

SUPERFICI E INTEGRALI DI SUPERFICIE

ANALISI III - CDL IN FISICA

VIVINA BARUTELLO, PAOLO CALDIROLI

INDICE

1. Superfici	1
1.1. Superfici parametriche	1
1.2. Superfici cartesiane	7
1.3. Superfici di rotazione	8
2. Integrazione su superfici	11
2.1. Cambi di parametrizzazione in una superficie parametrica	12
2.2. Superfici orientabili	13
2.3. Calcolo di un flusso attraverso una superficie con orientazione prescritta	15
2.4. Il teorema di Stokes	19
2.5. Teorema della divergenza	29

1. SUPERFICI

1.1. Superfici parametriche. Una superficie di \mathbb{R}^3 può essere espressa in diversi modi. Un primo modo è in *forma implicita*, ovvero attraverso una funzione data $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

(1)
$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}.$$

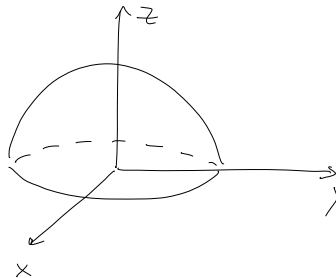
Esempio 1.1. *L'insieme*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

è la superficie sferica di raggio R centrata nell'origine e può essere vista come superficie in forma implicita introducendo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Volendo considerare solo la semisfera superiore

$$S^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

possiamo descrivere S^+ nella forma (1) prendendo la funzione $f(x, y, z) = z - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.



Una superficie può anche essere data come bordo di un dominio di \mathbb{R}^3

$$S = \partial E, \quad E \subset \mathbb{R}^3.$$

Esempio 1.2. Consideriamo il tronco di cilindro con asse coincidente con l'asse z

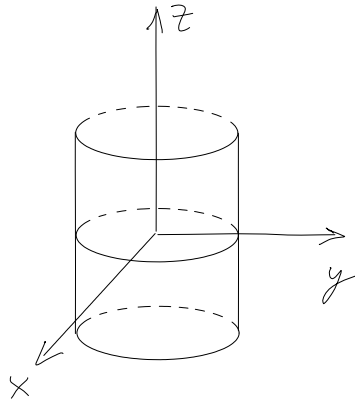
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq 1\},$$

in questo caso $\partial E = S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ con

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = -1\} \quad (\text{disco inferiore}),$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\} \quad (\text{disco superiore}),$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z^2 \leq 1\} \quad (\text{superficie laterale}).$$



L'insieme S_3 dell'esempio precedente può essere scritto diversamente, ovvero

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos u, y = \sin u, u \in [0, 2\pi], z \in [-1, 1]\}.$$

Le coordinate x, y, z del generico punto di S_3 vengono quindi espresse in funzione di due sole variabili. Più precisamente, chiamando

$$\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{bmatrix}, \quad (u, v) \in D = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$$

otteniamo la scrittura

$$S_3 = \{\varphi(u, v) : (u, v) \in D\}.$$

Questa rappresentazione di S_3 si dice forma parametrica. Più in generale, diamo la seguente definizione:

Definizione 1.3. S è una superficie parametrica di \mathbb{R}^3 se $S = \varphi(D)$ dove

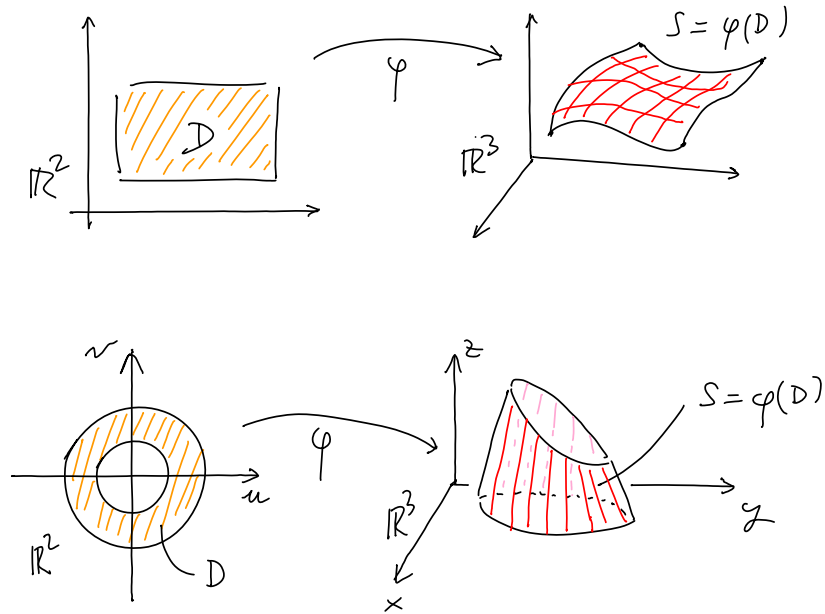
- D è un dominio regolare¹ di \mathbb{R}^2
- $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ cioè φ è continua in D , esistono e sono continue le derivate parziali φ_u e φ_v nella parte interna di D e si possono estendere in modo continuo su D .

¹Un dominio D è regolare se è chiuso e limitato, se il suo interno è non vuoto e se il suo bordo è unione di curve chiuse, semplici e regolari a tratti.

Le variabili u, v sono i parametri della superficie, D è il dominio dei parametri e

$$\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

è detta parametrizzazione della superficie.



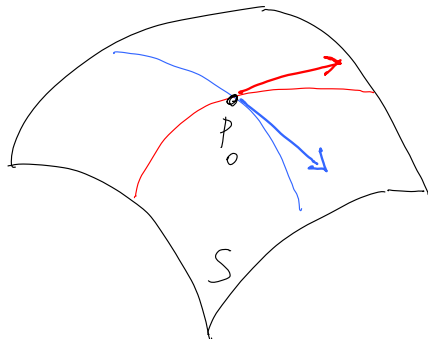
Osservazione 1.4. Una superficie parametrica ammette infinite parametrizzazioni.

Essendo la parametrizzazione φ di classe C^1 possiamo calcolare

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_v = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{bmatrix} y_u z_v - z_u y_v \\ z_u x_v - x_u z_v \\ x_u y_v - y_u x_v \end{bmatrix},$$

e darle un'interpretazione geometrica. Fissato $(u_0, v_0) \in D$, chiamiamo $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ e consideriamo le curve passanti per P_0

$$(2) \quad u \mapsto \gamma_1(u) := \varphi(u, v_0), \quad v \mapsto \gamma_2(v) := \varphi(u_0, v).$$



I sostegni di γ_1 e γ_2 giacciono su S e

$$v_1 = \varphi_u(u_0, v_0), \quad v_2 = \varphi_v(u_0, v_0),$$

sono rispettivamente i vettori tangenti a γ_1 e γ_2 nel punto P_0 . Se i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, cioè sono non nulli e non collineari

$$(*) \quad v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_1 \nparallel v_2$$

vi è un unico piano passante per P_0 che li contiene. Tale piano si chiama piano tangente alla superficie S in P_0 . In questa situazione possiamo definire il *versore normale alla superficie S in P_0*

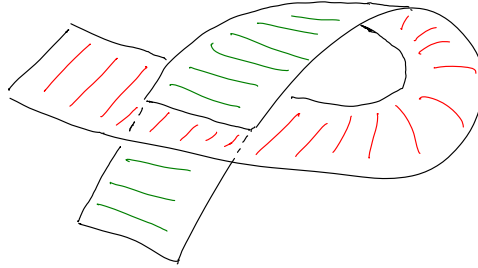
$$N = \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{|\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)|}$$

che risulta ovviamente essere ortogonale sia a v_1 che a v_2 e quindi al piano tangente, che si può così esprimere nella forma

$$\Pi := \{p \in \mathbb{R}^3 : (p - P_0) \cdot N = 0.\}$$

Definizione 1.5. *Un superficie parametrica $S = \varphi(D)$ si dice regolare se in ogni suo punto sono soddisfatte le condizioni (*) cioè se $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in D$; si dice semplice se la mappa φ è una biiezione.*

Un esempio di superficie non semplice è dato nella figura seguente:



Definizione 1.6. *L'area di una superficie parametrica è*

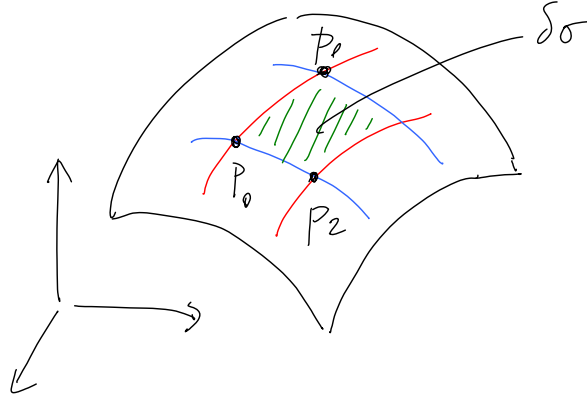
$$\text{Area}(S) = \int_D |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \, du \, dv.$$

Osservazione 1.7. *L'integrale della precedente definizione è ben definito in quanto $|\varphi_u \wedge \varphi_v|$ è una funzione continua dal dominio D a valori in \mathbb{R} e D , essendo regolare, è chiuso e limitato. Che l'integrale della precedente definizione rappresenti l'area della superficie parametrica $S = \varphi(D)$ si giustifica intuitivamente ragionando così. Preso $P_0 = \varphi(u_0, v_0) \in S$ con (u_0, v_0) interno a D , consideriamo degli incrementi $\delta u > 0$, $\delta v > 0$ sufficientemente piccoli in modo che il rettangolo $[u_0, u_0 + \delta u] \times [v_0, v_0 + \delta v]$ sia contenuto in D . Vogliamo scrivere l'area approssimata della porzione di superficie data da*

$$\{\varphi(u, v) : (u, v) \in [u_0, u_0 + \delta u] \times [v_0, v_0 + \delta v]\}$$

quando δu e δv sono presi piccoli. Chiamiamo $\delta\sigma$ tale area e, per comodità, denotiamo

$$P_1 = \varphi(u_0 + \delta u, v_0), \quad P_2 = \varphi(u_0, v_0 + \delta v) \quad \text{e} \quad P_3 = \varphi(u_0 + \delta u, v_0 + \delta v).$$



Dunque $\delta\sigma$ è l'area della porzione di superficie avente come vertici i punti P_0, P_1, P_2 e P_3 , e come lati le curve γ_1, γ_2 definite in (2) e le loro traslate. Se δu e δv sono piccoli allora $\delta\sigma$ è approssimabile con il parallelogramma di lati $\overline{P_0P_1}$ e $\overline{P_0P_2}$, quindi

$$\delta\sigma \approx |\overline{P_0P_1} \wedge \overline{P_0P_2}|.$$

Essendo $\overline{P_0P_1} \approx \varphi_u(u_0, v_0) \delta u$ e $\overline{P_0P_2} \approx \varphi_v(u_0, v_0) \delta v$ otteniamo

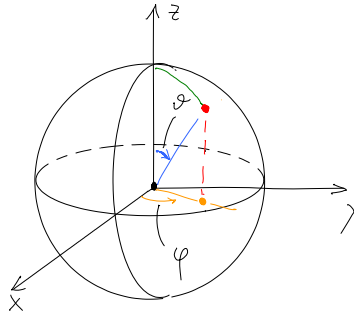
$$\delta\sigma \approx |\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)| \delta u \delta v, .$$

L'area di S si ottiene sommando le aree di tutti gli elementi di vertici $\varphi(u, v)$, $\varphi(u + \delta u, v)$, $\varphi(u, v + \delta v)$ e $\varphi(u + \delta u, v + \delta v)$. Formalizzando rigorosamente questo ragionamento, si ottiene appunto

$$\text{Area}(S) = \int_S d\sigma = \int_D |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| du dv .$$

Esempio 1.8 (Superficie sferica). La superficie sferica di raggio R (con R costante positiva fissata) è una superficie parametrica di parametrizzazione

$$p(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$



Essendo

$$p_\vartheta(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ -R \sin \vartheta \end{bmatrix}, \quad p_\varphi(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_\vartheta \wedge p_\varphi = (R \sin \vartheta) p(\vartheta, \varphi)$$

si ha che $|p_\vartheta \wedge p_\varphi| = R^2 \sin \vartheta$ e

$$\text{Superficie(sfera)} = \int_D R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta = 4\pi R^2.$$

Esempio 1.9. Calcolare l'area della superficie

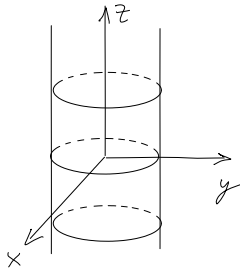
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

La superficie S è una porzione della superficie laterale del cilindro definito dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$. Nella definizione di S entrano in gioco tre superfici

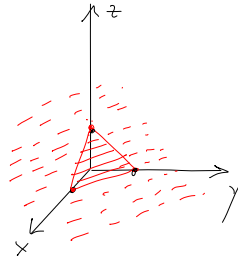
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\},$$

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$

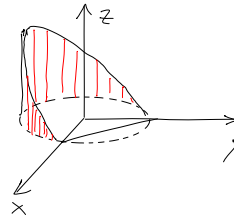
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x - y\}$$



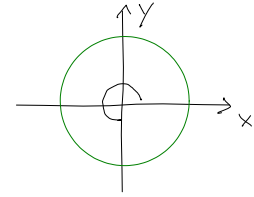
la superficie C



la superficie S_2



la superficie S



si cerca $S \cap S_1$

L'intersezione tra S ed S_1 è la circonferenza parametrizzabile da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$; dobbiamo quindi determinare t tale per cui

$$g(t) = 1 - \cos t - \sin t \geq 0.$$

Risulta che la disuguaglianza precedente è soddisfatta per $t \in [\pi/2, 2\pi]$. La superficie S può quindi essere scritta come superficie parametrica di parametrizzazione

$$\varphi(t, z) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ z \end{bmatrix}$$

definita su

$$D = \{(t, z) \in \mathbb{R}^2 : t \in [\pi/2, 2\pi], 0 \leq z \leq 1 - \cos t - \sin t\}$$

Essendo

$$\varphi_t(t, z) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \varphi_z(t, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \implies \quad \varphi_t(t, z) \wedge \varphi_z(t, z) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix},$$

quindi $|\varphi_t \wedge \varphi_z| = 1$ e

$$\text{Area}(S) = \int_D |\varphi_t \wedge \varphi_z| \, dt \, dz = \text{Area}(D) = \int_{\pi/2}^{2\pi} \left(\int_0^{1-\cos t-\sin t} dz \right) dt = \frac{3\pi}{2} + 2.$$

Osservazione 1.10. Rileggiamo l'esempio precedente in un contesto più generale. Un insieme della forma

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = 0, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

definisce una superficie che corrisponde alla sezione del cilindroide

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = 0\}$$

compresa tra le superfici cartesiane

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g_1(x, y)\} \quad e \quad S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g_2(x, y)\}.$$

La superficie S si può rappresentare come superficie parametrica nel modo seguente. Si prende una parametrizzazione $\gamma(t)$, con $t \in [a, b]$, della curva $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = 0, z = 0\}$. Quindi $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$ con $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dobbiamo prendere in considerazione solamente i valori del parametro $t \in [a, b]$ tali per cui

$$g_1(\gamma(t)) \leq g_2(\gamma(t)).$$

Supponiamo che questa disuguaglianza sia verificata per $t \in [a_1, b_1] \subset [a, b]$, allora una parametrizzazione di S è data da

$$\varphi(t, z) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad (t, z) \in D = \{(t, z) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq t \leq b_1, g_1(\gamma(t)) \leq z \leq g_2(\gamma(t))\}.$$

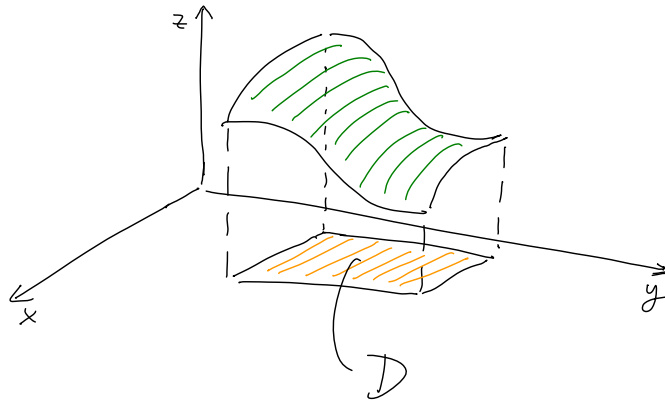
Inoltre, ricordando il significato geometrico dell'integrale curvilineo di prima specie,

$$\text{Area}(S) = \int_{\tilde{\gamma}} (g_2 - g_1) ds$$

dove $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[a_1, b_1]}$.

1.2. Superfici cartesiane. Le superfici cartesiane sono quelle superfici che corrispondono al grafico di una funzione di classe C^1 , $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con D dominio regolare. Quindi

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$



Una superficie cartesiana è una superficie parametrica, per vederlo è sufficiente definire la funzione $\varphi(u, v) = [u, v, f(u, v)]^T$. In questo caso si ha

$$\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u, v) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_u(u, v) \\ -f_v(u, v) \\ 1 \end{bmatrix},$$

dunque, essendo la terza componente sempre pari a 1,

$$|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \neq 0, \quad \forall (u, v) \in D.$$

Una superficie cartesiana è dunque regolare, inoltre in ogni punto il suo versore normale non è ortogonale all'asse z ed è diretto verso l'alto. La sua area è

$$\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)} \, du \, dv.$$

Essendo il grafico di una funzione, una superficie cartesiana è anche semplice.

Esempio 1.11. *Calcolare l'area della superficie cartesiana*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0, z = 5 - 2x\}.$$

La funzione f che definisce la superficie è

$$f(x, y) = 5 - 2x,$$

definita sulla semicirconferenza

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$$

Essendo $f_x(x, y) = -2$ e $f_y(x, y) = 0$ otteniamo

$$\text{Area}(S) = \int_D \sqrt{1 + 4} \, dx \, dy = \sqrt{5} \, \text{Area}(D) = \sqrt{5}\pi.$$

Esempio 1.12. *La superficie S dell'Es. 1.9 poteva essere interpretata come superficie cartesiana introducendo la funzione $f(x, y) = 1 - x - y$ e calcolando l'integrale*

$$\text{Area}(S) = \int_{\gamma} f \, ds$$

dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [\pi/2, 2\pi]$.

1.3. Superfici di rotazione. Fissiamo una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 e tale che

$$\gamma(t) \in \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}, \quad t \in [a, b].$$

Sia S la superficie ottenuta ruotando il sostegno di γ attorno all'asse z . Allora se

$$\gamma(t) = (g_1(t), 0, g_2(t))$$

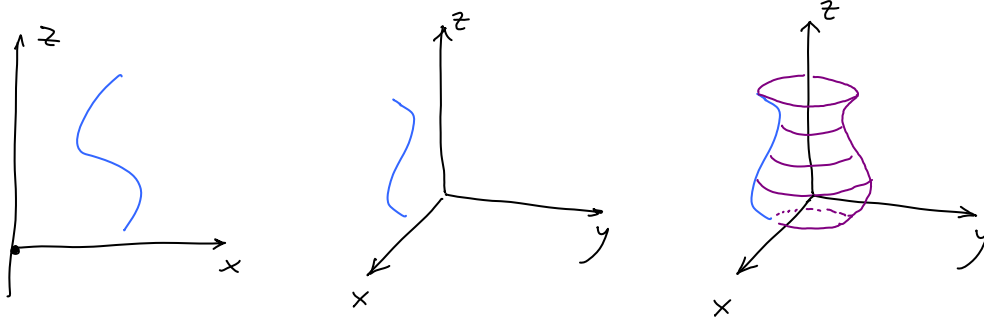
abbiamo la parametrizzazione della superficie S

$$\varphi(t, \vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ 0 \\ g_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t) \cos \vartheta \\ g_1(t) \sin \vartheta \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

dove ϑ è l'angolo della rotazione attorno all'asse z . Il dominio dei parametri è

$$D = \{(t, \vartheta) : a \leq t \leq b, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\} = [a, b] \times [0, 2\pi].$$

Si noti che effettivamente D è un dominio regolare e φ è di classe C^1 .



Vogliamo ora determinare l'area di una superficie di rotazione a partire dalla curva γ che la genera. Sappiamo che

$$\text{Area}(S) = \int_D |\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta| dt d\vartheta$$

Essendo

$$\varphi_t(t, \vartheta) \wedge \varphi_\vartheta(t, \vartheta) = \begin{bmatrix} g'_1(t) \cos \vartheta \\ g'_1(t) \sin \vartheta \\ g'_2(t) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -g_1(t) \sin \vartheta \\ g_1(t) \cos \vartheta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1(t)g'_2(t) \cos \vartheta \\ g_1(t)g'_2(t) \sin \vartheta \\ g_1(t)g'_1(t) \end{bmatrix}$$

ed essendo $g_1(t) \geq 0$, abbiamo che

$$|\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta| = g_1(t) \sqrt{(g'_1(t))^2 + (g'_2(t))^2}$$

quindi

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_a^b g_1(t) \sqrt{(g'_1(t))^2 + (g'_2(t))^2} dt.$$

Osservando che l'ascissa del baricentro di γ è

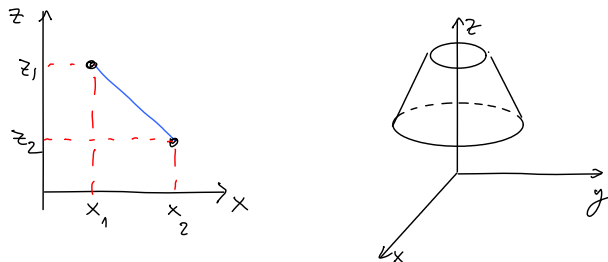
$$\bar{x} = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x ds = \frac{1}{L(\gamma)} \int_a^b g_1(t) |\gamma'(t)| ds = \frac{1}{L(\gamma)} \int_a^b g_1(t) \sqrt{(g'_1(t))^2 + (g'_2(t))^2} dt$$

otteniamo la *Formula di Pappo-Guldino*

$$\text{Area}(S) = 2\pi L(\gamma) \bar{x}.$$

Esempio 1.13 (Superficie laterale di un (tronco di) cono o di un cilindro). Si consideri il segmento, contenuto nel piano $y = 0$, congiungente i punti $P_1 = (x_1, 0, z_1)$ e $P_2 = (x_2, 0, z_2)$ con $0 \leq x_1 < x_2$ e $z_1 \neq z_2$, e parametrizzato da

$$\gamma(t) = (x_1 + (x_2 - x_1)t, 0, z_1 + (z_2 - z_1)t), \quad t \in [0, 1].$$



Ruotando il supporto di γ attorno all'asse z otteniamo un tronco di cono se $x_1 > 0$, un cono se $x_1 = 0$. Essendo il baricentro del segmento il suo punto medio, abbiamo

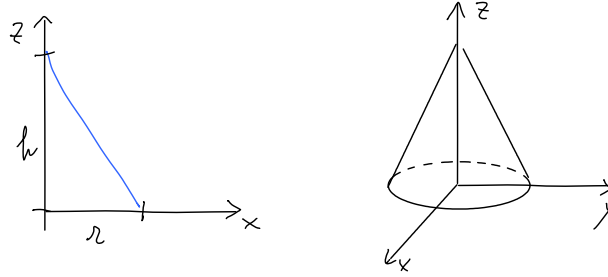
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e calcoliamo facilmente

$$L(\gamma) = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}.$$

La formula di Pappo-Guldino asserisce quindi che la superficie laterale del tronco di cono è

$$\text{Superficie laterale(tronco di cono)} = \pi(x_1 + x_2)\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}.$$

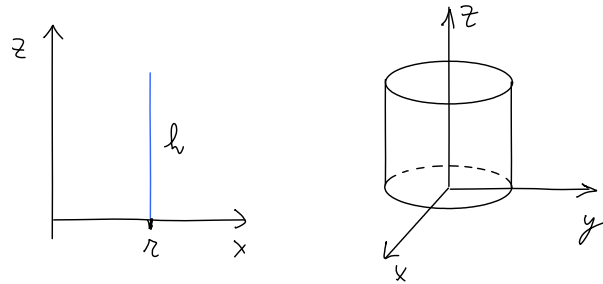


Quando $x_1 = 0$, ovvero quanto la superficie è quella laterale di un cono, ponendo $r := x_2$ e $h := |z_2 - z_1|$ otteniamo

$$\text{Superficie laterale(cono)} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

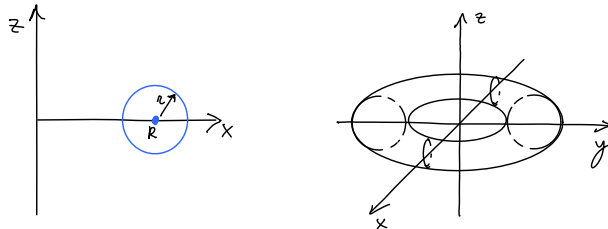
Quando $x_1 = x_2$ la superficie descritta è la porzione di superficie laterale di un cilindro. Ponendo $r = x_1 = x_2$ e $h := |z_2 - z_1|$ otteniamo

$$\text{Superficie laterale(cilindro)} = 2\pi r h.$$



Esempio 1.14 (Superficie toroidale). Consideriamo ora $0 < r \leq R$ e la circonferenza di raggio r , centro $(R, 0, 0)$ contenuta in $y = 0$

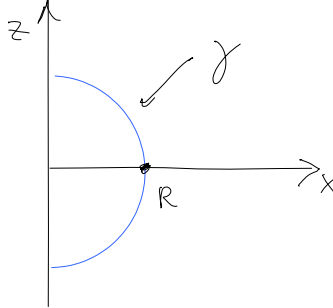
$$\gamma(t) = (R + r \cos \vartheta, 0, r \sin \vartheta).$$



Il suo baricentro ha coordinate $(R, 0, 0)$ e la sua lunghezza è $2\pi R$, quindi la superficie laterale del toro ottenuto ruotando il supporto di γ attorno all'asse z è

$$\text{Superficie}(\text{toro}) = 4\pi^2 r R.$$

Esempio 1.15 (Superficie sferica). La superficie sferica può anche essere interpretata come superficie di rotazione ottenuta a partire dalla curva $\gamma(t) = (R \cos t, 0, R \sin t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. In questo caso $L(\gamma) = \pi R$, $\bar{x} = \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R \cos t) R dt = \frac{2R}{\pi}$ e si ancora che la superficie della sfera di raggio R è $4\pi R^2$.



2. INTEGRAZIONE SU SUPERFICI

Sia S una superficie parametrica regolare con parametrizzazione $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definizione 2.1. Dato un campo scalare $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (si intende f continua) con A aperto contenente S , si definisce l'integrale di f su S

$$\int_S f d\sigma := \int_D f(\varphi(u, v)) |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| du dv.$$

In particolare, per $f \equiv 1$ si ottiene l'espressione dell'area di S .

Definizione 2.2. Dato un campo vettoriale $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (si intende F continua) con A aperto contenente S , si definisce il flusso di F attraverso S

$$\int_S F \cdot N d\sigma := \int_D F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)) du dv$$

Le definizioni date risultano essere coerenti con quanto già visto, ovvero

$$d\sigma = |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| du dv, \quad N = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)|}$$

Esempio 2.3. Calcolare il flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme q posta nell'origine attraverso la superficie sferica di raggio R e centrata in 0 .

Si tratta di un campo radiale e precisamente

$$F(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto; vogliamo calcolare

$$\int_S F \cdot N d\sigma$$

dove S è la sfera di raggio R che possiamo parametrizzare in coordinate polari, come nell'esempio 1.8. Dunque

$$p(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \sin \vartheta \\ R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \forall (\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \quad e \quad p_\vartheta \wedge p_\varphi = (R \sin \vartheta) p.$$

Calcoliamo ora, essendo $|p| = R$,

$$F(p) \cdot (p_\vartheta \wedge p_\varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{|p|^3} \cdot (R \sin \vartheta) p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} R \sin \vartheta \frac{|p|^2}{|p|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin \vartheta,$$

quindi

$$\int_S F \cdot N \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Si noti in particolare che il flusso non dipende dal raggio della sfera R .

2.1. Cambi di parametrizzazione in una superficie parametrica. Consideriamo una superficie parametrica $S = \varphi(D)$, con $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 e D dominio regolare di \mathbb{R}^2 .

Definizione 2.4. Un cambio di parametrizzazione è una trasformazione $g: \tilde{D} \rightarrow D$, dove \tilde{D} è un dominio regolare di \mathbb{R}^2 , g è biettiva, di classe C^1 e con inversa di classe C^1 .

Se denotiamo con (s, t) gli elementi del dominio \tilde{D} e con (u, v) quelli di D abbiamo

$$u = g_1(s, t), \quad v = g_2(s, t).$$

Consideriamo ora la funzione composta $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$; $\tilde{\varphi}$ risulta essere una parametrizzazione di S , infatti è di classe C^1 (in quanto lo sono φ e g), $\tilde{\varphi}(\tilde{D}) = S$ e abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_s(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} [\varphi(g_1(s, t), g_2(s, t))] = \varphi_u(g(s, t)) \frac{\partial g_1}{\partial s} + \varphi_v(g(s, t)) \frac{\partial g_2}{\partial s} \\ \tilde{\varphi}_t(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(g_1(s, t), g_2(s, t))] = \varphi_u(g(s, t)) \frac{\partial g_1}{\partial t} + \varphi_v(g(s, t)) \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{aligned}$$

quindi

$$(\tilde{\varphi}_s \wedge \tilde{\varphi}_t)(s, t) = (\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) \left[\frac{\partial g_1}{\partial s} \frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_2}{\partial s} \frac{\partial g_1}{\partial t} \right] = (\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) \det J_g(s, t)$$

dove J_g è la matrice jacobiana della funzione g . In base alla Definizione 2.1, l'integrale di un campo $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sulla superficie $S \subset A$ parametrizzata attraverso $\tilde{\varphi}$ è

$$\begin{aligned} \int_S f \, d\tilde{\sigma} &= \int_{\tilde{D}} f(\tilde{\varphi}(s, t)) |\tilde{\varphi}_s \wedge \tilde{\varphi}_t| \, ds \, dt \\ &= \int_{\tilde{D}} f(\varphi(g(s, t))) |(\varphi_u \wedge \varphi_v)(g(s, t))| |\det J_g(s, t)| \, ds \, dt. \end{aligned}$$

Utilizzando la formula del cambiamento di variabili per un integrale bidimensionale e ponendo $u = g_1(s, t)$, $v = g_2(s, t)$, otteniamo

$$\int_S f \, d\tilde{\sigma} = \int_D f(\varphi(u, v)) |(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)| \, du \, dv = \int_S f \, d\sigma.$$

Deduciamo quindi che *gli integrali di superficie di campi scalari non cambiano rispetto a cambi di parametrizzazione*. In particolare l'area di una superficie è invariante rispetto a cambi di parametrizzazione. Con conti del tutto analoghi possiamo dimostrare che invece *i flussi di campi*

vettoriali attraverso superfici (si veda la Definizione 2.2) rimangono costanti rispetto a cambi di parametrizzazione a meno di un segno dato dal segno del $\det J_g(s, t)$.

2.2. Superfici orientabili.

Definizione 2.5. Una superficie parametrica S con parametrizzazione $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice orientabile se esiste un campo (continuo) $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$|N(p)| = 1, \quad N(p) \cdot \varphi_u(p) = N(p) \cdot \varphi_v(p) = 0, \quad \forall p \in S.$$

Una superficie orientabile con assegnato campo (continuo) di versori normali si dice superficie orientata.

Se S è una superficie parametrica regolare e semplice, cioè esistono un dominio regolare D in \mathbb{R}^2 e una parametrizzazione $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $S = \varphi(D)$, φ è iniettiva (e dunque è una biiezione da D su S) e $\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0$ per ogni $(u, v) \in D$, allora S è orientabile e un campo di versori normali è dato da

$$N(p) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)|} \Big|_{(u, v) = \varphi^{-1}(p)} \quad \forall p \in S.$$

Con questa scelta di normali, diciamo che S è orientata secondo l'orientazione indotta dalla parametrizzazione φ .

Osservazione 2.6. La continuità del campo N è richiesta rispetto a $p \in S$ e non rispetto ai parametri $(u, v) \in D$.

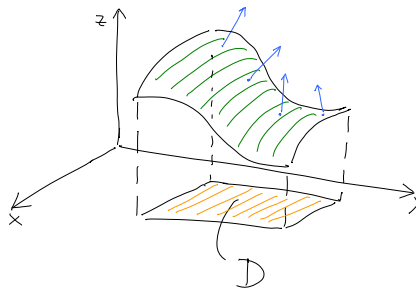
Esempio 2.7. Ogni superficie cartesiana è orientabile; sia infatti

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

con D dominio regolare e f di classe $C^1(D)$. Allora, come abbiamo già visto, possiamo scegliere la parametrizzazione

$$\varphi(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}, \quad \varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{bmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo scegliere il campo $N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$, ben definito su S e tale che $N = 1$, $N \cdot \varphi_u = N \cdot \varphi_v = 0$. Il campo N risulta inoltre continuo come funzione di $p \in S$.

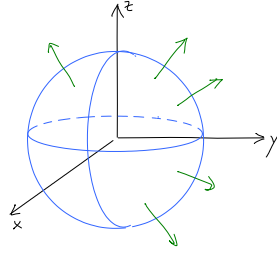


Si noti che anche il campo $\tilde{N} = -N$ è ammissibile rispetto alla definizione di superficie orientabile.

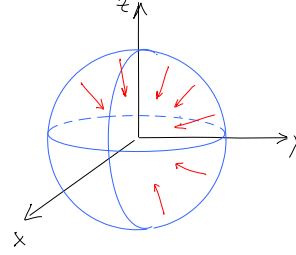
Esempio 2.8. La sfera di raggio R è una superficie orientabile. Considerando la parametrizzazione vista nell'Es. 1.8 a pagina 5, si ha che $p_\vartheta \wedge p_\varphi = (R \sin \vartheta) p$ e il versore $N = \frac{p_\vartheta \wedge p_\varphi}{|p_\vartheta \wedge p_\varphi|}$ è definito in ogni punto della sfera eccetto i poli (quando $\vartheta \in \{0, \pi\}$). Definendo ora

$$\tilde{N}: S \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{N}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{R}$$

abbiamo che il campo \tilde{N} induce un'orientazione sulla sfera. Osserviamo che anche il campo $\bar{N}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{R}$ induce un'orientazione su S .



sfera orientata con
versori normali uscenti



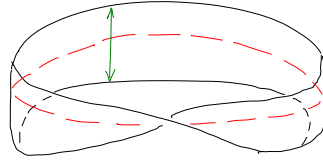
sfera orientata con
versori normali entranti

Esempio 2.9. Vediamo ora un esempio di superficie non orientabile, il nastro di Moebius. Consideriamo la parametrizzazione

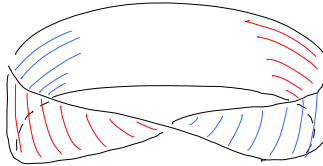
$$\varphi: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t, \vartheta) = \begin{bmatrix} \left(1 + t \cos \frac{\vartheta}{2}\right) \cos \vartheta \\ \left(1 + t \cos \frac{\vartheta}{2}\right) \sin \vartheta \\ t \sin \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}$$

che definisce una superficie semplice e regolare tale per cui

$$\varphi(t, 0) = \varphi(-t, 2\pi), \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$



Inoltre per ogni (t, ϑ) si ha che $\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta \neq 0$ e il versore normale è ben definito su S . Tuttavia $N = \frac{\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta}{|\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta|}$ soddisfa $|N| = 1$, $N \cdot \varphi_t = N \cdot \varphi_\vartheta = 0$, ma N non è continuo rispetto a $p \in S$, infatti si ha $N(t, 0) \neq N(t, 2\pi)$ per ogni $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.



La possibilità di orientare una superficie significa grosso modo che la superficie ha due facce e possiamo scegliere una di esse. Il prossimo risultato precisa meglio questo pensiero.

Teorema 2.10. Se S è una superficie orientabile, allora ammette solo due possibili orientazioni. Ovvero se $N_1, N_2: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono campi continui di versori normali, allora $N_1 = N_2$ oppure $N_1 = -N_2$.

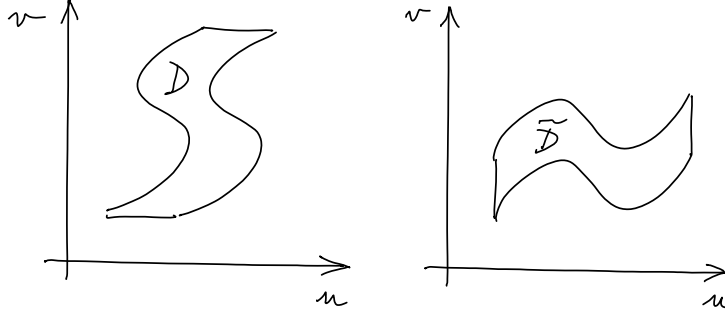
Data una superficie parametrica e orientabile, $S = \varphi(D)$, con campo di versori normali $N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$, è possibile cambiare l'orientazione di S con un cambio di parametrizzazione $g: \tilde{D} \rightarrow D$. Ci sono infatti due possibilità:

- se $\det J_g(s, t) > 0$ per ogni $(s, t) \in \tilde{D}$ allora φ e $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$ inducono la stessa orientazione su S ,
- se invece $\det J_g(s, t) < 0$ per ogni $(s, t) \in \tilde{D}$ allora φ e $\tilde{\varphi}$ inducono due orientazioni opposte su S .

Per passare all'orientazione opposta a quella indotta da φ è sufficiente considerare

$$(3) \quad \tilde{\varphi}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\varphi}(u, v) = \varphi(v, u),$$

con $\tilde{D} = \{(u, v): (v, u) \in D\}$.



In tal caso, il cambio di parametrizzazione è la funzione $g(u, v) = (v, u)$ la cui matrice jacobiana è

$$J_g(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det J_g(u, v) = -1$. Inoltre

$$\tilde{\varphi}(\tilde{D}) = S = \varphi(D), \quad \tilde{\varphi}_u = \varphi_v, \quad \tilde{\varphi}_v = \varphi_u, \quad \tilde{\varphi}_u \wedge \tilde{\varphi}_v = -\varphi_u \wedge \varphi_v,$$

quindi $\tilde{N} = -N$.

Definizione 2.11. Data una superficie parametrica S parametrizzata da $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, la superficie \tilde{S} di parametrizzazione (3) si dice orientata in senso opposto a S e si denota $-S$. Più in generale, data una superficie parametrica S orientata con un campo di normali $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$, la superficie opposta a S è quella in cui si considera come campo di normali $-N$.

Osserviamo che per ogni campo scalare $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che

$$\int_{-S} f d\sigma = \int_S f d\sigma$$

mentre per un campo vettoriale $F: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ si ha che

$$\int_{-S} F \cdot N d\sigma = - \int_S F \cdot N d\sigma.$$

2.3. Calcolo di un flusso attraverso una superficie con orientazione prescritta. Data una superficie S con orientazione prescritta dal campo N , un campo $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (con A aperto, $S \subset A$) vogliamo calcolare il flusso di F attraverso S , ovvero

$$\Phi = \int_S F \cdot N d\sigma.$$

La strategia da seguire può essere strutturata in tre passi:

- (1) parametrizziamo S con una parametrizzazione φ di dominio D ;

- (2) calcoliamo $I = \int_D F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)) du dv$;
- (3) confrontiamo l'orientazione indotta da φ con quella prescritta. Se è la stessa, allora $\Phi = I$, altrimenti $\Phi = -I$.

Esempio 2.12. *Si consideri il campo vettoriale*

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (z, yz, x)$$

e la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 3, z \leq 0\}$$

orientata con normale esterna alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Calcolare il flusso $\Phi = \int_S F \cdot N d\sigma$.

La disequazione $x^2 + y^2 \leq 3$ individua un cilindro pieno, quindi S è la calotta inferiore intercettata dal cilindro sulla sfera. Possiamo parametrizzare S come superficie cartesiana

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 3\} \quad e \quad f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Definiamo quindi

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, \quad (x, y) \in D, \quad S = \varphi(D),$$

da cui

$$\varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) = \begin{bmatrix} -f_x(x, y) \\ -f_y(x, y) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il versore normale indotto dalla parametrizzazione è quindi rivolto verso l'alto (la superficie è stata infatti parametrizzata come superficie parametrica); è quindi la normale opposta a quella richiesta dall'esercizio. Otteniamo quindi che il flusso attraverso S richiesto è opposto a quello indotto da φ , ovvero

$$\Phi = - \int_D F(\varphi(x, y)) \cdot \varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) dx dy;$$

essendo

$$F(\varphi(x, y)) \cdot \varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) = \begin{bmatrix} -\sqrt{4-x^2-y^2} \\ -y\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix} = 2x + y^2,$$

otteniamo, usando le coordinate polari per l'integrazione sul dominio D ,

$$\begin{aligned} \Phi &= - \int_D (2x + y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{2\pi} (2r \cos \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta) d\vartheta \\ &= -2 \int_0^{\sqrt{3}} r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta - \int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{9}{4}\pi. \end{aligned}$$

Esempio 2.13. Sia S la superficie cartesiana di equazione

$$z = \frac{4x}{y^2 + \sqrt{16x^2 + y^4}}$$

sul dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 4x^2 \leq y^2 \leq 4 - x^2\}$. Si dia per noto che la trasformazione

$$x = \frac{r^2}{2} \cos \vartheta \quad y = r \sin \vartheta$$

definisce un cambio di parametrizzazione dai parametri $(x, y) \in D$ ai parametri $(r, \vartheta) \in D_1 = [1, 2] \times [0, 2\pi)$.

(a) Riconoscere che

$$S = \left\{ \left(\frac{r^2}{2} \cos \vartheta, r \sin \vartheta, \cos \vartheta \right) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \right\}.$$

(b) Verificare che la superficie S parametrizzata come superficie cartesiana ha la stessa orientazione di quella corrispondente alla parametrizzazione rispetto a (r, ϑ) .

(a) La superficie S è data nella forma $S = \varphi(D)$ dove

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}, \quad \text{con } f(x, y) = \frac{4x}{y^2 + \sqrt{16x^2 + y^4}}.$$

Anche se non necessario ai fini dell'esercizio, notiamo che la regione D è quella compresa tra l'ellisse centrata nell'origine e semiassi $\frac{1}{2}$ e 1 e la circonferenza centrata nell'origine e raggio 2.

Dobbiamo verificare che $S = \varphi_1(D_1)$ dove

$$\varphi_1(r, \vartheta) = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{2} \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix};$$

sappiamo già che la trasformazione $g(r, \vartheta) = \left(\frac{r^2}{2} \cos \vartheta, r \sin \vartheta \right)$ definisce un cambio di parametri da D_1 in D e che in particolare $g(D_1) = D$. Basta quindi provare che $\varphi_1 = \varphi \circ g$ in D_1 ; infatti in tal caso

$$\varphi_1(D_1) = \varphi(g(D_1)) = \varphi(D) = S.$$

Abbiamo

$$\varphi_1 = \varphi \circ g \text{ in } D_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{r^2}{2} \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{2} \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ f\left(\frac{r^2}{2} \cos \vartheta, r \sin \vartheta\right) \end{bmatrix}, \quad \forall (r, \vartheta) \in D_1,$$

resta dunque da verificare che

$$\cos \vartheta = f\left(\frac{r^2}{2} \cos \vartheta, r \sin \vartheta\right), \quad \forall (r, \vartheta) \in D_1.$$

L'identità segue facilmente osservando che

$$4 \cos^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta = 4 \cos^2 \vartheta + (1 - \cos^2 \vartheta)^2 = (1 + \cos^2 \vartheta)^2.$$

(b) Ricordiamo che le parametrizzazioni di S indotte da φ e da φ_1 inducono la stessa orientazione su S se e solo se il determinante della matrice jacobiana della mappa g è positivo. Essendo

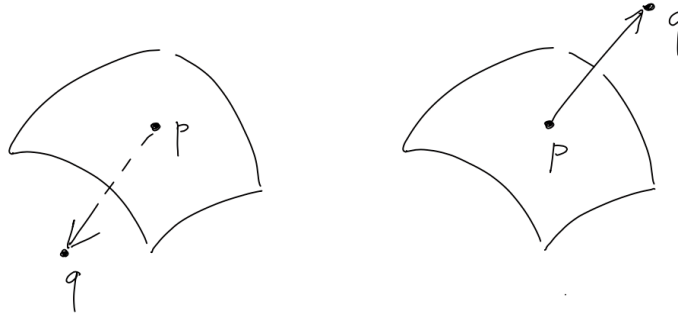
$$\det J_g(r, \vartheta) = \det \begin{bmatrix} r \cos \vartheta & -\frac{r^2}{2} \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{bmatrix} = r^2 \cos^2 \vartheta + \frac{r^2}{2} \sin^2 \vartheta \geq \frac{r^2}{2} \cos^2 \vartheta + \frac{r^2}{2} \sin^2 \vartheta = \frac{r^2}{2} > 0,$$

essendo $r \geq 1$.

2.3.1. Domande e risposte sull'orientazione di una superficie.

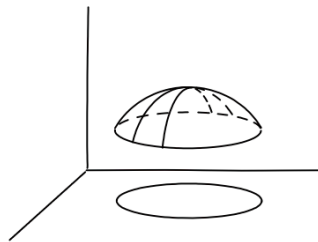
Domanda 2.1. *Come si fa a capire come è orientata una superficie?*

L'orientazione di una superficie è determinata dalla parametrizzazione scelta. Se la superficie S è parametrizzata da $\varphi: D \rightarrow S$ (D dominio dei parametri), l'orientazione è definita da $\varphi_u \wedge \varphi_v$. Bisogna fissare un punto $p = \varphi(u, v)$ e considerare il vettore che va da p a $q = p + \varphi_u \wedge \varphi_v$. La direzione di tale vettore ci dice come φ orienta la superficie S .

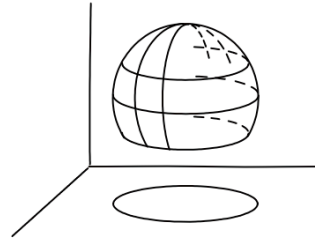


Domanda 2.2. *Quando una superficie è una superficie cartesiana?*

Una superficie S è una superficie cartesiana se è il grafico di una funzione a valori reali ovvero se esiste un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ e una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $S = \{(x, y, z): (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$. Inoltre S è una superficie cartesiana se e solo se ogni retta verticale interseca il grafico di S in al più un punto.



superficie cartesiana



superficie non cartesiana

Domanda 2.3. *Che orientazione ha una superficie rappresentabile in forma cartesiana? Risulta automaticamente orientata con normale rivolta verso l'alto?*

A prescindere dal fatto che una superficie sia rappresentabile in forma cartesiana, la sua orientazione dalla parametrizzazione che si sceglie. Consideriamo ad esempio la superficie

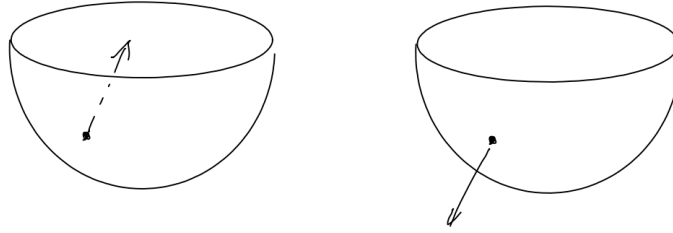
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\};$$

possiamo scrivere $S = \varphi(D)$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \end{bmatrix}$.

In questo caso il versore normale è un riscalamento di

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed è rivolto verso l'alto (e verso l'interno della semisfera). Se invece consideriamo la parametrizzazione attraverso le coordinate sferiche, ovvero se scriviamo $S = \Phi(\tilde{D})$ dove $\Phi(\vartheta, \varphi) = [\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta]^T$ e $\tilde{D} = [\pi/2, \pi] \times [0, 2\pi]$, otteniamo che il versore normale è un riscalamento di $\Phi_\vartheta \wedge \Phi_\varphi = (\sin \vartheta)\Phi$. In questo caso quindi il normale punta verso l'esterno della semisfera ed è quindi opposto a quello trovato con la parametrizzazione cartesiana.



Domanda 2.4. *Come si fa a cambiare orientazione ad una superficie? Che effetto si ottiene?*

Se S è una superficie orientata da una certa parametrizzazione $\varphi(u, v)$ definita in D , per cambiare orientazione basta scambiare l'ordine dei parametri considerando $\tilde{\varphi}(v, u) = \varphi(u, v)$ definita in $\tilde{D} = \{(v, u) : (u, v) \in D\}$. L'effetto è che il flusso cambia di segno.

2.4. Il teorema di Stokes. I campi conservativi, cioè quei campi vettoriali che ammettono un potenziale, si caratterizzano per il fatto che il loro integrale lungo una curva dipende unicamente dagli estremi della curva stessa e non dall'intero sostegno. Vediamo ora un risultato analogo per gli integrali superficiali.

Definizione 2.14. *Se un campo vettoriale $G: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si può scrivere nella forma $G = \text{rot } F$ per un qualche campo $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , diciamo che G ammette potenziale vettore F in A .*

Esempio 2.15. *Il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinitamente esteso percorso da corrente stazionaria è un campo che ammette potenziale vettore. Se collochiamo l'asse z in corrispondenza del filo, con orientazione corrispondente al verso di percorrenza della corrente, il campo magnetico assume la forma*

$$G(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus Z$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, I è l'intensità di corrente che fluisce nel filo e Z è l'asse z . Si verifica che G ammette potenziale vettore, dato da

$$F(x, y, z) = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ln(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

cioè $\text{rot } F = G$ in $\mathbb{R}^3 \setminus Z$.

Il prossimo risultato asserisce che se G è un campo che ammette un potenziale vettore in A ed S è una superficie parametrica in A allora il flusso di G attraverso S dipende solo dal bordo di S .

Teorema di Stokes. *Dato un campo $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 sull'aperto di \mathbb{R}^3 e data una superficie parametrica $S \subset A$ di parametrizzazione φ e di dominio di parametri $D \subset \mathbb{R}^2$ ($S = \varphi(D)$) vale*

$$\int_S (\text{rot } F) \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial S^+} F \cdot ds.$$

dove $\partial S^+ = \varphi(\partial D^+)$ è il cosiddetto trasformato del bordo di D orientato positivamente. Più precisamente, se $\partial D^+ = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k$ con Γ_i parametrizzata da $\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 0, \dots, k$, si calcola $\tilde{\gamma}_i = \varphi \circ \gamma_i$ e

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}_0} F \cdot ds + \dots + \int_{\tilde{\gamma}_k} F \cdot ds.$$

Osservazione 2.16. *Alcune osservazioni su teorema di Stokes.*

- (1) *Il campo di cui viene calcolato il flusso è un rotore.*
- (2) *Il teorema mette in relazione un integrale di superficie con un integrale di linea.*
- (3) *Il bordo ∂D deve essere orientato positivamente e di conseguenza devono essere orientate correttamente tutte le sue componenti Γ_i , $i = 0, \dots, k$.*
- (4) *La normale N utilizzata nel teorema per il calcolo del flusso è quella indotta dalla parametrizzazione φ della superficie S .*
- (5) *Segue dal teorema di Stokes che se due superfici hanno lo stesso bordo con la stessa orientazione, allora i flussi del rotore di un campo attraverso queste superfici sono uguali.*

Dimostrazione. Dimostriamo il risultato quando la parametrizzazione φ è di classe C^2 . Supponiamo inoltre che ∂D^* sia una curva chiusa, semplice e regolare di parametrizzazione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$; definendo ora $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ otteniamo

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_{\varphi(\partial D^+)} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot ds = \int_a^b F(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t) \, dt.$$

Denotiamo $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ e calcoliamo

$$\tilde{\gamma}'(t) = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \varphi_u(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + \varphi_v(\gamma(t)) \gamma_2'(t);$$

introducendo il campo $G: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G = (G_1, G_2)$ definito da

$$G_1(u, v) = F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_u(u, v), \quad G_2(u, v) = F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_v(u, v),$$

abbiamo

$$\begin{aligned} F(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t) &= F(\varphi(\gamma(t))) \cdot \varphi_u(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + F(\varphi(\gamma(t))) \cdot \varphi_v(\gamma(t)) \gamma_2'(t) \\ &= G_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + G_2(\gamma(t)) \gamma_2'(t) = G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \end{aligned}$$

dunque

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_a^b G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} G \cdot ds = \int_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} \right) du dv$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il teorema di Gauss-Green. Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial u} [F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_v] - \frac{\partial}{\partial v} [F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_u] \\ &= [DF(\varphi)\varphi_u] \cdot \varphi_v + F(\varphi) \cdot \varphi_{vu} - [DF(\varphi)\varphi_v] \cdot \varphi_u - F(\varphi) \cdot \varphi_{uv}, \end{aligned}$$

dove DF è la matrice jacobiana di F . Essendo φ di classe C^2 si ha che $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$; inoltre per ogni $a, b \in \mathbb{R}^3$ e $p \in A$ vale l'identità

$$[DF(p)a] \cdot b - [DF(p)b] \cdot a = [\text{rot } F(p)] \cdot (a \wedge b),$$

quindi

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial G_1}{\partial v} = [\text{rot } F(\varphi)] \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v)$$

e

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_D [\text{rot } F(\varphi(u, v))] \cdot (\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)) du dv = \int_S \text{rot } F \cdot N d\sigma.$$

Se la curva γ è regolare a tratti, si ragiona su ogni tratto e poi si somma. \square

2.4.1. Esercizi sul teorema di Stokes.

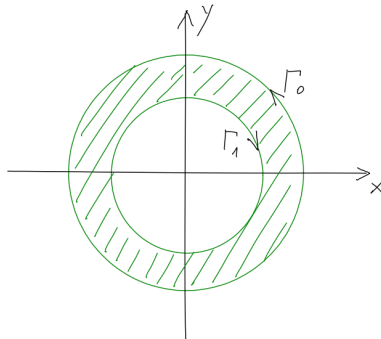
Esercizio 2.1. *Detta S la fascia di paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ corrispondente all'anello $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, calcolare il flusso del rotore del campo $F(x, y, z) = (y, z, x)$ attraverso S rappresentando S come superficie parametrica cartesiana. Stabilire inoltre se tale flusso è entrante oppure uscente dal paraboloide.*

S è una superficie cartesiana, ovvero

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = x^2 + y^2\}$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Il versore normale ad S indotto dalla parametrizzazione cartesiana è diretto verso l'alto quindi il flusso che calcoliamo utilizzando questo vettore normale è quello entrante nel paraboloide. Per applicare il teorema di Stokes dobbiamo calcolare $\partial S^+ = \varphi(\partial D^+)$. Il dominio D è un anello, il suo bordo è quindi composto da due circonferenze

$$\Gamma_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\};$$



per orientare ∂D positivamente dobbiamo percorrere Γ_0 in senso antiorario e Γ_1 in senso orario. Considerando le curve

$$\gamma_0(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), \quad \gamma_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

il supporto di γ_0 è Γ_0 , quello di γ_1 è $-\Gamma_1$. Possiamo quindi calcolare il flusso richiesto utilizzando il teorema di Stokes

$$\int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}_0} F \cdot ds - \int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds,$$

con $\tilde{\gamma}_0 = \varphi \circ \gamma_0$ $\tilde{\gamma}_1 = \varphi \circ \gamma_1$.

Essendo $\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}$ abbiamo $\tilde{\gamma}_0 = (3 \cos t, 3 \sin t, 9)$ e $\tilde{\gamma}_1 = (2 \cos t, 2 \sin t, 4)$, quindi $\tilde{\gamma}'_0 = (-3 \sin t, 3 \cos t, 0)$ e $\tilde{\gamma}'_1 = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0)$. Sostituendo otteniamo quindi

$$\int_{\tilde{\gamma}_0} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\tilde{\gamma}_0(t)) \cdot \tilde{\gamma}'_0(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (-9 \sin^2 t + 27 \cos t) \, dt = -9\pi,$$

e analogamente

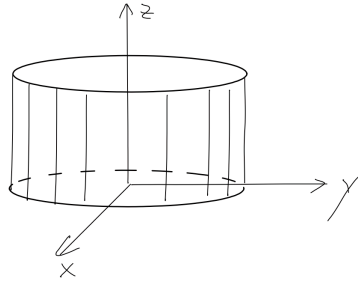
$$\int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\tilde{\gamma}_1(t)) \cdot \tilde{\gamma}'_1(t) \, dt = -4\pi,$$

da cui deduciamo che il flusso richiesto vale -5π .

Esercizio 2.2. Dato il campo $F(x, y, z) = (y, xz, z)$ e la superficie cilindrica $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$ calcolare il flusso del rotore di F uscente da S .

Scriviamo la superficie S in forma parametrica, ovvero $S = \varphi(D)$ con

$$\varphi(\vartheta, z) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ z \end{bmatrix}, \quad (\vartheta, z) \in D = [0, 2\pi] \times [0, 1].$$



Il dominio D è quindi un rettangolo e il suo bordo, per essere orientato positivamente, deve essere percorso in senso antiorario. Parametrizziamo quindi ∂D^+ come concatenazione dei quattro segmenti

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0), & t &\in [0, 2\pi] \\ \gamma_2(t) &= (2\pi, t), & t &\in [0, 1] \\ \gamma_3(t) &= (2\pi - t, 1), & t &\in [0, 2\pi] \\ \gamma_4(t) &= (0, 1 - t), & t &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $\partial S^+ = \varphi(\partial D^+)$ e, per il teorema di Stokes

$$I = \int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\sigma,$$

dove la normale N è quella indotta dalla parametrizzazione φ . Per capire se I è proprio il flusso richiesto, determiniamo la normale N . Essendo

$$\varphi_\vartheta \wedge \varphi_z = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}$$

deduciamo quindi che N è diretta verso l'esterno del cilindro, quindi φ induce una normale rispetto alla quale il flusso di F è uscente dal cilindro e il flusso da calcolare è proprio I .

Definendo $\tilde{\gamma}_i = \varphi \circ \gamma_i$, $i = 1, \dots, 4$, abbiamo

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\tilde{\gamma}_i} F \cdot ds,$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1(t) &= \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] & \tilde{\gamma}_2(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2\pi \\ \sin 2\pi \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1] \\ \tilde{\gamma}_3(t) &= \begin{bmatrix} \cos(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] & \tilde{\gamma}_4(t) &= \begin{bmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \\ 1 - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 - t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Si noti il seguente fatto: $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_4$ parametrizzano entrambe il segmento congiungente i punti $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$, ma con orientazione opposta. Si ha quindi che

$$\int_{\tilde{\gamma}_2} F \cdot ds = - \int_{\tilde{\gamma}_4} F \cdot ds$$

e quindi

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds + \int_{\tilde{\gamma}_3} F \cdot ds.$$

Calcoliamo ora

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\tilde{\gamma}_1) \cdot \tilde{\gamma}'_1 \, dt = - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\pi;$$

essendo inoltre

$$\int_{\tilde{\gamma}_3} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \cos^2 t) \, dt = 0$$

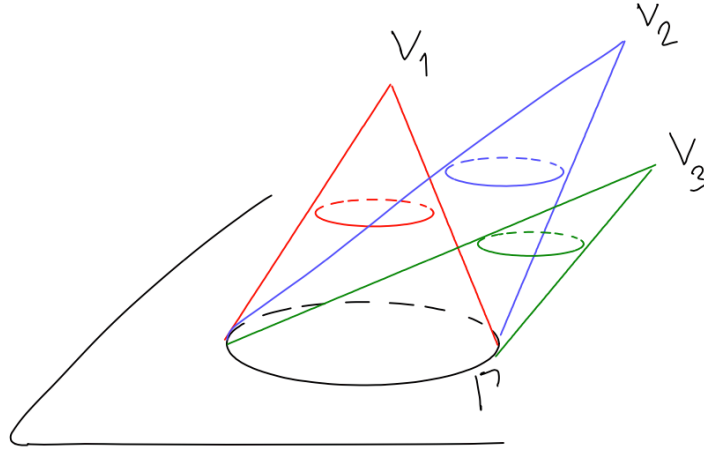
concludiamo che il flusso richiesto vale $I = -\pi$.

Osservazione 2.17. *Nell'esercizio precedente, nel calcolare l'integrale su ∂S^+ , i contributi corrispondenti alle curve $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_4$ in \mathbb{R}^3 si elidono tra loro. Tali curve non fanno parte del bordo "reale" della superficie S e si presentano per via del fatto che la parametrizzazione non è iniettiva.*

Esercizio 2.3. Sia Γ il sostegno di una curva regolare, chiusa e semplice giacente nel piano orizzontale $z = 0$ e, fissato un generico punto $p \in \mathbb{R}^3$ nel semispazio superiore (cioè la terza componente di p è positiva) sia S_p la superficie laterale del cono avente come vertice p e come base la regione del piano $z = 0$ racchiusa da Γ . Supponiamo inoltre che S_p sia orientata con normali dirette verso l'esterno del cono. Mostrare che il flusso

$$\int_{S_p} \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma$$

non dipende da p .



La curva Γ è il bordo della superficie S_p e non dipende dal punto p ; il risultato segue quindi immediatamente dal teorema di Stokes.

Esercizio 2.4. Mostrare che il flusso attraverso una sfera di un campo che ammette potenziale vettore è nullo.

Sia $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo esprimibile nella forma $G = \operatorname{rot} F$ con $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ potenziale vettore. Sia S la superficie sferica di raggio R centrata nell'origine (non è restrittivo assumere che il centro della sfera sia nell'origine). Vogliamo calcolare

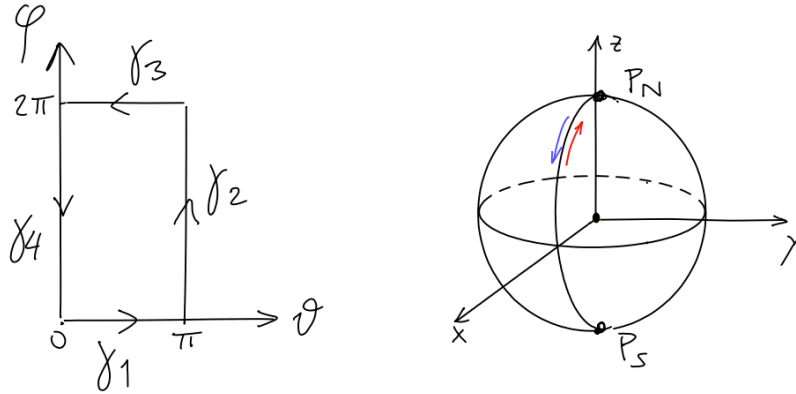
$$\int_S G \cdot N \, d\sigma$$

e dimostrare che questo integrale è nullo. Per il teorema di Stokes

$$\int_S G \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial S^+} F \cdot ds.$$

Parametrizziamo la sfera con le coordinate sferiche $p(\vartheta, \varphi)$, come nell'Esempio 1.8. Il dominio dei parametri è $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ e il suo bordo con orientazione positiva è la concatenazione dei quattro segmenti

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 0), \quad \gamma_3(t) = (\pi - t, 2\pi), \quad t \in [0, \pi] \\ \gamma_2(t) &= (\pi, t), \quad \gamma_4(t) = (0, 2\pi - t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$



Le immagini di questi segmenti attraverso la parametrizzazione p sono

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1(t) &= \begin{bmatrix} R \sin t \\ 0 \\ R \cos t \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}_3(t) = \begin{bmatrix} R \sin t \\ 0 \\ -R \cos t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi] \\ \tilde{\gamma}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}_4(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

I supporti di $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_4$ sono dei punti; $\tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_4$ non danno quindi un contributo per il calcolo di $\int_{\partial S^+} F \cdot ds$, in quanto, essendo curve costanti, $\tilde{\gamma}'_2(t) = \tilde{\gamma}'_4(t) = 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$. Le curve $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_3$ descrivono entrambe il meridiano congiungente $(0, 0, R)$ con $(0, 0, -R)$ e con ascissa positiva, ma hanno orientazione opposta. Il loro contributo al calcolo del flusso è quindi opposto. Concludiamo quindi che il flusso è nullo.

Esercizio 2.5. Siano

$$F(x, y, z) = \left(\frac{z}{1+x^2}, x + \sin z, \arctan x + y \cos z \right)$$

ed $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Calcolare il flusso del rotore di F uscente da S (intesa come porzione di sfera).

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia ora

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 1 + a^2, z \geq 0\}.$$

Calcolare il flusso del rotore di F uscente da S_a al variare del parametro a .

Per calcolare il flusso $\Phi = \int_S \text{rot } F \cdot N \, d\sigma$ (dove N è la normale esterna alla semi-sfera) non usiamo il teorema di Stokes, ma calcoliamo

$$\text{rot } F = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{z}{1+x^2} & x + \sin z & \arctan x + y \cos z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos z - \cos z \\ -\frac{z}{1+x^2} + \frac{z}{1+x^2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Parametrizzando ora la semisfera S come superficie cartesiana attraverso la funzione $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, abbiamo che la terza componente del versore normale è 1. Quindi $\text{rot } F \cdot N = 1$ e

$$\Phi = \int_S \text{rot } F \cdot N \, d\sigma = \int_D 1 \, dx \, dy = \pi.$$

essendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Consideriamo ora la superficie S_a , ovvero la calotta sferica superiore ottenuta tagliando una sfera centrata in $(0, 0, a)$ e raggio $\sqrt{1 + a^2} > |a|$ con il piano $z = 0$. Si ha che

$$S_a \cap \{z = 0\} = S \cap \{z = 0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Quindi $\partial S_a^+ = \partial S^+$ e per il teorema di Stokes abbiamo

$$\int_{S_a} \text{rot } F \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial S_a^+} F \cdot ds = \int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_S \text{rot } F \cdot N \, d\sigma = \pi.$$

2.4.2. Domande e risposte sul teorema di Stokes.

Domanda 2.5. *Come si fa a capire se due superfici hanno lo stesso bordo?*

La domanda va riformulata più correttamente così: *come si individua il bordo di una superficie?* Si cerca di capire come è fatta la superficie, eventualmente disegnandola. Più precisamente, si fissa una parametrizzazione φ e relativo dominio dei parametri D . Quindi si scrive $\varphi(\partial D)$ come unione di curve orientate. Se alcune di esse sono ripetute, ma con orientazione opposta, si tolgono. Idem per quelle costanti. Ciò che resta è il bordo reale della superficie, costituito da una o più curve di \mathbb{R}^3 orientate secondo l'orientazione indotta da φ . Se la parametrizzazione è cartesiana, allora $\varphi(\partial D)$ è esattamente il bordo della superficie.

Domanda 2.6. *Posso usare il teorema di Stokes per calcolare il flusso di un qualunque campo attraverso una data superficie?*

No, posso usarlo solo se il campo vettoriale considerato è il rotore di un altro campo vettoriale (cioè se ammette potenziale vettore). Infatti, il teorema di Stokes è noto anche come *teorema del rotore*.

2.4.3. *La Legge della circuitazione di Ampère.* Consideriamo un filo rettilineo infinitamente esteso, percorso da corrente stazionaria di intensità I , collocato lungo l'asse delle z orientato secondo il verso di percorrenza della corrente. Come abbiamo visto nell'esempio 2.15, il campo magnetico generato dalla corrente è

$$G(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus Z$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto e Z è l'asse z . Consideriamo una circonferenza di raggio $R > 0$, contenuta in un piano orizzontale $z = h$, centrata in $(0, 0, h)$ e percorsa una volta sola in senso antiorario. Detta $\Gamma_{R,h}$ tale circonferenza, che possiamo parametrizzare con

$$\gamma_{R,h}(t) = \begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ h \end{bmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

sappiamo che

$$\oint_{\Gamma_{R,h}} G \cdot ds = \mu_0 I \quad \forall R > 0, \forall h \in \mathbb{R}.$$

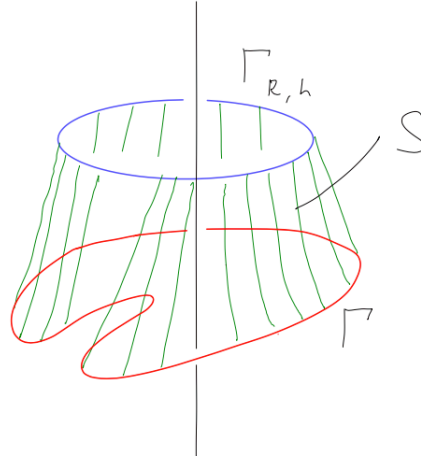
Prendiamo ora una curva regolare, chiusa Γ concatenata all'asse z e che allaccia l'asse z con un solo avvolgimento antiorario, cioè deformabile con continuità in $\mathbb{R}^3 \setminus Z$ in una delle circonferenze orientate $\Gamma_{R,h}$, per qualche $R > 0$ e $h \in \mathbb{R}$. Allora vale la *Legge di Ampère*

$$\oint_{\Gamma} G \cdot ds = 2\pi c = \mu_0 I,$$

cioè la circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa concatenata col filo non dipende dalla forma del filo. Dimostriamo la legge di Ampère. È possibile trovare una parametrizzazione $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ della curva Γ , di classe C^1 , e delle costanti $R > 0$ e $h \in \mathbb{R}$ tali che la deformazione

$$\varphi(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s\gamma_{R,h}(t) \quad \forall (t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

abbia immagine in $\mathbb{R}^3 \setminus Z$.



Posto $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$, la deformazione $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisce una superficie parametrica $S = \varphi(D)$ contenuta in $\mathbb{R}^3 \setminus Z$ il cui bordo è costituito dalle curve Γ e $\Gamma_{R,h}$ ed è tale che per ogni valore di $t \in [0, 2\pi]$ il segmento che congiunge i punti $\gamma(t)$ e $\gamma_{R,h}(t)$ è interamente contenuto in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$. Ragioniamo ora come nell'Esercizio 2.2, ovvero parametrizziamo i quattro segmenti del bordo ∂D^+ attraverso $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 ; consideriamo quindi le loro immagini attraverso φ , $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ e $\tilde{\gamma}_4$, e otteniamo che

- $\tilde{\gamma}_1$ parametrizza Γ ,
- $-\tilde{\gamma}_4$ parametrizza $\Gamma_{R,h}$,
- $\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \oint_{\Gamma} F \cdot ds - \oint_{\Gamma_{R,h}} F \cdot ds.$

Il teorema di Stokes garantisce che

$$\int_S (\text{rot } G) \cdot ds = \int_{\partial S^+} G \cdot ds = \oint_{\Gamma} F \cdot ds - \oint_{\Gamma_{R,h}} G \cdot ds$$

ed essendo G un campo irrotazionale, deduciamo che

$$\oint_{\Gamma} G \cdot ds = \oint_{\Gamma_{R,h}} G \cdot ds = \mu_0 I.$$

2.4.4. Campi solenoidali: condizione sufficiente. Consideriamo un campo vettoriale $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 . Ricordiamo che condizione necessaria affinché F sia conservativo (ovvero affinché esista $U: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F = \nabla U$) è che $\text{rot } F = 0$. Vediamo ora una condizione necessaria affinché F ammetta un potenziale vettore.

Definizione 2.18. Si chiama divergenza di F il campo scalare

$$\operatorname{div} F: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

La divergenza di F si indica anche nel seguente modo formale $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$, dove ∇ indica l'operatore vettoriale $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Un campo F la cui divergenza è nulla in ogni punto è detto campo solenoidale.²

Si ha che:

Teorema 2.19. Se il campo $G: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ammette potenziale vettore in A allora G è solenoidale.

La dimostrazione segue dal fatto che se $G = \operatorname{rot} F$, allora $\operatorname{div} G = \nabla \cdot \nabla \wedge F = 0$ (formalmente si ha un prodotto triplo con due vettori uguali; facendo i conti, le componenti di $\operatorname{div} G$ sono della forma $\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_j} = 0$ per il teorema di Schwarz, essendo F di classe C^2).

L'essere solenoidale è quindi condizione necessaria, ma in generale non sufficiente, all'ammettere un potenziale vettore.

Esempio 2.20. Il campo elettrico generato dalla carica q

$$F(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

è solenoidale (verificarlo), ma non ammette potenziale vettore. Se infatti F ammettesse un potenziale vettore, allora, detta S una qualsiasi sfera centrata in q avremmo

$$\int_S F \cdot N \, d\sigma = 0,$$

grazie al risultato visto nell'esercizio 2.4. D'altra parte però abbiamo calcolato nell'esempio 2.3 a pagina 11 che

$$\int_S F \cdot N \, d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \neq 0.$$

Il campo elettrico è quindi solenoidale su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ma non ammette potenziale vettore. Ricordiamo che è conservativo, cioè ammette potenziale scalare. Al contrario, il campo magnetico dell'esempio 2.15 ammette potenziale vettore, è irrotazionale ma non ammette potenziale scalare.

Osservazione 2.21. Il seguente risultato è noto come decomposizione di Helmholtz.

Dato un campo vettoriale di classe C^2 $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\vec{x}| G(\vec{x}) = C_0 \in \mathbb{R}$, esistono due campi di classe C^3

$$U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tali che, per ogni $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$G(\vec{x}) = \nabla U(\vec{x}) + \operatorname{rot} F(\vec{x}).$$

Ovvero, qualsiasi campo C^3 che decade bene all'infinito è la somma di un campo conservativo e di un campo che ammette potenziale vettore.

²Talvolta in letteratura si definisce solenoidale un campo che ammette potenziale vettore. La definizione che proponiamo in queste dispense è quella del volume di Analisi 2 di G. De Marco, edito da Zanichelli.

2.5. Teorema della divergenza. In questa sezione ci proponiamo di calcolare il flusso di un campo attraverso una superficie chiusa, ovvero una superficie che è il bordo di un dominio di \mathbb{R}^3 . Iniziamo a presentare la definizione di dominio regolare in \mathbb{R}^3 .

Definizione 2.22. Un insieme $C \subset \mathbb{R}^3$ si dice dominio regolare se

- C è chiuso e limitato;
- l'interno di C è non vuoto e connesso;
- il bordo di C è unione di superfici, $\partial C = S_0 \cup \dots \cup S_k$, dove ogni S_i è una superficie parametrica semplice, regolare e orientata con normale diretta verso l'esterno di C .

Inoltre, se le superfici S_i che compongono il bordo di C si intersecano l'un l'altra solo in corrispondenza della loro frontiera, allora, dato un campo vettoriale F definito in un intorno di ∂C , il flusso di F uscente da C è dato da

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_{S_0} F \cdot N \, d\sigma + \dots + \int_{S_k} F \cdot N \, d\sigma.$$

Se invece orientiamo ogni S_i con normale diretta verso l'interno di C , il corrispondente flusso si dice entrante in C .

Osserviamo che il flusso entrante e il flusso uscente sono l'uno l'opposto dell'altro.

Esempi 2.23. (i) Sfere, coni, cubi, parallelepipedi, cilindri e loro intersezioni sono domini regolari di \mathbb{R}^3 .

- (ii) Dato un dominio regolare C e una palla aperta B la cui chiusura sia contenuta nell'interno di C , anche $C_0 = C \setminus B$ è un dominio regolare e $\partial C_0 = \partial C \cup \partial B$, con ∂B orientato con normale esterna a C_0 e quindi interna a B .

Esempio 2.24. Consideriamo due superfici cartesiane S_1 e S_2 definite da

$$S_i = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f_i(x, y)\} \quad (i = 1, 2)$$

dove D è un dominio regolare di \mathbb{R}^2 e $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di classe C^1 . Supponiamo che

$$f_1(x, y) < f_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \setminus \partial D \quad \text{e} \quad f_1(x, y) = f_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial D.$$

Ciò significa che le superfici S_1 e S_2 hanno il bordo in comune, giacente sul piano orizzontale di equazione $z = 0$ e racchiudono un insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

che risulta essere un dominio regolare di \mathbb{R}^3 . Dimostriamo che se G è un campo vettoriale definito in un intorno di ∂C , che ammette potenziale vettore nel suo dominio, allora il flusso di G uscente da C è nullo (e quindi anche quello entrante in C).

Dobbiamo orientare le superfici S_1 e S_2 con le normali uscenti da C . Se prendiamo la parametrizzazione cartesiana

$$\varphi_i(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f_i(x, y) \end{bmatrix}$$

abbiamo che $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ ha terza componente positiva. Ciò significa che φ_i induce un'orientazione con normale uscente da C se $i = 2$ ed entrante in C se $i = 1$. Pertanto $\partial C = (-\varphi_1(D)) \cup (\varphi_2(D))$ e quindi

$$\int_{\partial C} G \cdot N \, d\sigma = - \int_{\varphi_1(D)} G \cdot N \, d\sigma + \int_{\varphi_2(D)} G \cdot N \, d\sigma.$$

D'altra parte, se $G = \operatorname{rot} F$, per il teorema di Stokes,

$$\int_{\varphi_i(D)} G \cdot N \, d\sigma = \int_{\varphi_i(\partial D^+)} F \cdot ds \quad (i = 1, 2).$$

Siccome $\varphi_1 = \varphi_2$ su ∂D , otteniamo che

$$\int_{\varphi_1(\partial D^+)} F \cdot ds = \int_{\varphi_2(\partial D^+)} F \cdot ds$$

e quindi

$$\int_{\partial C} G \cdot N \, d\sigma = - \int_{\varphi_1(\partial D^+)} F \cdot ds + \int_{\varphi_2(\partial D^+)} F \cdot ds = 0.$$

Analogamente a quanto visto negli esempi 2.4 e 2.24, si ha che dato un dominio regolare C in \mathbb{R}^3 , se F è un campo definito in un intorno di ∂C che ammette potenziale vettore, allora il flusso di F attraverso ∂C è nullo. Se F non ammette un potenziale vettore, ci chiediamo come si possa mettere in relazione il suo flusso attraverso la superficie chiusa S con il volume racchiuso da S .

Teorema della divergenza. *Dati un campo vettoriale $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 sull'aperto A e un dominio regolare $C \subset A$, allora*

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

Ovvero, il flusso del campo F attraverso ∂C uscente da C è uguale all'integrale della divergenza di F sul volume C .

Osservazione 2.25. *Il teorema della divergenza mette quindi in relazione un flusso superficiale con un integrale di volume.*

Il teorema può in realtà essere esteso a qualsiasi dimensione; in particolare in dimensione 1 si riduce al teorema fondamentale del calcolo integrale; in dimensione 2 invece equivale alla formula di Gauss-Green. Infatti, se $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare ed $F: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con A aperto contenente D allora abbiamo

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx \, dy = \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (*)$$

Consideriamo ora una parametrizzazione del bordo di D , $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, in modo tale che la normale esterna a D , N , sia ruotata di $-\pi/2$ rispetto al vettore tangente. Abbiamo

$$T = \left(\frac{\gamma'_1(t)}{|\gamma'(t)|}, \frac{\gamma'_2(t)}{|\gamma'(t)|} \right), \quad N = \left(\frac{\gamma'_2(t)}{|\gamma'(t)|}, -\frac{\gamma'_1(t)}{|\gamma'(t)|} \right)$$

quindi

$$\int_{\partial D^+} F \cdot N \, ds = \int_a^b [-F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t)] \, dt = \int_a^b (-F_2(\gamma(t)), F_1(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

Il teorema della divergenza quindi in questo contesto diventa

$$\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_a^b (-F_2(\gamma(t)), F_1(\gamma(t))) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

che non è altro che la formula di Gauss-Green per il campo G di componenti $(G_1, G_2) = (-F_2, F_1)$.

Dimostrazione. Mimiamo la dimostrazione della formula di Gauss-Green considerando solamente domini semplici rispetto ai tre assi (le definizioni sono analoghe a quelle per i domini bidimensionali). Decomponiamo ora il campo $F = (f_1, f_2, f_3) = F_1 + F_2 + F_3$, dove $F_i = f_i e_i$, $i = 1, 2, 3$. Dimostriamo le seguenti tre righe la cui somma fornisce la tesi del teorema

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_C \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dy dz = \int_{\partial C} F_1 \cdot N d\sigma \\ (2) \quad & \int_C \frac{\partial f_2}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial C} F_2 \cdot N d\sigma \\ (3) \quad & \int_C \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial C} F_3 \cdot N d\sigma. \end{aligned}$$

Queste tre uguaglianze sfruttano rispettivamente che il dominio è x -semplice, y -semplice e z -semplice. Verifichiamo (3) esprimendo

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio regolare e $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $\alpha \leq \beta$ su D . Il bordo di C risulta quindi essere

$$\partial C = S_\alpha \cup S_\beta \cup S_l$$

e dovendo calcolare il flusso uscente da C la normale esterna a ∂C sarà diretta verso l'alto su S_β , verso il basso su S_α , orizzontale su S_l (in quanto S_l è parallela all'asse z). Decomponiamo quindi

$$\int_{\partial C} F_3 \cdot N d\sigma = \int_{S_\alpha} F_3 \cdot N d\sigma + \int_{S_\beta} F_3 \cdot N d\sigma + \int_{S_l} F_3 \cdot N d\sigma,$$

e calcoliamo separatamente

$$\int_{S_l} F_3 \cdot N d\sigma = 0,$$

in quanto F_3 è verticale ed N orizzontale. Considerano ora $\varphi(x, y) = [x, y, \beta(x, y)]^T$ abbiamo

$$\int_{S_\beta} F_3 \cdot N d\sigma = \int_D F_3(x, y, \beta(x, y)) \cdot (\varphi_x \wedge \varphi_y) dx dy = \int_D f_3(x, y, \beta(x, y)) dx dy.$$

Infine la superficie S_α va parametrizzata con la parametrizzazione opposta a quella cartesiana (che ha la normale diretta verso l'interno di C); quindi si ottiene

$$\int_{S_\alpha} F_3 \cdot N d\sigma = - \int_D f_3(x, y, \alpha(x, y)) dx dy.$$

Concludiamo quindi l'uguaglianza (3)

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} F_3 \cdot N d\sigma &= \int_D [f_3(x, y, \beta(x, y)) - f_3(x, y, \alpha(x, y))] dx dy \\ &= \int_D \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \int_C \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

□

2.5.1. *Esercizi sul teorema della divergenza.*

Esercizio 2.6. *Applicando il teorema della divergenza, calcolare il flusso Φ del campo F uscente dal dominio C di \mathbb{R}^3 nei seguenti casi*

- 1) $F(x, y, z) = (x, y, z)$, C è l'ottaedro di vertici $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$;
- 2) $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{y+3}, -\log(y+3), 2z \right)$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$;
- 3) $F(x, y, z) = (2xz + y, x, yz)$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

1) Calcoliamo il flusso uscente dall'ottaedro

$$\Phi = \int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 3 \int_C dx \, dy \, dz = 3 \operatorname{Volume}(C).$$

Essendo C l'unione di due coni a base quadrata di lato $\sqrt{2}$ e altezza 1 abbiamo

$$\operatorname{Volume}(C) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Quindi $\Phi = 4$.

2) Abbiamo $\operatorname{div} F = 2$ quindi chiamiamo D il cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 \operatorname{Volume}(C) = 2 \int_D \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dx \, dy = 2 \int_D (x^2 + y^2) dx \, dy \\ &= 2 \int_0^2 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} d\vartheta = 16\pi. \end{aligned}$$

3) Essendo $\operatorname{div} F = 2z + y$ abbiamo

$$\Phi = \int_C (2z + y) \, dx \, dy \, dz$$

C è la porzione di palla unitaria contenuta nell'ottante in cui le tre coordinate sono positive; possiamo quindi utilizzare le coordinate sferiche

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta),$$

per cui

$$C = \left\{ (r, \vartheta, \varphi) : r \in [0, 1], \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

Calcoliamo quindi il flusso

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi [r^2 \sin \vartheta (2r \cos \vartheta + r \sin \varphi \sin \vartheta)] \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \, d\vartheta + \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \left[\sin^2 \vartheta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \left[\frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3}{16} \pi. \end{aligned}$$

2.5.2. *Il teorema di Gauss in elettrostatica.* Dato un dominio regolare $C \subset \mathbb{R}^3$ mostriamo che il flusso del campo generato da una carica q posta all'interno di C e uscente da ∂C è indipendente da C e vale $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Senza perdere in generalità assumiamo che q sia posta nell'origine degli assi di riferimento.

Ricordiamo che abbiamo già dimostrato questo risultato quando C è una sfera centrata in q (si veda l'Esempio 2.3 a pagina 11). Abbiamo inoltre visto (nell'Esempio 2.20 a pagina 28) che il campo elettrico è solenoidale, ovvero la sua divergenza è nulla in ogni punto di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Per calcolare il flusso ci proponiamo di usare il teorema della divergenza. Essendo $q \in C$ non possiamo però applicare direttamente il teorema al dominio C , in quanto il campo elettrico

$$F(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

non è definito in 0, dove si trova la carica q . Consideriamo una palla C_r di raggio r centrata in 0, con r sufficientemente piccolo in modo tale che C_r sia interamente contenuta nella parte interna di C . Consideriamo quindi

$$\tilde{C} = C \setminus C_r.$$

Applichiamo dunque il teorema della divergenza a $\tilde{C} \subset A = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, osservando che F è di classe C^1 sull'aperto A . Abbiamo che

$$0 = \int_{\tilde{C}} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial \tilde{C}} F \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma + \int_{\partial C_r} F \cdot N \, d\sigma;$$

l'ultimo integrale è il flusso *uscente* dal volume \tilde{C} attraverso la superficie sferica ∂C_r , ovvero il flusso entrante nella sfera C_r attraverso la sua superficie. Tale flusso è opposto a quello uscente dalla sfera C_r attraverso la sua superficie e vale $-\frac{q}{\epsilon_0}$ (Esempio 2.3). Dalle identità precedenti concludiamo quindi

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}.$$