Analisi II - 2022/23 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 12 giugno 2023

Esercizio 1. [5pt] Sia dato il campo scalare

$$f(x,y) = \log(1+\sqrt{x^2+2y}).$$

(a) Determinare e disegnare il dominio D di f, specificandone la frontiera. Si dica se D è un insieme aperto, chiuso, limitato, compatto.

(b) Verificare che f è differenziabile nel punto $(1,0)$ e calcolare la derivata direzionale di f tale punto lungo la direzione $v=(1,2)$.

c) Determinare le curve di livello della funzione f.

Soluzione. (a) Si ha che

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y \geq 0\}.$$

La frontiera di D è la parabola di equazione $y = -\frac{x^2}{2}$ che è tutta contenuta in D. Pertanto D è chiuso. Non essendo limitato , non è neanche compatto.
(b) Nei punti interni a D si ha

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2y}(1+\sqrt{x^2+2y})},$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y}(1+\sqrt{x^2+2y})}$$

che sono continue nell'interno di D e in particolare in un intorno di $(1,0)$. Pertanto, f è differenziabile in $(1,0)$. Inoltre, poiché $\nabla f(1,0) = (1/2, 1/2)$, per la formula del gradiente si ha:

$$\frac{\partial}{\partial v} f(1,0) = \langle (1/2,1/2),(1,2)\rangle = \frac{3}{2}.$$

(c) Le curve di livello sono definite da

$$\Sigma_c := \{(x,y) \in \mathrm{dom} f : f(x,y) = c\},$$

al variare di c in $\mathbb{R}$. Se $c<0$ si ha $\Sigma_c = \emptyset$, in quanto $\log(1+\sqrt{x^2+2y}) \geq 0$, per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom} f$.
Se $c=0$ si ha $\log(1+\sqrt{x^2+2y}) = 0$ se e solo se $1+\sqrt{x^2+2y} = 1$ da cui si ottiene la parabola $y = -\frac{x^2}{2}$.
Se $c>0$ si ha

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+2y} = e^c \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{(e^c-1)^2}{2}.$$

Dunque, le curve di livello $c>0$ della funzione sono le parabole di equazione

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{(e^c-1)^2}{2}.$$

Esercizio 2. [3pt] Si dica, giustificando la risposta, se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2)\log x}{y^2+(x-1)^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

è continua nel punto $(1,0)$.

Soluzione: Si ha che f è continua in $(1,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin(y^2)\log x}{y^2+(x-1)^2} = 0.$$

Osserviamo che, con un cambio di variabile, si ha:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sin(y^2)\log x}{y^2+(x-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y^2)\log(x+1)}{y^2+x^2}.$$

Inoltre, poiché $\sin(y^2) \sim y^2$ per $y \to 0$, studiare l'ultimo limite equivale a considerare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \log(x+1)}{y^2+x^2}.$$

Poiché $\frac{y^2}{y^2+x^2} \leq 1$ risulta che

$$\left| \frac{y^2 \log(x+1)}{y^2+x^2} \right| \leq |\log(x+1)| \to 0, \qquad x \to 0.$$

Pertanto, per il teorema del confronto, il limite considerato è 0 e dunque f è continua in $(1,0)$.

Esercizio 3. [4pt] Sia dato un campo scalare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, e la curva $\gamma(t) = (t^3, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $g(0,1) = \pi$, e $\nabla g(0,1) = (-1,2)$.

(i) Dire se è ben definita la composizione $h = g \circ \gamma$, (ovvero $h(t) = g(\gamma(t))$) e, nel caso in cui lo sia, dire tra quali spazi agisce; calcolare, se possibile, $h'(0)$.

(ii) Dire se è ben definita la composizione $k = \gamma \circ g$, (ovvero $k(x,y) = \gamma(g(x,y))$) e, nel caso in cui lo sia, tra quali spazi agisce; calcolare, se possibile, la matrice Jacobiana $Jk(0,1)$.

Soluzione. Entrambe le composizioni sono ben definite, e si ha

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Poiché sia g che γ sono di classe C^1 possiamo applicare la chain rule. Essendo $h(t) = g(t^3, \cos t)$ otteniamo

$$h'(t) = 3t^2 \partial_x g(t^3, \cos t) - \sin t\, \partial_y g(t^3, \cos t), \text{ e quindi } h'(0) = 0.$$

Si osservi che $\gamma'(t) = (3t^2, -\sin t)$. Per quanto riguarda k, si ha

$$Jk(x,y) = \gamma'(g(x,y)) \cdot \nabla g(x,y),$$

dove il prodotto è un prodotto righe per colonne tra matrici. Si ottiene quindi

$$Jk(0,1) = \gamma'(g(0,1)) \cdot \nabla g(0,1) = \gamma'(\pi) \cdot \nabla g(0,1) = \begin{pmatrix} 3\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\pi^2 & 6\pi^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. [4pt] Determinare i punti critici del campo scalare

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + 2z^2 - yz - 3x$$

e studiarne la natura. Dire, giustificando la risposta, se la funzione ammette massimo o minimo assoluto sul suo dominio.

Soluzione. Essendo f una funzione polinomiale si ha che $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 4z - y = 0 \end{cases}$$

i punti critici sono quindi $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,0,0)$. La matrice Hessiana è data da

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dunque, si ha

$$Hf(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e per il criterio dei minori di Nord-Ovest si verifica che $Hf(1,0,0)$ è definita positiva, dato che tutti i minori principali di testa sono positivi. Quindi $P_1 = (1,0,0)$ è un punto di minimo locale. Per quanto concerne $P_2 = (-1,0,0)$ si ha

$$Hf(-1,0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

e per il criterio di Sylvester si ha che $Hf(-1,0,0)$ è indefinita, quindi $P_2 = (-1,0,0)$ è un punto di sella. Infine, considerando la restrizioni lungo la retta di equazione $r(t) = (t,0,0)$ si ha che $f(t,0,0) = t^3 - 3t$ e $\lim_{t\to-\infty} f(t,0,0) = -\infty$, mentre $\lim_{t\to+\infty} f(t,0,0) = +\infty$. Quindi f non ammette né massimo né minimo assoluto.

Esercizio 5. [3pt] Verificare che l'equazione

$$4x^2y - 8xy^2z + 8x^3z + z^4 + 1 = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione $z = g(x,y)$ definita e di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $(1/2,1)$ e tale che $\varphi(1/2,1) = 1$.
Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di φ nel punto $P = (1/2,1,1)$.

Soluzione: Osserviamo che la funzione $f(x,y,z) = 4x^2y - 8xy^2z + 8x^3z + z^4 + 1$ è definita e di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^3$. Inoltre, $f(1/2,1,1) = 0$ e $f_z(x,y,z) = -8xy^2 + 8x^3 + 4z^3 \Leftrightarrow f_z(1/2,1,1) = 1 \neq 0$. Pertanto, per il teorema di Dini, esiste una funzione φ definita e di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno I di $(1/2,1)$ a valori in un intorno J di 1 tale che $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y) \quad \forall(x,y,z) \in I \times J$. In particolare, $\varphi(1/2,1) = 1$. Poiché $f_x(x,y,z) = 8xy - 8y^2z + 24x^2z$ e $f_y(x,y,z) = 4x^2 - 16xyz$, si ha $f_x(1/2,1,1) = 2$ e $f_y(1/2,1,1) = -7$. Pertanto, il piano tangente ha equazione

$$\langle \nabla f(1/2,1,1), (x-1/2, y-1, z-1)\rangle = 0 \Leftrightarrow 2x - 7y + z + 5 = 0.$$

Esercizio 6. [4pt] Calcolare

$$\iint_A \log(1-x^2-y^2)\,dxdy,$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2},\ |y| \leq \sqrt{3}x\}$.

Soluzione: Il dominio di integrazione A corrisponde al settore circolare individuato dal cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e dalle semirette di equazione $y = \pm\sqrt{3}x$, $x \geq 0$. Passando alle coordinate polari il dominio A si scrive come

$$A' = \left\{(\rho,\theta) : 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right\},$$

e tramite la formula di cambiamento di variabile si ha

$$\iint_A \log(1-x^2-y^2)\,dxdy = \int_{A'} \rho\log(1-\rho^2)\,d\rho d\theta.$$

Usando le formule di riduzione per integrali doppi si trova che

$$\int_{A'} \rho\log(1-\rho^2)\,d\rho d\theta = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \rho\log(1-\rho^2)\,d\theta\right) d\rho = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho\log(1-\rho^2)\,d\rho.$$

Infine, si ha che

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho\log(1-\rho^2)\,d\rho = \frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\rho\log(1-\rho^2)\,d\rho = \frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \log(1-t)\,dt \\ = &\frac{\pi}{3}\left\{t\log(1-t)\big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{1-t}\,dt\right\} = \frac{\pi}{3}\left\{t\log(1-t)\big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t}\,dt\right\} = -\frac{\pi}{6}\left(\log\frac{1}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

Esercizio 7. [4pt] Calcolare

$$\int_A (3-z)\,dxdydz$$

dove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 3 - x^2 - y^2, \ \ y \ge x \ge 0\}$.

Soluzione. Consideriamo prima il solido A_1 delimitato dal cono $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ e dal paraboloide ellittico $z = 3 - x^2 - y^2$ (paraboloide avente concavità verso il basso). Cono e paraboloide si incontrano alla quota $z = 2$. Dividendo il solido A_1 con il piano $y = x$ e considerando $y \ge x \ge 0$ si ottiene il solido A.
Per calcolare l'integrale, integriamo per strati paralleli al piano xy. Si osservi che se $z \in [0,2]$,

$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{x^2+y^2} \le z/2, \ \ y \ge x \ge 0\}$$

mentre per $z \in [2,3]$, $A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le 3 - z, \ \ y \ge x \ge 0\}$. Si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 dz \int_{A_z} (3-z)dxdy = \int_0^2 (3-z)\text{area}(A_z)dz + \int_2^3 (3-z)\text{area}(A_z)dz \\ &= \frac{\pi}{8}\int_0^2 (3-z)\,\frac{z^2}{4}dz \ + \ \frac{\pi}{8}\int_2^3 (3-z)^2 dz = \frac{2}{12}\pi = \frac{1}{6}\pi. \end{aligned}$$

In alternativa, si potevano usare le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

sul dominio

$$A'' = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le \rho \le 1, \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \ 2\rho \le z \le 3 - \rho^2\}.$$

Esercizio 8. [4pt] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n + 1}{n}.$$

Soluzione: Studiamo prima la convergenza assoluta. Poiché $\log n + 1 \ge 1$ per $n \ge 1$ si ha che

$$\left|(-1)^n \frac{\log n + 1}{n}\right| = \frac{\log n + 1}{n}, \quad n \ge 1,$$

per ogni $n \ge 1$, e quindi la serie data èa termini di segno alterno. Studiamo la convergenza assoluta: questo corrisponde a studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n \ge 1} \frac{\log n + 1}{n}.$$

Osserviamo che $\frac{\log n+1}{n} \ge \frac{1}{n}$ per $n \ge 1$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è la serie armonica divergente, da cui, per il criterio del confronto, la serie diverge. Quindi la serie iniziale non converge assolutamente.
Studiamo la convergenza semplice con il criterio di Leibniz.
$b_n = \frac{\log n+1}{n} > 0$ per $n \ge 1$. Inoltre, posto

$$f(x) = \frac{\log x + 1}{x}, \quad x \ge 1,$$

e calcolando la funzione derivata (osserviamo che la finzione f è di classe $C^1((1,+\infty))$, si ha

$$f'(x) = \frac{1 - \log x - 1}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2} < 0, \quad x > 1. \tag{1}$$

Allora, $f(x)$ è decrescente su $(1,+\infty)$, quindi $b_{n+1} > b_n$ per ogni $n \ge 1$, ovvero la successione b_n è decrescente. Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.