ANALISI III
PROVA SCRITTA DEL 29/11/1019

Cognome .... Nome .... n. matricola ....

Esercizio 1 (6 punti). Si consideri la serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} (z-i)^n. \tag{1}$$

a) Determinare il disco aperto di convergenza della serie (1).
b) Dimostrare che la serie (1) non converge in nessun punto del bordo del disco di convergenza e stabilire in quali insiemi converge uniformemente.
c) Stabilire se la serie (1) converge in $z = 1$.

Esercizio 2 (5 punti). Sia data la curva piana $\gamma(t) = (\,|t| - \sin t\,,\ |t| + \sin t\,)$, $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Provare che: 1) la curva γ è chiusa; 2) la curva γ è semplice.
b) Calcolare l'area della regione del piano racchiusa dal sostegno di γ, usando la formula di Gauss-Green.

Esercizio 3 (7 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2-1} + ay, \frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx, ax + \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz \right).$$

a) Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $F_{a,b}$. $D_{a,b}$ è un insieme connesso?
b) Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\bar{F}_{a,b}$ è irrotazionale su $D_{a,b}$.
c) Detta $\bar{H}$ la restrizione del campo $\bar{F}_{a,b}$ all'aperto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 1, y > 0\}$ per i valori $a, b \in \mathbb{R}$ determinati al punto precedente, dimostrare che $\bar{H}$ è conservativo e determinarne un potenziale.
d) Dopo aver dimostrato che la traccia di $\gamma(t) = (\sqrt{2} + t^2 \cos t, 1 + \sin t, 1 + \cos(3t))$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, è inclusa in A, calcolare $\displaystyle\int_{\bar{\gamma}} \bar{H} \cdot d\bar{s}$.

Esercizio 4 (8 punti). Dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(\frac{z}{1+x^2}\,, x + \log z\,, \frac{y}{z} + \arctan x \right),$$

individuare il suo dominio A. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sia

$$S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z \geq \cos\alpha\}.$$

a) Verificare che se $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora $S_\alpha \subset A$ e S_α ammette una parametrizzazione cartesiana sul disco del piano xy di raggio $r_\alpha = \sin\alpha$ e centro nell'origine. Quindi calcolare il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso S_α (orientata con normale uscente dalla sfera) tramite la definizione.
b) Calcolare il flusso precedente tramite il Teorema di Stokes.

Esercizio 5[*] (4 punti). Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n \log n) \cos x}{(7x)^n}, \quad x \in (0, +\infty). \tag{2}$$

a) Studiare la convergenza puntuale ed assoluta della serie (2).
b) Ci sono sottoinsiemi di $(0, +\infty)$ su cui la serie (2) converge uniformemente?

[*] Non richiesto agli studenti che devono sostenere l'esame di Analisi vettoriale e serie di funzioni.

Svolgimenti

Esercizio 1 (6 punti). Si consideri la serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} (z-i)^n. \tag{1}$$

a) Determinare il disco aperto di convergenza della serie (1).

b) Dimostrare che la serie (1) non converge in nessun punto del bordo del disco di convergenza e stabilire in quali insiemi converge uniformemente.

c) Stabilire se la serie (1) converge in $z = 1$.

(a) La serie (1) è una serie di potenze di centro $z_0 = i$ e coefficienti $a_n = \frac{\log n}{2^n}$. Il suo raggio di convergenza si può ottenere calcolando

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{2^{n+1}} \frac{2^n}{\log n} = \frac{1}{2}$$

e quindi $R = \frac{1}{L} = 2$. Il disco aperto di convergenza è $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-i| < 2\}$.

(b) Se $z \in \partial D$ allora $|z-i| = 2$ e $|a_n(z-i)^n| = \log n$ che non converge a 0. Quindi la serie (1) non converge in z. La teoria generale sulle serie di potenze in campo complesso garantisce che la serie (1) converge uniformemente nei dischi chiusi $\overline{D_r} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-i| \le r\}$ per ogni $r \in (0, 2)$.

(c) Dato che $|1-i| = \sqrt{2} < 2$, si ha che $i \in D$ e quindi la serie (1) in $z = 1$ converge assolutamente e semplicemente.

Esercizio 2 (5 punti). Sia data la curva piana $\gamma(t) = (\, |t| - \sin t \, , \, |t| + \sin t \,)$, $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Provare che: 1) la curva γ è chiusa; 2) la curva γ è semplice.

b) Calcolare l'area della regione del piano racchiusa dal sostegno di γ, usando la formula di Gauss-Green.

(a) Per provare che γ è chiusa bisogna verificare che $\gamma(-\pi) = \gamma(\pi)$. Infatti $\gamma(\pm\pi) = (\pi, \pi)$. Verifichiamo ora che γ è semplice cioè che la funzione γ è iniettiva in $[-\pi, \pi)$. Siano $t_1, t_2 \in [-\pi, \pi)$ tali che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Allora

$$\begin{cases} |t_1| - \sin t_1 = |t_2| - \sin t_2 \\ |t_1| + \sin t_1 = |t_2| + \sin t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t_1| = |t_2| \\ |t_1| + \sin t_1 = |t_2| + \sin t_2. \end{cases}$$

L'equazione $|t_1| = |t_2|$ è verificata in due casi: $t_1 = t_2$ oppure $t_1 = -t_2$. Se $t_1 = t_2$ abbiamo finito. Se $t_1 = -t_2$, la seconda equazione diventa $\sin t_1 = \sin(-t_1)$ e quindi $\sin t_1 = 0$. Dunque $t_1 = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Dovendo essere $t_1 \in [-\pi, \pi)$, gli unici casi possibili sono $t_1 = -\pi$ oppure $t_1 = 0$. Se $t_1 = -\pi$ allora $t_2 = -t_1 = \pi$ che non è accettabile, dato che anche $t_2 \in [-\pi, \pi)$. Resta allora $t_1 = 0$ e quindi anche $t_2 = 0$. Dunque $t_1 = t_2$. Cioè la funzione γ è iniettiva in $[-\pi, \pi)$.

(b) Sia D la regione di piano racchiusa dal sostegno di γ. Consideriamo il campo $\bar{F}(x, y) = (0, x)$. Per la formula di Gauss-Green,

$$\text{area}(D) = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s}\, .$$

Osserviamo che γ parametrizza ∂D. Se γ percorre ∂D in senso antiorario, allora $\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s}$.

Se invece γ percorre ∂D in senso orario, allora $\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} &= \int_{-\pi}^{0} \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt + \int_0^\pi \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} (-t - \sin t)(-1 + \cos t)\, dt + \int_0^\pi (t - \sin t)(1 + \cos t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} (t + \sin t - t\cos t - \sin t \cos t)\, dt + \int_0^\pi (t - \sin t + t\cos t - \sin t\cos t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (t - \sin t \cos t)\, dt + 2\int_0^\pi (-\sin t + t\cos t)\, dt \\
&= 2\int_0^\pi (-\sin t)\, dt + 2\Big[t \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} - 2\int_0^\pi \sin t\, dt = 4\cos\pi - 4\cos 0 = -8\,.
\end{aligned}$$

Avendo ottenuto che la circuitazione di $\bar{F}$ lungo γ è negativa e tenendo conto che deve essere $\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} > 0$, deduciamo che γ percorre ∂D in senso orario e quindi

$$\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s}\,.$$

Dunque l'area di D vale 8.

Esercizio 3 (7 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2-1} + ay, \frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx, ax + \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz \right).$$

a) Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $F_{a,b}$. $D_{a,b}$ è un insieme connesso?

b) Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\bar{F}_{a,b}$ è irrotazionale su $D_{a,b}$.

c) Detta $\bar{H}$ la restrizione del campo $\bar{F}_{a,b}$ all'aperto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 1, y > 0\}$ per i valori $a, b \in \mathbb{R}$ determinati al punto precedente, dimostrare che $\bar{H}$ è conservativo e determinarne un potenziale.

d) Dopo aver dimostrato che la traccia di $\gamma(t) = (\sqrt{2} + t^2 \cos t, 1 + \sin t, 1 + \cos(3t))$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, è inclusa in A, calcolare $\int_{\bar{\gamma}} \bar{H} \cdot d\bar{s}$.

(a) Il dominio di $F_{a,b}$ è

$$D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x \neq \pm 1\,,\; y \neq 0\}$$

e non è connesso essendo costituito da sei aperti disgiunti. Si noti che il dominio non dipende dai parametri a e b.

(b) Il campo $F_{a,b}$ è irrotazionale sul suo dominio quando $\nabla \wedge F_{a,b} = 0$ in $D_{a,b}$ cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2-1} + ay\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{x^2-1} + ay\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax + \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(ax + \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 0 = a \\ 2z = 2z\,. \end{cases}$$

Quindi il campo $F_{a,b}$ è irrotazionale sul suo dominio solo quando $a = b = 0$.

(c) Il campo

$$\bar{H}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2-1}, \frac{1}{y} + 1 + z^2, \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz \right)$$

è conservativo in A perché è irrotazionale in A ed A è semplicemente connesso, in quanto convesso. Un potenziale di $\bar{H}$ in A è una funzione $U \colon A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che $\nabla U = \bar{H}$ in A. Possiamo calcolare U col metodo delle integrazioni parziali:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-1} \quad \text{in } A \ \Rightarrow\ U(x,y,z) = \log(x^2-1) + V(y,z)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1 + z^2 \quad \text{in } A \ \Rightarrow\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1 + z^2 \quad \text{in } A \ \Rightarrow\ V(x,y) = \log y + y + yz^2 + W(z)$$
$$\Rightarrow\ U(x,y,z) = \log(x^2-1) + \log y + y + yz^2 + W(z)$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz \Rightarrow W'(z) = \frac{2}{1+(z-1)^2} \Rightarrow W(z) = 2\arctan(z-1) + C$$
$$\Rightarrow\ U(x,y,z) = \log(x^2-1) + \log y + y + yz^2 + 2\arctan(z-1) + C$$

essendo C una costante.

(d) La traccia di γ è contenuta in A perché se $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ allora $\sqrt{2}+t^2\cos t \geq \sqrt{2} > 1$ e $1+\sin t \geq 1 > 0$. Inoltre essendo $\bar{H}$ conservativo in A, con potenziale U, si ha

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{H} \cdot d\bar{s} = U\left(\bar{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U(\bar{\gamma}(0)) = U\left(\sqrt{2}, 2, 1\right) - U\left(\sqrt{2}, 1, 2\right) = \log 2 - 1 - \frac{\pi}{2}\,.$$

Esercizio 4 (8 punti). Dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(\frac{z}{1+x^2}\,,\ x + \log z\,,\ \frac{y}{z} + \arctan x\right),$$

individuare il suo dominio A. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sia

$$S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ z \geq \cos\alpha\}.$$

a) Verificare che se $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora $S_\alpha \subset A$ e S_α ammette una parametrizzazione cartesiana sul disco del piano xy di raggio $r_\alpha = \sin\alpha$ e centro nell'origine. Quindi calcolare il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso S_α (orientata con normale uscente dalla sfera) tramite la definizione.

b) Calcolare il flusso precedente tramite il Teorema di Stokes.

(a) Il dominio di $\bar{F}$ è l'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ z > 0\}$. Se $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora $\cos\alpha > 0$ e quindi $S_\alpha \subset A$. La superficie S_α si può parametrizzare come grafico di $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ con $(x,y) \in D_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 \leq r_\alpha^2\}$, dove $r_\alpha = \sin\alpha$. La corrispondente parametrizzazione è quindi

$$r(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad (x,y) \in D_\alpha$$

e

$$r_x \wedge r_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il rotore di $\bar{F}$ è il campo

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{z}{1+x^2} \\ x + \log z \\ \frac{y}{z} + \arctan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza il flusso Φ del rotore di $\bar{F}$ attraverso S_α vale

$$\int_{S_\alpha} (\operatorname{rot} \bar{F}) \cdot N\, d\sigma = \int_{D_\alpha} (\operatorname{rot} \bar{F}(r(x,y)) \cdot r_x \wedge r_y \, dx\, dy = \int_{D_\alpha} 1\, dx\, dy = \operatorname{area}(D_\alpha) = \pi r_\alpha^2 = \pi \sin^2\alpha\,.$$

(b) Dal teorema di Stokes si ha anche

$$\Phi = \int_{r(+\partial D_\alpha)} \bar{F} \cdot d\bar{s}\,.$$

Parametrizziamo $+\partial D_\alpha$ con $\gamma(t) = (r_\alpha \cos t, r_\alpha \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e, posto $\widetilde{\gamma} = r \circ \gamma$, abbiamo che

$$\widetilde{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} r_\alpha \cos t \\ r_\alpha \sin t \\ \sqrt{1 - r_\alpha^2} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -r_\alpha \sin t \\ r_\alpha \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}(\widetilde{\gamma}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1-r_\alpha^2}}{1+r_\alpha^2 \cos^2 t} \\ r_\alpha \cos t + \log \sqrt{1 - r_\alpha^2} \\ * \end{bmatrix}$$

e infine

$$\begin{aligned} \int_{r(+\partial D_\alpha)} \bar{F} \cdot d\bar{s} &= \int_0^{2\pi} \bar{F}(\widetilde{\gamma}(t)) \cdot \widetilde{\gamma}'(t)\, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{r_\alpha \sqrt{1 - r_\alpha^2} \sin t}{1 + r_\alpha^2 \cos^2 t}\, dt + r_\alpha^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt + \log \sqrt{1 - r_\alpha^2} \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = r_\alpha^2 \pi\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5[*] (4 punti). Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n \log n) \cos x}{(7x)^n}, \quad x \in (0, +\infty). \tag{2}$$

a) Studiare la convergenza puntuale ed assoluta della serie (2).

b) Ci sono sottoinsiemi di $(0, +\infty)$ su cui la serie (2) converge uniformemente?

(a) Poniamo $f_n(x) = \frac{(n \log n) \cos x}{(7x)^n}$ ed osserviamo che

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > \frac{1}{7} \\ +\infty & \text{se } 0 < x \le \frac{1}{7} \end{cases}$$

Detti I_s e I_a gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, si ha quindi che $I_a \subseteq I_s \subseteq \left(\frac{1}{7}, +\infty\right)$. Se $x > \frac{1}{7}$ e $\cos x = 0$, si ha che $f_n(x) = 0$ per ogni $n \ge 1$ e quindi la serie converge, anche assolutamente. Se $x > \frac{1}{7}$ e $\cos x \neq 0$, valutiamo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} \frac{\log(n+1)}{\log n} \frac{1}{7x} = \frac{1}{7x} < 1\,.$$

Quindi per il criterio del rapporto la serie $\sum_1^\infty |f_n(x)|$ converge. Dunque $I_a = I_s = \left(\frac{1}{7}, +\infty\right)$.

(b) Fissato $r > \frac{1}{7}$ e posto $M_n = \frac{n \log n}{(7r)^n}$, si ha che $|f_n(x)| \le \frac{n \log n}{(7x)^n} \le M_n$ per $x \in [r, +\infty)$ e per ogni $n \ge 1$. Inoltre la serie $\sum_1^\infty M_n$ converge (per il criterio del rapporto, con il calcolo già visto). Quindi, per ogni fissato $r > \frac{1}{7}$, la serie (2) converge totalmente in $[r, +\infty)$ e di conseguenza, per il criterio di Weierstrass, converge uniformemente in $[r, +\infty)$. Non si ha convergenza uniforme in $\left(\frac{1}{7}, +\infty\right)$, altrimenti, essendo le f_n continue in $\left[\frac{1}{7}, +\infty\right)$, si avrebbe convergenza uniforme e quindi anche semplice in $\left[\frac{1}{7}, +\infty\right)$, che non è vero.

[*] Non richiesto agli studenti che devono sostenere l'esame di Analisi vettoriale e serie di funzioni.

ANALISI III
PROVA SCRITTA DEL 16/12/1019

Cognome .... Nome .... n. matricola ....

Esercizio 1 (6 punti). Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{7x-5}{3x^2-2x-21}.$$

(a) Scrivere la serie di McLaurin di f.
(b) Determinare il raggio e l'intervallo aperto di convergenza della serie di McLaurin di f.
(c) Studiare il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza della serie di McLaurin di f e determinarne l'insieme di convergenza.

Esercizio 2 (5 punti). Calcolare, tramite il Teorema della divergenza, il flusso del campo $\bar{F}(x,y,z) = (xy, y^2-x, z(1-y))$ uscente dal solido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + (y-2)^2 \le 4, z \in [-1,1]\}$$

Esercizio 3 (7 punti). Fissato $a \in \mathbb{R}$ sia

$$\bar{F}_a\,(x,y,z) = \Big(\frac{z}{\cos^2 x}\,,\, az\,,\, y + \tan x\Big).$$

(a) Trovare il dominio D di $\bar{F}_a$ (si noti che D non dipende da a) e stabilire se è un aperto connesso.
(b) Detto A_0 il più grande aperto connesso incluso in D contenente 0, determinare gli eventuali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che il campo $\bar{F}_a$ é conservativo in A_0.
(c) Per tali valori del parametro a calcolare il potenziale di $\bar{F}_a$ in A_0 che si annulla nell'origine.

Esercizio 4 (8 punti). Si consideri il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \big(xy-1, x^2yz, x-y\big).$$

(a) Calcolare, tramite la definizione, il flusso di rot $\bar{F}$ attraverso la superficie Σ parametrizzata da $\bar{r}(u,v) = (v, 2\cos u, 1+2\sin u)$, $u \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $v \in [-2,1]$.
(b) Calcolare il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie Σ definita al punto precedente tramite il Teorema di Stokes.

Esercizio 5[*] (4 punti). Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^{2n}. \tag{1}$$

(a) Trovare gli insiemi di convergenza semplice I_s e assoluta I_a della serie (1).
(b) Calcolare la somma della serie (1), per ogni $x \in I_s$.
(c) Stabilire per quali valori di $a > 0$ si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a (\sin x)^{2n}\, dx = \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^{2n}\, dx,$$

giustificando la risposta. Per tali valori calcolare il valore comune nell'uguaglianza precedente.

[*]Non richiesto agli studenti che devono sostenere l'esame di Analisi vettoriale e serie di funzioni.

Analisi III - Corso di Laurea in Fisica - A.A. 2019/20

Prova scritta del 01/07/2020

1. **(totale punti 6)** Sia data la curva γ di equazioni $x = 2\cos t + \cos(2t)$, $y = 2\sin t - \sin(2t)$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   (i) **(pt.2)** Stabilire se la curva γ è chiusa.

   (ii) **(pt.1)** Stabilire se la curva γ è regolare.

   (iii) **(pt.3)** Calcolare la lunghezza della curva γ (suggerimento: $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$).

2. **(totale punti 8)** Fissato $a \in \mathbb{R}$ sia $F_a(x, y, z) = \left(\frac{z}{\cos^2(ax)}\,,\, z\,,\, y + \tan(ax)\right)$.

   (i) **(pt.2)** Trovare il dominio D_a di F_a e stabilire per quali valori di a risulta D_a aperto connesso.

   (ii) **(pt.2)** Detta $\widetilde{D}_a$ la componente connessa di D_a che contiene l'origine (cioè, il più grande aperto connesso di D_a contenente 0), determinare gli eventuali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che il campo F_a è irrotazionale in $\widetilde{D}_a$.

   (ii) **(pt.2)** Determinare gli eventuali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che il campo F_a è conservativo in $\widetilde{D}_a$.

   (iii) **(pt.2)** Per tali valori calcolare il potenziale di F_a in $\widetilde{D}_a$ che si annulla nell'origine.

3. **(totale punti 6)** Data la serie di potenze in campo complesso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2 + in}$:

   (i) **(pt.1+2)** determinarne centro e raggio di convergenza;

   (ii) **(pt.1)** stabilire se converge in $z = e^{i\pi/4}$;

   (iii) **(pt.2)** stabilire se converge in $z = 0$.

4. **(totale punti 10)**

   (i) **(pt.2)** Calcolare l'area della calotta sferica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ 2z \geq 1\}$.

   (ii) **(pt.4+4)** Posto $F(x, y, z) = \left(3ze^{3x}\,,\, x + \log(z + 2)\,,\, e^{3x} + \frac{y}{z+2}\right)$, calcolare il flusso del rotore di F attraverso S (orientata con normale uscente dalla sfera), sia con la definizione, sia mediante il teorema di Stokes.

Risposte e svolgimenti

1. Sia data la curva γ di equazioni $x = 2\cos t + \cos(2t)$, $y = 2\sin t - \sin(2t)$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   (i) **(pt.2)** Stabilire se la curva γ è chiusa.

   (ii) **(pt.1)** Stabilire se la curva γ è regolare.

   (iii) **(pt.3)** Calcolare la lunghezza della curva γ (suggerimento: $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$).

   Svolgimento: (i) Ricordiamo che una curva è chiusa se i suoi estremi coincidono. Nel caso in questione, posto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, il punto iniziale è $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = (-1, -2)$ mentre quello finale è $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (-1, 2)$, e si ha $\gamma(-\frac{\pi}{2}) \neq \gamma(\frac{\pi}{2})$. Dunque, la curva γ non è chiusa.
   (ii) Ricordiamo che una curva γ è regolare se le sue componenti sono di classe C^1 e il vettore tangente $\gamma'(t)$ è non nullo per ogni valore t del parametro. Si ha che

$$\begin{aligned}|\gamma'(t)| &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(2\sin t + 2\sin(2t))^2 + (2\cos t - 2\cos(2t))^2}\\ &= \sqrt{8 + 8\sin t\sin(2t) - 8\cos t\cos(2t)} = \sqrt{8}\sqrt{1-\cos 3t}.\end{aligned}$$

   In particolare, c'è un valore in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dato da $t = 0$, in cui $|\gamma'(t)| = 0$. Quindi la curva γ non è regolare.
   (iii) Essendo γ di classe C^1 sul dominio dei parametri $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la sua lunghezza L si calcola mediante la formula

$$\begin{aligned}L &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\gamma'(t)|\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8}\sqrt{1-\cos 3t}\, dt = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\frac{3t}{2}\right| dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{3t}{2}\, dt\\ &= 8\,\frac{2}{3}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin s\, ds = 8\,\frac{2}{3}\left(-\cos\frac{3\pi}{4} + \cos 0\right) = 8\,\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \frac{8}{3}(\sqrt{2}+2),\end{aligned}$$

   usando l'identità $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ con $\alpha = \frac{3t}{2}$ e la parità della funzione $t \mapsto \left|\sin\frac{3t}{2}\right|$.

2. Fissato $a \in \mathbb{R}$ sia $\bar{F}_a\,(x, y, z) = \left(\frac{z}{\cos^2(ax)}\,,\, z\,,\, y + \tan(ax)\right)$.

   (i) **(pt.2)** Trovare il dominio D_a di $\bar{F}_a$ e stabilire per quali valori di a risulta D_a aperto connesso.

   (ii) **(pt.2)** Detta $\widetilde{D}_a$ la componente connessa di D_a che contiene l'origine (cioè, il più grande aperto connesso di D_a contenente 0), determinare gli eventuali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che il campo $\bar{F}_a$ è irrotazionale in $\widetilde{D}_a$.

   (ii) **(pt.2)** Determinare gli eventuali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che il campo $\bar{F}_a$ è conservativo in $\widetilde{D}_a$.

   (iii) **(pt.2)** Per tali valori calcolare il potenziale di $\bar{F}_a$ in $\widetilde{D}_a$ che si annulla nell'origine.

   Svolgimento: (i) Se $a = 0$ il campo è ben definito su tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$, che è un dominio connesso. Se $a \neq 0$ il dominio è $D_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2a}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ed è non connesso, essendo costituito da aperti disgiunti delimitati da piani paralleli di equazioni $x = c_k$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (ii) La componente connessa di D_a che contiene l'origine è data da $\widetilde{D}_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < \frac{\pi}{2a}\,\}$. Tale espressione si può considerare corretta anche per $a = 0$, leggendo la condizione $|x| < \frac{\pi}{2a}$ nella forma $|x| < \infty$, sempre vera. Il campo $\bar{F}_a$ é irrotazionale su $\widetilde{D}_a$ quando il suo rotore è identicamente nullo in $\widetilde{D}_a$. Si calcola

$$\nabla \wedge \bar{F}_a = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{z}{\cos^2(ax)} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & z \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & y + \tan(ax) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\,(y + \tan(ax)) - \frac{\partial}{\partial z}\,(z) \\ -\frac{\partial}{\partial x}\,(y + \tan(ax)) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\cos^2(ax)}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\,(z) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\cos^2(ax)}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1-a}{\cos^2(ax)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $\bar{F}_a$ è irrotazionale in $\widetilde{D}_a$ se e solo se $a = 1$.
(iii) Affinché il campo $\bar{F}_a$ sia conservativo in $\widetilde{D}_a$, deve essere irrotazionale. Quindi dobbiamo considerare solo il caso $a = 1$. In tal caso, dato che il dominio é semplicemente connesso (in quanto convesso), il lemma di Poincaré ci garantisce che la condizione di irrotazionalità è anche sufficiente affinché il campo risulti conservativo. Dunque $\bar{F}_a$ è conservativo in $\widetilde{D}_a$ se e solo se $a = 1$.
(iv) Posto

$$\bar{F}(x,y,z) = \bar{F}_1(x,y,z) = \Big(\frac{z}{\cos^2 x}\,,\, z\,,\, y + \tan x\Big)\,,$$

un potenziale di $\bar{F}$ in $\widetilde{D}_1$ è una funzione $U\colon \widetilde{D}_1 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che $\nabla U = \bar{F}$ in $\widetilde{D}_1$. Possiamo calcolare U col metodo delle integrazioni lungo poligonali con lati paralleli agli assi e troviamo

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt \\ &= \int_0^x 0\,dt + \int_0^y 0\,dt + \int_0^z (y+\tan x)\,dt = [(y+\tan x)t]_{t=0}^{t=z} = (y+\tan x)z\,. \end{aligned}$$

3. Data la serie di potenze in campo complesso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2+in}$:

   (i) **(pt.1+2)** determinarne centro e raggio di convergenza;

   (ii) **(pt.1)** stabilire se converge in $z = e^{i\pi/4}$;

   (iii) **(pt.2)** stabilire se converge in $z = 0$.

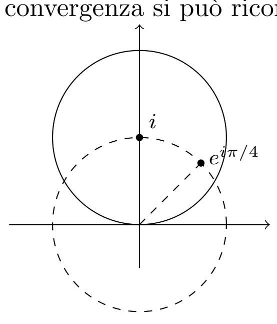
Svolgimento: (i) Si tratta di una serie di potenze con centro in $z_0 = i$ e coefficienti $a_n = \frac{1}{n^2+in}$. Il raggio di convergenza R si può calcolare mediante la formula seguente:

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{dove} \quad L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n^2+in|}{|(n+1)^2 + i(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}\,\frac{|1+\frac{i}{n}|}{|1+\frac{i}{n+1}|} = 1$$

Dunque $R = 1$.
(ii) Dal teorema sul cerchio di convergenza per le serie di potenze in campo complesso, la serie converge (assolutamente) in tutti i punti z tali che $|z - z_0| < R$. Nel caso in questione, essendo $z_0 = i$, $R = 1$, ponendo $z = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, si ha che

$$|e^{i\pi/4} - i|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}(1-\sqrt{2}) < 1\,.$$

Essendo dunque $|e^{i\pi/4} - i| < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < R$, la serie converge in $z = e^{i\pi/4}$. Il fatto che $z = e^{i\pi/4}$ appartiene al disco aperto di convergenza si può riconoscere anche graficamente:



(iii) Il punto $z = 0$ si trova sul bordo del disco di convergenza. In tal caso il teorema sul cerchio di convergenza non fornisce risposte. Studiamo la serie con $z = 0$, data da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+in}$. Osserviamo che

$$\left| \frac{i^n}{n^2 + in} \right| = \frac{1}{n^2 \left|1 + \frac{i}{n}\right|} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Quindi per il criterio del confronto asintotico, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n^2+in} \right|$ converge. Dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+in}$ converge assolutamente e quindi converge.

4. (i) **(pt.2)** Calcolare l'area della calotta sferica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ 2z \geq 1\}$.
   (ii) **(pt.4+4)** Posto $F(x, y, z) = \left(3ze^{3x}\,,\ x + \log(z + 2)\,,\ e^{3x} + \frac{y}{z+2}\right)$, calcolare il flusso del rotore di F attraverso S (orientata con normale uscente dalla sfera), sia con la definizione, sia mediante il teorema di Stokes.

Svolgimento: (i) La calotta sferica S si può parametrizzare mediante la funzione

$$r(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]\,,\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Il dominio dei parametri è $D = [-\pi, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Si ha che

$$r_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}, \quad r_\varphi \wedge r_\theta = -\sin\theta \begin{bmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}.$$

In particolare, $|r_\varphi \wedge r_\theta| = \sin\theta$ per $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e l'area di S è data da

$$\mathrm{Area}(S) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\, |r_\varphi \wedge r_\theta| = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\, d\theta = 2\pi \left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0\right) = \pi\,.$$

(ii) Il rotore di F è dato da

$$\nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & 3ze^{3x} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x + \log(z + 2) \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & e^{3x} + \frac{y}{z+2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il versore normale associato alla parametrizzazione r è dato da

$$\frac{r_\varphi \wedge r_\theta}{|r_\varphi \wedge r_\theta|} = -r$$

e punta verso l'interno. Per parametrizzare la superficie S in modo che il versore normale sia uscente dalla sfera, basta scambiare l'ordine delle variabili e considerare la parametrizzazione $\widetilde{r}(\theta, \varphi) = r(\varphi, \theta)$ definita su $\widetilde{D} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times [-\pi, \pi]$. Allora il versore normale è

$$N = \frac{\widetilde{r}_\theta \wedge \widetilde{r}_\varphi}{|\widetilde{r}_\theta \wedge \widetilde{r}_\varphi|} = \widetilde{r}.$$

Il flusso del rotore di F attraverso S secondo la definizione è dunque dato da

$$\Phi = \int_S \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, [\nabla \wedge F(\widetilde{r}(\theta, \varphi)] \cdot \widetilde{r}_\varphi(\theta, \varphi) \wedge \widetilde{r}_\theta(\theta, \varphi)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, \sin\theta\cos\theta = \pi \left[-\cos^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Il teorema di Stokes è applicabile e ci assicura che

$$\Phi = \int_{\widetilde{r}(+\partial\widetilde{D})} F \cdot ds = \int_{\widetilde{\gamma}_1} F \cdot ds + \int_{\widetilde{\gamma}_2} F \cdot ds + \int_{-\widetilde{\gamma}_3} F \cdot ds + \int_{-\widetilde{\gamma}_4} F \cdot ds,$$

dove $\widetilde{\gamma}_i = \widetilde{r} \circ \gamma_i$ $(i = 1, ..., 4)$ con

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = (t, -\pi) \quad \text{con } 0 \le t \le \frac{\pi}{3}, & \gamma_2(t) = (\frac{\pi}{3}, t) \quad \text{con } -\pi \le t \le \pi, \\ \gamma_3(t) = (t, \pi) \quad \text{con } 0 \le t \le \frac{\pi}{3}, & \gamma_4(t) = (0, t) \quad \text{con } -\pi \le t \le \pi. \end{array}$$

Quindi

$$\begin{array}{ll} \widetilde{\gamma}_1(t) = (-\sin t, 0, \cos t), & \widetilde{\gamma}_2(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{1}{2}), \\ \widetilde{\gamma}_3(t) = (-\sin t, 0, \cos t), & \widetilde{\gamma}_4(t) = (0, 0, 1)\,. \end{array}$$

In particolare,

$$\int_{-\widetilde{\gamma}_3} F \cdot ds = -\int_{\widetilde{\gamma}_3} F \cdot ds = \int_{\widetilde{\gamma}_1} F \cdot ds$$

e

$$\int_{\widetilde{\gamma}_4} F \cdot ds = 0,$$

poiché $\widetilde{\gamma}_4$ è costante. Rimane dunque da calcolare

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{r}(+\partial\widetilde{D})} F \cdot ds &= \int_{\widetilde{\gamma}_2} F \cdot ds = \int_{-\pi}^{\pi} F(\widetilde{\gamma}_2(t)) \cdot \widetilde{\gamma}_2'(t)\, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{3}{2} e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos t}, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \log\frac{5}{2}, e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos t} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t}{\frac{5}{2}} \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 0 \right) dt \\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

che coincide con quanto calcolato mediante la definizione.
In alternativa, anziché parametrizzare S come sopra, la si può rappresentare come grafico. Questa scelta semplifica i calcoli in modo sostanziale. Più precisamente, riconosciamo che $S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le \frac{3}{4}\}$ e $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. La parametrizzazione è data da $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ e risulta

$$r_x \wedge r_y = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi, il calcolo del flusso del rotore di F attraverso S secondo la definizione fornisce

$$\Phi = \int_S \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma = \int_D (\nabla \wedge F)(r(x, y)) \cdot (r_x \wedge r_y)\, dx\, dy = \int_D dx\, dy = \text{Area}(D) = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Anche nel calcolo del flusso mediante il teorema di Stokes i conti si semplificano molto, poiché $+\partial D$ è la circonferenza parametrizzata da $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Pertanto, $\widetilde{\gamma}(t) = (r \circ \gamma)(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{1}{2}\right)$, $\widetilde{\gamma}'(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 0\right)$ e

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos t}, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \log\frac{5}{2}, * \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 0 \right) dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{3\pi}{4}\,.$$

Analisi III - Corso di Laurea in Fisica - A.A. 2019/20

Prova scritta dell'11/09/2020

1. **(totale punti 6)** Sia data la curva γ di equazioni $x(t) = t - 2\sin t$, $y(t) = \sin t$, con $t \in [0, \pi]$.
   (i) **(pt.2)** Stabilire se la curva γ è chiusa.
   (ii) **(pt.1)** Stabilire se la curva γ è semplice.
   (iii) **(pt.3)** Calcolare l'area del dominio piano delimitato dall'asse delle ascisse e dal sostegno di γ.

2. **(totale punti 8)** Sia dato il campo vettoriale
$$\bar{F}_{a,b}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + ay, \frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx, ax + \frac{2}{1 + (z - 1)^2} + 2yz\right).$$
   (i) **(pt.2)** Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $F_{a,b}$. $D_{a,b}$ è un insieme connesso?
   (ii) **(pt.2)** Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\bar{F}_{a,b}$ è irrotazionale su $D_{a,b}$.
   (iii) **(pt.3)** Sia $\bar{H}$ la restrizione del campo $\bar{F}_{a,b}$ all'aperto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 1, y > 0\}$ per i valori $a, b \in \mathbb{R}$ determinati al punto precedente. Osservato che $\bar{H}$ è conservativo su A, determinarne un potenziale.
   (iv) **(pt.1)** Osservando che la traccia di $\gamma(t) = (\sqrt{2} + t^2 \cos t, 1 + \sin t, 1 + \cos(3t))$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, è inclusa in A, calcolare $\displaystyle\int_{\bar{\gamma}} \bar{H} \cdot d\bar{s}$.

3. **(totale punti 6)** Data la serie di potenze in campo reale $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\log n}(x - 1)^n$, determinare:
   (i) **(pt.3)** l'intervallo aperto di convergenza I;
   (ii) **(pt.2)** l'insieme I_s di convergenza semplice;
   (iii) **(pt.1)** l'insieme I_a di convergenza assoluta.

4. **(totale punti 10)**
   (i) **(pt.2)** Calcolare l'area della fascia sferica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq 2z \leq 1\}$.
   (ii) **(pt.4+4)** Posto $F(x, y, z) = \left(2ze^{2x}, x + \log(z + 3), e^{2x} + \frac{y}{z + 3}\right)$, calcolare il flusso del rotore di F attraverso S (orientata con normale uscente dalla sfera), sia con la definizione, sia mediante il teorema di Stokes.

Risposte e svolgimenti

1. Sia data la curva γ di equazioni $x(t) = t - 2\sin t$, $y(t) = \sin t$, con $t \in [0, \pi]$.

   (i) **(pt.2)** Stabilire se la curva γ è chiusa.

   (ii) **(pt.1)** Stabilire se la curva γ è semplice.

   (iii) **(pt.3)** Calcolare l'area del dominio piano delimitato dall'asse delle ascisse e dal sostegno di γ.

   Svolgimento. (i) Ricordiamo che una curva è chiusa se i suoi estremi coincidono. Nel caso in questione, posto $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, il punto iniziale è $\gamma(0) = (0, 0)$, mentre quello finale è $\gamma(\pi) = (\pi, 0)$, e si ha $\gamma(0) \neq \gamma(\pi)$. Dunque, la curva γ non è chiusa.
   (ii) Ricordiamo che una curva $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ non chiusa è semplice se la funzione γ è iniettiva sull'intervallo di parametrizzazione, ovvero se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$, $t_1, t_2 \in [a, b]$. Si ha che[1], per $t_1, t_2 \in [0, \pi]$,

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 2\sin t_1 = t_2 - 2\sin t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow t_1 - 2\sin t_1 = t_2 - 2\sin t_1 \Leftrightarrow t_1 = t_2.$$

   Quindi la curva γ è semplice.
   (iii) Detto D il dominio delimitato dall'asse x e da γ, si ha $+\partial D = \widetilde{\gamma} - \gamma$, dove $\widetilde{\gamma}(t) = (t, 0)$, $t \in [0, \pi]$. Utilizzando la formula $\text{Area}(D) = -\int_{+\partial D} y\, dx$, conseguenza delle formule di Gauss-Green, si trova

$$\text{Area}(D) = -\left[\int_{\widetilde{\gamma}} y\, dx - \int_{\gamma} y\, dx\right] = -\underbrace{\int_0^{\pi} 0\, dx}_{=0} + \int_0^{\pi} \sin t\, d(t - 2\sin t)$$
$$= \int_0^{\pi} \sin t\, dt - \int_0^{\pi} 2\sin t \cos t\, dt = -[\cos t]_0^{\pi} - \underbrace{[\sin^2 t]_0^{\pi}}_{=0} = 2.$$

2. Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + ay, \frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx, ax + \frac{2}{1 + (z - 1)^2} + 2yz\right).$$

   (i) **(pt.2)** Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $F_{a,b}$. $D_{a,b}$ è un insieme connesso?

   (ii) **(pt.2)** Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\bar{F}_{a,b}$ è irrotazionale su $D_{a,b}$.

---

[1] È corretto, anche se meno diretto, il seguente procedimento: per $t_1, t_2 \in [0, \pi]$,

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 2\sin t_1 = t_2 - 2\sin t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 2\sin t_1 = t_2 - 2\sin t_2 \\ t_1 = t_2 \vee t_1 = \pi - t_2 \end{cases}$$

Se $t_1 = t_2$ abbiamo concluso. Se $t_1 = \pi - t_2$ la prima equazione implica

$$\pi - t_2 - 2\sin(\pi - t_2) = t_2 - 2\sin t_2 \Leftrightarrow \pi - 2\sin t_2 = 2t_2 - 2\sin t_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \pi - t_2 = \frac{\pi}{2} = t_2.$$

(iii) **(pt.3)** Sia $\bar{H}$ la restrizione del campo $\bar{F}_{a,b}$ all'aperto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 1, y > 0\}$ per i valori $a, b \in \mathbb{R}$ determinati al punto precedente. Osservato che $\bar{H}$ è conservativo su A, determinarne un potenziale.

(iv) **(pt.1)** Osservando che la traccia di $\gamma(t) = (\sqrt{2} + t^2 \cos t, 1 + \sin t, 1 + \cos(3t))$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, è inclusa in A, calcolare $\displaystyle\int_{\bar{\gamma}} \bar{H} \cdot d\bar{s}$.

Svolgimento. (i) Il dominio di $F_{a,b}$ è

$$D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \neq \pm 1\,,\ y \neq 0\}$$

e non è connesso essendo costituito da sei aperti disgiunti. Si noti che il dominio non dipende dai parametri a e b.

(ii) Il campo $F_{a,b}$ è irrotazionale sul suo dominio quando $\nabla \wedge F_{a,b} = 0$ in $D_{a,b}$ cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2-1} + ay\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{x^2-1} + ay\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax + \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(ax + \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 0 = a \\ 2z = 2z\,. \end{cases}$$

Quindi il campo $F_{a,b}$ è irrotazionale sul suo dominio solo quando $a = b = 0$.

(iii) Il campo

$$\bar{H}(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2-1}, \frac{1}{y} + 1 + z^2, \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz\right)$$

è conservativo in A perché è irrotazionale in A ed A è semplicemente connesso, in quanto convesso. Un potenziale di $\bar{H}$ in A è una funzione $U \colon A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e tale che $\nabla U = \bar{H}$ in A. Possiamo calcolare U col metodo delle integrazioni parziali:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-1} \quad \text{in } A \ \Rightarrow\ U(x,y,z) = \log(x^2-1) + V(y,z)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1 + z^2 \quad \text{in } A \ \Rightarrow\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1 + z^2 \quad \text{in } A \ \Rightarrow\ V(x,y) = \log y + y + yz^2 + W(z)$$
$$\Rightarrow\ U(x,y,z) = \log(x^2-1) + \log y + y + yz^2 + W(z)$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz \Rightarrow W'(z) = \frac{2}{1+(z-1)^2} \Rightarrow W(z) = 2\arctan(z-1) + C$$
$$\Rightarrow\ U(x,y,z) = \log(x^2-1) + \log y + y + yz^2 + 2\arctan(z-1) + C,$$

essendo C una costante.

(iv) La traccia di γ è contenuta in A perché se $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ allora $\sqrt{2} + t^2 \cos t \geq \sqrt{2} > 1$ e $1 + \sin t \geq 1 > 0$. Inoltre essendo $\bar{H}$ conservativo in A, con potenziale U, si ha

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{H} \cdot d\bar{s} = U\left(\bar{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U(\bar{\gamma}(0)) = U\left(\sqrt{2}, 2, 1\right) - U\left(\sqrt{2}, 1, 2\right) = \log 2 - 1 - \frac{\pi}{2}\,.$$

3. Data la serie di potenze in campo reale $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\log n}(x-1)^n$, determinare:

   (i) **(pt.3)** l'intervallo aperto di convergenza I;

(ii) **(pt.2)** l'insieme I_s di convergenza semplice;

(iii) **(pt.1)** l'insieme I_a di convergenza assoluta.

Svolgimento. (i) La serie proposta è una serie di potenze reale di centro $x_0 = 1$ e coefficienti $a_n = \frac{2^n}{\log n}$. Il suo raggio di convergenza si può ottenere calcolando

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{\log n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\exp\left(\underbrace{-\frac{\log\log n}{n}}_{\to 0}\right) = 2$$

e quindi $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$. L'intervallo aperto di convergenza è $I = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(ii) Posto $x = \frac{1}{2}$, la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}, \tag{1}$$

che è di Leibniz. Infatti, posto $b_n = \frac{1}{\log n} > 0$, $n \geq 2$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \text{ e } b_{n+1} = \frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log n} = b_n \text{ per ogni } n \geq 2.$$

Pertanto, è convergente. Posto $x = \frac{3}{2}$, si trova invece la serie a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{\log n},$$

che è divergente. Infatti, posto $c_n = \frac{3^n}{\log n}$, si trova, grazie ai limiti fondamentali,

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty \neq 0.$$

Quindi si ha $I_s = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(iii) Nell'interno dell'intervallo di convergenza si ha convergenza assoluta. In $x = \frac{1}{2}$ la convergenza è semplice, poichè la serie formata con i moduli dei termini della (1),

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n},$$

è divergente, grazie al criterio di confronto. Infatti, per ogni $n \geq 2$,

$$0 < \log n < n \Rightarrow \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} > 0,$$

e la serie armonica è divergente. Concludiamo che $I_a = I = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

4. (i) **(pt.2)** Calcolare l'area della fascia sferica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\; 0 \leq 2z \leq 1\}$.

(ii) **(pt.4+4)** Posto $F(x,y,z) = \left(2ze^{2x}\,,\, x+\log(z+3)\,,\, e^{2x}+\dfrac{y}{z+3}\right)$, calcolare il flusso del rotore di F attraverso S (orientata con normale uscente dalla sfera), sia con la definizione, sia mediante il teorema di Stokes.

Svolgimento. (i) La fascia sferica S si può parametrizzare mediante la funzione

$$r(\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \varphi \in [-\pi,\pi]\,,\ \theta \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right].$$

Il dominio dei parametri è $D = [-\pi,\pi] \times \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$. Si ha che

$$r_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}, \quad r_\varphi \wedge r_\theta = -\sin\theta \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}.$$

In particolare, $|r_\varphi \wedge r_\theta| = \sin\theta$ per $\theta \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ e l'area di S è data da

$$\text{Area}(S) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, |r_\varphi \wedge r_\theta| = 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = 2\pi\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \pi\,.$$

(ii) Il rotore di F è dato da

$$\nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & 2ze^{2x} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x+\log(z+3) \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & e^{2x}+\frac{y}{z+3} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il versore normale associato alla parametrizzazione r è dato da

$$\frac{r_\varphi \wedge r_\theta}{|r_\varphi \wedge r_\theta|} = -r$$

e punta verso l'interno. Per parametrizzare la superficie S in modo che il versore normale sia uscente dalla sfera, basta scambiare l'ordine delle variabili e considerare la parametrizzazione $\widetilde{r}(\theta,\varphi) = r(\varphi,\theta)$ definita su $\widetilde{D} = \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi,\pi]$. Allora il versore normale è

$$N = \frac{\widetilde{r}_\theta \wedge \widetilde{r}_\varphi}{|\widetilde{r}_\theta \wedge \widetilde{r}_\varphi|} = \widetilde{r}.$$

Il flusso del rotore di F attraverso S secondo la definizione è dunque dato da

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, [\nabla \wedge F(\widetilde{r}(\theta,\varphi))] \cdot \widetilde{r}_\varphi(\theta,\varphi) \wedge \widetilde{r}_\theta(\theta,\varphi) \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, \sin\theta\cos\theta = \pi\left[-\cos^2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Il teorema di Stokes è applicabile e ci assicura che

$$\Phi = \int_{\widetilde{r}(+\partial\widetilde{D})} F \cdot ds = \int_{\widetilde{\gamma}_1} F \cdot ds + \int_{\widetilde{\gamma}_2} F \cdot ds + \int_{-\widetilde{\gamma}_3} F \cdot ds + \int_{-\widetilde{\gamma}_4} F \cdot ds,$$

dove $\widetilde{\gamma}_i = \widetilde{r} \circ \gamma_i$, $i = 1,\ldots,4$, con

$$\begin{aligned} &\gamma_1(t) = (t,-\pi) \quad \text{con } \tfrac{\pi}{3} \le t \le \tfrac{\pi}{2}, && \gamma_2(t) = (\tfrac{\pi}{2},t) \quad \text{con } -\pi \le t \le \pi, \\ &\gamma_3(t) = (t,\pi) \quad \text{con } \tfrac{\pi}{3} \le t \le \tfrac{\pi}{2}, && \gamma_4(t) = (\tfrac{\pi}{3},t) \quad \text{con } -\pi \le t \le \pi, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\widetilde{\gamma}_1(t) = (-\sin t, 0, \cos t) \quad \text{con } \tfrac{\pi}{3} \le t \le \tfrac{\pi}{2}, \qquad \widetilde{\gamma}_2(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad \text{con } -\pi \le t \le \pi,$$
$$\widetilde{\gamma}_3(t) = (-\sin t, 0, \cos t) \quad \text{con } \tfrac{\pi}{3} \le t \le \tfrac{\pi}{2}, \qquad \widetilde{\gamma}_4(t) = (\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \tfrac{1}{2}) \quad \text{con } -\pi \le t \le \pi.$$

In particolare,

$$\int_{-\widetilde{\gamma}_3} F \cdot ds = -\int_{\widetilde{\gamma}_3} F \cdot ds = -\int_{\widetilde{\gamma}_1} F \cdot ds.$$

Rimane dunque da calcolare

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{r}(+\partial\widetilde{D})} F \cdot ds &= \int_{\widetilde{\gamma}_2} F \cdot ds - \int_{\widetilde{\gamma}_4} F \cdot ds = \int_{-\pi}^{\pi} F(\widetilde{\gamma}_2(t)) \cdot \widetilde{\gamma}_2'(t)\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} F(\widetilde{\gamma}_4(t)) \cdot \widetilde{\gamma}_4'(t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(0, \cos t + \log 3, e^{2\cos t} + \frac{\sin t}{3}\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\ dt \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{\sqrt{3}\cos t}, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \log\frac{7}{2}, e^{\sqrt{3}\cos t} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t}{\frac{5}{2}}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 0\right)\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

che coincide con quanto calcolato mediante la definizione.
In alternativa, anziché parametrizzare S come sopra, la si può rappresentare come grafico. Questa scelta semplifica i calcoli in modo sostanziale. Più precisamente, riconosciamo che $S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{3}{4} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ e $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. La parametrizzazione è data da $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ e risulta

$$r_x \wedge r_y = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi, il calcolo del flusso del rotore di F attraverso S secondo la definizione fornisce

$$\Phi = \int_S \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma = \int_D (\nabla \wedge F)(r(x, y)) \cdot (r_x \wedge r_y)\, dx\, dy = \int_D dx\, dy = \text{Area}(D) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Anche nel calcolo del flusso mediante il teorema di Stokes i conti si semplificano molto, poiché $+\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$, dove γ_1 è la circonferenza parametrizzata da $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ e γ_2 è la circonferenza parametrizzata da $\gamma_2(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Pertanto,

$$\widetilde{\gamma}_1(t) = (r \circ \gamma_1)(t) = (\cos t, \sin t, 0) \Rightarrow \widetilde{\gamma}_1'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)\,,\ t \in [0, 2\pi],$$

e

$$\widetilde{\gamma}_2(t) = (r \circ \gamma_2)(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \widetilde{\gamma}_2'(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 0\right),\ t \in [0, 2\pi].$$

Troviamo quindi

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi} (0, \cos t + \log 3, *) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\ dt \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \left(e^{\sqrt{3}\cos t}, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \log\frac{7}{2}, *\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 0\right)\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$