nella forma $p(x, \dots)$. Gli argomenti $x, \dots$ da cui dipende il predicato rendono quest'ultimo una *proposizione logica* e assume valori di verità Vero o Falso a seconda dei valori assegnati agli argomenti.

es

> Dato il predicato "$p(x)$ è un numero dispari" con $x \in \mathbb{N}$:
> $p(7)$ è Vero, $p(4)$ è Falso.

Dato un predicato $p(x)$ con $x \in \mathbb{A}$ è naturale chiedersi se l'enunciato $p(x)$ sia vero *per ogni* elemento di A. A questo fine introduciamo dei *quantificatori*:

$$\forall x, p(x) \qquad (\text{"per ogni x, è vero p(x)"})$$

$$\exists x, p(x) \qquad (\text{"esiste almeno un x, per cui è vero p(x)"})$$

$$\exists! x, p(x) \qquad (\text{"esiste, ed è unico, almeno un x, per cui è vero p(x)"})$$

Anche con in quantificatori sono definite le forme di negazione:

$$\neg(\forall x, p(x)) \Longleftrightarrow \exists x, \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x, p(x)) \Longleftrightarrow \forall x, \neg p(x)$$

2.3 Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proprietà che dipende da $n \geq n_0 \geq 0 \quad n, n_0 \in \mathbb{N}$. Ora supponiamo che siano verificate:

- $P(n_0)$ è Vero;
- $\forall n \geq n_0$, se $P(n)$ è vero, allora $P(n+1)$ è vero.

Allora $P(n)$ è vero per ogni $n \geq n_0$.

es

Sappiamo che $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dimostriamo che se e vero per n lo è anche per $n+1$ $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+n+1 &= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \end{aligned}$$

Quindi in generale il Principio di induzione si usa in questo modo: prima si controlla che $P(n_0)$ sia vero, poi si assume che sia vero anche per un generico n e, usando tale informazione, si dimostra che anche $P(n+1)$ è vero.

3 Numeri reali

L'insieme $\mathbb{R}$ è l'ambiente naturale dell'analisi I, nonostante questo non ne conosciamo la definizione rigorosa(!). Possiamo però riflettere sulle sue proprietà:

- Si dice che $\mathbb{R}$ sia un **campo ordinato**. Ovvero sono definite le due *operazioni di somma e prototto* ed è definita una *relazione d'ordine* $x \leq y$ compatibile con le operazioni (cosa non possibile nell'insieme $\mathbb{C}$).
- $\mathbb{R}$ è un insieme **completo**, al suo interno sono inclusi anche i numeri irrazionali.

3.1 Completezza di $\mathbb{R}$

Possiamo dire colloquialmente che $\mathbb{R}$ riempe la retta. Tramite una formulazione più rigorosa notiamo che, dato un certo intervallo, ogni valore successivo è maggiore di un valore nell'intervallo:

Maggioranti e minoranti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice che A è:

- *superiormente limitato se* $\exists b \in \mathbb{R} | x \leq b, \forall x \in A;$ $\longrightarrow$ esiste un **maggiorante** di A.
- inferiormente limitato se $\exists a \in \mathbb{R} | a \leq x, \forall x \in A;$$\longrightarrow$ esiste un **minorante** di A.
- limitato se $\exists a, b \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b, \forall x \in A;$

Maggiorante e minorante se esistono sicuramente non sono unici: a, b sono infatti ricercati in tutto $\mathbb{R}$; qualunque numero maggiore di un elemento in A è maggiorante e stessa cosa per il minorante.

Intervalli, massimi e minimi

- Gli intervalli $(-\infty, b)$ e $(-\infty, b]$ sono limitati superiormente;
- Gli intervalli $(b, +\infty)$ e $[b, +\infty)$ sono limitati inferiormente;
- Gli intervalli (a, b) , $[ab)$ (a, b) , $[ab]$ sono limitati.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato: Allora si dice che A ammette un massimo se $\exists x_M \in A | x \leq x_M, \forall x \in A$. La differenza con un maggiorante sta proprio nel fatto che il massimo è contenuto nell'intervallo; la stessa cosa si può dire per i minimi.

Esistono casi che però non ammettono massimi o minimi, per esempio l'insieme $\tilde{A} = \{\frac{1}{n} | n = 1, 2, \ldots\}$. Quest'ultimo ha come intervallo $[1, +\infty)$, ha quindi un massimo ma non ammette minimi. In questi casi quando $\neg\exists$ minimo o massimo sarebbe utile poter definire un minorante o maggiorante *ottimale* che vengono definiti rispettivamente come *il più grande dei minoranti e il più piccolo dei maggioranti*. Definiamo allora i concetti di ***estremo superiore*** ed ***estremo inferiore***.

3.2 Intorni

Un'altra "struttura" fondamentale di $\mathbb{R}$ è quealla che si basa sul concetto di **intorno**.

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si dice intorno di centro x_0 e raggio r l'intervallo $In(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

In questo contesto è utile definire anche un *sistema esteso dei numeri reali* che includa anche $+\infty$ e $+\infty$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

4 Limiti e continuità

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il concetto di *intorno*, ora vediamo come questo sia essenziale nella comprensione dei **limiti**.

Definizione: Limite

Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se:
$\forall$ intorno di $l, I(l)$ $\exists$ intorno di $x_0, I(x_0)$ tale che $\quad x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I(l)$

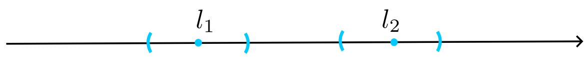
Adesso dobbiamo stabilire alcune proprietà del limite: intanto se esiste il limite *è unico*, possiamo dire infatti "il limite di f" e non "uno dei limiti di f".

Teorema di unicità del limite

Supponiamo che f ammetta limite l finito o infinito per x tendente a x_0. Allora f non ha altri limiti tendenti a x_0.

dimostrazione: unicità del limite

Supponiamo che esistano due limiti differenti di una funzione f tendente allo stesso valore x_0 e li chiamiamo l_1 e l_2 tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$. Inoltre prendiamo gli intorni di l_1 e di l_2 in modo che $l_1 \cap l_2 = \varnothing$.



Ora dalla definizione di limite data prima, possiamo scrivere:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathrm{I}(x_0) | x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \mathrm{I}(l_1)$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathrm{I}'(x_0) | x \in \mathrm{I}'(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \mathrm{I}(l_2)$

Dunque possiamo dire che x è sia in $\mathrm{I}(x_0)$ sia in $\mathrm{I}'(x_0)$:

$$x \in \left(\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{I}'(x_0)\right) \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{I}(l_1) \cap \mathrm{I}(l_2)$$

Assurdo poiché

$$\mathrm{I}(l_1) \cap \mathrm{I}(l_2) = \varnothing$$

Teorema di permanenza del segno

Supponiamo che

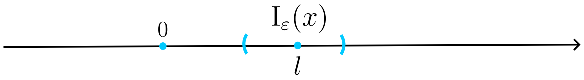
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \text{con } l > 0 \text{ o } l = +\infty.$$

Allora esiste un intorno di x_0

$$\mathrm{I}(x_0) \quad \text{t.c.} \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

dimostrazione

1) $l \in \mathbb{R}, l > 0$



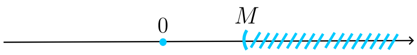
Prendo un intorno di raggio ε con $\varepsilon = \frac{l}{2}$: $\mathrm{I}_\varepsilon(l)$. Per definizione di limite

$$\exists \mathrm{I}(x_0) \quad \text{t.c.} \quad x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus x_0 \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{I}_\varepsilon(l)$$

Quindi in particolare

$$x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) > \frac{l}{2} > 0$$

2) $l = +\infty$



$$\forall M > 0 \quad \exists \mathrm{I}x_0 \qquad \text{t.c} \qquad x \in \mathrm{I}x_0 \setminus \{x_0\} \Longrightarrow f(x) > M > 0$$

Toerema di esistenza del limite per funzioni monotone

Data la funzione

$$f : I \to \mathbb{R}$$

Prendiamo l'intorno $\mathrm{I} = (a, +\infty), a \in \mathbb{R}$.
Se f è **monotona** su I, allora esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e

$$\lim_{x\to+\infty} = \begin{cases} \sup f(I) \text{ se f è crescente} \\ \inf f(I) \text{ se f è decrescente} \end{cases}$$

(la monotonia è **condizione sufficiente** per l'esistenza del limite)

dimostrazione

Supponiamo che f sia crescente con $l = \sup f(I)$.

$l = +\infty$) Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l = +\infty$$

cioè

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \qquad \text{t.c.} \quad x > k \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Poiché la funzione è crescente, vale:

$$x > k \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(k) > M$$

$l \in \mathbb{R}$) Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad x > k \quad \Longrightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Prendiamo un ε arbitrario maggiore di zero. Poiché $l - \varepsilon$ non è maggiorante di $f(x)$ esiste sicuramente un k tale che $f(k) > l - \varepsilon$. Poichè la funzione è crescente:

$$x > k \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(k) > l - \varepsilon$$

D'altro canto, poiché l è maggiorante di $f(I)$ sappiamo che la funzione sarà sempre minore di l: $f(x) \leq l \quad \forall x \in I$ e quindi possiamo affermare che

$$x > k \quad \Longrightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) \leq l < l + \varepsilon$$

Teorema del confronto 1

Date due funzioni f e g siano i limiti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \qquad\qquad x_0, l, m \in \mathbb{R}$$

Se esiste un intorno in cui f è minore di g:

$$\mathrm{I}(x_0) \text{ t.c.} \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

allora sappiamo che il valore a cui tende f è minore di quello a cui tende g:

$$l \leq m$$

dimostrazione

Prendiamo una terza funzione sicuramente positiva:

$$h(x) = g(x) - f(x) \qquad \to h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Allora sappiamo per il **teorema di permanenza del segno** che il limite di $h(x)$ è sicuramente ≥ 0 e per il **teorema fondamentale dell'algebra** che:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = m - l$$

quindi:

$$0 \leq \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = m - l$$

Teorema del confronto 2

Date due funzioni con stesso limite l :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

Se esiste un intorno $\mathrm{I}(x_0)$ per il quale

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

allora possiamo affermare che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

dimostrazione

Nel caso in cui $l = \pm\infty$ basta sapere che

$$f(x) \leq g(x) \to +\infty$$

$$g(x) \leq h(x) \to -\infty$$

Se invece $l \in \mathbb{R}$ cerchiamo altri intorni di x_0 per f e per h; per fare ciò prendiamo $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Longrightarrow \quad \exists \mathrm{I}'(x_0) \quad \text{t.c.} \quad \forall \mathrm{I}'(x_0) \setminus \{x_0\} \qquad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \quad \Longrightarrow \quad \exists \mathrm{I}''(x_0) \quad \text{t.c.} \quad \forall \mathrm{I}''(x_0) \setminus \{x_0\} \qquad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

Ora definiamo un terzo intorno che verifica le condizioni precedenti:

$$x \in (\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{I}'(x_0) \cap \mathrm{I}''(x_0)) \quad \Longrightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < h(x) < l + \varepsilon$$

5 Proprietà globali delle funzioni continue

Nei capitoli precedenti ci siamo occupati, mediante il concetto di limite, delle varie proprietà locali di una funzione, ossia proprietà che valgono in un intorno di un punto della retta reale. Ora è necessario parlare di alcune proprietà globali delle funzioni, valide su tutto l'intervallo.

Definizione: Zero di una funzione

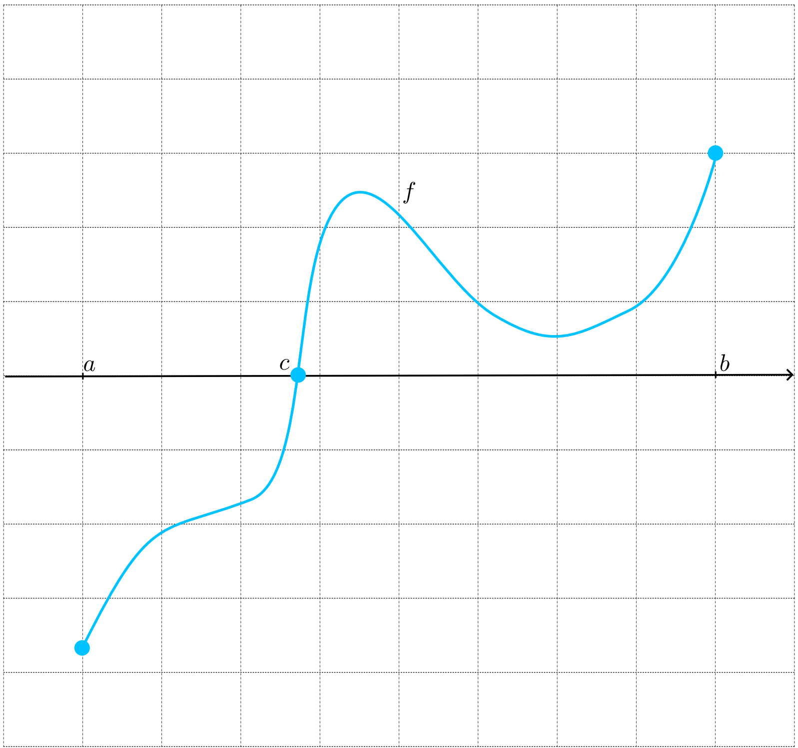
Data una funzione reale f chiamiamo **zero** di f ogni punto $x_0 \in \mathrm{dom} f$ in cui la funzione si annulla.

Teorema di esistenza degli zeri

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua* nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Se la funzione f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo, allora esiste uno zero di f nell'intervallo aperto (a,b); in formule:

$$f(a)f(b) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists c \in (a,b) : f(c) = 0.$$

Inoltre se f è strettamente monotona in $[a,b]$, allora lo zero è unico nell'intervallo.

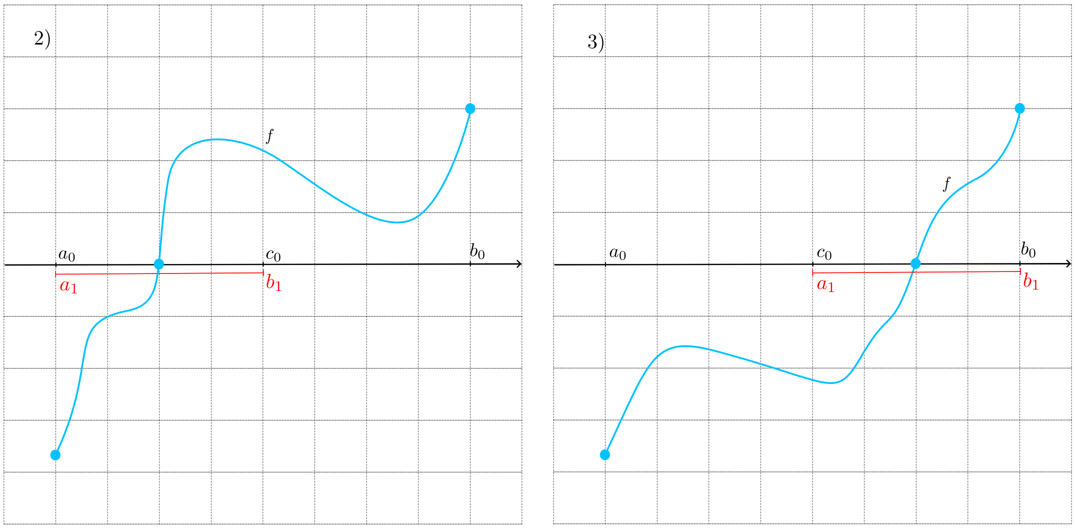


dimostrazione: teorema esistenza degli zeri

Supponiamo $f(a)$ negativo e $f(b)$ positivo: $f(a) < 0 < f(b)$.

Definiamo poi il punto medio c_0 e rinominiamo a e b : $a = a_0$, $b = b_0$, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
Una volta calcolato il punto medio abbiamo tre possibilità:

1. Se $f(c_0) = 0$ il teorema è dimostrato;
2. Se $f(c_0) > 0$ allora dovremo cercare lo zero *a sinistra* del punto medio; in questo caso poniamo quindi $a_0 = a_1$ e $c_0 = b_1$;
3. Se $f(c_0) < 0$ allora dovremo cercare lo zero *a destra* del punto medio; in questo caso poniamo $c_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$.



Nei casi 2) e 3) abbiamo costruito un intervallo $[a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0]$ t.c.

$$f(a_1) < 0 < f(b_1) \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Ora iteriamo il procedimento:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \text{e consideriamo} \quad f(c_1) = 0, > 0, < 0.$$

Iterando in questo modo possono verificarsi due casi:

1. In un numero finito di passi troviamo lo zero di f;
2. o troviamo una *successione* di intervalli $[a_n, b_n]$ t.c.

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n b_n].$$

$$\text{con} \quad f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

$$\text{e con} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Osservando come varia la posizione di a_n e di b_n notiamo che a_n o rimane dov'è o si sposta a destra (aumenta), invece b_n o rimane dov'è o si sposta a sinistra (diminuisce). Possiamo allora dire che le succesioni a_n e b_n sono rispettivamente monotona crescente e monotona decrescente, limitate rispettivamente in $(a \le a_n \le b)$ e in $(a \le b_n \le b)$.

Proprio perché le due successioni sono *monotone crescenti*, secondo il teorema di esistenza del limite per successioni monotone:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = c^- \in [a, b] \qquad \text{e} \qquad \exists \lim_{n\to\infty} b_n = c^+ \in [a, b].$$

Da ciò segue che:

$$c^+ - c^- = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0.$$

$$c^+ = c^- l =: c \in [a,b].$$

Poiché f è *continua*:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Infine ricordando che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e ricordando il corollario del teorema di permanenza del segno:

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \quad \Rightarrow \quad f(c) \leq o \leq f(c).$$

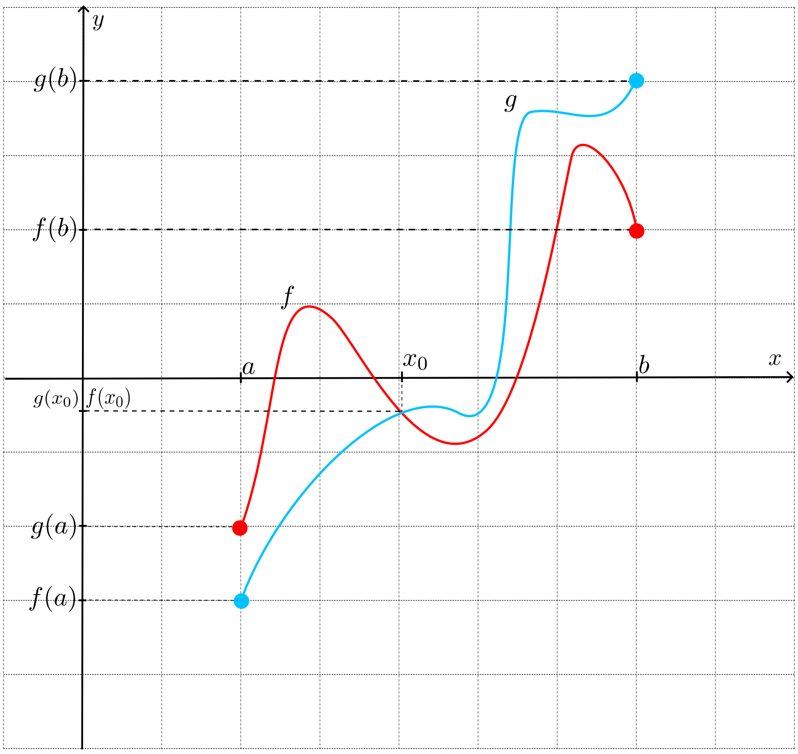
Dunque $f(c) = 0$**,** $c \in (a,b)$

Corollario 7.1 Definiamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esistono (finiti o infiniti) i limiti sinistro e destro di f agli estremi di I, e se tali limiti hanno segno discorde, allora esiste uno zero di f in I ; tale zero è unico se f è strettamente monotona in I. *In soldoni: se a sinistra la curva se ne va in basso verso $-\infty$ e a destra se ne va in alto verso $+\infty$ chiaramente dovrà intersecare l'asse x a un certo punto.*

Corollario 7.2 Siano f e g due funzioni continue in $[a,b]$. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ allora esiste almeno un punto in (a,b) tale che:

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Inoltre se f è strettamente crescente e g strettamente decrescente in $[a,b]$ il punto x_0 è unico. *In soldoni: presi due punti a e b sull'asse x e ricavati gli intervalli $(f(a), f(b))$ e $(g(a), g(b))$ sull'asse y se l'intervallo di g contiene quello di f, allora esiste sicuramente un punto x_0 in f contenente $f(x_0)$*

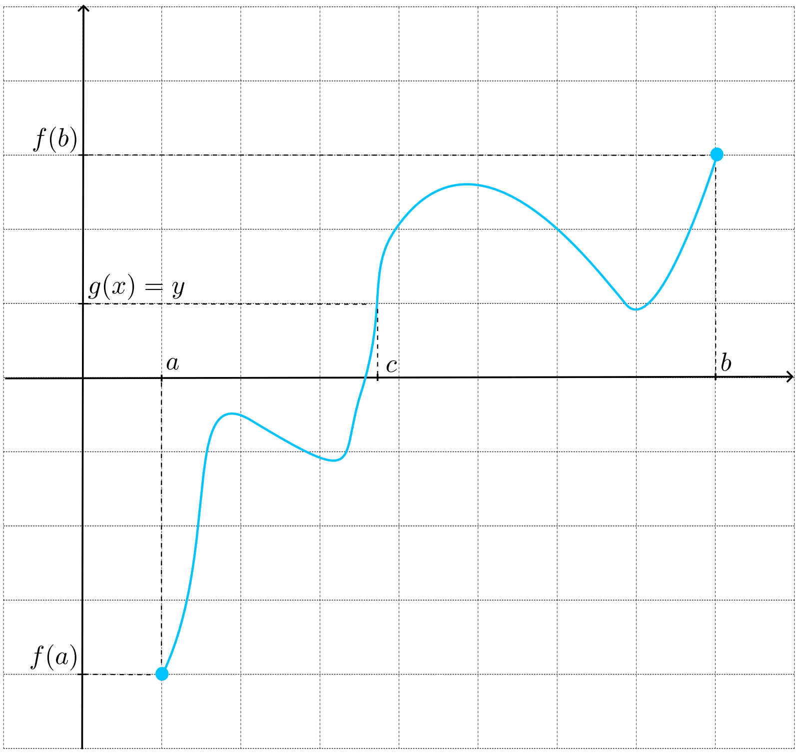


Teorema dei valori intermedi (0.9)

Il teorema si concentra sullo studio dell'immagine di una funzione continua definita su un intervallo della retta reale.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Ovvero:

$$\forall y \in (f(a), f(b)) \quad \exists c \in [a, b] : f(c) = y.$$



dimostrazione: teorema valori intermedi

Se $f(a) = f(b)$ non c'è niente da dimostrare.

Se invece supponiamo $f(a) < f(b)$ e definiamo la funzione costante $g(z) = y$ prendendo come y un qualsiasi punto compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, otteniamo subito le seguenti disuguaglianze:

$$f(a) < y < f(b).$$

$$f(a) < g(a) \qquad f(b) > g(b).$$

Notiamo la somiglianza al corollario 7.2. Secondo il corollario otteniamo in $[a, b]$ l'esistenza di un punto c tale che:

$$f(c) = g(c) = y.$$

Il teorema garantisce che l'immagine di $[a, b]$ contiene almeno l'intervallo chiuso di estremi $f(a)$ e $f(b)$:

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b]) \qquad \text{se} \quad f(a) \leq f(b).$$

La formula equivalente con $f(b) \leq f(a)$ è ovvia.

Corollario 7.3 Il teorema ha come conseguenza importante il fatto che una funzione continua "trasforma intervalli in intervalli": l'immagina di tale funzione $f(I)$ attraverso l'intervallo è ancora un intervallo.

dimostrazione: corollario 7.3

Presi $y_1 < y_2$ due punti di $f(I)$; allora esistono in I due punti x_1 e x_2 tali che:

$$f(x_1) = y_1 \qquad f(x_2) = y_2.$$

Supponiamo che $x_1 < x_2$ e consideriamo $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$; per il teorema dei valori intermedi **sappiamo che** f assume tutti i valori tra y_1 e y_2.

Teorema di Weierstrass

Se I è chiuso e limitato (cioè $I = [a,b]$ vale il teorema di Weierstrass.

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. ALlora $f([a,b])$ è un intervallo chiuso e limitato, cioè:

$$f([a,b]) = [m, M].$$

in cui m e M sono massimo e minimo. Quindi f assume valore massimo, valore minimo e tutti i valori intermedi.

6 Derivabilità

Teorema di dubbia derivabilità

Data una funzione continua nell'intervallo I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad I \subset \mathbb{R}$$

- Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = l$ allora $\exists f'(x_0) = l$;
- Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \{\pm\infty\}$ allora f non è derivabile in x_0;

Teorema di Fermat

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I,

$$\text{Se } x_0 \text{ punto di estremo per } f \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

Nota: non vale il viceversa poiché la derivata può annullarsi anche in flessi orizzontali.

dimostrazione

Supponiamo di avere x_0 punto di massimo locale, allora per definizione

$$\exists \mathrm{I}(x_0) \quad \text{t.c.} \quad f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{I}$$

Poiché x_0 è interno ad I esiste un intorno $\mathrm{J}(x_0)$ t.c. $\mathrm{J}(x_0) \subseteq \mathrm{I}$. Allora $\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{J}(x_0)$ è un intorno di x_0 e

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in (\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{J}(x_0)) \subseteq \mathrm{I}$$

Ne segue che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \le 0 & x > x_0, \quad x \in (\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{J}(x_0)) \\ \ge 0 & x < x_0, \quad x \in (\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{J}(x_0)) \end{cases}$$

Per il corollario del teorema di permanenza del segno (o per il teorema del confronto) si ha:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

Ma **poiché** f è derivabile in x_0:

$$f(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$$

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su tutto l'intervallo $[a.b]$ e derivabile su (a, b). Se

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in (a, b) \quad \text{t.c.} \quad f'(c) = 0$$

Vedremo come in realtà Rolle sia semplicemente un caso particolare del teoreme di Lagrange.

dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass sappiamo che l'immagine di una funzione in un intervallo chiuso e limitato è un intervallo chiuso e limitato:

$$f([a,b]) = [m,M]$$

Quindi esistono x_m e $x_M \in [a.b]$ t.c.

$$f(x_m) = m \quad \text{e} \quad f(x_M) = M$$

cioè x_m e x_M sono punti di minimo e massimo globale.

- Se x_m e x_M sono interni a $[a,b]$, allora per il teorema di Fermat $f' = 0$ in uno almeno uno dei due punti.
- Se x_m e x_M sono esterni, allora la funzione è costante e quindi vale $f' = 0 \forall c \in [a,b]$.

Teorema di Lagrange

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su tutto l'intervallo $[a.b]$ e derivabile su (a,b). Allora esiste una c che soddisfa

$$f'(c) = \frac{f'(b) - f(a)}{b-a}$$

Ovvero esiste un punto in cui la retta tangente alla curva è parallela alla retta passante per a e b. Infatti:

- $\frac{f'(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
- $f'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente a f in c.

dimostrazione

Definiamo una funzione ausiliaria sicuramente continua su $[a,b]$ e derivabile nell'intervallo (a,b) poiché differenza della funzione f che ha per ipotesi tali proprietà:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

Tramite la funzione ausiliaria si verifica facilmente che

$$h(a) = f(a) \qquad h(b) = f(b)$$

Quindi per il teorema di Rolle sappiamo che esiste una $c \in (a,b)$ che soddisfa $h'(c) = 0$. Ma

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad = 0$$

Quindi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Proposizione (caratterizazione dele funzioni a derivata nulla) Sia I$\subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{I} \quad \iff \quad f \text{ è costante su I}$$

dimostrazione

$\Longleftarrow$ Ovvia perché il rapporto incrementale è sempre zero quindi anche il limite.

$\Longrightarrow$ Proviamo che $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}(x_1 < x_2)$ si ha $f(x_1) = f(x_2)$. Usiamo il **teoreme di Lagrange**: esiste $c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Teorema di Cauchy

Siano f e g continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b). Si supponga che $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$, allora esiste sicuramente una

$$c \in (a,b) \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

7 Taylor

Lo sviluppo di Taylor di una funzione nell'intorno di un punto x_0 dell'asse reale, è la rappresentazioe come somma di un polinomio e di un infinitesimo di ordine superiore al grado dol polinomio. Con esso è possibile approssimare una funzione complessa (in un intorno abbastanza piccolo di x_0) a un polinomio, di cui è facile stabilire le proprietà qualitative.

Iniziamo supponendo una funzione continua in x_0 e costante (di grado 0), sappiamo che per $x \to x_0$:

$$f(x) = f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In altri termini possiamo approssimare la funzione f mediante un polinomio di grado 0 in modo che la differenza tra $f(x)$ e $T_{f_0,x_0}(x)$ sia un infinitesimo di x_0.

Supponiamo che la funzione sia anche derivabile:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

In generale posso trovare il polinomio $T_{n,x_0}(x)$ di grado $leqn$ tale che:

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

che è riscrivibile come:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Teorema: formula di Taylor con resto di Peano

Sia f :I$\to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0, allora posto

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)$$

risulta

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

Il polinomio $T_{n,x_0}(x)$ è **unico** e si chiamo **polinomio di Taylor di ordine n** (per $x_0 = 0$ si chiamo polinomio di Mac-Lawri)

dimostrazione

Per $n=0$ e $n=1$ già lo sappiamo. Dimostriamo che per

$$n=2 \quad \rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^2}=0$$

dove

$$T_{2,x_0}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

Per il **teorema di De L'Hopital** è vero se:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}=0$$

cioè

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-f''(x_0)\right)=0$$

che è vero per la definizione di derivata seconda.

8 Primitivazione