Analisi II - 2019/20 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 8 settembre 2020
Programma A.A. 2019/20

Esercizio 1. Sia dato il campo scalare $f(x, y) = \sqrt{2 - (x-1)^2 - (y-1)^2}\,\log(2y - x)$.

a) Determinare e disegnare il dominio D di f. Qual è la frontiera di D? D è chiuso o aperto? (giustificare le risposte).

b) Verificare che la f è differenziabile nel punto $(0, 1)$ e determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 1, \log 2)$.

Soluzione: a) Il dominio D di f è dato da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2,\ 2y > x\}.$$

La sua frontiera è data dall'unione dei seguenti insiemi

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2,\ 2y > x\}$$

e

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2,\ 2y = x\}.$$

Osserviamo che i punti di D_2 non appartengono a D quindi D non è chiuso in quanto non contiene tutti i suoi punti di frontiera. Invece i punti di D_1 appartengono a D quindi D non è neanche aperto.
b) f ammette derivate parziali nei punti interni al dominio e queste sono date da:

$$f_x(x, y) = -\frac{x-1}{\sqrt{2-(x-1)^2-(y-1)^2}}\log(2y-x) - \frac{\sqrt{2-(x-1)^2-(y-1)^2}}{2y-x},$$

$$f_y(x, y) = -\frac{y-1}{\sqrt{2-(x-1)^2-(y-1)^2}}\log(2y-x) + 2\frac{\sqrt{2-(x-1)^2-(y-1)^2}}{2y-x}.$$

Osserviamo che tali derivate sono definite in un intorno di $(0, 1)$ e sono continue in $(0, 1)$, dunque f è differenziabile in $(0, 1)$. Inoltre, $f(0, 1) = \log 2$, $\quad f_x(0, 1) = \log 2 - \frac{1}{2}$, $\quad f_y(0, 1) = 1$. Pertanto, l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 1, \log 2)$ è la seguente:

$$\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)x + y - z - 1 + \log 2 = 0.$$

Esercizio 2. Calcolare o dimostrare che non esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin^2(y - x^2)}{2x^2 + y^2}.$$

Soluzione: Poiché $y - x^2 \to 0$ per $(x, y) \to (0, 0)$, dall'equivalenza asintotica $\sin t \sim t$, $t \to 0$, segue che il limite proposto è equivalente al seguente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(y - x^2)^2}{2x^2 + y^2}.$$

Osserviamo che sui punti dell'asse y diversi dall'origine la funzione $f(x, y) = \frac{x(y-x^2)^2}{2x^2+y^2}$ è identicamente nulla, dunque, se esiste, il limite deve valere 0. Lungo le rette $y = mx, m \in \mathbb{R}$, vale

$$f(x, mx) = \frac{x(m - x)^2}{2 + m^2} \to 0, \qquad x \to 0.$$

Ora risulta, per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x(y-x^2)^2}{2x^2+y^2}\right| &= \left|\frac{xy^2+x^5-2x^3y}{2x^2+y^2}\right| = \frac{|xy^2+x^5-2x^3y|}{2x^2+y^2} \\
&\leq \frac{|x|y^2}{2x^2+y^2} + \frac{|x|^5}{2x^2+y^2} + \frac{2|x|^3|y|}{2x^2+y^2} \\
&\leq |x| + \frac{|x|^3}{2} + |x||y| \to 0, \qquad (x,y) \to (0,0).
\end{aligned}$$

Pertanto, per il teorema del confronto si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin^2(y-x^2)}{2x^2+y^2} = 0.$$

Esercizio 3. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo scalare di classe Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo scalare di classe C^1 e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un secondo campo scalare defi
nito da

$$g(x,y) = f(x^2\sin y, xe^y) + y^2x^3.$$

Determinare il gradiente di g nel punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ sapendo che $\nabla f\left(1, e^{\frac{\pi}{2}}\right) = (3,-1)$.

Soluzione: La funzione $h(x,y) = (x^2\sin y, xe^y)$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$, pertanto poiché $g(x,y) = f(h(x,y)) + y^2x^3$, segue che anche g è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Inoltre, per la regola della catena si ha

$$\begin{aligned}
\nabla g(x,y) &= \nabla f(h(x,y)) \cdot Jh(x,y) + (3x^2y^2, 2x^3y) \\
&= \nabla f(h(x,y)) \cdot \begin{pmatrix} 2x\sin y & x^2\cos y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix} + (3x^2y^2, 2x^3y).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\nabla g\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (3,-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e^{\frac{\pi}{2}} & e^{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{4}\pi^2, \pi\right) = \left(6 - e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\pi^2, -e^{\frac{\pi}{2}} + \pi\right).$$

Esercizio 4. Data l'equazione

$$2x^2z + 2xz^2 + e^{yz} + 6z + 7 = 0$$

verificare che definisce implicitamente in un intorno di $(1,0,-2)$ un'unica funzione $y = g(x,z)$. Verificare che $(1,-2)$ è un punto critico per g.

Soluzione: La funzione $F(x,y,z) = 2x^2z + 2xz^2 + e^{yz} + 6z + 7$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Inoltre $F(1,0,-2) = 0$ e $F_y(1,0,-2) = -2 \neq 0$. Pertanto, per il teorema di Dini, l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $(1,0,-2)$ un'unica funzione $y = g(x,z)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(1,-2)$ e tale che $g(1,-2) = 0$. Poiché $\partial_x F(x,y,z) = 4xz + 2z^2$ e $\partial_z F(x,y,z) = 2x^2 + 4xz + ye^{yz} + 6$, si ha

$$\nabla g(1,-2) = +\frac{1}{2}(0,0) = (0,0)\,.$$

Dunque $(1,-2)$ è punto critico per g.

Esercizio 5. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \log(x-y) - \frac{y^3}{3} - x + 2y.$$

Determinare i punti critici di f e studiarne la natura. Esistono punti di minimo globale per f? (Giustificare la risposta!)

Soluzione: Il dominio dom$f$ del campo scalare f è dato da dom$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$. Il vettore gradiente e la matrice hessiana di f in un generico punto del suo dominio sono rispettivamente

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{x-y} - 1, -\frac{1}{x-y} - y^2 + 2 \right), \qquad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x-y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} - 2y \end{pmatrix}.$$

Essendo il campo di classe $\mathcal{C}^2$ (sul suo dominio), i suoi punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = 1 \\ -\frac{1}{x-y} = y^2 - 2, \end{cases}$$

ovvero $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (0, -1)$. L'hessiana in tali punti è

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

P_2 è quindi un punto di sella (il determinante dell'hessiana è negativo), P_1 è invece un massimo (il determinante dell'hessiana è positivo, l'elemento in alto a sinistra negativo).
Non essendoci punti di minimo relativo concludiamo che non ci sono nemmeno punti di minimo globale.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (2xy - y^3)\, dxdy,$$

dove

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y,\ 3x^2 + y^2 \le 3\right\}.$$

Soluzione: Il dominio di integrazione è y-semplice in quanto

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}, |x| \le y \le \sqrt{3 - 3x^2} \right\}.$$

Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned} \iint_D (2xy - y^3)\, dxdy &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{|x|}^{\sqrt{3-3x^2}} (2xy - y^3)\, dy = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[xy^2 - \frac{y^4}{4} \right]_{|x|}^{\sqrt{3-3x^2}} dx \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[x(3 - 3x^2) - \frac{1}{4}(3 - 3x^2)^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right] dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (9 - 18x^2 + 8x^4)\, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (9 - 18x^2 + 8x^4)\, dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[9x - 6x^3 + \frac{8}{5}x^5 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{27}{20}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 7. Calcolare il volume del solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le z\}.$$

Soluzione: Utilizzando le coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases},$$

si ottiene che

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V dxdydz = \iiint_{\tilde V} \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

dove

$$\tilde V = \{\rho, \varphi, \theta) : \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi/2], 0 \le \rho \le \cos\theta\}.$$

Ora

$$\begin{aligned}\iiint_{\tilde V} \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\cos\theta} \rho^2 \, d\rho \\ &= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta [\rho^3]_0^{\cos\theta} \, d\theta = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos^3\theta \, d\theta \\ &= -\frac{1}{6}\pi \left[\cos^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 8. Discutere la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{n\ge3} (-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right).$$

Soluzione. Poiché $\frac{n-2}{n+1} < 1$, si ha $\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) < 0$ per ogni $n \ge 3$, quindi la serie in questione è una seriea segni alterni. Usando le proprietà dei logaritmi possiamo scriverla nella forma

$$-\sum_{n\ge3} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right),$$

dove $b_n = \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right) > 0$ per ogni $n \ge 3$. Osserviamo che la serie non converge assolutamente. Infatti

$$\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = \log\left(1 + \frac{3}{n-2}\right) \sim \frac{3}{n-2} \sim \frac{3}{n},$$

per $n \to \infty$. Pertanto, la serie $\sum_{n\ge3} \left|(-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)\right| = \sum_{n\ge3} \log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)$ diverge per confronto con la serie armonica. Per quanto riguarda la convergenza semplice, possiamo osservare che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$. Inoltre, poiché la funzione logaritmo è strettamente crescente, si ha:

$$b_{n+1} = \log\left(1 + \frac{3}{n-1}\right) < \log\left(1 + \frac{3}{n-2}\right) = b_n \qquad \forall n \ge 3.$$

Dunque, la serie data è una serie di Leibniz e pertanto converge semplicemente.