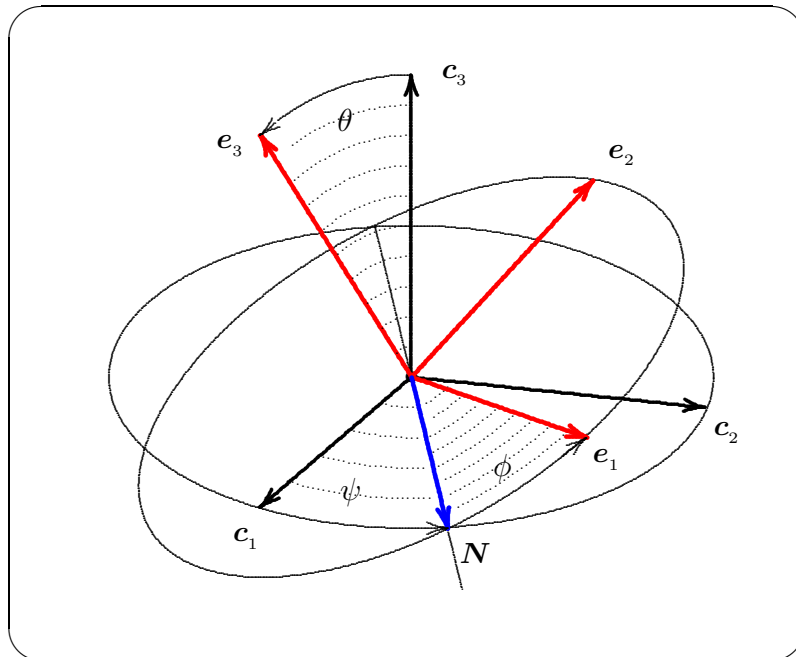


Modelli Matematici della Meccanica

SERGIO BENENTI

8 maggio 2013



Indice

1	Calcolo negli spazi affini	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Spazi affini euclidei	2
1.3	Richiami sugli spazi vettoriali euclidei	3
1.4	Coordinate curvilinee su di uno spazio affine	4
1.4.1	Coordinate polari del piano	7
1.4.2	Coordinate cilindriche	8
1.4.3	Coordinate sferiche	8
1.5	Campi scalari	10
1.6	Campi vettoriali	11
1.7	Forme differenziali	12
1.8	Corrispondenza tra campi vettoriali e forme differenziali	14
1.9	Gradiente di un campo scalare	14
1.10	Curve	15
1.11	Superfici	16
1.12	Geometrie interna ed esterna di una superficie	18
1.13	Sistemi dinamici	21
1.13.1	Curve integrali	21
1.13.2	Funzioni integrali o integrali primi	25
1.13.3	Flussi	27
1.14	Esempi	29
1.15	Stabilità di punti critici	37
2	Cinematica del punto	42
2.1	Cinematica del punto	43
2.2	Rappresentazione in coordinate curvilinee	46

2.2.1	Calcolo dei simboli di Christoffel	48
2.2.2	Calcolo diretto delle componenti dell'accelerazione	49
2.3	Rappresentazione polare di un moto piano	51
2.4	Rappresentazione intrinseca	53
2.5	Moti centrali	56
2.6	Dalle leggi di Kepler alla legge di gravitazione universale	58
2.7	Moti di un punto su di una superficie	59
2.8	Moti geodetici	62
2.8.1	Interpretazione variazionale delle geodetiche	64
2.8.2	Interpretazione dinamica delle geodetiche	64
2.8.3	Superfici sviluppabili	65
2.8.4	Superfici di rotazione	67
3	Cinematica del corpo rigido	69
3.1	Rotazioni	69
3.1.1	Rappresentazione mediante simmetrie	71
3.1.2	Rappresentazione esponenziale	72
3.1.3	Rappresentazione di Cayley	73
3.1.4	Rappresentazione quaternionale	73
3.1.5	Rappresentazione versore-angolo	74
3.1.6	Angoli di Euler	75
3.2	Moti di un corpo rigido	79
3.3	Formule fondamentali della cinematica del corpo rigido	83
3.4	Cambiamenti di riferimento	86
3.4.1	Il teorema dei moti relativi	87
3.4.2	Il teorema di Coriolis	88
3.5	Moti rigidi particolari	89
3.5.1	Moti traslatori	89
3.5.2	Moti rigidi con punto fisso	90
3.5.3	Moti rigidi con asse fisso	92
3.5.4	Moti rigidi piani	92
3.6	Moti rigidi composti	94
3.7	Velocità angolare e angoli di Euler	96
3.8	Moti di precessione regolare	98

4	Meccanica newtoniana	101
4.1	Dinamica del punto libero	101
4.2	Grandezze cinetiche fondamentali	106
4.3	Lo spazio-tempo di Newton	108
4.4	L'equazione di Weierstrass	119
4.5	Dinamica del punto vincolato	122
4.6	Il moto dei gravi	130
4.7	Il pendolo	131
4.8	Moto di un punto in un campo centrale simmetrico	134
4.9	Moto di un punto in un campo newtoniano	137
4.10	Dinamica dei sistemi finiti di punti	142
4.11	Sistemi di vettori applicati	148
4.12	Baricentro di un sistema di masse	149
4.13	Dinamica del corpo rigido	152
4.14	Corpo rigido con un punto fisso	155
4.15	Moti alla Poincaré	157
4.15.1	Moti stazionari	159
4.15.2	Moti di precessione regolare	159
4.15.3	Equazioni di Lax	161
4.16	Corpo rigido con un asse fisso	163
4.17	Tensore d'inerzia di un sistema di masse	165
5	Meccanica lagrangiana	172
5.1	Varietà differenziabili	173
5.1.1	Sottovarietà aperte	176
5.1.2	Sottovarietà	177
5.1.3	Applicazioni differenziabili	177
5.1.4	Varietà prodotto	178
5.1.5	Superfici regolari in uno spazio affine	178
5.1.6	Sottovarietà definite da equazioni	179
5.1.7	La circonferenza \mathbb{S}_1	179
5.1.8	Le sfere \mathbb{S}_n	180
5.1.9	I tori \mathbb{T}_n	181
5.1.10	Gruppi di matrici, gruppi ortogonali	181

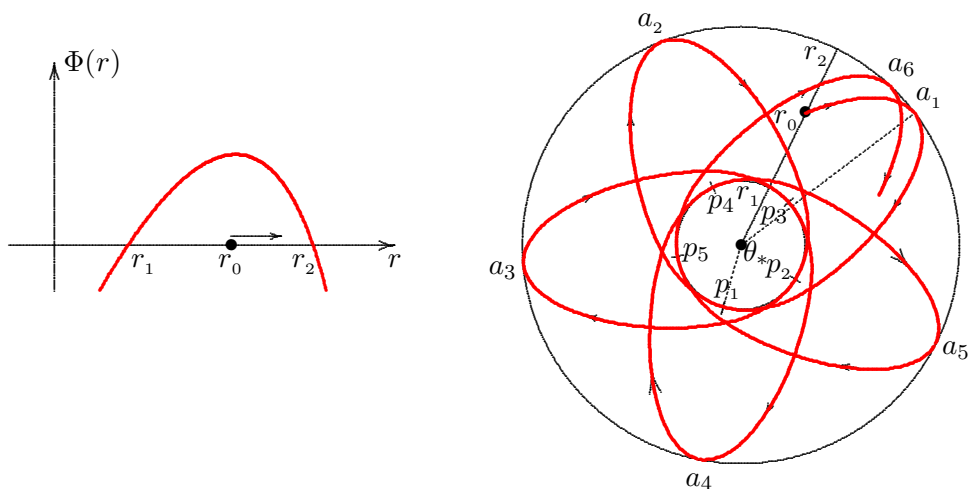
5.2	Fibrati tangenti	183
5.3	Campi vettoriali su varietà	186
5.4	Forme differenziali su varietà	189
5.4.1	2-forme	191
5.4.2	Prodotto tensoriale e prodotto esterno di 1-forme	192
5.4.3	Differenziale di 1-forme	192
5.4.4	Prodotto esterno di 1-forme	194
5.4.5	Rappresentazione locale delle p -forme	194
5.4.6	Differenziale di una p -forma	195
5.4.7	Prodotto tensoriale e prodotto esterno	196
5.5	Sistemi olonomi	197
5.6	Sistemi olonomi a vincoli dipendenti dal tempo	203
5.7	Le equazioni di Lagrange	205
5.8	Meccanica riemanniana	213
5.9	Il potenziale e la lagrangiana	217
5.10	Il caso dello spazio euclideo tridimensionale	222
5.11	Sistemi lagrangiani	226
5.12	Integrali primi dei sistemi lagrangiani	229
5.13	Il principio dell'azione stazionaria	233
5.14	Cenni di calcolo delle variazioni	238
5.15	Equilibrio e stabilità	242
5.16	Piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile . .	244
6	Meccanica hamiltoniana	247
6.1	Fibrati cotangenti e sistemi hamiltoniani	248
6.2	La trasformata di Legendre	252
6.3	Il metodo di Jacobi	255
6.4	Parentesi di Poisson e integrali primi	262
6.5	Sottovarietà lagrangiane	267
6.6	Varietà simplettiche	273
6.7	Sistemi hamiltoniani integrabili	274
7	Meccanica relativistica	277
7.1	Spazi vettoriali iperbolici	277
7.2	Lo spazio-tempo di Minkowski	283

7.3	Riferimenti inerziali e tempo relativo	287
7.4	Decomposizioni relative	289
7.5	Le trasformazioni di Lorentz	294
7.6	Dinamica relativistica di una particella materiale	300
7.7	Il campo elettromagnetico	307

I vari modelli della meccanica che andremo ad esaminare formano un edificio costituito da vari ‘ambienti’ o o ‘spazi’, ciascuno caratterizzato da una particolare ‘geometria’. In ognuna di queste geometrie si introducono ‘figure’ e ‘oggetti’ con i quali si costruiscono delle tecniche di calcolo (calcolo vettoriale, calcolo tensoriale, calcolo differenziale, calcolo integrale, ecc.)

Ecco l’elenco degli spazi su cui fonderemo i nostri modelli:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Spazi affini euclidei, Cap. 1 :} \\ \\ \text{Spazi affini pseudo-euclidei :} \\ \\ \text{Varietà differenziabili :} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cinematica del punto, Cap. 2.} \\ \text{Cinematica del corpo rigido, Cap. 3.} \\ \text{Meccanica newtoniana, Cap. 4.} \end{array} \right.$
	Meccanica relativistica, Cap. 7.
	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Varietà riemanniane: Meccanica lagrangiana, Cap. 5.} \\ \text{Varietà simplettiche: Meccanica hamiltoniana, Cap. 6.} \end{array} \right.$



vi

.

Capitolo 1

Calcolo negli spazi affini

1.1 Introduzione

DEFINIZIONE 1.1.1 – Una **spazio affine** è una terna (\mathcal{A}, E, δ) dove: \mathcal{A} è un insieme i cui elementi sono detti **punti**, E è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, detto **spazio vettoriale soggiacente** allo spazio affine, $\delta: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow E$ è un'applicazione che ad ogni coppia ordinata di punti associa un vettore soddisfacente alle due seguenti condizioni:

- (i) per ogni coppia $(P, \mathbf{v}) \in \mathcal{A} \times E$ esiste un unico punto $Q \in \mathcal{A}$ tale che $\delta(P, Q) = \mathbf{v}$;
- (ii) per ogni terna di punti (P, Q, R) vale l'uguaglianza

$$(1.1) \quad \delta(P, Q) + \delta(Q, R) = \delta(P, R).$$

La **dimensione** di uno spazio affine è per definizione la dimensione dello spazio vettoriale associato. •

Il vettore $\delta(P, Q)$ è più semplicemente denotato con PQ , o anche con $Q - P$, per cui l'uguaglianza (1.1) si scrive

$$PQ + QR = PR,$$

o anche

$$(Q - P) + (R - Q) = R - P,$$

assumendo in questo secondo caso l'aspetto di un'identità algebrica.

Un vettore $\mathbf{v} \in E$ è anche detto **vettore libero**. Una coppia $(P, \mathbf{v}) \in \mathcal{A} \times E$ è detta **vettore applicato**. Un vettore applicato (P, \mathbf{v}) si identifica con la coppia ordinata di punti (P, Q) dove Q è tale che $PQ = \mathbf{v}$.

Un sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ è un **sottospazio affine** di dimensione m se l'immagine di $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ secondo δ è un sottospazio di E di dimensione m . In particolare, una **retta** è un sottospazio affine di dimensione 1.

Se si fissa un punto $O \in \mathcal{A}$ allora lo spazio \mathcal{A} si identifica con lo spazio vettoriale associato E . Infatti, in base agli assiomi (i) e (ii) la corrispondenza che ad ogni vettore $\mathbf{x} \in E$ associa il punto $P \in \mathcal{A}$ tale che $\mathbf{x} = OP$ è biunivoca. L'origine viene identificata col vettore nullo.

Il calcolo negli spazi affini è sostanzialmente il calcolo delle funzioni a più variabili reali, poiché ogni spazio affine è identificabile con \mathbb{R}^n , una volta assegnato un **riferimento**:

DEFINIZIONE 1.1.2 – Un **riferimento cartesiano o affine** di uno spazio affine (\mathcal{A}, E, δ) di dimensione n è costituito da un punto O di \mathcal{A} , detto **origine**, e una base $(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ dello spazio vettoriale E . •

Una generica base di E sarà denotata con (\mathbf{c}_α) , intendendo l'indice α variabile da 1 a n , per cui un generico riferimento affine sarà denotato con (O, \mathbf{c}_α) . Ad un riferimento cartesiano corrisponde un **sistema di coordinate cartesiane** $(x^\alpha) = (x^1, \dots, x^n)$. Queste sono le componenti del generico vettore OP secondo la base (\mathbf{c}_α) :¹

$$(1.2) \quad OP = x^\alpha \mathbf{c}_\alpha.$$

Risulta quindi definita una corrispondenza biunivoca fra lo spazio affine \mathcal{A} e lo spazio \mathbb{R}^n .

Attraverso questa identificazione, su di uno spazio affine si possono considerare sistemi di **coordinate curvilinee**, che denoteremo con (q^i) con indice i variabile da 1 a n . Gli esempi più comuni di coordinate curvilinee, almeno per $n = 2$ e $n = 3$, sono illustrati al §1.4. Va sottolineato il fatto che quasi tutto quanto verrà trattato del calcolo in coordinate curvilinee negli spazi affini si trasporterà pari pari al calcolo nelle varietà differenziabili.

Quando sarà necessario specificare la dimensione n di uno spazio affine, lo si denoterà con \mathcal{A}_n .

1.2 Spazi affini euclidei

DEFINIZIONE 1.2.1 – Quando lo spazio vettoriale E soggiacente di uno spazio affine è dotato di un **tensore metrico** g , vale a dire di un **prodotto scalare**, con cui si misura le lunghezze dei vettori, si dice che lo spazio affine è **euclideo**, più precisamente **strettamente euclideo** se il tensore metrico è definito positivo. Le coordinate (x^α) generate da un riferimento affine dove la base (\mathbf{c}_α) è canonica, si dicono **coordinate canoniche** o **coordinate ortonormali**. •

¹ Se non viene detto esplicitamente il contrario, per indici ripetuti sottintenderemo la sommatoria estesa a tutto il loro campo di variabilità.

Le entità che si introducono negli spazi affini (e le loro proprietà) si distinguono in

puramente affini o euclidee,

a seconda che esse prescindano o dipendano dall'esistenza di un tensore metrico.

*La presenza di un tensore metrico consente di definire operazioni tipiche della **geometria euclidea**, quali la misura di distanze, di angoli, di lunghezze di curve, di aree di superfici, di volumi, e così via, nonché speciali operazioni su campi scalari, vettoriali e tensoriali.*

Gli spazi affini euclidei di dimensione 3 e 4 forniscono l'ambiente in cui trattare la cinematica e la meccanica newtoniana, Capitoli, 2, 3 e 4. Un particolare tipo di spazio affine pseudo-euclideo di dimensione 4, detto spazio di Minkowski, sta invece a supporto alla meccanica relativistica, cioè alla Teoria della Relatività Ristretta, Capitolo 7.

1.3 Richiami sugli spazi vettoriali euclidei

DEFINIZIONE 1.3.1 – *Uno **spazio vettoriale euclideo** è una coppia (E, g) dove E è uno spazio vettoriale (reale, a dimensione finita n) e g è un **tensore metrico** su E , cioè una forma bilineare $g: E \times E \rightarrow \mathbb{R}: (u, v) \mapsto g(u, v)$, simmetrica e non degenera; con ciò s'intende che per g valgono le condizioni*

$$\begin{cases} g(u, v) = g(v, v), \\ g(u, v) = 0, \quad \forall v \in E \implies u = 0. \end{cases} \quad \bullet$$

Denotiamo con $\|\cdot\|$ la forma quadratica associata alla forma bilineare g . Poniamo cioè $\|v\| = v \cdot v$, e chiamiamo **norma** del vettore v questo numero.²

Il numero reale $g(u, v)$ prende il nome di **prodotto scalare** dei due vettori u e v e lo si denota anche con $u \cdot v$. Due vettori si dicono **ortogonali** se $u \cdot v = 0$. Un vettore u si dice **unitario** se $u \cdot u = \pm 1$, **isotropo** se $u \cdot u = 0$.

Una base (c_α) di (E, g) si dice **canonica** o anche **ortonormale** se i suoi elementi sono mutuamente ortogonali,

$$c_\alpha \cdot c_\beta = 0 \quad \text{per } \alpha \neq \beta,$$

e unitari

$$|c_\alpha \cdot c_\alpha| = 1.$$

Si dimostra che tali basi esistono e che il numero p dei vettori per cui $\|c_\alpha\| = +1$ (e quindi il numero $qn - p$ di quelli per cui $\|c_\alpha\| = -1$) è invariante. La coppia (p, q) prende il nome di **segnatura del tensore metrico**.

² In effetti non si tratta di una “norma” nel senso dell'Analisi.

Uno spazio vettoriale E è **strettamente euclideo** se su di esso è definito un tensore metrico la cui forma quadratica associata è definita positiva, la cui segnatura è quindi $(n, 0)$. In questo caso ad ogni vettore (non nullo) \mathbf{u} corrisponde il numero (positivo) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|}$ detto **modulo** di \mathbf{u} . Un vettore di modulo unitario è anche detto **versore**. Si dimostra che vale la disuguaglianza $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ e si definisce quindi l'angolo θ tra due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} ponendo

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}.$$

Assegnata una qualsiasi base (\mathbf{e}_i) di E ($i = 1, \dots, n$), il tensore metrico si esprime attraverso la matrice quadrata delle sue **componenti** definite da

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j,$$

detta **matrice metrica**: $[g_{ij}]$. È una matrice simmetrica e regolare: $g_{ij} = g_{ji}$, $\det[g_{ij}] \neq 0$. In una base canonica la matrice metrica è diagonale, con sulla diagonale principale p volte $+1$ e q volte -1 .

Nel caso dello spazio vettoriale (strettamente) euclideo tridimensionale si definisce anche il **prodotto vettoriale** di due vettori, che qui denotiamo con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ed il **prodotto misto** di tre vettori $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, le cui proprietà e applicazioni sono argomento dei corsi di calcolo vettoriale. Ricordiamo soltanto che il prodotto vettoriale e quindi quello misto presuppongono la scelta di un orientamento dello spazio vettoriale E (di solito quello della “mano destra”), e che il prodotto misto $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ fornisce, a meno del segno, il **volume del parallelepipedo** individuato dai tre vettori.

1.4 Coordinate curvilinee su di uno spazio affine

Come si vedrà, il concetto di sistema di coordinate, qui considerato per gli spazi affini, si estende alle varietà differenziabili, di cui anzi costituisce il supporto della definizione. In quell'ambito i domini D e D' vanno scelti aperti (nella topologia di \mathbb{R}^n), mentre negli esempi sopra considerati non lo sono.

Denotiamo con $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ il **vettore posizione** in uno spazio affine \mathcal{A}_n , dove le x^α sono coordinate affini di origine O e base (\mathbf{c}_α) . Se $\mathbf{x} = OP$, allora le (x^α) si identificano con le coordinate del generico punto P . Inoltre,

$$\mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{c}_\alpha.$$

Un'equazione vettoriale del tipo

$$(1.3) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(q^i)$$

dove (q^i) sono n parametri reali variabili in un dominio $D' \subseteq \mathbb{R}^n$, che in componenti è equivalente ad un sistema di equazioni

$$(1.4) \quad x^\alpha = x^\alpha(q^i),$$

stabilisce un'applicazione di D' in un dominio $D \subseteq \mathcal{A}_n$. Se quest'applicazione è invertibile e se le funzioni (1.4) insieme alle inverse sono di classe C^1 almeno allora esse definiscono un nuovo **sistema di coordinate** (q^i) sul dominio D . In queste condizioni la matrice quadrata $[J_i^\alpha]_{n \times n}$ delle derivate parziali³

$$(1.5) \quad J_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} = \partial_i x^\alpha$$

è ovunque regolare. Essa prende il nome di **matrice jacobiana della trasformazione di coordinate** ((1.4). Ciò equivale a dire che i vettori

$$(1.6) \quad \mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{x}$$

sono linearmente indipendenti in ogni punto del dominio D . Infatti le loro componenti secondo la base (\mathbf{c}_α) sono le derivate parziali J_i^α :

$$(1.7) \quad \mathbf{e}_i = \partial_i x^\alpha \mathbf{c}_\alpha = J_i^\alpha \mathbf{c}_\alpha$$

e quest'uguaglianza mostra che i vettori \mathbf{e}_i sono ottenuti dalla base \mathbf{c}_α mediante una trasformazione lineare coinvolgente la matrice jacobiana $[J_i^\alpha]_{n \times n}$ che è regolare. Si dice che i vettori \mathbf{e}_i costituiscono il **riferimento associato** alle coordinate q^i : in ogni punto $P \in D$ forniscono una base dello spazio vettoriale E soggiacente ad \mathcal{A}_n , base che varia da punto a punto.

I vettori \mathbf{e}_i sono tangenti alle rispettive **curve coordinate**. Queste curve sono il luogo dei punti caratterizzati da valori costanti per tutte le coordinate meno una. Per esempio, se si fissano i valori delle coordinate (q^2, \dots, q^n) si ottiene una curva parametrizzata dalla coordinata q^1 ; il vettore \mathbf{e}_1 è tangente a tutte le curve ottenute in questo modo. Il riferimento associato a coordinate cartesiane (x^α) è proprio il sistema dei vettori *costanti* (\mathbf{c}_α) .

Se lo spazio affine \mathcal{A}_n è euclideo, cioè se sullo spazio vettoriale E è introdotto un tensore metrico \mathbf{g} o, come si usa dire una **metrica**, allora sul dominio D delle coordinate (q^i) sono definite le funzioni

$$(1.8) \quad g_{ij} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

³ Qui e nel seguito adottiamo le notazioni abbreviate

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad \partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial q^i \partial q^j},$$

convenendo che gli indici greci α, β, \dots si riferiscano alle coordinate cartesiane e quelli latini i, j, \dots alle nuove coordinate.

che chiamiamo, in analogia con quanto stabilito per gli spazi vettoriali, **componenti del tensore metrico nelle coordinate** (q^i); esse formano una matrice simmetrica e regolare, detta **matrice metrica**. Tuttavia in questo caso queste componenti non sono più delle costanti ma funzioni delle coordinate (q^i).

Le coordinate (q^i) sono dette **ortogonali** se la corrispondente matrice metrica $[g_{ij}]$ è ovunque diagonale:

$$g_{ij} = 0, \quad \text{per } i \neq j.$$

Ciò significa che in ogni punto di D i vettori (\mathbf{e}_i) sono tra loro ortogonali.

Rispetto ad un qualunque sistema di coordinate (cartesiane o curvilinee) una metrica è dunque rappresentata dalla matrice $[g_{ij}]$, ma può essere rappresentata da una scrittura del tipo

$$(1.9) \quad \boxed{\mathbf{g} = g_{ij} dq^i \otimes dq^j}$$

che utilizza il prodotto tensoriale di 1-forme – §5.4.2 – oppure da una scrittura del tipo

$$(1.10) \quad \boxed{ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j}$$

Questa seconda notazione rende in effetti automatico il calcolo delle componenti della metrica. Infatti, posto che in coordinate cartesiane ortonormali si ha

$$(1.11) \quad ds^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (dx^\alpha)^2,$$

se si calcolano i differenziali delle equazioni di trasformazione $x^\alpha = x^\alpha(q^i)$,

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} dq^i$$

e si sostituiscono nella sommatoria (1.11), si trova un polinomio di secondo grado omogeneo nei differenziali dq^i , cioè un'espressione del tipo (1.10), i cui coefficienti sono proprio

$$g_{ij} = \sum_{\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^j} = \sum_{\alpha} J_i^\alpha J_j^\alpha = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j,$$

a conferma della (1.8).

Vediamo qui di seguito, nei dettagli, alcuni dei più comunemente usati sistemi di coordinate curvilinee per $n = 2$ e $n = 3$. In base a quanto nelle righe precedenti, per calcolare le componenti del tensore metrico, anzichè calcolare i vettori \mathbf{e}_i ed eseguirne i prodotti scalari, partiremo dalla scrittura

$$(1.12) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (ds^2 = dx^2 + dy^2 \text{ nel caso del piano})$$

e vi sostituiamo le espressioni dei differenziali delle coordinate cartesiane in funzione delle coordinate considerate. Inoltre denoteremo semplicemente con $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la base canonica a cui sono associate le coordinate (x, y, z) .

1.4.1 Coordinate polari del piano

Le coordinate polari del piano $(q^1, q^2) = (r, \theta)$ associate ad un sistema di coordinate ortonormali (x, y) sono definite dalle equazioni

$$(1.13) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

con

$$D' = \begin{cases} r > 0, \\ 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}, \quad D = \mathbb{R}^2 - O.$$

L'equazione vettoriale (1.3) è in questo caso

$$(1.14) \quad \mathbf{x} = r (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) = r \mathbf{u},$$

introdotta il **versore radiale**

$$(1.15) \quad \mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j},$$

con (\mathbf{i}, \mathbf{j}) base relativa alle coordinate (x, y) .

I vettori (1.6) sono

$$(1.16) \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{x} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} = \mathbf{u}, \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta = \partial_\theta \mathbf{x} = r (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = r \boldsymbol{\tau}, \end{cases}$$

dove

$$(1.17) \quad \boldsymbol{\tau} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

è il **versore trasverso** a \mathbf{u} nel verso di θ crescente. I vettori \mathbf{u} e $\boldsymbol{\tau}$ sono entrambi unitari e fra loro ortogonali. I differenziali delle trasformazioni (1.13) sono

$$\begin{cases} dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta, \\ dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta. \end{cases}$$

Sostituite queste espressioni nella (1.12) troviamo

$$(1.18) \quad \boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Ordinando le coordinate, ponendo $(q^1, q^2) = (r, \theta)$ troviamo che la matrice metrica è

$$(1.19) \quad \boxed{[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}}$$

Essendo questa diagonale, si ha la conferma che le coordinate polari sono ortogonali.

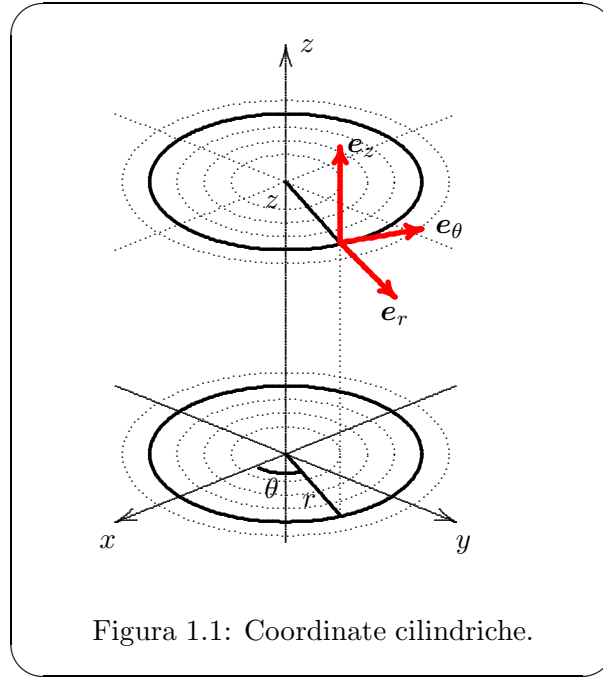


Figura 1.1: Coordinate cilindriche.

1.4.2 Coordinate cilindriche

Le coordinate cilindriche $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, z)$ si ottengono riferendo lo spazio affine a coordinate affini (x, y, z) e considerando sul piano (x, y) le coordinate polari definite dalle (1.13). Oltre alle (1.16) si ha $e_3 = e_z = \mathbf{k}$. Pertanto,

$$(1.20) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,$$

quindi

$$(1.21) \quad [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.4.3 Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche⁴ $(q^1, q^2, q^3) = (r, \phi, \theta)$ – **raggio**, **longitudine** e **co-latitudine** – sono definite dalle equazioni

$$(1.22) \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad \text{con} \quad D' = \begin{cases} r > 0, \\ 0 < \theta < \pi, \\ 0 \leq \phi < 2\pi, \end{cases} \quad D = \mathbb{R}^3 - (\text{asse } z).$$

⁴ Dette anche coordinate polari sferiche.

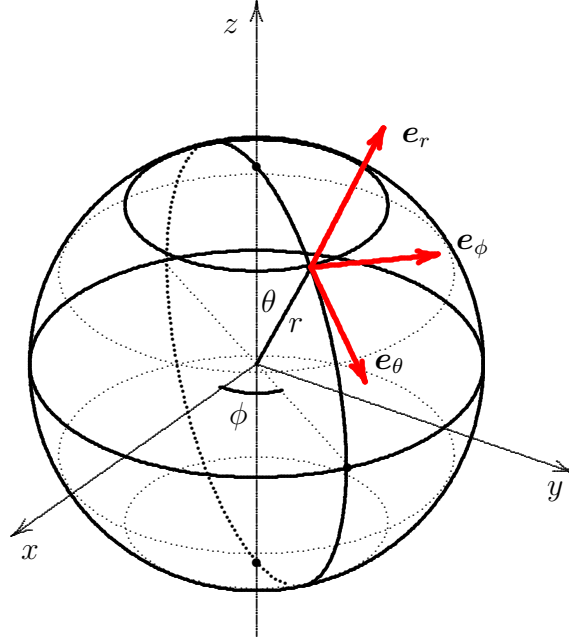


Figura 1.2: Coordinate sferiche.

La co-latitudine θ può essere sostituita dalla **latitudine** λ , l'angolo formato da OP e l'equatore, variabile quindi in $(-\pi/2, \pi/2)$. Si hanno in questo caso le equazioni

$$(1.23) \quad \begin{cases} x = r \cos \lambda \cos \phi, \\ y = r \cos \lambda \sin \phi, \\ z = r \sin \lambda. \end{cases} \quad \text{con} \quad D' = \begin{cases} r > 0, \\ -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \lambda < 2\pi, \end{cases} \quad D = \mathbb{R}^3 - (\text{asse } z).$$

Nel caso delle (1.22) i vettori del riferimento e_i sono:

$$(1.24) \quad \begin{cases} e_1 = e_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} = \mathbf{u}, \\ e_2 = e_\phi = r (\sin \theta \cos \phi \mathbf{j} - \sin \theta \sin \phi \mathbf{i}), \\ e_3 = e_\theta = r (\cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}), \end{cases}$$

dove \mathbf{u} è il versore radiale, perpendicolare alle sfere coordinate, mentre e_ϕ e e_θ sono

tangenti a queste e sono tra loro ortogonali. La matrice metrica è

$$(1.25) \quad [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix},$$

e

$$(1.26) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 (d\phi^2 + \sin^2 \theta d\theta^2).$$

Nel caso delle (1.23) i vettori \mathbf{e}_i sono

$$(1.27) \quad \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \cos \lambda \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \lambda \sin \varphi \mathbf{j} + \sin \lambda \mathbf{k} = \mathbf{u}, \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi = r \cos \lambda (\cos \varphi \mathbf{j} - \sin \varphi \mathbf{i}), \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\lambda = -r \sin \lambda (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}). \end{cases}$$

La matrice metrica è

$$(1.28) \quad [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \lambda \end{bmatrix}$$

e

$$(1.29) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\lambda^2).$$

1.5 Campi scalari

Sono le funzioni reali sopra uno spazio affine. Si rappresentano tramite funzioni $f(\mathbf{x})$ del vettore posizione \mathbf{x} o, equivalentemente, da una funzione $f(x^\alpha)$ nelle n coordinate cartesiane oppure da una funzione $f(q^i)$ nelle coordinate curvilinee scelte.⁵ Ricordiamo che una tale funzione è di classe C^k se ammette derivate parziali continue fino all'ordine k ($k = 0$ corrisponde alla continuità), di classe C^∞ se ha derivate parziali continue di qualunque ordine. Se non specificato altrimenti, le funzioni considerate si intenderanno tacitamente di classe C^∞ . Denotiamo con $C^k(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ o semplicemente con $\mathcal{F}^k(\mathcal{A})$ l'insieme dei campi scalari di classe C^k su \mathcal{A} . Per $k = \infty$ usiamo semplicemente la notazione $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. Questi insiemi hanno la struttura di anello commutativo e di algebra associativa e commutativa.

⁵ A rigore si dovrebbero scegliere simboli diversi per la f , a seconda della scelta delle coordinate. Se la trattazione non comporta confusioni si usa lo stesso simbolo.

1.6 Campi vettoriali

DEFINIZIONE 1.6.1 – Un campo vettoriale su uno spazio affine \mathcal{A}_n è una legge \mathbf{X} che associa ad ogni punto $P \in \mathcal{A}_n$ un vettore $\mathbf{X}(P)$ applicato in P . •

Fissato un riferimento cartesiano, un campo vettoriale ammette una rappresentazione del tipo

$$(1.30) \quad \mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{c}_\alpha,$$

dove le (X^α) sono funzioni reali su \mathcal{A} : le **componenti cartesiane**.

Denotiamo con $\mathcal{X}^k(\mathcal{A})$ l'insieme dei campi vettoriali di classe C^k su \mathcal{A} . Per $k = \infty$ usiamo semplicemente la notazione $\mathcal{X}(\mathcal{A})$. Questi insiemi hanno la struttura di modulo su $\mathcal{F}^k(\mathcal{A})$ e di spazio vettoriale reale a dimensione infinita.

Per coordinate (curvilinee) qualsiasi (q^i) vale una rappresentazione del tipo

$$(1.31) \quad \mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i,$$

del tutto simile alla (1.30).

DEFINIZIONE 1.6.2 – La **derivata di un campo scalare f rispetto ad un campo vettoriale \mathbf{X}** è il campo scalare $\mathbf{X}f$ definito da

$$(1.32) \quad \boxed{\mathbf{X}f = X^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}}$$

ovvero, in un qualunque sistema di coordinate, da

$$(1.33) \quad \boxed{\mathbf{X}f = X^i \frac{\partial f}{\partial q^i}} \quad \bullet$$

Si verifica infatti che questa definizione non dipende dal sistema di coordinate scelto. L'applicazione $\mathbf{X}: \mathcal{F}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}): f \mapsto \mathbf{X}f$ così definita è *lineare*

$$(1.34) \quad \mathbf{X}(af + bg) = a\mathbf{X}f + b\mathbf{X}g \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

e soddisfa alla **regola di Leibniz**:

$$(1.35) \quad \mathbf{X}(fg) = g\mathbf{X}f + f\mathbf{X}g.$$

Una siffatta applicazione prende il nome di **derivazione sulle funzioni**.⁶ Come sarà giustificato nel paragrafo che segue, al posto di $\mathbf{X}f$ useremo anche la notazione

$$\langle \mathbf{X}, df \rangle.$$

⁶ Si può dimostrare che, viceversa, ogni operatore sulle funzioni soddisfacente a queste due condizioni si identifica con un campo vettoriale.

NOTA 1.6.1 – Se nella definizione (1.33) si pone al posto di f una qualunque delle coordinate (q^i) , per esempio q^1 , si trova

$$\mathbf{X}q^k = X^i \frac{\partial q^k}{\partial q^i}.$$

Ma

$$\frac{\partial q^k}{\partial q^i} = \delta_i^k,$$

per cui vale la formula

$$(1.36) \quad \boxed{\langle \mathbf{X}, dq^k \rangle = X^k}$$

Questa mostra che *in un qualunque sistema di coordinate (q^i) la componente X^k di un campo vettoriale \mathbf{X} coincide con la derivata della coordinata q^k rispetto al campo stesso.*⁷

•

1.7 Forme differenziali

DEFINIZIONE 1.7.1 – Una **forma lineare** o **1-forma** sopra uno spazio affine \mathcal{A} è un'applicazione lineare $\varphi: \mathcal{X}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A})$, che ad ogni campo vettoriale \mathbf{X} associa il campo scalare denotato con

$$\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle. \quad \bullet$$

In questo caso “lineare” significa che è soddisfatta la proprietà

$$\langle f\mathbf{X} + g\mathbf{Y}, \varphi \rangle = f \langle \mathbf{X}, \varphi \rangle + g \langle \mathbf{Y}, \varphi \rangle$$

per ogni scelta delle funzioni $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ e dei campi vettoriali $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(\mathcal{A})$.

L'insieme delle 1-forme sopra uno spazio affine \mathcal{A} , che denotiamo con $\Phi^1(\mathcal{A})$, è un modulo sull'anello $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ e uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . La somma $\varphi + \psi$ di due forme lineari e il prodotto $f\varphi$ di una 1-forma per una funzione sono definiti da:

$$\langle \mathbf{X}, \varphi + \psi \rangle = \langle \mathbf{X}, \varphi \rangle + \langle \mathbf{X}, \psi \rangle, \quad \langle \mathbf{X}, f\varphi \rangle = f \cdot \langle \mathbf{X}, \varphi \rangle.$$

L'applicazione bilineare

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{X}(\mathcal{A}) \times \Phi^1(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}): (\mathbf{X}, \varphi) \mapsto \langle \mathbf{X}, \varphi \rangle$$

prende il nome di **valutazione** (tra una forma lineare e un campo vettoriale).

Un esempio fondamentale di forma lineare:

⁷ Questa proprietà sarà diverse volte applicata nel seguito.

DEFINIZIONE 1.7.2 – *Il differenziale df di un campo scalare f è la 1-forma definita dall'uguaglianza*

$$(1.37) \quad \langle \mathbf{X}, df \rangle = \mathbf{X}f$$

dove a secondo membro sta la derivata di f rispetto al campo \mathbf{X} . •

Questa definizione è corretta perché la linearità dell'applicazione $df: \mathcal{X}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}): \mathbf{X} \mapsto \langle \mathbf{X}, df \rangle$ segue dal fatto che la derivata $\mathbf{X}f$, tenuto fisso il campo scalare f , è lineare rispetto al campo vettoriale \mathbf{X} .

Dalla regola di Leibniz per la derivata rispetto ad un campo vettoriale segue poi la regola di Leibniz per il differenziale:

$$(1.38) \quad \boxed{d(fg) = g df + f dg}$$

Scelto un qualunque sistema di coordinate (q^i) , e denotati al solito con \mathbf{e}_i i vettori del riferimento associato (1.6), ogni 1-forma φ è determinata dalle sue **componenti** definite da

$$(1.39) \quad \boxed{\varphi_i = \langle \mathbf{e}_i, \varphi \rangle}$$

Infatti, tenuto conto della (1.36), per ogni campo vettoriale \mathbf{X} abbiamo:

$$\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle = \langle X^i \mathbf{e}_i, \varphi \rangle = X^i \langle \mathbf{e}_i, \varphi \rangle = X^i \varphi_i.$$

Questo mostra che in componenti la valutazione fra campi vettoriali e 1-forme è data dalla formula

$$(1.40) \quad \boxed{\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle = X^i \varphi_i}$$

cioè che *la valutazione tra un campo vettoriale ed una forma differenziale è la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti* (o, come si usa dire, “omologhe”).⁸

A sua volta la (1.40), vista ancora la (1.36), mostra che *una forma differenziale è sempre esprimibile come combinazione lineare dei differenziali delle coordinate*, ammette cioè una rappresentazione del tipo

$$(1.41) \quad \boxed{\varphi = \varphi_i dq^i}$$

dove le φ_i sono proprio le componenti definite in (1.39).

Infine, particolarizzando la (1.41) al caso di un differenziale e tenendo conto della (1.37) si vede che

$$(1.42) \quad \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i}$$

Dunque: *le componenti del differenziale di una funzione sono le sue derivate parziali.*

⁸ Ha allora anche senso valutare una 1-forma φ su di un vettore applicato \mathbf{v} : è il numero $\langle \mathbf{v}, \varphi \rangle = v^i \varphi_i$.

1.8 Corrispondenza tra campi vettoriali e forme differenziali

In analogia con quanto accade negli spazi vettoriali euclidei, la presenza del tensore metrico stabilisce una corrispondenza biunivoca fra campi vettoriali e 1-forme. Ad ogni campo vettoriale \mathbf{X} corrisponde la 1-forma denotata con \mathbf{X}^b e definita dall'equazione

$$(1.43) \quad \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X}^b \rangle = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X}$$

per ogni campo vettoriale \mathbf{Y} . Le componenti X_i di questa 1-forma, che chiamiamo **componenti covarianti** del campo \mathbf{X} , sono date da

$$(1.44) \quad X_i = g_{ij} X^j.$$

Si ottengono dunque “abbassando” gli indici con la matrice metrica. Viceversa, ad una 1-forma $\boldsymbol{\xi} = \xi_i dq^i$ corrisponde un campo vettoriale $\boldsymbol{\xi}^\sharp$ le cui **componenti contravarianti** sono date da

$$(1.45) \quad \xi^i = g^{ij} \xi_j,$$

dove $[g^{ij}]$ è la matrice inversa della matrice metrica $[g_{ij}]$. Le g^{ij} sono le componenti contravarianti del tensore metrico. È importante osservare che vale la formula

$$(1.46) \quad \langle \mathbf{X}, dq^k \rangle = \mathbf{X} \cdot g^{kh} \mathbf{e}_h,$$

cioè che il differenziale dq^k di una coordinata opera su di un vettore \mathbf{X} come il prodotto scalare per il vettore

$$(1.47) \quad \mathbf{e}^k = g^{kh} \mathbf{e}_h.$$

1.9 Gradiente di un campo scalare

Quanto stabilito nel paragrafo precedente porta in particolare a definire il **gradiente di un campo scalare** V come il campo vettoriale corrispondente al differenziale dV :

$$(1.48) \quad \text{grad}(V) = (dV)^\sharp.$$

Il gradiente di V è anche denotato con ∇V . In componenti:

$$(1.49) \quad (\nabla V)^i = g^{ij} \partial_j V.$$

Adattando la definizione (1.43) al caso del gradiente possiamo scrivere

$$(1.50) \quad \langle \mathbf{v}, dV \rangle = \mathbf{v} \cdot \nabla V$$

per ogni vettore \mathbf{v} .

L'utilità del gradiente è messa in evidenza dal **teorema del gradiente**:

TEOREMA 1.9.1 – *Il gradiente di una funzione V è ortogonale alle superfici di livello (o equipotenziali) $V = \text{costante}$ ed è orientato nel verso della crescita di V .*⁹

DIMOSTRAZIONE. La condizione di tangenza ad una superficie equipotenziale del vettore \mathbf{v} è $\langle \mathbf{v}, dV \rangle = 0$, vedi Nota 1.13.7 più avanti. Dalla (1.50) segue allora $\mathbf{v} \cdot \nabla V = 0$ per ogni \mathbf{v} tangente; questo significa che ∇V è ortogonale alla superficie. Inoltre, ancora dalla (1.50), ponendo $\mathbf{v} = \nabla V$ si trova $\langle \nabla V, dV \rangle = (\nabla V)^2 > 0$.¹⁰ Questo significa che la derivata di V rispetto al suo gradiente è positiva. \square

Le condizioni necessarie e sufficienti affinché un campo vettoriale sia il gradiente di un **potenziale** V sono note dall'Analisi (saranno comunque riviste in un contesto più generale nel Cap. 5).

1.10 Curve

Per **curva** su di uno spazio affine \mathcal{A} intendiamo sempre (salvo avviso contrario) una **curva parametrizzata** cioè un'applicazione $\gamma: I \rightarrow \mathcal{A}$ da un intervallo reale $I \subseteq \mathbb{R}$ in \mathcal{A} . Una curva ammette una **rappresentazione vettoriale**

$$(1.51) \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$$

che assegna il vettore posizione $OP = \mathbf{x}$ del punto P sulla curva per ogni valore del **parametro** $t \in I$. Interpretando il parametro t come “tempo”, una curva può essere intesa come **moto di un punto** $P(t)$ nello spazio affine. Chiameremo **cammino** o **orbita** o **traiettoria** l'immagine $\gamma(I)$ della curva γ (si tratta di una curva “non parametrizzata”). Rispetto ad un riferimento cartesiano la rappresentazione vettoriale (1.51) si traduce in un sistema di n **equazioni parametriche**

$$(1.52) \quad x^\alpha = r^\alpha(t).$$

Una curva è di classe C^k se tali sono tutte queste funzioni. Per ogni $t \in I$ il limite

$$(1.53) \quad \mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))$$

è un vettore tangente all'orbita nel punto $\mathbf{r}(t)$. Nell'interpretazione cinematica della curva è la **velocità istantanea**. È la derivata della funzione $\mathbf{x}(t)$:¹¹

$$(1.54) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Le componenti cartesiane di \mathbf{v} sono le derivate delle funzioni (1.51):

$$(1.55) \quad v^\alpha = \frac{dr^\alpha}{dt} = \dot{r}^\alpha.$$

⁹ Questo enunciato si riferisce a punti non critici di V , in cui cioè $dV \neq 0$.

¹⁰ Abbiamo escluso i punti in cui $dV = 0$, cioè $\nabla V = 0$; di qui la disuguaglianza forte > 0 .

¹¹ Useremo il punto sovrapposto per denotare la derivata rispetto a t .

Se la curva si sviluppa sul dominio D di un sistema di coordinate (q^i) allora essa ammette equazioni parametriche del tipo

$$(1.56) \quad q^i = q^i(t).$$

Siccome il vettore $\mathbf{r}(t)$ può pensarsi dipendere da t attraverso le coordinate (q^i) , risulta

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \partial_i \mathbf{r} \frac{dq^i}{dt},$$

dove alle (q^i) vanno sostituite le equazioni parametriche (1.56). Quindi:

$$(1.57) \quad \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i, \quad v^i = \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i.$$

Questo mostra che le componenti del vettore tangente \mathbf{v} secondo il riferimento associato alle coordinate (q^i) sono ancora le derivate prime delle equazioni parametriche in quelle coordinate (come accade per le coordinate cartesiane).

1.11 Superfici

Data una funzione $F(\mathbf{x})$ su \mathcal{A} , l'equazione

$$(1.58) \quad F(\mathbf{x}) = 0$$

definisce un sottoinsieme $Q \subseteq \mathcal{A}$, più precisamente una **superficie regolare** di dimensione $n - 1$ se in ogni punto di Q il differenziale dF non è nullo. I punti in cui $dF = 0$ si dicono **punti singolari** di Q . Un'equazione del tipo

$$(1.59) \quad F(\mathbf{x}) = c$$

definisce, al variare del parametro costante c in un opportuno sottoinsieme di \mathbb{R} , una famiglia di sottoinsiemi Q_c . Due sottoinsiemi corrispondenti a valori distinti della costante c non si intersecano. Nel caso in cui $df \neq 0$ su ogni sottoinsieme Q_c , allora ognuno di questi è una superficie regolare. Si dice allora che l'equazione (1.59) definisce un **fogliettamento** dello spazio affine (eventualmente di un suo aperto).

Se invece si considera un sistema di $k \leq n$ equazioni

$$(1.60) \quad F_a(\mathbf{x}) = 0 \quad (a = 1, \dots, k)$$

e se in ogni punto \mathbf{x} soddisfacente a queste i k differenziali df_a sono linearmente indipendenti, allora il sistema definisce una superficie regolare Q di dimensione $n - k$.

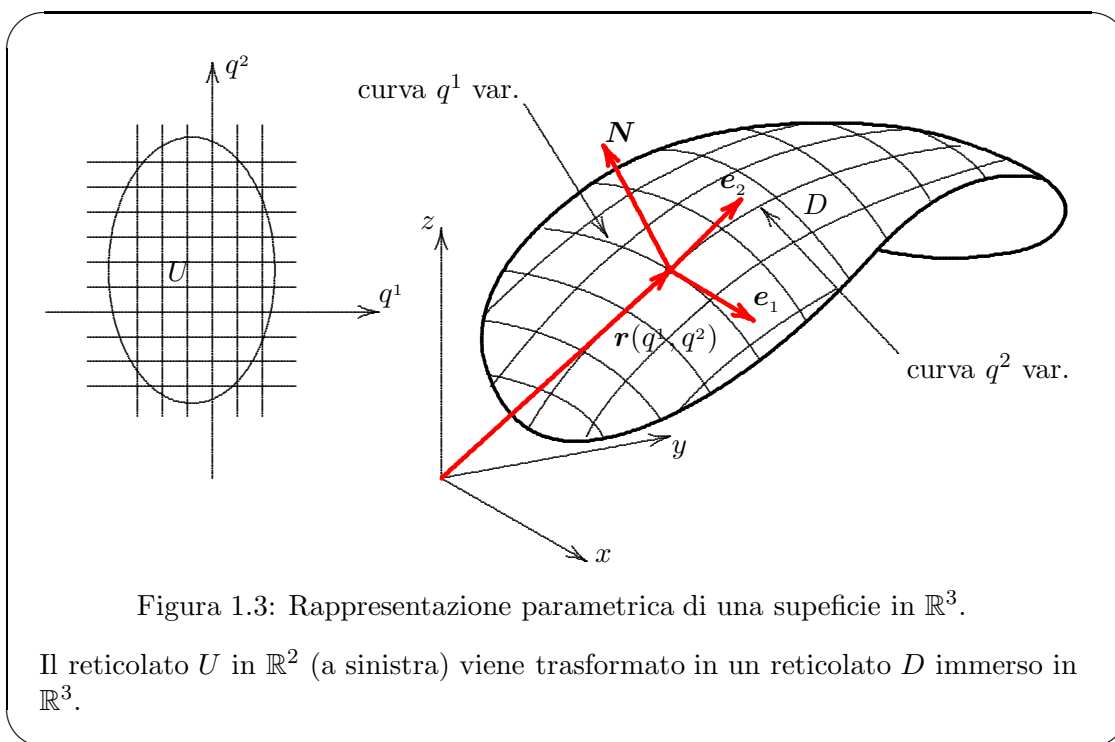
Questo accade se e solo se la matrice $k \times n$ delle derivate parziali $\partial F_a / \partial q^i$ ha in ogni punto di Q rango massimo ($= k$):

$$(1.61) \quad \boxed{\text{rank} \left[\frac{\partial F_a}{\partial q^i} \right] = k}$$

Più in generale, un sistema di equazioni del tipo

$$(1.62) \quad F_a(\mathbf{x}) = c_a \quad (a = 1, \dots, k)$$

al variare delle costanti c_a in un opportuno dominio di \mathbb{R}^k definisce un fogliettamento di codimensione k , sempreché la condizione (1.61) venga soddisfatta su tutto il campo di definizione delle equazioni.



Una superficie $Q \subseteq \mathcal{A}_n$ di dimensione $m < n$ può anche essere rappresentata, tutta o in parte, da un'equazione vettoriale parametrica

$$(1.63) \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}(q^i)$$

con m parametri $(q^i) = (q^1, \dots, q^m)$ variabili in un dominio $U \subseteq \mathbb{R}^m$, equazione che in coordinate cartesiane si traduce in un sistema di n equazioni parametriche

$$(1.64) \quad x^\alpha = r^\alpha(q^i).$$

Al variare dei parametri in U si descrive un sottoinsieme $D \subseteq Q$. Si richiede che tramite le (1.63) in ogni punto di D gli m vettori

$$(1.65) \quad \mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$$

siano indipendenti. Questo equivale alla massimalità del rango della matrice $m \times n$ delle derivate parziali $\partial_i x^\alpha$.

(1.66)

$$\text{rank} \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \right] = m$$

Queste formule sono simili a quelle di §1.4. Qui però i parametri (q^i) sono $m < n$ (e quindi gli indici latini variano da 1 a m). I parametri (q^i) prendono il nome di **coordinate superficiali**. Se la condizione d'indipendenza dei vettori e_i è soddisfatta si dice che la (1.63) rappresenta un'**immersione** dell'insieme $U \subseteq \mathbb{R}^m$ nello spazio affine \mathcal{A}_n . In ogni punto dell'insieme immagine D , sottoinsieme della superficie Q , questi vettori, detti **vettori coordinati**, sono tangenti alla superficie e determinano quindi il piano tangente. Più precisamente essi sono tangenti alle rispettive **curve coordinate**. Queste curve, tra loro trasverse, si ottengono facendo variare una coordinata mantenendo costanti le rimanenti. Sono quindi le immagini secondo l'immersione delle rette coordinate del piano \mathbb{R}^m dove variano le (q^i) .

ESEMPIO 1.11.1 – Utilizzando coordinate polari sferiche dello spazio, la sfera \mathbb{S}_2 di raggio R centrata nell'origine può essere descritta da equazioni parametriche del tipo¹²

$$(1.67) \quad \begin{cases} x = R \cos \lambda \cos \phi, \\ y = R \cos \lambda \sin \phi, \\ z = R \sin \lambda. \end{cases} \quad \text{con} \quad U = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \lambda < 2\pi, \end{cases} \quad D = \mathbb{R}^3 - \text{asse } z.$$

Qui le coordinate superficiali sono le **coordinate geografiche** $(q^1, q^2) = (\phi, \lambda)$, longitudine e latitudine. I vettori coordinati sono¹³

$$(1.68) \quad \begin{cases} e_1 = e_\phi = r \cos \lambda (\cos \phi \mathbf{j} - \sin \phi \mathbf{i}), \\ e_2 = e_\lambda = -r \sin \lambda (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}). \end{cases}$$

1.12 Geometrie interna ed esterna di una superficie

Per ogni coppia di vettori (\mathbf{u}, \mathbf{v}) tangenti alla superficie in un medesimo punto, quindi tali da essere rappresentati come combinazione lineare dei vettori coordinati, $\mathbf{u} = u^i e_i$, $\mathbf{v} = v^j e_j$, il prodotto scalare assume la forma

$$(1.69) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = A_{ij} u^i v^j,$$

posto

(1.70)

$$A_{ij} = e_i \cdot e_j$$

¹² Confrontare con le (1.23).

¹³ Confrontare con le (1.27).

Si definisce in questo modo una matrice $[A_{ij}]_{2 \times 2}$, funzione delle coordinate superficiali, simmetrica e regolare, detta **matrice metrica superficiale**, quindi una forma bilineare simmetrica **A** (ovvero una forma quadratica) sui vettori tangenti a Q in un medesimo punto detta **prima forma fondamentale** della superficie. In altri termini, la prima forma fondamentale è la restrizione del tensore metrico **g** in \mathcal{E}_3 ai vettori tangenti alla superficie.

Consideriamo ora le derivate parziali rispetto alle q^i dei vettori coordinati e_i . Queste generano dei campi vettoriali sulla superficie che in genere non sono più tangenti. Introducendo il versore **N** ortogonale (normale) alla superficie, vedi Figura 1.3, sussisterà per queste derivate una rappresentazione del tipo

$$(1.71) \quad \partial_i e_j = \Gamma_{ij}^k e_k + B_{ij} N$$

Risultano di conseguenza definiti due sistemi di funzioni, Γ_{ij}^h e B_{ij} , entrambi simmetrici negli indici in basso,

$$(1.72) \quad \Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h, \quad B_{ij} = B_{ji},$$

perché $\partial_i e_j = \partial_i \partial_j \mathbf{r} = \partial_j \partial_i \mathbf{r} = \partial_j e_i$. Le funzioni Γ_{ij}^h prendono il nome di **simboli di Christoffel**¹⁴ della superficie associati alle coordinate q^i . Le funzioni B_{ij} si interpretano come componenti di una forma bilineare simmetrica **B** sui vettori tangenti alla superficie, detta **seconda forma fondamentale**. Moltiplicando scalarmente la (1.71) per il versore normale **N** si ottiene la definizione esplicita delle B_{ij} :

$$(1.73) \quad B_{ij} = \partial_i e_j \cdot N = -\partial_i N \cdot e_j$$

Dalla seconda di queste espressioni si vede che esse forniscono una misura del variare del versore normale alla superficie e quindi una misura della *curvatura* della superficie stessa.

La prima forma fondamentale stabilisce una metrica sulla superficie e quindi una geometria, in genere non euclidea, che chiamiamo **geometria interna**.

Si pensi ad una superficie (bidimensionale) materializzata in un foglio di carta sottile, flessibile ma inestendibile. Le proprietà metriche delle figure che possono tracciarsi su tale foglio, e che prescindono da relazioni con lo spazio ambiente esterno, sono invarianti rispetto a flessioni della superficie, fanno parte della “geometria interna”. Tali proprietà sono tutte determinate dalla prima forma fondamentale **A** e quindi, qualunque sia il sistema di coordinate superficiali q^i , dalle sue componenti A_{ij} e da tutte le loro derivate parziali rispetto alle q^i .

Per **geometria esterna** intendiamo invece quelle proprietà della superficie che non sono invarianti rispetto a flessioni e che riguardano il modo con cui essa è immersa nello spazio ambiente. Queste proprietà dipendono dalla seconda forma fondamentale.

¹⁴Più precisamente, Simboli Di C. di “seconda specie”.

C'è però una grandezza geometrica dedotta dalla seconda forma fondamentale che dipende dalla sola geometria interna, cioè dalla prima forma fondamentale. Di questo fatto sorprendente e paradossale si accorse il Gauss e lo enunciò come **theorema egregium**:

TEOREMA 1.12.1 – *La curvatura totale di una superficie (bidimensionale) dipende solo dalla geometria interna, cioè dalla prima forma fondamentale.*

In altri termini, comunque si fletta la superficie, supposta inestendibile, la curvatura totale in ogni punto non cambia.

Si chiamiamo **curvature principali** di una superficie gli autovalori della seconda forma fondamentale rispetto alla prima, cioè le radici¹⁵ λ_1 e λ_2 dell'equazione algebrica

$$(1.74) \quad \det[B_{ij} - \lambda A_{ij}] = 0.$$

Si chiamano poi **curvatura media** e **curvatura totale** le grandezze

$$(1.75) \quad H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad K = \lambda_1 \lambda_2,$$

rispettivamente.

NOTA 1.12.1 – Una superficie si dice (localmente) **svilupppabile** se ogni suo punto ammette un intorno la cui geometria interna è quella del piano. Si dimostra che una superficie è svilupppabile se e solo se la curvatura totale è nulla ovunque.●

NOTA 1.12.2 – Nei testi classici le componenti della prima e della seconda forma fondamentale di una superficie bidimensionale sono denotate rispettivamente con (E, F, G) e (L, M, N) ; si pone cioè:

$$(1.76) \quad \begin{cases} E = A_{11}, & F = A_{12} = A_{21}, & G = A_{22}, \\ L = B_{11}, & M = B_{12} = B_{21}, & N = B_{22}. \end{cases}$$

L'equazione (1.74) diventa

$$\det \begin{bmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{bmatrix} = 0,$$

$$(EG - F^2)\lambda^2 + (2MF - LG - EN)\lambda + LN - M^2 = 0.$$

Di qui segue:

$$(1.77) \quad H = -\frac{2MF - LG - EN}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad \bullet$$

Su questi argomenti si ritornerà nel capitolo sulla cinematica del punto, §2.7, dove la nozione di geodetica di una superficie svolgerà un ruolo fondamentale nella costituzione della geometria interna.

¹⁵ Entrambe reali, perché la forma quadratica \mathbf{A} è semi-definita positiva

1.13 Sistemi dinamici

Un campo vettoriale può essere interpretato come “sistema dinamico”, vale a dire come entità capace di generare moti.

L’assegnazione di un campo vettoriale $\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{c}_\alpha$ su di uno spazio affine \mathcal{A}_n genera due tipi di equazioni differenziali che qui scriviamo in forma intrinseca con, a fianco, la loro rappresentazione in un sistema di coordinate generiche (q^i):

$$(1.78) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x})} \iff \boxed{\frac{dq^i}{dt} = X^i(q^*)}$$

$$(1.79) \quad \boxed{\langle \mathbf{X}, dF \rangle = 0} \iff \boxed{X^i(q^*) \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0}$$

L’equazione (1.78) equivale a un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (in forma normale e autonome) nelle n funzioni incognite $q^i(t)$. Le sue soluzioni sono dette **curve integrali** di \mathbf{X} .

L’equazione (1.79) si traduce in un’equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine, lineare e omogenea, nella funzione incognita a n variabili $F(q^i)$. Le sue soluzioni sono dette **funzioni integrali** o **integrali primi** di \mathbf{X} .

1.13.1 Curve integrali

DEFINIZIONE 1.13.1 – Una **curva integrale** di un campo vettoriale \mathbf{X} è una curva $\mathbf{x}(t)$ su \mathcal{A}_n tale che per ogni $t \in I$ il valore del campo \mathbf{X} nel punto $\mathbf{x}(t)$ coincide col vettore velocità $\mathbf{v}(t)$: $\mathbf{X}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{v}(t)$. •

Si assume che gli intervalli di definizione delle curve integrali siano aperti e contengano lo zero, detto **istante iniziale**.

Dunque, essendo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$, una curva integrale $\mathbf{x}(t)$ soddisfa identicamente (cioè per ogni $t \in I$) l’equazione differenziale (1.78).

DEFINIZIONE 1.13.2 – Una curva integrale si dice **basata nel punto** P_0 (di vettore \mathbf{x}_0) se $P(0) = P_0$, cioè se $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Si dice anche che P_0 è il **punto base** o il **punto iniziale** della curva. •

NOTA 1.13.1 – Si consideri uno spazio affine \mathcal{A}_n (si pensi per semplicità a caso $n = 2$, cioè al piano affine) invaso da un fluido in **moto stazionario**, cioè tale che in ogni prefissato punto di \mathcal{A}_n il vettore velocità delle particelle del fluido che vi transitano è costante nel tempo. In queste condizioni i vettori velocità nei vari punti danno luogo ad un campo vettoriale \mathbf{X} indipendente dal tempo. Viceversa, se si assegna un campo vettoriale \mathbf{X} su \mathcal{A}_n , allora questo può essere interpretato come **campo di velocità** delle particelle di un

fluido in moto stazionario. In questo caso si pone il problema della determinazione dei moti delle particelle. Il moto di una particella è rappresentato da una curva integrale del campo delle velocità. •

Per distinguere le varie curve integrali si fa riferimento al punto iniziale. Si può dimostrare che:

TEOREMA 1.13.1 – Se \mathbf{X} è un campo vettoriale di classe C^k con $k \geq 1$ su di un dominio aperto $M \subseteq \mathcal{A}_n$, allora comunque si fissi il punto $P_0 \in M$ esiste una ed una sola **curva integrale massimale** basata in P_0 .

Si dimostra infatti che, subordinatamente a opportune ipotesi di regolarità del campo, tutte le possibili curve integrali basate in P_0 coincidono nelle intersezioni dei loro rispettivi intervalli di definizione (che contengono tutti lo zero) nel senso che se $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathcal{A}$ e $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathcal{A}$ sono due curve integrali del campo basate nello stesso punto P_0 , allora le loro restrizioni all'intersezione dei due intervalli di definizione coincidono: $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$. La curva integrale massimale basata in P_0 , che denotiamo con

$$\gamma_{P_0}: I_{P_0} \rightarrow M,$$

è quella curva integrale tale che

$$I \subseteq I_{P_0}, \quad \gamma_{P_0}|_I = \gamma$$

per ogni altra curva integrale $\gamma: I \rightarrow \mathcal{A}$ basata in P_0 . La curva integrale massimale ha dunque la massima “estensione temporale” tra tutte le curve integrali basate nello stesso punto.

L'intervallo I_{P_0} di definizione della curva integrale massimale dipende dal punto base P_0 .

DEFINIZIONE 1.13.3 – Se $I_{P_0} = \mathbb{R}$ per ogni P_0 (tutte le curve integrali massimali sono definite su tutto l'asse reale) si dice che il campo vettoriale è **completo**. •

Si dimostra che

TEOREMA 1.13.2 – Se il campo \mathbf{X} ha supporto compatto allora è completo.

Il supporto di \mathbf{X} è la chiusura dell'insieme dei punti dove $\mathbf{X} \neq 0$.

NOTA 1.13.2 – Le immagini delle curve integrali di un campo vettoriale sono dette **orbite** o **linee di flusso**. Il loro insieme costituisce il cosiddetto **ritratto di fase** del campo. Si noti che un'orbita è l'immagine di tutte le curve integrali basate nei suoi punti (Figura 1.4). •

NOTA 1.13.3 – Un punto P è detto **punto critico** o **singolare** di un campo \mathbf{X} se $\mathbf{X}(P) = 0$. In corrispondenza ad un punto critico si annullano i secondi membri del sistema differenziale (1.78). Una curva integrale massimale basata in un punto critico è costante, assume cioè sempre il valore P per ogni $t \in \mathbb{R}$. Un punto critico è per questo motivo anche detto **punto fisso**. •

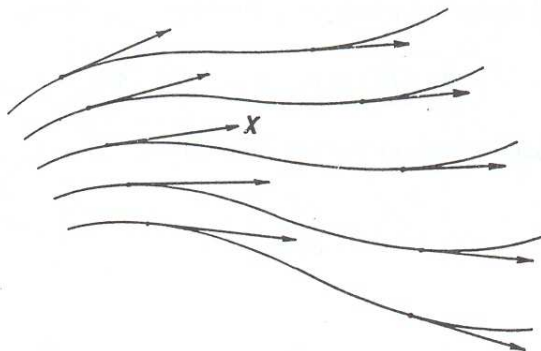


Figura 1.4: Linee di flusso.

NOTA 1.13.4 – **Sistemi non autonomi.** Nel caso di un **campo vettoriale dipendente dal tempo** $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ il sistema differenziale del prim'ordine corrispondente è non autonomo (la variabile indipendente t compare a secondo membro):

$$(1.80) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}$$

Si considera allora nel prodotto cartesiano $\mathcal{A}_n \times \mathbb{R}$ il campo vettoriale, detto **estensione** di \mathbf{X} , $\overline{\mathbf{X}}(\overline{\mathbf{x}}) = (\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau), 1)$, posto $\overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \tau)$. Questo campo ha componente \mathbf{X} rispetto al fattore \mathcal{A}_n e componente 1 secondo il fattore \mathbb{R} . Il sistema non autonomo (1.80) (di n equazioni) è infatti equivalente al sistema dinamico corrispondente a $\overline{\mathbf{X}}$ cioè al sistema autonomo di $n + 1$ equazioni

$$(1.81) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau), \\ \frac{d\tau}{dt} = 1, \end{cases}}$$

dove il parametro ausiliario τ è equivalente al tempo t : l'ultima equazione afferma infatti che $\tau = t + \text{costante}$. Tutte le soluzioni del sistema (1.80) si ottengono dalle curve integrali del sistema (1.81) dando valore zero a questa costante. •

NOTA 1.13.5 – **Equazioni del secondo ordine.** Specialmente in meccanica, è frequente il caso di sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine del tipo

$$(1.82) \quad \boxed{\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)}$$

Il secondo membro si può intendere come **campo vettoriale dipendente dalla velocità** $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, posto $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$. Un tale sistema è equivalente ad un sistema dinamico sullo spazio (di dimensione $2n$) dei vettori applicati, cioè delle coppie (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , e precisamente al sistema

$$(1.83) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{cases}}$$

Il campo vettoriale $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ corrispondente, sul prodotto cartesiano $\mathcal{A}_n \times E_n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ha come prima componente la “funzione” \mathbf{v} e come seconda componente la funzione $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$.

Se \mathbf{F} dipende anche dal tempo t si procede all'estensione del campo \mathbf{X} nello spazio $\mathcal{A}_n \times E_n \times \mathbb{R}$, introducendo una nuova coordinata τ e considerando la componente di \mathbf{X} rispetto a questa uguale a 1. Si ottiene in questo modo il sistema dinamico (di dimensione $2n + 1$)

$$(1.84) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \tau), \\ \frac{d\tau}{dt} = 1. \end{cases}} \quad \bullet$$

NOTA 1.13.6 – Se la funzione $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ è pari rispetto alla variabile \mathbf{v} , cioè se $\mathbf{F}(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, quindi in particolare se non dipende da \mathbf{v} , allora se $\mathbf{x}(t)$ è una soluzione dell'equazione (1.82) lo è anche $\mathbf{x}(-t)$: ogni moto determinato dalla (1.82) è ripetibile “a ritroso nel tempo”. •

1.13.2 Funzioni integrali o integrali primi

La determinazione delle curve integrali è un problema che può presentare notevoli difficoltà. Si sono tuttavia sviluppati sia dei metodi qualitativi atti a stabilire il comportamento delle curve integrali (come la loro stabilità, la periodicità, ecc.) sia dei metodi numerici per il loro calcolo approssimato.

Nell'ambito di questi metodi, notevoli semplificazioni e utili informazioni sul comportamento delle curve integrali possono scaturire dalla conoscenza di certe funzioni, dette integrali primi, le quali godono della proprietà di mantenersi costanti lungo le curve integrali.

D'altra parte un campo vettoriale dà origine, come si è visto, ad un'equazione lineare alle derivate parziali le cui soluzioni sono dette funzioni integrali. Fatto notevole è che queste funzioni coincidono con gli integrali primi. Per la ricerca delle curve integrali sussiste dunque un metodo alternativo a quello dell'integrazione diretta del sistema differenziale associato al campo, ma che può a sua volta presentare notevoli difficoltà. In certi casi tuttavia la ricerca degli integrali primi ha successo, o perché si è in grado di integrare la corrispondente equazione differenziale, o perché il campo vettoriale gode di proprietà di simmetria o di invarianza, tali da produrre, in base a opportuni teoremi, degli integrali primi (esempi notevoli sono, in Meccanica, l'integrale primo dell'energia, l'integrale primo della quantità di moto, l'integrale primo delle aree).

Premettiamo alcuni aspetti “geometrici” fondamentali riguardanti la relazione di tangenza tra un campo vettoriale ed una superficie.

DEFINIZIONE 1.13.4 – Un campo vettoriale \mathbf{X} si dice **tangente** ad una superficie $Q \subset \mathcal{A}_n$ se ogni sua curva integrale basata in un punto di Q giace tutta su Q . •

TEOREMA 1.13.3 – Se una superficie Q è definita da un sistema di k equazioni¹⁶

$$(1.85) \quad F_a(\mathbf{x}) = c_a, \quad a = 1, \dots, k,$$

allora un campo vettoriale \mathbf{X} è tangente a Q se e solo se per ogni punto di Q si annulla la derivata delle F_a rispetto a \mathbf{X} , vale a dire se e solo se le k equazioni

$$(1.86) \quad \boxed{\langle \mathbf{X}, dF_a \rangle = 0} \iff \boxed{X^i \frac{\partial F_a}{\partial q^i} = 0}$$

sono soddisfatte in ogni punto soddisfacente alle (1.85).

DIMOSTRAZIONE. La condizione (necessaria e sufficiente) affinché una qualunque curva di equazione $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$ giaccia tutta su Q è che le equazioni

$$F_a(\mathbf{r}(t)) = c_a$$

¹⁶ Si richiami quanto visto al §1.11.

siano soddisfatte per ogni t appartenente all'intervallo di definizione della curva stessa. Queste equazioni equivalgono a

$$\frac{d}{dt}F_a(\mathbf{r}(t)) = 0.$$

Se in coordinate (q^i) le equazioni $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$ si traducono in equazioni parametriche $q^i = q^i(t)$ allora, sviluppando queste derivate totali si trova

$$\frac{\partial F_a}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = 0.$$

Infine, se la curva è una curva integral del campo \mathbf{X} allora $dq^i/dt = X^i$ e le precenti equazioni risultano equivalenti alle (1.86). \square

NOTA 1.13.7 – Quanto ora visto per i campi vettoriali vale anche per i singoli vettori: *un vettore \mathbf{v} è tangente ad una superficie di equazioni (1.85) se e solo se*

$$(1.87) \quad \boxed{\langle \mathbf{v}, dF_a \rangle = 0} \iff \boxed{v^i \frac{\partial F_a}{\partial q^i} = 0} \quad \bullet$$

Interpretiamo ora questi risultati in termini di integrali primi:

DEFINIZIONE 1.13.5 – *Dicesi **integrale primo** di un campo vettoriale \mathbf{X} su di uno spazio affine \mathcal{A}_n una funzione $F(\mathbf{x})$ sopra \mathcal{A}_n che si mantiene costante lungo ogni curva integrale $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$ di \mathbf{X} , cioè tale che*

$$(1.88) \quad F(\mathbf{r}(t_1)) = F(\mathbf{r}(t_2)), \quad \forall t_1, t_2 \in I. \quad \bullet$$

Secondo questa definizione, per verificare se una funzione è un integrale primo di un sistema dinamico occorrerebbe conoscere le curve integrali, le quali sono di solito incognite, anzi l'oggetto da determinarsi proprio tramite la conoscenza di integrali primi.¹⁷ Fortunatamente possiamo avvalerci dell'**equazione caratteristica degli integrali primi** (1.89) che prescinde dalla conoscenza delle curve integrali.

TEOREMA 1.13.4 – *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $F(\mathbf{x})$ sia integrale primo di un campo vettoriale \mathbf{X} è che la sua derivata rispetto a \mathbf{X} sia nulla:*

$$(1.89) \quad \boxed{\langle \mathbf{X}, dF \rangle = 0} \iff \boxed{X^i \frac{\partial F}{\partial q^i} = 0}$$

DIMOSTRAZIONE. Si riprende il ragionamento svolto nella dimostrazione del teorema precedente: la definizione (1.88) equivale a

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{x}(t)) = 0, \quad \forall t \in I$$

¹⁷ Non è escluso tuttavia che ci si ponga il problema inverso: dalla conoscenza delle curve integrali determinare tutti i possibili integrali primi. I risultati che seguono, opportunamente reinterpretati, tornano utili anche in questo caso.

per ogni curva integrale, condizione che equivale a

$$\frac{dF}{dt} = 0.$$

Svilluppando questa derivata totale si trova

$$\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = 0.$$

Ma su di una curva integrale $dq^i/dt = X^i$. Di qui la (1.89). \square

Combinando questo teorema col Teorema 1.13.3, e tenendo conto della condizione di indipendenza (1.61), si conclude che:

TEOREMA 1.13.5 – *Noti k integrali primi indipendenti F_a del campo \mathbf{X} , ogni curva integrale di X giace su una delle superfici di dimensione $n - k$ del fogliettamento definito dalle equazioni $F_a = c_a$.*

NOTA 1.13.8 – Nel caso estremo $k = n - 1$ il fogliettamento si riduce ad una **congruenza di curve** (non parametrizzate). Queste curve sono allora le orbite delle curve integrali. •

Alcune ulteriori osservazioni.

NOTA 1.13.9 – Si può più in generale intendere come **integrale primo** una funzione a valori in uno spazio vettoriale (per esempio lo spazio vettoriale E soggiacente allo spazio affine) costante lungo le curve integrali. Incontreremo nel seguito degli esempi. •

NOTA 1.13.10 – Dalla Definizione 1.13.5 di integrale primo segue che se (F_1, F_2, \dots, F_m) sono m integrali primi, allora una qualunque loro composizione $f \circ (F_1, F_2, \dots, F_m)$ tramite una funzione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è ancora un integrale primo. •

NOTA 1.13.11 – Tra le soluzioni dell'equazione (1.89) vi sono le funzioni costanti. Esse sono ovviamente prive di interesse (si dicono **integrali primi banali**). Si tratta quindi di stabilire se un campo vettoriale \mathbf{X} ammette integrali primi non banali. Un campo vettoriale ammette **integrali primi locali**, vale a dire definiti nell'intorno di punti del suo dominio di definizione, ma può non ammettere **integrali primi globali**, cioè definiti su tutto il suo dominio di definizione. Integrali primi globali si possono costruire, in linea di principio, prolungando o giustapponendo integrali primi locali, tenendo presente quanto detto nella Nota 1.13.10. Tale operazione può tuttavia non dare esito positivo, come è mostrato nell'Esempio 1.14.1 più avanti. •

1.13.3 Flussi

Alla nozione di campo vettoriale come sistema dinamico si affianca la nozione di *flusso*. Qui di seguito i campi vettoriali e le mappe, o applicazioni, saranno tacitamente considerate di classe C^∞ .¹⁸

¹⁸ Si sa bene che per la validità dei teoremi che andiamo ad esaminare basterebbe in effetti molto meno.

DEFINIZIONE 1.13.6 – Un **flusso** su di uno spazio affine \mathcal{A} è una mappa

$$(1.90) \quad \varphi: \mathbb{R} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

soddisfacente alle condizioni seguenti:

1. Per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$ la mappa

$$(1.91) \quad \varphi_t: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}: P \mapsto \varphi(t, P)$$

è una **trasformazione** di \mathcal{A} (vale a dire un'applicazione invertibile di \mathcal{A} in \mathcal{A} , differenziabile insieme all'inversa).

2. Per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza

$$(1.92) \quad \boxed{\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}} \quad \bullet$$

NOTA 1.13.12 – Dalla (1.92), detta **proprietà di gruppo**, seguono le proprietà

$$(1.93) \quad \boxed{\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t, \quad \varphi_0 = \text{id}_M, \quad (\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}}$$

L'insieme delle trasformazioni $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ forma dunque un gruppo commutativo, detto **gruppo di trasformazioni ad un parametro**. •

Sussiste il seguente fondamentale teorema:¹⁹

TEOREMA 1.13.6 – Ogni campo vettoriale completo \mathbf{X} su \mathcal{A} determina un flusso $\varphi^{\mathbf{X}}: \mathbb{R} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ponendo

$$(1.94) \quad \varphi^{\mathbf{X}}(t, P) = \gamma_P(t),$$

dove γ_P è la curva integrale massimale di \mathbf{X} basata in P .

NOTA 1.13.13 – La proprietà di gruppo (1.92) è una conseguenza diretta, oltre che dell'unicità della soluzione determinata da un dato iniziale, della seguente notevole proprietà del sistema differenziale (1.78): *l'insieme delle curve integrali è invariante rispetto alle traslazioni temporali*.

Vale a dire: se $\gamma(t)$ è una curva integrale definita sull'intervallo I , allora per ogni fissato numero reale $s \in I$ la curva $\gamma_s(t) = \gamma(t + s)$ è ancora una curva integrale, questa volta

¹⁹ Questa è una delle versioni del cosiddetto **teorema di Cauchy** sull'esistenza e l'unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine e in forma normale, che vale più in generale sulle varietà differenziabili. Per una discussione dettagliata si veda p.es. J. Dieudonné, *Éléments d'analyse IV*, Gauthier-Villars. Per i campi non completi vale un teorema ovviamente più generale, la cui sola formulazione va oltre gli scopi di queste lezioni. Ci possiamo limitare ad accennare che un campo \mathbf{X} non completo genera dei **flussi locali**.

definita sull'intervallo $I_s = I - s$. Si vede infatti che se $x^\alpha = \gamma^\alpha(t)$ sono delle funzioni che risolvono il sistema (1.78) e se a queste funzioni si sostituiscono le funzioni $x^\alpha = \gamma_s^\alpha(t) = \gamma^\alpha(t + s)$ il sistema risulta ancora soddisfatto perché, posto $u = t + s$,

$$\frac{d\gamma_s^\alpha(t)}{dt} = \frac{d\gamma^\alpha(u)}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\gamma^\alpha(u)}{du} = X^\alpha(\gamma^\beta(u)) = X^\alpha(\gamma_s^\beta(t)).$$

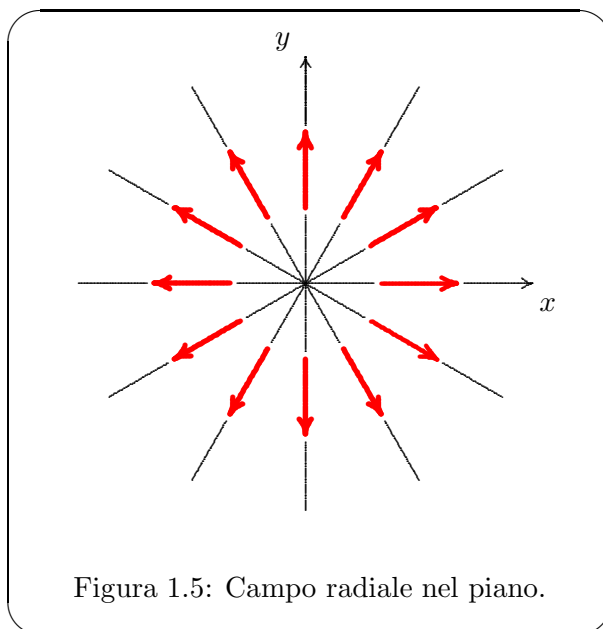
Segue che, per come è stato definito il flusso, si può affermare da un lato che l'applicazione $t \mapsto \varphi(t, \varphi(s, P))$ è la curva integrale massimale basata in $\varphi(s, P)$ e dall'altro, per la proprietà di invarianza, che la curva $t \mapsto \varphi(t + s, P)$ è ancora una curva integrale. Quest'ultima è basata in $\varphi(0 + s, P) = \varphi(s, P)$, dunque nello stesso punto della curva precedente. Per l'unicità le due curve coincidono: di qui l'uguaglianza $\varphi(t, \varphi(s, P)) = \varphi(t + s, P)$. •

NOTA 1.13.14 – Problema: dato un insieme di curve $\gamma_P(t)$ qual'è la condizione necessaria e sufficiente affinché esse siano le curve integrali di un sistema dinamico \mathbf{X} ?

Dal teorema e dalla nota precedente segue la risposta: (1) per ogni fissato t l'applicazione $\varphi_t: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}: P \mapsto \gamma_P(t)$ deve essere invertibile e differenziabile con l'inversa e inoltre (2) deve valere la proprietà di gruppo (1.92). •

1.14 Esempi

Considereremo tre esempi, elementari ma significativi.



ESEMPIO 1.14.1 – **Campo radiale.** Con questo nome intendiamo quel campo vettoriale che in ogni punto P dello spazio affine \mathcal{A}_n associa il vettore OP dove O è un punto prefissato, detto **polo** del campo.

Nel piano (x, y) il campo vettoriale radiale definito da $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ corrisponde al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

Si tratta di equazioni differenziali *separate* cioè coinvolgenti ciascuna una singola coordinata. La curva integrale basata in $P_0 = (x_0, y_0)$ ha equazioni

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^t,$$

ed è definita su tutto l'asse reale. Il campo è pertanto completo. Il flusso è dato da

$$\varphi(t; \mathbf{x}_0) = e^t \mathbf{x}_0,$$

posto $\mathbf{x}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j}$. La proprietà di gruppo è soddisfatta grazie alla proprietà caratteristica dell'esponenziale. Le orbite delle curve integrali non basate nell'origine sono le semirette aperte uscenti dall'origine, che è punto critico. Per $t \rightarrow -\infty$ le curve integrali tendono all'origine. La trasformazione φ_t è l'omotetia di centro l'origine e coefficiente e^t . Il campo è invariante rispetto a rotazioni intorno all'origine.

Se escludiamo l'origine e consideriamo per esempio la circonferenza \mathbb{S}_1 di raggio unitario e centro l'origine, una qualunque funzione $H: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ sopra di questa si può estendere al piano \mathbb{R}^2 , *esclusa l'origine*, per valori costanti lungo le semirette uscenti dall'origine. Siccome le orbite del campo sono tutte queste semirette (aperte) più l'origine (punto singolare) le funzioni così costruite, a partire da funzioni H di classe C^∞ , sono gli integrali primi di \mathbf{X} . Si vede chiaramente che questi integrali primi non sono estendibili per continuità all'origine se non nel caso in cui la funzione H sulla circonferenza è costante: ma in questo caso l'integrale primo è anch'esso una funzione costante, quindi banale. Concludiamo allora che il campo \mathbf{X} su \mathbb{R}^2 non ammette integrali primi globali non banali, pur ammettendo nell'intorno di ogni punto diverso dall'origine infiniti integrali primi. •

ESEMPIO 1.14.2 – Campo radiale unitario: in uno spazio affine euclideo \mathcal{A}_n è il campo che ad ogni punto P associa il versore di OP dove O è un punto prefissato, detto **polo** del campo. Per esempio, nel piano euclideo (x, y) di origine O è definito da

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad \bullet$$

ESEMPIO 1.14.3 – Caduta dei gravi. Su \mathbb{R}^2 si consideri l'insieme di curve di equazioni parametriche

$$(1.95) \quad \begin{cases} x = x_0 + y_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \\ y = y_0 + g t. \end{cases}$$

Queste curve rappresentano tutti i possibili moti di caduta di un grave lungo una retta verticale (l'asse x orientato verso il basso) essendo y la velocità e g l'accelerazione (costante). Vediamo se questo è l'insieme delle curve integrali di un campo vettoriale \mathbf{X} su \mathbb{R}^2 .

Posta la (1.95) nella forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \varphi_t \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

verifichiamo che le applicazioni $\varphi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ soddisfano alle proprietà di gruppo (1.92):

$$\begin{aligned} \varphi_s \left(\varphi_t \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right) &= \varphi_s \begin{bmatrix} x_0 + y_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ y_0 + g t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_0 + y_0 t + \frac{1}{2} g t^2 + (y_0 + g t) s + \frac{1}{2} g s^2 \\ y_0 + g t + g s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_0 + y_0 (t + s) + \frac{1}{2} g (t + s)^2 \\ y_0 + g(t + s) \end{bmatrix} = \varphi_{t+s} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le curve considerate costituiscono dunque lo spazio delle soluzioni di un sistema dinamico. Lo si riconosce direttamente derivando le (1.95):

$$\dot{x} = y_0 + g t = y, \quad \dot{y} = g.$$

Il campo vettoriale che genera il flusso considerato è pertanto $\mathbf{X} = y \mathbf{i} + g \mathbf{j}$.•

ESEMPIO 1.14.4 – L'oscillatore armonico. Sul piano affine riferito a coordinate cartesiane (x, y) si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{X} = y \mathbf{i} - \omega^2 x \mathbf{j}$$

il cui sistema differenziale è

$$(1.96) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Posto che

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x} y - \frac{\partial F}{\partial y} \omega^2 x,$$

l'equazione degli integrali primi diventa:

$$(1.97) \quad y \frac{\partial F}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Questa si può integrare per *separazione delle variabili*. Si cerca cioè una sua soluzione del tipo $F(x, y) = A(x) + B(y)$. Con quest'ipotesi l'equazione (1.97) diventa (' è il simbolo di derivata prima)

$$y A'(x) - \omega^2 x B'(y) = 0,$$

e quindi, subordinatamente alla condizione che i denominatori non si annullino,

$$\frac{y}{B'(y)} = \omega^2 \frac{x}{A'(x)}.$$

Poiché il primo membro è funzione solo della x e il secondo solo della y , entrambi devono essere costanti. Posta per esempio questa costante uguale a 1, quest'ultima equazione si spezza in due equazioni differenziali ordinarie separate, coinvolgenti cioè ciascuna una singola variabile:

$$\omega^2 \frac{x}{A'(x)} = 1, \quad \frac{y}{B'(y)} = 1,$$

ovvero

$$A'(x) = \omega^2 x, \quad B'(y) = y.$$

Si ha quindi, a meno di inessenziali costanti additive,

$$A(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2, \quad B(y) = \frac{1}{2} y^2.$$

Il procedimento della separazione delle variabili ha quindi successo. Eliminando l'inessenziale fattore $\frac{1}{2}$, abbiamo infatti trovato il seguente integrale primo, soluzione della (1.97):

$$F(x, y) = \omega^2 x^2 + y^2.$$

L'insieme Q_c definito dall'equazione $F = c$ è vuoto (nel campo reale) per $c < 0$; si riduce all'origine per $c = 0$ ed è un'ellisse per $c > 0$. Infatti in quest'ultimo caso

$$(1.98) \quad \omega^2 x^2 + y^2 = b^2$$

posto $c = b^2$. Si tratta di un'ellisse di semiassi $a = \frac{b}{\omega}$ e b . Al variare di c si ottiene una famiglia di ellissi, che sono orbite del campo \mathbf{X} (percorse in senso orario, come si riconosce facilmente valutando il campo in qualche punto del piano, per esempio sull'asse x , vedi Figura 1.6). Concludiamo pertanto che le curve integrali sono *chiuse* e quindi *periodiche*. Dalla (1.98) si trae

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \left(a = \frac{b}{\omega} \right).$$

Scegliendo il segno $+$ e sostituendo nella prima delle equazioni (1.96), si ottiene un'equazione differenziale del primo ordine nella sola x , a variabili separabili:

$$\frac{dx}{dt} = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Il suo integrale generale risulta essere

$$(1.99) \quad x = a \sin(\omega t + \phi),$$

con ϕ costante arbitraria. Sostituendo questa funzione nella seconda delle (??), si trova

$$\frac{dy}{dt} = -\omega^2 a \sin(\omega t + \phi),$$

quindi:

$$(1.100) \quad y = b \cos(\omega t + \phi).$$

La curva integrale così determinata, di equazioni parametriche (1.99) e (1.100), è basata nel punto $(x_0, y_0) = (a \sin \phi, b \cos \phi)$. Per ottenere il flusso del campo occorre sostituire le costanti (a, b) con i dati iniziali (x_0, y_0) . Sviluppando la (1.99) e la (1.100) si trova:

$$(1.101) \quad \begin{cases} x = x_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} y_0 \sin \omega t, \\ y = -\omega x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \end{cases}$$

è interessante osservare che in questo caso il legame tra il vettore $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ e il vettore $\mathbf{x} = (x, y)$ è lineare, sicché il legame $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$ può porsi in forma matriciale:

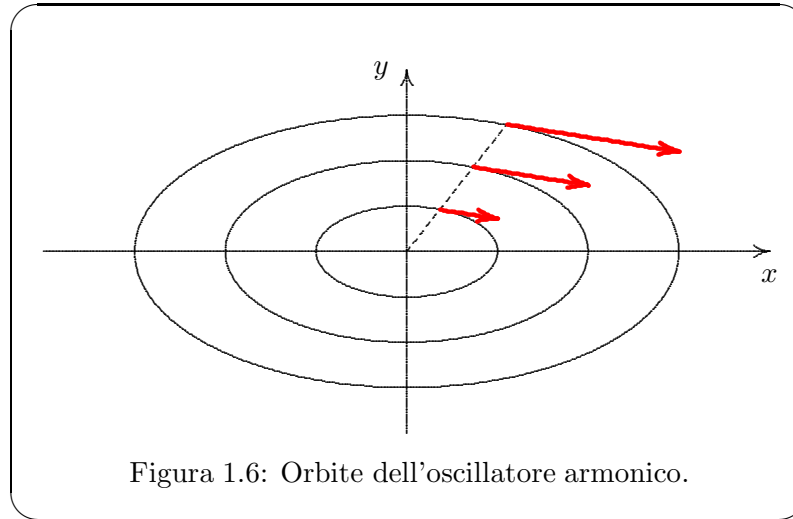


Figura 1.6: Orbite dell'oscillatore armonico.

$$(1.102) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

In altre parole: il gruppo ad un parametro $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ generato dal campo \mathbf{X} è un gruppo di trasformazioni lineari rappresentato dalle matrici

$$\varphi_t = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

è un utile esercizio verificare che queste matrici godono della proprietà di gruppo $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$. •

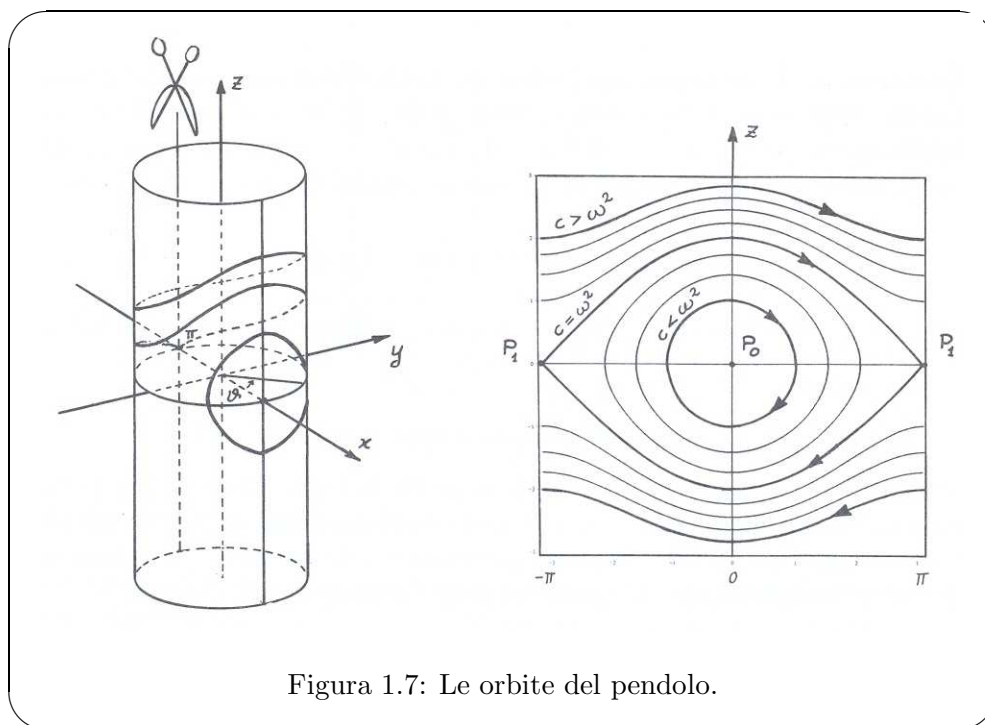


Figura 1.7: Le orbite del pendolo.

NOTA 1.14.1 – **Sistemi dinamici lineari.** Il sistema dinamico ora considerato rientra nella particolare classe di sistemi dinamici lineari, cioè del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x},$$

con \mathbf{A} matrice costante. Il flusso generato da questi sistemi è ancora lineare e può essere rappresentato dalla serie

$$\varphi_t = \exp(\mathbf{A} t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k.$$

Nel caso precedente è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi, essendo $\mathbf{A}^2 = -\omega^2 \mathbf{1}$, risulta

$$\varphi_t = \cos \omega t \mathbf{1} + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \mathbf{A},$$

a conferma della (1.101). •

ESEMPIO 1.14.5 – Il pendolo. Con questo esempio vediamo come la teoria fin qui sviluppata si possa adattare al caso di un campo vettoriale tangente ad una superficie. Consideriamo lo spazio affine tridimensionale riferito sia a coordinate cartesiane (x, y, z) , sia a coordinate cilindriche (r, θ, z) . Consideriamo la superficie regolare Q definita dall'equazione $r = R$, con R costante positiva. Si tratta di un cilindro di raggio R e asse l'asse delle z . Intendendo l'angolo θ variabile nell'intervallo aperto $(-\pi, \pi)$, le coordinate (θ, z) si possono interpretare come coordinate superficiali, che mappano il cilindro Q , tolta una sua direttrice, nella striscia aperta di \mathbb{R}^2 definita da $\{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < \theta < \pi\}$. Introdotti i vettori (\mathbf{e}_i) associati a queste, cioè i vettori $(\mathbf{e}_\theta = R\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_z = \mathbf{k})$, si consideri il campo vettoriale

$$(1.103) \quad \mathbf{X} = z \mathbf{e}_\theta - \omega^2 \sin \theta \mathbf{e}_z.$$

Il sistema differenziale del primo ordine corrispondente è:

$$(1.104) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = z, \\ \dot{z} = -\omega^2 \sin \theta. \end{cases}$$

La combinazione di queste due equazioni fornisce l'equazione differenziale del secondo ordine

$$(1.105) \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0,$$

detta **equazione del pendolo semplice**. L'equazione degli integrali primi diventa:

$$(1.106) \quad z \frac{\partial F}{\partial \theta} - \omega^2 \sin \theta \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Anche in questo caso, come nel precedente, il procedimento di integrazione per separazione delle variabili ha successo. Si trova, a conti fatti, un integrale primo del tipo

$$(1.107) \quad F(\theta, z) = \frac{1}{2} z^2 - \omega^2 \cos \theta.$$

Il campo ha due punti singolari: $P_0 = (\theta = 0, z = 0)$ e il punto opposto $P_1 = (\pm\pi, 0)$. Le orbite di \mathbf{X} sono le curve Q_c sul cilindro di equazione

$$(1.108) \quad \frac{1}{2} z^2 - \omega^2 \cos \theta = c,$$

che possiamo anche scrivere

$$(1.109) \quad z^2 = 2\omega^2(\cos \theta + e), \quad e = \frac{c}{\omega^2}.$$

Per la realtà di z deve essere $c + \omega^2 \cos \theta \geq 0$, quindi $-\omega^2 \leq c < +\infty$, vale a dire $-1 \leq e < +\infty$. Si hanno allora quattro possibilità. (I) Per $c = -\omega^2$ (cioè $e = -1$) dalla (1.108) si vede che non può che essere $\theta = z = 0$. Il questo caso l'orbita Q_c si riduce al punto singolare P_0 . (II) Per $c \in (-\omega^2, \omega^2)$ (cioè $e \in (-1, 1)$) Q_c è una curva chiusa simmetrica rispetto a P_0 , all'asse z e all'asse θ , di equazione

$$(1.110) \quad z^2 = 2\omega^2(\cos \theta + \cos \theta_0) \quad (e = \cos \theta_0).$$

(III) Per $c = \omega^2$ (cioè $e = 1$) l'orbita Q_c ha equazione

$$z^2 = 2\omega^2(\cos\theta + 1) = 4\omega^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

e si spezza pertanto nelle due curve

$$z = \pm 2\omega \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

che si chiudono nel secondo punto singolare P_1 e che chiamiamo **curve limite**. (IV) Per $c > \omega^2$ (cioè $e > 1$) Q_c si sdoppia in due curve chiuse simmetriche esterne alle curve limite – Figura 1.7. •

ESEMPIO 1.14.6 – Il sistema dinamico di Lotka-Volterra.²⁰ In \mathbb{R}^2 si consideri sul dominio aperto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ costituito dai punti aventi entrambe le coordinate positive (primo quadrante) il campo vettoriale

$$(1.111) \quad \mathbf{X} = (a - by)x \mathbf{i} + (cx - d)y \mathbf{j},$$

con (a, b, c, d) numeri reali positivi. Il corrispondente sistema differenziale è:

$$(1.112) \quad \begin{cases} \dot{x} = (a - by)x, \\ \dot{y} = (cx - d)y. \end{cases}$$

Questo sistema costituisce il celebre modello di Lotka-Volterra per la dinamica di due popolazioni, il cui numero di individui è rappresentato dalle funzioni $y(t)$ e $x(t)$, la prima *predatrice* della seconda, viventi in un ambiente isolato ideale. L'equazione degli integrali primi diventa:

$$(a - by)x \frac{\partial F}{\partial x} + (cx - d)y \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Ancora una volta questa si integra per separazione delle variabili, ponendo cioè $F(x, y) = A(x) + B(y)$. Si trova che una soluzione è

$$F(x, y) = cx - d \log x + by - a \log y.$$

L'analisi della funzione $z = F(x, y)$ mostra che la superficie rappresentativa in \mathbb{R}^3 è convessa verso il basso con un minimo nel punto P_0 di coordinate

$$x_0 = \frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{a}{b},$$

che è punto singolare del campo \mathbf{X} . Le orbite Q_c , di equazione $F = c$, si ottengono allora intersecando questa superficie con il piano $z = c$. Stante la convessità della superficie, le orbite risultano delle curve chiuse, che circondano il punto singolare P_0 – Figura 1.8. Di qui si deduce che le curve integrali sono periodiche e che il campo è completo (dunque il numero degli individui delle due popolazioni ha un andamento periodico, sfasato; se in particolare le condizioni iniziali corrispondano al punto singolare, il numero degli individui, per entrambe le specie, è costante nel tempo). Se si valuta il campo \mathbf{X} in qualche punto di D , si riconosce che le orbite vengono percorse in senso antiorario. •

²⁰ Alfred James Lotka, 1880-1849; Vito Volterra, 1860-1940.

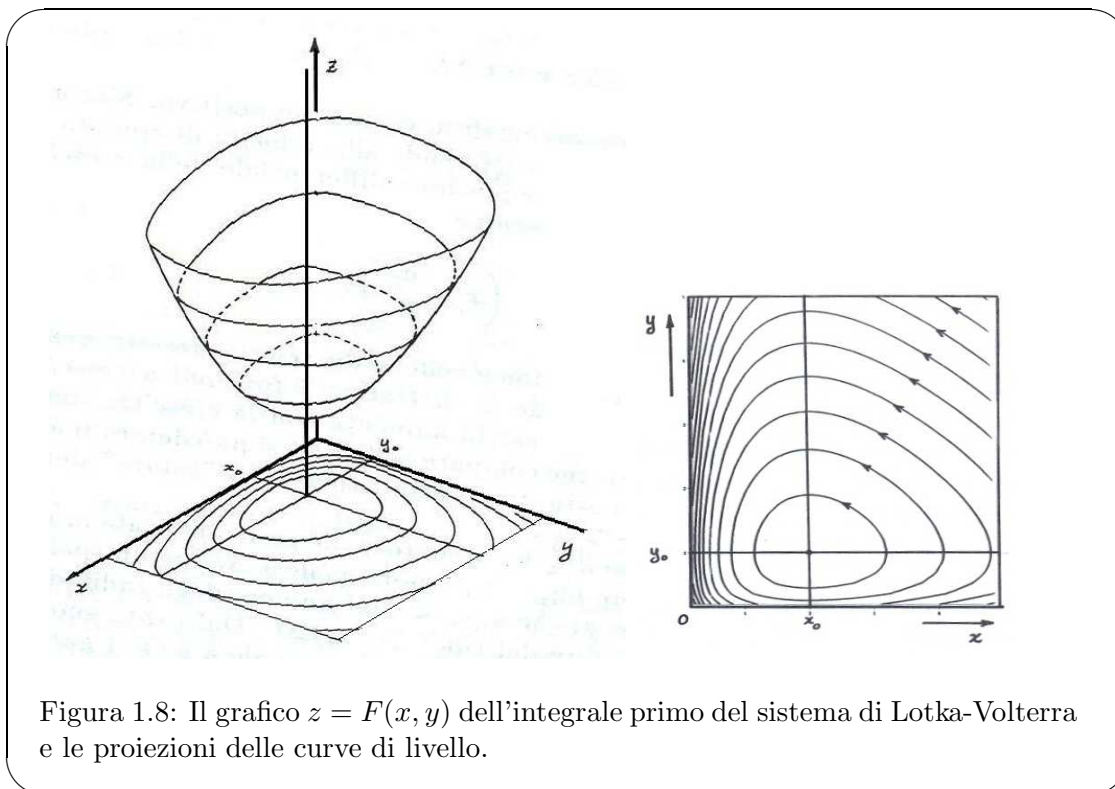


Figura 1.8: Il grafico $z = F(x, y)$ dell'integrale primo del sistema di Lotka-Volterra e le proiezioni delle curve di livello.

1.15 Stabilità di punti critici

I punti critici di un campo vettoriale \mathbf{X} sono i punti in cui \mathbf{X} si annulla. Essi sono caratterizzati dalla seguente proprietà: un punto $P_0 \in \mathcal{A}$ è critico di \mathbf{X} se e solo se la curva

$$\gamma_{P_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A} : t \mapsto P_0,$$

che associa ad ogni valore del parametro t il punto P_0 , è la curva integrale massimale di \mathbf{X} basata in P_0 . Infatti l'equazione caratteristica delle curve integrali $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ è identicamente soddisfatta da γ_{P_0} : il primo membro si annulla perché la curva ha valore costante, il secondo si annulla perché P_0 è punto critico.

DEFINIZIONE 1.15.1 – Un punto critico P_0 di un campo vettoriale \mathbf{X} si dice **stabile** se comunque si fissi un intorno aperto A di P_0 esiste un intorno B di P_0 tale che per ogni $P \in B$ la curva integrale massimale $\gamma_P : I_P \rightarrow M$ di \mathbf{X} è tale che $\gamma_P(t) \in A$ per ogni $t > 0$, $t \in I_P$.²¹ Un punto critico non stabile, per cui cioè questa condizione non è soddisfatta, si

²¹ In altre parole: per ogni intorno A esiste un intorno B tale che partendo da un qualunque punto di B e seguendo una curva integrale, si resta sempre in A , almeno nel futuro, cioè per $t > 0$.

dice **instabile**. Un punto critico P_0 stabile si dice **asintoticamente stabile** se ammette un intorno B tale che per ogni $p \in B$ si ha $\gamma_p(t) \rightarrow P_0$ per $t \rightarrow +\infty$.²² •

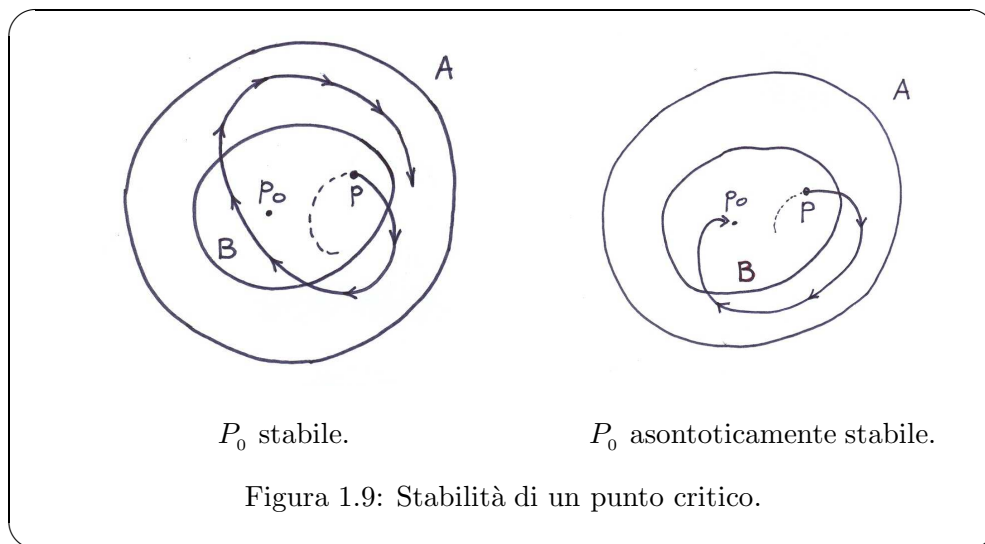


Figura 1.9: Stabilità di un punto critico.

Si osservi che questa definizione di stabilità riguarda il *futuro*, tiene solo conto dello sviluppo della curva integrale per $t > 0$.

La stabilità o l'instabilità di un punto critico può in certi casi essere riconosciuta indipendentemente dalla conoscenza delle sue curve integrali (cioè senza dover integrare il sistema dinamico) attraverso opportuni *criteri di stabilità* o di *instabilità*. Tra questi, fondamentale è il **criterio di Lyapunov**.²³

TEOREMA 1.15.1 – Se in un intorno di un punto critico P_0 del campo \mathbf{X} esiste una funzione reale differenziabile W avente un minimo stretto in P_0 e inoltre tale che

$$(1.113) \quad \langle \mathbf{X}, dW \rangle \leq 0,$$

allora il punto critico è stabile. Se, escluso il punto P_0 , vale la disuguaglianza stretta, cioè se

$$(1.114) \quad \langle \mathbf{X}, dW \rangle < 0,$$

allora il punto critico è asintoticamente stabile. Se invece è

$$(1.115) \quad \langle \mathbf{X}, dW \rangle > 0,$$

allora il punto critico è instabile. Una tale funzione prende il nome di **funzione di Lyapunov**.

²² La condizione $\gamma_p(t) \rightarrow P_0$ per $t \rightarrow +\infty$ significa che comunque si scelga un intorno U di P_0 esiste un t_1 tale che $\gamma_p(t) \in U$ per ogni $t > t_1$.

²³ Alexandr Michailovic Lyapunov, 1857 - 1918.

DIMOSTRAZIONE. Si può sempre supporre $W(P_0) = 0$ (aggiungendo eventualmente a W una costante inessenziale). Siccome W ha un minimo stretto in P_0 , in un suo intorno (con l'esclusione di P_0) si ha $W > 0$ e le superfici di livello di equazione $W = c$ con $c > 0$ sono diffeomorfe a delle sfere (di codimensione 1). Si consideri in quest'intorno un tensore metrico (definito positivo) qualsiasi ed il gradiente di W : $\text{grad}(W) = dW^\sharp$. Per il teorema del gradiente questo campo è ortogonale ad ogni superficie di livello $W = c$ e sempre diretto verso l'esterno (cioè nella direzione di W crescente). La condizione (1.113) si traduce in $\text{grad}(W) \cdot \mathbf{X} \leq 0$ e mostra quindi che i due campi formano in ogni punto un angolo *non acuto*. Ciò significa che il campo \mathbf{X} è sempre o diretto verso l'interno delle superfici di livello o tangente a queste (o, in particolare, nullo). Una sua curva integrale, sempre nell'intorno considerato, tende quindi per t crescente a penetrare all'interno di ogni superficie di livello o al più a restare su una di queste. Si realizza in tal modo la condizione di stabilità del punto critico. La condizione (1.114) significa che i due campi formano sempre un angolo acuto e quindi che ogni curva integrale penetra sempre verso l'interno di ogni superficie di livello, tendendo necessariamente al punto P_0 . Di qui l'asintotica stabilità. Se infine vale la condizione (1.115), si ha la situazione opposta: ogni curva attraversa le superfici di livello verso l'esterno e non può quindi mai realizzare le condizioni imposte dalla definizione di stabilità. \square

La precedente è in effetti una dimostrazione "intuitiva". Vediamo una dimostrazione rigorosa nel solo caso della stabilità. Gli altri due casi si dimostrano con tecnica analoga.

DIMOSTRAZIONE. Sia W una funzione di Lyapunov soddisfacente alla (1.113). Non è restrittivo supporre che sia $W(P_0) = 0$ (e quindi W positiva nell'intorno). Si osservi che la condizione (1.113) equivale alla condizione

$$(1.116) \quad \frac{dW}{dt} \leq 0$$

lungo ogni curva integrale di \mathbf{X} . Questo significa che la funzione W ristretta alla curva è decrescente (per t crescente). Come arbitrario intorno di cui alla definizione di stabilità si può sempre considerare un intorno aperto A di P_0 a chiusura compatta. Il bordo (o frontiera) ∂A di A è compatto, sicché la restrizione di W a ∂A ammette un valore minimo $\mu > 0$, positivo perché nell'intorno di P_0 , escluso P_0 , è $W > 0$. Per la continuità di W esiste un intorno $B \subset A$ di P_0 per cui $W|_B < \mu$ (si applichi la definizione di continuità: siccome $W(P_0) = 0$, comunque si fissi un intorno $I_\mu = (-\mu, \mu) \subset \mathbb{R}$ dello zero esiste un intorno B di P_0 tale che $W(B) \subset I_\mu$). Preso allora un qualunque punto $P \in B$ e la corrispondente curva massimale $\gamma_P: I_P \rightarrow \mathbb{R}$, se esistesse un $t > 0$, $t \in I_P$, per cui $\gamma_P(t) \in \partial A$ (e quindi $\gamma_P(t) \notin A$) risulterebbe $W(\gamma_P(t)) \geq \mu$.

D'altra parte, lungo γ_P , la funzione W è decrescente per cui $W(\gamma_P(t)) \leq W(\gamma_P(0)) = W(P) < \mu$: assurdo. \square

NOTA 1.15.1 – Tra le possibili funzioni di Lyapunov da utilizzarsi per provare la stabilità vi sono gli integrali primi di \mathbf{X} , per i quali nella (1.113) vale l'uguaglianza. •

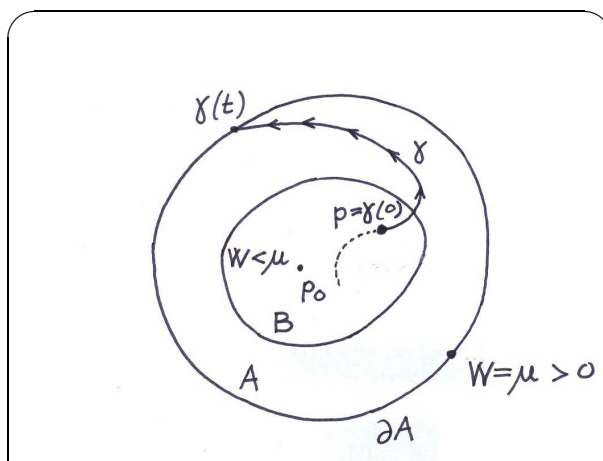


Figura 1.10: Teorema di Lyapunov.

ESEMPIO 1.15.1 – Si consideri su \mathbb{R}^3 il sistema dinamico

$$(1.117) \quad \begin{cases} \dot{x} = (c - b) y z \\ \dot{y} = (a - c) z x \\ \dot{z} = (b - a) x y \end{cases}$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e

$$a < b < c.$$

Queste equazioni sono equivalenti alle equazioni di Euler per la velocità angolare in un moto rigido spontaneo (§4.15). I punti degli assi coordinati sono tutti e soli i punti critici. Dimostriamo che ogni punto critico $(x_0, 0, 0)$ (con $x_0 \neq 0$) è stabile costruendo una funzione di Lyapunov. Come si è detto nella Nota 1.15.1, gli integrali primi sono dei buoni candidati per essere funzioni di Lyapunov. Il sistema dinamico (1.117) ammette i due integrali primi

$$F = x^2 + y^2 + z^2, \quad G = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

Lo si riconosce in base ai teoremi della dinamica del corpo rigido, ma è comunque immediato verificarlo direttamente:

$$\begin{cases} \dot{F} = 2(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = 2((c - b) + (a - c) + (b - a))xyz = 0, \\ \dot{G} = 2(ax\dot{x} + by\dot{y} + cz\dot{z}) = 2(a(c - b) + b(a - c) + c(b - a))xyz = 0. \end{cases}$$

Se consideriamo la differenza

$$G - aF = (b - a)y^2 + (c - a)z^2,$$

questa è ancora un integrale primo, è sempre positiva e si annulla su tutto l'asse x . Ha dunque un minimo, ma non stretto, nel punto $(x_0, 0, 0)$. Si può ottenere un minimo stretto

aggiungendo a questa funzione un altro integrale primo, a valori sempre positivi o nulli, nulli su di un insieme di punti che intersechi l'asse x proprio nel punto critico. Un buon candidato è per esempio l'integrale primo $(F - x_0^2)^2$. Infatti è sempre positivo fuorché nei punti di equazione $F - x_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 = 0$, cioè sulla sfera centrata nell'origine e di raggio $|x_0|$, quindi passante per il punto critico. In conclusione: la funzione

$$W = G - aF + (F - x_0^2)^2$$

è un integrale primo con un minimo stretto in $(x_0, 0, 0)$. è dunque una funzione di Lyapunov e la stabilità del punto critico è dimostrata. Allo stesso modo si può dimostrare che anche i punti critici del tipo $(0, 0, z_0)$ con $z_0 \neq 0$ sono stabili. •

Capitolo 2

Cinematica del punto

La cinematica studia il moto dei corpi indipendentemente dalle cause che lo provocano e dalle leggi fisiche che lo governano. È quindi un ramo della meccanica avente carattere puramente descrittivo, che propone modelli matematici per lo spazio fisico ed i corpi che in esso si muovono. La scelta di questi modelli non è unica.

Il modello classico dello spazio fisico osservato da un riferimento è lo spazio affine tridimensionale euclideo. È un modello immediatamente percettibile ed accettabile dal nostro intuito. Quando osserviamo lo spazio che ci circonda, anche a estreme distanze, presupponiamo sempre la scelta di un riferimento, per esempio il nostro laboratorio, il treno su cui viaggiamo, la Terra, un sistema di tre assi uscenti dal Sole e diretti verso tre stelle fisse, ecc. Identifichiamo un riferimento con un “corpo rigido” ideale, invadente tutto l’universo, o almeno quella parte di universo in cui si evolve il sistema il cui moto vogliamo descrivere e studiare; questo “corpo rigido” è modellato nello spazio affine euclideo.

La scelta di un riferimento è, a livello puramente cinematico, una questione di pura convenienza descrittiva. Due riferimenti debbono essere considerati distinti se i corrispondenti “corpi rigidi” sono in moto l’uno rispetto all’altro. Così, negli esempi sopra citati, il nostro laboratorio e la Terra costituiscono un medesimo riferimento, anche se la loro estensione, e quindi la scala dei fenomeni a cui li rapportiamo, è ben diversa. Si pone comunque il problema di stabilire i legami che intercorrono tra gli enti cinematici associati ad un medesimo moto ma relativi a due diversi riferimenti. A questo problema è dedicato un paragrafo di questo capitolo, ma su di esso si ritornerà in capitoli successivi.

Il concetto di moto si basa sui due concetti di spazio e di tempo. In questo capitolo il ruolo del tempo è ridotto a quello di parametro o di variabile indipendente. Si vedrà nei capitoli successivi come esso possa assumere un carattere diverso, fondendosi con quello di spazio per costituire un'unica struttura assoluta: lo spazio-tempo.

Occorre infine scegliere un modello per il corpo o i corpi il cui moto si vuole studiare. Il modello fondamentale, ed anche il più semplice, è quello di "punto". Il moto di un punto è rappresentato da una curva nello spazio affine tridimensionale euclideo. Questo modello è accettabile solo se l'estensione del corpo è del tutto trascurabile rispetto all'estensione del suo moto e alle altre grandezze significative che intervengono nel fenomeno studiato. Un secondo modello fondamentale è quello di "corpo rigido"; esso è adottato per quei corpi estesi le cui particelle mantengono sensibilmente invariate, durante il moto, le mutue distanze.

2.1 Cinematica del punto

Il **moto di un punto** è rappresentato da una **curva parametrizzata** nello spazio affine euclideo tridimensionale \mathcal{E}_3 , cioè da un'applicazione $\gamma: I \rightarrow \mathcal{E}_3: t \mapsto \gamma(t)$, con I intervallo di numeri reali. La variabile indipendente $t \in I$ è il **tempo** e l'intervallo di definizione I rappresenta l'estensione temporale del moto. Ad ogni **istante** $t \in I$ corrisponde un punto $\gamma(t) \in \mathcal{E}_3$, che denotiamo anche con $P(t)$. Scelto un punto fisso $O \in \mathcal{E}_3$, il moto di un punto $P(t)$ ammette una **rappresentazione vettoriale**

$$(2.1) \quad OP = \mathbf{r}(t),$$

la quale, con riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane ortonormali (x, y, z) aventi origine in O , si traduce in **equazioni parametriche**

$$(2.2) \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

che forniscono la **rappresentazione cartesiana** del moto. Le funzioni $(x(t), y(t), z(t))$ sono le componenti del **vettore posizione** $\mathbf{r}(t)$ rispetto ad O :¹

$$(2.3) \quad \mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}.$$

Supporremo queste funzioni di classe C^2 almeno. Da questa rappresentazione, con due derivate temporali successive, si ricavano la **velocità** (istantanea) e l'**accelerazione** del

¹ È consuetudine in cinematica denotare con \mathbf{r} , anziché con \mathbf{x} come fatto in precedenza, il vettore posizione di un punto nello spazio affine tridimensionale euclideo.

punto

$$(2.4) \quad \boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}}$$

che sono a loro volta funzioni vettoriali di t . La velocità istantanea è il limite del rapporto incrementale della posizione rispetto al tempo

$$(2.5) \quad \boxed{\mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))}$$

e l'accelerazione è il limite del rapporto incrementale della velocità

$$(2.6) \quad \boxed{\mathbf{a}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t))}$$

è la derivata seconda del vettore posizione:

$$(2.7) \quad \boxed{\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}$$

Le tre funzioni vettoriali del tempo $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$ sono gli **enti cinematici fondamentali** del moto di un punto. Conveniamo di considerare i vettori $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ applicati nel punto $P(t)$. L'immagine $\gamma(I)$ della curva rappresentatrice del moto prende il nome di **orbita** o **traiettoria**. Si tratta di una curva non parametrizzata, che nei casi più comuni è un sottinsieme (connesso) di una curva regolare dello spazio affine \mathcal{E}_3 . La velocità è tangente all'orbita. Le componenti di \mathbf{v} e di \mathbf{a} sono le derivate prime e seconde delle funzioni (2.2):

$$(2.8) \quad \begin{cases} \mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \end{cases}$$

Consideriamo alcuni tipi particolari di moti.

[1] Moto rettilineo uniforme. è un moto con velocità vettoriale \mathbf{v} costante, quindi caratterizzato dalla condizione $\mathbf{a} = 0$. La rappresentazione vettoriale del moto è di conseguenza

$$(2.9) \quad \mathbf{r} = \mathbf{v} t + \mathbf{r}_0,$$

dove \mathbf{r}_0 è la posizione del punto per $t = 0$. L'orbita è una retta, percorsa con velocità costante.

[2] Moto circolare uniforme. Nel piano (x, y) ha una rappresentazione vettoriale del tipo

$$(2.10) \quad \mathbf{r}(t) = r (\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}),$$

con (r, ω) costanti (positive). Di conseguenza la velocità e l'accelerazione sono

$$(2.11) \quad \begin{cases} \mathbf{v}(t) = r\omega(-\sin\omega t \mathbf{i} + \cos\omega t \mathbf{j}), \\ \mathbf{a}(t) = -r\omega^2(\cos\omega t \mathbf{i} + \sin\omega t \mathbf{j}) = -\omega^2 \mathbf{r}(t). \end{cases}$$

Segue che $|\mathbf{v}| = r\omega = \text{costante}$ e $|\mathbf{a}| = r\omega^2 = \text{costante}$ ². L'accelerazione è sempre diretta verso l'origine ("centro del moto"). La costante ω è la **velocità angolare**.

[3] Moto elicoidale uniforme. Ha una rappresentazione vettoriale del tipo

$$(2.12) \quad \mathbf{r}(t) = r(\cos\omega t \mathbf{i} + \sin\omega t \mathbf{j}) + vt \mathbf{k}$$

con (r, ω, v) costanti. è la "composizione" del moto circolare uniforme dell'esempio precedente con un moto rettilineo uniforme parallelo all'asse z . La velocità e l'accelerazione sono

$$(2.13) \quad \begin{cases} \mathbf{v}(t) = r\omega(-\sin\omega t \mathbf{i} + \cos\omega t \mathbf{j}) + v \mathbf{k}, \\ \mathbf{a}(t) = -r\omega^2(\cos\omega t \mathbf{i} + \sin\omega t \mathbf{j}). \end{cases}$$

Entrambi sono vettori di modulo costante.

[4] Moto uniformemente accelerato. è un moto ad accelerazione \mathbf{a} costante. Con due integrazioni successive si ottiene:

$$(2.14) \quad \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{a} t + \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0, \end{cases}$$

con \mathbf{v}_0 ed \mathbf{r}_0 velocità e posizione all'istante t_0 . Se $\mathbf{a} = 0$ si ritrova il moto rettilineo uniforme. Se $\mathbf{a} \neq 0$ e \mathbf{v}_0 è parallelo ad \mathbf{a} (in particolare $\mathbf{v}_0 = 0$) il moto è rettilineo. Se \mathbf{v}_0 non è parallelo ad \mathbf{a} , il moto è piano: il piano del moto è individuato dalla terna $(P_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{a})$, con P_0 punto posizione iniziale. La traiettoria è una parabola. Sono di questo tipo i moti dei "gravi".

[5] Moto periodico. Un moto è detto periodico se è definito su tutto l'asse temporale e se esiste un numero T tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$(2.15) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + T).$$

Se un tal numero esiste, non è unico (si osservi infatti che per ogni intero k , il numero kT sostituito a T rende ancora valida la (2.15)). Il più piccolo dei numeri positivi T per cui vale la (2.15) è il **periodo**, $\nu = \frac{1}{T}$ è la **frequenza**, $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ è la **pulsazione**. Un esempio è il moto circolare uniforme. Si noti bene che in un moto periodico l'orbita è chiusa e che anche la velocità e l'accelerazione sono funzioni periodiche. Non è vero il viceversa: se un moto ha velocità periodica non è detto che sia periodico (si pensi al moto elicoidale uniforme).

² Per le notazioni adottate si veda la Nota ?? a fine paragrafo.

[6] Moto piano. è un moto la cui orbita giace su di un piano. Se ne vedranno alcuni esempi notevoli.

Alla rappresentazione vettoriale del moto (2.1) possiamo affiancare la **rappresentazione radiale** di **centro** O , costituita da una coppia di funzioni del tempo $(r(t), \mathbf{u}(t))$, una scalare l'altra vettoriale, tali che:

$$(2.16) \quad \boxed{\mathbf{r} = r \mathbf{u}, \quad |\mathbf{u}| = 1, \quad r > 0}$$

Pertanto, in ogni istante t , \mathbf{u} è il versore del vettore posizione del punto rispetto al centro O mentre r è la sua distanza da questo. Una tale rappresentazione è valida per moti non passanti per il centro O . Se ad un certo istante t_0 il punto mobile passa per O , nel quale \mathbf{u} risulta indeterminato, può essere conveniente una rappresentazione radiale $(r(t), \mathbf{u}(t))$ estesa per continuità a t_0 , con la funzione r non ristretta a valori positivi (si pensi, per esempio, al semplice caso del moto di un punto su di una retta per O di versore, costante, \mathbf{u} : nell'attraversare O può restare valida la rappresentazione (2.16) pur di lasciar assumere ad r valori positivi, negativi e nulli).

NOTA 2.1.1 – Un ulteriore ente cinematico associato alla rappresentazione radiale, la cui importanza sarà messa in evidenza in seguito, è la **velocità areale** rispetto ad un punto O :

$$(2.17) \quad \boxed{\mathbf{v}_{ar} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}}$$

Si può dimostrare che se si considera l'area $A(t)$ della superficie descritta dal vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ a partire da $\mathbf{r}(0)$, allora la derivata \dot{A} coincide, in valore assoluto, con il modulo della velocità areale. Lo si constata facilmente nel caso dei moti piani (come vedremo più avanti). •

2.2 Rappresentazione in coordinate curvilinee

Nello spazio affine euclideo tridimensionale \mathcal{E}_3 , oltre a coordinate cartesiane $(x^\alpha) = (x, y, z)$ associate ad un riferimento $(O, \mathbf{c}_\alpha) = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, consideriamo un generico sistema di coordinate curvilinee $(q^i) = (q^1, q^2, q^3)$ su di un dominio $D \subseteq \mathcal{E}_3$. Come si è visto al §1.4, un tale sistema è definito da un'equazione del tipo

$$(2.18) \quad OP = \mathbf{r}(q^i) \quad \Longleftrightarrow \quad x^\alpha = x^\alpha(q^i),$$

soddisfacente alla condizione d'indipendenza, punto per punto, dei vettori coordinati

$$(2.19) \quad \mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r} = J_i^\alpha \mathbf{c}_\alpha \quad (J_i^\alpha = \partial_i x^\alpha).$$

Siccome questi vettori sono funzioni delle coordinate q^i ha senso considerarne le derivate parziali

$$(2.20) \quad \partial_i \mathbf{e}_j = \partial_{ij} \mathbf{r}.$$

Esprimendo queste derivate secondo la base degli stessi vettori (\mathbf{e}_i), ponendo cioè

$$(2.21) \quad \boxed{\partial_j \mathbf{e}_i = \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k} \iff \boxed{\Gamma_{ji}^k = \langle \partial_j \mathbf{e}_i, d\mathbf{q}^k \rangle}$$

risultano definite delle funzioni Γ_{ij}^k , dipendenti da tre indici. Esse prendono il nome di **simboli di Christoffel**³ relativi alle coordinate q^i . Questi simboli, stante la presenza nella (2.20) di una derivata parziale seconda, sono simmetrici rispetto agli indici in basso:

$$(2.22) \quad \Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k.$$

NOTA 2.2.1 – I simboli di Christoffel sono identicamente nulli se e solo se le coordinate sono cartesiane. Dalla definizione (2.21) si vede infatti che è identicamente $\Gamma_{ji}^k = 0$ se e solo se i vettori \mathbf{e}_i sono costanti. Ciò accade se e solo se le coordinate sono cartesiane. •

Ciò premesso, dato un sistema di coordinate q^i su di un dominio $D \subseteq \mathcal{E}_3$, il moto di un punto (quando avviene tutto all'interno di D) si rappresenta con equazioni parametriche

$$(2.23) \quad q^i = q^i(t).$$

Sostituite queste nella (2.18) si ottiene il vettore posizione in funzione del tempo. Scriviamo allora, con abuso di notazione

$$(2.24) \quad OP = \mathbf{r}(q^i(t)) = \mathbf{r}(t).$$

Siccome il vettore posizione può pensarsi dipendere da t attraverso le coordinate q^i , risulta

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \partial_i \mathbf{r} \frac{dq^i}{dt},$$

dove alle q^i vanno sostituite le equazioni parametriche (2.23). Quindi

$$(2.25) \quad \boxed{\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i}$$

posto

$$(2.26) \quad \boxed{v^i = \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i}$$

Si osserva allora che: *nella rappresentazione di un moto in coordinate generiche le componenti della velocità, rispetto al riferimento associato \mathbf{e}_i , sono le derivate prime delle funzioni rappresentatrici $q^i(t)$* (come nel caso della rappresentazione in coordinate cartesiane).

Invece le componenti dell'accelerazione non sono le derivate prime delle componenti della velocità v^i , cioè le derivate seconde delle funzioni $q^i(t)$. Infatti, derivando la (2.25) e

³ Elwin Bruno Christoffel, 1829-1900.

tenendo conto che i vettori \mathbf{e}_i dipendono dal parametro t attraverso le coordinate q^i , si ha successivamente:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{dv^i}{dt} \mathbf{e}_i + v^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{e}_i + v^i \partial_j \mathbf{e}_i \frac{dq^j}{dt} \\ &= \frac{dv^i}{dt} \mathbf{e}_i + v^i v^j \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k = \left(\frac{dv^i}{dt} + v^j v^h \Gamma_{jh}^i \right) \mathbf{e}_i.\end{aligned}$$

Risulta quindi

$$(2.27) \quad \boxed{\mathbf{a} = \left(\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{jh}^i \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^h}{dt} \right) \mathbf{e}_i}$$

Si conclude che: *le componenti dell'accelerazione in coordinate curvilinee non sono in genere le derivate prime delle componenti delle velocità; a queste derivate seconde si deve aggiungere una forma quadratica nelle componenti delle velocità, i cui coefficienti sono i simboli di Christoffel.*

2.2.1 Calcolo dei simboli di Christoffel

I simboli di Christoffel Γ_{ij}^k associati ad un sistema di coordinate q^i si dicono più precisamente **di seconda specie**. Possono calcolarsi con la formula

$$(2.28) \quad \boxed{\Gamma_{ij}^k = g^{kh} \Gamma_{ijh}}$$

dove le funzioni Γ_{ijh} sono i **simboli di Christoffel di prima specie**, calcolabili attraverso le derivate delle componenti del tensore metrico con la formula

$$(2.29) \quad \boxed{\Gamma_{ijh} = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jh} + \partial_j g_{hi} - \partial_h g_{ij})}$$

Per dimostrarlo si pone per definizione

$$(2.30) \quad \boxed{\Gamma_{ijh} = \partial_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_h}$$

e si osserva, dalla definizione dei simboli di Christoffel Γ_{ij}^k , che

$$\Gamma_{ij}^k = \langle \partial_i \mathbf{e}_j, d\mathbf{q}^k \rangle = \partial_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k = \partial_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_h g^{hk}.$$

Per cui vale la (2.28). Si osserva inoltre che il secondo membro della (2.30) è anche uguale a

$$\partial_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_h = \partial_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_h) - \partial_i \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_j = \partial_i g_{jh} - \partial_i \mathbf{e}_h \cdot \mathbf{e}_j,$$

per cui, combinando i due risultati si ottiene l'uguaglianza

$$\Gamma_{ijh} + \Gamma_{ihj} = \partial_i g_{jh}.$$

Con la permutazione degli indici si ottengono altre due uguaglianze simili:

$$\begin{cases} \Gamma_{jhi} + \Gamma_{jih} = \partial_j g_{hi}, \\ \Gamma_{hij} + \Gamma_{hji} = \partial_h g_{ij}. \end{cases}$$

Sommando membro a membro le prime due e sottraendo la terza, tenuto conto della simmetria rispetto ai primi due indici dei simboli di Christoffel di prima specie, si ricava proprio l'uguaglianza (2.29).

2.2.2 Calcolo diretto delle componenti dell'accelerazione

Come si vedrà più avanti quest'osservazione è di fondamentale importanza per lo sviluppo della meccanica. Le **componenti covarianti dell'accelerazione** rispetto ad un qualunque sistema di coordinate (q^i) ,

$$(2.31) \quad a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i,$$

legate alle componenti contravarianti a^i dalla relazione

$$(2.32) \quad a^i = g^{ij} a_j,$$

si possono calcolare per via diretta con la formula

$$(2.33) \quad a_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}$$

dove

$$(2.34) \quad T = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

Infatti, osservato che

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} &= g_{ij} \dot{q}^j, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} &= \partial_h g_{ij} \dot{q}^h \dot{q}^j + g_{ij} \frac{d\dot{q}^j}{dt}, \\ \frac{\partial T}{\partial q^i} &= \frac{1}{2} \partial_i g_{jh} \dot{q}^j \dot{q}^h, \end{aligned}$$

la (2.33) diventa

$$a_i = g_{ij} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \partial_h g_{ij} \dot{q}^h \dot{q}^j - \frac{1}{2} \partial_i g_{jh} \dot{q}^j \dot{q}^h.$$

Ma, per la simmetria di $\dot{q}^j \dot{q}^h$ e di g_{hj} , si può anche scrivere

$$a_i = g_{ij} \ddot{q}^j + \frac{1}{2} (\partial_j g_{hi} + \partial_h g_{ij} - \partial_i g_{jh}) \dot{q}^j \dot{q}^h$$

e quindi, per la definizione (2.29) dei simboli di Christoffel di prima specie,

$$(2.35) \quad \boxed{a_i = g_{ij} \ddot{q}^j + \Gamma_{jhi} \dot{q}^j \dot{q}^h}$$

Di qui, con l'innalzamento dell'indice i – si vedano la (2.28) e la (2.32) – si conclude che le equazioni (2.33) sono equivalenti alle (??). Si noti che una volta scritte le componenti dell'accelerazione secondo la (2.33), risultano di conseguenza calcolabili immediatamente i simboli di Christoffel. Si noti ancora che la funzione T , che in dinamica si interpreta come **energia cinetica** di un punto di “massa unitaria”, si può formalmente ottenere dall'espressione del ds^2 sostituendo le derivate \dot{q}^i ai differenziali dq^i (e dividendo per 2).

ESEMPIO 2.2.1 – In coordinate polari sferiche (con colatitudine θ e longitudine λ) risulta dalla (??):

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\lambda}^2).$$

Calcoliamo gli “ingredienti” della (2.33):

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\lambda}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r} = r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\lambda}^2), \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\lambda}^2, \\ \frac{\partial T}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Allora la (2.33) fornisce:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\lambda}^2), \\ a_\theta = r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta} - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\lambda}^2, \\ a_\lambda = r^2 \sin^2 \theta \ddot{\lambda} + 2 r \dot{r} \sin^2 \theta \dot{\lambda} + 2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\lambda}. \end{cases}$$

Queste sono dunque le componenti covarianti dell'accelerazione in coordinate polari. Le componenti contravarianti $(a^r, a^\theta, a^\lambda)$ si calcolano con la (2.32) tenendo conto che le componenti della matrice diagonale inversa $[g^{ij}]$ sono

$$g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\lambda\lambda} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Allora

$$a^r = a_r, \quad a^\theta = \frac{1}{r^2} a_\theta, \quad a^\lambda = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} a_\lambda.$$

Quindi:

$$\begin{cases} a^r = \ddot{r} - r (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\lambda}^2), \\ a^\theta = \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\lambda}^2, \\ a^\lambda = \ddot{\lambda} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\lambda}. \end{cases}$$

Dal confronto con la formula generale (2.46) per le componenti dell'accelerazione, si possono di qui calcolare i simboli di Christoffel di seconda specie non identicamente nulli:

$$\begin{cases} \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, & \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{\lambda r}^\lambda = \Gamma_{r\lambda}^\lambda = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\lambda\lambda}^r = -r \sin^2 \theta, & \Gamma_{\lambda\lambda}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\lambda}^\lambda = \Gamma_{\lambda\theta}^\lambda = \cot \theta. \quad \bullet \end{cases}$$

2.3 Rappresentazione polare di un moto piano

Nel piano riferito a coordinate polari (r, θ) il vettore posizione è dato da

$$(2.36) \quad \mathbf{r} = r \mathbf{u} = r (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}),$$

dove $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ è il **versore radiale**. La velocità e l'accelerazione assumono quindi la forma

$$(2.37) \quad \begin{cases} \mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u} + r \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u} + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \boldsymbol{\tau}. \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è il **versore trasverso**, ortogonale al versore radiale \mathbf{u} nel verso di θ crescente, quindi tale che

$$(2.38) \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{k} \times \mathbf{u}.$$

Infatti, derivando la rappresentazione radiale $\mathbf{r} = r \mathbf{u}$ si trova

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{u} + r \dot{\mathbf{u}}.$$

D'altra parte

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \dot{\theta},$$

cioè

$$(2.39) \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}.$$

Di qui segue la (2.37)₁. Si osserva inoltre, derivando la (2.38) e tenendo conto della (2.39), che

$$(2.40) \quad \dot{\boldsymbol{\tau}} = -\dot{\theta} \mathbf{u}.$$

Allora, derivando ancora la (2.37)₁ si trova la (2.37)₂. La velocità e l'accelerazione risultano decomposte nella somma di due vettori, uno parallelo al versore radiale \mathbf{u} , la **velocità radiale** e l'**accelerazione radiale** rispettivamente, e uno ortogonale a questo, la **velocità trasversa** e l'**accelerazione trasversa**:

$$(2.41) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{\text{rad}} = \dot{r} \mathbf{u}, \\ \mathbf{v}_{\text{trasv}} = r \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{a}_{\text{rad}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}, \\ \mathbf{a}_{\text{trasv}} = (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \boldsymbol{\tau}. \end{cases}$$

Inoltre, dalla (2.36) e dalla (2.37)₁ segue per la velocità areale (2.17) di un moto piano l'espressione

$$(2.42) \quad \boxed{\mathbf{v}_{\text{ar}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}}$$

Essa è dunque un vettore ortogonale al piano del moto il cui modulo è pari alla derivata rispetto al tempo della funzione $A(t)$ data dall'area descritta dal vettore $\mathbf{r}(t)$ a partire da un istante prefissato qualsiasi. Infatti, considerato un qualunque istante t e un incremento positivo Δt del tempo, denotati con $\Delta\theta$ e ΔA i corrispondenti incrementi dell'angolo e dell'area, risulta, nell'ipotesi che la funzione r sia crescente nell'intervallo $(t, t + \Delta t)$,

$$\frac{1}{2} r^2(t) \Delta\theta \leq \Delta A \leq \frac{1}{2} r^2(t + \Delta t) \Delta\theta,$$

quindi, dividendo per $\Delta t > 0$,

$$\frac{1}{2} r^2(t) \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \leq \frac{\Delta A}{\Delta t} \leq \frac{1}{2} r^2(t + \Delta t) \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Per $\Delta t \rightarrow 0$ si trova

$$(2.43) \quad \boxed{\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}}$$

Si osservi dalla (2.41)₄ che l'accelerazione trasversa è, a meno di un fattore $\frac{2}{r}$, la derivata della velocità areale scalare:

$$(2.44) \quad \mathbf{a}_{\text{trasv}} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{r} \ddot{A} \boldsymbol{\tau}.$$

I vettori \mathbf{e}_i per le coordinate polari sono

$$(2.45) \quad \mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{r} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{e}_\theta = \partial_\theta \mathbf{r} = r \boldsymbol{\tau}.$$

Di qui segue che la $\mathbf{e} : \text{rmp2}_2$ può anche scriversi

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \mathbf{e}_r + \left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} \right) \mathbf{e}_\theta.$$

Le componenti dell'accelerazione in coordinate polari sono dunque:

$$(2.46) \quad a^r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2, \quad a^\theta = \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta},$$

Si vede allora, dal confronto con l'espressione generale delle componenti dell'accelerazione, che i simboli di Christoffel non identicamente nulli delle coordinate polari piane sono

$$(2.47) \quad \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}.$$

2.4 Rappresentazione intrinseca

Nota l'orbita di un punto si consideri su questa l'ascissa euclidea s avente origine in un punto P_0 . Allora il moto è completamente determinato dalla funzione

$$(2.48) \quad s = s(t)$$

dette **legge oraria** del moto. Questa funzione infatti fa corrispondere ad ogni istante $t \in I$ la lunghezza (con segno) dell'arco di orbita che separa il punto $P(t)$ dal punto P_0 . Orbita e legge oraria forniscono una descrizione completa del moto, scindendolo nella sua parte puramente geometrica e nella sua parte temporale. In questa descrizione per la velocità e l'accelerazione sussiste la seguente **rappresentazione intrinseca**:

$$(2.49) \quad \mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{t}, \quad \mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{t} + c \dot{s}^2 \mathbf{n}$$

dove \mathbf{t} , \mathbf{n} e c sono il **versore tangente**, il **versore normale principale** e la **curvatura** dell'orbita, tutte funzioni di s . Per dimostrare le (2.49) ricordiamo dalla Geometria la definizione di questi elementi intrinseci. Data la funzione $\mathbf{r}(t)$, con derivata $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t)$, si considera la funzione integrale

$$(2.50) \quad s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(u)| du.$$

è la primitiva della funzione $|\mathbf{v}(t)|$ tale che $s(0) = 0$. Si tratta di una funzione monotona crescente di t (perché l'integrando è positivo), quindi invertibile in una funzione $t = t(s)$. Se nell'intervallo temporale I in cui si considera il moto si ha sempre $\mathbf{v}(t) \neq 0$ (non vi sono "istanti di arresto") allora la funzione $s(t)$ misura la lunghezza dell'arco di traiettoria compresa tra P_0 e $P(t)$. Inoltre anche la funzione inversa $t = t(s)$ è derivabile. In questo caso l'ascissa euclidea può essere scelta come parametro per rappresentare l'orbita. Il vettore "velocità" in questa parametrizzazione è

$$(2.51) \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dt}{ds} \mathbf{v}$$

Si tratta di un vettore unitario perché per la definizione (2.50) si ha $\dot{s} = |\mathbf{v}|$ e quindi

$$|\mathbf{t}| = \frac{dt}{ds} |\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{v}|}{\dot{s}} = 1.$$

Dalla (2.51) segue subito la (2.49)₁. Si considera quindi la derivata del versore tangente \mathbf{t} rispetto al parametro s e si pone

$$(2.52) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = c \mathbf{n}$$

assumendo $c \geq 0$ e $|\mathbf{n}| = 1$. Si definiscono in tal modo due grandezze: lo scalare non negativo $c = c(s)$, detto curvatura della curva, e il versore $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$, detto **versore normale principale** della curva. Si ha allora successivamente

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt} \mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \ddot{s} \mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \mathbf{t} + c \dot{s}^2 \mathbf{n},$$

e anche la (2.49)₂ è dimostrata.

NOTA 2.4.1 – Il versore \mathbf{n} è in ogni punto ortogonale a \mathbf{t} , quindi all'orbita, per effetto della seguente proprietà: *sia $\mathbf{u}(s)$ una funzione vettoriale derivabile nella variabile reale s ; se il modulo di \mathbf{u} è costante allora la sua derivata è un vettore ortogonale a \mathbf{u} :*

$$|\mathbf{u}(t)| = \text{cost.} \implies \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0.$$

Infatti da $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \text{cost.}$ segue:

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 2 \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{u}.$$

Si è qui applicata la proprietà, di dimostrazione immediata, che per la derivata di un prodotto scalare vale la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds}.$$

Analogha proprietà vale per il prodotto vettoriale:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{ds}. \quad \bullet$$

NOTA 2.4.2 – Dalla rappresentazione intrinseca (2.49) si osserva che l'accelerazione è la somma di due vettori diretti secondo la tangente all'orbita e alla normale principale,

$$(2.53) \quad \mathbf{a}_t = \ddot{s} \mathbf{t}, \quad \mathbf{a}_n = c \dot{s}^2 \mathbf{n},$$

che chiamiamo rispettivamente **accelerazione tangente** e **accelerazione normale**. Di conseguenza, in ogni punto P dell'orbita l'accelerazione appartiene al piano individuato dai versori (\mathbf{t}, \mathbf{n}) , detto **piano osculatore** in P . Le funzioni \dot{s} e \ddot{s} sono dette rispettivamente **velocità scalare** e **accelerazione scalare**. \bullet

ESEMPIO 2.4.1 – **Moto uniforme.** è per definizione un moto a velocità scalare costante, quindi caratterizzato dalla condizione $|\mathbf{v}| = \text{cost.}$ ovvero $\dot{s} = \text{costante}$. Non esistono istanti di arresto, a meno che non sia proprio $\mathbf{v} = 0$, nel qual caso il punto è immobile e la sua orbita si riduce ad un punto. Al di fuori di questo caso l'orbita ammette sempre il versore tangente \mathbf{t} . Dalla (2.49)₂ si vede che un moto è uniforme se e solo se la sua accelerazione è sempre normale alla traiettoria. Esempi sono il moto rettilineo uniforme, il moto circolare uniforme, il moto elicoidale uniforme, già considerati. \bullet

ESEMPIO 2.4.2 – Se consideriamo in un intervallo temporale $\Delta t > 0$ l'incremento ΔA dell'area della superficie descritta da \mathbf{r} nell'intervallo $(t, t + \Delta t)$, questo, a meno di infinitesimi di ordine superiore a Δt , è pari all'area del triangolo formato da $\mathbf{r}(t)$ e dal vettore $\Delta s \mathbf{t}$, dove Δs è l'incremento d'arco euclideo. Ricordato il significato geometrico del prodotto vettoriale, quest'area è data da $\frac{1}{2} \Delta s |\mathbf{r} \times \mathbf{t}|$. Pertanto dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si trova:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \dot{s} |\mathbf{r} \times \mathbf{t}| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|.$$

Si ha così una dimostrazione “intuitiva” della proprietà della velocità areale $\mathbf{v}_{\text{ar}} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ (Nota 2.1.1). •

Aggiungiamo ancora alcune osservazioni di carattere essenzialmente geometrico.

NOTA 2.4.3 – Dalla (2.52) si nota che lo scalare c misura la *rapidità* con cui cambia la tangente alla curva al variare del parametro euclideo s . Se $c \neq 0$, l'inverso

$$\varrho = \frac{1}{c}$$

prende il nome di **raggio di curvatura** della curva. Se \mathbf{t} è costante, la curvatura è nulla e il versore normale principale è indeterminato. È questo il caso delle rette. Infatti, se $\mathbf{t} = \text{cost.}$ dalla (2.51) segue $\mathbf{r}(s) = s \mathbf{t} + \mathbf{r}_0$, con $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$. •

NOTA 2.4.4 – Il vettore unitario

$$(2.54) \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

prende il nome di **versore binormale**. In ogni punto della curva è pertanto definita una terna di versori fra loro ortogonali $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, detta **terna fondamentale** o **triedro fondamentale**. Siccome per la derivazione di un prodotto vettoriale vale la regola di Leibniz, si ha

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

Quindi la derivata di \mathbf{b} è ortogonale a \mathbf{t} . Ma essa è anche ortogonale a \mathbf{b} , perché \mathbf{b} ha modulo costante. È dunque necessariamente parallela a \mathbf{n} . Si pone allora

$$(2.55) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau \mathbf{n}}$$

Lo scalare $\tau = \tau(s)$ così definito prende il nome di **torsione** della curva. La torsione dà la misura di quanto la curva si discosti da una curva piana. Le formule (2.52) e (2.55) esprimono la derivata rispetto al parametro euclideo s dei versori \mathbf{t} e \mathbf{b} . La derivata di \mathbf{n} è invece data dalla formula

$$(2.56) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -c \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}}$$

che non introduce ulteriori caratteristiche scalari intrinseche della curva. Infatti da $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$ segue:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \tau \mathbf{n} \times \mathbf{t} + c \mathbf{b} \times \mathbf{n}.$$

Le formule (2.52), (2.55) e (2.56) sono chiamate **formule di Frenet**.⁴ •

ESERCIZI 2.4.1.

1. Dimostrare che una circonferenza di raggio R ha curvatura costante pari a $\frac{1}{R}$.
2. Calcolare la curvatura e la torsione di un'elica di raggio R e passo p . Ricordiamo che l'elica è l'orbita di un moto elicoidale, cioè della composizione di un moto circolare uniforme e da un moto rettilineo uniforme in direzione ortogonale al piano del moto circolare; inoltre il passo è la distanza tra due punti che si corrispondono dopo un giro completo nel moto circolare.
3. Dimostrare che una curva è piana se e solo se la sua torsione è ovunque nulla. Suggerimento: la condizione $\tau = 0$ equivale (si veda la (2.55)) a $\mathbf{b} = \text{costante}$, e questa implica $\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = \text{costante}$; di qui far seguire che il moto è piano. Viceversa, se la curva sta su di un piano, sia il versore tangente che il versore normale principale sono tangenti al piano, e quindi \mathbf{b} è ortogonale a questo, dunque è costante; per cui $\tau = 0$.

2.5 Moti centrali

Un moto si dice **centrale** se esiste un punto fisso $O \in \mathcal{A}$, detto **centro del moto**, tale che il vettore accelerazione $\mathbf{a}(t)$ è in ogni istante t parallelo al vettore $OP = \mathbf{r}(t)$. Questa condizione di parallelismo si traduce nell'equazione caratteristica dei moti centrali

$$(2.57) \quad \boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{r} = 0}$$

Un'altra caratterizzazione dei moti centrali è la seguente.

TEOREMA 2.5.1 – *Un moto è centrale se e solo se la velocità areale vettoriale è costante:*

$$(2.58) \quad \boxed{\mathbf{v}_{ar} = \text{costante}}$$

DIMOSTRAZIONE. Per la derivazione di un prodotto vettoriale vale la regola di Leibniz, quindi:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{a},$$

per cui si ha $2\mathbf{v}_{ar} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{costante}$ se e solo se $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$. □

È notevole il fatto che

TEOREMA 2.5.2 – *Un moto centrale è un moto piano.*

⁴ Jean Frédéric Frenet, 1816-1900.

DIMOSTRAZIONE. Da $OP \times \mathbf{v} = 2\mathbf{v}_{\text{ar}} = \text{cost.}$ segue che il punto $P(t)$ si trova sempre sul piano per O ortogonale al vettore costante \mathbf{v}_{ar} . \square

In particolare si ha un moto rettilineo se e solo se la velocità areale è nulla (lo chiamiamo **moto centrale degenere**). Infatti la condizione $OP \times \mathbf{v} = 0$ equivale al parallelismo tra il vettore posizione OP e la velocità \mathbf{v} , per cui il punto si muove su di una retta passante per O .

Nello studio di un moto centrale è conveniente utilizzare coordinate polari (r, θ) sul piano del moto, aventi polo nel centro O . Si denota con \mathbf{k} il versore dell'angolo θ ortogonale a tale piano. Ricordata l'espressione (2.43) della velocità areale in coordinate polari, dal Teorema 2.5.1 segue che:

TEOREMA 2.5.3 – *In un moto centrale la grandezza*

$$(2.59) \quad \boxed{c = r^2 \dot{\theta}}$$

è costante: è detta costante delle aree.

NOTA 2.5.1 – Si vede dalla (2.59) che in un moto centrale con $c \neq 0$ le funzioni $r(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ non si annullano mai. Dunque il punto non passa mai per il centro del moto e per un osservatore posto nel centro O il punto P ruota sempre nella stessa direzione, con velocità angolare tanto più piccola quanto più il punto P è distante da O . •

NOTA 2.5.2 – Se di un moto centrale si conoscono la costante delle aree $c \neq 0$, l'equazione polare $r = r(\theta)$ della traiettoria e l'angolo θ_0 all'istante $t = 0$, allora il moto è completamente determinato. Basta infatti calcolare l'integrale (si veda la (2.59))

$$(2.60) \quad t(\theta) = \frac{1}{c} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(x) dx.$$

Esso fornisce una funzione monotona, quindi invertibile in una funzione $\theta = \theta(t)$ che insieme all'equazione della traiettoria $r = r(\theta)$ definisce completamente il moto. •

NOTA 2.5.3 – *In un moto centrale non degenere la velocità e l'accelerazione risultano determinate dalla conoscenza dell'orbita e della costante delle aree.* Se infatti si rappresenta l'orbita con un'equazione $r = r(\theta)$, allora la velocità e l'accelerazione si calcolano con le formule

$$(2.61) \quad \boxed{\mathbf{v} = c \left(-\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \mathbf{u} + \frac{1}{r} \boldsymbol{\tau} \right), \quad \mathbf{a} = -\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}}$$

dette **formule di Binet**⁵ – per quanto fossero già note, sotto altra forma, a Isaac Newton (1642-1727). Per dimostrare le (2.61) si osserva che

$$\dot{\theta} = \frac{c}{r^2},$$

⁵ Jacques Binet, 1786-1856.

e quindi:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = c \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -c \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r},$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \dot{\theta} = -c \dot{\theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} = -\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r}.$$

Si sostituiscono allora queste espressioni di $\dot{\theta}$, \dot{r} e \ddot{r} nelle rappresentazioni polari della velocità e dell'accelerazione, tenendo conto che per definizione di moto centrale l'accelerazione trasversa si annulla identicamente. •

2.6 Dalle leggi di Kepler alla legge di gravitazione universale

Utilizzando la teoria dei moti centrali ed in particolare la seconda formula di Binet, si può facilmente dedurre la legge di gravitazione universale a partire dalle **leggi di Keplero**⁶ di solito enunciate come segue:

I. Le orbite dei pianeti sono ellittiche e il Sole occupa uno dei fuochi.

II. Le aree descritte dal raggio vettore che va dal Sole ad un pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

III. I quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a percorrere le loro orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori.

Queste leggi furono dedotte da una enorme massa di dati astronomici raccolti dal maestro di Kepler, Tycho Brahe (1546-1601). I pianeti vengono rappresentati da punti mobili nel riferimento centrato nel Sole, che è un punto fisso, con orientamento invariabile rispetto alle stelle fisse. La prima legge mostra innanzitutto che il moto di un pianeta è piano. La seconda legge afferma che la velocità areale rispetto al Sole è costante. Di qui segue che il moto di ogni pianeta è centrale di centro il Sole.

La prima legge afferma che l'orbita di ogni pianeta è ellittica. Sappiamo che l'equazione dell'ellisse in coordinate polari centrate in uno dei fuochi è

$$(2.62) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

dove

$$(2.63) \quad p = \frac{b^2}{a}$$

è il **parametro**, con (a, b) semiassi maggiore e minore rispettivamente, e

$$(2.64) \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \leq 1$$

⁶ Johann Kepler, 1571-1630.

è l'**eccentricità**. Poiché il moto centrale, per il Teorema 2.5.3 sappiamo che è possibile, applicando la seconda formula di Binet, determinare l'accelerazione a partire dall'orbita. Sostituendo allora l'espressione

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta)$$

nella seconda delle e:mc5 si ottiene semplicemente

$$(2.65) \quad \mathbf{a} = -\gamma \frac{1}{r^2} \mathbf{u},$$

posto

$$(2.66) \quad \gamma = \frac{c^2}{p}.$$

è così dimostrato che l'accelerazione di ogni pianeta è diretta e orientata verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole. Tutto questo segue dalle prime due leggi di Keplero.

La terza legge, denotato con T il periodo di rivoluzione del pianeta, afferma che la quantità

$$\frac{a^3}{T^2}$$

non dipende dal pianeta. è quindi un invariante del sistema solare. Da questa invarianza segue l'*universalità* della legge e:mc9, cioè che la costante γ che vi compare *non dipende dal pianeta*. Infatti, per il significato di velocità areale l'area $A = \pi ab$ dell'orbita ellittica di un pianeta è data da

$$A = \frac{1}{2} \int_0^T r^2 \dot{\theta} dt = \frac{c}{2} \int_0^T dt = \frac{1}{2} c T.$$

Vale quindi dall'uguaglianza

$$\pi ab = \frac{1}{2} c T.$$

Per il coefficiente γ si ricava quindi l'espressione

$$\gamma = \frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2},$$

Per la terza legge questo è un numero indipendente dal pianeta.

2.7 Moti di un punto su di una superficie

Si consideri una superficie regolare Q nello spazio affine euclideo tridimensionale. Data una sua rappresentazione parametrica

$$(2.67) \quad OP = \mathbf{r}(q^i) \quad (i = 1, 2),$$

il moto di un punto $P(t)$ sulla superficie Q (più precisamente sul dominio $D \subseteq Q$ delle coordinate q^i) si rappresenta con equazioni parametriche

$$(2.68) \quad q^i = q^i(t) \quad (i = 1, 2).$$

Infatti, sostituite queste nella (2.67) si ottiene il vettore posizione in funzione del tempo

$$(2.69) \quad OP = \mathbf{r}(q^i(t)) = \mathbf{r}(t).$$

Derivando rispetto al tempo si trova

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \partial_i \mathbf{r} \dot{q}^i,$$

cioè

$$(2.70)$$

$$\mathbf{v} = \dot{q}^i \mathbf{e}_i$$

essendo gli $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r}$ i vettori coordinati, tangenti alla superficie e indipendenti in ogni suo punto. Dunque le componenti della velocità secondo la base \mathbf{e}_i sono proprio le derivate prime rispetto al tempo delle equazioni parametriche $q^i = q^i(t)$.

Invece, come ora vedremo, le componenti dell'accelerazione non sono (solamente) le derivate seconde di queste.

Partiamo da una considerazione di indole più generale. Sia $\mathbf{v}(t)$ un vettore dipendente dal tempo applicato in $P(t)$ e tangente alla superficie.

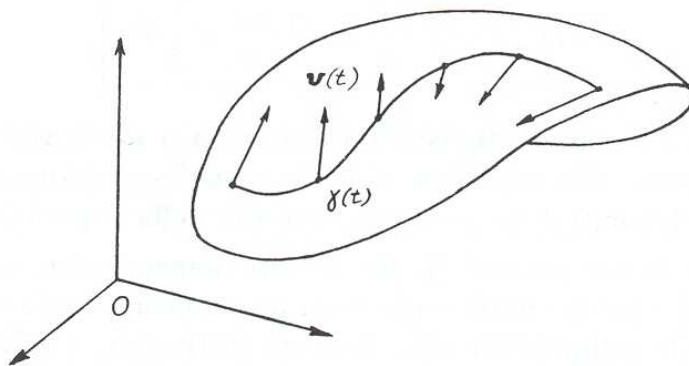


Figura 2.1: Vettore $\mathbf{v}(t)$ lungo il moto di un punto su di una superficie.

Supposto $\mathbf{v}(t)$ derivabile rispetto a t , e posto $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, per la sua derivata si ha successivamente:

$$(2.71) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{dw^i}{dt} \mathbf{e}_i + v^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \frac{dw^i}{dt} \mathbf{e}_i + v^i \partial_j \mathbf{e}_i \frac{dq^j}{dt} \\ &= \left(\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ji}^k \frac{dq^j}{dt} v^i \right) \mathbf{e}_k + B_{ji} \frac{dq^j}{dt} v^i \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Qui si è richiamata la decomposizione (1.71)

$$\partial_i \mathbf{e}_j = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k + B_{ij} \mathbf{N}$$

delle derivate dei vettori coordinati, secondo i vettori stessi e il versore normale alla superficie. È dunque chiaro che la derivata di un vettore tangente alla superficie, lungo una curva parametrizzata (un moto), in generale non è più tangente.

La derivata di $\mathbf{v}(t)$ risulta pertanto decomposta nella somma di un vettore ortogonale alla superficie e di un vettore tangente

$$(2.72) \quad \boxed{D_{(i)} \mathbf{v} = \left(\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ji}^k \frac{dq^j}{dt} v^i \right) \mathbf{e}_k}$$

a cui diamo il nome di **derivata intrinseca** o **derivata interna** del vettore $\mathbf{v}(t)$.

Fatte queste osservazioni, consideriamo il caso particolare, ma fondamentale, in cui il vettore $\mathbf{v}(t)$ è il vettore velocità (2.70). In tal caso la sua derivata coincide con l'accelerazione \mathbf{a} e la (2.71) diventa

$$(2.73) \quad \boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} \right) \mathbf{e}_k + B_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} \mathbf{N}}$$

Chiamiamo allora **accelerazione intrinseca** o **interna** la sola parte tangente alla superficie, cioè la derivata intrinseca del vettore velocità:

$$(2.74) \quad \boxed{\mathbf{a}_{(i)} = D_{(i)} \mathbf{v} = \left(\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} \right) \mathbf{e}_k}$$

NOTA 2.7.1 – È importante osservare l'analogia tra questa formula e quella delle componenti dell'accelerazione (2.27) di un punto libero in uno spazio affine riferito a coordinate generiche. •

La (2.73) mette anche in evidenza che la componente normale alla superficie dell'accelerazione fa intervenire solo la seconda forma fondamentale \mathbf{B} della superficie, valutata sul vettore velocità. Posto allora

$$(2.75) \quad \boxed{\mathbf{a}_{(N)} = B_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} \mathbf{N}}$$

la (2.73) diventa

$$(2.76) \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(i)} + \mathbf{a}_{(N)}}$$

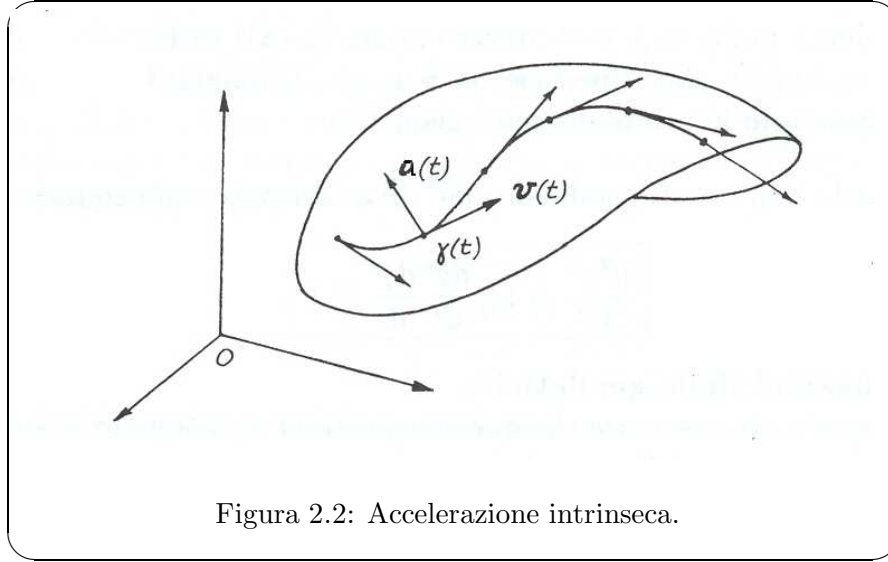


Figura 2.2: Accelerazione intrinseca.

2.8 Moti geodetici

Nello spazio affine euclideo tridimensionale un *moto rettilineo uniforme* è per definizione un moto a velocità vettoriale \mathbf{v} costante, cioè un moto ad accelerazione identicamente nulla: $\mathbf{a} = 0$. La traiettoria è una retta. Un moto di questo tipo è anche detto **inerziale**. Il concetto di moto inerziale si può estendere al caso di un punto mobile sopra una superficie alla maniera seguente:

DEFINIZIONE 2.8.1 – *Il moto di un punto su di una superficie si dice **moto geodetico** o **moto inerziale** se l'accelerazione intrinseca è identicamente nulla:*

$$(2.77) \quad \boxed{\mathbf{a}_{(i)} = 0}$$

Chiamiamo **geodetiche della superficie** le orbite dei moti geodetici. •

Siccome l'accelerazione intrinseca è la parte tangente alla superficie dell'accelerazione $\mathbf{a}(t)$, dalla decomposizione ortogonale-tangente (2.76) segue che:

TEOREMA 2.8.1 – *Un moto è geodetico se e solo se l'accelerazione è sempre ortogonale alla superficie:*

$$(2.78) \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(N)}}$$

Dalla (2.74) segue inoltre che i moti geodetici sono caratterizzati dalle equazioni differenziali

$$(2.79) \quad \boxed{\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} = 0}$$

dette **equazioni delle geodetiche**. È importante osservare che queste equazioni equivalgono al sistema di quattro equazioni differenziali

$$(2.80) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i, \\ \frac{dv^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k v^i v^j, \end{cases}$$

nelle quattro funzioni incognite $q^i(t)$ e $v^i(t)$. Ne consegue che i moti geodetici sono le curve integrali di un sistema dinamico \mathbf{X} sopra lo spazio TQ dei vettori tangenti alla superficie Q . Questo spazio può essere interpretato come superficie di dimensione 4 immersa nello spazio a 6 dimensioni dei vettori applicati di tutto lo spazio affine euclideo tridimensionale, oppure come varietà differenziabile di dimensione 4 (come meglio si vedrà in un successivo capitolo) rappresentata dalle coordinate (q^i, v^j) ; le prime due sono coordinate sulla superficie Q , le seconde sono le componenti dei vettori tangenti secondo queste coordinate. Al campo \mathbf{X} si dà il nome (con abuso di linguaggio) di **flusso geodetico** della superficie. A questo campo vettoriale possiamo applicare tutte le considerazioni svolte per i sistemi dinamici in generale. In primo luogo, in base al teorema di Cauchy, possiamo affermare che:

TEOREMA 2.8.2 – *Assegnato un vettore \mathbf{v}_0 tangente ad una superficie regolare Q in un punto P_0 , esiste uno ed un solo moto geodetico massimale (cioè con estensione temporale massimale) avente velocità \mathbf{v}_0 per $t = 0$.*

In secondo luogo possiamo considerare **integrali primi delle geodetiche**, cioè integrali primi del sistema dinamico (2.80). Questi sono, per definizione, funzioni sullo spazio TQ a valori reali (o anche funzioni a valori vettoriali) costanti lungo le soluzioni del sistema (2.80), cioè lungo le geodetiche. Si tratta, nel nostro caso, di funzioni del tipo $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, cioè dipendenti dal vettore posizione \mathbf{r} e dalla velocità \mathbf{v} , le quali, subordinatamente alla condizione che il moto $\mathbf{r}(t)$ avvenga sulla superficie e che la corrispondente accelerazione intrinseca sia nulla, soddisfano alla condizione

$$(2.81) \quad \boxed{\frac{d}{dt}F(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = 0}$$

Ad esempio (esempio notevole) abbiamo

$$\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$$

perché \mathbf{v} è tangente alla superficie mentre \mathbf{a} , riducendosi al solo termine $\mathbf{a}_{(N)}$, è ortogonale a questa. Pertanto la semplice funzione \mathbf{v}^2 , ovvero $|\mathbf{v}|$, è un integrale primo. Di qui segue che:

TEOREMA 2.8.3 – *I moti geodetici sono moti uniformi.*

Possiamo riesaminare questa circostanza da un altro punto di vista, considerando la rappresentazione intrinseca dell'accelerazione:

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{t} + c \dot{s}^2 \mathbf{n}.$$

Siccome il versore \mathbf{t} tangente alla curva è anche tangente alla superficie, la condizione $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(N)}$ caratteristica dei moti geodetici equivale alle due condizioni

$$(2.82) \quad \ddot{s} = 0, \quad c \dot{s}^2 \mathbf{n} = B_{ij} v^i v^j \mathbf{N}.$$

La prima di queste riafferma che il moto è uniforme ($|\mathbf{v}| = \dot{s} = \text{cost.}$). La seconda mostra in particolare che il versore normale principale alla curva è parallelo (cioè uguale o opposto) al versore normale alla superficie. Osservato che l'uniformità del moto è un fatto puramente cinematico, mentre la condizione $\mathbf{n} = \pm \mathbf{N}$ è essenzialmente geometrica, si deduce la seguente proprietà caratteristica delle geodetiche, proprietà che può essere assunta come definizione:

TEOREMA 2.8.4 – *Una geodetica è una curva tale che in ogni suo punto il versore normale principale è ortogonale alla superficie.*

2.8.1 Interpretazione variazionale delle geodetiche

Le geodetiche di una superficie sono caratterizzate da una notevole proprietà geometrica la cui trattazione rientra nell'ambito del *calcolo delle variazioni*. Non disponendo per ora di questo metodo di calcolo, possiamo ricorrere ad una affermazione di carattere intuitivo: *le geodetiche sono le curve a lunghezza stazionaria*. Si vuol dire che se si fissano due punti qualunque della superficie, tra tutte le curve tracciate su questa e aventi i due punti come estremi, le geodetiche sono quelle di lunghezza stazionaria (in particolare minima) rispetto a curve *prossime*. Gli esempi seguenti chiariranno questo concetto (si osserverà anche che di geodetiche congiungenti due punti prefissati ne possono esistere più di una, anche infinite). Una semplice interpretazione fisica di questa definizione è la seguente: se un filo flessibile è teso su di una superficie liscia, esso traccia su di questa una geodetica.

2.8.2 Interpretazione dinamica delle geodetiche

Anticipiamo alcune considerazioni di carattere dinamico che saranno riprese nel capitolo seguente. Si consideri un punto mobile sopra una superficie fissa. L'equazione dinamica del moto è $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r$, dove m è la massa, \mathbf{F}_a è il vettore rappresentante la *forza attiva* agente sul punto ed \mathbf{F}_r è la *forza reattiva* o *reazione vincolare* esercitata dalla superficie sul punto. Si dice che la superficie è *liscia* se la reazione vincolare è sempre ortogonale a questa. Si dice inoltre che il punto si muove di **moto spontaneo** se la forza attiva è nulla, cioè se il punto è soggetto alla sola reazione vincolare. In questo caso l'equazione del moto diventa semplicemente $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r$. Se la superficie è liscia, segue da questa equazione che l'accelerazione è sempre ortogonale alla superficie, cioè che la sua accelerazione intrinseca è sempre nulla. Pertanto: *il moto spontaneo di un punto su di una superficie liscia è un moto geodetico.*

2.8.3 Superfici sviluppabili

La loro geometria interna è, localmente, quella del piano euclideo.

Consideriamo per esempio un **cilindro**.⁷ Se lo si taglia lungo una sua direttrice, lo si sviluppa in una striscia del piano compresa tra due rette parallele. Un punto di una delle due rette viene identificato con il punto ortogonalmente opposto sull'altra retta. Poiché le geodetiche del piano sono le rette, le geodetiche del cilindro sono rappresentate, nello sviluppo, o da rette parallele alle rette limite della striscia, o da segmenti di rette trasversi alla striscia fra loro paralleli ed equidistanti. Pertanto, sul cilindro, esse danno luogo a delle eliche – Figura 2.3 – eventualmente degeneri, cioè direttrici o circonferenze. Due punti distinti non giacenti su di una circonferenza sono congiungibili da infinite geodetiche.

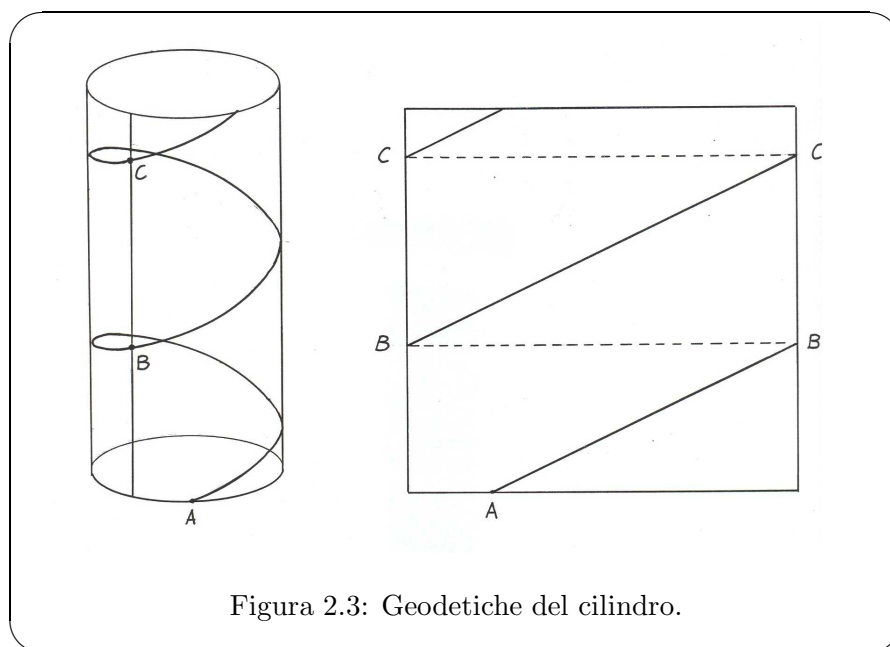


Figura 2.3: Geodetiche del cilindro.

Un **cono** è invece sviluppabile in una parte di piano compresa fra due semirette a e a' uscenti da un punto V (vertice). Un punto $P \in a$ è identificato col punto $P' \in a'$ equidistante da V . Un caso particolare di geodetica è fornito dalle semirette uscenti da V : sono le direttrici del cono. Se vogliamo invece altre geodetiche, cominciamo col tracciare una semiretta a partire da un punto $A \in a$, interna allo sviluppo del cono. Preso il punto $A' \in a'$ corrispondente all'estremo $A \in a$, proseguiamo la geodetica con una semiretta che parte da A' con lo stesso angolo di incidenza che la semiretta precedente ha in A , ma in senso opposto rispetto al vertice V , come indicato in Figura 2.4.

Analogamente si procede sulle eventuali altre intersezioni di queste semirette con le semirette limite.

⁷ Si sottintende circolare, retto.

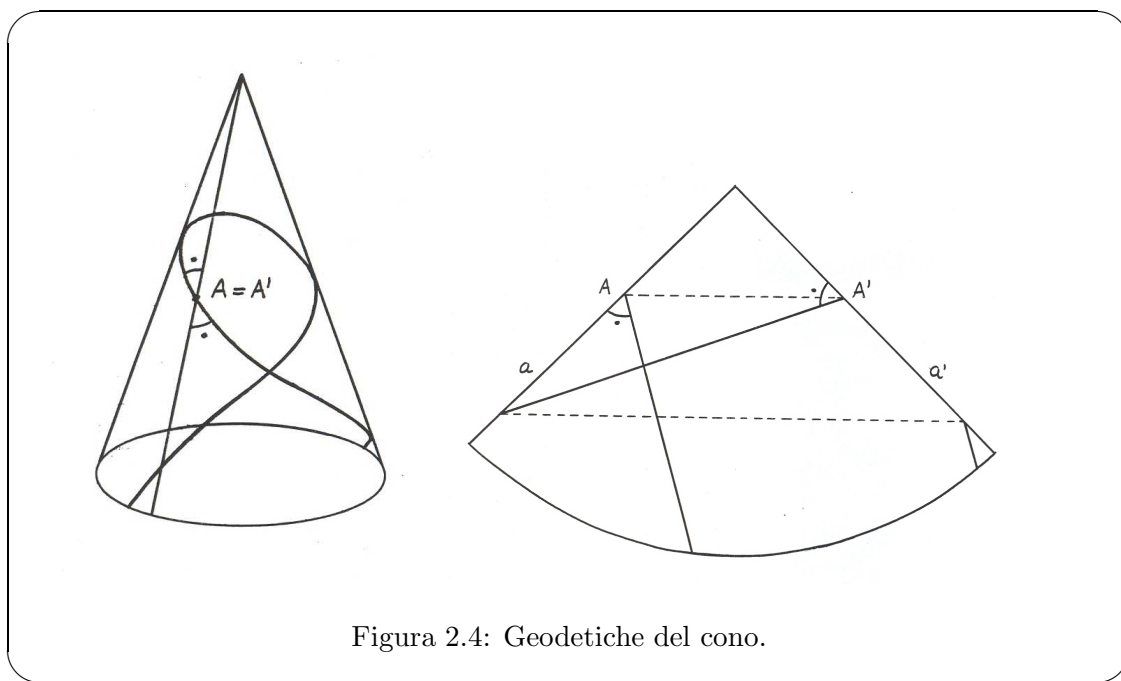


Figura 2.4: Geodetiche del cono.

ESEMPIO 2.8.1 – Quante intersezioni avrà una geodetica del cono (non direttrice) con se stessa? Si studi come varia questo numero al variare dell'angolo di apertura del cono. Si applichi questo studio per risolvere il seguente problema di statica: una collana costituita da un filo sottile con appeso un ciondolo viene appoggiata sopra un sostegno conico circolare ad asse verticale, liscio. Quale deve essere l'apertura di questo cono perché la collana non si sfilì? •

ESEMPIO 2.8.2 – La sfera. Sia O il centro di una sfera e sia $\mathbf{r} = OP$ il vettore posizione di un generico punto P di questa. Osserviamo subito che *la funzione (vettoriale) $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ è un integrale primo delle geodetiche*. Infatti, derivando questo prodotto e imponendo la condizione $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(N)}$ caratteristica delle geodetiche si trova

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{a}_{(N)} = 0,$$

perché $\mathbf{a}_{(N)}$ è parallelo ad \mathbf{N} ed i vettori (\mathbf{r}, \mathbf{N}) sono paralleli. Allora lungo una geodetica della sfera il vettore $\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ è costante (si noti che tale vettore non può essere nullo). Questo implica che il vettore posizione \mathbf{r} è sempre ortogonale ad un vettore costante \mathbf{K} . Dunque il vettore \mathbf{r} descrive necessariamente una circonferenza di raggio massimo, intersezione della sfera col piano passante per il suo centro O e ortogonale a \mathbf{K} . La stessa proprietà può dimostrarsi, in via più breve, utilizzando quanto già noto per i moti centrali. Infatti la condizione $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(N)}$ sulla sfera implica che l'accelerazione è sempre diretta verso il suo centro: i moti geodetici della sfera sono dunque moti centrali di centro il centro della

sfera. Siccome i moti centrali sono piani e contengono il centro del moto, si conclude che le orbite sono circonferenze massime. •

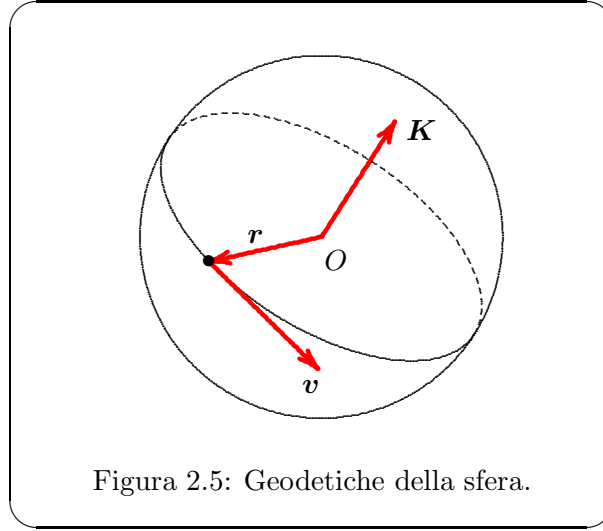


Figura 2.5: Geodetiche della sfera.

2.8.4 Superfici di rotazione

Si consideri una superficie regolare di rotazione intorno ad un asse di versore \mathbf{u} . Sia O un punto qualunque di questo asse e sia $\mathbf{r} = OP$ il vettore di posizione di un generico punto P della superficie. In questo caso la funzione $\mathbf{u} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ è un integrale primo delle geodetiche. Infatti, derivando questo prodotto misto, e imponendo la condizione $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(N)}$ caratteristica delle geodetiche si ha successivamente:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{u} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_{(N)} = 0,$$

perché $\mathbf{a}_{(N)}$ è parallelo a \mathbf{N} ed i vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{N})$ sono complanari. Osserviamo ora che il vettore $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$ è tangente al parallelo passante per P e ha modulo pari alla distanza ρ del punto P dall'asse di rotazione. Sicché, detto θ l'angolo formato tra questo e il vettore velocità \mathbf{v} ed osservato che quest'ultimo per i moti geodetici ha modulo costante, dall'integrale primo delle geodetiche $\mathbf{u} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \text{costante}$ deduciamo che:

TEOREMA 2.8.5 – Per ogni curva geodetica su di una superficie di rotazione si ha

$$\rho \cos \theta = \text{cost.}$$

dove ρ è la distanza dall'asse di rotazione e θ è l'angolo formato con il parallelo.

Questo è il **teorema di Clairaut**.⁸

⁸ Alexis Claude Clairaut, 1713-1765.

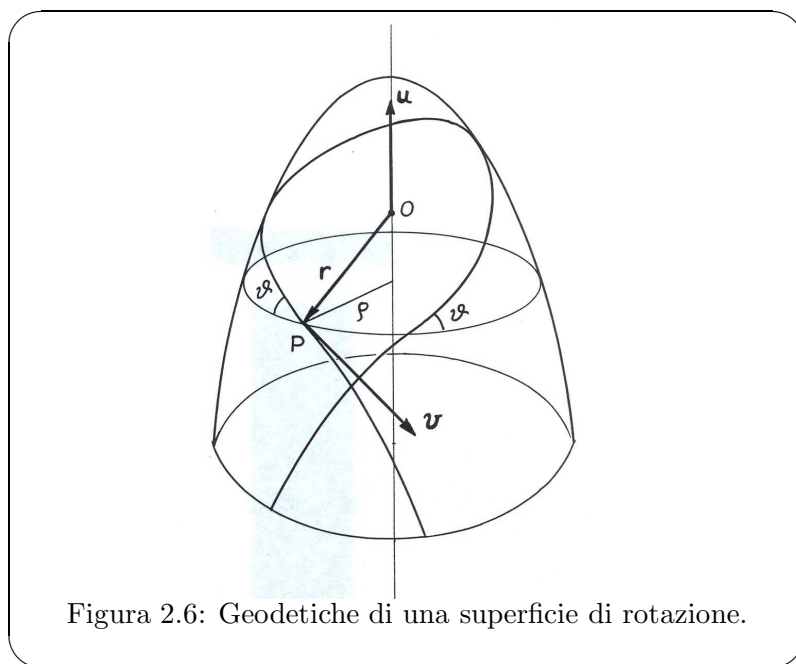


Figura 2.6: Geodetiche di una superficie di rotazione.

ESEMPIO 2.8.3 – Si consideri il teorema di Clairaut nei casi sopra considerati (sono tutte superfici di rotazione). Nel caso del cilindro si riconosce immediatamente che le geodetiche sono delle eliche, perché $\theta = \text{costante}$. Nel caso del cono si vede che una geodetica, allontanandosi dal vertice, tende asintoticamente a porsi perpendicolare ai paralleli, perché crescendo ρ , $\cos \theta$ deve tendere a zero. •

Capitolo 3

Cinematica del corpo rigido

Un **corpo rigido** è un insieme di punti mobili che durante il moto mantengono inalterate le mutue distanze. Nell'analisi cinematica di un corpo rigido si prescinde inizialmente dalla sua *forma*, e anche dal fatto che esso sia costituito da un numero finito o infinito di punti. Il moto di un corpo rigido prende il nome di **moto rigido**. Un corpo rigido può essere rappresentato, in sintesi, da una quaterna di punti (P_0, P_1, P_2, P_3) , vertici di un tetraedro non degenero, le cui distanze sono costanti nel tempo. Noto il moto di questo tetraedro, è ben determinato il moto di ogni altro punto ad esso rigidamente collegato, detto **punto solidale**.

Fissare un tetraedro (P_0, P_1, P_2, P_3) solidale al corpo rigido e quivale a scegliere una **terna solidale** di vettori $e_\alpha = P_0 P_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), pensati applicati in un punto solidale P_0 . Ogni moto rigido sarà quindi rappresentabile come il moto di un punto P_0 insieme ad una rotazione dipendente dal tempo $\mathbf{R}(t)$ che fornisce i vettori $e_\alpha(t)$ come funzioni del tempo, a partire da una **terna di riferimento** c_α di vettori fissati convenientemente.

I primi paragrafi di questo capitolo sono richiamate le nozioni fondamentali sulle rotazioni nello spazio euclideo tridimensionale.

3.1 Rotazioni

Un **endomorfismo ortogonale**, o **isometria**, è un endomorfismo \mathbf{R} su di uno spazio vettoriale euclideo (E, g) conservante il prodotto scalare, cioè tale che

$$(3.1) \quad \boxed{\mathbf{R}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}$$

per ogni coppia di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$. Questa definizione equivale a:

$$(3.2) \quad \boxed{\mathbf{R}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

È infatti ovvio che la (3.1) implica la (3.2). Viceversa, se vale la (3.2) risulta

$$\mathbf{R}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E).$$

Sviluppando ambo i membri di quest'uguaglianza e riutilizzando la (3.2) si trova l'uguaglianza (3.1). Dalla (3.1), per il fatto che la metrica non è degenera, segue che $\text{Ker}(\mathbf{R}) = 0$. Di conseguenza $\mathbf{R}(E) = E$. Ne deduciamo che un endomorfismo ortogonale è un isomorfismo. Per definizione di endomorfismo trasposto¹ la (3.1) equivale a $\mathbf{R}^T \mathbf{R}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e quindi, per l'arbitrarietà dei vettori, alla condizione

$$(3.3) \quad \boxed{\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}}$$

Dunque le formule (3.1), (3.2) e (3.3) sono tutte definizioni equivalenti di endomorfismo ortogonale. Poiché $\det \mathbf{R}^T = \det \mathbf{R}$,² la (3.3) implica $(\det \mathbf{R})^2 = 1$ cioè

$$(3.4) \quad \det \mathbf{R} = \pm 1.$$

Le isometrie il cui determinante vale +1 sono chiamate **rotazioni**; quelle con determinante -1 **rotazioni improprie**. L'identità $\mathbf{1}$ è ovviamente una rotazione. Il prodotto di due (o più) rotazioni è una rotazione. Il prodotto di due rotazioni improprie è una rotazione. Il prodotto di una rotazione per una rotazione impropria è una rotazione impropria.

L'insieme di tutti gli endomorfismi ortogonali sopra uno spazio (E, \mathbf{g}) è un gruppo rispetto all'ordinaria composizione degli endomorfismi, cioè un sottogruppo di $\text{Aut}(E)$, detto **gruppo ortogonale** di (E, \mathbf{g}) . Lo denotiamo con $O(E, \mathbf{g})$. Le rotazioni formano un sottogruppo, detto **gruppo ortogonale speciale**, che denotiamo con $SO(E, \mathbf{g})$. Le rotazioni improprie non formano ovviamente sottogruppo. Se due spazi vettoriali hanno uguale dimensione e segnatura, allora i rispettivi gruppi ortogonali sono isomorfi.

Passando alle componenti, osserviamo che un endomorfismo \mathbf{R} è ortogonale se e solo se le sue componenti R_i^j rispetto ad una base qualsiasi verificano le uguaglianze

$$(3.5) \quad \boxed{g_{ij} R_h^i R_k^j = g_{hk}}$$

Queste si ottengono dalla (3.1) scritta per una generica coppia $(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k)$ di vettori della base.

¹ Ricordiamo che su di uno spazio vettoriale E dotato di un tensore metrico \mathbf{g} (di qualunque segnatura) ad ogni endomorfismo lineare $\mathbf{R}: E \rightarrow E$ corrisponde l'**endomorfismo trasposto** \mathbf{R}^T definito dall'uguaglianza $\mathbf{R}^T(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$.

² Ricordiamo che il determinante di un endomorfismo \mathbf{R} , qui denotato con $\det \mathbf{R}$, è il determinante della matrice delle sue componenti $[R_i^j]$ rispetto ad una base *qualsiasi* (\mathbf{e}_i) di E (si dimostra che non dipende dalla scelta della base). Le componenti di un endomorfismo lineare sono definite dall'uguaglianza $\mathbf{R}(\mathbf{e}_i) = R_i^j \mathbf{e}_j$. Conveniamo che l'indice in basso sia indice di riga, quello in alto di colonna. Il determinante di un endomorfismo è uguale al prodotto dei suoi autovalori. Il determinante di un endomorfismo e del suo trasposto coincidono. Il determinante del prodotto di due endomorfismi è il prodotto dei determinanti. Si noti che la matrice delle componenti dell'endomorfismo trasposto non è la matrice trasposta (cioè ottenuta scambiando righe con colonne) se non in casi particolari: per esempio nel caso di una metrica definita positiva e rispetto a una base canonica.

Se lo spazio è strettamente euclideo e se la base scelta è canonica, allora le (3.5) diventano³

$$(3.6) \quad \sum_{i=1}^n R_h^i R_k^i = \delta_{hk}$$

Ciò significa che il prodotto della matrice $[R_j^i]$ per la sua trasposta è la matrice unitaria. Le matrici soddisfacenti a questa proprietà sono dette **matrici ortogonali**.

Se la base è canonica ma lo spazio non è strettamente euclideo la formula (3.6) non è più valida. In ogni caso, le matrici delle componenti in una base canonica degli endomorfismi ortogonali (o delle rotazioni) di uno spazio di segnatura (p, q) formano un gruppo denotato con $O(p, q)$ (oppure $SO(p, q)$). Si denotano in particolare con $O(n)$ e $SO(n)$ i gruppi delle matrici $n \times n$ ortogonali, cioè soddisfacenti alla (3.6), e di quelle ortogonali a determinante unitario. La scelta di una base canonica stabilisce un isomorfismo tra $O(E, g)$ e $O(p, q)$.

NOTA 3.1.1 – Gli autovalori, complessi o reali, di un endomorfismo ortogonale in uno spazio strettamente euclideo sono unitari: $|\lambda| = 1$. Infatti, dall'equazione $\mathbf{R}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ segue, applicando la coniugazione, l'equazione $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{v}}$. Moltiplicando scalarmente membro a membro queste due uguaglianze si ottiene $\mathbf{R}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}(\bar{\mathbf{v}}) = \lambda \bar{\lambda} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}$. Poiché \mathbf{R} è ortogonale si ha anche $\mathbf{R}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}$. Di qui segue $\lambda \bar{\lambda} = 1$, come asserito. •

Le rotazioni possono essere rappresentate, oltre che con matrici ortogonali, in vari altri modi. Ne vediamo alcuni.

3.1.1 Rappresentazione mediante simmetrie

Ad un qualunque vettore $\mathbf{a} \in E$ corrisponde un endomorfismo \mathbf{S}_a definito da

$$(3.7) \quad \mathbf{S}_a(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

Esso è una **simmetria** rispetto al piano ortogonale ad \mathbf{a} , nel senso che, come si verifica immediatamente,

$$\mathbf{S}_a(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{S}_a(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

per ogni vettore \mathbf{v} ortogonale ad \mathbf{a} . Di conseguenza \mathbf{S}_a è un'isometria, più precisamente una rotazione impropria. Infatti \mathbf{a} è un autovettore di autovalore -1 mentre ogni vettore ortogonale ad \mathbf{a} è autovettore di autovalore $+1$, sicché lo spettro è $(-1, 1, \dots, 1)$ e quindi $\det \mathbf{S}_a = -1$. Si può dimostrare, ma la dimostrazione non è semplice, che *ogni isometria è il prodotto di simmetrie*. È invece più facile dimostrare che due simmetrie \mathbf{S}_a e \mathbf{S}_b commutano se e solo se i corrispondenti vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} sono dipendenti (allora le simmetrie coincidono) oppure sono ortogonali.

³ In questo caso la matrice metrica diventa $[g_{ij}] = [\delta_{ij}]$ col simbolo δ_{ij} che vale 1 per $i = j$, e 0 per $i \neq j$. È il **simbolo di Kronecker**.

3.1.2 Rappresentazione esponenziale

Dato un endomorfismo \mathbf{A} , consideriamone tutte le sue potenze $\{\mathbf{A}^k; k \in \mathbb{N}\}$ e quindi la serie

$$(3.8) \quad e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k,$$

detta **esponenziale** di \mathbf{A} . Questa è convergente, nel senso che qualunque sia \mathbf{A} e comunque si fissi una base di E , le n^2 serie di numeri reali date dalle componenti di $e^{\mathbf{A}}$ sono tutte convergenti (anzi, assolutamente convergenti) o, se si vuole, che tale è la serie vettoriale

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k(\mathbf{v}),$$

qualunque sia il vettore \mathbf{v} . Si osserva che se $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è lo spettro di \mathbf{A} allora lo spettro di $e^{\mathbf{A}}$ è $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. Infatti da $\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ segue $\mathbf{A}^k(\mathbf{v}) = \lambda^k \mathbf{v}$ e quindi

$$e^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \mathbf{v} = e^{\lambda} \mathbf{v}.$$

L'esponenziale di un endomorfismo non gode di tutte le proprietà della corrispondente funzione analitica. Per esempio l'uguaglianza

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$$

non è più vera in generale. Lo è se i due endomorfismi \mathbf{A} e \mathbf{B} commutano (col che commutano anche gli esponenziali). Vale comunque la proprietà

$$(e^{\mathbf{A}})^{\mathsf{T}} = e^{\mathbf{A}^{\mathsf{T}}}.$$

Di qui segue che:

TEOREMA 3.1.1 – Se \mathbf{A} è antisimmetrico⁴ allora $e^{\mathbf{A}}$ è una rotazione.

DIMOSTRAZIONE. Si ha infatti:

$$e^{\mathbf{A}}(e^{\mathbf{A}})^{\mathsf{T}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{A}^{\mathsf{T}}} = e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{A})} = \mathbf{1}.$$

Inoltre la condizione $\det e^{\mathbf{A}} = 1$ segue dal fatto che nello spettro di un endomorfismo antisimmetrico gli autovalori non nulli si distribuiscono in coppie di segno opposto, sicché la loro somma è uguale a zero. Allora, per quanto sopra detto,

$$\det e^{\mathbf{A}} = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^0 = 1. \quad \square$$

⁴ Un endomorfismo \mathbf{A} su di uno spazio vettoriale dotato di tensore metrico è **antisimmetrico** se $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$, **simmetrico** se $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$.

3.1.3 Rappresentazione di Cayley

Se \mathbf{A} è un endomorfismo antisimmetrico allora l'endomorfismo

$$(3.9) \quad \mathbf{R} = (\mathbf{1} + \mathbf{A})(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$$

è una rotazione.⁵ Si verifica infatti facilmente, utilizzando le proprietà della trasposizione e il fatto che i due endomorfismi $\mathbf{1} \pm \mathbf{A}$ commutano, che $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$. Un po' meno immediata è la verifica del fatto che $\det \mathbf{R} = 1$. Si ottiene quindi un'ulteriore rappresentazione delle rotazioni in termini di endomorfismi antisimmetrici. Va osservato che la condizione $\det(\mathbf{1} - \mathbf{A}) \neq 0$, richiesta per la validità della (3.9), è sempre soddisfatta in uno spazio strettamente euclideo (metrica definita positiva). Infatti, questa equivale alla condizione che 1 sia un autovalore di \mathbf{A} , cosa impossibile perché in tali spazi gli autovalori non nulli di un endomorfismo antisimmetrico sono immaginari puri.

3.1.4 Rappresentazione quaternionale

Questa e le rappresentazioni seguenti, al contrario delle precedenti, riguardano soltanto le rotazioni⁶ nello spazio euclideo tridimensionale E_3 . Si consideri nella somma diretta di spazi vettoriali $\mathbb{R} \oplus E_3$ l'applicazione binaria interna (prodotto) definita da

$$(3.10) \quad (a, \mathbf{u})(b, \mathbf{v}) = (ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, a\mathbf{v} + b\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

e il prodotto scalare definito da

$$(3.11) \quad (a, \mathbf{u}) \cdot (b, \mathbf{v}) = ab + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

L'elemento inverso è definito da

$$(3.12) \quad (a, \mathbf{u})^{-1} = \frac{(a, -\mathbf{u})}{\|(a, \mathbf{u})\|}$$

dove si è posto

$$\|(a, \mathbf{u})\| = (a, \mathbf{u}) \cdot (a, \mathbf{u}) = a^2 + \mathbf{u}^2.$$

Quindi tutti gli elementi sono invertibili, fuorché quello nullo $(0, \mathbf{0})$, e si ottiene un'algebra associativa, non commutativa, con unità $(1, \mathbf{0})$. Si pone per comodità $(a, \mathbf{0}) = a$ e $(0, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Il prodotto scalare è conservato dal prodotto interno, nel senso che

$$(3.13) \quad \|(a, \mathbf{u})(b, \mathbf{v})\| = \|(a, \mathbf{u})\| \|(b, \mathbf{v})\|.$$

Da questa proprietà segue per esempio che gli elementi unitari, cioè quelli per cui $\|(a, \mathbf{u})\| = 1$, formano un sottogruppo del gruppo degli elementi non nulli.

Un modo conveniente per rappresentare quest'algebra, e quindi riconoscerne facilmente le proprietà fondamentali, consiste nella scelta di una base canonica $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dello spazio

⁵ Arthur Cayley, 1821-1895.

⁶ Cioè quelle a determinante uguale a 1.

vettoriale e nella rappresentazione di un generico elemento $(a, \mathbf{u} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})$ nella somma formale

$$(3.14) \quad a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

detta **quaternione**. Il prodotto di due quaternioni, in conformità alla definizione (3.10), è l'estensione lineare dei seguenti prodotti fondamentali:

$$(3.15) \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Definita quest'algebra, ad ogni suo elemento non nullo (a, \mathbf{u}) si associa un'applicazione $\mathbf{R} : E_3 \rightarrow E_3$ definita da

$$(3.16) \quad \mathbf{R}(\mathbf{v}) = (a, \mathbf{u}) \mathbf{v} (a, \mathbf{u})^{-1}.$$

è un utile esercizio dimostrare che: (i) il secondo membro definisce effettivamente un vettore; (ii) l'applicazione così definita è un endomorfismo ortogonale, anzi una rotazione; (iii) l'applicazione

$$f : (\mathbb{R} \times E_3) \setminus \{0\} \rightarrow SO(3)$$

definita dalla (3.16) è un omomorfismo di gruppi.

In particolare possiamo restringere quest'applicazione agli elementi unitari di $\mathbb{R} \times E_3$. Osserviamo allora che, scegliendo una base canonica nello spazio euclideo, questi elementi sono caratterizzati dall'equazione (si veda la (3.14))

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1,$$

e quindi descrivono tutta la sfera unitaria $\mathbb{S}_3 \subset \mathbb{R}^4$. Risulta pertanto che: (i) la sfera \mathbb{S}_3 ha una struttura di gruppo; (ii) esiste un omomorfismo di gruppi

$$\varphi : \mathbb{S}_3 \rightarrow SO(3)$$

che costituisce un *ricoprimento universale* del gruppo delle rotazioni dello spazio euclideo tridimensionale (questo termine è proprio della teoria dei *gruppi di Lie*, argomento di corsi superiori). Si osservi che ogni elemento di $SO(3)$ ha come controimmagine due punti opposti di \mathbb{S}_3 .

3.1.5 Rappresentazione versore-angolo

Gli autovalori, complessi o reali, di un endomorfismo ortogonale in uno spazio strettamente euclideo sono unitari: $|\lambda| = 1$. Infatti, dall'equazione $\mathbf{R}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ segue, applicando la coniugazione, l'equazione $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{v}}$. Moltiplicando scalarmente membro a membro queste due uguaglianze si ottiene $\mathbf{R}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}(\bar{\mathbf{v}}) = \lambda \bar{\lambda} \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}$. Poiché \mathbf{R} è ortogonale si ha anche $\mathbf{R}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}}$. Di qui segue $\lambda \bar{\lambda} = 1$, come asserto.

Nel caso tridimensionale gli autovalori sono radici di un polinomio di terzo grado a coefficienti reali. Quindi almeno uno di essi è reale, gli altri due complessi coniugati o reali.

Imponendo la condizione che il prodotto di tutti e tre gli autovalori sia uguale a $1 = \det \mathbf{R}$ si trova che l'unico spettro possibile di una rotazione è del tipo

$$(3.17) \quad (1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}).$$

Ciò premesso, se escludiamo il caso $\mathbf{R} = \mathbf{1}$, il cui spettro è $(1, 1, 1)$, l'unico autovalore reale 1 determina in maniera unica un sottospazio unidimensionale di autovettori che chiamiamo **asse della rotazione**. La rotazione \mathbf{R} è allora univocamente rappresentata da una coppia **versore-angolo** (\mathbf{a}, θ) dove \mathbf{a} determina l'asse di rotazione e θ l'**angolo di rotazione**. Si osservi che le coppie (\mathbf{a}, θ) e $(-\mathbf{a}, -\theta)$ danno luogo alla stessa rotazione.

TEOREMA 3.1.2 – La rotazione $\mathbf{R}_{(\mathbf{a}, \theta)}$ opera su ogni vettore \mathbf{v} secondo la formula⁷

$$(3.18) \quad \mathbf{R}_{(\mathbf{a}, \theta)}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{a} \times \mathbf{v} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \mathbf{a} - \mathbf{v})$$

DIMOSTRAZIONE. Anziché darle una dimostrazione diretta, verifichiamone la validità. Innanzitutto osserviamo che è lineare in \mathbf{v} . Per $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ fornisce

$$\mathbf{R}_{(\mathbf{a}, \theta)}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \sin \theta \mathbf{a} \times \mathbf{a} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a} - \mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

Dunque il versore \mathbf{a} è autovettore (con autovalore 1). Per \mathbf{v} ortogonale ad \mathbf{a} fornisce

$$\mathbf{R}_{(\mathbf{a}, \theta)}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{a} \times \mathbf{v} - (1 - \cos \theta) \mathbf{v} = \sin \theta \mathbf{a} \times \mathbf{v} + \cos \theta \mathbf{v}.$$

Questo risultato mostra che $\mathbf{R}_{(\mathbf{a}, \theta)}(\mathbf{v})$ giace sul piano ortogonale ad \mathbf{a} – perché entrambi i vettori $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$ e \mathbf{v} sono tali. Siccome $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$ è ortogonale a \mathbf{v} , concludiamo che $\mathbf{R}_{(\mathbf{a}, \theta)}(\mathbf{v})$ è il vettore \mathbf{v} ruotato di un angolo θ intorno ad \mathbf{a} . La formula è valida. \square

La formula (3.18) fornisce la rotazione $\mathbf{R}_{(\mathbf{a}, \theta)}$ a partire dalla coppia (\mathbf{a}, θ) . Vediamo ora come si può, inversamente, determinare la coppia (\mathbf{a}, θ) a partire da un'assegnata rotazione \mathbf{R} .

3.1.6 Angoli di Euler

Una rappresentazione classica delle rotazioni nello spazio vettoriale euclideo tridimensionale, dovuta a Euler⁸ e che ha notevoli applicazioni nella dinamica del corpo rigido e in astronomia, è basata sulla relazione fra una base canonica $(\mathbf{c}_\alpha) = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, detta **terna fissa**, e i vettori $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{R}(\mathbf{c}_\alpha)$ formanti la **terna ruotata**. Gli angoli di Euler sono in genere denotati con

$$\psi, \theta, \phi,$$

⁷ Detta **formula di Rodrigues**.

⁸ Leonhard Euler, 1707-1783.

e sono detti rispettivamente **angolo di precessione**, **angolo di nutazione**, **angolo di rotazione propria**. Essi sono illustrati in Figura 3.1 dove la terna e_α è il risultato dell'azione di una rotazione R su di una terna fissa c_α .⁹

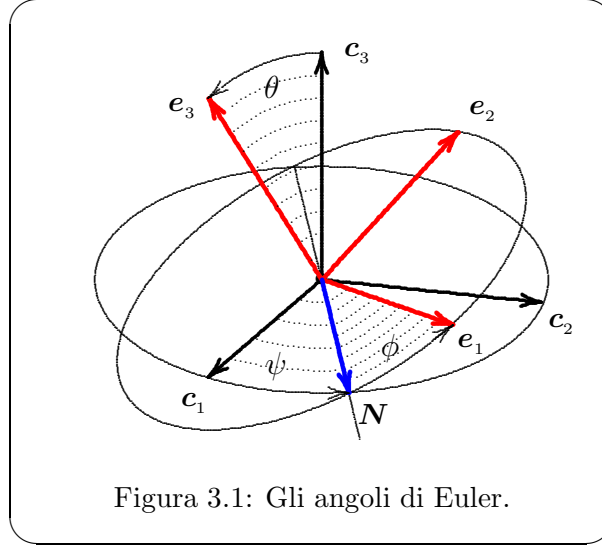


Figura 3.1: Gli angoli di Euler.

La rotazione R risulta essere la composizione, nell'ordine, di tre rotazioni, A , B e C che, posto

$$a_\alpha = A(c_\alpha), \quad b_\alpha = B(a_\alpha), \quad e_\alpha = C(b_\alpha),$$

sono definite, nella rappresentazione versore-angolo, come segue.

$$A = (c_3, \psi) : \begin{cases} c_1 \mapsto a_1 = N, \\ c_2 \mapsto a_2, \\ a_3 = c_3 \text{ fisso.} \end{cases}$$

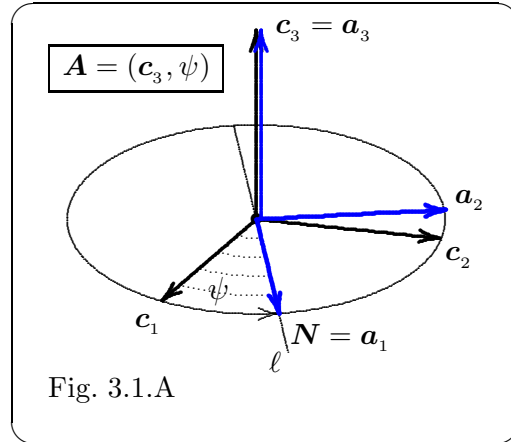


Fig. 3.1.A

⁹ Questa definizione ha senso per e_3 distinto da c_3 , cioè per $\theta > 0$. Ai tre angoli sono imposte di conseguenza le limitazioni

$$(3.19) \quad \begin{cases} 0 < \theta < \pi, \\ 0 \leq \phi < 2\pi, \\ 0 \leq \psi < 2\pi, \end{cases}$$

Questa è una rotazione di angolo ψ intorno al versore c_3 , che porta c_1 in un versore N che individua una retta ℓ detta **linea dei nodi**.

$$B = (N, \theta) : \begin{cases} b_1 = a_1 = N \text{ fisso,} \\ a_2 \mapsto b_2, \\ a_3 = c_3 \mapsto b_3 = e_3. \end{cases}$$

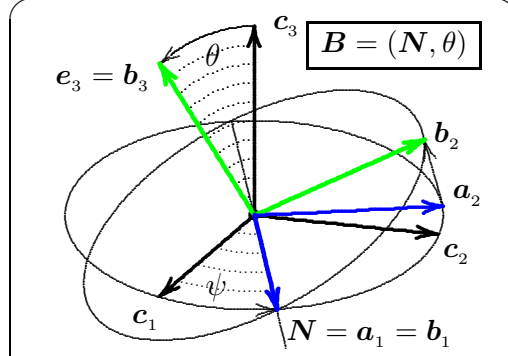


Fig. 3.1.B

Questa è una rotazione di angolo θ intorno al versore N , che porta c_3 nel versore finale e_3 e definisce un piano ruotato individuato dai versori N e $b_2 = B(a_2) = B A(c_2)$.

$$C = (e_3, \phi) : \begin{cases} b_1 \mapsto e_1, \\ b_2 \mapsto e_2, \\ b_3 \mapsto e_3 = b_3 \text{ fisso.} \end{cases}$$

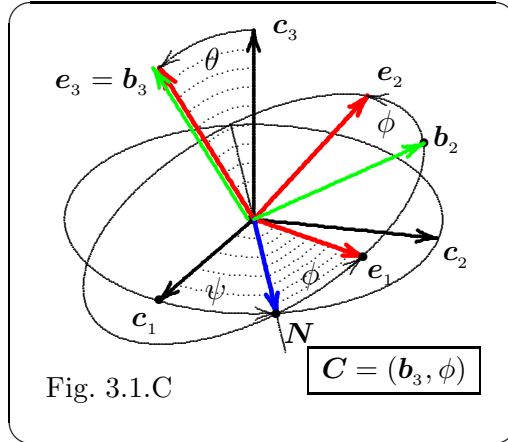


Fig. 3.1.C

Questa è una rotazione di angolo ϕ intorno al versore e_3 , che porta i vettori $b_1 = N$ e b_2 alla configurazione finale (e_1, e_2) .

Dalla Figura 3.1.C deduciamo immediatamente alcune uguaglianze che ci saranno utili nel seguito:

$$(3.20) \quad \begin{cases} N \cdot e_1 = \cos \phi, \\ N \cdot e_2 = \cos(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\sin \phi, \\ N \cdot e_3 = 0, \end{cases} \quad \boxed{N = \cos \phi e_1 - \sin \phi e_2}$$

$$(3.21) \quad \begin{cases} N \cdot c_1 = \cos \psi, \\ N \cdot c_2 = \sin \psi, \\ N \cdot c_3 = 0, \end{cases} \quad \boxed{N = \cos \psi c_1 + \sin \psi c_2}$$

Definiti gli angoli di Euler, è importante esplicitare tramite essi il legame che intercorre tra la terna \mathbf{c}_α e la terna ruotata \mathbf{e}_α .

TEOREMA 3.1.3 – *I vettori della terna ruotata $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{R}(\mathbf{c}_\alpha)$ sono espressi in funzione della terna fissa \mathbf{c}_α e degli angoli di Euler dalle formule:*

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi) \mathbf{c}_1 \\ \quad + (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi) \mathbf{c}_2 \\ \quad + \sin \phi \sin \theta \mathbf{c}_3, \\ \mathbf{e}_2 = -(\cos \phi \cos \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi) \mathbf{c}_1 \\ \quad + (\cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi) \mathbf{c}_2 \\ \quad + \cos \phi \sin \theta \mathbf{c}_3, \\ \mathbf{e}_3 = \sin \theta (\sin \psi \mathbf{c}_1 - \cos \psi \mathbf{c}_2) + \cos \theta \mathbf{c}_3. \end{array} \right.$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo le formule di Rodrigues (3.18) per queste tre rotazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \sin \psi \mathbf{c}_3 \times \mathbf{v} + (1 - \cos \psi)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{v} \mathbf{c}_3 - \mathbf{v}), \\ \mathbf{B}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{N} \times \mathbf{v} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \mathbf{N} - \mathbf{v}), \\ \mathbf{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \sin \phi \mathbf{b}_3 \times \mathbf{v} + (1 - \cos \phi)(\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{v} \mathbf{b}_3 - \mathbf{v}). \end{array} \right.$$

Utilizziamole come segue.¹⁰

$$1. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{c}_1 + \sin \psi \mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_1 + (1 - \cos \psi)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_1), \\ \mathbf{A}(\mathbf{c}_2) = \mathbf{c}_2 + \sin \psi \mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_2 + (1 - \cos \psi)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_2), \\ \mathbf{A}(\mathbf{c}_3) = \mathbf{c}_3 + \sin \psi \mathbf{c}_3 \times \mathbf{c}_3 + (1 - \cos \psi)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_3). \end{array} \right.$$

Avendo posto $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{A}(\mathbf{c}_\alpha)$, risulta:

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = \mathbf{N} = \cos \psi \mathbf{c}_1 + \sin \psi \mathbf{c}_2, \\ \mathbf{a}_2 = \cos \psi \mathbf{c}_2 - \sin \psi \mathbf{c}_1, \\ \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_3. \end{array} \right.$$

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_1 + \sin \theta \mathbf{N} \times \mathbf{a}_1 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_1 \mathbf{N} - \mathbf{a}_1), \\ \mathbf{B}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_2 + \sin \theta \mathbf{N} \times \mathbf{a}_2 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_2 \mathbf{N} - \mathbf{a}_2), \\ \mathbf{B}(\mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_3 + \sin \theta \mathbf{N} \times \mathbf{a}_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_3 \mathbf{N} - \mathbf{a}_3). \end{array} \right.$$

¹⁰ In questi calcoli si tenga presente che le terne ortonormali \mathbf{c}_α , \mathbf{a}_α , \mathbf{b}_α e \mathbf{e}_α sono tutte equiorientate. Di conseguenza, per quel che riguarda i prodotti vettoriali, valgono le uguaglianze del tipo $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Avendo posto $\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{B}(\mathbf{a}_\alpha)$, ed essendo $\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_3$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{c}_3 = 0$, $\mathbf{N} = \mathbf{a}_1$, risulta:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{b}_2 = \cos \theta \mathbf{a}_2 + \sin \theta \mathbf{c}_3, \\ \mathbf{b}_3 = \cos \theta \mathbf{c}_3 + \sin \theta \mathbf{a}_1 \times \mathbf{c}_3. \end{cases}$$

Tenendo conto del punto 1:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \cos \psi \mathbf{c}_1 + \sin \psi \mathbf{c}_2, \\ \mathbf{b}_2 = \cos \theta (\cos \psi \mathbf{c}_2 - \sin \psi \mathbf{c}_1) + \sin \theta \mathbf{c}_3, \\ \mathbf{b}_3 = \cos \theta \mathbf{c}_3 + \sin \theta (\sin \psi \mathbf{c}_1 - \cos \psi \mathbf{c}_2). \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \mathbf{C}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + \sin \phi \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1 + (1 - \cos \phi)(\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_1) = \cos \phi \mathbf{b}_1 + \sin \phi \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{C}(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_2 + \sin \phi \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_2 + (1 - \cos \phi)(\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) = \cos \phi \mathbf{b}_2 - \sin \phi \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{C}(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_3 + \sin \phi \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_3 + (1 - \cos \phi)(\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_3. \end{cases}$$

Essendo $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{C}(\mathbf{b}_\alpha)$,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos \phi \mathbf{b}_1 + \sin \phi \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{e}_2 = \cos \phi \mathbf{b}_2 - \sin \phi \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{b}_3. \end{cases}$$

Tenendo conto del punto 2,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos \phi (\cos \psi \mathbf{c}_1 + \sin \psi \mathbf{c}_2) + \sin \phi [\cos \theta (\cos \psi \mathbf{c}_2 - \sin \psi \mathbf{c}_1) + \sin \theta \mathbf{c}_3], \\ \mathbf{e}_2 = \cos \phi [\cos \theta (\cos \psi \mathbf{c}_2 - \sin \psi \mathbf{c}_1) + \sin \theta \mathbf{c}_3] - \sin \phi (\cos \psi \mathbf{c}_1 + \sin \psi \mathbf{c}_2), \\ \mathbf{e}_3 = \cos \theta \mathbf{c}_3 + \sin \theta (\sin \psi \mathbf{c}_1 - \cos \psi \mathbf{c}_2), \end{cases}$$

Di qui seguono le (3.22). \square

Dalle (3.22) si ricava la matrice delle componenti della rotazione \mathbf{R} rispetto alla base (\mathbf{c}_α) :

(3.24)

$$\begin{aligned} [R_\alpha^\beta] &= \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta & \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \cos \theta & \cos \phi \cos \psi \cos \theta - \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Moti di un corpo rigido

Facendo seguito a quanto si è detto nell'introduzione al capitolo, basiamo la nostra analisi dei moti rigidi sul fatto che un moto rigido è caratterizzato da tre elementi:

1. Una **terna di riferimento** o **terna fissa** di vettori unitari $(\mathbf{c}_\alpha) = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ tra loro ortogonali, scelti a piacere e pensati applicati in un punto fisso O .
2. Il moto di un punto $P_0(t)$.
3. Il moto di una **terna solidale** o **terna mobile** di vettori unitari tra loro ortogonali $(\mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ pensati applicati nel punto $P_0(t)$ – vedi Figura 3.2 – la cui dipendenza dal tempo t è descritta da un'equazione del tipo

(3.25)

$$\mathbf{e}_\alpha(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{c}_\alpha)$$

dove \mathbf{R}_t è una rotazione dipendente dal tempo.

È chiaro che, essendo ogni \mathbf{R}_t un endomorfismo ortogonale, la terna solidale è sempre composta da vettori unitari e ortogonali. Di più, essendo \mathbf{R}_t una rotazione, quindi con determinante uguale a 1, la terna di riferimento e quella solidale sono sempre equiorientate.

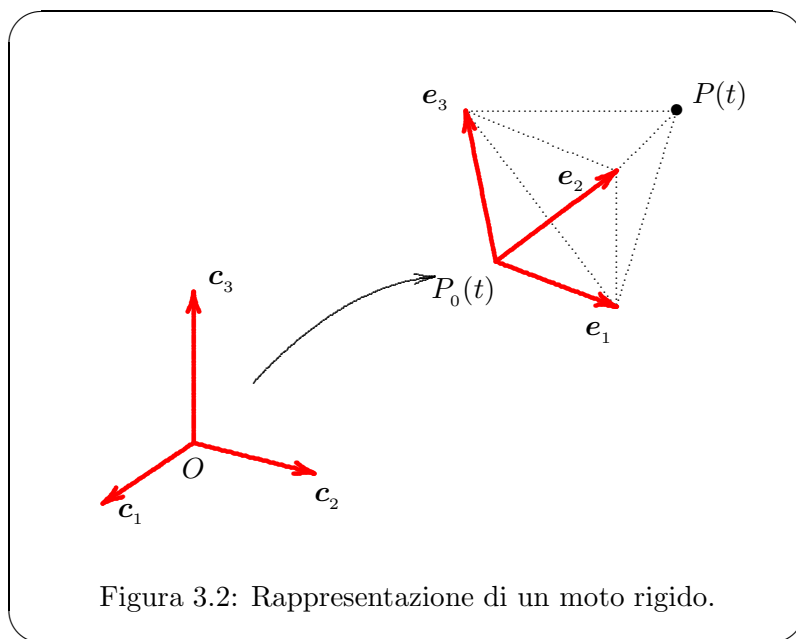


Figura 3.2: Rappresentazione di un moto rigido.

Premettiamo allora alcune considerazioni sugli *endomorfismi di uno spazio vettoriale E dipendenti da un parametro $t \in I \subseteq \mathbb{R}$* . La derivata di un tale endomorfismo \mathbf{R}_t è l'endomorfismo $\dot{\mathbf{R}}_t$ definito da

$$(3.26) \quad \dot{\mathbf{R}}_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{R}_{t+h} - \mathbf{R}_t).$$

Quest'operazione di derivazione è lineare e per la derivata della composizione di due endomorfismi vale la regola di Leibniz (la dimostrazione della regola di Leibniz è formalmente analoga a quella relativa al prodotto di funzioni). Applicandola per esempio, nel caso in

cui \mathbf{R}_t sia invertibile, al prodotto $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{1}$ si ottiene l'uguaglianza¹¹

$$(3.27) \quad \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R}(\mathbf{R}^{-1})^\cdot.$$

Per gli endomorfismi in uno spazio euclideo la trasposizione commuta con la derivazione, vale cioè l'uguaglianza

$$(3.28) \quad (\mathbf{R}^\top)^\cdot = \dot{\mathbf{R}}^\top.$$

Venendo al caso delle rotazioni, caratterizzate dalla condizione

$$(3.29) \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top,$$

se si applica \mathbf{R}_t ad un qualunque prefissato vettore \mathbf{e}_0 , si ottiene un vettore dipendente dal parametro t , $\mathbf{e}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{e}_0)$. La derivata rispetto a t di questo vettore è data da

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{e}_0),$$

quindi, essendo $\mathbf{e}_0 = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{e})$, da

$$(3.30) \quad \boxed{\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{e})}$$

posto

$$(3.31) \quad \boxed{\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}}$$

Si perviene così a determinare un endomorfismo $\boldsymbol{\Omega}_t$, dipendente dal tempo, che fornisce la derivata rispetto al tempo di un qualunque vettore solidale al corpo rigido in movimento – formula (3.30).

Il fatto notevole è che questo endomorfismo $\boldsymbol{\Omega}_t$ è antisimmetrico. Se lo si interpreta come forma bilineare¹² si ha infatti, tenuto conto della (3.30),

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0,$$

perchè \mathbf{u} ha modulo costante. Nel caso di uno spazio vettoriale tridimensionale (le precedenti considerazioni valgono per uno spazio di dimensione e di segnatura qualsiasi) al tensore antisimmetrico $\boldsymbol{\Omega}_t$ corrisponde per aggiunta¹³ il vettore

$$(3.32) \quad \boxed{\boldsymbol{\omega} = * \boldsymbol{\Omega}}$$

¹¹ Omettiamo per semplicità il suffisso t quando non indispensabile.

¹² Ad ogni endomorfismo lineare $\boldsymbol{\Omega}$ su di uno spazio vettoriale E dotato di un tensore metrico (di segnatura qualunque) corrisponde una forma bilineare denotata ancora con $\boldsymbol{\Omega}$ e definita dall'uguaglianza

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$$

Questa corrispondenza è biunivoca. La simmetria (o l'antisimmetria) di $\boldsymbol{\Omega}$ come forma bilineare corrisponde alla simmetria (o antisimmetria) di $\boldsymbol{\Omega}$ come endomorfismo. L'antisimmetria di una forma bilineare $\boldsymbol{\Omega}$, che si esprime nell'uguaglianza $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, è anche caratterizzata dalla condizione $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ per ogni vettore $\mathbf{u} \in E$. È proprio su quest'ultima proprietà che basiamo il nostro attuale ragionamento.

¹³ Vedi Nota 3.2.1 a fine paragrafo.

detto **vettore velocità angolare**, per cui la (3.30) diventa

$$(3.33) \quad \dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

Il vettore velocità angolare è di fondamentale importanza nell'analisi dei moti rigidi.

Al vettore velocità angolare si può giungere in altro modo. Data una terna solidale $(\mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, poniamo per definizione

$$(3.34) \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \mathbf{e}_\alpha \times \dot{\mathbf{u}}_\alpha$$

Si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\beta &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 (\mathbf{e}_\alpha \times \dot{\mathbf{u}}_\alpha) \times \mathbf{e}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 (\delta_{\alpha\beta} \dot{\mathbf{u}}_\alpha - \dot{\mathbf{u}}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{u}}_\beta + \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\mathbf{u}}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha \right) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_\beta + \dot{\mathbf{u}}_\beta) = \dot{\mathbf{u}}_\beta, \end{aligned}$$

osservato che dalla condizione di ortonormalità segue $\dot{\mathbf{u}}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta \cdot \dot{\mathbf{u}}_\alpha = (\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha)' = 0$, quindi $\dot{\mathbf{u}}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_\beta \cdot \dot{\mathbf{u}}_\alpha$, e che inoltre, essendo (\mathbf{e}_α) una terna ortonormale, per qualunque vettore \mathbf{v} vale l'uguaglianza

$$\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

Pertanto, definito $\boldsymbol{\omega}$ con la (3.34), risulta

$$(3.35) \quad \dot{\mathbf{u}}_\beta = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\beta \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

a conferma della (3.33). Le formule (3.35), di notevole importanza e valide per qualunque terna solidale, sono chiamate **formule di Poisson**.¹⁴

NOTA 3.2.1 – Ad ogni forma bilineare antisimmetrica $\boldsymbol{\Omega}$ corrisponde (in maniera biunivoca) un **vettore aggiunto** $\boldsymbol{\omega} = *\boldsymbol{\Omega}$ definito dall'uguaglianza

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}).$$

L'operazione, denotata con $*$, che fa passare da forme bilineari simmetriche a vettori e viceversa è chiamata **aggiunzione**. In una base canonica (\mathbf{c}_α) , se (ω^α) sono le componenti di un vettore $\boldsymbol{\omega}$ allora la matrice delle componenti $\Omega_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{c}_\beta)$ della forma bilineare antisimmetrica aggiunta $\boldsymbol{\Omega} = *\boldsymbol{\omega}$ è (il primo indice α è indice di riga):

$$[\Omega_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sull'utilizzo dell'aggiunzione si ritornerà al §5.10. •

¹⁴ Siméon Denis Poisson, 1781-1840.

3.3 Formule fondamentali della cinematica del corpo rigido

Nel paragrafo precedente sono contenuti tutti gli elementi necessari per enunciare e dimostrare i seguenti due teoremi fondamentali della cinematica del corpo rigido.

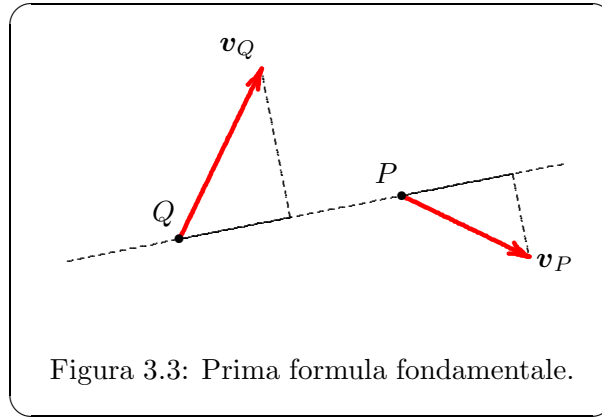
TEOREMA 3.3.1 – *In un moto rigido le velocità \mathbf{v}_P e \mathbf{v}_Q di due qualsiasi punti P e Q solidali sono tali che ad ogni istante*

$$(3.36) \quad \boxed{\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{QP} = \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{QP}}$$

DIMOSTRAZIONE. Per due punti mobili vale l'uguaglianza

$$(\mathbf{QP})' = (\mathbf{P} - \mathbf{Q})' = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q.$$

Se si deriva rispetto al tempo la condizione di rigidità $\mathbf{QP} \cdot \mathbf{QP} = \text{cost.}$ si trova la (3.36). \square



La (3.36) prende il nome di **prima formula fondamentale** della cinematica del corpo rigido. Essa mostra che le proiezioni delle velocità di due punti solidali sulla loro congiungente sono uguali – Figura 3.3.

TEOREMA 3.3.2 – *In un moto rigido ad ogni istante t esiste ed è unico un vettore $\boldsymbol{\omega}(t)$, detto **velocità angolare**, tale che qualunque siano i punti P e Q solidali al corpo le loro velocità \mathbf{v}_P e \mathbf{v}_Q in quell'istante sono legate dalla relazione*

$$(3.37) \quad \boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{QP}}$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ è un vettore solidale, per esso vale la formula (3.33), per cui

$$(\mathbf{P} - \mathbf{Q})' = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{QP}.$$

Di qui la (3.37). Il fatto che ω sia unico è ovvia conseguenza della stessa (3.37): se essa sussistesse per un altro vettore ω' , sottraendo membro a membro le due equazioni si otterrebbe $(\omega - \omega') \times QP = 0$ per qualunque coppia di punti solidali; quindi necessariamente $\omega - \omega' = 0$. \square

La (3.37) prende il nome di **seconda formula fondamentale** della cinematica del corpo rigido. Si noti che, moltiplicata scalarmente per QP , la seconda formula fondamentale implica la prima. La seconda formula fondamentale consente di calcolare, in ogni prefissato istante t , la velocità di un qualunque punto solidale P nota la velocità angolare e la velocità di un solo punto solidale Q in quell'istante. Essa consente quindi di descrivere l'**atto di moto rigido** cioè il campo vettoriale delle velocità dei punti solidali $v: P \rightarrow v_P$ in un istante t fissato.

Una completa percezione dell'atto di moto rigido si ha tuttavia attraverso il seguente fondamentale **teorema di Mozzi**:¹⁵

TEOREMA 3.3.3 – *In ogni istante t in cui $\omega \neq 0$ esiste ed è unica una retta a i cui punti hanno velocità parallela a ω . La retta a , detta **asse di Mozzi**, è parallela a ω .*

DIMOSTRAZIONE. I punti A dell'insieme a cercato sono caratterizzati dall'equazione

$$v_A \times \omega = 0.$$

Per la seconda formula fondamentale $v_A = v_O + \omega \times OA$. Da questa si trae l'equazione

$$(3.38) \quad v_O \times \omega + (\omega \times OA) \times \omega = 0$$

nel vettore OA , dove il punto O ed i vettori ω e v_O sono assegnati. Se quest'equazione è soddisfatta da un punto A essa è soddisfatta anche per tutti i punti $A' = A + k\omega$ che stanno sulla retta per A parallela ad ω :

$$v_O \times \omega + (\omega \times OA') \times \omega = v_O \times \omega + (\omega \times OA) \times \omega = 0.$$

Dunque il luogo cercato è costituito da rette parallele a ω . Per dimostrare che esso si riduce ad una sola retta, si consideri il piano per O contenente A e perpendicolare a ω . Qui sopra l'equazione (3.38), sviluppato il doppio prodotto vettoriale ed essendo $OA \cdot \omega = 0$, si riduce a

$$\omega \times v_O - |\omega|^2 OA = 0.$$

Quest'equazione definisce un solo punto A , intersezione del luogo cercato col piano. \square

Riscriviamo la formula fondamentale prendendo come punto di riferimento un punto A dell'asse di Mozzi:

$$(3.39) \quad v_P = v_A + \omega \times AP.$$

Si osserva allora che la velocità v_P di un generico punto P è somma di un vettore v_A parallelo ad ω , cioè all'asse di Mozzi, e di un vettore $\omega \times AP$ ortogonale ad ω il cui

¹⁵ Giulio Mozzi, 1730-1813.

modulo cresce in maniera proporzionale alla distanza del punto P dall'asse di Mozzi. La figura 3.4 rappresenta il variare di \mathbf{v}_P al variare di P su di una semiretta ortogonale all'asse di Mozzi a . Per rappresentare l'andamento del campo \mathbf{v} in tutto lo spazio occorre ruotare tale figura intorno all'asse di Mozzi e traslarla lungo questo.

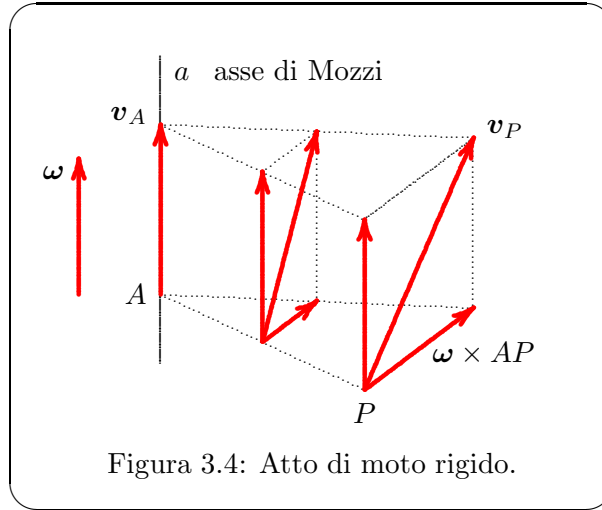


Figura 3.4: Atto di moto rigido.

Si noti che le velocità dei punti di una retta parallela a ω , quindi all'asse di Mozzi, sono fra loro uguali. Si osserva infine direttamente dalla figura che sull'asse di Mozzi le velocità sono minime in modulo. L'asse di Mozzi è dunque caratterizzato dalla seguente proprietà, che potrebbe essere assunta come sua definizione:

TEOREMA 3.3.4 – *In un atto di moto rigido con $\omega \neq 0$ l'asse di Mozzi è il luogo dei punti a velocità minima.*

NOTA 3.3.1 – Atti di moto particolari. Le considerazioni precedenti mostrano che il generico **atto di moto** è **elicoidale** (le curve integrali del campo \mathbf{v} sono delle eliche). Se $\omega = 0$ dalla (3.37) si vede che tutti i punti hanno istante per istante la stessa velocità. Si è in presenza di un **atto di moto traslatorio**. Se la velocità dei punti dell'asse di Mozzi è nulla si dice che l'**atto di moto** è **rotatorio**. •

NOTA 3.3.2 – Distribuzione delle accelerazioni. Derivando la (3.37) rispetto al tempo si trova la formula seguente, che fornisce l'accelerazione istantanea \mathbf{a}_P di un qualunque punto solidale P , nota l'accelerazione \mathbf{a}_Q di un punto prefissato Q , la velocità angolare ω e la sua derivata $\dot{\omega}$:

(3.40)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &= \mathbf{a}_Q + \dot{\omega} \times QP + \omega \times (\omega \times QP) \\ &= \mathbf{a}_Q + \dot{\omega} \times QP + \omega \cdot QP \omega - |\omega|^2 QP. \end{aligned} \quad \bullet$$

3.4 Cambiamenti di riferimento

I concetti di moto, di velocità, di accelerazione sono **concetti relativi**: la loro definizione presuppone la scelta di un riferimento. Come si è già detto, scegliere un riferimento significa assumere come modello dello spazio fisico, nell'ambito delle teorie classiche, lo spazio affine tridimensionale euclideo. I punti di questo spazio affine si identificano con delle particelle ideali costituenti un corpo rigido invadente tutto l'universo. A ciascuna di queste particelle, con mutue distanze costanti, attribuiamo un "nome convenzionale", ricorrendo a sistemi di coordinate. Possiamo quindi descrivere il moto di un punto esprimendo in funzione del tempo le coordinate dei punti del riferimento via via occupati dal punto mobile.

Sia \mathcal{R}_0 un riferimento cartesiano nello spazio affine euclideo tridimensionale, costituito da un punto O_0 e da una terna di vettori ortonormali (\mathbf{c}_α^0), pensati applicati nel punto O_0 .

Consideriamo un corpo rigido \mathcal{R}_1 in moto rispetto a \mathcal{R}_0 e rappresentato da un tetraedro (O_1, \mathbf{c}_α^1).¹⁶ Questo corpo rigido può essere considerato come un nuovo riferimento, rispetto al quale osservare i fenomeni meccanici. Chiameremo \mathcal{R}_0 **riferimento fisso** e \mathcal{R}_1 **riferimento mobile**.

Se osserviamo dai due riferimenti l'evolversi di un vettore $\mathbf{u}(t)$ dipendente dal tempo, esso ammette una doppia rappresentazione:

$$(3.41) \quad \mathbf{u} = u_0^\alpha \mathbf{c}_\alpha^0 = u_1^\alpha \mathbf{c}_\alpha^1,$$

la prima rispetto alla **terna fissa** (\mathbf{c}_α^0), la seconda rispetto alla **terna mobile** (\mathbf{c}_α^1).

Dello stesso vettore abbiamo due distinte derivate rispetto al tempo, una calcolata rispetto alla terna fissa l'altra rispetto alla terna mobile, che denotiamo con $D_t^0 \mathbf{u}$ e $D_t^1 \mathbf{u}$, definite rispettivamente da

$$(3.42) \quad D_t^0 \mathbf{u} = \dot{u}_0^\alpha \mathbf{c}_\alpha^0, \quad D_t^1 \mathbf{u} = \dot{u}_1^\alpha \mathbf{c}_\alpha^1,$$

dove le \dot{u}^α – risp. \dot{u}_1^α – sono le derivate delle funzioni $u_0^\alpha(t)$ – risp. $u_1^\alpha(t)$ – rispetto alla variabile t .

La seconda uguaglianza (3.42) è giustificata dal fatto che, rispetto ad un osservatore posto in \mathcal{R}_1 i vettori \mathbf{c}_α^1 sono costanti.

TEOREMA 3.4.1 – Tra le due derivate $D_t^0 \mathbf{u}$ e $D_t^1 \mathbf{u}$ sussiste la relazione

$$(3.43) \quad \boxed{D_t^0 \mathbf{u} = D_t^1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{u}}$$

dove $\boldsymbol{\omega}_{10}$ è la velocità angolare della terna mobile rispetto alla terna fissa.¹⁷

¹⁶ Qui cambiamo leggermente le notazioni rispetto al §3.2.

¹⁷ Cioè del riferimento \mathcal{R}_1 rispetto al riferimento \mathcal{R}_0 .

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo l'operatore di derivazione D_t^0 alla seconda rappresentazione (3.41): $D_t^0 \mathbf{u} = D_t^0(u_1^\alpha \mathbf{c}_\alpha^1)$. Essendo u_1^α e \mathbf{c}_α^1 variabili rispetto al riferimento \mathcal{R}_0 , l'operatore D_t^0 si identifica con l'ordinaria derivata rispetto alla variabile t sicché, applicando la regola di Leibnitz, possiamo scrivere

$$D_t^0 \mathbf{u} = \dot{u}_1^\alpha \mathbf{c}_\alpha^1 + u_1^\alpha \dot{\mathbf{c}}_\alpha^1.$$

Ma, per le formule di Poisson, $\dot{\mathbf{c}}_\alpha^1 = \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{c}_\alpha^1$ e quindi, richiamate la definizione (3.42)₂ e la (3.41)₂,

$$D_t \mathbf{u} = \dot{u}_1^\alpha \mathbf{c}_\alpha^1 + \boldsymbol{\omega}_{10} \times (u_1^\alpha \mathbf{c}_\alpha^1) = D_t^1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{u}. \quad \square$$

Dalla (3.43), ponendo $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_{10}$, segue che:

TEOREMA 3.4.2 – *Il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{10}$ – di \mathcal{R}_1 rispetto a \mathcal{R}_0 – ha la stessa derivata temporale rispetto ad entrambi i riferimenti:*

$$(3.44) \quad \boxed{D_t^0 \boldsymbol{\omega}_{10} = D_t^1 \boldsymbol{\omega}_{10}}$$

TEOREMA 3.4.3 – *Le derivate seconde di un vettore $\mathbf{u}(t)$ nei due riferimenti \mathcal{R}_0 e \mathcal{R}_1 sono legate dalla relazione*

$$(3.45) \quad \boxed{D_t^0{}^2 \mathbf{u} = D_t^1{}^2 \mathbf{u} + 2 \boldsymbol{\omega}_{10} \times D_t^1 \mathbf{u} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{10} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times (\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{u})}$$

dove si è posto $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10} = D_t^0 \boldsymbol{\omega}_{10} = D_t^1 \boldsymbol{\omega}_{10}$.

FIN QUI

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo la (3.43) a se stessa::

$$\begin{aligned} D_t^2 \mathbf{u} &= D_t(D_t^1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}) \\ &= D_t^1(D_t^1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (D_t^1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}) \\ &= D_t^1{}^2 \mathbf{u} + D_t \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u} + 2 \boldsymbol{\omega}_1 \times D_t^1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}). \quad \square \end{aligned}$$

3.4.1 Il teorema dei moti relativi

Si consideri il moto di un punto $P(t)$. Esso può essere osservato dal riferimento \mathcal{R} oppure dal riferimento \mathcal{R}_1 . Tra il vettore posizione $\mathbf{r} = OP$ nel riferimento \mathcal{R} e il vettore posizione $\mathbf{r}^1 = O^1P$ nel riferimento \mathcal{R}_1 sussiste la relazione

$$(3.46) \quad \boxed{\mathbf{r} = OO' + \mathbf{r}'}$$

Denotiamo con

$$\mathbf{v} = D_t \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}' = D_t' \mathbf{r}'$$

le velocità relative ai due riferimenti. Applicando l'operatore D_t alla (3.46), vista la (3.43), si ottiene l'uguaglianza

$$(3.47) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}',$$

dove

$$\mathbf{v}_{O'} = D_t(OO')$$

è la velocità del punto O' rispetto ad \mathcal{R} . In virtù della seconda formula fondamentale della cinematica del corpo rigido il vettore

$$(3.48) \quad \boxed{\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times O'P}$$

che compare a secondo membro dell'uguaglianza (3.47) è la velocità del punto P pensato, nell'istante considerato, solidale al riferimento, ovvero *la velocità del punto solidale a \mathcal{R}' che nell'istante considerato è occupato dal punto mobile $P(t)$* . A questa velocità si dà il nome di **velocità di trascinamento**. Possiamo allora enunciare il

TEOREMA 3.4.4 – Teorema dei moti relativi: *la velocità di un punto relativa ad un riferimento \mathcal{R} è la somma della velocità relativa ad un altro riferimento \mathcal{R}' e della velocità di trascinamento, cioè della velocità del punto solidale a \mathcal{R}' istantaneamente occupato dal punto mobile:*

$$(3.49) \quad \boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}}$$

3.4.2 Il teorema di Coriolis

Si consideri ora la derivata seconda dell'uguaglianza (3.46):

$$D_t^2 \mathbf{r} = D_t^2(OO') + D_t^2 \mathbf{r}'.$$

Tenuto conto della (3.45) applicata ad \mathbf{r}' si ottiene subito

$$(3.50) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'),$$

dove

$$\mathbf{a}_{O'} = D_t \mathbf{v}_{O'} = D_t^2(OO')$$

è l'accelerazione del punto O' rispetto a \mathcal{R} . Per la formula (3.40) il vettore

$$(3.51) \quad \boxed{\mathbf{a}_{tr} = \mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}$$

che compare a secondo membro della (3.50) è *l'accelerazione del punto solidale a \mathcal{R}' che nell'istante considerato è occupato dal punto mobile $P(t)$* . A questo vettore si dà il nome di **accelerazione di trascinamento**. Al vettore

$$(3.52) \quad \boxed{\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'}$$

che pure compare nella (3.50), si dà il nome di **accelerazione complementare** o **accelerazione di Coriolis**.¹⁸ Possiamo allora enunciare il seguente

TEOREMA 3.4.5 – Teorema di Coriolis: *l'accelerazione di un punto relativa ad un riferimento \mathcal{R} è la somma dell'accelerazione relativa ad un altro riferimento \mathcal{R}' , dell'accelerazione di trascinamento, cioè dell'accelerazione del punto solidale a \mathcal{R}' istantaneamente occupato dal punto mobile, e dell'accelerazione complementare:*

$$(3.53) \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}_c}$$

Si noti bene che l'accelerazione complementare \mathbf{a}_c si annulla identicamente quando è sempre nulla la velocità angolare: in tal caso, come vedremo al prossimo paragrafo, il moto di \mathcal{R}' rispetto a \mathcal{R} è *traslatorio*. Se in più è anche $\mathbf{a}_{O'} = 0$, cioè se il moto di \mathcal{R}' è *traslatorio rettilineo uniforme* (si veda il prossimo paragrafo), si annulla anche l'accelerazione di trascinamento e quindi

$$(3.54) \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$$

Le accelerazioni nei due riferimenti sono dunque rappresentate dal medesimo vettore. Il riferimento \mathcal{R}' si dice allora **equivalente** a \mathcal{R} .

3.5 Moti rigidi particolari

3.5.1 Moti traslatori

DEFINIZIONE 3.5.1 – *Un moto rigido si dice **traslatorio** se ad ogni istante la velocità angolare è nulla: $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$. •*

TEOREMA 3.5.1 – *Un moto rigido è traslatorio se e solo se ogni vettore solidale al corpo è costante nel tempo.*

DIMOSTRAZIONE. Lo si deduce dalla formula (3.43): se $D'\mathbf{u} = 0$ si ha l'equivalenza $D\mathbf{u} = 0 \iff \boldsymbol{\omega} = 0$. \square

TEOREMA 3.5.2 – *Un moto rigido è traslatorio se e solo se ad ogni istante le velocità di tutti i punti solidali coincidono (cioè se e solo se in ogni istante l'atto di moto è traslatorio).*

DIMOSTRAZIONE. Lo si deduce dalla seconda formula fondamentale: $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q, \forall P, Q$ solidali $\iff \boldsymbol{\omega} = 0$. \square

Tra i moti traslatori troviamo in particolare i **moti traslatori rettilinei**, in cui ogni punto solidale si muove di moto rettilineo, e i **moti traslatori rettilinei uniformi**, in cui ogni punto solidale si muove di moto rettilineo uniforme.

¹⁸Gustave Gaspard Coriolis, 1792-1843.

3.5.2 Moti rigidi con punto fisso

Sono quei moti in cui uno dei punti solidali O ha sempre velocità nulla: $\mathbf{v}_O = 0$. La seconda formula fondamentale diventa

$$(3.55) \quad \mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times OP.$$

Ogni punto solidale si muove su di una sfera di centro O . L'asse di Mozzi passa in ogni istante t per il punto fisso O , perché questo ha sempre velocità minima. Pertanto l'asse di Mozzi è la retta parallela a $\boldsymbol{\omega}$ passante per O . I suoi punti hanno tutti velocità istantanea nulla. L'asse di Mozzi varia in genere da istante ad istante e descrive quindi una superficie rigata, un cono \mathcal{C} di vertice O , detta **cono fisso**. Nel corpo rigido, inteso come riferimento \mathcal{R}' , esso descrive un secondo cono \mathcal{C}' , detto **cono solidale** o **cono mobile**. Questi coni prendono il nome di **coni di Poincot**.¹⁹

TEOREMA 3.5.3 – *In un moto rigido con punto fisso il cono solidale rotola senza strisciare sul cono fisso.*

Quest'enunciato, che fornisce una notevole interpretazione geometrica dei moti rigidi con punto fisso, richiede l'intervento della definizione seguente.

DEFINIZIONE 3.5.2 – *Si dice che una superficie regolare rigida \mathcal{C}' **rotola senza strisciare** su di una superficie regolare rigida fissa \mathcal{C} (si dice anche che il moto di \mathcal{C}' su \mathcal{C} è di **puro rotolamento**) se in ogni istante nei punti di contatto coincidono i piani tangenti alle due superfici e i punti solidali a \mathcal{C}' a contatto con \mathcal{C} hanno velocità nulla. •*

DIMOSTRAZIONE. In ogni istante i due coni di Poincot si toccano su una direttrice (l'asse di Mozzi in quell'istante). Consideriamo una curva non parametrizzata sul cono solidale \mathcal{C}' trasversa alle direttrici. Per ogni istante t risulta definito un punto di contatto $P(t)$ che sta sulla curva. Il punto P si muove rispetto al riferimento \mathcal{R}' solidale a \mathcal{C}' con una velocità \mathbf{v}' tangente a \mathcal{C}' e non parallela all'asse di Mozzi. Siccome il punto si muove anche sul cono fisso \mathcal{C} , la sua velocità \mathbf{v} relativa al riferimento fisso, rispetto al quale studiamo il moto del corpo rigido, è tangente a \mathcal{C} . Per il teorema dei moti relativi $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}$. Ma in questo caso la velocità di trascinamento è la velocità di un punto solidale che sta sull'asse di Mozzi, quindi nulla. Dunque $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Ma entrambi questi vettori sono tangenti ai rispettivi coni e non paralleli all'asse di Mozzi. Dunque i piani tangenti ai due coni coincidono. Inoltre, come già si è osservato, i punti solidali a \mathcal{C}' che sono a contatto con \mathcal{C} si trovano sull'asse di Mozzi e quindi hanno velocità nulla per cui le condizioni di puro rotolamento richieste dalla Definizione 3.5.2 sono soddisfatte. \square

NOTA 3.5.1 – Poniamoci il problema di determinare il moto di un corpo rigido con un punto fisso conoscendone la posizione iniziale e la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ a partire da $t = 0$. Il moto rigido è rappresentato da una rotazione $\mathbf{R}(t)$ in funzione del tempo. Dobbiamo dunque determinare tale funzione.

¹⁹ Louis Poincot, 1777-1859.

Se denotiamo con (\mathbf{c}_α) una terna fissa e con $(\mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una terna solidale (entrambe ortonormali e centrate nel punto fisso O) la posizione del corpo rigido è definita dalle equazioni

$$(3.56) \quad \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{R}(\mathbf{c}_\alpha).$$

Un primo metodo consiste nell'integrare il sistema dinamico

$$(3.57) \quad \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}$$

nell'incognita \mathbf{R} dove l'endomorfismo antisimmetrico $\boldsymbol{\Omega} = *\boldsymbol{\omega}$ è noto in funzione del tempo. L'equazione (3.57) si ricava direttamente dalla definizione (3.31) di $\boldsymbol{\Omega}$: $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1}$. Si tratta di un sistema a nove funzioni incognite, le componenti di \mathbf{R} . Si osservi che dall'equazione (3.57) segue

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}^\top \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{R}}^\top \mathbf{R} + \mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{R}^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{R} + \mathbf{R}^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{R} = 0.$$

Dunque se inizialmente \mathbf{R} è una rotazione, cioè se $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{1}$, lo è necessariamente per tutti gli istanti. Quasi sempre però il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, ottenuto per esempio integrando le equazioni di Euler, è espresso in componenti non secondo la terna fissa (\mathbf{c}_α) ma secondo la terna solidale (\mathbf{e}_α) . La questione è tuttavia immediatamente risolta perché una proprietà caratteristica delle rotazioni è proprio quella di avere uguali componenti rispetto alla terna fissa e alla terna solidale. Si ha infatti, tenuto conto della (3.56):

$$\mathbf{R}(\mathbf{c}_\alpha) \cdot \mathbf{c}_\beta = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{R}^\top(\mathbf{e}_\beta) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_\alpha) \cdot \mathbf{e}_\beta.$$

Un secondo metodo, che in sostanza è una riduzione del precedente, prende in considerazione un vettore fisso nello spazio \mathbf{c} . Vale per un tale vettore l'equazione del tipo (4.150)

$$(3.58) \quad \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \times \boldsymbol{\omega},$$

dove la derivata temporale è riferita al corpo rigido. Quest'equazione vettoriale si può intendere come sistema dinamico nell'incognita \mathbf{c} , noto il vettore $\boldsymbol{\omega}$ in funzione del tempo. Se si denotano con (α, β, γ) le componenti di \mathbf{c} secondo la terna solidale principale d'inerzia, rispetto alla quale $\boldsymbol{\omega}$ ha componenti (p, q, r) , la (3.58) si traduce nelle tre equazioni scalari

$$(3.59) \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = r\beta - q\gamma, \\ \dot{\beta} = p\gamma - r\alpha, \\ \dot{\gamma} = q\alpha - p\beta. \end{cases}$$

Un integrale primo è il modulo di \mathbf{c} , cioè la quantità $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Si può quindi scegliere \mathbf{c} unitario. Se si fanno assumere inizialmente a \mathbf{c} i tre valori (\mathbf{c}_α) della terna di riferimento

fissa, si ricostruisce la matrice \mathbf{R} .²⁰ L'integrazione di questo sistema non è in generale riconducibile alle quadrature.²¹ •

3.5.3 Moti rigidi con asse fisso

Sono quei moti con una retta solidale di punti fissi. Questa retta è evidentemente l'asse di Mozzi. Ogni punto del corpo rigido si muove di moto circolare intorno all'asse. Se questo è individuato dal versore \mathbf{k} di un tetraedro $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, allora la velocità angolare è data da

$$(3.60) \quad \boxed{\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{k}}$$

dove θ è l'angolo di rotazione, funzione del tempo, di versore \mathbf{k} . Per dimostrarlo possiamo per esempio ricorrere alla definizione (3.34), considerata una terna solidale (\mathbf{e}_α) con $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$. Per quanto si è già visto in cinematica del punto – si vedano le formule (2.39) e (2.40) – si ha $\dot{\mathbf{u}}_1 = \dot{\theta} \mathbf{e}_2$ e $\dot{\mathbf{u}}_2 = -\dot{\theta} \mathbf{e}_1$. Per cui, essendo $\dot{\mathbf{u}}_3 = 0$, risulta

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 \times \dot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{e}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_2) = \frac{1}{2} \dot{\theta} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) = \dot{\theta} \mathbf{e}_3 = \dot{\theta} \mathbf{k}.$$

3.5.4 Moti rigidi piani

Sono quei moti in cui un piano di punti solidali scorre su di un piano fisso. Un moto rigido piano è, essenzialmente, il moto di un piano rigido Π_m sopra un piano fisso Π_f . Convienne allora scegliere la terna fissa (\mathbf{c}_α) e la terna solidale (o mobile) (\mathbf{e}_α) tali che $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ giacciono sul piano fisso Π_f e che $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ giacciono su quello mobile Π_m , per cui si abbia di conseguenza $\mathbf{c}_3 = \mathbf{e}_3$. Denotiamo con \mathbf{k} questo terzo vettore unitario, costantemente ortogonale ai due piani.

Come mostra il teorema seguente, è abbastanza semplice determinare la velocità angolare di un moto piano.

TEOREMA 3.5.4 – *Sia r una qualunque retta solidale al piano mobile Π_m . Se si conosce, come funzione del tempo, l'angolo $\theta(t)$ che essa forma col vettore \mathbf{e}_1 della terna mobile, orientato in maniera tale che \mathbf{k} ne sia il versore, allora la velocità angolare istantanea è data da*

$$(3.61) \quad \boxed{\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{k}}$$

²⁰ Si noti che, fissato \mathbf{c} la conoscenza dei tre coseni direttori (α, β, γ) rispetto alla terna solidale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ determina la posizione di quest'ultima rispetto alla terna fissa soltanto a meno di una rotazione intorno a \mathbf{c} . Il vettore unitario \mathbf{c} mobile rispetto al corpo e di componenti (α, β, γ) prende il nome di **vettore di Poisson**.

²¹ Per un primo approccio a questo problema si veda p.es. T. Levi-Civita, U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale* (Zanichelli), Vol. I, Cap. IV, §7.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è formalmente simile a quella svolta per l'analoga formula (3.60). \square

Segue che la velocità angolare, quindi l'asse di Mozzi, è sempre ortogonale al piano Π .

DEFINIZIONE 3.5.3 – Il punto $C(t)$ intersezione dell'asse di Mozzi $a(t)$ con il piano fisso Π_f prende il nome di **centro d'istantanea rotazione**. Il punto $C_v(t)$ solidale a Π_m che nell'istante considerato è sovrapposto a C , e che quindi ha velocità nulla nell'istante t , prende il nome di **centro delle velocità**. Il punto $C(t)$ descrive su Π_f una curva \mathcal{P} detta **polare fissa**. Il punto $C_v(t)$ descrive su Π_m una curva \mathcal{P}' solidale a questo, detta **polare mobile**. •

In maniera del tutto analoga al caso del moto rigido con un punto fisso (nel caso presente i coni di Poinot degenerano in cilindri e le loro intersezioni coi piani danno luogo alle polari) si prova che:

TEOREMA 3.5.5 – In un moto rigido piano la polare mobile ruota senza strisciare sulla polare fissa.

Quindi, note queste due curve, il moto rigido piano è *geometricamente* determinato. Per determinarlo completamente occorre, per esempio, conoscere la legge oraria del moto di C .

Per determinare il centro d'istantanea rotazione, e quindi le due polari, si può in molti casi utilizzare il **teorema di Chasles**:²²

TEOREMA 3.5.6 – In un moto rigido piano ad ogni istante t per cui $\omega(t) \neq 0$ il centro d'istantanea rotazione è l'intersezione di due rette condotte per due punti solidali e ortogonali alle rispettive velocità.

DIMOSTRAZIONE. Siano P e Q due punti solidali al corpo. Se $\omega(t) \neq 0$ l'atto di moto è rotatorio di centro $C(t)$, quindi $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$ e $\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CQ}$ e le rette CP e CQ sono rispettivamente ortogonali a \mathbf{v}_P e \mathbf{v}_Q . Se PC è parallela a QC , l'intersezione di cui all'enunciato non esiste (*va all'infinito*). Se così fosse per tutti le coppie di punti solidali l'atto di moto sarebbe traslatorio, contro l'ipotesi $\omega(t) \neq 0$. \square

ESEMPIO 3.5.1 – Si consideri il moto di un'asta rigida di lunghezza ℓ i cui estremi A e B sono vincolati a scorrere su due assi incidenti e ortogonali, assi x e y rispettivamente. Si pensi al moto del piano solidale all'asta sul piano fisso (O, x, y) . Per determinare le polari si può applicare il teorema di Chasles. Le velocità dei due estremi sono necessariamente parallele ai rispettivi assi di scorrimento. Quindi il centro di istantanea rotazione C si trova come intersezione delle rette per A e B e ortogonali agli assi. Per un osservatore solidale col piano fisso questo punto ha sempre distanza pari a ℓ dall'origine O : la polare fissa \mathcal{P} è quindi la circonferenza di raggio ℓ e centro l'origine. Per un osservatore solidale all'asta invece, il punto C sottende sempre gli estremi A e B sotto un angolo retto; quindi la polare

²² Michel Chasles, 1793-1880.

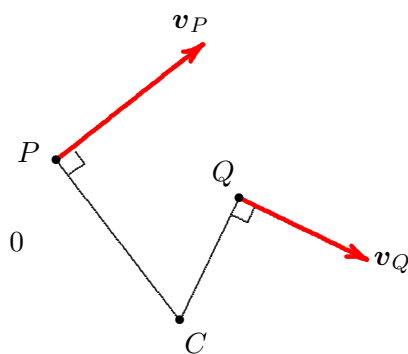


Figura 3.5: Il teorema di Chasles.

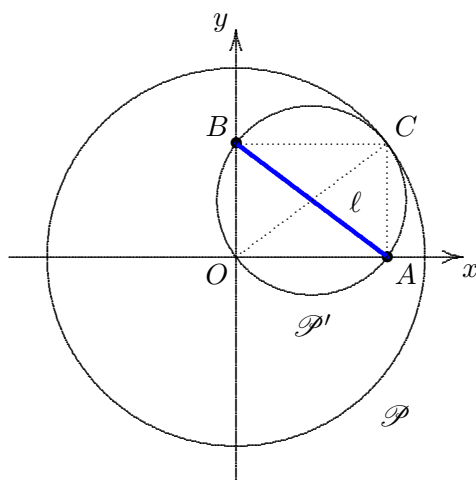
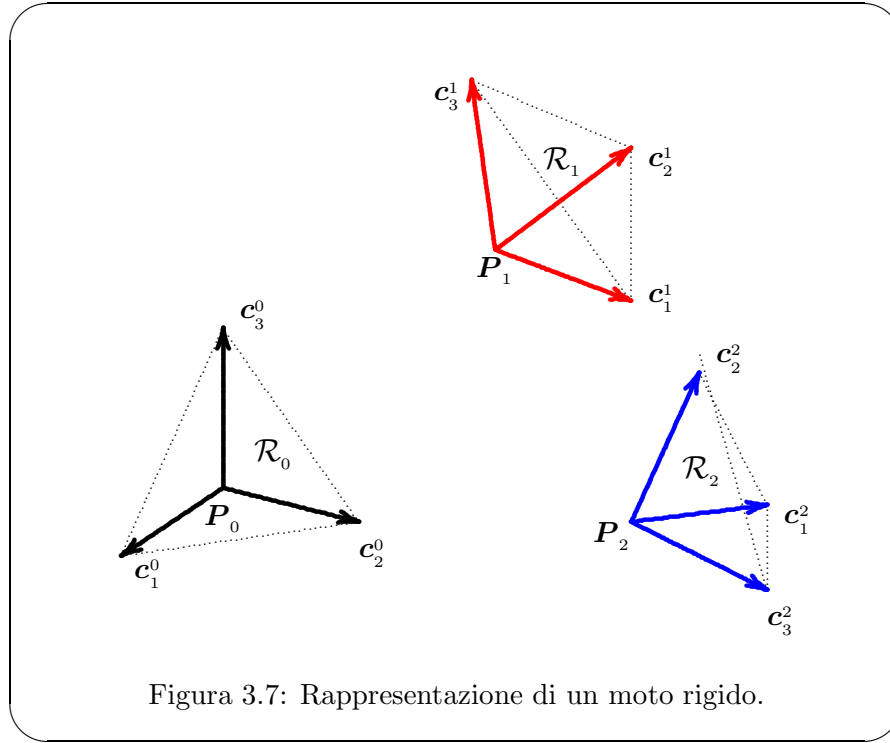


Figura 3.6: Esempio 3.5.1

mobile è la circonferenza di raggio $\frac{l}{2}$ e centro il punto medio dell'asta. Il moto dell'asta è dunque geometricamente equivalente al moto di puro rotolamento di una circonferenza di raggio $\frac{l}{2}$ all'interno di una circonferenza fissa di raggio l . •

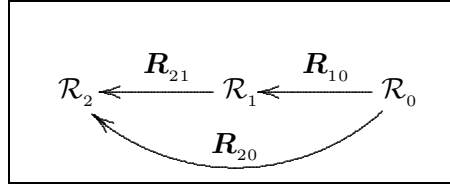
3.6 Moti rigidi composti

Consideriamo tre riferimenti \mathcal{R}_0 , \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 , ovvero tre corpi rigidi in movimento, rappresentati da tre tetraedri $(P_0, \mathbf{e}_\alpha^0)$, $(P_1, \mathbf{e}_\alpha^1)$ e $(P_2, \mathbf{e}_\alpha^2)$ (Figura 3.7).



Supponiamo, per fissare le idee, che il riferimento \mathcal{R}_0 sia immobile. Intervengono in questo schema le tre rotazioni (dipendenti dal tempo)

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{10} \text{ di } \mathcal{R}_1 \text{ rispetto a } \mathcal{R}_0, \\ \mathbf{R}_{21} \text{ di } \mathcal{R}_2 \text{ rispetto a } \mathcal{R}_1, \\ \mathbf{R}_{20} \text{ di } \mathcal{R}_2 \text{ rispetto a } \mathcal{R}_0, \end{cases}$$



e le corrispondenti velocità angolari

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{10} \text{ di } \mathcal{R}_1 \text{ rispetto a } \mathcal{R}_0, \\ \boldsymbol{\omega}_{21} \text{ di } \mathcal{R}_2 \text{ rispetto a } \mathcal{R}_1, \\ \boldsymbol{\omega}_{20} \text{ di } \mathcal{R}_2 \text{ rispetto a } \mathcal{R}_0, \end{cases}$$

Ci proponiamo di calcolare la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{20}$ in funzione delle altre due, $\boldsymbol{\omega}_{10}$ e $\boldsymbol{\omega}_{21}$.

TEOREMA 3.6.1 – *Tra le tre velocità angolari sussiste la relazione*

$$(3.62) \quad \boxed{\boldsymbol{\omega}_{20} = \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{10}}$$

che chiamiamo **legge di composizione delle velocità angolari**.

DIMOSTRAZIONE. Per una corretta interpretazione della (3.62) e per la sua dimostrazione occorre far capo al Teorema 3.4.1 e alla formula (3.43). Avendo tre coppie di riferimenti, quest'ultima dà luogo a tre equazioni:

$$\begin{cases} D_t^1 \mathbf{u} = D_t^2 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{u} \\ D_t^0 \mathbf{u} = D_t^1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{u} \\ D_t^0 \mathbf{u} = D_t^2 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{u} \end{cases}$$

Le ultime due forniscono l'uguaglianza $D_t^1 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{u} = D_t^2 \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{u}$, cioè

$$D_t^1 \mathbf{u} - D_t^2 \mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}_{20} - \boldsymbol{\omega}_{10}) \times \mathbf{u}.$$

Con l'intervento della prima si ottiene $\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}_{20} - \boldsymbol{\omega}_{10}) \times \mathbf{u}$. Di qui la (3.62), stante l'arbitrarietà del vettore \mathbf{u} . \square

3.7 Velocità angolare e angoli di Euler

Si è visto al §3.1.6 che una rotazione \mathbf{R} è decomponibile nel prodotto di tre rotazioni, $\mathbf{R} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{A}$, definite, nella rappresentazione versore-angolo, da

$$\mathbf{A} = (\mathbf{c}_3, \psi), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{N}, \theta), \quad \mathbf{C} = (\mathbf{b}_3, \phi),$$

dove (ψ, θ, ϕ) sono gli angoli di Euler. Se queste rotazioni dipendono dal tempo si ha un moto rigido con un punto fisso rappresentato da $\mathbf{R}(t)$.

TEOREMA 3.7.1 – *La velocità angolare di un moto rigido si esprime con la formula*

$$(3.63) \quad \boxed{\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{c}_3 + \dot{\theta} \mathbf{N} + \dot{\phi} \mathbf{e}_3}$$

dove $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ sono le derivate rispetto al tempo degli angoli di Euler (ψ, θ, ϕ) rispetto ad una terna fissa $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, e dove

$$(3.64) \quad \boxed{\mathbf{N} = \cos \psi \mathbf{c}_1 + \sin \psi \mathbf{c}_2}$$

$$(3.65) \quad \boxed{\mathbf{e}_3 = \sin \theta (\sin \psi \mathbf{c}_1 - \cos \psi \mathbf{c}_2) + \cos \theta \mathbf{c}_3}$$

DIMOSTRAZIONE. In questo schema intervengono quattro riferimenti (o quattro corpi rigidi) insieme alle tre rotazioni \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{R}_3 & \xleftarrow{\mathbf{C}} & \mathcal{R}_2 & \xleftarrow{\mathbf{B}} & \mathcal{R}_1 & \xleftarrow{\mathbf{A}} & \mathcal{R}_0 \\ (e_1, e_2, e_3) & & & & & & (c_1, c_2, c_3) \end{array}$$

Introducendo le relative velocità angolari, secondo le notazioni sopra adottate, e applicando il Teorema 3.6.1, vale a dire due volte la formula (3.62), possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{30} = \boldsymbol{\omega}_{32} + \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{10},$$

dove $\boldsymbol{\omega}_{10}$ è la velocità angolare di \mathcal{R}_1 rispetto a \mathcal{R}_0 , $\boldsymbol{\omega}_{21}$ è la velocità angolare di \mathcal{R}_2 rispetto a \mathcal{R}_1 , ecc. Dunque si ha subito $\boldsymbol{\omega}_{10} = \dot{\psi} \mathbf{c}_3$. Per quel che riguarda $\boldsymbol{\omega}_{21}$ è bene osservare che, per come l'abbiamo definita, essa è la velocità angolare di \mathcal{R}_2 rispetto a \mathcal{R}_1 , supposto questo immobile. Dunque: $\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot{\theta} \mathbf{N}$. Infine, per la stessa ragione: $\boldsymbol{\omega}_{32} = \dot{\phi} \mathbf{b}_3$. Per giungere alla (3.63) occorre ancora osservare, si veda la Figura 3.1.C, che $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3$. La (3.68) è richiamata dalle (3.21), la (3.65) dalle (3.22). \square

Per l'analisi della dinamica dei corpi rigidi si rivelerà utile conoscere le espressioni delle componenti della velocità angolare sia rispetto ad una base fissa sia rispetto ad una base solidale.

TEOREMA 3.7.2 – *Le componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla base fissa $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ sono date da*

$$(3.66) \quad \begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_2 = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{cases}$$

Le componenti (p, q, r) ²³ di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna solidale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sono date da

$$(3.67) \quad \begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi, \\ q = \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \phi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Inserendo la (3.68) e la (3.65) nella (3.63) si trova

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\psi} \mathbf{c}_3 + \dot{\theta} (\cos \psi \mathbf{c}_1 + \sin \psi \mathbf{c}_2) + \dot{\phi} [\sin \theta (\sin \psi \mathbf{c}_1 - \cos \psi \mathbf{c}_2) + \cos \theta \mathbf{c}_3] \\ &= (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \mathbf{c}_1 + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \mathbf{c}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{c}_3. \end{aligned}$$

Di qui le (3.66). Ritornando alla (3.63) abbiamo:

$$\begin{cases} p = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = (\dot{\psi} \mathbf{c}_3 + \dot{\theta} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{e}_1 = \dot{\psi} \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + \dot{\theta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_1 \\ q = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_2 = (\dot{\psi} \mathbf{c}_3 + \dot{\theta} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{e}_2 = \dot{\psi} \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + \dot{\theta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_2 \\ r = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3 = (\dot{\psi} \mathbf{c}_3 + \dot{\theta} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{e}_3 + \dot{\phi} = \dot{\psi} \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_3 + \dot{\phi} \end{cases}$$

²³ Si tratta di una notazione classica.

Richiamiamo la (3.20), $\mathbf{N} = \cos \phi \mathbf{e}_1 - \sin \phi \mathbf{e}_2$:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + \dot{\theta} \cos \phi, \\ q = \dot{\psi} \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{e}_2 - \dot{\theta} \sin \phi, \\ r = \dot{\psi} \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + \dot{\phi}. \end{cases}$$

Dalle (3.22) ricaviamo infine i prodotti scalari che ci servono:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{c}_3 = \sin \phi \sin \theta, \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = \cos \phi \sin \theta, \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{c}_3 = \cos \theta. \end{cases}$$

Inserendoli nelle equazioni precedenti si trovano le (3.67). \square

3.8 Moti di precessione regolare

Un esempio notevole di composizione di moti rigidi è il **moto di precessione regolare**: si tratta di un moto rigido composto di due moti rigidi con punto fisso O , il primo di velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}_r$, detta **velocità di rotazione propria**, il secondo di velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_p$, pure costante ma, si badi bene, costante nel corpo rigido, detta **velocità di precessione**. Lo si realizza facendo ruotare un corpo rigido intorno ad un suo asse solidale f , detto **asse di figura**, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_r$, ovviamente parallela a f , e facendo quindi ruotare l'asse f intorno ad un asse fisso p passante per un suo punto O , detto **asse di precessione**, con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}_p$. La velocità angolare del corpo rigido risulta essere la somma

$$(3.68) \quad \boxed{\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_r}$$

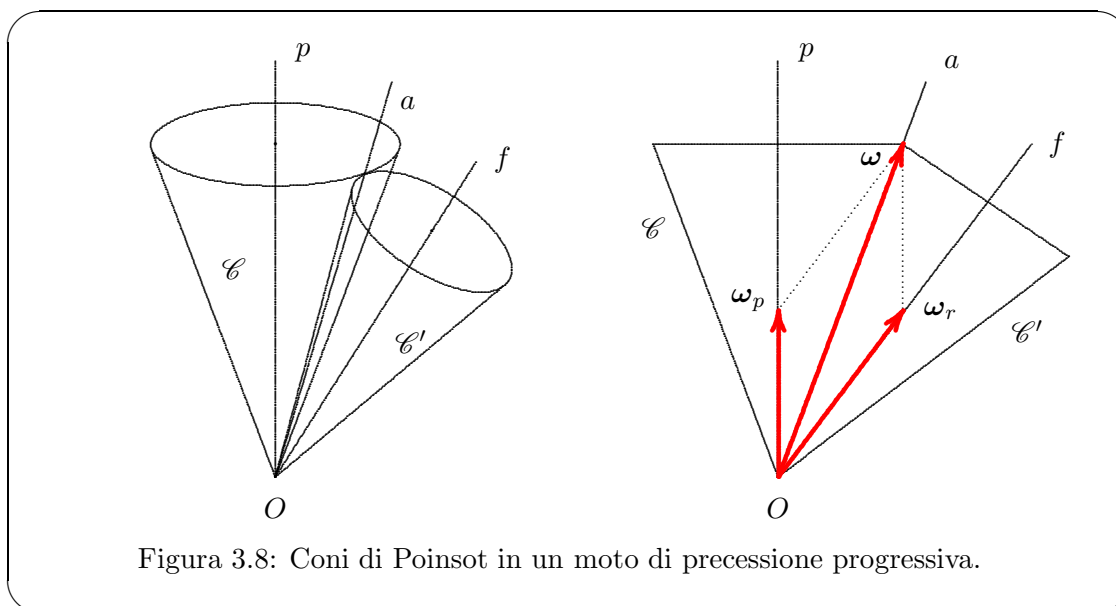
dove, in base alla (3.62), il vettore $\boldsymbol{\omega}_r$ è inteso solidale al corpo. Si dice allora, brevemente, che in un moto di precessione la velocità angolare è la somma di un vettore costante nello spazio e di un vettore costante nel corpo.

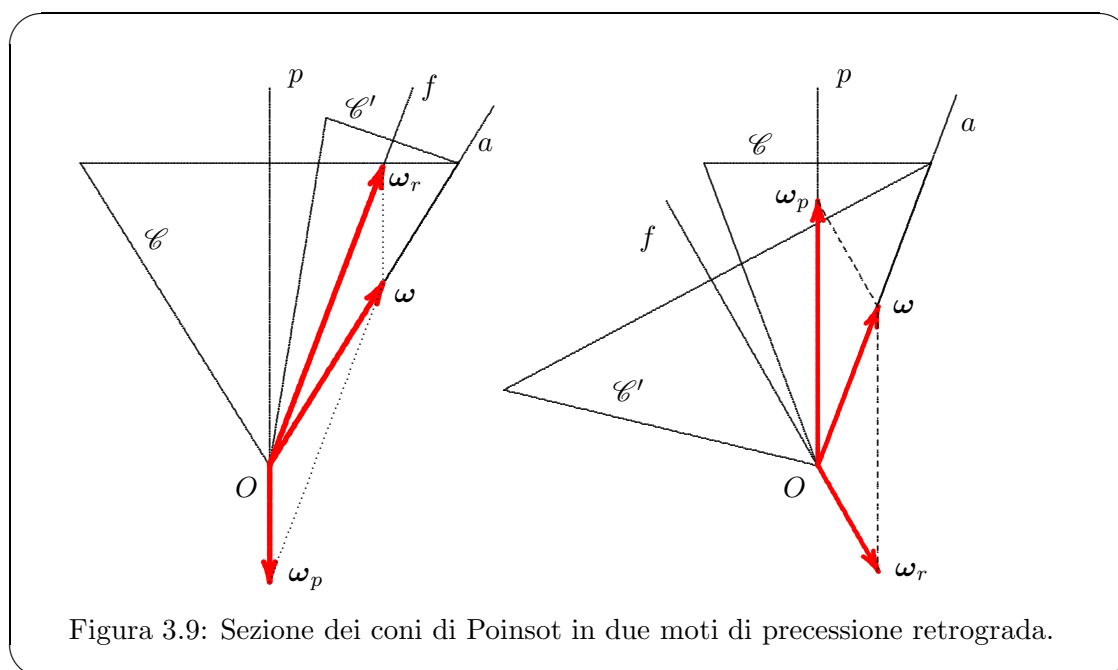
In un moto di precessione i coni di Poinsot sono rotondi. L'asse di Mozzi a forma infatti angolo costante sia con l'asse di precessione che con l'asse di figura. Dunque ogni moto di precessione è realizzabile facendo rotolare uniformemente un cono circolare retto \mathcal{C}' su di un cono fisso \mathcal{C} , pure circolare retto. Una precessione si dice **progressiva** o **retrograda** a seconda che i due vettori $\boldsymbol{\omega}_p$ e $\boldsymbol{\omega}_r$ formino angolo acuto o ottuso. Nelle due figure che seguono sono rappresentati i coni di Poinsot in un moto di precessione progressiva ed in uno di precessione retrograda.

NOTA 3.8.1 – Un esempio notevole di moto di precessione è quello della Terra intorno al suo centro rispetto alle stelle fisse. Sappiamo che la Terra ruota intorno al suo asse polare f con velocità angolare costante. Ma l'asse polare f non conserva rispetto alle stelle fisse

direzione invariabile. Esso infatti ruota uniformemente intorno ad un asse fisso p passante per il suo centro e ortogonale al piano dell'eclittica (cioè al piano dell'orbita terrestre intorno al Sole) compiendo però un solo giro in circa 26 mila anni! (questo periodo prende il nome di **anno platonico**). Si tratta di un moto di precessione retrograda. I coni di Poincaré si configurano come nella prima della due immagini di Figura 3.9.

Soltanto che, mentre il cono fisso ha un'apertura lievemente superiore a $23^\circ 30'$, il cono solidale che gli rotola all'interno ha un'apertura di soli 8,67 millesimi di secondo circa, dovendo compiere un giro completo intorno all'asse p dopo aver compiuto su se stesso un numero di giri pari al numero dei giorni in un anno platonico (circa 9.400.000 giorni). •





Capitolo 4

Meccanica newtoniana

Sorta dall'opera di Galileo Galilei (Pisa 1564 - Arcetri 1642), consolidata da Isaac Newton (Woolsthorpe 1642 - Kensington 1727) ed eretta a sistema da Leonhard Euler (Basilea 1707 - Pietroburgo 1783), la "meccanica razionale" o "meccanica classica" fornisce i primi fondamentali modelli matematici della fisica. I corpi in movimento sono rappresentati da singoli punti o da insiemi discreti o continui di punti, mobili con o senza vincoli nello spazio affine tridimensionale euclideo oppure in uno spazio affine a quattro dimensioni, lo spazio-tempo di Newton, dotato di una particolare struttura metrica. Le sollecitazioni che provocano o modificano il moto dei corpi sono rappresentate da vettori o anche, specialmente nella meccanica dei continui, da tensori. In questo capitolo vengono esaminati i modelli matematici fondamentali della "meccanica razionale": punto libero, punto vincolato, sistema finito di punti, corpo rigido. Gli aspetti puramente cinematici di questi modelli sono già stati trattati nel Cap. 2.

4.1 Dinamica del punto libero

Il modello più semplice che la meccanica newtoniana adotta per i corpi in movimento è quello di **punto materiale libero**.

DEFINIZIONE 4.1.1 – Dicesi **punto materiale** una coppia (P, m) costituita da un punto mobile nello spazio affine tridimensionale euclideo (che rappresenta lo spazio fisico osservato da un riferimento) e da un numero positivo m detto **massa inerziale**. Un punto materiale si dice **libero** se può assumere qualunque posizione nello spazio e qualunque velocità. •

La dinamica newtoniana del punto materiale è fondata su principi la cui discussione è argomento dei corsi di Fisica. Qui li formuliamo direttamente, mettendone in risalto gli aspetti matematici.

PRINCIPIO I. *Ogni azione atta a provocare il moto di un punto materiale è rappresentata da un vettore \mathbf{F} detto **forza**. I moti conseguenti all'azione di una forza \mathbf{F} sono retti dall'equazione*

$$(4.1) \quad m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

dove \mathbf{a} è l'accelerazione del punto. Per la forza \mathbf{F} si postula una **legge di forza** cioè una sua dipendenza dalla posizione del punto, dalla sua velocità ed eventualmente dal tempo:

$$(4.2) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

PRINCIPIO II. *L'azione simultanea di due (o più) forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 è rappresentata dalla loro somma (**principio di sovrapposizione delle forze**) e il moto del punto è allora retto dall'equazione*

$$(4.3) \quad m \mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

La meccanica newtoniana non considera leggi di forza dipendenti dall'accelerazione. Una forza attiva dipendente dalla sola posizione del punto prende il nome di **forza posizionale** o **campo di forza**.

Come si è detto, questi principi presuppongono la scelta di un riferimento rispetto al quale calcolare la posizione del punto, la sua velocità, la sua accelerazione. La definizione di velocità e di accelerazione presuppongono anche la scelta di un parametro temporale. La meccanica newtoniana postula con il seguente **principio d'inerzia** l'esistenza di una classe privilegiata di riferimenti e di un tempo universale indipendente dalla scelta del riferimento, parametro privilegiato rispetto al quale calcolare gli enti cinematici:

PRINCIPIO III. *Esistono dei riferimenti, detti **riferimenti inerziali** o **galileiani**, e un tempo, detto **tempo assoluto**, rispetto ai quali un punto libero e isolato si muove di moto rettilineo uniforme, detto **moto inerziale**.*

In quest'enunciato per **punto isolato** s'intende un punto non interagente con alcun campo fisico (gravitazionale, elettromagnetico, ecc.). Tra i moti inerziali, caratterizzati dalla condizione $\mathbf{a} = 0$, vi è in particolare la *quiete*. Questo principio ha due importanti conseguenze.

TEOREMA 4.1.1 – *Due riferimenti inerziali si muovono uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo uniforme.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{R} un riferimento inerziale. Sia \mathcal{R}' un corpo rigido in moto rispetto a \mathcal{R} . Supponiamo che \mathcal{R}' definisca anch'esso un riferimento inerziale. Consideriamo un punto P libero e isolato, in quiete rispetto a \mathcal{R}' . Questo punto si muove rispetto a \mathcal{R} , che è inerziale, di moto rettilineo uniforme. Ma un tale punto P si può pensare come punto solidale a \mathcal{R}' visto che è in quiete rispetto a questo. Dunque tutti i punti solidali a \mathcal{R}' si muovono rispetto ad \mathcal{R} di moto rettilineo uniforme. \square

TEOREMA 4.1.2 – *Un punto libero e isolato si muove rispetto ad un qualunque riferimento \mathcal{R} come se fosse soggetto all'azione di due forze, una **forza di trascinamento** ed una **forza di Coriolis**, date rispettivamente da*

$$(4.4) \quad \mathbf{F}_{tr} = -m \mathbf{a}_{tr}, \quad \mathbf{F}_c = -m \mathbf{a}_c$$

dove \mathbf{a}_{tr} e \mathbf{a}_c sono l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione di Coriolis misurate rispetto ad un qualunque riferimento inerziale.

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{R}' un qualunque riferimento inerziale. Per il teorema di Coriolis si ha

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c,$$

dove \mathbf{a}_{tr} e \mathbf{a}_c sono le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis calcolate rispetto ad \mathcal{R}' . Se il punto si muove di moto inerziale in \mathcal{R}' allora $\mathbf{a}' = 0$ e quindi

$$\mathbf{a} = -\mathbf{a}_{tr} - \mathbf{a}_c.$$

Moltiplicando per la massa m ,

$$m \mathbf{a} = -m \mathbf{a}_{tr} - m \mathbf{a}_c,$$

e dal confronto con la (4.1) si vede che il punto P si muove come se fosse soggetto alle forze (4.4). \square

NOTA 4.1.1 – La forza di trascinamento e la forza di Coriolis si dicono **forze apparenti** per distinguerle dalle altre forze, dette **forze reali**, dovute ad interazioni con altri corpi o con campi fisici. In conclusione: se il riferimento scelto per descrivere la dinamica di un punto non è inerziale, allora a secondo membro dell'equazione fondamentale (4.1) alle forze reali occorre aggiungere le forze apparenti. Queste svaniscono se il riferimento scelto è inerziale. \bullet

Vediamo ora le leggi di forza più ricorrenti, cominciando dalle forze apparenti.

NOTA 4.1.2 – Forze apparenti. Abbiamo già determinato le espressioni generali delle accelerazioni di trascinamento e di Coriolis – formule (3.51) e (3.52). Dalle definizioni (4.4) seguono allora per le forze apparenti le espressioni

$$(4.5) \quad \begin{cases} \mathbf{F}_{tr} = -m (\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})), \\ \mathbf{F}_c = -2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del riferimento scelto rispetto ad un qualunque riferimento inerziale, \mathbf{a}_O è l'accelerazione di un qualunque punto O solidale al riferimento scelto rispetto ad un qualunque riferimento inerziale, \mathbf{r} è il vettore posizione del punto P rispetto a O e infine \mathbf{v} è la sua velocità. Si noti che $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{a}_O sono funzioni vettoriali del tempo t , sicché la forza di Coriolis è in generale funzione di (\mathbf{v}, t) mentre la forza di trascinamento è in generale funzione di (\mathbf{r}, t) . \bullet

NOTA 4.1.3 – **Forze reali.** La Fisica considera varie leggi di forza. (I) La più semplice (usata per esempio nello studio della caduta di un *grave*) è

$$\mathbf{F} = m \mathbf{g} = \text{costante.}$$

(II) La legge di forza

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r}, \quad k > 0,$$

è usata per rappresentare la forza esercitata su di un punto in posizione $\mathbf{r} = OP$ da una molla elastica perfetta a lunghezza a riposo nulla, avente estremi in O e P . (III) Una legge di forza del tipo

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{\gamma}{r^2} \mathbf{u},$$

definita per $\mathbf{r} \neq 0$, rappresenta l'azione esercitata da una massa gravitazionale M posta nel punto O su di un punto materiale P di massa gravitazionale m (la massa gravitazionale viene identificata con la massa inerziale), posto

$$\gamma = G M m$$

con G costante di gravitazione universale. Rappresenta anche la forza esercitata da una carica elettrica e_0 posta in O su di un punto materiale P dotato di carica elettrica e , posto

$$\gamma = -e_0 e.$$

(IV) Una legge di forza del tipo

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{v} \right),$$

detta **forza di Lorentz**,¹ rappresenta l'azione meccanica esercitata da un campo elettromagnetico (\mathbf{E}, \mathbf{B}) su di una particella di carica elettrica e . •

Abbiamo a questo punto tutti gli elementi necessari per la costruzione del modello matematico per la dinamica del punto libero: è costituito semplicemente dall'equazione vettoriale

(4.6)

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

combinazione dell'equazione fondamentale (4.1) e della legge di forza (4.2). In conformità al principio di sovrapposizione la funzione a secondo membro della (4.6) può essere la *somma* di più leggi di forza. Se il riferimento scelto non è inerziale tra gli addendi di \mathbf{F} dobbiamo includere la forza di trascinamento e la forza di Coriolis.

¹ Hendrik Antoon Lorentz, 1853-1928.

Assegnata la legge di forza, l'equazione della dinamica (4.6) dà luogo ad un'equazione differenziale (vettoriale) del secondo ordine nell'incognita $\mathbf{r}(t)$,

$$(4.7) \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right)$$

equivalente (si veda la Nota 1.13.5) ad un sistema di equazioni del primo ordine nelle funzioni incognite $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$,

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \end{cases}$$

Se la forza è indipendente dal tempo il sistema (4.8) è autonomo. Se invece la forza dipende dal tempo, ci si riconduce ad un sistema autonomo con l'artificio visto alla Nota 1.13.5, aggiungendo un'ulteriore equazione con un parametro ausiliario τ equivalente al tempo t :

$$(4.9) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau), \\ \frac{d\tau}{dt} = 1. \end{cases}$$

Questi sistemi differenziali del primo ordine corrispondono ad un campo vettoriale \mathbf{X} , rappresentante la dinamica di un punto materiale libero. Se la forza dipende dal tempo si può interpretare \mathbf{X} come **campo vettoriale dipendente dal tempo** (sistema (4.8)) sopra lo spazio \mathbb{R}^6 delle coppie posizione-velocità (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , oppure come campo vettoriale sopra lo spazio \mathbb{R}^7 delle terne posizione-velocità-tempo $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau)$ (sistema (4.9)). Se la forza non dipende dal tempo \mathbf{X} è un campo vettoriale ordinario sullo spazio delle (\mathbf{r}, \mathbf{v}) . La proiezione delle curve integrali di \mathbf{X} sullo spazio \mathbb{R}^3 delle posizioni \mathbf{r} fornisce tutti i possibili moti del punto. In base al teorema di Cauchy e subordinatamente alle opportune ipotesi di regolarità del campo \mathbf{X} e quindi della legge di forza, possiamo in conclusione affermare che: *fissata la posizione \mathbf{r}_0 e la velocità \mathbf{v}_0 di un punto libero ad un istante iniziale t_0 , risulta univocamente determinato il suo moto cioè una funzione $\mathbf{r}(t)$ soddisfacente all'equazione (4.7) ovvero alle equazioni (4.8) e tale che*

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0.$$

In un generico sistema di coordinate (q^i) su \mathcal{E}_3 , ricordata l'espressione delle componenti dell'accelerazione e denotate con F^i le componenti della forza \mathbf{F} , il sistema (4.8) si traduce in un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine del tipo

$$(4.10) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i, \\ \frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{hj}^i v^h v^j + \frac{1}{m} F^i(q^j, v^j, t). \end{cases} \quad (h, i, j = 1, 2, 3)$$

nelle sei funzioni incognite $q^i(t)$ e $v^i(t)$.

Come per ogni sistema dinamico lo studio del sistema (4.8) o del sistema (4.9) può essere facilitato dalla conoscenza di integrali primi. Un integrale primo è in questo caso una grandezza (scalare o vettoriale), funzione di (\mathbf{r}, \mathbf{v}) (oppure di $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ nel caso non autonomo), che si mantiene costante lungo ogni moto. Per questo motivo gli integrali primi della meccanica prendono anche il nome di **costanti di moto**. Integrali primi *tipici* sono associati alle tre *grandezze cinetiche fondamentali* considerate nel paragrafo seguente.

4.2 Grandezze cinetiche fondamentali

Chiamiamo **atto di moto** di un punto la coppia (\mathbf{r}, \mathbf{v}) costituita dal vettore posizione rispetto ad un punto fisso O e dal vettore velocità. Ad ogni atto di moto vengono associate le tre **grandezze cinetiche fondamentali**:

(i) **Quantità di moto**

(4.11)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

(ii) **Momento della quantità di moto o momento angolare** rispetto al polo O

(4.12)

$$\mathbf{K}_O = OP \times \mathbf{p} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

(iii) **Energia cinetica**

(4.13)

$$T = \frac{1}{2}m v^2 \quad (v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

Derivando rispetto al tempo queste tre grandezze e tenuto conto dell'equazione fondamentale della dinamica, si trovano le equazioni

(4.14)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \\ \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O \\ \frac{dT}{dt} = W \end{cases}$$

dove

(4.15)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

è il **momento della forza \mathbf{F}** rispetto al polo (fisso) O , e

(4.16)

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

è la **potenza** della forza \mathbf{F} . Le tre equazioni (4.14) prendono rispettivamente il nome di **teorema della quantità di moto**, **teorema del momento angolare**, **teorema dell'energia**.

Da questi teoremi seguono semplici ma importanti corollari, detti **teoremi di conservazione**, i quali, subordinatamente a certe ipotesi sulle leggi di forza, mostrano l'esistenza di integrali primi tipici della meccanica del punto.

[1] – Integrale primo della quantità di moto: se $\mathbf{F} = 0$ allora $\mathbf{p} = \text{costante}$ (ovvero $\mathbf{v} = \text{costante}$). Segue dalla (4.14)₁. In questo caso ogni moto è rettilineo e uniforme. Più in generale: se esiste una direzione fissa, rappresentata da un versore fisso \mathbf{u} , a cui la forza \mathbf{F} è sempre ortogonale, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0$, allora la componente della quantità di moto, ovvero della velocità, secondo questa direzione è un integrale primo: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \text{costante}$.

[2] – Integrale primo del momento angolare: se esiste un punto fisso O rispetto al quale il momento della forza è nullo, cioè se la forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ è sempre diretta verso O , ovvero se $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = 0$, allora il momento angolare \mathbf{K}_O è un integrale primo: $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{costante}$. Segue dalla (4.14)₂.

Si osservi che l'integrale primo del momento della quantità di moto, a meno del fattore m , coincide con la velocità areale vettoriale. A questa conclusione si giunge anche osservando che se la forza è sempre parallela a OP , allora anche l'accelerazione del punto è sempre parallela a OP ; quindi tutti i moti conseguenti all'azione di tale forza sono moti centrali.

[3] – Integrale primo del momento assiale. Se a è una retta, \mathbf{u} un suo versore, O un suo punto, la quantità

$$(4.17) \quad M^a = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

(posto $\mathbf{r} = OP$) prende il nome di **momento assiale** della forza \mathbf{F} e non dipende dalla scelta del punto O sulla retta. Esso si annulla se e solo se i tre vettori $(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{F})$ sono dipendenti. Ciò significa che la retta di applicazione del vettore applicato (P, \mathbf{F}) interseca la retta a . Segue allora dalla (4.14)₂ moltiplicata scalarmente per \mathbf{u} che se la forza \mathbf{F} è sempre diretta verso una retta fissa a di versore \mathbf{u} allora la funzione $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ è un integrale primo.

Si osservi che la quantità $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ coincide con la velocità areale della proiezione del punto su di un piano ortogonale alla retta a (rispetto al centro dato dall'intersezione di a con tale piano).

[4] – Integrale primo dell'energia. Se la forza \mathbf{F} è posizionale e conservativa, se esiste cioè un campo scalare U tale che

$$\mathbf{F} = \text{grad}(U),$$

allora la funzione

$$(4.18) \quad E = T - U$$

è un integrale primo. Infatti da $\mathbf{F} = \text{grad}(U)$ segue

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dU}{dt}$$

perché, facendo intervenire coordinate cartesiane ortonormali (si veda la Nota ?? più avanti),

$$\text{grad}(U) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} v^\alpha = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{dU}{dt}.$$

Quindi dal teorema dell'energia (4.14)₃ segue $\frac{d}{dt}(T - U) = 0$. Vedremo più avanti (Cap. 5) una possibile estensione dell'integrale dell'energia nel caso di una forza dipendente anche dalla velocità e dal tempo.

Ricordiamo che la funzione U prende il nome di **potenziale**. Alla funzione $V = -U$ si dà invece il nome di **energia potenziale**, cosicché la funzione $E = T + V$, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, prende il nome di **energia totale**.

NOTA 4.2.1 – Consideriamo una prima semplice ma interessante applicazione dell'integrale dell'energia. Sia h la **costante dell'energia**, cioè il valore assunto dall'energia totale E per un prefissato moto del punto. Si osservi che

$$h = T_0 - U_0$$

dove T_0 ed U_0 sono i valori iniziali dell'energia cinetica e del potenziale. Poiché è sempre $T \geq 0$ dalla condizione $T - U = h$ segue che le possibili posizioni del punto debbono soddisfare alla disuguaglianza

$$(4.19) \quad h + U(\mathbf{r}) \geq 0.$$

L'uguaglianza nella (4.19) definisce una superficie, detta **superficie limite**, regolare nei punti in cui il gradiente di U , cioè la forza, non è nulla. In genere questa superficie divide lo spazio in due regioni. Il moto avviene in una delle due regioni, quella definita dalla disuguaglianza (4.19), e la superficie limite costituisce una barriera invalicabile. Se raggiunta dal punto essa non può essere superata. Su di essa il punto ha velocità nulla (perché $T = 0$). Si noti bene che tale superficie limite dipende dalla costante dell'energia quindi dalle condizioni iniziali. •

4.3 Lo spazio-tempo di Newton

Il modello di spazio affine tridimensionale euclideo assunto per lo spazio fisico è subordinato alla scelta di un riferimento. Noi concepiamo l'idea di più riferimenti ma quando osserviamo e descriviamo movimenti di oggetti presupponiamo la scelta di un ben definito riferimento. A stretto rigore gli spazi affini associati a due riferimenti diversi (in moto uno rispetto all'altro) sono diversi: il mondo osservato da un riferimento è *diverso* dal mondo osservato da un altro riferimento. È di conseguenza del tutto naturale concepire l'idea che anche il tempo cambi da riferimento a riferimento, cioè che ad ogni riferimento non solo sia associato uno spazio affine ma anche un *tempo*.

La meccanica newtoniana postula però l'esistenza di un tempo unico per tutti i riferimenti (il **tempo assoluto**). Non postula invece l'esistenza di un riferimento privilegiato quindi di uno *spazio assoluto* tridimensionale (riproposti in fisica più tardi sotto forma di *etere* e

poi definitivamente abbandonato) bensì l'esistenza di una *classe di riferimenti privilegiati*, i **riferimenti inerziali** o **galileiani**.

Inoltre, col **principio di relatività galileiana**, postula che le leggi della meccanica siano invarianti in forma rispetto ad ogni sistema inerziale. Questo principio, esteso da Einstein a tutti i fenomeni fisici riferiti a sistemi inerziali (**principio di relatività speciale**) e successivamente anche ai non inerziali (**principio di relatività generale**), può riformularsi come **principio dell'assoluto**, nel senso seguente: *tutte le leggi fisiche (in particolare quelle della meccanica) possono esprimersi in forma assoluta, cioè indipendente dalla scelta del riferimento.*

Siamo così condotti a ricercare un *ambiente* opportuno dove formulare tali leggi. A questo scopo osserviamo che un concetto *primitivo* assoluto elementare per la meccanica (come lo è per la geometria euclidea quello di *punto*) è il concetto di **evento**. Un evento (quale ad esempio lo scoppio di una stella, l'accendersi di una lampadina, l'urto di due particelle, ecc.) ha un suo carattere assoluto, che si può però tradurre in termini "relativi" quando lo si voglia collocare nello spazio (con la scelta di un riferimento) e nel tempo (con la scelta di un calendario o di un orologio). Si possono allora descrivere in maniera assoluta le leggi dell'universo operando sull'insieme di tutti gli eventi, chiamato **spazio-tempo** o **universo** o **cronòtopo**, ed enunciando il principio dell'assoluto nella maniera seguente:

PRINCIPIO I. *Tutte le leggi fisiche si esprimono in forma assoluta, cioè indipendente dalla scelta del riferimento, nello spazio-tempo.*

Per rendere effettivo questo principio occorre istituire sullo spazio-tempo una struttura matematica atta a rappresentare le suddette leggi. Questa struttura può essere dedotta a partire da postulati di natura fisico-matematica oppure postulata *direttamente*. Seguiremo il secondo approccio.

Vi sono vari modelli matematici per lo spazio-tempo. Essi si distinguono sostanzialmente in due classi: **spazi-tempi affini** e **spazi-tempi non affini**. La struttura affine dello spazio-tempo è concomitante al postulato dell'esistenza dei riferimenti inerziali: i moti inerziali, connessi con tali riferimenti, sono rappresentati da rette nello spazio-tempo.

Gli spazi-tempi affini fondamentali sono lo **spazio-tempo di Newton**, sede della meccanica newtoniana, e lo **spazio-tempo di Minkowski**, sede della meccanica einsteiniana (o teoria della Relatività Ristretta). Questo paragrafo è dedicato allo studio dello spazio-tempo di Newton. La sua struttura è definita nel seguente enunciato.

PRINCIPIO II. *Lo spazio-tempo di Newton è uno spazio affine a 4 dimensioni (N, E, δ) . Per ogni coppia di eventi $P, Q \in N$ il vettore $PQ = \delta(P, Q) \in E$ prende il nome di **intervallo assoluto** dei due eventi. Lo spazio vettoriale associato E è dotato di un covettore $\kappa \in E^*$ ($\kappa\rho\nu\omicron\varsigma$ = tempo). Per ogni coppia di eventi $P, Q \in N$ il numero reale $\langle PQ, \kappa \rangle$ prende il nome di **intervallo temporale assoluto** dei due eventi. Se $\langle PQ, \kappa \rangle > 0$ si dice che l'evento Q segue P o che P precede Q . Se $\langle PQ, \kappa \rangle = 0$ si dice*

che gli eventi sono **contemporanei**. Lo spazio

$$(4.20) \quad E_0 = \{v \in E \mid \langle v, \kappa \rangle = 0\}$$

dei vettori di E che annullano κ è dotato di un tensore metrico \mathbf{g}_0 definito positivo per cui la coppia (E_0, \mathbf{g}_0) è uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale. Ogni vettore di E_0 è detto **spaziale**. A due eventi distinti contemporanei P e Q (quindi tali che $PQ \in E_0$) si associa il numero positivo $|PQ| = \sqrt{\mathbf{g}_0(PQ, PQ)} = \sqrt{PQ \cdot PQ}$ detto **intervallo spaziale assoluto** dei due eventi.

Si osservi che in questo modello di spazio-tempo è definita la distanza spaziale assoluta solo fra eventi contemporanei. La distanza spaziale di eventi non contemporanei è un concetto relativo (si veda più avanti). Una prima conseguenza delle precedenti assunzioni è il seguente

TEOREMA 4.3.1 – *Esiste una funzione reale (definita a meno di una costante additiva) $t: N \rightarrow \mathbb{R}$, detta **tempo assoluto**, tale che*

$$(4.21) \quad \boxed{\kappa = dt}$$

e

$$(4.22) \quad \boxed{\langle PQ, \kappa \rangle = t(Q) - t(P)}$$

per ogni coppia di eventi $P, Q \in N$. Per ogni numero reale s l'insieme

$$N_s = \{P \in N \mid t(P) = s\} = t^{-1}(s)$$

degli eventi occorrenti alla data s è un sottospazio affine tridimensionale euclideo con spazio vettoriale soggiacente (E_0, \mathbf{g}_0) .

DIMOSTRAZIONE. Si consideri su N un sistema di coordinate affini (x^α) . Al covettore $\kappa \in E^*$ corrisponde su N la forma differenziale

$$\kappa = \kappa_\alpha dx^\alpha,$$

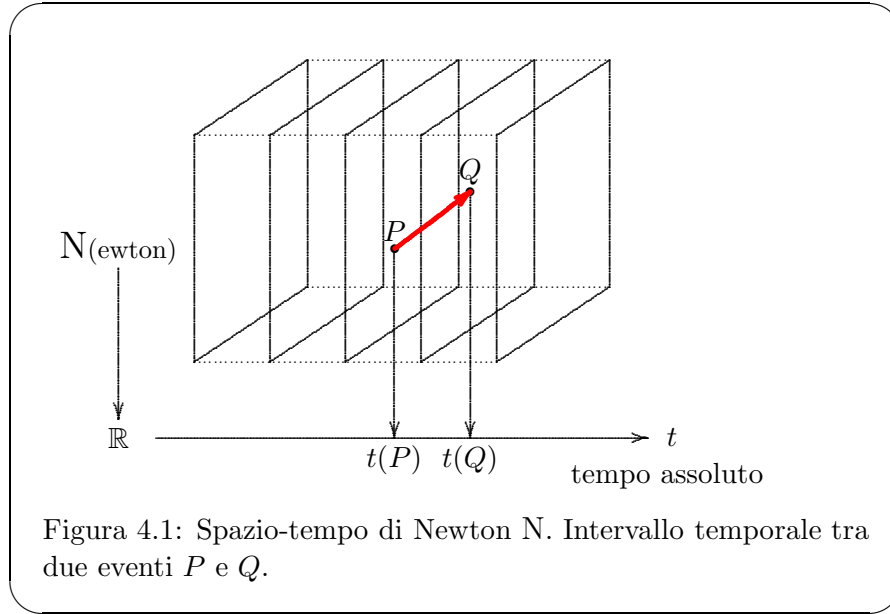
le cui componenti (κ_α) sono costanti. Questa 1-forma è esatta, perché se si pone

$$t = \kappa_\alpha x^\alpha,$$

si vede che $dt = \kappa_\alpha dx^\alpha = \kappa$. Inoltre:

$$t(Q) - t(P) = \kappa_\alpha (x^\alpha(Q) - x^\alpha(P)) = \langle PQ, \kappa \rangle,$$

e la (4.22) è dimostrata. Se inoltre P è un evento di N_s , allora ogni altro evento Q contemporaneo è tale che $t(Q) - t(P) = 0$, quindi tale che $\langle PQ, \kappa \rangle = 0$, vale a dire $PQ \in E_0$. Lo spazio N_s è quindi il sottospazio affine generato da un qualunque suo punto



P e da tutti i vettori di E_0 . Lo spazio vettoriale corrispondente si identifica banalmente con E_0 . \square

I sottospazi N_s , che possiamo chiamare **spazi di contemporaneità**, formano un foglietamento dello spazio-tempo e stabiliscono una **cronologia assoluta** degli eventi. Si dice inoltre che l'applicazione $t: N \rightarrow \mathbb{R}$ costituisce la **fibrazione temporale assoluta** dello spazio-tempo di Newton: le **fibre** sono i sottospazi N_s .

Il moto di una particella è interpretabile come una successione continua di eventi, quindi come 'curva' nello spazio-tempo.

DEFINIZIONE 4.3.1 – *Il moto di un punto (o storia di una particella) è una curva nello spazio-tempo di Newton $\sigma: I \rightarrow N: \tau \mapsto \sigma(\tau)$ (di classe C^1 almeno). •*

Il parametro τ della storia prende il nome di **tempo proprio della particella**: può pensarsi come il tempo misurato da un orologio posseduto dalla particella. Vista l'esistenza in N di un tempo assoluto, è ragionevole assumere come principio che i tempi propri delle particelle siano *sincronizzati* col tempo assoluto:

PRINCIPIO III. *Lungo una storia $\sigma(\tau)$ il tempo proprio coincide con il tempo assoluto (modulo una costante):*

$$(4.23) \quad t \circ \sigma(\tau) = \tau + \text{cost.}$$

Di conseguenza:

TEOREMA 4.3.2 – *Il vettore tangente $V = \dot{\sigma}$ ad una storia σ , detto **velocità assoluta**,*

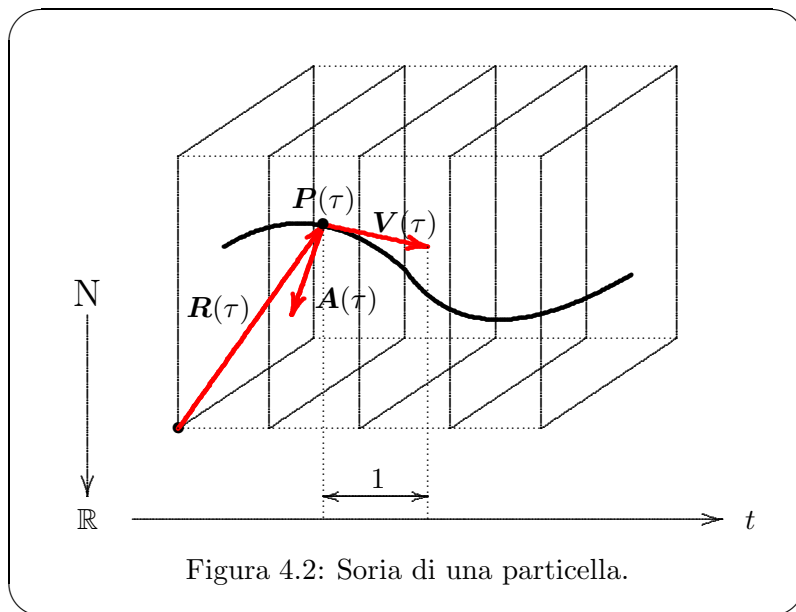


Figura 4.2: Soria di una particella.

soddisfa alla condizione

(4.24)

$$\langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\kappa} \rangle = 1$$

detta **condizione di normalizzazione**. La velocità assoluta è trasversa (cioè non tangente) agli spazi di contemporaneità N_s .

DIMOSTRAZIONE. La condizione (4.23) equivale a

$$(4.25) \quad D(t \circ \sigma)(\tau) = \frac{dt}{d\tau} = 1$$

e questa a sua volta, ricordata la definizione di vettore tangente, a

$$(4.26) \quad \langle \mathbf{V}, dt \rangle = 1,$$

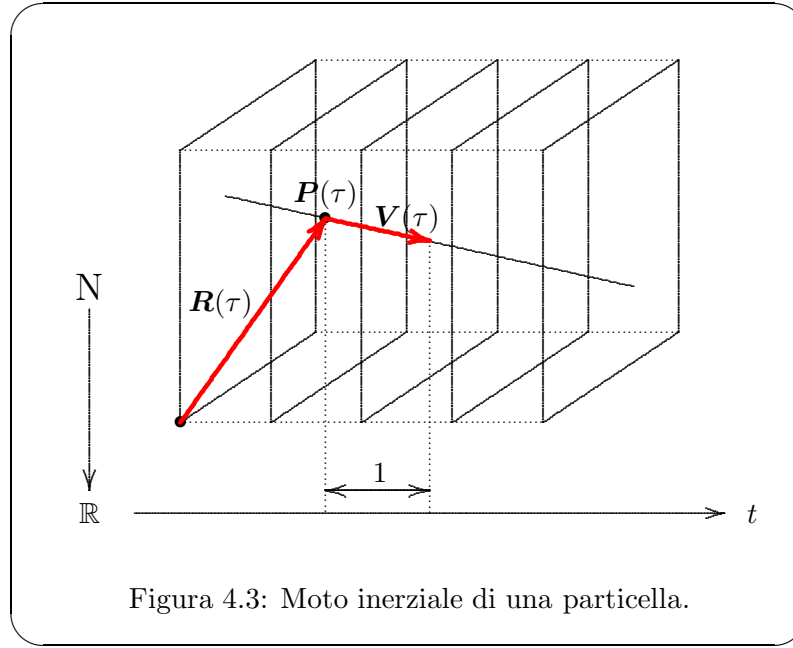
cioè alla (4.24). Per dimostrare la trasversalità basta ricordare che la condizione di tangenza è $\langle \mathbf{V}, dt \rangle = 0$, perché N_s è definito dall'equazione $t = s = \text{cost.}$ \square

NOTA 4.3.1 – Essendo N uno spazio affine, fissato un suo qualunque punto O , la storia di una particella ammette una rappresentazione vettoriale del tipo

$$(4.27) \quad OP = \mathbf{R}(\tau),$$

denotato con $P(\tau)$ il punto mobile. La velocità assoluta può dunque definirsi come limite di un rapporto incrementale:

$$(4.28) \quad \mathbf{V}(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{R}(\tau + h) - \mathbf{R}(\tau)). \quad \bullet$$



DEFINIZIONE 4.3.2 – L'**accelerazione assoluta** di una particella è il vettore

$$(4.29) \quad \boxed{\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau}}$$

definito, per ogni valore del tempo proprio τ , da

$$(4.30) \quad \mathbf{A}(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{V}(\tau + h) - \mathbf{V}(\tau)).$$

Si dice che una particella si muove di **moto inerziale** o che è in **stato inerziale** se la sua velocità assoluta è costante, ovvero se $\mathbf{A} = 0$. •

NOTA 4.3.2 – Al contrario della velocità assoluta, l'accelerazione assoluta è sempre tangente ai sottospazi N_s . Infatti

$$\langle \mathbf{A}, dt \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{V}}{d\tau}, \boldsymbol{\kappa} \right\rangle = \frac{d}{d\tau} \langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\kappa} \rangle = 0,$$

perché $\boldsymbol{\kappa}$ è costante e $\langle \mathbf{V}, \boldsymbol{\kappa} \rangle = 1$. •

Un moto inerziale è rappresentato da una retta nello spazio-tempo, trasversale al foglietamento degli spazi di contemporaneità. Il moto inerziale rappresenta il moto di un punto materiale libero e isolato, non soggetto cioè ad alcuna sollecitazione. I moti inerziali sono i soli ad essere rappresentati da rette nello spazio-tempo e quindi sono alla base della sua

struttura affine. è dunque ragionevole formulare per la dinamica di un punto materiale *libero* il seguente principio:

PRINCIPIO IV. *Un punto o particella materiale è una coppia (P, m) costituita da un punto mobile $P(\tau)$ nello spazio-tempo di Newton N e da un numero reale positivo m , detto **massa propria** o **massa inerziale**. Le sollecitazioni a cui esso è soggetto e che lo deviano dallo stato inerziale sono rappresentate da un vettore $\mathbf{F} \in E$. Tutte le possibili storie di un punto materiale soddisfano all'equazione*

$$(4.31) \quad \boxed{m \mathbf{A} = \mathbf{F}} \quad \bullet$$

Come si vede, la formulazione di questo principio fa intervenire soltanto concetti assoluti, cioè definiti sullo spazio-tempo. Introduciamo ora il concetto di riferimento ed analizziamone le conseguenze. Per **riferimento fisico** s'intende un insieme di punti distribuiti con continuità nello spazio fisico, ciascuno caratterizzato da un *nome*, costituito in genere da tre coordinate. Le particelle di un riferimento vengono anche chiamate **osservatori**. Nello spazio-tempo le storie di questi osservatori sono rappresentate da curve non intersecantisi che lo ricoprono completamente (si dice anche che esse formano una *congruenza di curve* nello spazio-tempo) oppure solo in parte, nel caso che il riferimento fisico considerato non invada tutto lo spazio. Le velocità assolute degli osservatori, cioè i vettori tangenti alle loro storie, formano un campo vettoriale soddisfacente, per definizione, alla condizione di normalizzazione (4.24). Le accelerazioni assolute sono infine nulle se e solo se gli osservatori si muovono tutti di moto inerziale e costituiscono quindi un riferimento inerziale. Di qui la seguente

DEFINIZIONE 4.3.3 – *Un riferimento è un campo vettoriale \mathbf{X} sullo spazio-tempo N soddisfacente in ogni punto alla condizione di normalizzazione*

$$(4.32) \quad \boxed{\langle \mathbf{X}, \kappa \rangle = 1}$$

*Se il campo \mathbf{X} è costante il riferimento si dice **inerziale** o **galileiano**. Le curve integrali del campo \mathbf{X} rappresentano le storie delle particelle del riferimento.* •

Qui ci limitiamo a considerare solo riferimenti inerziali. Le storie degli osservatori di un riferimento inerziale formano, nello spazio-tempo, un fascio di rette parallele.

TEOREMA 4.3.3 – *Sia \mathbf{X} un riferimento inerziale. L'insieme $N_{\mathbf{X}}$ degli osservatori (cioè delle storie delle sue particelle) è uno spazio affine euclideo tridimensionale.*

DIMOSTRAZIONE. Nello spazio vettoriale E soggiacente allo spazio affine N si consideri la relazione di equivalenza generata da \mathbf{X} ,

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = k \mathbf{X} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

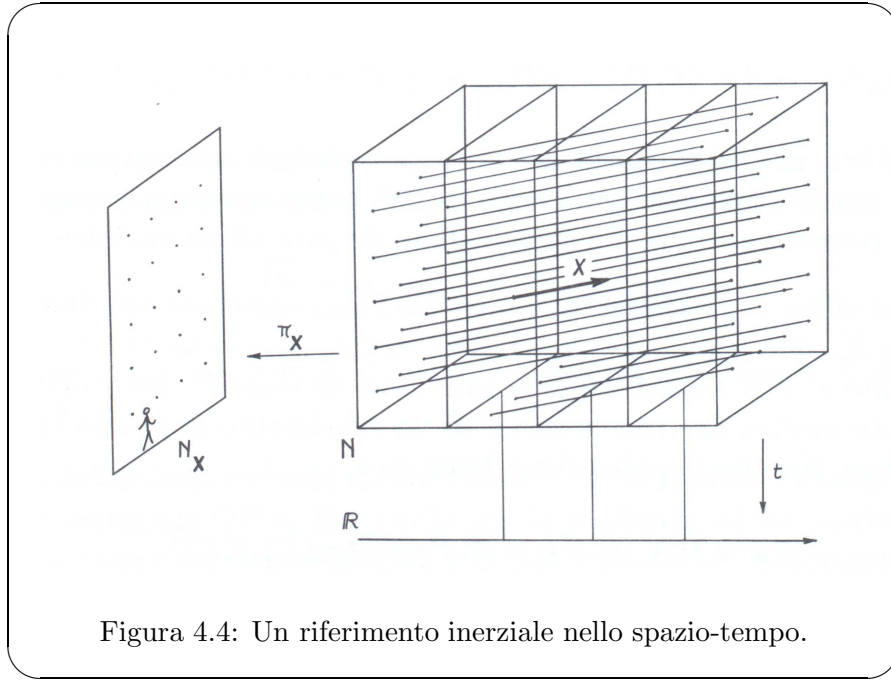


Figura 4.4: Un riferimento inerziale nello spazio-tempo.

ed il corrispondente spazio vettoriale quoziente $E_X = E/\{\mathbf{X}\}$. Si denoti con $[v]_X$ la classe di equivalenza rappresentata dal vettore $v \in E$. Si consideri inoltre l'applicazione

$$\delta_X: N_X \times N_X \rightarrow E_X$$

definita da

$$\delta_X(o_1, o_2) = [P_1 P_2]_X, \quad \forall P_1 \in o_1, \forall P_2 \in o_2.$$

Si verifica facilmente che questa definizione è ben data, cioè che il primo membro non dipende dalla scelta degli eventi P_1 e P_2 lungo le storie dei due osservatori o_1 e o_2 , e che inoltre l'applicazione δ_X soddisfa ai requisiti richiesti dalla definizione di spazio affine. Si ha dunque che la terna

$$(N_X, E_X, \delta_X)$$

è uno spazio affine. Inoltre sullo spazio vettoriale E_X si può definire un tensore metrico ponendo

$$|\delta_X(o_1, o_2)| = |P_1 P_2|, \quad \forall P_1 \in o_1, \forall P_2 \in o_2 \mid \langle P_1 P_2, \kappa \rangle = 0.$$

Ciò significa che la distanza di due osservatori è uguale all'intervallo spaziale assoluto di due qualunque eventi contemporanei appartenenti alle loro rispettive storie. Lo spazio affine diventa allora euclideo. \square

Lo spazio affine N_X rappresenta lo spazio fisico osservato dal riferimento inerziale \mathbf{X} . Sia $\pi_X: N \rightarrow N_X$ l'applicazione suriettiva che associa ad ogni evento $P \in N$ l'osservatore la

cui storia contiene P . Il teorema precedente mostra che con la scelta di un riferimento lo spazio-tempo si decompone, tramite l'applicazione biunivoca

$$\pi_{\mathbf{X}} \times t: N \rightarrow N_{\mathbf{X}} \times \mathbb{R}: P \mapsto (\pi_{\mathbf{X}}(P), t(P)),$$

nel prodotto cartesiano dello spazio $N_{\mathbf{X}}$ e dell'asse reale dei tempi – Figura 4.4.

Lo spazio vettoriale $E_{\mathbf{X}}$ è canonicamente isomorfo allo spazio E_0 perché ogni classe $[v]_{\mathbf{X}} \in E_{\mathbf{X}}$ ammette uno ed un solo rappresentante $v \in E_0$. Infatti, fissato un riferimento \mathbf{X} , ogni vettore nello spazio-tempo può essere rappresentato, in maniera unica, come somma di un vettore parallelo a \mathbf{X} e di un vettore spaziale, cioè appartenente a E_0 . Appliciamo questa rappresentazione agli enti vettoriali assoluti fin qui introdotti.

DEFINIZIONE 4.3.4 – Diciamo **rappresentazione o decomposizione relativa al riferimento \mathbf{X} dell'intervallo assoluto** PQ di due eventi la scrittura

$$(4.33) \quad \boxed{PQ = \mathbf{r} + \theta \mathbf{X}, \quad \langle \mathbf{r}, \boldsymbol{\kappa} \rangle = 0}$$

Il vettore spaziale \mathbf{r} prende il nome di **intervallo spaziale relativo** dei due eventi. •

Si noti che, applicando all'uguaglianza (4.33) il covettore $\boldsymbol{\kappa}$ e tenendo conto della (4.22), si ottiene

$$(4.34) \quad t(P) - t(Q) = \theta.$$

Il numero θ che compare nella (4.33) è dunque l'intervallo temporale assoluto dei due eventi.

DEFINIZIONE 4.3.5 – Sia $\sigma: I \rightarrow N$ la storia di una particella. Diciamo **moto relativo al riferimento inerziale \mathbf{X} della particella** la curva $\sigma_{\mathbf{X}}: I \rightarrow N_{\mathbf{X}}$ proiezione della σ mediante la $\pi_{\mathbf{X}}$:

$$\sigma_{\mathbf{X}} = \pi_{\mathbf{X}} \circ \sigma.$$

Diciamo **rappresentazione o decomposizione relativa al riferimento \mathbf{X} della velocità assoluta** della particella la scrittura

$$(4.35) \quad \boxed{\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{X}, \quad \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\kappa} \rangle = 0}$$

Il vettore spaziale \mathbf{v} prende il nome di **velocità relativa a \mathbf{X} della particella**. •

Questa definizione richiede alcuni commenti. Si consideri una rappresentazione vettoriale $OP = \mathbf{R}(\tau)$ della storia σ riferita ad un punto $O \in N$. Per ogni valore del tempo proprio τ si può considerare la decomposizione relativa a \mathbf{X} del vettore $\mathbf{R}(\tau)$:

$$(4.36) \quad \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r}(\tau) + \theta(\tau) \mathbf{X}, \quad \langle \mathbf{r}(\tau), \boldsymbol{\kappa} \rangle = 0.$$

Il vettore $\mathbf{r}(\tau)$ fornisce la rappresentazione vettoriale relativa al riferimento \mathbf{X} del moto della particella. Tenuto conto di quanto osservato in precedenza, lungo la storia della

particella il tempo proprio τ si può identificare con il tempo assoluto t . Supposto che l'evento O sia tale che $t(O) = 0$ la (4.36) diventa allora

$$(4.37) \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + t\mathbf{X}, \quad \langle \mathbf{r}(t), \boldsymbol{\kappa} \rangle = 0.$$

Derivando quest'uguaglianza rispetto a $t = \tau$, a primo membro si trova la velocità assoluta \mathbf{V} e a secondo membro proprio l'espressione (4.35), posto che si abbia

$$(4.38) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Quindi il vettore \mathbf{v} che compare nella decomposizione (4.35) rappresenta proprio la velocità relativa al riferimento \mathbf{X} della particella – Figura 4.5.

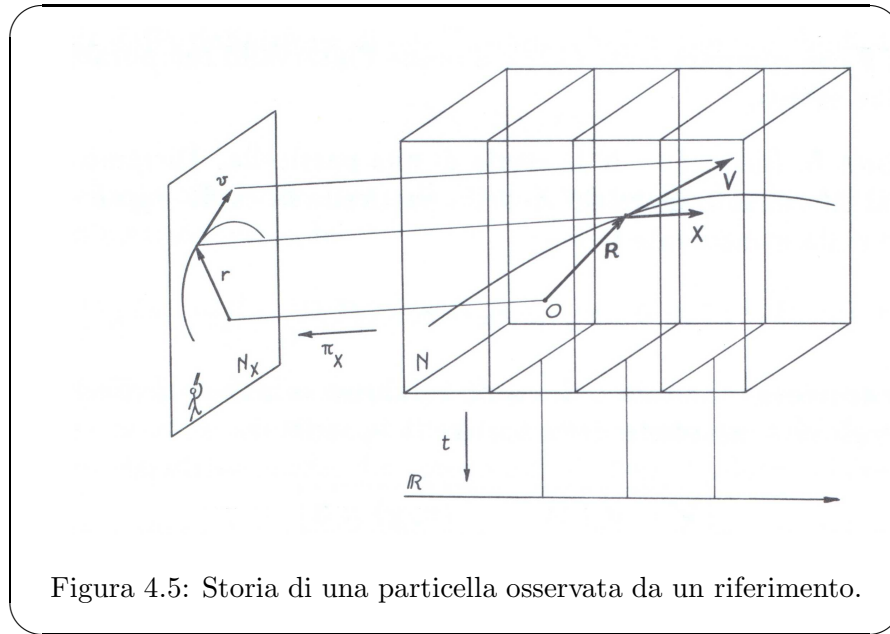


Figura 4.5: Storia di una particella osservata da un riferimento.

Si consideri ora la presenza di due riferimenti inerziali \mathbf{X} e \mathbf{X}' . Abbiamo, secondo quanto finora visto, due rappresentazioni tridimensionali dello spazio fisico, $N_{\mathbf{X}}$ e $N_{\mathbf{X}'}$. Questi due spazi affini sono del tutto *distinti*. Il collegamento tra questi due spazi avviene solo tramite lo spazio tempo N e le proiezioni $\pi_{\mathbf{X}}$ e $\pi_{\mathbf{X}'}$ – Figura 4.6.

I vettori \mathbf{X} e \mathbf{X}' rappresentano le velocità assolute delle particelle dei due riferimenti fisici corrispondenti. Si può per esempio considerare la rappresentazione della velocità assoluta \mathbf{X}' relativa al riferimento \mathbf{X} :

$$(4.39) \quad \boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{v}_{tr} + \mathbf{X}}$$

Il vettore spaziale (costante) \mathbf{v}_{tr} così determinato prende il nome di **velocità di trasciamento** del riferimento \mathbf{X}' rispetto al riferimento \mathbf{X} : è infatti, secondo quanto affermato qui sopra, la velocità relativa a \mathbf{X} delle particelle costituenti il riferimento \mathbf{X}' .

Considerata allora la storia di una particella σ , la sua velocità assoluta \mathbf{V} ammette due rappresentazioni relative ai due riferimenti:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{X} = \mathbf{v}' + \mathbf{X}'.$$

Di qui, essendo per la (4.39)

$$\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}$$

segue subito l'uguaglianza

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{tr}$$

che esprime il **teorema dei moti relativi** – Figura 4.6.

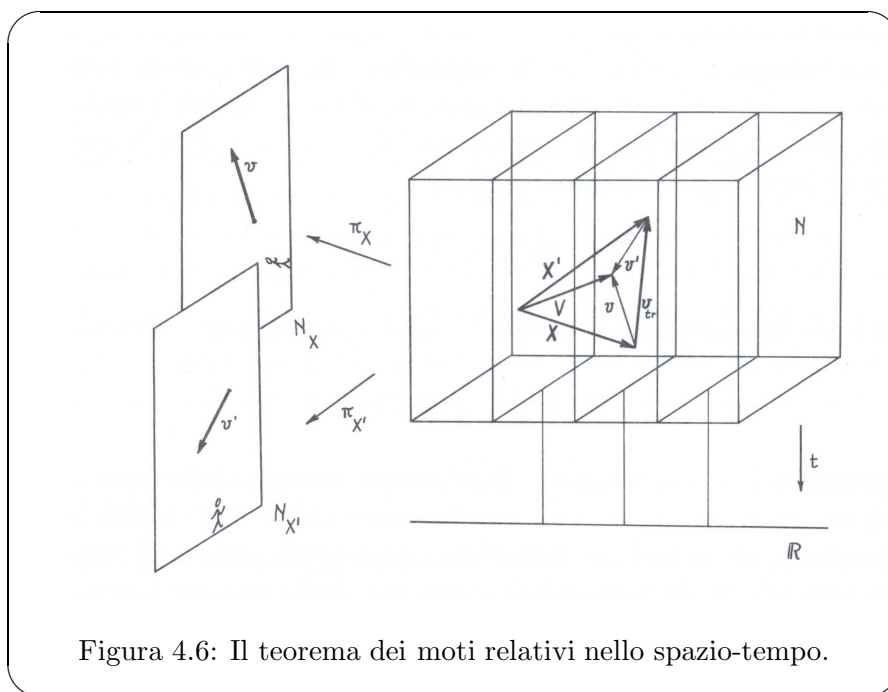


Figura 4.6: Il teorema dei moti relativi nello spazio-tempo.

Si può infine considerare la rappresentazione relativa ad un generico riferimento inerziale \mathbf{X} dell'accelerazione assoluta:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \alpha \mathbf{X}, \quad \langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\kappa} \rangle = 0.$$

Derivando la (4.35) si vede che essa si riduce semplicemente a

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

conformemente all'osservazione già fatta che essa è un vettore spaziale. Dunque l'accelerazione assoluta coincide con l'accelerazione relativa ad un qualunque riferimento inerziale. L'equazione dinamica assoluta (4.31) risulta quindi equivalente all'equazione relativa

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Si noti che anche la forza, come l'accelerazione assoluta, è sempre un vettore spaziale.

4.4 L'equazione di Weierstrass

L'equazione differenziale del secondo ordine su \mathbb{R} del tipo

$$(4.40) \quad \ddot{x} = f(x),$$

equivalente al sistema del primo ordine

$$(4.41) \quad \begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = f(x), \end{cases}$$

si presenta di frequente nello studio dei fenomeni di moto. Per la ricerca e l'analisi delle sue soluzioni $x(t)$, che interpretiamo al solito come moti di un punto sulla retta reale, è conveniente tradurre l'equazione (4.40) in un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$(4.42) \quad \boxed{\dot{x}^2 = \Phi(x)}$$

dove $\Phi(x)$ è una primitiva di $2f(x)$,

$$\Phi'(x) = 2f(x).$$

Chiamiamo **equazione di Weierstrass**² un'equazione del tipo (4.42) e **funzione di Weierstrass** la corrispondente funzione Φ .

Per riconoscerlo osserviamo innanzitutto che, supposta $f(x)$ di classe C^k con $k \geq 1$ in un aperto $D \subseteq \mathbb{R}$, comunque si fissino le condizioni iniziali (x_0, v_0) con $x_0 \in D$, esiste un'unica soluzione (massimale) $x(t)$ tale che $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$. Ebbene, questa è anche una soluzione della (4.42) purché la primitiva $\Phi(x)$ sia quella soddisfacente alla condizione

$$(4.43) \quad v_0^2 = \Phi(x_0).$$

Essendo infatti

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 - \Phi(x)) = 2\dot{x}\ddot{x} - \Phi'(x)\dot{x} = 2\dot{x}(\ddot{x} - f(x)),$$

si vede che per ogni soluzione della (4.40) questa derivata è nulla; dunque la funzione $\dot{x}^2 - \Phi(x)$ è costante lungo le soluzioni dell'equazione differenziale (4.40) (è un integrale primo). Pertanto se vale inizialmente la (4.43) si ha sempre $\dot{x}^2 - \Phi(x) = 0$, il che significa che la soluzione della (4.40) considerata è anche soluzione della (4.42). Viceversa, dalle uguaglianze ora scritte si vede che una soluzione della (4.42) è anche soluzione della (4.40) escludendo quegli istanti in cui $\dot{x}(t) = 0$ (**istanti di arresto**). Osserviamo d'altra parte dall'equazione (4.42) che i moti del punto corrispondenti ad una prefissata primitiva $\Phi(x)$ devono necessariamente avvenire in intervalli dell'asse x in cui $\Phi(x) \geq 0$, intervalli che sono delimitati dagli zeri della $\Phi(x)$. Ma la stessa equazione (4.42) mostra che questi zeri sono **posizioni di arresto** del punto, cioè posizioni in cui il punto ha necessariamente velocità

² Karl Weierstrass, 1815 - 1897.

nulla. Da tutto questo si comprende che nello studio del comportamento delle soluzioni dell'equazione (4.40) giocano un ruolo essenziale gli zeri della funzione di Weierstrass Φ . Vediamo come.

Fissate le condizioni iniziali (x_0, v_0) , sia $\Phi(x)$ la funzione di Weierstrass determinata dalla (4.43). Consideriamo i due casi: (I) $v_0 = 0$ e (II) $v_0 \neq 0$.

Caso (I). La (4.43) mostra che x_0 è uno zero di Φ : $\Phi(x_0) = 0$. Distinguiamo due sottocasi:

(Ia) x_0 è uno zero semplice di Φ e quindi $f(x_0) \neq 0$,

(Ib) x_0 è uno zero multiplo e quindi $f(x_0) = 0$.³

Sottocaso (Ia). Il punto non può rimanere in x_0 , perché la funzione costante $x(t) = x_0$ non può essere soluzione della (4.40), essendo il primo membro identicamente nullo e il secondo non nullo (perché $f(x_0) \neq 0$). Il punto quindi abbandona la posizione x_0 nella direzione in cui $\Phi(x) > 0$.

Sottocaso (Ib). La funzione costante $x(t) = x_0$ è questa volta soluzione della (4.40) ed è unica. Dunque il punto permane indefinitamente nella posizione iniziale x_0 . Uno zero multiplo della $\Phi(x)$ è pertanto una **posizione di equilibrio**.

Caso (II). Per la (4.43) si ha $\Phi(x_0) > 0$. In questo caso $x(t)$ è monotona crescente o decrescente, per un intorno $t > 0$, a seconda che sia $v_0 > 0$ oppure $v_0 < 0$. Il punto si muoverà verso un primo zero x_1 della $\Phi(x)$ (dove si arresta) o verso un estremo x_1 del suo campo di definizione, eventualmente $+\infty$ o $-\infty$. Se x_1 è uno zero multiplo allora esso è una **meta asintotica** per il moto $x(t)$ nel senso che

$$x(t) \neq x_1, \quad \forall t > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1.$$

In altre parole si ha un **moto asintotico**: il punto si avvicina indefinitamente alla posizione x_1 senza mai raggiungerla. Si può dimostrarlo per assurdo. Se raggiungesse x_1 ad un certo istante t_1 , qui avrebbe velocità nulla e vi resterebbe per sempre perché x_1 è uno zero multiplo: caso (Ib).

Osserviamo d'altra parte che se $x(t)$ è una soluzione della (4.42) lo è anche la funzione $x(-t)$. Ma se $x(t)$ è il moto ora considerato, quello a ritroso è assurdo perché il punto uscirebbe da uno zero multiplo, cosa vietata per quanto visto nel caso (Ib).

Se x_1 è uno zero semplice allora esso viene raggiunto in un tempo finito t_1 dato dall'integrale

$$(4.44) \quad t_1 = \pm \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}$$

col segno $+$ se $x_1 > x_0$ (cioè se $v_0 > 0$: $x(t)$ monotona crescente) o il segno $-$ nel caso

³ Diciamo che x_0 è uno *zero semplice* di una funzione $\Phi(x)$ se in x_0 si annulla la funzione ma non la sua derivata prima: $\Phi(x_0) = 0$, $\Phi'(x_0) \neq 0$. È uno *zero multiplo* se invece si annulla anche la derivata prima: $\Phi(x_0) = \Phi'(x_0) = 0$.

opposto. Infatti dall'equazione (4.42) segue la duplice equazione

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}$$

la cui integrazione, osservato che l'integrando ha segno costante, fornisce una funzione monotona

$$(4.45) \quad t(x) = \pm \int_{x_0}^x \frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}},$$

funzione inversa della soluzione $x(t)$ considerata. Si noti che l'integrale (4.44) è improprio, perché l'integrando non è limitato per $x \rightarrow x_1$. Tuttavia è un integrale finito perché l'integrando è un infinito di ordine < 1 in quel punto, essendo questo uno zero semplice di Φ .⁴

Si osservi ancora che per $t > t_1$ il punto abbandona la posizione x_1 , per quanto visto nel caso (Ia), per ritornare a ripercorrere in senso contrario l'intorno di x_1 in cui Φ è positiva. Uno zero semplice si comporta quindi da **punto di riflessione**.

Se infine nella direzione in cui si muove inizialmente il punto non vi sono zeri di $\Phi(x)$, questo raggiunge un estremo x_1 del campo di definizione di Φ oppure vi tende asintoticamente a seconda che l'analogo integrale (4.44) sia finito oppure no. Il caso (II) è così completato. Possiamo allora riassumere tutta la discussione nel quadro seguente:

$$\begin{array}{l} x_1 \text{ zero della } \Phi(x) \\ \text{con cond. iniziali}(x_0, v_0) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{zero semplice} & \Longleftrightarrow \text{riflessione} \\ \text{zero multiplo, } x_1 \neq x_0 & \Longleftrightarrow \text{meta asintotica} \\ \text{zero multiplo, } x_1 = x_0 & \Longleftrightarrow \text{equilibrio} \end{array} \right.$$

⁴ Data una funzione $F(x)$ continua in un intervallo $[x_0, x_1)$ ma non limitata in x_1 , si pone

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x) dx = \lim_{x \rightarrow x_1} \int_{x_0}^x F(u) du.$$

Dall'Analisi sappiamo che una condizione sufficiente perché questo limite sia finito è che la $F(x)$ abbia un *infinito di ordine* $r < 1$. Si dice che F ha un infinito di ordine $r > 0$ se esiste una costante positiva A tale che nell'intorno sinistro di x_1 vale la disuguaglianza

$$|F(x)| \leq A \frac{1}{(x_1 - x)^r}.$$

Nel caso presente è $F(x) = (\Phi(x))^{-\frac{1}{2}}$. Siccome $\Phi(x)$ ha uno zero semplice in x_1 , la funzione integranda $F(x)$ ha un infinito di ordine $r = \frac{1}{2}$. Infatti uno zero semplice è di ordine 1, perché per il teorema di Lagrange, posto che $\Phi(x_1) = 0$, si ha per ogni x prossimo a x_1

$$\Phi(x) = \Phi'(\xi)(x - x_1)$$

con $x < \xi < x_1$. Siccome $\Phi'(x)$ è continua nell'intorno sinistro di x_1 e inoltre $\Phi'(x_1) \neq 0$, vale senz'altro una limitazione del tipo $|\Phi'(x)| \leq A$ con $A > 0$. Dunque dalla formula precedente segue che a sinistra di x_1 vale la limitazione

$$|\Phi(x)| \leq A(x_1 - x),$$

la quale mostra appunto che $\Phi(x)$ ha uno zero di ordine 1. Di conseguenza la radice $\sqrt{\Phi(x)}$ ha uno zero di ordine $\frac{1}{2}$ e quindi l'inversa un infinito di ordine $\frac{1}{2}$. Di qui la finitezza dell'integrale (4.45).

Si consideri per esempio il caso in cui la posizione iniziale x_0 è all'interno di un intervallo $I_0 = [x_1, x_2]$ delimitato da due zeri semplici successivi della funzione Φ – Figura 4.7 (a). Nell'intervallo aperto (x_1, x_2) la Φ è necessariamente positiva. Supposto $v_0 > 0$, il punto si muoverà per valori crescenti di x fino a raggiungere in un tempo finito lo zero x_2 dove si arresterà, per proseguire il moto in direzione opposta, cioè per valori decrescenti di x , fino a raggiungere in un tempo finito l'estremo sinistro x_1 dell'intervallo. Qui avrà un nuovo istante di arresto, invertirà il moto fino a ritrovarsi in x_0 con la stessa velocità iniziale v_0 , e tutto si ripeterà all'infinito. Pertanto il punto si muove sempre nell'intervallo $[x_1, x_2]$ toccandone alternativamente gli estremi. Il moto è periodico e il periodo è dato dall'integrale

$$(4.46) \quad T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Infatti il tempo impiegato a percorrere l'intervallo in un verso o in quello opposto è lo stesso ed è dato dall'integrale (4.45) esteso a tale intervallo. Si consideri, altro esempio, il caso di uno zero multiplo x_1 illustrato dalla Figura 4.7 (b). Se il punto si muove inizialmente verso lo zero x_1 , continuerà a muoversi in quella direzione senza però mai raggiungere x_1 .

È infine importante notare che $\Phi(x)$ è una primitiva di $2f(x)$ dipendente dalle condizioni iniziali (x_0, v_0) . Quindi al variare di queste, la $\Phi(x)$ varia per una costante additiva. In altre parole il suo grafico subisce delle *traslazioni verticali* (cioè lungo l'asse y) al variare delle condizioni iniziali. Ciò consente, nota la $\Phi(x)$ per una coppia di condizioni iniziali, di avere un'idea globale di tutte le possibili distribuzioni degli zeri e quindi di tutti i tipi di moti, per *tutte* le condizioni iniziali.

4.5 Dinamica del punto vincolato

Un punto materiale, anziché essere libero di occupare qualunque posizione nello spazio e di assumere qualunque velocità, può essere soggetto a **vincoli di posizione** o a **vincoli di velocità**. Un vincolo di posizione può essere rappresentato da una superficie (fissa o mobile) oppure da una curva (fissa o mobile): al vettore posizione $\mathbf{r} = OP$ è imposto di soddisfare un'equazione del tipo

$$(4.47) \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

rappresentante la superficie al tempo t , oppure una coppia di equazioni

$$(4.48) \quad \varphi_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varphi_2(\mathbf{r}, t) = 0,$$

rappresentanti la curva al tempo t . Ogni **moto compatibile con il vincolo** deve essere rappresentato da una funzione $OP = \mathbf{r}(t)$ soddisfacente identicamente la (4.47) o le (4.48). Affinché la (4.47) rappresenti una superficie regolare si richiede che la funzione φ abbia, per ogni istante t e per i punti soddisfacenti alla (4.47), gradiente non nullo. Analogamente, affinché le (4.48) rappresentino una curva regolare si richiede che le funzioni

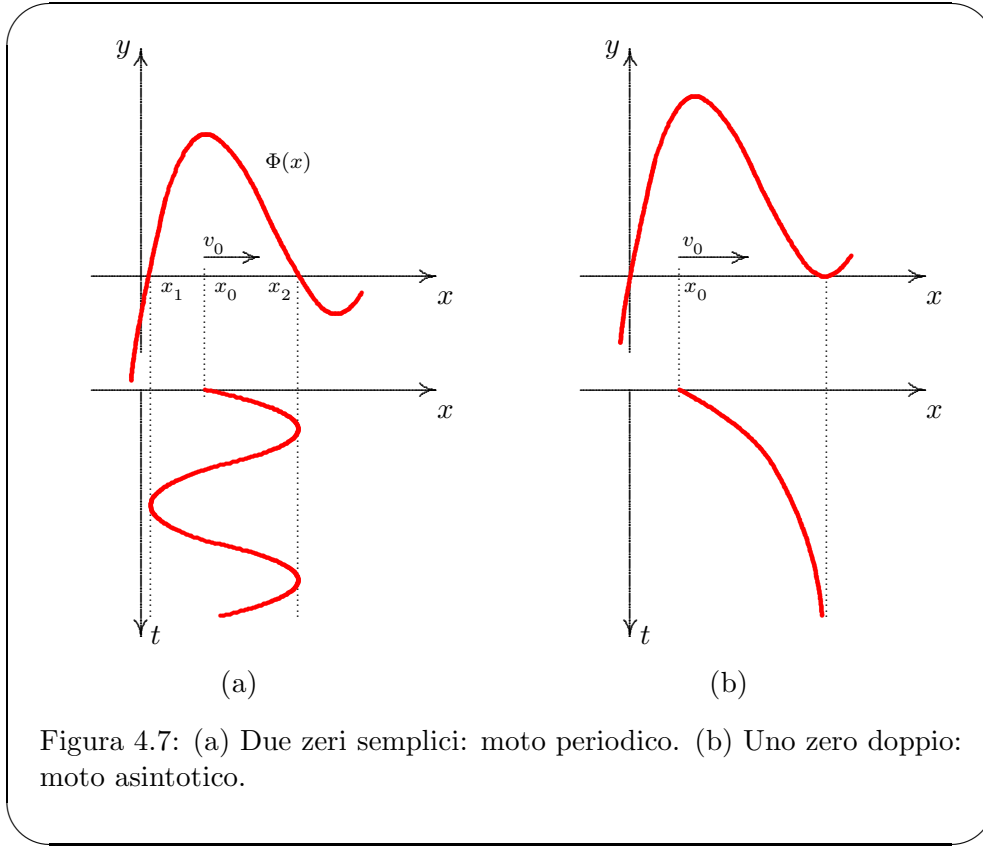


Figura 4.7: (a) Due zeri semplici: moto periodico. (b) Uno zero doppio: moto asintotico.

φ_1 e φ_2 abbiano, per ogni t e per i punti soddisfacenti alle (4.48), gradienti linearmente indipendenti.

Un vincolo di posizione rappresentato da un'uguaglianza del tipo (4.47) (superficie) è un **vincolo bilaterale**. Si possono considerare anche **vincoli unilaterali**, rappresentati da disuguaglianze del tipo $\varphi(\mathbf{r}, t) \geq 0$ (per esempio il caso del pendolo: il punto rappresentativo è vincolato a non occupare posizioni esterne ad una sfera di raggio pari alla lunghezza del filo, inestendibile ma flessibile, del pendolo).

Un vincolo di posizione implica sempre un vincolo di velocità, ma non viceversa. Per esempio per un punto vincolato ad una superficie di equazione (4.47) le velocità devono soddisfare alla condizione

$$(4.49) \quad \text{grad}(\varphi) \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

che è la scrittura sintetica dell'equazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

ottenuta derivando totalmente rispetto al tempo la rappresentazione in coordinate cartesiane (x^α) dell'equazione (4.47). Si ha conferma dalla (4.49) che se il vincolo è fisso (il

tempo t non compare esplicitamente nella funzione φ) allora la velocità è sempre tangente al vincolo. Si osservi che il vincolo di velocità (4.49) è lineare (non omogeneo) nella \mathbf{v} .

Dal punto di vista dinamico, conformemente al principio newtoniano secondo cui ogni azione che tende a rimuovere un punto dal suo stato naturale di moto rettilineo uniforme è una forza rappresentata da un vettore, si postula che il soddisfacimento del vincolo sia da attribuirsi alla presenza di un vettore-forza, detto **forza reattiva** o **reazione vincolare**.

In base a questo postulato, detto **postulato delle reazioni vincolari**, l'equazione della dinamica di un punto soggetto ad un vincolo diventa

$$(4.50) \quad m \mathbf{a} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r$$

dove il vettore \mathbf{F}_a , detto **forza attiva**, rappresenta la somma di tutte le forze di natura non vincolare che agiscono sul punto.

Mentre della forza attiva \mathbf{F}_a si postula una ben determinata dipendenza dalla posizione e velocità del punto (cioè una legge di forza, eventualmente dipendente dal tempo), la reazione vincolare è a priori un'incognita. Si sa soltanto, in base al postulato, che essa deve operare in modo tale da rendere sempre soddisfatto il vincolo. Alla reazione vincolare è tuttavia imposta una **condizione costitutiva** che traduce in termini matematici le caratteristiche fisiche del vincolo, cioè il tipo di forza reattiva che il vincolo è capace di esprimere.

La condizione costitutiva più semplice è quella di **vincolo liscio**, rappresentata dall'ortogonalità della reazione vincolare \mathbf{F}_r al vincolo (curva o superficie). Si osservi che questa condizione traduce matematicamente il concetto intuitivo di assenza di attrito, ovvero di non dissipazione di potenza da parte del vincolo (almeno nel caso in cui questo è fisso). Infatti se la potenza reattiva $W_r = \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}$ è sempre nulla qualunque sia la velocità del punto, siccome questa è sempre tangente al vincolo (se questo è fisso), segue che \mathbf{F}_r è ortogonale.

Esaminiamo in questo paragrafo la dinamica di un punto vincolato ad un vincolo liscio e fisso. Per la discussione del caso di un vincolo mobile è conveniente porsi nel contesto più generale della meccanica lagrangiana (Cap. 5).

La dinamica di un **punto vincolato ad una superficie liscia fissa**, per quanto sopra visto, è retta dal sistema di equazioni

$$(4.51) \quad \begin{cases} \varphi(\mathbf{r}) = 0, \\ m \mathbf{a} = \mathbf{F}_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \lambda \operatorname{grad}(\varphi) \end{cases}$$

composto dall'equazione della superficie (4.47), dall'equazione fondamentale (4.50) e dalla condizione costitutiva di vincolo liscio, che per il teorema del gradiente si può esprimere con l'uguaglianza

$$(4.52) \quad \mathbf{F}_r = \lambda \operatorname{grad}(\varphi)$$

dove λ è un coefficiente di proporzionalità. Si tratta di un sistema differenziale del secondo ordine nell'incognita $\mathbf{r}(t)$ contenente un'incognita ausiliaria $\lambda(t)$, detta **moltiplicatore di**

Lagrange.⁵ La discussione di questo sistema (riportata in appendice al paragrafo) porta alla conclusione seguente: *comunque si fissino la posizione e la velocità iniziali del punto, compatibili con il vincolo, esiste un'unica soluzione $(\mathbf{r}(t), \lambda(t))$ del sistema (4.51).*

Un metodo alternativo alle equazioni (4.51) consiste nel decomporre l'equazione fondamentale (4.50) nella sua parte tangente e nella sua parte ortogonale alla superficie. Ricordiamo a questo proposito – §2.7, formula (2.76) – che l'accelerazione è decomponibile nella somma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(i)} + \mathbf{a}_{(N)}$$

dove $\mathbf{a}_{(i)}$ è la parte tangente (l'accelerazione intrinseca) e $\mathbf{a}_{(N)}$ è la parte ortogonale. Quest'ultima risulta essere data da

$$\mathbf{a}_{(N)} = \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \mathbf{N},$$

dove \mathbf{B} è la seconda forma fondamentale ed \mathbf{N} è un versore ortogonale alla superficie. La condizione di vincolo liscio si esprime semplicemente nell'uguaglianza

$$\mathbf{F}_r = R \mathbf{N}.$$

Decomposta anche la forza attiva nella somma

$$(4.53) \quad \mathbf{F}_a = \mathbf{F} + F_N \mathbf{N} \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0)$$

della sua parte tangente \mathbf{F} e della sua parte ortogonale alla superficie $F_N \mathbf{N}$, l'equazione (4.50) risulta allora decomposta nelle due equazioni

$$(4.54) \quad \begin{cases} m \mathbf{a}_{(i)} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ m \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = F_N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + R. \end{cases}$$

È importante osservare che la prima di queste equazioni non coinvolge la reazione vincolare e permette da sola la determinazione dei moti. La seconda invece, una volta che sia determinato il moto, consente di calcolare la funzione $R(t)$ e quindi la reazione vincolare.

Se si considerano coordinate (q^i) sulla superficie ($i = 1, 2$), ricordate le espressioni delle componenti dell'accelerazione intrinseca e posto

$$(4.55) \quad \mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i,$$

si vede che la prima delle equazioni (4.54) risulta equivalente al seguente sistema del primo ordine:

$$(4.56) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{hj}^i v^h v^j + \frac{1}{m} F^i(q^j, v^j, \tau), \\ \frac{d\tau}{dt} = 1, \end{cases} \quad (h, i, j = 1, 2)$$

⁵ Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813.

ovvero, se le forze attive non dipendono dal tempo, al sistema

$$(4.57) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^i}{dt} = -\Gamma_{hj}^i v^h v^j + \frac{1}{m} F^i(q^j, v^j). \end{cases} \quad (h, i, j = 1, 2)$$

NOTA 4.5.1 – Il sistema (4.57) corrisponde ad un campo vettoriale \mathbf{X}_L sopra lo spazio TQ dei vettori tangenti alla superficie Q rappresentante il vincolo, di coordinate (q^i, v^i) . Come vedremo, TQ è una *varietà differenziabile* di dimensione 4. Per il teorema di Cauchy esiste una ed una sola curva integrale massimale basata in un prefissato punto iniziale di TQ , vale a dire posizione e velocità iniziali del punto. Questa curva sarà localmente rappresentata da quattro equazioni parametriche, $q^i = q^i(t)$, $v^i = v^i(t)$, soluzioni del sistema (4.57). Le prime due, $q^i = q^i(t)$, forniscono il moto del punto. •

NOTA 4.5.2 – Se la forza attiva \mathbf{F}_a è nulla si dice che il punto si muove di **moto spontaneo** sulla superficie: è soggetto alla sola reazione del vincolo. In tal caso l'equazione (4.54)₁ fornisce $\mathbf{a}_{(i)} = 0$. I moti spontanei su di una superficie sono quindi moti geodetici – §2.8.2. •

NOTA 4.5.3 – Nel caso di un punto vincolato ad una superficie l'energia cinetica è data da

$$(4.58) \quad T = \frac{1}{2} m A_{ij} v^i v^j,$$

dove le A_{ij} , funzioni delle coordinate q^i , sono le componenti della prima forma fondamentale. Infatti: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^i v^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = v^i v^j A_{ij}$. Le equazioni di moto di un punto vincolato ad una superficie liscia possono anche costruirsi, con un procedimento diretto, partendo dalla conoscenza dell'energia cinetica e delle cosiddette **forze lagrangiane**:

$$(4.59) \quad \phi_i = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Infatti, per quanto si è visto sulle componenti covarianti dell'accelerazione di un punto libero e sull'accelerazione intrinseca di un punto su di una superficie, l'equazione (4.54)₁ risulta equivalente alle due equazioni

$$(4.60) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \phi_i \quad (i = 1, 2)$$

posto $v^i = \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$. Queste sono le **equazioni di Lagrange**, la cui validità si estende ad una vasta classe di sistemi meccanici (Cap. 5). •

NOTA 4.5.4 – Le considerazioni svolte al §4.2 sugli integrali primi tipici associati alle grandezze cinetiche fondamentali possono estendersi al caso di un punto vincolato ad una superficie. Omettendo la discussione dettagliata, consideriamo solo tre esempi.

(I) Se il vincolo e la forza attiva sono tali che la somma $\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r$ è un vettore sempre diretto verso una retta fissa sussiste l'integrale primo del momento assiale.

(II) Se la superficie è liscia e fissa e la forza attiva è conservativa sussiste l'integrale primo dell'energia.

(III) In quest'ultimo caso la restrizione del potenziale U alla superficie si rappresenta con una funzione $U(q^i)$ delle coordinate della superficie. Le forze lagrangiane risultano allora date da

$$(4.61) \quad \phi_i = \frac{\partial U}{\partial q^i}$$

Per riconoscerlo basta calcolare la potenza della forza attiva $W_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}$. Da un lato si ha

$$W_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v}^i \mathbf{E}_i = \phi_i v^i.$$

Dall'altro

$$W_a = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q^i} v^i. \quad \bullet$$

NOTA 4.5.5 – La dinamica di un **punto vincolato ad una curva liscia fissa** può essere trattata proiettando l'equazione fondamentale (4.50) sul triedro fondamentale della curva $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Poiché l'accelerazione è suscettibile della decomposizione intrinseca

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{t} + c \dot{s}^2 \mathbf{n},$$

posto

$$\mathbf{F}_a = F_{at} \mathbf{t} + F_{an} \mathbf{n} + F_{ab} \mathbf{b}, \quad \mathbf{F}_r = F_{rn} \mathbf{n} + F_{rb} \mathbf{b}$$

– si noti che la condizione di vincolo liscio si esprime nell'annullarsi della componente tangente alla curva della reazione vincolare – l'equazione fondamentale (4.50) risulta decomposta nel sistema di equazioni

$$(4.62) \quad \begin{cases} m \ddot{s} = F_{at}(s, \dot{s}, t), \\ m c \dot{s}^2 = F_{an}(s, \dot{s}, t) + F_{rn}, \\ 0 = F_{ab}(s, \dot{s}, t) + F_{rb}. \end{cases}$$

dette **equazioni intrinseche del moto**. La prima non coinvolge la reazione vincolare e quindi consente di determinare completamente il moto. Essa infatti è un'equazione differenziale del secondo ordine nella funzione incognita $s(t)$. Noto il moto, la seconda consente di calcolare la reazione normale F_{rn} e la terza la reazione binormale F_{rb} , sicché tutti gli elementi incogniti risultano completamente determinati. \bullet

NOTA 4.5.6 – Le argomentazioni della Nota 4.5.4 si possono ripetere per il punto vincolato ad una curva. In questo caso però si può affermare che nel caso di una forza attiva posizionale, qualunque essa sia, sussiste sempre l'integrale primo dell'energia. Infatti la prima equazione intrinseca diventa

$$m \ddot{s} = F_{at}(s)$$

e se si considera una qualunque primitiva $U(s)$ della funzione $F_{at}(s)$ risulta:

$$W_a = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{v} = F_{at} \dot{s} = \frac{dU}{ds} \dot{s} = \frac{dU}{dt}.$$

Sicché dal teorema dell'energia

$$W_a + W_r = \frac{dT}{dt},$$

essendo $W_r = 0$ per l'ipotesi del vincolo liscio, segue $\frac{d}{dt}(T - U) = 0$. •

NOTA 4.5.7 – Nel caso di un punto su di una curva l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2.$$

Sussistendo l'integrale primo dell'energia, si ha dunque

$$(4.63) \quad \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - U(s) = h,$$

dove h è la costante dell'energia. Posto allora

$$f(s) = \frac{1}{m} F_{at}(s), \quad \Phi(s) = \frac{2}{m} (h + U(s)),$$

l'equazione di moto (4.62)₁ e l'integrale dell'energia (4.63) assumono rispettivamente la forma:

$$(4.64) \quad \ddot{s} = f(s), \quad \dot{s}^2 = \Phi(s).$$

Si osservi che $\Phi(s)$ è una primitiva di $2f(s)$. La seconda è l'equazione di Weierstrass e si può quindi applicare la discussione di §4.4. •

Discussione del sistema di equazioni (4.51). Si consideri lo spazio $T\mathcal{E}_3 \simeq \mathbb{R}^6$ dei vettori applicati dello spazio affine euclideo tridimensionale \mathcal{E}_3 , cioè delle coppie di vettori (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , di coordinate (x^α, v^α) . Sia $Q \subset \mathcal{E}_3$ la superficie di vincolo di equazione $\varphi(x^\alpha) = 0$. Sia $TQ \subset T\mathcal{E}$ l'insieme dei vettori tangenti alla superficie Q . Un vettore è tangente alla superficie se e solo se è applicato in un punto di questa ed inoltre è ortogonale a $\text{grad}(\varphi)$. Pertanto TQ è il sottoinsieme di $T\mathcal{E}_3 \simeq \mathbb{R}^6$ definito dalle due equazioni

$$(4.65) \quad \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\varphi) = 0.$$

Poiché la matrice 2×6 delle derivate parziali

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} & \frac{\partial \varphi}{\partial v^\alpha} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} & \frac{\partial \psi}{\partial v^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} & 0 \\ v^\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} & \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \end{bmatrix}$$

ha rango massimo (le derivate $\partial\varphi/\partial x^\alpha$, componenti del gradiente, non si annullano mai simultaneamente per l'ipotesi di regolarità della superficie Q) le equazioni (4.65) definiscono TQ come superficie regolare di codimensione 2 in \mathbb{R}^6 . Introdotta la forma quadratica associata all'hessiano della funzione φ ,

$$\Phi(\mathbf{v}) = v^\alpha v^\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},$$

si può affermare che:

TEOREMA 4.5.1 – *I moti $\mathbf{r}(t)$ di un punto vincolato ad una superficie liscia fissa, cioè le soluzioni del sistema (4.51), sono la prima componente di tutte e sole le curve integrali $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ basate in punti di TQ del sistema dinamico \mathbf{X} su $T\mathcal{E}_3$ di equazioni*

$$(4.66) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_a - \left(\frac{1}{m} \mathbf{F}_a \cdot \text{grad}(\varphi) + \Phi(\mathbf{v}) \right) \frac{\text{grad}(\varphi)}{|\text{grad}(\varphi)|^2}. \end{cases}$$

In corrispondenza a tali curve integrali il moltiplicatore di Lagrange $\lambda(t)$ è dato da

$$(4.67) \quad \lambda = - \frac{m \Phi(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_a \cdot \text{grad}(\varphi)}{|\text{grad}(\varphi)|^2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si moltiplichi scalarmente la (4.51)₂ per $\text{grad}(\varphi)$ in modo da risolverla rispetto a λ . Tenuto conto che per ogni moto compatibile col vincolo si ha $\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\varphi) = 0$, quindi che

$$(4.68) \quad \mathbf{a} \cdot \text{grad}(\varphi) = - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \text{grad}(\varphi) = - \Phi(\mathbf{v}),$$

si trova la (4.67). Sostituendo la (4.67) nella stessa (4.51)₂ si vede che le soluzioni del sistema (4.51) soddisfano al sistema (4.66). Viceversa, osservato che per ogni curva su $T\mathcal{E}_3$ si ha

$$(4.69) \quad \psi = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \text{grad}(\varphi) + \Phi(\mathbf{v}),$$

si consideri una curva integrale del sistema (4.66) basata in un punto di TQ . In virtù della (4.66)₂ si ha per la (4.69)₂ $\dot{\psi} = 0$, quindi $\psi = \text{costante}$, anzi $\psi = 0$ perché così è inizialmente. Dalla (4.69)₁ segue allora $\varphi = \text{costante}$, anzi $\varphi = 0$ perché così è inizialmente. Pertanto ogni curva integrale del sistema (4.66) basata in TQ giace tutta su TQ (vale a dire: il campo vettoriale \mathbf{X} è tangente a TQ). Una tale curva, per il modo con cui si è costruita l'equazione (4.66)₂, è soluzione del sistema (4.51). \square

Si noti come questo metodo (del moltiplicatore di Lagrange) appaia più complesso rispetto a quello della decomposizione ortogonale-tangente dell'equazione della dinamica, se non altro perché richiede l'integrazione di un sistema di sei equazioni differenziali anziché di quattro.

4.6 Il moto dei gravi

Dalla Fisica sappiamo che la forza agente su di un punto materiale liberamente gravitante in prossimità della superficie terrestre, per tempi brevi e per piccoli spazi, preso come riferimento la Terra ma trascurate le forze apparenti (e la resistenza dell'aria), è rappresentabile da un vettore **costante** proporzionale alla massa gravitazionale del punto (che si identifica con la sua massa inerziale) e **verticale**, cioè ortogonale al piano **orizzontale** rappresentante localmente la superficie terrestre, e orientato verso il basso. La legge di forza è cioè $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$, dove \mathbf{g} è un vettore costante, detto **accelerazione gravitazionale**. L'equazione differenziale del moto si riduce allora semplicemente a

$$(4.70) \quad \mathbf{a} = \mathbf{g} \quad (= \text{cost.}).$$

Con due integrazioni successive si ottengono i vettori velocità e posizione del punto in funzione del tempo:

$$(4.71) \quad \mathbf{v} = \mathbf{g} t + \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0,$$

essendo $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ posizione e velocità iniziali. Le (4.71) mostrano che il moto è piano (il piano del moto è verticale e determinato dalla posizione iniziale P_0 e dalla velocità iniziale \mathbf{v}_0) ed è la composizione di un moto rettilineo uniforme di velocità \mathbf{v}_0 e di un moto verticale uniformemente accelerato. Essendo $\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0$ con \mathbf{u} versore orizzontale qualsiasi, sussiste l'integrale primo della quantità di moto secondo ogni direzione orizzontale: la parte orizzontale della velocità resta costante. Siccome la forza è conservativa, di potenziale

$$U = -m g z$$

(si scelgano assi cartesiani (x, y, z) con asse z verticale orientato verso l'alto) sussiste l'integrale primo dell'energia (diviso per la massa)

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + g z = \text{cost.}$$

Siccome la quantità di moto orizzontale è costante, è anche costante la parte per così dire "orizzontale" dell'energia cinetica, sicché combinando i due integrali primi si ottiene un terzo integrale primo:

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 + g z = h, \quad h = \frac{1}{2} \dot{z}_0^2 + g z_0,$$

che può porsi nella forma di equazione di Weierstrass (§4.4)

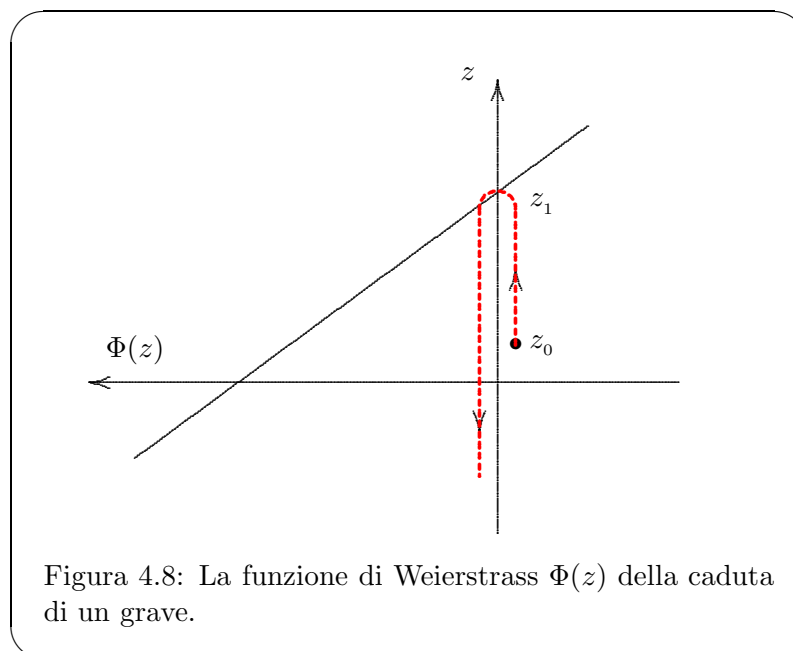
$$\dot{z}^2 = \Phi(z), \quad \Phi(z) = 2(h - g z).$$

La funzione $\Phi(z)$ ha come grafico una retta – Figura 4.8 – e mette quindi in evidenza, qualunque sia la costante h , uno zero semplice z_1 rappresentante la quota massima raggiunta dal grave (se lanciato inizialmente verso l'alto)

$$z_1 = \frac{h}{g} = \frac{1}{2} \frac{\dot{z}_0^2}{g} + z_0.$$

La quota massima è raggiunta in un tempo finito

$$t_1 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{2(h - g z)}} = \frac{\dot{z}_0}{g}.$$



4.7 Il pendolo

S'intende comunemente per **pendolo** un corpo pesante collegato con un filo inestendibile ad un punto fisso O e per il resto libero di muoversi sotto l'influenza della gravità. Si tratta di un sistema meccanico schematizzabile in prima approssimazione in un punto materiale (P, m) vincolato ad una sfera di centro O e raggio ℓ pari alla lunghezza del filo, supposto che questo resti sempre teso, o meglio che esso sia in realtà costituito da un'asticciola rigida di massa trascurabile. Se si trascurano gli attriti dovuti alle articolazioni tra corpo, asta e punto fisso, nonché all'aria, il vincolo è da ritenersi liscio: la forza reattiva \mathbf{F}_r è ortogonale alla sfera e rappresenta la forza che il filo esercita sul punto P (la sua intensità è la *tensione* del filo). Se il riferimento scelto è quello terrestre, per moti di breve durata e a bassa velocità si può trascurare la forza di Coriolis, sicché la forza attiva si riduce alla sola forza peso, la quale può ritenersi costante perché le dimensioni del pendolo sono trascurabili rispetto alla sfera terrestre. Il modello così costruito prende il nome di **pendolo sferico**. Se invece si vuol tener conto della forza di Coriolis, si ottiene il classico **pendolo di Foucault**.

Se la velocità \mathbf{v}_0 del punto è nulla oppure appartiene al piano verticale contenente P_0 e O , allora il moto avviene in questo piano. Per dimostrarlo si può osservare che sussiste l'integrale primo del momento assiale della quantità di moto $OP \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \text{cost.}$, con \mathbf{k} vettore verticale, perché il vettore forza a secondo membro della (4.47) è sempre diretto verso la retta verticale passante per O (oppure, quando $\mathbf{F}_r = 0$, parallela a questa). Questa quantità rappresenta la velocità areale del punto P_* , proiezione del punto P su di un piano orizzontale (ortogonale a \mathbf{k}). Se è nulla all'inizio, essa è sempre nulla, quindi il

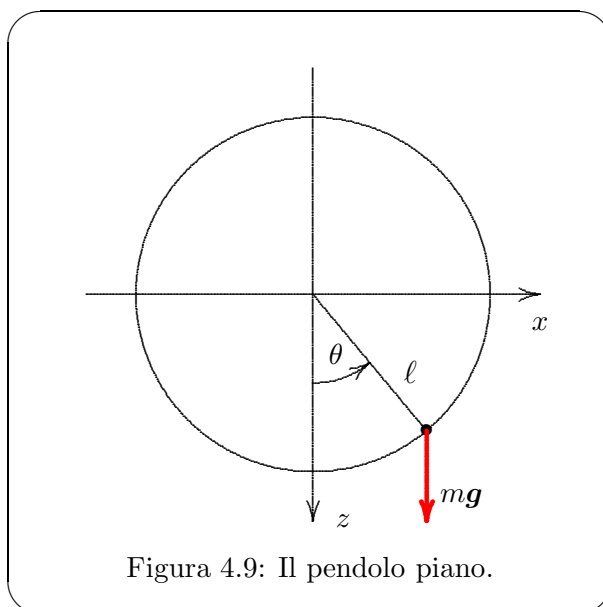


Figura 4.9: Il pendolo piano.

moto avviene in un piano verticale.

Il caso particolare ora considerato giustifica lo studio del **pendolo piano**,⁶ costituito da un punto pesante vincolato ad una circonferenza verticale (cioè giacente su di un piano parallelo al campo di forza costante mg).

Si considerino assi cartesiani (x, z) aventi origine in O , con z verticale orientato verso il basso. Conviene anche considerare l'angolo θ compreso tra OP e l'asse z – Figura 4.9.

Il potenziale della forza peso è $U = mgz$, quindi la sua restrizione alla circonferenza è $U = mgl \cos \theta$. Cominciamo col considerare l'integrale primo dell'energia $T - U = h$, che in questo caso diventa

$$\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - m g \ell \cos \theta = h.$$

Questo produce un'equazione di Weierstrass:

$$\dot{\theta}^2 = \Phi(\theta), \quad \Phi(\theta) = 2 \left(\frac{h}{m \ell^2} + \frac{g}{\ell} \cos \theta \right).$$

Posto

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}, \quad k = \frac{h}{m g \ell},$$

risulta

$$\Phi(\theta) = 2 \omega^2 (k + \cos \theta).$$

Si riconoscono di qui, con l'aiuto dei grafici di Figura 4.10, i vari tipi di moto del pendolo semplice già considerati nell'Esempio 1.14.5.

⁶ Nel seguito ometteremo l'attributo *piano*.

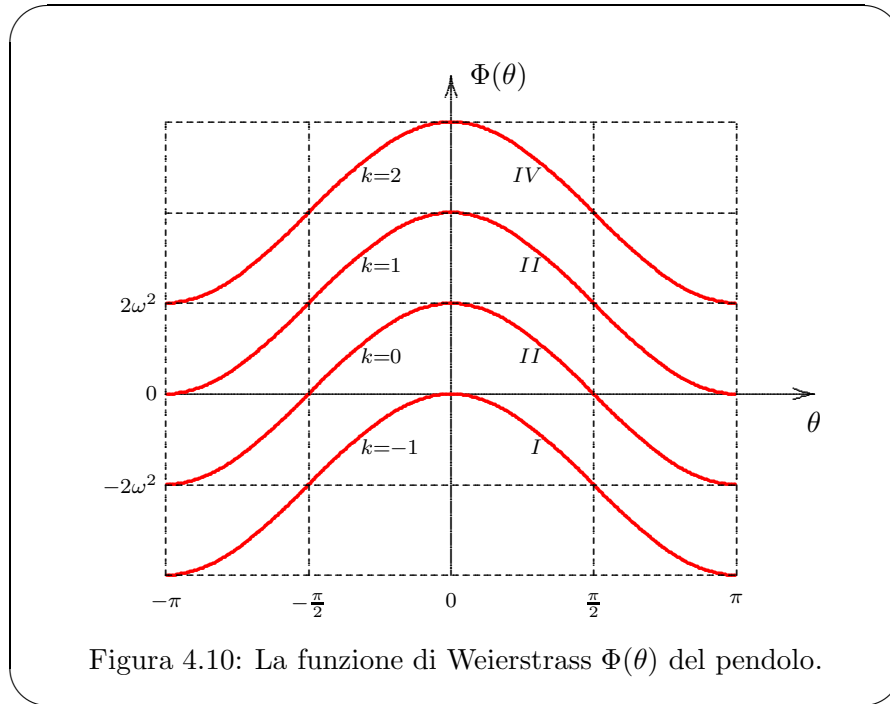


Figura 4.10: La funzione di Weierstrass $\Phi(\theta)$ del pendolo.

(I) Se $k = -1$, si ha uno zero doppio per $\theta = 0$: è uno stato di equilibrio. L'equilibrio è stabile perché per piccole variazioni di k (che per la sua stessa definizione non può mai essere < -1) questo zero doppio si modifica in un intervallino compreso tra due zeri semplici, quindi lo stato di equilibrio si modifica in un moto periodico ("piccole oscillazioni"). La nozione di posizione di equilibrio stabile, derivante da quella di punto critico stabile, sarà precisata al Cap. 5.

(II) Se $-1 < k < 1$, si hanno due zeri semplici θ_1 e θ_2 simmetrici rispetto a $\theta = 0$: il pendolo oscilla tra questi due estremi con moto periodico.

(III) Se $k = 1$, si ha uno zero doppio $\theta = \pm\pi$, che corrisponde alla sommità del pendolo. Questa può essere una meta sintotica oppure una posizione di equilibrio se il pendolo vi si trova inizialmente (l'equilibrio però non è stabile, perché piccole variazioni di k non producono più "piccole oscillazioni").

(IV) Se $k > 1$, la funzione di Weierstrass è sempre positiva, non vi sono zeri: il pendolo non si arresta mai, ruotando sempre nello stesso verso con moto periodico.

Consideriamo ora le equazioni intrinseche del moto (4.62) nel caso del pendolo. Essendo in questo caso $s = \ell \theta$, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{t} = -g \sin \theta$, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = -g \cos \theta$, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} \ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta, \\ m \ell \dot{\theta}^2 = -m g \cos \theta + F_{rn}, \\ 0 = F_{rb}. \end{cases}$$

La prima è l'**equazione del pendolo**:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Nel caso di piccole oscillazioni l'approssimazione $\theta \simeq \sin \theta$ produce l'**equazione del moto armonico**:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0.$$

La seconda equazione intrinseca consente di calcolare la reazione vincolare \mathbf{F}_r che è tutta diretta secondo il versore normale \mathbf{n} . Se si tien conto anche dell'integrale primo dell'energia si trova a conti fatti che

$$F_{rn} = m(\ell \dot{\theta}_0^2 - 2g \cos \theta_0 + 3g \cos \theta).$$

Questa formula esprime quindi la tensione del filo, nota la sua posizione istantanea, la sua posizione iniziale e la sua velocità iniziale. Le eventuali posizioni in cui F_{rn} si annulla sono possibili punti di *distacco* del punto dalla circonferenza.

4.8 Moto di un punto in un campo centrale simmetrico

Un campo di forza $\mathbf{F}(P)$ è detto **campo centrale** se esiste un punto O , detto **centro del campo**, tale che $\mathbf{F}(P)$ è parallelo al vettore OP . Il campo \mathbf{F} ammette in questo caso una rappresentazione del tipo

$$\mathbf{F} = F \mathbf{u},$$

dove \mathbf{u} è il versore di OP ed F è un campo scalare (l'intensità della forza). Più in particolare un campo centrale è detto **simmetrico** o **a simmetria sferica** se la sua intensità F è funzione della sola distanza r dal centro O :

$$\mathbf{F} = F(r) \mathbf{u}.$$

Un tale campo è conservativo: una qualunque primitiva $U(r)$ di $F(r)$ è un potenziale. Per la dinamica di un punto materiale mobile in un campo centrale simmetrico sussistono quindi due integrali primi: l'integrale primo del momento della quantità di moto (o delle aree, vedi §2.5) e l'integrale primo dell'energia. I moti sono centrali di centro O (perché $\mathbf{a} \times \mathbf{r} = 0$), quindi piani. Il piano del moto è individuato dal punto O e dai vettori posizione e velocità iniziali $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$. Se su questo piano si considerano coordinate polari (r, θ) di centro il punto O allora i due integrali primi si traducono nelle uguaglianze

$$(4.72) \quad \begin{cases} r^2 \dot{\theta} = c, \\ \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r) = h, \end{cases}$$

dove c è la costante delle aree e h la costante dell'energia. Fissata la costante delle aree, che supponiamo non nulla (quindi è anche $r \neq 0$), dalla (4.72)₁ si ricava

$$(4.73) \quad \dot{\theta} = \frac{c}{r^2},$$

e quindi dalla (4.72)₂

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - U(r) + \frac{1}{2} m \frac{c^2}{r^2} = h.$$

Quest'equazione, che coinvolge solo la variabile r e la sua derivata prima, assume la forma di equazione di Weierstrass

$$(4.74) \quad \dot{r}^2 = \Phi(r)$$

ponendo

$$(4.75) \quad \Phi(r) = \frac{2}{m} (U(r) + h) - \frac{c^2}{r^2}.$$

D'altra parte, ricordata l'espressione dell'accelerazione in coordinate polari, l'equazione fondamentale della dinamica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ si riduce all'equazione scalare

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{m} F(r)$$

e quindi, ancora per la (4.73), all'equazione

$$(4.76) \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{m} F(r).$$

Questa è l'equazione differenziale del secondo ordine del tipo $\ddot{r} = f(r)$, a cui è associata l'equazione di Weierstrass (4.74) con $\Phi(r)$ primitiva di $2f$. Queste sono le equazioni del **moto radiale** cioè del moto del punto lungo la retta che lo congiunge al centro del campo. Questa retta ruota con velocità angolare data dalla (4.74). Possiamo allora applicare al moto radiale la discussione vista al §4.4. Consideriamo a titolo di esempio tre casi significativi.

(I) Ad uno zero multiplo r_1 di Φ corrisponde un'orbita circolare. Questa è effettivamente percorsa se inizialmente è proprio $r_0 = r_1$. In caso contrario è un'orbita limite perché r_1 è una meta asintotica (se per esempio $r_0 < r_1$ e $\dot{r}_0 > 0$, come in Figura 4.11).

(II) Se la funzione $\Phi(r)$ ha un unico zero semplice r_1 ed è positiva per $r > r_1$, allora l'orbita è illimitata, tangente alla circonferenza di raggio r_1 in un punto P_1 e simmetrica rispetto alla retta OP_1 – Figura 4.12.

(III) Se $r_1 < r_2$ sono due zeri semplici successivi, estremi di un intervallo in cui Φ è positiva, allora l'orbita del punto è tutta interna alla corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggio r_1 e r_2 e tocca alternativamente tali circonferenze in punti detti rispettivamente **apocentri** e **pericentri**, formanti due successioni, (a_1, a_2, \dots) e (p_1, p_2, \dots) , le cui anomalie, misurate sempre nel medesimo verso, differiscono per multipli interi di un angolo θ_* – Figura 4.13. Sebbene il moto radiale sia periodico, in genere non è periodico il moto del punto. Affinché lo sia (e quindi l'orbita sia chiusa) è necessario e sufficiente che la successione degli apocentri (o dei pericentri) sia ciclica, cioè l'angolo θ_* sia commensurabile con π . Se così non è la successione sugli apocentri è densa sulla circonferenza di raggio r_2 e di conseguenza, come si può dimostrare, l'orbita è densa nella corona circolare; in questo caso

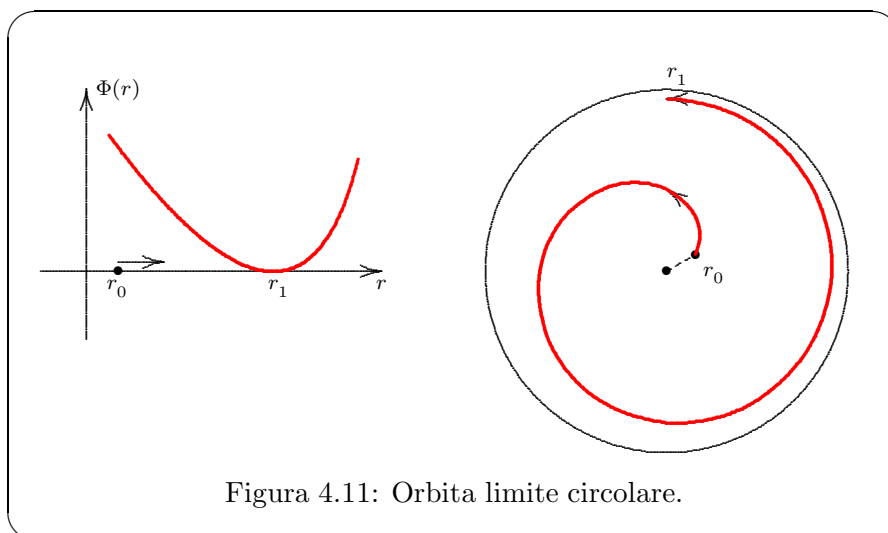


Figura 4.11: Orbita limite circolare.

si dice che il moto è **quasi-periodico**: comunque si fissi un punto della corona circolare, un suo qualunque intorno ha intersezione non vuota con l'orbita.

A questo proposito è naturale chiedersi per quali potenziali l'angolo θ_* è sempre commensurabile con π e quindi le orbite al finito sono sempre chiuse. La risposta è data dal seguente classico **teorema di Bertrand**,⁷ di non immediata dimostrazione.

TEOREMA 4.8.1 – *In un campo centrale simmetrico le orbite al finito sono sempre chiuse se e solo se il potenziale $U(r)$ è del tipo*

$$U = -kr^2$$

oppure del tipo

$$U = \frac{k}{r}$$

con $k > 0$.

Si tratta rispettivamente del potenziale di una forza elastica di origine in O (oscillatore armonico piano) e del potenziale di un campo newtoniano. Per questi potenziali le orbite al finito sono ellittiche (per il secondo, sono tutte al finito).

Ritornando al caso generale, va osservato che dalla (4.74) si trae l'equazione differenziale

$$(4.77) \quad dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}}$$

il cui segno va scelto concorde a \dot{r}_0 e la cui integrazione determina la funzione

$$(4.78) \quad t(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

⁷ Joseph Louis François Bertrand, 1822-1900.

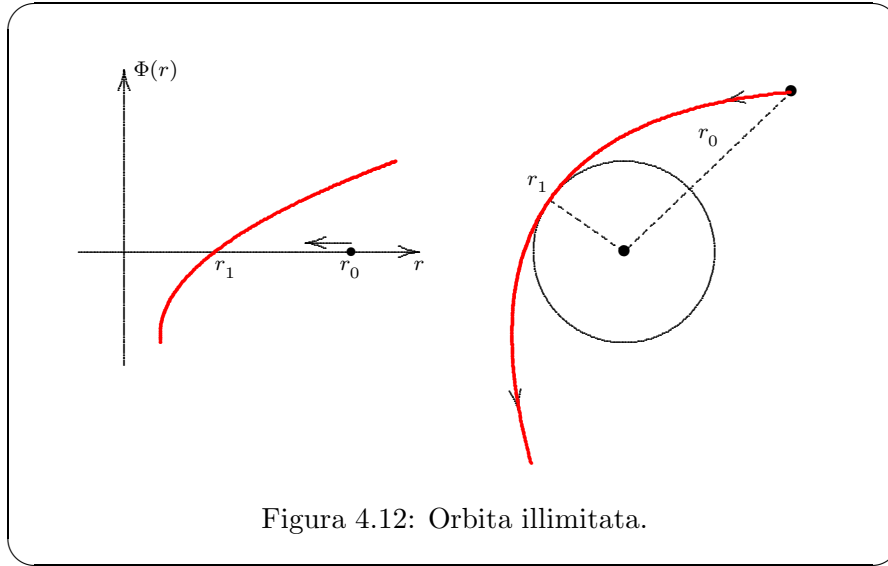


Figura 4.12: Orbita illimitata.

Questa è invertibile nella funzione $r(t)$ che fornisce il moto radiale. Dalla (4.73) e dalla (4.77) (con per esempio il segno $+$) si ricava l'equazione differenziale

$$(4.79) \quad d\theta = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}}$$

la cui integrazione fornisce, assegnata l'anomalia iniziale θ_0 , una funzione $\theta(r)$, invertibile in una funzione $r = r(\theta)$ rappresentatrice dell'orbita (in coordinate polari). Ritornando al caso (III) si osserva in particolare che l'angolo θ_* compreso tra un pericentro e un apocentro successivi è dato dall'integrale della (4.79) tra i limiti r_1 ed r_2 , zeri semplici della $\Phi(r)$:

$$(4.80) \quad \theta_* = c \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}}.$$

Le orbite possono anche determinarsi attraverso la seconda formula di Binet (2.61) che permette di tradurre l'equazione fondamentale della dinamica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ nell'equazione differenziale del secondo ordine

$$(4.81) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{r^2}{mc^2} F(r) = 0$$

nella funzione $r(\theta)$.

4.9 Moto di un punto in un campo newtoniano

Particolarizziamo lo studio precedente al caso di un campo newtoniano, cioè al caso in cui

$$(4.82) \quad F(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad U(r) = \frac{k}{r}, \quad k > 0.$$

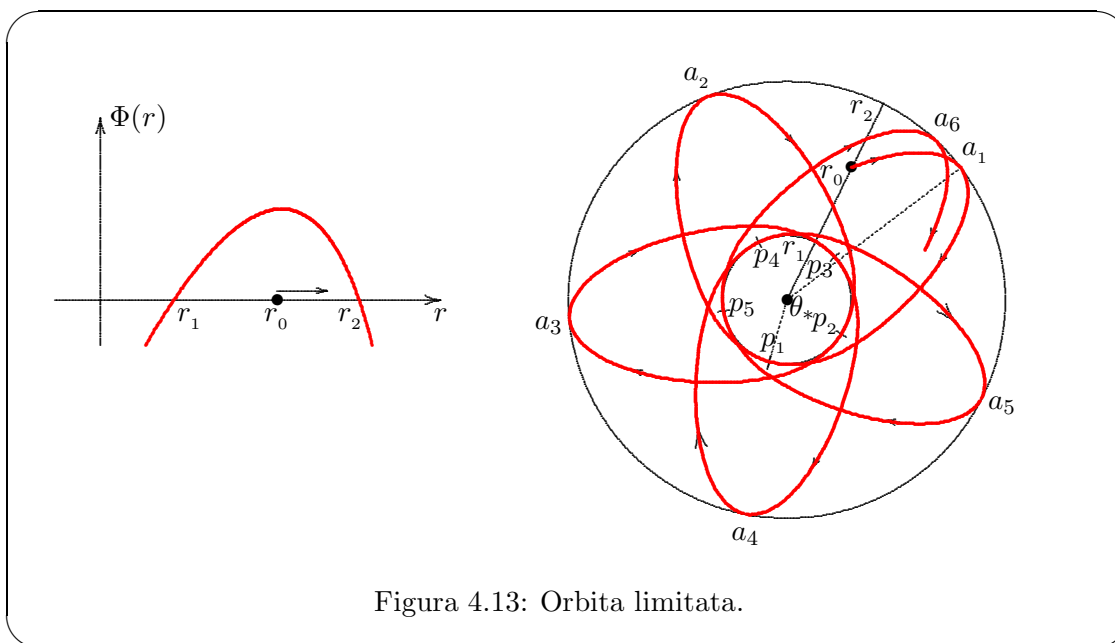


Figura 4.13: Orbita limitata.

La funzione $\Phi(r)$ diventa

$$(4.83) \quad \Phi(r) = \frac{2}{m} \left(h + \frac{k}{r} \right) - \frac{c^2}{r^2}.$$

Oltre alle due costanti *strutturali* del sistema dinamico, la massa m del punto e la costante k (che, come sappiamo, è proporzionale alla massa), compaiono in questa funzione le due costanti di moto c e h . È importante osservare che la costante dell'energia h , a meno del fattore $\frac{2}{m}$, compare additivamente nella funzione $\Phi(r)$. Fissata la costante delle aree c , consideriamo cinque casi.

(I) Conviene considerare dapprima il caso $\boxed{h = 0}$. Il grafico della funzione $\Phi(r)$ ha come asintoto orizzontale l'asse r , uno zero semplice in

$$(4.84) \quad r_z = \frac{m c^2}{2k}$$

e assume il valore massimo

$$(4.85) \quad M = \Phi(r_*) = \frac{k^2}{m^2 c^2}$$

nel punto (Figura 4.14)

$$(4.86) \quad r_* = \frac{m c^2}{k} = 2 r_z.$$

In questo caso l'orbita è illimitata e tocca la circonferenza di raggio r_1 (è, come si vedrà, una parabola).

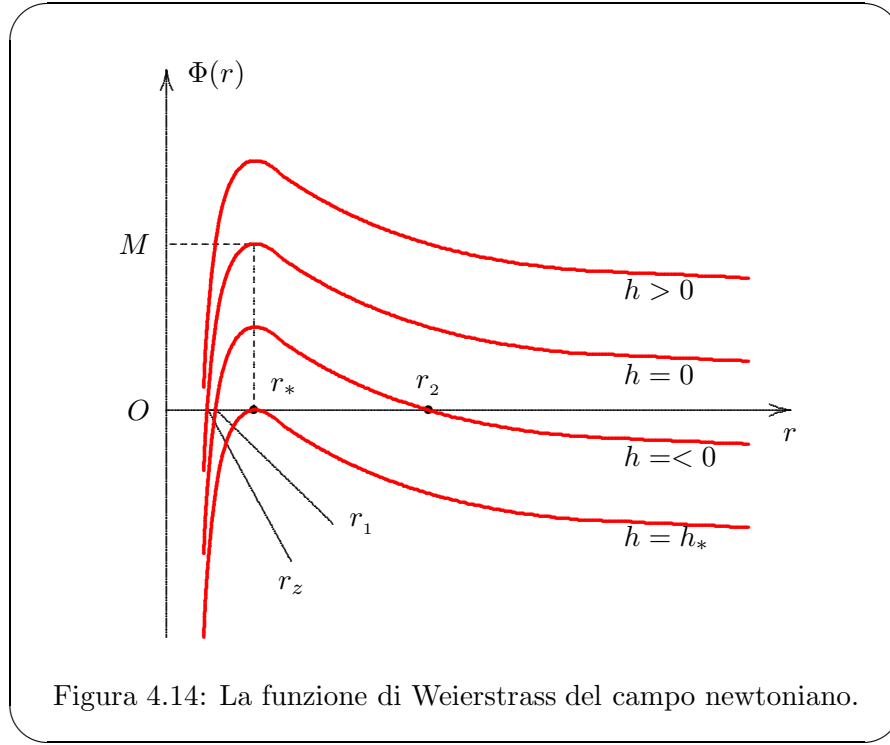


Figura 4.14: La funzione di Weierstrass del campo newtoniano.

(II) Qualunque sia $h > 0$ la funzione $\Phi(r)$ ha sempre un solo zero semplice $r_1 < r_z$. Anche in questo caso l'orbita è illimitata e tocca la circonferenza di raggio r_1 (è, come si vedrà, un ramo di iperbole).

(III) Se $h = h_*$ con

$$(4.87) \quad h_* = -\frac{k^2}{2mc^2},$$

allora la funzione $\Phi(r)$ ha uno zero doppio in r_* ed è ovunque negativa. L'orbita è circolare di raggio r_* .

(IV) Se $0 > h > h_*$ si hanno due zeri semplici r_1 ed r_2 tali che $r_z < r_1 < r_* < r_2$. L'orbita è allora contenuta nella corona circolare compresa dalle circonferenze di raggio r_1 ed r_2 (si tratta di una ellisse).

(V) Se $h < h_*$ la funzione $\Phi(r)$ è sempre negativa. Si tratta quindi di un caso impossibile. Va osservato che la costante dell'energia è determinata dalle condizioni iniziali:

$$(4.88) \quad h = T_0 - U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0}.$$

Posto

$$(4.89) \quad v_f^2 = \frac{2k}{mr_0},$$

risulta

$$(4.90) \quad h = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_f^2).$$

La quantità v_f prende il nome di **velocità di fuga**. Se $v_0 \geq v_f$ si ha $h \geq 0$ e l'orbita è illimitata (casi I e II).

Le orbite si ottengono integrando o l'equazione (4.89) o l'equazione (4.81) del paragrafo precedente. La prima diventa

$$(4.91) \quad d\theta = \frac{c \, dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(h + \frac{k}{r} \right) - \frac{c^2}{r^2}}},$$

e la seconda

$$(4.92) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2}.$$

Quest'ultima è un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti nell'incognita $\frac{1}{r}$ che fornisce immediatamente la soluzione

$$(4.93) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

con

$$(4.94) \quad p = \frac{mc^2}{k}$$

ed e costante arbitraria. Le orbite sono dunque delle coniche di parametro p ed eccentricità e . È però necessario stabilire la relazione tra la costante d'integrazione e e le costanti di moto (h, c) . Per far questo si deve però ritornare all'equazione differenziale (4.91), che è dedotta proprio dagli integrali primi delle aree e dell'energia. Se si pone

$$x = \alpha \left(\frac{c}{r} - \beta \right) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

risulta

$$dx = -\frac{\alpha c}{r^2} dr, \quad 1 - x^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} - \beta^2 + \frac{2\beta c}{r} - \frac{c^2}{r^2} \right),$$

per cui se

$$\beta c = \frac{k}{m}, \quad \alpha^{-2} - \beta^2 = \frac{2h}{m},$$

l'equazione (4.91) diventa

$$d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Un integrale è $\theta = \arccos x$ da cui segue $x = \cos \theta$ e quindi

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c} \left(\beta + \frac{1}{\alpha} \cos \theta \right).$$

Questa soluzione assume la forma (4.93) (con $\theta_0 = 0$) posto

$$p = \frac{c}{\beta} = \frac{mc^2}{k}, \quad e = \frac{p}{c\alpha} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 + \frac{2h}{m}} = \sqrt{1 + \frac{2mhc^2}{k^2}}.$$

Si trova così, oltre che una conferma della (4.94), l'espressione dell'eccentricità in funzione delle costanti di moto. Si osservi che

$$(4.95) \quad p = r_*, \quad e = \sqrt{1 - \frac{h}{h_*}}.$$

I quattro casi possibili sopra considerati corrispondono allora alle situazioni seguenti:

- (I) $h = 0, \quad e = 1, \quad$ orbita parabolica,
- (II) $h > 0, \quad e > 1, \quad$ orbita iperbolica,
- (III) $h = h_*, \quad e = 0, \quad$ orbita circolare,
- (IV) $0 > h > h_*, \quad 0 < e < 1, \quad$ orbita ellittica.

ESEMPIO 4.9.1 – Si dimostri che nel moto di un punto in un campo centrale simmetrico il vettore

$$(4.96) \quad \mathbf{L} = \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \gamma(r) \mathbf{u} \quad \left(\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

è un integrale primo se e solo se

$$\gamma = \text{costante}, \quad F(r) = -\frac{m\gamma}{r^2},$$

cioè se e solo se il campo è newtoniano o coulombiano:

$$F = -\frac{k}{r^2}, \quad \gamma = \frac{k}{m}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

L'integrale primo vettoriale \mathbf{L} è chiamato **vettore di Laplace**.⁸ Utilizzando quest'integrale primo è immediato dimostrare che le orbite sono delle coniche. Infatti, osservato che se \mathbf{L} è un integrale primo anche il suo modulo L è una costante del moto, si ha da un lato

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = L r \cos \theta,$$

con θ angolo compreso tra i due vettori, mentre dalla (4.96) risulta

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = c^2 - \gamma r,$$

con c costante delle aree. Uguagliando i due risultati si trova l'equazione $r(L \cos \theta + \gamma) = c^2$ che può porsi nella forma (4.93) con

$$p = \frac{c^2}{\gamma}, \quad e = \frac{L}{\gamma}. \quad \bullet$$

⁸ Pierre Simon de Laplace, 1749-1827.

4.10 Dinamica dei sistemi finiti di punti

Il modello matematico newtoniano per i sistemi meccanici schematizzabili in un insieme finito di punti materiali $\mathcal{M} = \{(P_\nu, m_\nu); \nu = 1, \dots, N\}$ si fonda sui seguenti postulati.

(I) Le sollecitazioni a cui ogni punto P_ν è soggetto sono rappresentate dalla somma di due vettori: un vettore $\mathbf{F}_{i\nu}$, detto **forza interna**, risultante di tutte le forze agenti su P_ν dovute alla presenza di tutti gli altri punti del sistema, e un vettore $\mathbf{F}_{e\nu}$, detto **forza esterna**, risultante di tutte le forze agenti su P_ν dovute ad azioni esterne al sistema.

(II) **Postulato delle forze interne**: per ogni punto P_ν la forza interna $\mathbf{F}_{i\nu}$ è data dalla somma

$$(4.97) \quad \mathbf{F}_{i\nu} = \sum_{\mu} \mathbf{F}_{\nu\mu}$$

dove $\mathbf{F}_{\nu\mu}$ è la forza che il punto P_μ esercita sul punto P_ν . Per questi vettori valgono le condizioni

$$(4.98) \quad \begin{cases} \mathbf{F}_{\nu\mu} \times P_\nu P_\mu = 0 \\ \mathbf{F}_{\nu\mu} = -\mathbf{F}_{\mu\nu} \end{cases}$$

costituenti il cosiddetto **principio di azione e reazione** (la $(4.98)_1$ significa che $\mathbf{F}_{\nu\mu}$ è parallelo alla congiungente $P_\nu P_\mu$).

(III) Per ogni punto del sistema vale l'equazione dinamica

$$(4.99) \quad m \mathbf{a}_\nu = \mathbf{F}_{i\nu} + \mathbf{F}_{e\nu}.$$

Una conseguenza immediata del postulato delle forze interne è il seguente **teorema delle forze interne**.

TEOREMA 4.10.1 – *Le forze interne formano un sistema equivalente a zero, cioè tale che:*

$$(4.100) \quad \mathbf{R}_i \equiv \sum_{\nu} \mathbf{F}_{i\nu} = 0, \quad \mathbf{M}_{Oi} \equiv \sum_{\nu} OP_\nu \times \mathbf{F}_{i\nu} = 0.$$

Infatti il sistema dei vettori applicati $(P_\nu, \mathbf{F}_{i\nu})$ è equivalente ad un sistema di coppie a braccio nullo. Per le nozioni essenziali concernenti i sistemi di vettori applicati si veda il paragrafo seguente 4.11.

Un sistema di punti materiali si dice **isolato** se $\mathbf{F}_{e\nu} = 0$ per ogni punto P_ν . Quindi per un sistema isolato anche il sistema delle forze esterne è equivalente a zero.

ESEMPIO 4.10.1 – Il problema ristretto dei due corpi. Consideriamo due punti materiali (S, M) e (T, m) , liberi e isolati, cioè non soggetti a vincoli e ad alcuna forza esterna. Il moto dell'uno è influenzato dalla sola presenza dell'altro attraverso una reciproca sollecitazione che, per il principio di azione e reazione, è costituita da due forze opposte, di

uguale intensità, dirette secondo la congiungente i due punti. Supponiamo che tali forze dipendano solo dalla distanza $r = |ST|$ dei due punti. Sia allora $\phi(r)\mathbf{u}$ la forza che S esercita su T , con \mathbf{u} versore di ST . Siano \mathbf{a}_S e \mathbf{a}_T le accelerazioni relative ad un riferimento inerziale \mathcal{R} . Le equazioni del moto (4.99) scritte in questo riferimento diventano:

$$(4.101) \quad M \mathbf{a}_S = -\phi(r) \mathbf{u}, \quad m \mathbf{a}_T = \phi(r) \mathbf{u}.$$

Queste danno origine ad un sistema di sei equazioni differenziali scalari del secondo ordine, con incognite le sei coordinate dei punti in funzione del tempo. Il cosiddetto **problema ristretto dei due corpi** consiste nello studio del moto del punto T rispetto al riferimento \mathcal{R}_* univocamente definito dalle seguenti due condizioni: (i) il punto S è fisso in \mathcal{R}_* , (ii) \mathcal{R}_* è in moto traslatorio rispetto ad un qualunque riferimento inerziale (in altri termini, \mathcal{R}_* è il riferimento rappresentanto da una terna di assi aventi origine in S e orientamento invariabile rispetto alle “stelle fisse”). L’equazione del moto di T relativa a questo riferimento deve pertanto tener conto delle forze apparenti:

$$(4.102) \quad m \mathbf{a} = \phi(r) \mathbf{u} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_c.$$

In quest’equazione \mathbf{a} è l’accelerazione di T rispetto a \mathcal{R}_* e $\phi(r)\mathbf{u}$ è la forza reale agente su T . Poiché \mathcal{R}_* si muove di moto traslatorio rispetto ad \mathcal{R} , con accelerazione pari a quella del punto solidale S , si ha

$$\mathbf{F}_{tr} = -m \mathbf{a}_S, \quad \mathbf{F}_c = 0.$$

Dalla (4.101) e dalla (4.102) segue allora l’equazione

$$m \mathbf{a} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \phi(r) \mathbf{u}.$$

Posto

$$(4.103) \quad m_* = \frac{mM}{m+M},$$

quest’ultima diventa

$$(4.104) \quad m_* \mathbf{a} = \phi(r) \mathbf{u}.$$

L’equazione (4.104) mostra che il punto T si muove in \mathcal{R}_* come un punto di massa m_* soggetto alla forza centrale simmetrica $\phi(r)$ di centro fisso S . Il numero m_* prende il nome di **massa ridotta**. Si noti infatti che $m_* < m$. •

DEFINIZIONE 4.10.1 – *Fissato un riferimento, si dice **atto di moto** del sistema di punti $\{P_\nu; \nu = 1, \dots, N\}$ un qualunque sistema di vettori $\{(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu); \nu = 1, \dots, N\}$ dove ogni vettore \mathbf{r}_ν rappresenta la posizione del punto P_ν rispetto ad un prefissato punto O (quindi $\mathbf{r}_\nu = OP_\nu$) ed ogni vettore \mathbf{v}_ν rappresenta la velocità del punto P_ν . •*

Ad ogni atto di moto di un sistema di punti materiali vengono associate alcune **grandezze cinetiche** aventi carattere globale o *di media*, analoghe a quelle già definite nel caso di un solo punto. Esse sono: la **quantità di moto**

$$(4.105)$$

$$\mathbf{p} = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}$$

il **momento della quantità di moto** rispetto ad un generico **polo** O (o **momento angolare**)

(4.106)

$$\mathbf{K}_O = \sum_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}$$

e l'**energia cinetica**

(4.107)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} v_{\nu}^2$$

Per la quantità di moto e per l'energia cinetica valgono due notevoli proprietà coinvolgenti il baricentro G del sistema che, ricordiamo, è definito da una delle due equazioni seguenti:⁹

$$(4.108) \quad \sum_{\nu} m_{\nu} G P_{\nu} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad OG = \frac{1}{m} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \quad (m = \sum_{\nu} m_{\nu}).$$

La prima proprietà, semplice ma importante per le sue implicazioni, è espressa dalla formula

(4.109)

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}_G$$

dove \mathbf{v}_G è la velocità del baricentro. Essa afferma che

TEOREMA 4.10.2 – *La quantità di moto dell'intero sistema è pari alla quantità di moto del baricentro pensato dotato della massa totale del sistema.*

DIMOSTRAZIONE. Ad un generico atto di moto del sistema corrisponde un atto di moto del baricentro, vale a dire una velocità \mathbf{v}_G , ottenibile derivando formalmente rispetto al tempo una delle equazioni (4.108), per esempio la prima. Si ottiene

$$\sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{v}_{\nu} - \mathbf{v}_G) = 0,$$

da cui segue la (4.109). \square

La seconda proprietà, nota come **teorema di König**,¹⁰ è assai utile nel calcolo effettivo dell'energia cinetica:

TEOREMA 4.10.3 – *L'energia cinetica di un sistema è uguale alla somma dell'energia cinetica del suo baricentro, pensato dotato di tutta la massa del sistema, e dell'energia cinetica nel moto rispetto al baricentro.*

⁹ Per gli elementi essenziali della teoria dei baricentri si veda il §4.12.

¹⁰ Samuel König, 1712-1757.

Per **moto rispetto al baricentro** s'intende il moto rispetto al riferimento \mathcal{R}' in moto traslatorio rispetto al riferimento \mathcal{R} e solidale col baricentro. Il teorema di König è espresso dunque dalla formula

$$(4.110) \quad T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 + T'$$

dove T' è l'energia cinetica nel moto rispetto al baricentro.

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con \mathbf{v}'_ν la velocità del punto P_ν misurata nel riferimento \mathcal{R}' . Per il teorema dei moti relativi abbiamo $\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}'_\nu + \mathbf{v}_G$, perché la velocità di trascinamento del punto P_ν coincide, qualunque sia il punto P_ν , con la velocità del baricentro \mathbf{v}_G , posto che il baricentro è fisso nel riferimento \mathcal{R}' e che quest'ultimo si muove di moto traslatorio rispetto al riferimento \mathcal{R} . Abbiamo allora successivamente:

$$\begin{aligned} \sum_\nu m_\nu v_\nu^2 &= \sum_\nu m_\nu (\mathbf{v}'_\nu + \mathbf{v}_G)^2 \\ &= \sum_\nu m_\nu v_\nu'^2 + \sum_\nu m_\nu v_G^2 + 2 \sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu \cdot \mathbf{v}_G. \end{aligned}$$

D'altra parte l'ultimo termine è nullo perché la somma $\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu$ definisce la quantità di moto \mathbf{p}' del sistema rispetto a \mathcal{R}' . Questa, per il Teor. 2, è pari alla massa totale per la velocità del baricentro rispetto allo stesso \mathcal{R}' , che è nulla perché il baricentro è fermo in \mathcal{R}' . \square

Dopo aver introdotto le grandezze cinetiche fondamentali della meccanica dei sistemi finiti di punti, passiamo all'esame di alcune loro proprietà immediatamente conseguenti ai postulati.

TEOREMA 4.10.4 – *Per la dinamica di un sistema di punti materiali valgono le equazioni cardinali:*

$$(4.111) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{R}_e \\ \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_{Oe} \\ \frac{dT}{dt} = W \end{array} \right.$$

dove

$$(4.112) \quad \mathbf{R}_e = \sum_\nu \mathbf{F}_{e\nu}$$

è il risultante delle sole forze esterne,

$$(4.113) \quad \mathbf{M}_{Oe} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_{Oe}$$

è il momento risultante delle sole forze esterne rispetto ad un qualunque polo O di velocità \mathbf{v}_O , e

$$(4.114) \quad W = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu}$$

è la potenza di tutte le forze, sia interne che esterne al sistema.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che per un sistema finito di punti materiali le equazioni cardinali discendono dalle equazioni fondamentali (4.99), valide per ogni singolo punto, e dal teorema delle forze interne (sono nulli il risultante ed il momento risultante, rispetto ad un qualunque polo O , delle forze interne). Dalla definizione di \mathbf{p} segue:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{e\nu} + \sum_{\nu} \mathbf{F}_{i\nu} = \mathbf{R}_e,$$

e la (4.111)₁ è dimostrata. Dalla definizione di \mathbf{K}_O segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} &= \sum_{\nu} \frac{d}{dt} (OP_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}) \\ &= \sum_{\nu} (\mathbf{v}_{\nu} - \mathbf{v}_O) \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} + \sum_{\nu} OP_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{a}_{\nu} \\ &= -\mathbf{v}_O \times \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} + \sum_{\nu} OP_{\nu} \times (\mathbf{F}_{e\nu} + \mathbf{F}_{i\nu}) \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_{Oe}, \end{aligned}$$

e la (4.111)₂ è dimostrata. Dalla definizione di T segue infine immediatamente la (4.111)₃:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \cdot \mathbf{a}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \cdot (\mathbf{F}_{e\nu} + \mathbf{F}_{i\nu}) = W_e + W_i = W.$$

□

Le equazioni cardinali esprimono tre proprietà dinamiche *di media* che vanno rispettivamente sotto il nome di **teorema della quantità di moto**, **teorema del momento della quantità di moto** (o del momento angolare) e **teorema dell'energia**. Esse non sono in genere sufficienti (a parte qualche caso particolare) a determinare il moto di ogni singolo punto del sistema. Nelle prime due intervengono esplicitamente soltanto le forze esterne. Vediamone alcune notevoli conseguenze.

NOTA 4.10.1 – Poiché $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_G$, l'equazione (4.113)₁ equivale a

$$(4.115) \quad \boxed{m \mathbf{a}_G = \mathbf{R}_e}$$

Quest'equazione esprime il seguente **teorema del moto del baricentro**: •

TEOREMA 4.10.5 – *Il baricentro di un sistema di punti si muove come punto materiale dotato della massa totale del sistema e soggetto ad una forza pari al risultante delle forze esterne.*

ESEMPIO 4.10.2 – Se le forze agenti su ogni singolo punto sono proporzionali alle rispettive masse (come nel caso della forza peso) cioè del tipo $\mathbf{F}_{e\nu} = m_\nu \mathbf{g}$, allora si ha $\mathbf{R}_e = m\mathbf{g}$ e il baricentro si muove secondo la legge $\mathbf{a}_G = \mathbf{g}$ qualunque siano gli effetti delle sollecitazioni interne al sistema. L'esempio classico è quello di un proiettile che esplode durante il tiro; mentre non è in genere possibile prevedere i moti delle singole parti in cui viene diviso, si può affermare che il baricentro continua senza disturbi il moto che aveva prima dell'esplosione: questa infatti è prodotta da sole forze interne al sistema. •

NOTA 4.10.2 – Se il polo O è fisso oppure coincide con il baricentro, allora la seconda equazione cardinale si riduce semplicemente a

$$(4.116) \quad \boxed{\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_{Oe}}$$

Infatti nel primo caso si ha $\mathbf{v}_O = 0$, nel secondo $\mathbf{p} \times \mathbf{v}_G = m \mathbf{v}_G \times \mathbf{v}_G = 0$. •

NOTA 4.10.3 – Sia a una retta, \mathbf{u} un suo versore, O un suo punto. Così come per un punto materiale, per un sistema di punti definiamo il **momento assiale della quantità di moto** rispetto ad a :

$$(4.117) \quad K^a = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{u}.$$

Tale numero non dipende dalla scelta di O sulla retta e cambia ovviamente di segno cambiando \mathbf{u} nel suo opposto (il momento assiale dipende dunque dal verso della retta). In maniera analoga si definisce il **momento assiale delle forze esterne**,

$$(4.118) \quad M_e^a = \mathbf{M}_{Oe} \cdot \mathbf{u}.$$

Se la retta a è fissa nello spazio, la seconda equazione cardinale, moltiplicata scalarmente per \mathbf{u} , fornisce l'equazione scalare

$$(4.119) \quad \frac{dK^a}{dt} = M_e^a \quad \bullet$$

Dalle equazioni cardinali seguono infine alcuni **teoremi di conservazione**, esprimenti, sotto certe condizioni per le forze, l'esistenza di integrali primi.

1. Se $\mathbf{R}_e = 0$, allora $\mathbf{p} = \text{costante}$, vale a dire $\mathbf{v}_G = \text{costante}$. Si dice in questo caso che sussiste l'**integrale primo della quantità di moto**. Più in generale, se esiste un vettore costante \mathbf{u} tale che sia sempre $\mathbf{R}_e \cdot \mathbf{u} = 0$, allora $\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{u} = \text{costante}$.

ESEMPIO 4.10.3 – Si consideri un sistema soggetto alla sola forza peso: il risultante è sempre ortogonale ad un qualunque prefissato vettore orizzontale. •

2. Se rispetto ad un polo O fisso oppure coincidente con il baricentro si ha $\mathbf{M}_{Oe} = 0$, allora $\mathbf{K}_O = \text{costante}$. Sussiste cioè l'**integrale primo del momento della quantità di moto**. Si osservi che da $\mathbf{M}_{Oe} \cdot \mathbf{u} = 0$, con \mathbf{u} vettore costante, segue $\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{u} = \text{costante}$.

ESEMPIO 4.10.4 – Si consideri il sistema solare, con Sole e pianeti assimilabili a punti materiali. Ritenute trascurabili le forze esercitate dalle stelle su di questi, il sistema solare è un *sistema isolato*, vale a dire: $\mathbf{R}_e = 0$ e $\mathbf{M}_{Ge} = 0$. Pertanto il suo baricentro G si muove rispetto ad un qualunque riferimento inerziale di moto rettilineo e uniforme, mentre il momento della quantità di moto rispetto al baricentro \mathbf{K}_G è costante. Il piano ad esso ortogonale e passante per G è fisso nel riferimento inerziale individuato da G . Esso prende il nome di **piano di Laplace** e coincide approssimativamente con il piano dell'orbita terrestre. •

3. Se esiste una funzione U dipendente dalla posizione di tutti i punti, cioè dalla **configurazione** del sistema, tale che per ogni moto si ha

$$\frac{dU}{dt} = W,$$

si dice che il sistema è **conservativo**. La funzione U , definita a meno di una costante additiva, è detta **potenziale**. Dal teorema dell'energia segue allora l'**integrale primo dell'energia**: $T - U = \text{costante}$.

ESEMPIO 4.10.5 – Nel caso di un sistema le cui forze esterne sono le forze peso si ha, per ogni configurazione del sistema,

$$U_e = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{OG},$$

dove O è un qualunque punto fisso. Infatti:

$$W_e = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_{\nu} = \mathbf{g} \cdot m \mathbf{v}_G = \frac{dU_e}{dt}. \quad \bullet$$

4.11 Sistemi di vettori applicati

Sia $\mathcal{S} = \{(P_{\nu}, \mathbf{v}_{\nu}); \nu = 1, \dots, N\}$ un **sistema di vettori applicati** nello spazio affine euclideo tridimensionale. Diciamo **risultante** del sistema \mathcal{S} il vettore

$$(4.120) \quad \boxed{\mathbf{R} = \sum_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}}$$

momento risultante rispetto al punto o **polo** O il vettore

$$(4.121) \quad \boxed{\mathbf{M}_O = \sum_{\nu} \mathbf{OP}_{\nu} \times \mathbf{v}_{\nu}}$$

Il momento $\mathbf{OP} \times \mathbf{v}$ di un singolo vettore applicato (P, \mathbf{v}) è, per le proprietà del prodotto vettoriale, un vettore ortogonale al piano individuato dai vettori \mathbf{OP} e \mathbf{v} , di modulo uguale al prodotto del modulo di \mathbf{v} per la distanza del polo O dalla **retta di applicazione** di (P, \mathbf{v}) , cioè della retta passante per P e parallela a \mathbf{v} .

Facendo variare il polo nello spazio affine si ottiene un campo vettoriale $\mathbf{M}: P \mapsto \mathbf{M}_P$. La seguente **formula di trasposizione dei momenti** consente di calcolare il momento risultante nel polo P , noti il suo valore in un polo O e il risultante \mathbf{R} :

$$(4.122) \quad \boxed{\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \overrightarrow{OP}}$$

Per dimostrarla basta considerare la decomposizione $\overrightarrow{OP_\nu} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_\nu}$ nella definizione (4.121). Dalla (4.122) si deducono le proprietà seguenti:

$$(4.123) \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}_P \iff \mathbf{R} \text{ parallelo a } \overrightarrow{OP}.$$

$$(4.124) \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}_P, \forall O, P \iff \mathbf{R} = 0.$$

$$(4.125) \quad \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_P \cdot \mathbf{R}.$$

La (4.123) mostra che il momento risultante non varia spostando il polo lungo una retta parallela al risultante \mathbf{R} . La (4.124) mostra che il momento risultante non dipende dalla scelta del polo se e solo se il risultante è nullo. La (4.125) mostra che la componente del momento risultante rispetto al risultante è invariante rispetto alla scelta del polo. L'andamento del campo vettoriale \mathbf{M} , nel caso in cui $\mathbf{R} \neq 0$, è ulteriormente chiarito dal seguente enunciato:

TEOREMA 4.11.1 – *Dato un sistema di vettori applicati con $\mathbf{R} \neq 0$ l'insieme dei punti A tali che il momento risultante \mathbf{M}_A è parallelo ad \mathbf{R} è una retta parallela ad \mathbf{R} , detta **asse centrale** del sistema. L'asse centrale è il luogo dei punti in cui il momento risultante ha modulo minimo.*

Siccome la (4.122) è analoga alla seconda formula fondamentale di cinematica rigida (con $\boldsymbol{\omega}$ sostituito da \mathbf{R} e il campo delle velocità sostituito da quello dei momenti) questo teorema si identifica col teorema di Mozzi (Teorema 3.3.3). Di conseguenza, tutte le proprietà viste per un atto di moto rigido valgono per il campo vettoriale dei momenti risultanti.

Due sistemi di vettori applicati \mathcal{S} e \mathcal{S}' si dicono **equivalenti** se i corrispondenti momenti risultanti coincidono in ogni punto: $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$. Per questo occorre e basta che i due sistemi abbiano lo stesso risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo prefissato:

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \iff \mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O.$$

4.12 Baricentro di un sistema di masse

I concetti trattati in questo paragrafo sono puramente affini, sussistono cioè in uno spazio affine qualsiasi, senza struttura euclidea. Ci riferiamo comunque, per semplicità, allo

spazio affine euclideo tridimensionale. I termini **sistema di masse** e **sistema di punti materiali** sono sinonimi. Consideriamo un insieme finito di N punti materiali

$$\mathcal{M} = \{(P_\nu, m_\nu); \nu = 1, \dots, N\}.$$

Il **baricentro** (o **centro di massa**) di \mathcal{M} è il punto G definito dall'equazione

$$(4.126) \quad \boxed{\sum_{\nu} m_{\nu} GP_{\nu} = 0}$$

ovvero da

$$(4.127) \quad \boxed{OG = \frac{1}{m} \sum_{\nu} m_{\nu} OP_{\nu}, \quad m = \sum_{\nu} m_{\nu}}$$

dove O è un qualsiasi punto di riferimento ed m è la **massa totale** del sistema. Osserviamo innanzitutto che la definizione (4.127) non dipende dalla scelta del punto O . Infatti se P è un altro punto:

$$\begin{aligned} PG &= PO + OG = PO + \frac{1}{m} \sum_{\nu} m_{\nu} OP_{\nu} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\nu} m_{\nu} (PO + OP_{\nu}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu} m_{\nu} PP_{\nu}. \end{aligned}$$

La (4.127) definisce G in maniera univoca. Ponendo $O = G$ nella (4.127) si trova la (4.126). Viceversa, con la decomposizione $GP_{\nu} = GO + OP_{\nu} = OP_{\nu} - OG$ dalla (4.126) si ricava la (4.127). Le definizioni (4.126) e (4.127) sono dunque equivalenti.

Sia (x^α) un qualunque sistema di coordinate cartesiane. Se denotiamo con (x_ν^α) le coordinate del punto P_ν e con (x_G^α) le coordinate del baricentro, dalla ((4.127) segue che

$$(4.128) \quad x_G^\alpha = \frac{1}{m} \sum_{\nu} m_{\nu} x_\nu^\alpha.$$

Il baricentro di un sistema di masse gode delle seguenti proprietà.

1. **Proprietà di appartenenza:** *se tutti i punti materiali stanno in un semispazio delimitato da un piano allora il baricentro giace in quel semispazio.* Basta considerare un riferimento cartesiano per il quale il piano ha per esempio equazione $x^1 = 0$ ed i punti sono tutti situati nel semispazio $x^1 \geq 0$. Dalla (4.128) segue necessariamente $x_G^1 \geq 0$ e il baricentro sta nello stesso semispazio.
2. *Se i punti materiali appartengono tutti ad un piano (o ad una retta) anche il baricentro appartiene a quel piano (a quella retta).* Si applica la proprietà precedente ai due semispazi determinati dal piano.
3. *Se i punti sono contenuti in un dominio chiuso convesso allora anche il baricentro è contenuto in quel dominio.* Infatti un tale dominio è l'intersezione di semispazi.

4. Proprietà di partizione o distributiva: se il sistema di masse \mathcal{M} è l'unione di due sistemi di masse disgiunti \mathcal{M}' e \mathcal{M}'' allora il baricentro G di \mathcal{M} coincide col baricentro del sistema costituito dai due baricentri di \mathcal{M}' e \mathcal{M}'' dotati delle rispettive masse totali. Si consideri infatti il sistema suddiviso in due sottosistemi disgiunti $\mathcal{M}' = \{(P_{\nu'}, m_{\nu'}); \nu' = 1, \dots, N'\}$ e $\mathcal{M}'' = \{(P_{\nu''}, m_{\nu''}); \nu'' = N' + 1, \dots, N\}$. Dalla definizione (4.127) segue

$$m' OG' = \sum_{\nu'} m_{\nu'} OP_{\nu'}, \quad m'' OG'' = \sum_{\nu''} m_{\nu''} OP_{\nu''}.$$

Dunque:

$$m' OG' + m'' OG'' = \sum_{\nu} m_{\nu} OP_{\nu} = m OG.$$

Si osservi che la proprietà distributiva vale più in generale per una qualunque partizione del sistema, in più di due sottosistemi disgiunti.

5. Proprietà di simmetria. Un piano Π si dice **piano di simmetria materiale coniugato alla direzione \mathbf{u}** (\mathbf{u} è un vettore non nullo, eventualmente unitario) se per ogni coppia (P_{ν}, m_{ν}) del sistema di masse esiste una coppia (P_{ρ}, m_{ρ}) tale che: (i) $m_{\nu} = m_{\rho}$, (ii) $P_{\nu}P_{\rho}$ è parallelo a \mathbf{u} , (iii) il punto medio di $P_{\nu}P_{\rho}$ appartiene a Π . Non si esclude che sia $P_{\nu} = P_{\rho} \in \Pi$. Allora: *un piano di simmetria materiale contiene il baricentro*. Basta applicare la proprietà distributiva 4 e la proprietà 2, considerando il sistema come unione del sistema dei punti che stanno sul piano Π di simmetria e delle coppie dei punti materiali simmetrici, il cui baricentro giace su Π .

La nozione di baricentro, insieme a tutte le proprietà viste per il caso di un sistema finito di punti materiali, si estende al caso di un **sistema materiale continuo**. Un tale sistema è definito da una coppia (D, μ) dove D è un **dominio** di dimensione k ($= 3, 2, 1$) e μ una funzione su D , detta **densità di massa**, tale che abbia senso considerare gli integrali

$$m = \int_D \mu \eta, \quad OG = \frac{1}{m} \int_D OP \mu \eta,$$

dove η è la k -forma elemento di volume (o area, o di lunghezza). Se μ è costante si dice che il sistema materiale è **omogeneo**. Per i sistemi omogenei le formule ottenute continuano a valere con $\mu = 1$ e intendendo la massa totale m uguale al volume, o all'area, o alla lunghezza del dominio. Sussistono a questo proposito i seguenti classici **teoremi di Guldino**:¹¹

TEOREMA 4.12.1 – *Il volume del solido generato dalla rotazione di un dominio piano intorno ad una retta del piano stesso, che non lo interseca, è uguale al prodotto dell'area del dominio per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro.*

TEOREMA 4.12.2 – *L'area della superficie generata da un arco di curva piana ruotata intorno ad una retta del suo piano è uguale al prodotto della lunghezza dell'arco per quella della circonferenza descritta dal suo baricentro.*

¹¹ Paul Guldin, 1577-1643.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali tale che l'asse z sia asse di rotazione e il dominio piano stia sul piano (x, z) . Allora la coordinata x del suo baricentro è

$$x_G = \frac{1}{A} \int_D x \, dx \, dz,$$

essendo A la sua area. D'altra parte il volume V del solido di rotazione è la somma, cioè l'integrale, dei volumi elementari degli anelli ottenuti facendo ruotare elementi del dominio, vale a dire:

$$V = \int_D 2\pi x \, dx \, dz.$$

Quindi: $V = 2\pi x_G A$. In maniera analoga si dimostra il secondo teorema di Guldino. \square

4.13 Dinamica del corpo rigido

Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente si applicano in particolare ai sistemi rigidi costituiti da un numero finito di punti materiali $\{(P_\nu, m_\nu); \nu = 1, \dots, N\}$. I risultati che si ottengono sono comunque validi per un corpo rigido continuo. Mentre le caratteristiche “inerziali” di un singolo punto sono riassunte in un numero positivo, la sua massa inerziale, per un corpo rigido le caratteristiche inerziali sono invece rappresentate dal **tensore d'inerzia**. Gli elementi fondamentali della teoria dei tensori d'inerzia sono raccolti al §4.17.

TEOREMA 4.13.1 – *In un corpo rigido per il momento angolare \mathbf{K}_O , l'energia cinetica T e la potenza W di un qualunque sistema di forze $\{(P_\nu, \mathbf{F}_\nu)\}$ valgono le espressioni seguenti:*

$$(4.129) \quad \begin{cases} \mathbf{K}_O = m \, OG \times \mathbf{v}_O + \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) \\ T = \frac{1}{2} \mathbf{K}_O \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_O \\ W = \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O \end{cases}$$

dove m è la massa totale del corpo, G è il baricentro, O è un punto solidale, \mathbf{v}_O la sua velocità, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo rigido, \mathbf{I}_O è il tensore d'inerzia nel punto O , \mathbf{R} e \mathbf{M}_O sono il risultante ed il momento risultante del sistema di forze.

DIMOSTRAZIONE. Ricordata la seconda formula fondamentale di cinematica rigida, per un qualunque punto solidale O si ha

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times OP_\nu,$$

denotata per semplicità con \mathbf{v}_ν la velocità del punto P_ν . Per la definizione di \mathbf{I}_O – formula (4.168) – si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_O &= \sum_\nu OP_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_\nu m_\nu OP_\nu \times (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times OP_\nu) \\ &= m \, OG \times \mathbf{v}_O + \sum_\nu m_\nu (OP_\nu \times \boldsymbol{\omega}) \times OP_\nu = m \, OG \times \mathbf{v}_O + \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

Di qui la $(4.129)_1$. La $(4.129)_2$ segue da:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \cdot (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times OP_{\nu}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_O + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{\nu} OP_{\nu} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}. \end{aligned}$$

La $(4.129)_3$ segue da:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times OP_{\nu}) \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O + \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega} \times OP_{\nu} \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{\nu} OP_{\nu} \times \mathbf{F}_{\nu}. \quad \square \end{aligned}$$

NOTA 4.13.1 – Se il polo O coincide col baricentro (che è punto solidale) oppure se O è un punto solidale fisso ($\mathbf{v}_O = 0$), allora, omettendo il suffisso O , l'espressione del momento angolare si semplifica in

$$(4.130) \quad \mathbf{K} = I(\boldsymbol{\omega})$$

Denotati con $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i versori della terna principale d'inerzia relativa al punto O , con (A, B, C) i rispettivi momenti principali d'inerzia, con (p, q, r) le componenti secondo questa terna della velocità angolare, posto cioè

$$(4.131) \quad \boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k},$$

dalla (4.130) segue la formula

$$(4.132) \quad \boxed{\mathbf{K} = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k}}$$

che esprime il momento angolare relativo ad un punto fisso o al baricentro secondo la terna principale d'inerzia in quel punto. •

NOTA 4.13.2 – Se O è un punto solidale fisso l'energia cinetica si riduce a

$$(4.133) \quad T = \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I(\boldsymbol{\omega})$$

dove I è la forma quadratica d'inerzia nel punto O . Siccome la velocità angolare è ad ogni istante parallela all'asse di Mozzi a , dalla (4.133) segue

$$(4.134) \quad T = \frac{1}{2} I^a \boldsymbol{\omega}^2$$

dove I^a è il momento d'inerzia rispetto all'asse di Mozzi. Dalla (4.133) segue anche, secondo le notazioni considerate nella precedente osservazione,

$$(4.135) \quad T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad \bullet$$

NOTA 4.13.3 – Se si considera il sistema delle forze interne, che è equivalente a zero, dalla (4.129)₃ segue

$$W_i = 0.$$

Dunque: *le forze interne di un corpo rigido hanno potenza nulla.* •

Dopo le premesse sulle grandezze cinetiche del corpo rigido passiamo ora a considerare le equazioni della dinamica. Come per ogni sistema di punti materiali anche per un corpo rigido valgono le equazioni cardinali della meccanica. Nel caso del corpo rigido però accade che:

(I) le due prime equazioni, vale a dire il teorema della quantità di moto ed il teorema del momento della quantità di moto, che qui scriviamo rispetto ad un polo O fisso o coincidente col baricentro,

$$(4.136) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{R}_e, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}_e$$

descrivono completamente la dinamica, sono cioè equazioni differenziali sufficienti a determinare i moti del corpo rigido;

(II) la terza equazione cardinale, vale a dire l'equazione dell'energia

$$(4.137) \quad \frac{dT}{dt} = W_e,$$

è una conseguenza delle precedenti. Va inoltre osservato che le reazioni vincolari responsabili della rigidità del corpo sono forze soddisfacenti al postulato delle forze interne al sistema e non intervengono pertanto nelle equazioni cardinali, neanche nel teorema dell'energia, per quanto visto nella Nota 4.13.3.

Rinunciando alla discussione del punto (I), dimostriamo soltanto che la (4.137) è conseguenza delle (4.136). Posto come si è detto $O = G$, per la (4.129)₂ e la (4.135) si ha

$$(4.138) \quad T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G.$$

D'altra parte, stante la (4.132), denotando brevemente con il punto sovrapposto la derivata rispetto al tempo e facendo intervenire le formule di Poisson, si ha

$$\dot{\mathbf{K}} = A\dot{p}\mathbf{i} + B\dot{q}\mathbf{j} + C\dot{r}\mathbf{k} + A p \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} + B q \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} + C r \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k},$$

quindi

$$(4.139) \quad \dot{\mathbf{K}} = A\dot{p}\mathbf{i} + B\dot{q}\mathbf{j} + C\dot{r}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}.$$

Di qui si osserva che

$$\dot{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\omega} = A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r}.$$

Se allora si deriva la (4.138) e si applicano le (4.136), si trova la (4.137):

$$\begin{aligned} \dot{T} &= A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r} + m \mathbf{a}_G \cdot \mathbf{v}_G \\ &= \dot{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_G = \mathbf{M}_e \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{v}_G = W_e. \end{aligned}$$

4.14 Corpo rigido con un punto fisso

Consideriamo il caso di un corpo rigido con un punto fisso O . In questo caso la seconda equazione cardinale si scrive semplicemente

$$(4.140) \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M},$$

dove \mathbf{K} e \mathbf{M} sono il momento angolare e il momento delle forze esterne di polo O . Per la formula (4.139) del paragrafo precedente, sviluppando il prodotto $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}$, l'equazione vettoriale (4.140) si traduce nelle tre equazioni scalari

$$(4.141) \quad \begin{cases} A\dot{p} - (B - C)qr = X, \\ B\dot{q} - (C - A)rp = Y, \\ C\dot{r} - (A - B)pq = Z, \end{cases}$$

dove (X, Y, Z) sono le componenti del momento delle forze esterne \mathbf{M} rispetto alla terna principale d'inerzia. Queste sono le celebri **equazioni di Euler** della dinamica del corpo rigido.

Le equazioni di Euler sono equazioni differenziali del primo ordine nelle componenti della velocità angolare $p(t), q(t), r(t)$ secondo la terna principale d'inerzia. I secondi membri, vale a dire le componenti del momento delle forze esterne, dipendono in generale dalla posizione del corpo e dalla velocità dei suoi punti, cioè dall'atto di moto. Essi si esprimono quindi come funzioni dei tre parametri scelti per rappresentare la posizione del corpo rigido, delle tre componenti la velocità angolare ed eventualmente del tempo (se le forze attive dipendono dal tempo).

Se come parametri si scelgono gli angoli di Euler (§3.1.6) in modo tale che la terna principale d'inerzia $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ coincida con la terna $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ allora alle equazioni di Euler (4.141) vanno affiancate le equazioni che esprimono le componenti della velocità angolare in funzione degli angoli di Euler e delle loro derivate rispetto al tempo, cioè le equazioni (3.67):

$$(4.142) \quad \begin{cases} p = \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi}, \\ q = \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} - \sin \phi \dot{\theta}, \\ r = \cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi}. \end{cases}$$

Queste equazioni, lineari nelle $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$, possono essere risolte per $\sin \theta \neq 0$:

$$(4.143) \quad \begin{cases} \dot{\psi} = \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \phi + q \cos \phi), \\ \dot{\theta} = p \cos \phi - q \sin \phi, \\ \dot{\phi} = r - \frac{1}{\sin \theta} (p \sin \phi \cos \theta + q \cos \phi \cos \theta). \end{cases}$$

Il sistema complessivo delle equazioni (4.141) + (4.143) è allora equivalente ad un sistema di *sei* equazioni differenziali del primo ordine in forma normale nelle *sei* funzioni incognite $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, $p(t)$, $q(t)$ e $r(t)$, almeno nel caso in cui nessuno dei momenti principali d'inerzia si annulli (il caso in cui uno di questi si annulla, caso degenero, richiede una trattazione a parte).

L'integrazione di questo sistema, che fornisce i moti del corpo rigido intorno al punto fisso, presenta in genere delle notevoli difficoltà, anche in casi apparentemente semplici, come per esempio nel caso in cui le componenti (X, Y, Z) siano nulle (moti alla Poincot, §4.15) oppure nel caso in cui sul corpo agisca una forza costante (come si vedrà nel Cap. 5). Si va allora alla ricerca di eventuali integrali primi tramite i quali dedurre proprietà qualitative o geometriche dei moti.

Risoluzione del sistema lineare (4.142).

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi \sin \theta & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}.$$

$$\det \mathbf{M} = -\sin \theta.$$

$$\mathbf{M}^C = \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta \\ -\cos \phi & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{M}^{CT} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \sin \theta & 0 \\ -\sin \phi \cos \theta & -\cos \phi \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \sin \theta & 0 \\ -\sin \phi \cos \theta & -\cos \phi \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

NOTA 4.14.1 – Le forze reattive esterne al corpo, responsabili del mantenimento del punto fisso O , si sommano in una forza applicata in O e quindi non danno alcun contributo al momento delle forze esterne \mathbf{M} . Esse danno però un contributo al risultante delle forze esterne che interviene nella prima equazione cardinale. Quest'equazione pertanto, noto il moto del corpo rigido e noto il risultante delle forze esterne attive, serve proprio alla determinazione del risultante delle forze reattive. •

4.15 Moti alla Poincot

Si dicono **moti alla Poincot**,¹² o anche **moti rigidi spontanei**, i moti di un corpo rigido con un punto fisso soggetto ad un sistema di forze il cui momento risultante, rispetto al punto fisso, è nullo.

Sono esempi notevoli di moti alla Poincot:

- (i) il moto di un corpo rigido fissato nel baricentro e soggetto alla gravità,
- (ii) il moto *rispetto al baricentro* di un corpo rigido in caduta libera.

Nel primo caso infatti, essendo $\mathbf{F}_{e\nu} = m_\nu \mathbf{g}$, risulta: $\mathbf{M}_{Ge} = \sum_\nu G P_\nu \times m_\nu \mathbf{g} = \sum_\nu m_\nu G P_\nu \times \mathbf{g} = 0$ perché $\sum_\nu m_\nu G P_\nu = 0$. Nel secondo caso, poiché ci si pone in un riferimento che si muove di moto traslatorio rispetto al riferimento in cui la forza peso è ritenuta costante, e che viene assunto come inerziale, si ha $\mathbf{F}_{e\nu} = m_\nu (\mathbf{g} - \mathbf{a}_G)$, essendo $-m_\nu \mathbf{a}_G$ la forza di trascinamento. Per cui, come sopra, si trova $\mathbf{M}_{Ge} = 0$.

Nel caso dei moti alla Poincot la seconda equazione cardinale diventa

$$(4.144) \quad \boxed{\dot{\mathbf{K}} = 0}$$

e le equazioni di Euler si semplificano in

$$(4.145) \quad \boxed{\begin{cases} A\dot{p} - (B - C)qr = 0, \\ B\dot{q} - (C - A)rp = 0, \\ C\dot{r} - (A - B)pq = 0. \end{cases}}$$

Queste sono le **equazioni di Euler-Poincot**. Formano un sistema del primo ordine nelle sole funzioni incognite $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ che, se nessuno dei momenti principali d'inerzia (A, B, C) è nullo, può porsi in forma normale. La sua integrazione consente di determinare la velocità angolare e quindi il moto del corpo rigido a partire da un atto di moto iniziale.

L'equazione cardinale (4.144) mostra che il momento angolare è un integrale primo (vettoriale):

$$(4.146) \quad \mathbf{K} = \text{costante}.$$

Il teorema dell'energia, annullandosi anche la potenza delle forze esterne, mostra che anche l'energia cinetica è un integrale primo:

$$(4.147) \quad T = \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{costante}.$$

Questi due integrali primi producono una notevole proprietà geometrica dei moti alla Poincot:

TEOREMA 4.15.1 – Teorema di Poincot: *in ogni moto alla Poincot l'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso O rotola senza strisciare su di un piano fisso ortogonale al momento angolare costante \mathbf{K}_O .*

¹²Louis Poincot, 1777-1859.

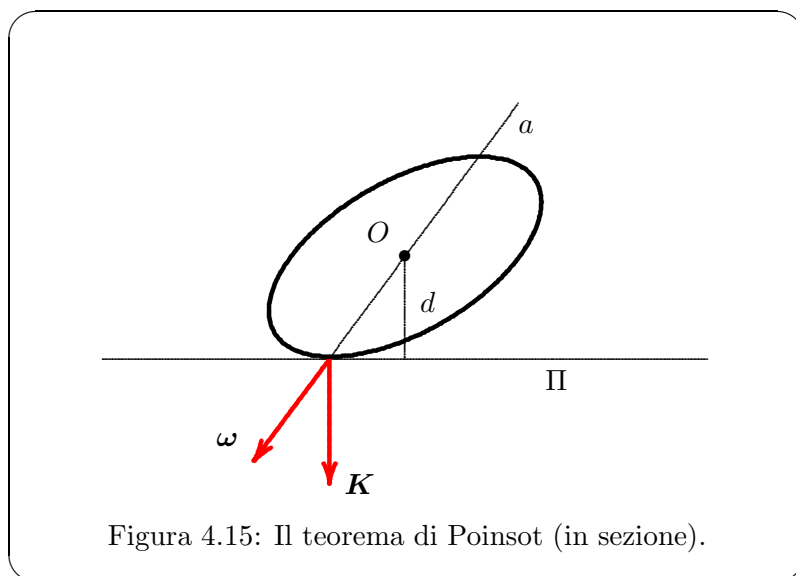


Figura 4.15: Il teorema di Poincaré (in sezione).

Per la sua dimostrazione occorre utilizzare una proprietà generale dei moti rigidi con un punto fisso:

LEMMA 4.15.1 – *In un qualunque moto rigido con un punto fisso O , in ogni istante in cui $\omega \neq 0$, il momento angolare \mathbf{K} rispetto al punto fisso è ortogonale all'ellissoide d'inerzia relativo ad O nei punti di intersezione con l'asse di Mozzi e forma angolo acuto con la velocità angolare (Figura 4.15).*

DIMOSTRAZIONE. Si consideri il riferimento principale d'inerzia in O , di coordinate (x, y, z) . L'ellissoide d'inerzia ha equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Il gradiente della funzione a primo membro, le cui componenti sono $(2Ax, 2By, 2Cz)$, è un vettore ortogonale all'ellissoide nel punto P di coordinate (x, y, z) (teorema del gradiente). Se questo punto sta sull'asse di Mozzi, che è parallelo a ω di componenti (p, q, r) , allora il gradiente è parallelo al vettore di componenti (Ap, Bq, Cr) . Ma queste sono appunto le componenti di \mathbf{K} : la prima parte dell'enunciato è dimostrata. Osservato poi che $\omega \cdot \mathbf{K} = 2T$ e che l'energia cinetica è sempre positiva o nulla, si conclude che l'angolo tra ω e \mathbf{K} è sempre acuto o retto. Ma il caso in cui $\omega \cdot \mathbf{K} = 0$ corrisponde a $T = 0$, cioè $\omega = 0$. \square

Dimostrazione del teorema di Poincaré. In virtù del Lemma 4.15.1 il piano Π tangente all'ellissoide d'inerzia in uno dei due punti d'intersezione con l'asse di Mozzi ha giacitura costante, perché è ortogonale al vettore costante \mathbf{K} . Si prenda il piano tangente nel punto P per cui OP e ω sono concordi. Per il significato dell'ellissoide d'inerzia e per quanto visto sull'energia cinetica si ha

$$(4.148) \quad \frac{1}{|OP|^2} = I^a = \frac{2T}{\omega^2}.$$

Sia θ l'angolo formato tra $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{K} . Allora

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{K}| |\boldsymbol{\omega}|} = \frac{2T}{|\mathbf{K}| |\boldsymbol{\omega}|}.$$

D'altra parte, se d è la distanza del piano Π dal punto O , per la (4.148) si ha

$$(4.149) \quad d = |OP| \cos \theta = \frac{2T |OP|}{|\mathbf{K}| |\boldsymbol{\omega}|} = \frac{\sqrt{2T}}{|\mathbf{K}|}.$$

Poiché T e \mathbf{K} sono costanti, d è costante: dunque il piano Π è fisso. Poiché il punto P di contatto tra ellissoide e piano sta sull'asse di Mozzi, la velocità di P , pensato solidale al corpo, è nulla quindi l'ellissoide rotola senza strisciare su Π . \square

4.15.1 Moti stazionari

TEOREMA 4.15.2 – *Tra i moti alla Poinot esistono moti rotatori – cioè con un asse fisso. Essi sono necessariamente uniformi ($\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$) e intorno ad un asse principale d'inerzia.*¹³

DIMOSTRAZIONE. I moti rotatori sono caratterizzati dall'avere l'asse di Mozzi fisso. Dal teorema di Poinot si vede che l'asse di Mozzi è fisso se e solo se il punto P di contatto tra l'ellissoide ed il piano è fisso. D'altra parte un ellissoide con centro fisso può rotolare senza strisciare su di un piano fisso se e solo se il punto di contatto coincide con un suo vertice e quindi appartiene ad uno degli assi. Inoltre, se P è fisso, $\boldsymbol{\omega}$ è costante. \square

DEFINIZIONE 4.15.1 – *I moti rigidi con punto fisso e con $\boldsymbol{\omega}$ costante si dicono **stazionari**.*

•

Il teorema precedente afferma allora che moti alla Poinot stazionari sono possibili solo intorno agli assi principali d'inerzia.

4.15.2 Moti di precessione regolare

TEOREMA 4.15.3 – *I moti alla Poinot sono moti di precessione regolare se e solo se l'ellissoide d'inerzia – nel punto fisso O – è rotondo.*

DIMOSTRAZIONE. Se l'ellissoide in O è rotondo il punto di contatto P descrive sul piano fisso (e anche sull'ellissoide stesso) una circonferenza. Quindi la distanza $|OP|$ è costante, col che $|\boldsymbol{\omega}|$ è costante. Siccome P sta sull'asse di Mozzi, i coni di Poinot sono rotondi. Quello mobile rotola su quello fisso con velocità costante perché è costante l'energia cinetica. \square

¹³ I teoremi che vengono proposti in questo e nel successivo sottoparagrafo mostrano la *potenza* dei ragionamenti geometrici basati sul teorema di Poinot e che, tra l'altro, evitano il ricorso alle equazioni generali della dinamica del corpo rigido viste al §4.14.

NOTA 4.15.1 – L'equazione cardinale (4.144) è equivalente all'equazione vettoriale

$$(4.150) \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega},$$

dove ora la derivata temporale s'intende riferita al corpo rigido. Infatti denotate con $D\mathbf{K}$ e con $D'\mathbf{K}$ le derivate temporali di un vettore generico \mathbf{K} fatte rispetto al riferimento fisso e al riferimento solidale al corpo rigido, vale la formula (3.43):

$$D\mathbf{K} = D'\mathbf{K} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}.$$

Sicché l'equazione (4.144) $D\mathbf{K} = 0$ è equivalente a $D'\mathbf{K} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 0$, cioè alla (4.150). Questa è dunque la seconda equazione cardinale riferita al corpo, scritta cioè nel riferimento solidale. Se ci si pone nel riferimento solidale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ appare più naturale considerare le equazioni di Euler (4.145) come sistema dinamico nello spazio \mathbb{R}^3 delle componenti

$$(4.151) \quad x = Ap, \quad y = Bq, \quad z = Cr$$

del vettore momento angolare \mathbf{K} rispetto alla terna solidale. Il sistema (4.145) è allora equivalente al sistema normale

$$(4.152) \quad \begin{cases} \dot{x} = (c - b) y z \\ \dot{y} = (a - c) z x \\ \dot{z} = (b - a) x y \end{cases}$$

posto (si suppone, al solito, che nessuno dei momenti principali d'inerzia sia nullo)

$$(4.153) \quad a = \frac{1}{A}, \quad b = \frac{1}{B}, \quad c = \frac{1}{C}.$$

Questo sistema possiede due integrali primi. Il primo è conseguente all'integrale dell'energia $2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{costante}$ e si scrive

$$(4.154) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = h^2.$$

Il secondo è $|\mathbf{K}| = \text{costante}$ cioè¹⁴

$$(4.155) \quad x^2 + y^2 + z^2 = k^2.$$

Le orbite del sistema dinamico (4.152) sono dunque date dall'intersezione delle sfere di equazione (4.155) con gli ellissoidi di equazione (4.154) che prendono il nome di **ellissoidi dell'energia**. Si tratta di curve chiuse, che degenerano nei vertici degli ellissoidi – gli assi (x, y, z) sono luogo di punti singolari. Lo studio di queste curve consente tra l'altro di ottenere un teorema sulla stabilità dei moti di Poincot stazionari intorno agli assi principali d'inerzia, peraltro già considerato nell'Esempio 1.15.1.

¹⁴ (\mathbf{K} è costante nello spazio ma non è costante rispetto al corpo rigido; è costante il suo modulo).

Si consideri il caso di un corpo rigido asimmetrico rispetto ad O : l'ellissoide d'inerzia non è rotondo (nel caso simmetrico, come si è già osservato, i moti del corpo rigido sono di precessione regolare). Si supponga

$$A > B > C \quad (a < b < c).$$

A seconda dei valori delle costanti $h = \sqrt{2T}$ e $k = |\mathbf{K}|$ l'intersezione della sfera (4.155) di raggio k con l'ellissoide (4.154) di semiassi $(h\sqrt{A}, h\sqrt{B}, h\sqrt{C})$ è di vario tipo.

(i) Se $k < h\sqrt{C}$, è vuota; la sfera è interna all'ellissoide e non vi è alcun moto reale; questa relazione tra le costanti è impossibile.

(ii) Se $k = h\sqrt{C}$, è costituita dai due vertici dell'ellissoide sull'asse z .

(iii) Se $h\sqrt{B} > k > h\sqrt{C}$, è costituita da due curve chiuse, simmetriche rispetto al piano (x, y) , intorno ai suddetti vertici.

(iv) Se $k = h\sqrt{B}$, è costituita da due circonferenze passanti per i vertici dell'asse y .

(v) Se $h\sqrt{A} > k > h\sqrt{B}$, è costituita da due curve chiuse simmetriche rispetto al piano (y, z) .

(vi) Se $k = h\sqrt{A}$, è costituita dai due vertici sull'asse x .

(vii) Se infine $k > h\sqrt{A}$, è vuota e anche questa relazione tra le costanti è impossibile.

Nei casi (iii) e (v) si hanno dei moti di \mathbf{K} periodici. Nei casi (ii) e (vi) il vettore \mathbf{K} è costante anche nel corpo ed i moti del corpo rigido sono stazionari. Questi moti sono stabili, nel senso che una piccola perturbazione trasforma il moto stazionario in una piccola orbita chiusa di \mathbf{K} . Il caso singolare (iv) comprende invece due distinte situazioni: quella di un moto stazionario intorno all'asse y e quella di un moto di \mathbf{K} lungo una semicirconferenza (si tratta di un moto asintotico). Di qui si osserva che il moto stazionario intorno all'asse y è instabile. Si è così dimostrato che i moti stazionari intorno agli assi di massimo e minimo momento d'inerzia sono stabili, quelli intorno all'asse intermedio sono instabili. •

4.15.3 Equazioni di Lax

Si considerino gli endomorfismi antisimmetrici aggiunti dei vettori \mathbf{K} e $\boldsymbol{\omega}$ (si veda la Nota 3.2.1 e il §5.10):

$$(4.156) \quad \mathbf{L} = * \mathbf{K}, \quad \boldsymbol{\Omega} = * \boldsymbol{\omega}.$$

Si dimostra che per due vettori qualsiasi vale l'uguaglianza

$$* (\mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}) = [\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}],$$

dove

$$[\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{L} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{L}$$

è il **commutatore** dei due endomorfismi. L'equazione (4.150) risulta allora equivalente all'equazione

$$(4.157) \quad \boxed{\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{L}, \boldsymbol{\Omega}]}$$

Lo si può anche riconoscere direttamente considerando le matrici

$$\mathbf{L} = [L_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & Cr & -Bq \\ -Cr & 0 & Ap \\ Bq & -Ap & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = [\Omega_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{bmatrix},$$

le quali rappresentano proprio le forme bilineari antisimmetriche aggiunte di \mathbf{K} e $\boldsymbol{\omega}$ (si conviene che il primo indice α sia indice di riga). Il commutatore $\mathbf{C} = [\mathbf{L}, \mathbf{\Omega}] = \mathbf{L}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{L}$ delle due matrici ha componenti

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} (\Omega_{\alpha\gamma} L_{\gamma\beta} - L_{\alpha\gamma} \Omega_{\gamma\beta}).$$

Quindi:

$$[C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & (A-B)pq & (A-C)pr \\ (B-A)pq & 0 & (B-C)qr \\ (C-A)pr & (C-B)qr & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede allora che le equazioni di Euler-Poinsot (4.145) equivalgono proprio alle equazioni $\dot{L}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}$, quindi all'equazione (4.157).

Un'equazione differenziale del tipo (4.157), coinvolgente endomorfismi \mathbf{L} e $\mathbf{\Omega}$ sopra uno spazio vettoriale E reale e a dimensione finita (quindi coinvolgente matrici reali quadrate), prende il nome di **equazione di Lax**.¹⁵ Si dice inoltre che un sistema dinamico, ossia un campo vettoriale \mathbf{X} sopra uno spazio di coordinate (x^α) , ammette una **rappresentazione di Lax** se il sistema differenziale del primo ordine ad esso associato risulta traducibile in un'equazione del tipo (4.157). L'utilità della rappresentazione di Lax risiede nel fatto che da essa si ricavano immediatamente integrali primi. Segue infatti dalla (4.157) che le tracce¹⁶

$$(4.158) \quad F_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr}(\mathbf{L}^k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

sono integrali primi (il fattore $\frac{1}{k}$ è inessenziale ma è conveniente per ragioni formali). Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \operatorname{tr}(\mathbf{L}^k) &= \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{L}} \mathbf{L}^{k-1}) = \operatorname{tr}([\mathbf{L}, \mathbf{\Omega}] \mathbf{L}^{k-1}) \\ &= \operatorname{tr}(\mathbf{L} \mathbf{\Omega} \mathbf{L}^{k-1} - \mathbf{\Omega} \mathbf{L}^k) = 0. \end{aligned}$$

Anzi, se vale anche la condizione

$$(4.159) \quad \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{L}} \mathbf{\Omega}) = \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{\Omega}} \mathbf{L}),$$

¹⁵ Peter Lax, Courant Institute di New York.

¹⁶ La **traccia** $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ di un endomorfismo lineare \mathbf{A} su di uno spazio vettoriale E è la somma degli elementi della diagonale principale della matrice delle componenti secondo una base qualunque di E (non dipende infatti dalla base scelta). È uguale alla somma degli autovalori.

allora anche la funzione

$$(4.160) \quad T = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{L} \boldsymbol{\Omega})$$

è un integrale primo. La dimostrazione è analoga alla precedente.

Se gli endomorfismi \mathbf{L} e $\boldsymbol{\Omega}$ sono antisimmetrici, come nel caso delle equazioni di Euler-Poinsot, tutti gli F_k sono nulli per k dispari. Per $k = 2$, siccome per qualunque vettore $\mathbf{K} = *\mathbf{L}$ si ha

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L}^2) = -2 \mathbf{K}^2 \quad (\mathbf{K}^2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}),$$

si vede che è proprio

$$F_2 = -\mathbf{K}^2.$$

Per valori pari di k si hanno integrali primi dipendenti da questo. Infine, poiché per due qualunque vettori $\mathbf{K} = *\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\omega} = *\boldsymbol{\omega}$ vale la formula

$$\operatorname{tr}(\mathbf{L} \boldsymbol{\omega}) = -2 \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

si vede che l'integrale primo (4.160) coincide proprio con l'energia cinetica, mentre la (4.159) è vera perché $\dot{\mathbf{K}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{K} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}$ (per verificare quest'uguaglianza basta ricordare che $\mathbf{K} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\omega})$).

4.16 Corpo rigido con un asse fisso

Consideriamo infine il caso di **un corpo rigido con asse fisso**. Le forze vincolari si esplicano tutte sull'asse fisso quindi, in assenza di attriti, il loro momento assiale rispetto all'asse fisso a è da ritenersi nullo. Essendo l'asse fisso a asse di Mozzi e quindi $\boldsymbol{\omega}$ parallelo al suo versore \mathbf{u} , posto

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u},$$

risulta

$$(4.161) \quad K^a = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{u} = \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{u} = \omega I_O(\mathbf{u}) = \omega I^a,$$

con I^a momento d'inerzia rispetto all'asse a . Pertanto la seconda equazione cardinale proiettata sull'asse a diventa

$$(4.162) \quad I^a \dot{\omega} = M^a.$$

La posizione del corpo rigido è determinata dall'angolo di rotazione θ concorde col versore \mathbf{u} , per cui $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{u}$. L'equazione (4.162) diventa

$$(4.163) \quad I^a \ddot{\theta} = M^a.$$

Il momento assiale delle forze esterne attive M^a dipende in generale dalla posizione e dalla velocità angolare del corpo rigido, quindi è una funzione nota di θ e $\dot{\theta}$. Pertanto la sola equazione (4.163) è sufficiente a determinare il moto.

ESEMPIO 4.16.1 – Il pendolo composto. È un corpo rigido vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso orizzontale (**asse di sospensione**) e soggetto alla sola forza peso. Sia O il punto proiezione ortogonale del baricentro G sull'asse di sospensione a . Il punto O prende il nome di **centro di sospensione**. Se si misura l'angolo di rotazione θ a partire dalla posizione in cui il vettore OG è verticale discendente risulta

$$M^a = -m g d \sin \theta, \quad d = |OG|.$$

Pertanto l'equazione di moto (4.163) diventa

$$(4.164) \quad I^a \ddot{\theta} + m g d \sin \theta = 0.$$

Se si pone

$$(4.165) \quad \ell = \frac{I^a}{m d},$$

si ottiene un'equazione analoga a quella del pendolo semplice di lunghezza ℓ :

$$(4.166) \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$$

Questa lunghezza viene detta **lunghezza ridotta** del pendolo. Il punto P sulla retta OG distante ℓ da O prende il nome di **centro di oscillazione** del pendolo. La retta per P parallela all'asse di sospensione prende il nome di **asse di oscillazione**. La denotiamo con a' e poniamo $d' = |PG|$. L'interesse di queste definizioni è dovuto al **teorema di Huygens**.¹⁷ •

TEOREMA 4.16.1 – *Un pendolo composto oscilla nello stesso modo scambiando l'asse di sospensione col corrispondente asse di oscillazione.*

DIMOSTRAZIONE. Sia g l'asse per il baricentro parallelo ad a . Per il teorema di Huygens relativo ai momenti d'inerzia si ha

$$I^a = I^g + m d^2,$$

quindi

$$(4.167) \quad \ell = \frac{I^g}{m d} + d.$$

Di qui si deduce innanzitutto che $\ell > d$, quindi che G è compreso tra O e P . Se ora si assume come asse fisso l'asse a' , in analogia con la (4.167), deve essere

$$\ell' = \frac{I^g}{m d'} + d'.$$

Tenuto allora conto che $d' = \ell - d$, di qui e dalla (4.167) si deduce

$$\ell' = \frac{I^g}{m d'} + \frac{I^g}{m d}.$$

Dalla simmetria di questa formula segue $\ell = \ell'$ e il teorema di Huygens è dimostrato. \square

¹⁷ Christiaan Huygens, 1629-1695.

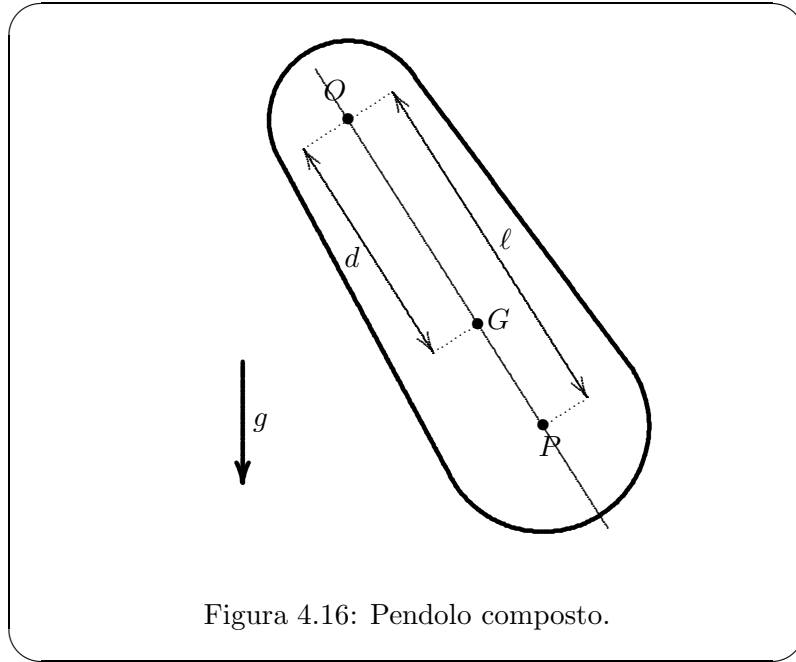


Figura 4.16: Pendolo composto.

4.17 Tensore d'inerzia di un sistema di masse

Si consideri un sistema di masse $\mathcal{M} = \{(P_\nu, m_\nu); \nu = 1, \dots, N\}$ nello spazio affine euclideo tridimensionale \mathcal{E}_3 (con spazio vettoriale soggiacente E_3).

DEFINIZIONE 4.17.1 – Chiamiamo **tensore d'inerzia** di \mathcal{M} nel punto $O \in \mathcal{E}_3$ l'endomorfismo lineare $I_O: E_3 \rightarrow E_3$ definito da ¹⁸

$$(4.168) \quad I_O(v) = \sum_{\nu} m_{\nu} (OP_{\nu} \times v) \times OP_{\nu}. \quad \bullet$$

¹⁸ Un **tensore** T di tipo (p, q) su di uno spazio vettoriale E (reale e a dimensione finita) è un'applicazione multilineare

$$T: \underbrace{E^* \times E^* \times \dots \times E^*}_{p \text{ volte}} \times \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{q \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Per esempio, una forma bilineare $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ è un tensore di tipo $(0, 2)$ (di qui il termine “tensore metrico” usato per un prodotto scalare di vettori). Anche un endomorfismo lineare A su E può essere visto come tensore di tipo $(1, 1)$ ponendo, per ogni vettore $v \in E$ e ogni covettore $\alpha \in E^*$,

$$A(\alpha, v) = \langle A(v), \alpha \rangle.$$

A primo membro abbiamo il tensore A , a secondo membro l'endomorfismo A (si usa lo stesso simbolo). Questo giustifica l'uso del termine “tensore d'inerzia” al posto di “endomorfismo d'inerzia”.

Per la formula del doppio prodotto vettoriale¹⁹ la definizione (4.168) equivale a

$$(4.169) \quad \mathbf{I}_O(\mathbf{v}) = \sum_{\nu} m_{\nu} (|\mathbf{OP}_{\nu}|^2 \mathbf{v} - \mathbf{OP}_{\nu} \cdot \mathbf{v} \mathbf{OP}_{\nu}).$$

Dalla definizione (4.168) segue, per la proprietà di scambio del prodotto misto,²⁰

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{OP}_{\nu} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{OP}_{\nu} \times \mathbf{u}).$$

Dunque il tensore d'inerzia \mathbf{I} è simmetrico:²¹

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$$

Denotiamo ancora con lo stesso simbolo, com'è consuetudine, la forma bilineare simmetrica associata. Poniamo cioè

$$(4.170) \quad \mathbf{I}_O(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{I}_O(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}.$$

Denotiamo invece con I_O la forma quadratica associata a \mathbf{I}_O , detta **forma d'inerzia** nel punto O , definita da

$$(4.171) \quad I_O(\mathbf{v}) = \mathbf{I}_O(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \sum_{\nu} m_{\nu} |\mathbf{OP}_{\nu} \times \mathbf{v}|^2.$$

NOTA 4.17.1 – Segue immediatamente dalla definizione (4.168) che il tensore d'inerzia \mathbf{I}_O (e quindi anche la forma d'inerzia I_O) sono “funzioni additive” di sistemi materiali, vale a dire: se \mathcal{M}' e \mathcal{M}'' sono due sistemi materiali disgiunti e \mathbf{I}'_O e \mathbf{I}''_O sono i rispettivi tensori d'inerzia, allora $\mathbf{I}_O = \mathbf{I}'_O + \mathbf{I}''_O$ è il tensore d'inerzia del sistema $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$. •

DEFINIZIONE 4.17.2 – Chiamiamo **momento d'inerzia** rispetto ad una retta a il numero I^a , positivo o nullo, dato dalla somma dei prodotti delle masse m_{ν} per le distanze al quadrato dei punti P_{ν} dalla retta a :

$$(4.172) \quad I^a = \sum_{\nu} m_{\nu} (d(a, P_{\nu}))^2. \quad \bullet$$

Per le proprietà del prodotto vettoriale,

$$(d(a, P_{\nu}))^2 = |\mathbf{OP}_{\nu} \times \mathbf{u}|^2,$$

¹⁹ È la formula $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \mathbf{u}$.

²⁰ Il prodotto misto non cambia se si scambiano fra loro i due prodotti: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

²¹ Un endomorfismo lineare \mathbf{A} su di uno spazio vettoriale dotato di tensore metrico è simmetrico se $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, cioè se $\mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$ per ogni coppia di vettori. Si dimostra che, se il tensore metrico è definito positivo, gli autovalori di un endomorfismo simmetrico sono tutti reali ed inoltre gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono fra loro ortogonali. La forma quadratica associata ad \mathbf{A} è definita positiva se e solo se gli autovalori sono positivi.

dove \mathbf{u} è un versore della retta a ed O un suo qualunque punto. Quindi, per la (4.171),

$$(4.173) \quad \boxed{I^a = I_O(\mathbf{u}), \quad \forall O \in a, \quad \mathbf{u} \text{ versore di } a}$$

Pertanto: *il momento d'inerzia rispetto ad una retta è uguale al valore che la forma d'inerzia relativa ad un qualunque suo punto assume su di un suo versore.*

Vediamo come varia il tensore d'inerzia \mathbf{I}_O , quindi anche la forma d'inerzia I_O , al variare del punto O . Le formule seguenti, che chiamiamo **formule di trasposizione**, consentono di calcolare \mathbf{I}_O e I_O in un qualunque punto O quando siano noti i loro valori nel baricentro G del sistema

$$(4.174) \quad \begin{cases} \mathbf{I}_O(\mathbf{v}) = \mathbf{I}_G(\mathbf{v}) + m (\mathbf{OG} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{OG}, \\ I_O(\mathbf{v}) = I_G(\mathbf{v}) + m |\mathbf{OG} \times \mathbf{v}|^2, \end{cases}$$

(m è la massa totale). Si ha infatti successivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O(\mathbf{v}) &= \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{OP}_{\nu} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{OP}_{\nu} \\ &= \sum_{\nu} m_{\nu} ((\mathbf{OG} + \mathbf{GP}_{\nu}) \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{OG} + \mathbf{GP}_{\nu}) \\ &= m (\mathbf{OG} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{OG} + (\mathbf{OG} \times \mathbf{v}) \times \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{GP}_{\nu} + \\ &\quad + ((\sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{GP}_{\nu}) \times \mathbf{v}) \times \mathbf{OG} + \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{GP}_{\nu} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{GP}_{\nu} \\ &= m (\mathbf{OG} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{OG} + \mathbf{I}_G(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

ricordato che, per definizione di baricentro, è $\sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{GP}_{\nu} = 0$. La seconda della (4.174) segue immediatamente dalla prima. Immediata conseguenza delle formule di trasposizione è il seguente **teorema di Huygens sui momenti d'inerzia**:

TEOREMA 4.17.1 – *Sia a una retta e sia g la retta parallela ad a passante per il baricentro G di un sistema di masse \mathcal{M} , allora*

$$(4.175) \quad \boxed{I^a = I^g + m (d(a, g))^2}$$

dove m è la massa totale e $d(a, g)$ è la distanza delle due rette.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la definizione (4.173) e si applichi la seconda delle formule di trasposizione (4.174):

$$I^a = I_O(\mathbf{u}) = I_G(\mathbf{u}) + m |\mathbf{OG} \times \mathbf{u}|^2 = I^g + m (d(a, g))^2. \quad \square$$

COROLLARIO 4.17.1 – *Al variare della retta a in un fascio di rette parallele il momento d'inerzia I^a è minimo quando a passa per il baricentro.*

Studiamo il comportamento del tensore e della forma d'inerzia in un punto O al variare del vettore \mathbf{v} . Osserviamo innanzitutto dalla (4.171) che $I_O(\mathbf{v}) \geq 0$. Si ha $I_O(\mathbf{v}) = 0$ se $\mathbf{v} = 0$ oppure se OP_ν è parallelo a \mathbf{v} per ogni punto P_ν . In quest'ultimo caso tutti i punti del sistema materiale si trovano su di una retta passante per O e parallela a \mathbf{v} . Chiamiamo questo caso **caso degenerare**. Se il sistema si riduce al punto O il tensore d'inerzia in O è identicamente nullo. In conclusione: *la forma d'inerzia I_O è definita positiva, al di fuori del caso degenerare in cui è semi-definita positiva*. Di conseguenza il tensore d'inerzia \mathbf{I}_O ammette tre autovalori reali (I_1, I_2, I_3) : sono detti **momenti principali d'inerzia** relativi al punto O . Nel caso non degenerare sono tutti e tre positivi, nel caso degenerare uno di essi è nullo e gli altri due sono uguali fra loro (per ragioni di simmetria, come sarà chiarito fra poco). Le autodirezioni di \mathbf{I}_O , tra loro ortogonali, determinano tre rette passanti per O , (a_1, a_2, a_3) dette **assi principali d'inerzia** relativi al punto O . Questi assi sono univocamente determinati se e solo se i momenti principali d'inerzia sono tutti distinti. I momenti principali d'inerzia e gli assi principali d'inerzia relativi al baricentro si chiamano rispettivamente **momenti centrali d'inerzia** e **assi centrali d'inerzia**.

NOTA 4.17.2 – I momenti principali d'inerzia (I_1, I_2, I_3) in un punto O sono i momenti d'inerzia relativi ai rispettivi assi principali (a_1, a_2, a_3) . Infatti, se per esempio \mathbf{u}_1 è un autovettore unitario associato all'autovalore I_1 , da $\mathbf{I}_O(\mathbf{u}_1) = I_1 \mathbf{u}_1$ segue $I_O(\mathbf{u}_1) = \mathbf{I}_O(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 = I_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = I_1$. •

Come vedremo tra poco, la conoscenza degli assi principali d'inerzia è importante perché consente notevoli semplificazioni nel calcolo dei momenti d'inerzia. La loro determinazione è facilitata dalla seguente importante **proprietà di simmetria**:

TEOREMA 4.17.2 – Se Π è un piano di **simmetria materiale ortogonale** del sistema materiale \mathcal{M} (cioè se è un piano di simmetria coniugato ad un versore ortogonale \mathbf{u}) allora, qualunque sia $O \in \Pi$, la retta per O ortogonale a Π è asse principale d'inerzia in O .

DIMOSTRAZIONE. Si prenda un versore \mathbf{u} ortogonale al piano Π e si considerino due punti materiali simmetrici: (P_1, m_1) e (P_2, m_2) . Per definizione di simmetria materiale ortogonale si ha $m_1 = m_2$, $P_1 P_2$ parallelo ad \mathbf{u} , e il punto medio di $P_1 P_2$ appartiene a Π : allora, qualunque sia $O \in \Pi$, si ha $|OP_1| = |OP_2|$ e $OP_1 \cdot \mathbf{u} = -OP_2 \cdot \mathbf{u}$. Per il sistema materiale costituito da questi due soli punti si ha di conseguenza:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) &= m_1 (|OP_1|^2 \mathbf{u} - OP_1 \cdot \mathbf{u} OP_1) + m_2 (|OP_2|^2 \mathbf{u} - OP_2 \cdot \mathbf{u} OP_2) \\ &= m_1 (2|OP_1|^2 \mathbf{u} + OP_1 \cdot \mathbf{u} P_1 P_2) \\ &= m_1 (2|OP_1|^2 \pm OP_1 \cdot \mathbf{u} |P_1 P_2|) \mathbf{u} = I \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Ciò mostra che \mathbf{u} è autovettore di \mathbf{I}_O . Invece per un sistema costituito da un solo punto materiale (P, m) posto su Π , si ha semplicemente $\mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = m|OP|^2 \mathbf{u}$, perché $OP \cdot \mathbf{u} = 0$. Anche in questo caso \mathbf{u} è autovettore. Ciò basta a dimostrare il teorema in virtù della proprietà additiva del tensore d'inerzia (Nota ??). □

Poiché gli assi principali d'inerzia sono fra loro ortogonali, l'enunciato del teorema può continuare con: ... e gli altri due assi principali d'inerzia giacciono su Π . La dimostrazione del teorema seguente, assai utile nelle applicazioni, è lasciata come esercizio.

TEOREMA 4.17.3 – Se un sistema materiale \mathcal{M} ammette due piani di simmetria materiale ortogonale fra loro ortogonali, allora gli assi principali d'inerzia relativi ad un qualunque punto O della loro retta d'intersezione sono la retta intersezione stessa e le due rette ortogonali per O giacenti sui due piani. Se i due piani di simmetria ortogonale non sono fra loro ortogonali, allora la retta intersezione è asse principale d'inerzia per ogni suo punto, gli altri due assi principali sono a questa ortogonali ma indeterminati ed i due momenti d'inerzia corrispondenti sono uguali.

Veniamo infine al calcolo delle componenti del tensore d'inerzia. Si considerino un riferimento ortonormale di origine il punto O , $(O, \mathbf{c}_\alpha) = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e le corrispondenti coordinate $(x^\alpha) = (x, y, z)$. Denotiamo con $(x_\nu^\alpha) = (x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ le coordinate del punto P_ν . Tenuto conto della definizione (4.169) e delle uguaglianze $OP_\nu = x_\nu^\alpha \mathbf{c}_\alpha$ e $|OP_\nu|^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (x_\nu^\alpha)^2$, posto

$$I_{\alpha\beta} = \mathbf{I}_O(\mathbf{c}_\alpha) \cdot \mathbf{c}_\beta,$$

si ottiene:

$$(4.176) \quad \begin{cases} I_{\alpha\alpha} = \sum_{\nu} m_{\nu} ((x_{\nu}^{\alpha+1})^2 + (x_{\nu}^{\alpha+2})^2) \\ I_{\alpha\beta} = - \sum_{\nu} m_{\nu} x_{\nu}^{\alpha} x_{\nu}^{\beta} \quad (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

Nei testi classici la matrice simmetrica $[I_{\alpha\beta}]$ delle componenti della forma d'inerzia, detta **matrice d'inerzia**, è denotata con

$$(I_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix},$$

cosicché le (4.176) diventano:

$$(4.177) \quad \begin{cases} A = \sum_{\nu} m_{\nu} (y_{\nu}^2 + z_{\nu}^2), \\ B = \sum_{\nu} m_{\nu} (z_{\nu}^2 + x_{\nu}^2), \\ C = \sum_{\nu} m_{\nu} (x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2), \end{cases} \quad \begin{cases} A' = \sum_{\nu} m_{\nu} y_{\nu} z_{\nu}, \\ B' = \sum_{\nu} m_{\nu} z_{\nu} x_{\nu}, \\ C' = \sum_{\nu} m_{\nu} x_{\nu} y_{\nu}. \end{cases}$$

NOTA 4.17.3 – Se gli assi coordinati sono assi principali d'inerzia per il punto O , allora la matrice metrica si deve diagonalizzare, quindi necessariamente

$$A' = B' = C' = 0$$

e (A, B, C) sono i momenti principali d'inerzia. •

NOTA 4.17.4 – Dalle prime tre equazioni (4.177) si traggono le disuguaglianze

$$A + B \geq C, \quad B + C \geq A, \quad C + A \geq B. \quad \bullet$$

NOTA 4.17.5 – La matrice d'inerzia consente il calcolo del momento d'inerzia rispetto ad una qualunque retta a passante per O . Infatti dalla (4.173) e dalla (4.171) si trae

$$(4.178) \quad I^a = I_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta,$$

dove si sono denotati con (u^α) le componenti di un versore \mathbf{u} della retta a . Queste componenti sono anche dette **coseni direttori** della retta a e sono classicamente denotati con (α, β, γ) . Cosicché in notazioni classiche la (4.178) diventa:

$$(4.179) \quad I^a = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2(A'\beta\gamma + B'\gamma\alpha + C'\alpha\beta).$$

Se gli assi sono assi principali d'inerzia allora si ha più semplicemente:

$$(4.180) \quad I^a = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2. \quad \bullet$$

NOTA 4.17.6 – **Ellissoide d'inerzia.** Si consideri la quadrica Q di centro O definita dalle equazioni

$$(4.181) \quad I_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1,$$

ovvero dalle equazioni (se gli assi sono principali d'inerzia):

$$(4.182) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Siccome la forma d'inerzia è definita positiva, almeno nel caso non degenero, questa quadrica è un ellissoide, detto **ellissoide d'inerzia** nel punto O , ed i suoi assi sono gli assi principali d'inerzia. Nel caso degenero, dove tutti i punti sono distribuiti su di una retta passante per O , la quadrica Q definita dalla (4.182) è un cilindro retto circolare avente come asse la retta; infatti uno dei due momenti principali, quello relativo alla retta materiale, si annulla e gli altri due sono uguali (si veda il Teorema 4.17.3 oppure si guardino le (4.177)). In ogni caso, dal confronto della (4.181) con la (4.178) si osserva che se P^a è il punto d'intersezione della quadrica Q con la retta a passante per O , essendo $x^\alpha = |OP^a| u^\alpha$, risulta:

$$(4.183) \quad |OP^a| = \frac{1}{\sqrt{I^a}}. \quad \bullet$$

NOTA 4.17.7 – **Sistemi materiali piani.** Si consideri un **sistema materiale piano**: tutti i punti materiali giacciono su di un piano Π . Questo piano è ovviamente piano di simmetria materiale ortogonale e quindi possiamo applicare il Teorema 4.17.3. Se C è il momento principale d'inerzia rispetto all'asse ortogonale al piano passante per un suo qualunque punto O (che diventa asse z) allora

$$(4.184) \quad C = A + B$$

Per riconoscerlo basta utilizzare le (4.177), tenendo conto che $z_\nu = 0$. •

NOTA 4.17.8 – **Sistemi materiali continui.** Le definizioni di tensore d'inerzia rispetto ad un punto e di momento d'inerzia rispetto ad una retta sono estendibili a un sistema continuo di masse, secondo quanto già osservato per il baricentro. Valgono le stesse proprietà viste per il caso di un sistema finito di punti. Per esempio, la definizione (4.168) per un sistema continuo tridimensionale (D, μ) diventa

$$(4.185) \quad \mathbf{I}_O(\mathbf{v}) = \int_D \mu (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{r} \, \eta,$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione rispetto ad O del generico punto P del sistema continuo, η è la forma volume, μ è la densità di massa. Così le (4.177) si trasformano in integrali tripli:

$$(4.186) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \int_D' \mu J (y^2 + z^2) dq^1 dq^2 dq^3, \\ B = \int_D' \mu J (z^2 + x^2) dq^1 dq^2 dq^3, \\ C = \int_D' \mu J (x^2 + y^2) dq^1 dq^2 dq^3, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A' = \int_D' \mu J y z dq^1 dq^2 dq^3, \\ B' = \int_D' \mu J z x dq^1 dq^2 dq^3, \\ C' = \int_D' \mu J x y dq^1 dq^2 dq^3, \end{array} \right.$$

dove $D' \subset \mathbb{R}^3$ è il dominio di integrazione nelle coordinate (q^i) considerate, e J il corrispondente jacobiano. •

Capitolo 5

Meccanica lagrangiana

Joseph-Louis Lagrange (Torino 1736 - Parigi 1813) pubblica nel 1788 la “Mécanique Analytique”. Scrive nell’avvertissement, con piena coscienza della grandezza dell’opera compiuta:

«Si hanno già diversi Trattati di Meccanica, ma il piano di questo è interamente nuovo. Mi sono proposto di ridurre la teoria di questa Scienza, e l’arte di risolvere i problemi che ad essa sono riferiti, a delle formule generali, il cui semplice sviluppo dia tutte le equazioni necessarie per la soluzione di ciascun problema. Spero che la maniera con cui ho cercato di raggiungere quest’obiettivo, non lascerà niente a desiderare.

Quest’Opera avrà d’altronde un’altra utilità; riunirà e presenterà sotto uno stesso punto di vista, i differenti Principi trovati finora per facilitare la soluzione di questioni di Meccanica, ne mostrerà il legame e la mutua dipendenza, e consentirà di giudicare la loro esattezza e la loro portata.

[...] Non si troveranno figure in quest’Opera. I metodi che vi espongo non richiedono ragionamenti geometrici o meccanici, ma solamente delle operazioni algebriche, assoggettate ad una marcia regolare e uniforme. Coloro che amano l’Analisi, vedranno con piacere la Meccanica diventarne una nuova branca, e mi saranno grati di averne così esteso il dominio.»

Questo capitolo è dedicato ad una trattazione moderna della Meccanica di Lagrange che, in alternativa alla Meccanica di Newton e Euler, trasferisce l’analisi dei sistemi meccanici dallo spazio affine tridimensionale euclideo alle loro varietà delle configurazioni. I necessari strumenti di calcolo differenziale sulle varietà sono introdotti nei primi quattro paragrafi.

5.1 Varietà differenziabili

La nozione di **varietà differenziabile**, fondamentale per la moderna Geometria Differenziale, sorge dalla necessità di operare con le tecniche del calcolo differenziale ed integrale su spazi di natura più generale degli spazi affini e soltanto localmente identificabili con aperti di \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE 5.1.1 – Sia Q un insieme, i cui elementi chiamiamo **punti**. Dicesi **carta di dimensione n** su Q un'applicazione iniettiva

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

il cui **dominio** U è un sottoinsieme di Q e la cui **immagine** $\varphi(U)$ è un aperto di \mathbb{R}^n . Le n funzioni $q^i: U \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) tali che per ogni $x \in U$

$$\varphi(x) = (q^1(x), \dots, q^n(x))$$

prendono il nome di **coordinate** associate alla carta φ . Si dice anche che le (q^i) formano un **sistema di coordinate** sull'insieme Q . Denoteremo una generica carta con la coppia (U, φ) o con (U, q^i) . •

Una carta consente di rappresentare il dominio $U \subseteq Q$ in un aperto di \mathbb{R}^n e quindi di operare su di questo con gli strumenti dell'Analisi. Va osservato che pur essendo le coordinate (q^i) definite come funzioni reali sopra U , esse possono anche assumere il ruolo di *variabili reali*. Ad esempio, data una funzione reale $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ sopra Q e data una carta (U, q^i) , risulta definita una funzione $\bar{f}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \bar{f}(q^1(x), \dots, q^n(x))$ per ogni punto $x \in U$, cioè tale che $\bar{f} = f \circ \varphi^{-1}$. Diciamo che la funzione \bar{f} è la **funzione rappresentatrice** o la **rappresentazione locale della funzione f** secondo la carta o secondo le coordinate (q^i) , funzione che per semplicità denoteremo con $f(q^i)$.

DEFINIZIONE 5.1.2 – Due carte di dimensione n , $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, si dicono **C^k -compatibili** se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oppure se, quando $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, risultano verificate le due condizioni seguenti:

- (i) gli insiemi $O_1 = \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ e $O_2 = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, immagini dell'intersezione dei domini secondo le due carte, sono entrambi aperti;
- (ii) le **funzioni di transizione** $\varphi_{12}: O_1 \rightarrow O_2$ e $\varphi_{21}: O_2 \rightarrow O_1$, definite da $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ e $\varphi_{21} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, dove φ_1 e φ_2 s'intendono ristrette all'intersezione $U_1 \cap U_2$, sono di classe C^k . •

Le funzioni di transizione sono applicazioni, una inversa dell'altra, tra due aperti O_1 e O_2 di \mathbb{R}^n rappresentate da funzioni del tipo

$$(5.1) \quad q_2^i = \varphi_{12}^i(q_1^h), \quad q_1^i = \varphi_{21}^i(q_2^h),$$

dove (q_1^i) e (q_2^i) sono le coordinate corrispondenti alle carte φ_1 e φ_2 . Le (5.1) esprimono le **trasformazioni di coordinate** o il **cambiamento di coordinate** nel passaggio da

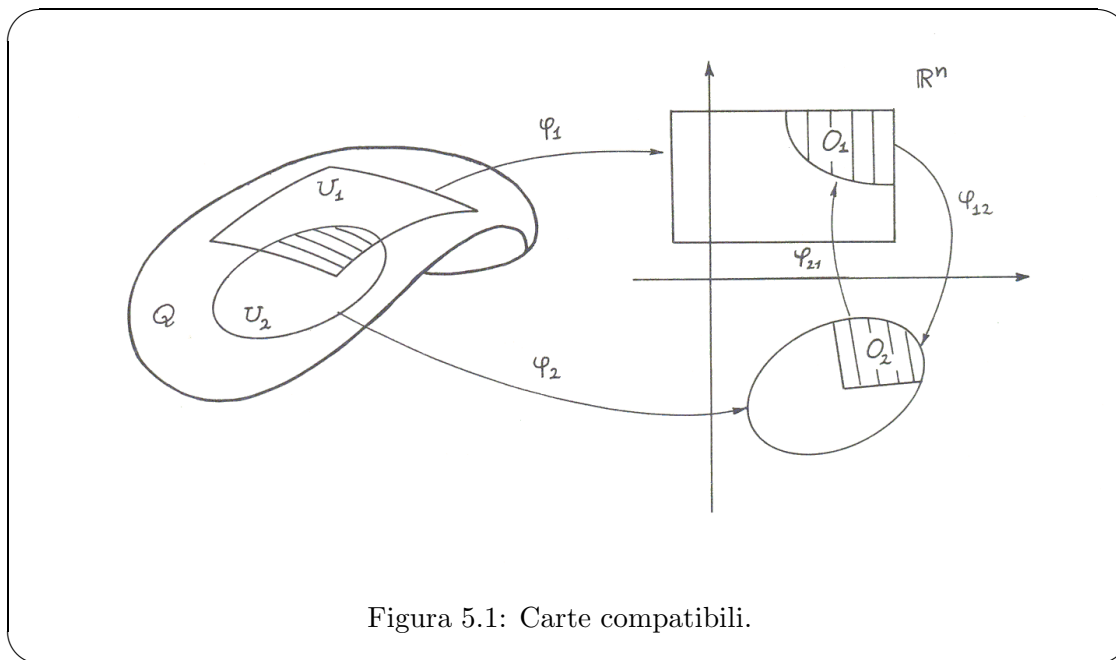


Figura 5.1: Carte compatibili.

una carta all'altra. Le funzioni reali $\varphi_{12}^i(q_1^h)$ e $\varphi_{21}^i(q_2^h)$ sono per definizione di classe C^k , ammettono cioè derivate parziali continue almeno fino all'ordine k . Nel caso in cui $k \geq 1$, per l'invertibilità delle funzioni di transizione, le corrispondenti **matrici Jacobiane**

$$(5.2) \quad \left[\frac{\partial q_1^i}{\partial q_2^h} \right], \quad \left[\frac{\partial q_2^i}{\partial q_1^h} \right]$$

sono regolari e una inversa dell'altra.

DEFINIZIONE 5.1.3 – Un **atlante** su di un insieme Q è un insieme di carte compatibili $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathcal{I}\}$ – \mathcal{I} è un insieme di indici – i cui domini U_α formano un ricoprimento di Q . Un insieme Q dotato di un atlante prende il nome di **varietà differenziabile di dimensione n** . •

NOTA 5.1.1 – Un dato atlante può essere ampliato con l'aggiunta di carte. Un atlante si dice **saturato** (o **massimale**) se contiene tutte le possibili carte ad esso compatibili. Per varietà differenziabile s'intende, più precisamente, un insieme dotato di un atlante massimale. •

NOTA 5.1.2 – Un atlante induce sull'insieme Q una topologia, quindi una varietà differenziabile è anche uno spazio topologico. Un sottoinsieme $A \subseteq Q$ è per definizione un **aperto** se per ogni carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ l'insieme $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto (nella topologia di \mathbb{R}^n). I sottoinsiemi aventi questa proprietà soddisfano agli assiomi degli aperti. Infatti, poiché ogni φ_α è iniettiva vale l'uguaglianza $\varphi_\alpha(A_1 \cap A_2 \cap U_\alpha) = \varphi_\alpha(A_1 \cap U_\alpha) \cap \varphi_\alpha(A_2 \cap U_\alpha)$. Quindi se A_1 e A_2 sono aperti, anche la loro intersezione è un aperto. Inoltre, per una qualunque

collezione di sottoinsiemi $\{A_i\}$ di Q vale l'identità $\varphi_\alpha((\cup_i A_i) \cap U_\alpha) = \cup_i \varphi_\alpha(A_i \cap U_\alpha)$, quindi se questi sono aperti anche la loro unione è un aperto. Infine l'insieme Q è un aperto perché le immagini dei domini delle carte sono aperti per definizione. •

NOTA 5.1.3 – Nella topologia indotta da un atlante i domini delle carte sono aperti e le carte sono degli omeomorfismi. Per verificarlo occorre dimostrare che una carta $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, che per definizione stabilisce una corrispondenza biunivoca tra il suo dominio e la sua immagine, è bicontinua cioè che:

- (i) se $B \subseteq \varphi(U)$ è un aperto, allora l'insieme $A = \varphi^{-1}(B)$ è un aperto,
- (ii) se $A \subseteq U$ è un aperto, allora $\varphi(A)$ è un aperto.

Dimostrazione.

(i) Oltre alla φ si consideri una qualunque altra carta compatibile $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$. La funzione di transizione $\psi: \varphi(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ è per definizione almeno C^0 , cioè continua insieme all'inversa, quindi è un omeomorfismo. D'altra parte $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) = \psi(B \cap \varphi(U \cap U_\alpha))$ dove B è aperto per ipotesi e $\varphi(U \cap U_\alpha)$ è aperto per definizione di compatibilità. Dunque $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ è un aperto per ogni carta compatibile. Ciò dimostra che A è un aperto.

(ii) Questa seconda proprietà è ovvia in base alla definizione di aperto: l'immagine di A secondo una qualunque carta è un aperto e φ è una di queste carte. Si noti bene che, nella maggior parte dei testi di Geometria Differenziale, una varietà differenziabile è definita come insieme Q dotato di una struttura topologica e di un atlante le cui carte sono omeomorfismi di aperti di Q su aperti di \mathbb{R}^n . •

NOTA 5.1.4 – La topologia indotta da un atlante può non essere di **Hausdorff** (cioè **separabile**: punti distinti ammettono intorni disgiunti) anche se ogni dominio di carta, preso a se stante, è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n (si veda l'Esempio 5.1.3 qui di seguito). Qui e nel seguito (così come nella maggior parte dei testi di Geometria Differenziale) per varietà differenziabile s'intenderà un'insieme dotato di un atlante la cui topologia indotta è separabile e a base numerabile. •

NOTA 5.1.5 – La compatibilità è un requisito essenziale richiesto alle carte sullo stesso insieme Q affinché, considerate nel loro complesso, possano fornire attraverso le parametrizzazioni locali una visione “globale” coerente (in particolare, come si è visto, indurre una topologia). Si osservi che un atlante di classe C^k può essere considerato come atlante di classe C^h con $h < k$. Si può tuttavia dimostrare che una varietà differenziabile paracompatta di classe C^k con $k \geq 1$ ammette un atlante di classe C^h per ogni $h > k$. Dunque una varietà differenziabile paracompatta di classe C^k con $k \geq 1$ (è essenziale che non sia solo $k = 0$, cioè che la compatibilità tra le carte non sia solo continua) ammette una struttura di varietà differenziabile di classe C^∞ . Pertanto si supporrà tacitamente che le varietà considerate siano di classe C^∞ . •

ESEMPIO 5.1.1 – L'insieme dei numeri reali \mathbb{R} è una varietà di dimensione 1. L'identità $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una carta (detta **carta naturale**) che da sola costituisce un atlante. Analogamente, l'insieme \mathbb{R}^n è una varietà di dimensione n e più in generale gli spazi affini sono varietà. •

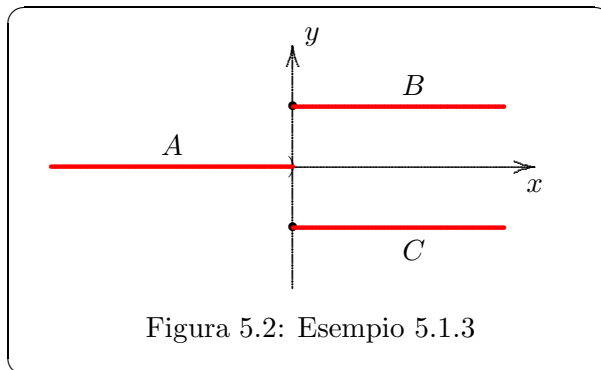
ESEMPIO 5.1.2 – Uno stesso insieme può possedere atlanti fra di loro non compatibili (anche se con la stessa topologia). Sull'insieme \mathbb{R} la carta $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^3$ non è compatibile con la carta naturale perché una delle due funzioni di transizione è la radice cubica che non è derivabile nell'origine. •

ESEMPIO 5.1.3 – Sia Q l'insieme unione delle tre semirette A, B, C del piano \mathbb{R}^2 definite da (Figura 5.2):

$$A: \quad y = 0, \quad x < 0,$$

$$B: \quad y = 1, \quad x \geq 0,$$

$$C: \quad y = -1, \quad x \geq 0.$$



Si considerino su Q le carte

$$\varphi_1: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_2: A \cup C \rightarrow \mathbb{R},$$

ottenute restringendo la proiezione di \mathbb{R}^2 sull'asse x agli insiemi $A \cup B$ e $A \cup C$. Queste due carte sono compatibili perché le funzioni di transizione coincidono con l'identità sulla semiretta aperta A , intersezione dei loro domini. Esse formano inoltre un atlante di Q , perché i loro domini ricoprono Q . La topologia indotta non è separabile perché i punti estremi delle due semirette B e C , di coordinate $(0, 1)$ e $(0, -1)$, non ammettono intorni disgiunti. •

5.1.1 Sottovarietà aperte

Ogni aperto A di una varietà differenziabile Q possiede a sua volta una naturale struttura di varietà differenziabile (con la stessa dimensione). Si verifica infatti che se $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathcal{I}\}$ è un atlante di Q allora le restrizioni delle sue carte ad un aperto $A \subseteq Q$ formano un atlante $\{\varphi_\alpha|_A: U_\alpha \cap A \rightarrow \mathbb{R}^n; \alpha \in \mathcal{I}\}$ di A .

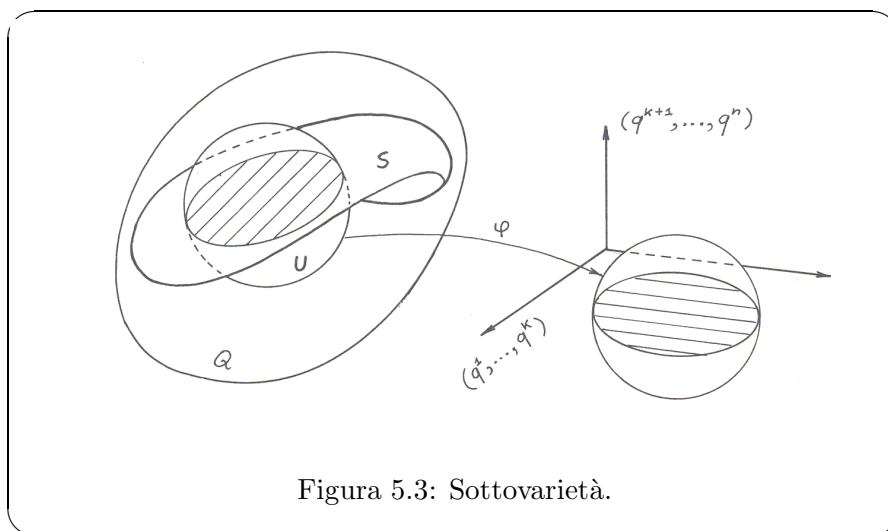


Figura 5.3: Sottovarietà.

5.1.2 Sottovarietà

Una sottovarietà S di una varietà differenziabile Q è un sottoinsieme di Q tale che per ogni punto $p_0 \in S$ esiste una carta $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con dominio contenente p_0 , di coordinate (q^i) tali che

$$p \in S \cap U \iff q^{k+1}(p) = 0, \dots, q^n(p) = 0 \quad (k < n),$$

cioè tale che i punti di S che stanno nel dominio della carta sono caratterizzati dall'annullarsi di $n - k$ coordinate. Una tale carta si dice **carta adattata** a S e le corrispondenti coordinate si dicono **adattate**. Si può dimostrare che la restrizione $\varphi|_S: U \cap S \rightarrow \mathbb{R}^k$ è una carta di S di dimensione k e che l'insieme delle carte adattate induce un atlante su S . Si dimostra anche che la topologia indotta da questo atlante coincide con la topologia indotta da Q a S .

5.1.3 Applicazioni differenziabili

Un'applicazione $\varphi: M \rightarrow N$ tra due varietà differenziabili M ed N (di dimensione m ed n rispettivamente), assegnate due carte su M ed N di coordinate (x^i) e (y^a) rispettivamente ($i = 1, \dots, m$, $a = 1, \dots, n$), è rappresentabile da equazioni del tipo

$$y^a = \varphi^a(x^i)$$

cioè da n funzioni reali nelle m variabili reali (x^i) . L'applicazione φ si dice **di classe** C^k , in particolare **differenziabile**, se ogni sua rappresentazione in coordinate è di classe C^k , in particolare C^∞ . Si dice **rango** dell'applicazione φ in un punto di M il rango della matrice $m \times n$ delle derivate parziali

$$\left[\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \right]$$

calcolate in quel punto. Si può dimostrare che questo non dipende dalla scelta delle coordinate. Le stesse definizioni si applicano al caso in cui $N = \mathbb{R}$, cioè al caso delle funzioni reali sulle varietà. Si dice che φ è una **immersione** di M in N se $m \leq n$ e se il rango di φ è ovunque massimo ($= m$). Se φ è iniettiva allora si dice che l'immagine $S = \varphi(M)$ è una **sottovarietà immersa** di M . Questo concetto è più generale di quello del sottoparagrafo precedente perché la topologia di S indotta da M tramite φ può essere diversa dalla topologia indotta da N . Se le due topologie coincidono, cioè se S è una sottovarietà nel senso anzidetto, si dice che φ è una **immersione topologica**. Si dice che φ è un **diffeomorfismo** se è invertibile e se φ ed φ^{-1} sono entrambe differenziabili. Le due varietà M ed N si dicono allora **diffeomorfe** e si usa scrivere $M \simeq N$. Esse hanno la stessa dimensione.

5.1.4 Varietà prodotto

Se M e N sono due varietà differenziabili, di dimensione m ed n rispettivamente, allora il loro prodotto cartesiano $M \times N$ è una varietà differenziabile di dimensione $m + n$, detta **varietà prodotto**. Si dimostra infatti che i prodotti cartesiani di carte delle due varietà definiscono carte su $M \times N$ che sono fra loro compatibili e che quindi due atlanti di M ed N generano un atlante di $M \times N$.

5.1.5 Superfici regolari in uno spazio affine

Si consideri in \mathbb{R}^m il sottinsieme S costituito dai punti soddisfacenti a $r < m$ equazioni indipendenti

$$(5.3) \quad F^a(x^1, \dots, x^m) = 0 \quad (a = 1, \dots, r).$$

S'intende con ciò che i differenziali delle funzioni F^a sono indipendenti in ogni punto di S , ovvero che in corrispondenza ai punti di S la matrice $r \times m$

$$(5.4) \quad \left[\frac{\partial F^a}{\partial x^\alpha} \right] \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

ha rango massimo. L'insieme S è allora una superficie regolare. Dimostriamo che è una sottovarietà di \mathbb{R}^m e quindi essa stessa una varietà. Dire che la matrice (5.4) ha rango massimo in un punto di S equivale ad affermare che nell'intorno di quel punto una sua sottomatrice quadrata di ordine massimo r è regolare. Si può supporre, cambiando eventualmente l'ordine delle coordinate, che questa sottomatrice sia composta dalle prime r righe e prime r colonne:

$$\det \left[\frac{\partial F^a}{\partial x^b} \right] \neq 0 \quad (a, b = 1, \dots, r).$$

Ciò posto, si considerino le equazioni

$$\begin{cases} q^a = F^a(x^1, \dots, x^m) \\ q^i = x^i, \end{cases} \quad a = 1, \dots, r; \quad i = r + 1, \dots, m.$$

Queste definiscono nuove coordinate (q^a, q^i) in un certo intorno U del punto considerato, perché il corrispondente jacobiano non è nullo:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial q^a}{\partial x^b} & \frac{\partial q^a}{\partial x^i} \\ \frac{\partial q^j}{\partial x^b} & \frac{\partial q^j}{\partial x^i} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F^a}{\partial x^b} & \frac{\partial F^a}{\partial x^i} \\ 0 & \delta_i^j \end{bmatrix} = \det \left[\frac{\partial F^a}{\partial x^b} \right] \neq 0.$$

Poiché la superficie S è nell'intorno U caratterizzata dalle equazioni $q^a = 0$, queste coordinate sono adattate a S . Si è così dimostrato che nell'intorno di ogni punto di S esistono carte adattate e quindi che S è una sottovarietà. Dimostrato che una superficie regolare è una varietà, si può anche dimostrare che una qualunque varietà differenziabile Q può essere *immersa topologicamente* in \mathbb{R}^N con N opportuno non superiore a $2 \dim(Q) + 1$ (**teorema di immersione di Whitney**, 1936) e quindi può essere intesa come superficie regolare in \mathbb{R}^N .

5.1.6 Sottovarietà definite da equazioni

Quanto detto nell'osservazione precedente si può ripetere per un sistema di r funzioni differenziabili (F^a) sopra una varietà Q . Le equazioni $F^a = 0$ definiscono un sottoinsieme $S \subseteq Q$. Se in ogni punto di S le (F^a) sono indipendenti allora S è una sottovarietà di codimensione r . Più in generale, se le funzioni sono ovunque indipendenti le equazioni $F^a = c^a$, al variare delle costanti $\mathbf{c} = (c^a) \in \mathbb{R}^r$, definiscono un **fogliettamento** sopra un sottoinsieme $A \subseteq Q$, cioè una partizione in sottovarietà disgiunte.

5.1.7 La circonferenza \mathbb{S}_1

Si consideri l'insieme $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbb{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Si tratta della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine. Quest'insieme è una curva regolare (superficie regolare di dimensione 1) di \mathbb{R}^2 e quindi varietà differenziabile. Tuttavia si può riconoscere direttamente che è una varietà, costruendone delle carte e quindi degli atlanti. Possiamo per esempio costruire una carta prendendo come dominio tutta la circonferenza meno un punto A e considerare l'applicazione che ad ogni altro punto P associa l'angolo compreso tra 0 e 2π (estremi esclusi) che separa P da A . Due carte di questo tipo sono compatibili (perché i due angoli differiscono per una costante) e formano un atlante su \mathbb{S}_1 . Un altro tipo di carta è la **proiezione stereografica** rispetto ad un punto N . Si prenda per esempio $N = (0, 1)$. Ad ogni punto P del dominio $U_N = \mathbb{S}_1 - N$ si fa corrispondere il punto P' intersezione della retta per $O = (0, 0)$ ortogonale alla retta ON (in questo caso l'asse x) con la retta NP . L'applicazione $\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{R}$ che associa al punto $P = (x, y)$ l'ascissa del punto P' è una carta. Usando la similitudine tra triangoli si vede che

$$\varphi_N(x, y) = \frac{x}{1 - y}.$$

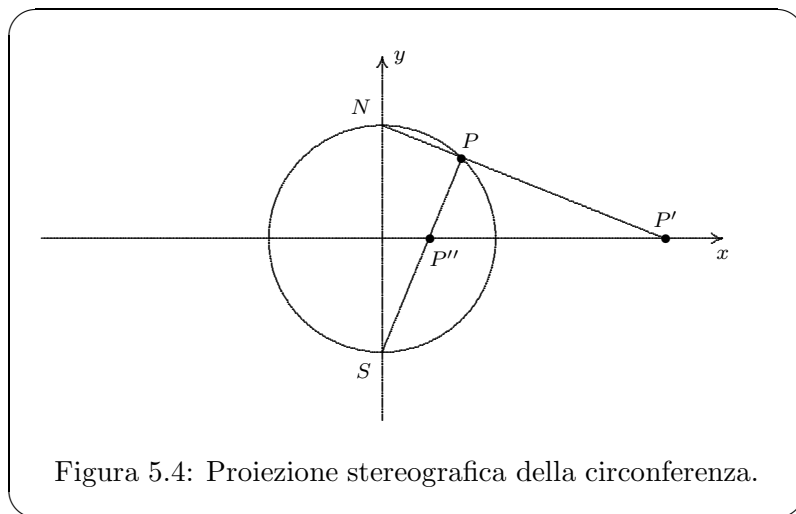


Figura 5.4: Proiezione stereografica della circonferenza.

Si noti che si ha sempre $\varphi_N \neq 0$, perché il punto $(0, 1)$ è escluso dal dominio della carta. Due carte di questo tipo sono fra loro compatibili e definiscono un atlante. Si prenda per esempio il punto S opposto ad N , nel nostro caso il punto $S = (0, -1)$. La corrispondente carta φ_S , associa al punto P l'ascissa del punto corrispondente P'' sull'asse x . Risulta quindi

$$\varphi_S(x, y) = \frac{x}{1 + y}.$$

Poiché $(x, y) \in \mathbb{S}_1$, risulta $\varphi_N \cdot \varphi_S = 1$. Il cambiamento di coordinate è allora rappresentato dalla relazione

$$\varphi_N = \frac{1}{\varphi_S},$$

ovunque differenziabile (perché $\varphi_N \neq 0$, $\varphi_S \neq 0$).

5.1.8 Le sfere \mathbb{S}_n

Per ogni intero n consideriamo l'insieme

$$\mathbb{S}_n = \{(x^\alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum (x^\alpha)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Per $n = 1$ si ritrova la definizione di \mathbb{S}_1 . Per $n = 2$ si ha la sfera (unitaria, bidimensionale)

$$\mathbb{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Ad ogni prefissato punto N di \mathbb{S}_2 corrisponde una proiezione stereografica $\varphi_N: U_N \rightarrow \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto P di $U_N = \mathbb{S}_2 - N$ il punto P' intersezione della la retta NP col piano perpendicolare a ON passante per il centro O . Se per esempio $N = (0, 0, 1)$ questo piano è il piano coordinato (x, y) e quindi

$$\varphi_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right).$$

Una proiezione stereografica è una carta. Si dimostra che due proiezioni stereografiche sono compatibili. Due proiezioni stereografiche corrispondenti a punti opposti della sfera formano un atlante. In maniera analoga si costruiscono le proiezioni stereografiche su ogni \mathbb{S}_n .

5.1.9 I tori \mathbb{T}_n

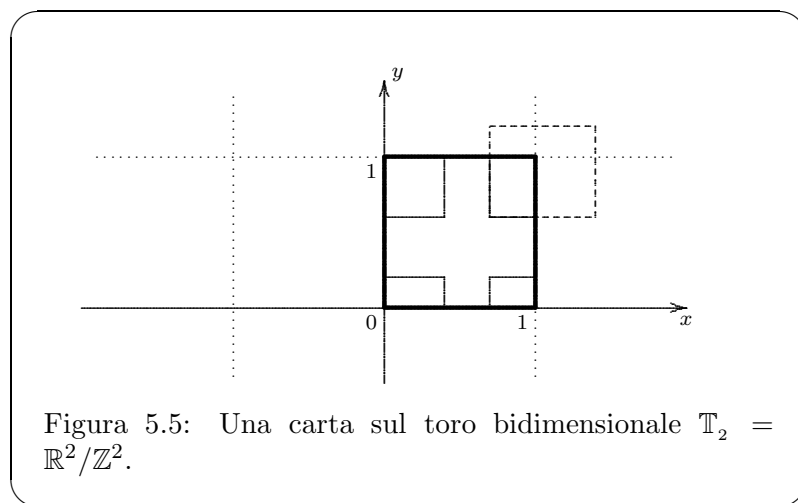
Si consideri sulla retta reale \mathbb{R} la relazione di equivalenza $x \simeq x' \iff x - x' \in \mathbb{Z}$ (due numeri sono equivalenti se differiscono per un numero intero). L'insieme delle classi di equivalenza è il **quoziente** di \mathbb{R} rispetto a \mathbb{Z} e si denota con $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Fissato un numero a si consideri l'intervallo aperto unitario $I_a = (a, a + 1)$. L'applicazione identica $I_a \rightarrow \mathbb{R}$ genera un'applicazione $\varphi_a: U_a \rightarrow \mathbb{R}$ sopra l'insieme U_a delle classi di equivalenza rappresentate dai punti di I_a ponendo $\varphi_a([x]) = x$ per ogni $x \in I_a$ (si noti che $U_a = \mathbb{T}_1 - [a]$). Questa è una carta. Due carte di questo tipo sono compatibili, perché le funzioni di transizione si riducono all'identità, e formano un atlante. Dunque \mathbb{T}_1 è una varietà differenziabile, di dimensione 1. Si noti che \mathbb{T}_1 può considerarsi rappresentato dall'intervallo chiuso $[0, 1]$ dove però gli estremi vanno identificati. Quest'identificazione rende quest'intervallo, quindi \mathbb{T}_1 , omeomorfo ad una circonferenza. Per precisare questa corrispondenza si consideri l'applicazione $\theta: \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ che ad ogni classe $[t]$ associa il punto di \mathbb{S}_1 determinato dall'angolo $2\pi t$ (misurato in un certo senso, per esempio antiorario, a partire da un certo punto, per esempio $(1, 0)$). Si tratta di un'applicazione biunivoca. Se si prende su \mathbb{T}_1 la carta φ_0 , il cui dominio è $U_0 = [I_0]$, si vede che l'applicazione θ è definita da $\theta([t]) = 2\pi t$ con $0 < t < 1$. L'applicazione θ è dunque invertibile e differenziabile insieme alla sua inversa, quindi un diffeomorfismo. Le due varietà \mathbb{S}_1 e \mathbb{T}_1 sono pertanto diffeomorfe. In maniera analoga a quanto visto per \mathbb{T}_1 si dimostra che l'insieme $\mathbb{T}_n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, dato dalle classi di equivalenza dei punti di \mathbb{R}^n le cui coordinate differiscono per dei numeri interi, è una varietà differenziabile detta **toro** di dimensione n . Si dimostra che \mathbb{T}_n è diffeomorfo al prodotto cartesiano $\mathbb{S}_1^n = \mathbb{S}_1 \times \dots \times \mathbb{S}_1$, n volte. Si osservi che il toro \mathbb{T}_2 può essere rappresentato in un quadrato, per esempio il quadrato unitario $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, dove i lati opposti vengono identificati.

5.1.10 Gruppi di matrici, gruppi ortogonali

Si denota con $GL(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici quadrate (A_i^j) di ordine n di numeri reali a determinante non nullo (**gruppo lineare generale** di ordine n sui reali). Le matrici reali di ordine n formano lo spazio \mathbb{R}^{n^2} . Le matrici il cui determinante è nullo formano una superficie regolare S dello spazio \mathbb{R}^{n^2} , definita appunto dall'equazione

$$\det[A_i^j] = 0.$$

Essendo una superficie, l'insieme S è chiuso e quindi l'insieme complementare $GL(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} - S$ è un aperto di \mathbb{R}^{n^2} , quindi una varietà differenziabile (di dimensione n^2).



Si consideri il sottogruppo $O(n)$ delle **matrici ortogonali**, caratterizzate dalle equazioni

$$\sum_{i=1}^n A_h^i A_k^i = \delta_{hk}.$$

Queste equivalgono alle $\frac{1}{2}n(n+1)$ equazioni

$$F^{(h,k)}(A_j^i) \equiv \sum_{i=1}^n A_h^i A_k^i - \delta_{hk} = 0, \quad h \leq k$$

nelle \mathbb{R}^{n^2} variabili A_j^i . Si può dimostrare che queste equazioni sono indipendenti (occorre studiare il rango della matrice delle derivate delle funzioni $F^{(h,k)}$ rispetto alle variabili A_j^i e mostrare che è massimo). Dunque $O(n)$ è una superficie regolare di \mathbb{R}^{n^2} di dimensione $\frac{1}{2}n(n-1)$ ($= n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$) quindi una varietà differenziabile. Si tratta di una varietà sconnessa. La componente connessa che contiene la matrice unitaria, composta dalle matrici ortogonali a determinante uguale a 1, è un sottogruppo denotato con $SO(n)$. È interessante e complesso il problema della rappresentazione parametrica di tali matrici, cioè la costruzione di carte di queste varietà (per esempio gli angoli di Euler sono coordinate di una carta di $SO(3)$; un altro sistema di coordinate è dato dalle componenti delle matrici antisimmetriche 3×3 nella rappresentazione esponenziale delle rotazioni). Questi esempi rientrano in una particolare ma importante classe di varietà: i *gruppi di Lie*.¹ Un **gruppo di Lie** è un gruppo G dotato di una struttura di varietà differenziabile tale che le applicazioni $G \times G \rightarrow G: (g, h) \mapsto gh$ (prodotto) e $G \rightarrow G: g \mapsto g^{-1}$ (inversione) sono di classe C^∞ .

¹ Marius Sophus Lie, 1842-1899.

5.2 Fibrati tangenti

La nozione di spazio affine si basa essenzialmente su quella di spazio vettoriale, che invece non è coinvolta nella definizione di varietà differenziabile. Per poter estendere alle varietà il calcolo vettoriale occorre definire su queste la nozione di **vettore**.

Sia Q una varietà differenziabile di dimensione n . Come si è detto, una **funzione reale** (o **campo scalare**) di classe C^k su Q è un'applicazione $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ tale che ogni sua rappresentazione locale $f(x^i)$ è di classe C^k . Si denota con $C^k(Q, \mathbb{R})$ l'insieme di tali funzioni. Su di esso sono definite le operazioni di somma e di prodotto che gli conferiscono la struttura di anello commutativo e di spazio vettoriale reale (di dimensione infinita). Denotiamo più brevemente con $\mathcal{F}(Q)$ l'insieme $C^\infty(Q, \mathbb{R})$ delle funzioni reali di classe C^∞ . In particolare, per ogni punto $q \in Q$, denotiamo con $\mathcal{F}_q(Q)$ l'insieme delle funzioni C^∞ definite in un aperto contenente q .

Un'applicazione $\gamma: I \rightarrow Q$ da un intervallo reale $I \subseteq \mathbb{R}$ ad una varietà Q prende il nome di **curva** su Q . In un qualunque sistema di coordinate (q^i) una curva γ è rappresentata da **equazioni parametriche** del tipo

$$q^i = \gamma^i(t) \quad (i = 1, \dots, n),$$

con t variabile in un opportuno sottointervallo di I . Si conviene che gli intervalli di definizione delle curve contengano lo zero. Una curva si dice **basata** in un punto $q \in Q$ se $\gamma(0) = q$. Il punto q prende anche il nome di **punto base** o **punto iniziale** della curva. Una curva si dice di classe C^k se tali sono le sue rappresentazioni parametriche.

Siamo ora in grado di dare tre definizioni equivalenti di vettore.

DEFINIZIONE 5.2.1 – Un **vettore tangente** in un punto q ad una varietà Q è una **classe di equivalenza di curve** su Q basate in q . Due curve γ e γ' si dicono **equivalenti o tangenti** se

$$(5.5) \quad \begin{cases} \gamma(0) = \gamma'(0) & \text{(hanno lo stesso punto base),} \\ D(f \circ \gamma)(0) = D(f \circ \gamma')(0), & \forall f \in \mathcal{F}(Q). \end{cases}$$

Si denota con $[\gamma]$ la classe di equivalenza individuata dalla curva γ . •

In questa definizione D denota l'operazione di derivazione di funzione reale a variabile reale.

DEFINIZIONE 5.2.2 – Un **vettore tangente** in un punto q ad una varietà Q è una **derivazione sulle funzioni**, cioè un'applicazione $v: \mathcal{F}_q(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(5.6) \quad \begin{cases} v(af + bg) = a v(f) + b v(g), & \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{F}_q(Q), \\ v(fg) = v(f) g(q) + v(g) f(q). & \bullet \end{cases}$$

La prima condizione mostra che \mathbf{v} è \mathbb{R} -lineare. La seconda è la **regola di Leibniz**. Il numero $\mathbf{v}(f)$ sarà anche denotato con

$$\langle \mathbf{v}, df \rangle$$

e chiamato **derivata della funzione f rispetto al vettore \mathbf{v}** .

DEFINIZIONE 5.2.3 – Un **vettore tangente** in un punto q ad una varietà Q è una **classe di equivalenza di coordinate e componenti** cioè di coppie

$$(q^i, v^i)$$

costituite da un sistema di coordinate (q^i) in un intorno di q e da una n -pla di numeri reali (v^i) . Due coppie si dicono equivalenti se

$$(5.7) \quad v^i = v^{i'} \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}} \right)_q.$$

I numeri (v^i) si dicono **componenti** del vettore secondo le coordinate (q^i) . •

Se $[\gamma]$ è una classe di curve equivalenti in un punto $q \in Q$, cioè un vettore tangente secondo la Def. 5.2.1, si definisce una derivazione \mathbf{v} , cioè un vettore secondo la Def. 5.2.1, ponendo

$$(5.8) \quad \mathbf{v}(f) = D(f \circ \gamma)(0).$$

In virtù della stessa definizione di equivalenza (5.5)₂ questa definizione non dipende dalla curva rappresentatrice della classe. Che le proprietà (5.6) siano verificate segue dal fatto che, introdotte coordinate generiche nell'intorno del punto q , si ha

$$D(f \circ \gamma) = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt},$$

dove è sottintesa la sostituzione delle equazioni parametriche $q^i = \gamma^i(t)$ della curva γ . Per cui, posto

$$(5.9) \quad v^i = D\gamma^i(0),$$

la (5.8) equivale a

$$\mathbf{v}(f) = v^i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \right)_q$$

e le proprietà (5.6) discendono dalle analoghe proprietà delle derivate parziali. Se si usa un diverso sistema di coordinate $(q^{i'})$, avendosi

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}} \frac{dq^{i'}}{dt},$$

si riconosce che tra le componenti (v^i) definite dalla (5.6) e le analoghe $(v^{i'})$ corrispondenti alle coordinate $(q^{i'})$ sussiste il legame (5.7). La (5.8) stabilisce dunque il passaggio dalla

Def. 5.2.1 alla Def. 5.2.3. Se inoltre \mathbf{v} è un vettore secondo la Def. 5.2.2 allora le sue componenti secondo la Def. 5.2.3 sono definite da

$$(5.10) \quad v^i = \mathbf{v}(q^i) = \langle \mathbf{v}, dq^i \rangle,$$

osservato che le coordinate sono particolari funzioni nell'intorno del punto q . Se $\mathbf{v} = [(q^i, v^i)]$ è un vettore secondo la Def. 5.2.3 allora una curva tale che $\mathbf{v} = [\dot{\gamma}]$ secondo la Def. 5.2.1 ha equazioni parametriche

$$(5.11) \quad q^i = v^i t + q_0^i,$$

dove (q_0^i) sono le coordinate del punto base q .

NOTA 5.2.1 – L'attributo *tangente* dato ai vettori così definiti richiama la circostanza che, nel caso in cui Q sia una superficie regolare di un opportuno \mathbb{R}^N , questi si identificano proprio coi vettori tangenti alla superficie. La nozione di vettore tangente ad una varietà si riduce, nel caso in cui questa sia uno spazio affine, alla nozione di vettore applicato. Per questo motivo, al posto di *vettore tangente* si può usare il termine **vettore applicato** in q . •

Denotiamo con $T_q Q$ l'insieme dei vettori tangenti a Q nel punto $q \in Q$. Usando la Definizione 5.2.3 si riconosce che esso ha una naturale struttura di spazio vettoriale reale di dimensione n . Lo chiamiamo pertanto **spazio tangente** a Q in q .

Denotiamo con TQ l'insieme di tutti i vettori tangenti alla varietà Q . Esso ha una naturale struttura di varietà differenziabile di dimensione $2n$ che chiamiamo **varietà tangente** o **fibrato tangente** di Q . Infatti ad ogni carta (U, q^i) su Q corrisponde una carta (TU, q^i, v^i) su TQ , il cui dominio TU è l'insieme di tutti i vettori tangenti nei punti di U : ad ogni $\mathbf{v} \in TU$ le (q^i) associano le coordinate del suo punto di applicazione mentre le (v^i) associano le sue componenti secondo queste coordinate. Due carte siffatte sono fra loro compatibili. Infatti se (U, q^i) e $(U', q^{i'})$ sono due carte di Q con $U \cap U' \neq \emptyset$ allora valgono le (5.7), le quali rappresentano le funzioni di transizione dalla seconda alla prima carta. Le funzioni a secondo membro sono di classe C^∞ sia nelle coordinate $(q^{i'})$ (perché le due carte sono supposte compatibili) sia nelle velocità lagrangiane $(v^{i'})$ (sono addirittura lineari in queste variabili). Lo stesso dicasi per i legami inversi, del tutto analoghi. Dunque i cambiamenti di coordinate $(q^i, v^i) \longleftrightarrow (q^{i'}, v^{i'})$ sopra $TU \cap TU'$ sono di classe C^∞ e le due carte sono compatibili. Partendo da un atlante di Q , con carte di questo tipo si costruisce un atlante su TQ . Dunque TQ è una varietà differenziabile di dimensione $2n$.

Le coordinate (q^i, v^i) su TQ corrispondenti a coordinate (q^i) su Q considerate nel ragionamento precedente si dicono **coordinate naturali** di TQ . Per queste coordinate nel seguito useremo anche la notazione (q^i, \dot{q}^i) oppure $(q^i, \delta q^i)$.

L'applicazione $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$ che ad ogni vettore tangente associa il punto di Q a cui è applicato si chiama **fibrazione tangente** di Q . Una **fibra** di TQ è dunque uno spazio tangente $T_q Q$.

5.3 Campi vettoriali su varietà

Partendo dalla nozione di vettore tangente è possibile definire sulle varietà differenziabili, analogamente a quanto fatto per gli spazi affini (Cap. 1), le nozioni di campo vettoriale e di forma differenziale.

Un **campo vettoriale** (di classe C^k) su di una varietà differenziabile Q può essere inteso:

(i) Come applicazione (di classe C^k) $\mathbf{X}: Q \rightarrow TQ$ che associa ad ogni punto $q \in Q$ un vettore $\mathbf{X}(q) \in T_qQ$ (cioè un vettore applicato in q). Se (q^i, \dot{q}^i) sono coordinate naturali su TQ , l'applicazione $\mathbf{X}: Q \rightarrow TQ$ è rappresentata da equazioni parametriche del tipo²

$$(5.12) \quad \dot{q}^i = X^i(q^*).$$

Le funzioni X^i (di classe C^k) sono dette le **componenti del campo vettoriale**.

(ii) Come operatore di derivazione sulle funzioni reali, cioè come applicazione

$$\mathbf{X}: \mathcal{F}(Q) \rightarrow \mathcal{F}(Q): f \mapsto \mathbf{X}(f)$$

\mathbb{R} -lineare e soddisfacente alla regola di Leibniz:

$$\mathbf{X}(a f + b g) = a \mathbf{X}(f) + b \mathbf{X}(g) \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

$$\mathbf{X}(fg) = \mathbf{X}(f) \cdot g + f \cdot \mathbf{X}(g).$$

In questo caso il campo vettoriale si rappresenta in un qualunque sistema di coordinate (q^i) con l'operatore

$$(5.13) \quad \mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Si userà di solito la notazione $\langle \mathbf{X}, df \rangle$, al posto di $\mathbf{X}(f)$, per indicare la **derivata della funzione f secondo il campo vettoriale \mathbf{X}** . Pertanto:

$$(5.14) \quad \langle \mathbf{X}, df \rangle = X^i \frac{\partial f}{\partial q^i}.$$

NOTA 5.3.1 – Le derivate parziali $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$ sono operatori lineari soddisfacenti alla regola di Leibniz e pertanto possono intendersi come campi vettoriali sul dominio U delle coordinate (q^i) . Questi n campi vettoriali sono indipendenti e formano il cosiddetto **riferimento naturale** associato alle coordinate (q^i) . La scrittura (5.13) esprime allora la rappresentazione di un campo vettoriale \mathbf{X} secondo il riferimento naturale associato a delle coordinate (q^i) . Le componenti di \mathbf{X} coincidono con le derivate delle coordinate:

$$(5.15) \quad X^i = \langle \mathbf{X}, dq^i \rangle. \quad \bullet$$

² Adottiamo la notazione $f(q^*)$ per indicare una funzione delle n variabili q^i .

Denotiamo con $\mathcal{X}^k(Q)$ l'insieme dei campi vettoriali di classe C^k (con $\mathcal{X}(Q)$ se di classe C^∞): è uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita ovvero un modulo su $C^k(Q, \mathbb{R})$. Nel seguito sottintenderemo di classe C^∞ tutti i campi vettoriali considerati.

Come per gli spazi affini, un campo vettoriale può essere inteso come **sistema dinamico**, cioè come generatore di curve integrali e flussi.

DEFINIZIONE 5.3.1 – *d:cvsv1* Ad ogni curva $\gamma: I \rightarrow Q$ sopra Q si associa una curva $\dot{\gamma}: I \rightarrow TQ$ sopra il fibrato tangente TQ , detta **curva derivata** o **curva tangente** che ad ogni $t \in I$ fa corrispondere il vettore tangente alla curva. Il vettore $\dot{\gamma}(t)$, come derivazione, è definito dall'uguaglianza

$$(5.16) \quad \langle \dot{\gamma}(t), df \rangle = D(f \circ \gamma)(t). \quad \bullet$$

Se in un sistema di coordinate (q^i) su Q la curva γ ha equazioni parametriche $q^i = \gamma^i(t)$, allora la curva derivata $\dot{\gamma}$ ha equazioni parametriche

$$(5.17) \quad \begin{cases} q^i = \gamma^i(t), \\ \dot{q}^i = D\gamma^i(t), \end{cases}$$

dove $D\gamma^i(t)$ sono le derivate delle funzioni $\gamma^i(t)$ e (q^i, \dot{q}^i) le coordinate naturali su TQ corrispondenti alle coordinate (q^i) su Q . Una curva $\gamma: I \rightarrow Q$ si dice **curva integrale** di un campo vettoriale \mathbf{X} se per ogni $t \in I$ il valore del campo \mathbf{X} nel punto $\gamma(t)$ è uguale al vettore tangente $\dot{\gamma}(t)$, cioè se

$$(5.18) \quad \dot{\gamma} = \mathbf{X} \circ \gamma.$$

Le equazioni parametriche di una curva integrale soddisfano pertanto, in un qualunque sistema di coordinate, al sistema di n equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

$$(5.19) \quad \frac{dq^i}{dt} = X^i(q^j),$$

dove ai secondi membri compaiono le componenti del campo, funzioni delle coordinate (q^j) . La curva integrale si dice **basata nel punto** $q_0 \in Q$ se $\gamma(0) = q_0$. Valgono allora tutte le considerazioni svolte al Cap. 1, §1.6, sull'esistenza ed unicità delle curve integrali massimali e sui flussi. Se tutte le curve integrali massimali sono definite su tutto l'asse reale \mathbb{R} allora il campo si dice **completo**. In questo caso è definito il **flusso** del campo \mathbf{X} , cioè un'applicazione differenziabile

$$(5.20) \quad \varphi: \mathbb{R} \times Q \rightarrow Q: (t, q) \mapsto \varphi(t, q)$$

tale che

$$(5.21) \quad \gamma_q(t) = \varphi(t, q)$$

è la curva integrale massimale basata in q e tale inoltre che le applicazioni

$$(5.22) \quad \varphi_t: Q \rightarrow Q: q \mapsto \varphi(t, q)$$

sono per ogni $t \in \mathbb{R}$ dei diffeomorfismi su Q (cioè delle trasformazioni su Q) soddisfacenti alla proprietà di gruppo

$$(5.23) \quad \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s},$$

e di conseguenza alle proprietà

$$(5.24) \quad \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t, \quad \varphi_0 = \text{id}_Q, \quad (\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}.$$

L'insieme delle trasformazioni $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ è allora un gruppo commutativo. Se il campo non è completo, esso genera solo dei flussi locali.

Una funzione $F: Q \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **integrale primo** o **funzione integrale** di \mathbf{X} se è costante lungo tutte le curve integrali di \mathbf{X} . Gli integrali primi sono caratterizzati dall'equazione alle derivate parziali

$$(5.25) \quad \langle \mathbf{X}, df \rangle = X^i \frac{\partial f}{\partial q^i} = 0.$$

NOTA 5.3.2 – La struttura topologica della varietà può avere delle conseguenze notevoli sul comportamento globale delle funzioni, dei campi vettoriali, delle loro curve integrali e degli integrali primi. Vediamone alcuni esempi. (i) Si può dimostrare che su di una varietà compatta (per esempio su di una sfera, su di un toro) ogni campo vettoriale è completo. (ii) Si può dimostrare che le sfere di dimensione dispari hanno almeno un campo vettoriale C^∞ senza punti singolari e che invece sulle sfere di dimensione pari un tale campo non esiste (ogni campo ha almeno un punto singolare). (iii) Il fibrato tangente TQ non è in generale diffeomorfo al prodotto $\mathbb{R}^n \times Q$. Se lo è si dice che la varietà Q è **parallelizzabile**. La parallelizzabilità equivale all'esistenza di n campi vettoriali indipendenti in ogni punto. Si può dimostrare che le sfere \mathbb{S}_1 , \mathbb{S}_3 e \mathbb{S}_7 sono le sole sfere parallelizzabili. Ogni toro \mathbb{T}_n è parallelizzabile, perché potenza di \mathbb{S}_1 . Ogni gruppo di Lie è parallelizzabile. •

NOTA 5.3.3 – Parentesi di Lie. Dati due campi vettoriali \mathbf{X} e \mathbf{Y} su Q , si verifica che la doppia derivazione $\mathbf{X}(\mathbf{Y}(f))$, pur essendo lineare su f , non soddisfa alla regola di Leibniz e quindi non è una derivazione. Lo è invece l'operazione

$$(5.26) \quad [\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)),$$

che pertanto definisce un campo vettoriale $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$. Le componenti di questo campo si ottengono applicando la (5.15):

$$(5.27) \quad Z^i = X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i.$$

Sullo spazio $\mathcal{X}(Q)$ dei campi vettoriali è pertanto definita un'operazione binaria interna $[\cdot, \cdot]$, detta **parentesi di Lie** o **commutatore**, antisimmetrica, bilineare e soddisfacente

all'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}], \\
 (5.28) \quad & [a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + b[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \quad (a, b \in \mathbb{R}), \\
 & [\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0.
 \end{aligned}$$

Se $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$ si dice che i due campi **commutano**. Si può infatti dimostrare (fatto notevole) che: *i flussi φ e ψ di due campi vettoriali \mathbf{X} e \mathbf{Y} commutano, cioè*

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

per ogni s e ogni t , se e solo se $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$. Il significato di questa proprietà è il seguente. A partire da un punto q_0 , seguendo per un “tempo” t la curva integrale di \mathbf{X} e poi, dal punto così raggiunto, per un tempo s la curva integrale di \mathbf{Y} , si giunge ad un punto q_{ts} . Seguendo invece prima per un tempo s la curva integrale di \mathbf{Y} e poi per un tempo t la curva integrale di \mathbf{X} si giunge ad un punto q_{st} in generale diverso dal precedente. Nel caso considerato invece i due punti coincidono sempre, qualunque sia il punto iniziale q_0 e qualunque siano i tempi t e s , purché ammissibili. •

5.4 Forme differenziali su varietà

Analogamente a quanto fatto al paragrafo 1.7 per gli spazi affini, si introduce la nozione di **forma differenziale lineare** o **1-forma** su di una varietà Q : è un'applicazione lineare da campi vettoriali a campi scalari, $\varphi: \mathcal{X}(Q) \rightarrow \mathcal{F}(Q)$. Una 1-forma φ associa quindi ad ogni campo vettoriale \mathbf{X} su Q una funzione reale $\varphi(\mathbf{X})$ su Q ,³ in maniera tale che

$$\varphi(f\mathbf{X} + g\mathbf{Y}) = f\varphi(\mathbf{X}) + g\varphi(\mathbf{Y}),$$

per ogni coppia di campi vettoriali (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) e di funzioni (f, g) . Denoteremo di solito la funzione $\varphi(\mathbf{X})$ con $\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle$, utilizzando il simbolo di **valutazione** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tra campi vettoriali e 1-forme. Una 1-forma opera anche su vettori tangenti, associando ad ognuno di questi un numero reale, denotato con $\langle \mathbf{v}, \varphi \rangle$.

Un esempio fondamentale di 1-forma è il **differenziale di una funzione**. Richiamata infatti la definizione di derivata $\langle \mathbf{X}, df \rangle$ di una funzione f rispetto ad un campo vettoriale \mathbf{X} – formula (??) – si osserva che mantenendo fissa la funzione e facendo variare il campo si ottiene un'applicazione lineare da campi a funzioni:

$$(5.29) \quad df: \mathcal{X}(Q) \rightarrow \mathcal{F}(Q): \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X}(f) = \langle \mathbf{X}, df \rangle.$$

La prima delle (??) mostra in particolare che *i differenziali dq^i delle coordinate sono delle 1-forme che associano ad ogni campo vettoriale \mathbf{X} le rispettive componenti X^i :*

$$(5.30) \quad \langle \mathbf{X}, dq^i \rangle = X^i$$

³ Per semplicità supporremo campi vettoriali e forme differenziali di classe C^∞ .

Questa proprietà consente di rappresentare ogni 1-forma φ , nel dominio delle coordinate, come combinazione lineare dei differenziali delle coordinate:

$$(5.31) \quad \boxed{\varphi = \varphi_i dq^i}$$

dove i coefficienti φ_i (funzioni delle coordinate), dette **componenti** della 1-forma, sono a loro volta definite dalle uguaglianze

$$(5.32) \quad \boxed{\varphi_i = \langle \partial_i, \varphi \rangle}$$

sono cioè il risultato della valutazione di φ sui campi vettoriali ∂_i del riferimento associato alle coordinate stesse. Infatti, posto che $\mathbf{X} = X^i \partial_i$, assunta la (5.32) come definizione e tenuto conto della (5.30) si ha successivamente:

$$\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle = X^i \langle \partial_i, \varphi \rangle = X^i \varphi_i = \langle \mathbf{X}, dq^i \rangle \varphi_i = \langle \mathbf{X}, \varphi_i dq^i \rangle,$$

per cui vale la (5.31). Di qui si osserva inoltre che per la valutazione tra campi vettoriali e 1-forme sussiste la rappresentazione

$$(5.33) \quad \boxed{\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle = X^i \varphi_i}$$

Le formule (5.31) e (5.32) forniscono la **rappresentazione locale** (in un qualunque sistema di coordinate) di una generica 1-forma.

Confrontando la (5.31) qui sopra con la (??) si deduce in particolare che le componenti della 1-forma df sono le derivate parziali di f :

$$(5.34) \quad \boxed{df = \partial_i f dq^i}$$

È di una certa importanza, in varie situazioni, poter stabilire se una data 1-forma φ è il differenziale di una funzione f , $\varphi = df$, cioè se è una **forma esatta**. Per poter stabilire un tale criterio di “esattezza” occorre procedere all’estensione del concetto di forma differenziale.

DEFINIZIONE 5.4.1 – Una **forma differenziale di grado p o p -forma** sopra una varietà differenziabile Q è un’applicazione multilineare antisimmetrica

$$(5.35) \quad \varphi: \underbrace{\mathcal{X}(Q) \times \mathcal{X}(Q) \times \dots \times \mathcal{X}(Q)}_{p \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{F}(Q). \quad \bullet$$

Una p -forma φ opera pertanto su p campi vettoriali $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p)$ producendo una funzione $\varphi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Quest’operazione è multilineare, cioè lineare rispetto ad ognuno dei p “argomenti” di φ . Ciò significa che se si tengono fissi $p - 1$ campi vettoriali e si lascia variare il rimanente si ottiene una forma lineare. Inoltre la funzione

$\varphi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p)$ è antisimmetrica negli argomenti. La definizione di antisimmetria può essere data in tre modi equivalenti:

(i) Un'applicazione φ del tipo (5.35) è antisimmetrica se cambia di segno scambiando fra loro due argomenti. Nel caso $p = 2$ ciò equivale a

$$(5.36) \quad \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{X}).$$

(ii) Un'applicazione φ del tipo (5.35) è antisimmetrica se applicando una permutazione ai suoi argomenti, il risultato resta invariato o cambia di segno a seconda che la permutazione sia pari o dispari (sia cioè la composizione di un numero pari o dispari di scambi).

(iii) Se φ è multilineare (come nel nostro caso) allora è antisimmetrica se si annulla quando due argomenti coincidono (o, più in generale, quando gli argomenti sono linearmente dipendenti). Nel caso $p = 2$ ciò equivale a ⁴

$$(5.37) \quad \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0.$$

Una p -forma può moltiplicarsi per un numero reale o una funzione. Due p -forme (dello stesso grado p) possono sommarsi. Denotiamo con $\Phi^p(Q)$ lo spazio delle p -forme sopra Q . Si tratta di uno spazio vettoriale reale a dimensione infinita. Per $p = 0$ si pone per definizione $\Phi^0(Q) = \mathcal{F}(Q)$ (una *zero*-forma è una funzione). Per $p = 1$ ci si riduce alle forme differenziali lineari considerate sopra. Si ha $\Phi^p(Q) = 0$ quando $p > n$: ogni p -forma è la forma nulla se $p > n = \dim(Q)$ (perchè in ogni punto di Q i suoi argomenti sono necessariamente vettori linearmente dipendenti). La teoria delle forme differenziali si basa sulle operazioni di **prodotto esterno** \wedge e di **differenziale** d . Ne esaminiamo gli elementi che saranno utilizzati nel seguito.

5.4.1 2-forme

Come dalla Def. 1, una 2-forma su Q è un'applicazione bilineare antisimmetrica

$$\varphi: \mathcal{X}(Q) \times \mathcal{X}(Q) \rightarrow \mathcal{F}(Q): (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Ogni 2-forma ammette una rappresentazione locale del tipo

$$(5.38) \quad \varphi = \frac{1}{2} \varphi_{ij} dq^i \wedge dq^j \quad \text{con} \quad \varphi_{ij} = \varphi(\partial_i, \partial_j)$$

dove le 2-forme $dq^i \wedge dq^j$ operano sui campi vettoriali alla maniera seguente:

$$(5.39) \quad dq^i \wedge dq^j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = X^i Y^j - X^j Y^i.$$

Le componenti φ_{ij} sono antisimmetriche negli indici,

$$(5.40) \quad \varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$$

⁴ Per esempio, è ovvio che la (5.36) implica la (5.37). Viceversa, se vale la (5.37) allora per la bilinearità si ha successivamente: $0 = \varphi(\mathbf{X} + \mathbf{Y}, \mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + \varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ e quindi la (5.36).

e di conseguenza

$$(5.41) \quad \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \varphi_{ij} X^i Y^j.$$

Infatti, accettate le definizioni (5.38)₂ e (5.39) e osservato che l'antisimmetria (5.40) segue direttamente dalla (5.38)₂, si ha successivamente

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= X^i Y^j \varphi(\partial_i, \partial_j) = X^i Y^j \varphi_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (X^i Y^j \varphi_{ij} + X^j Y^i \varphi_{ji}) = \frac{1}{2} (X^i Y^j - X^j Y^i) \varphi_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \varphi_{ij} dq^i \wedge dq^j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \end{aligned}$$

da cui segue la (5.38)₁.

5.4.2 Prodotto tensoriale e prodotto esterno di 1-forme

Date due 1-forme ξ e η il loro **prodotto tensoriale** $\xi \otimes \eta$ è la forma bilineare su $\mathcal{X}(Q)$ definita da

$$(5.42) \quad \xi \otimes \eta(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \mathbf{X}, \xi \rangle \langle \mathbf{Y}, \eta \rangle.$$

La prima forma valuta il primo vettore, la seconda forma valuta il secondo vettore e le funzioni risultanti si moltiplicano. Il loro **prodotto esterno** è la 2-forma definita da

$$(5.43) \quad \xi \wedge \eta = \xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi$$

che opera quindi sui campi vettoriali alla maniera seguente:

$$(5.44) \quad (\xi \wedge \eta)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \mathbf{X}, \xi \rangle \langle \mathbf{Y}, \eta \rangle - \langle \mathbf{X}, \eta \rangle \langle \mathbf{Y}, \xi \rangle$$

Il prodotto esterno fra due 1-forme è quindi bilineare e anticommutativo,

$$(5.45) \quad \xi \wedge \eta = -\eta \wedge \xi,$$

ed in particolare tale che

$$(5.46) \quad \xi \wedge \xi = 0.$$

Dalla (5.44) applicata al caso particolare $dq^i \wedge dq^j$ si ricava la (5.39).

5.4.3 Differenziale di 1-forme

Data una 1-forma ξ se ne consideri una sua rappresentazione locale $\xi = \xi_i dq^i$ in un generico sistema di coordinate (q^i) . Il differenziale $d\xi$ è la 2-forma definita da

$$(5.47) \quad d\xi = d\xi_i \wedge dq^i$$

Dimostriamo che questa definizione non dipende dalla scelta delle coordinate. Per far questo si consideri un secondo sistema di coordinate $(q^{i'})$. Considerata la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate

$$J_i^{i'} = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i},$$

dall'uguaglianza

$$dq^{i'} = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} dq^i$$

segue il legame tra le componenti della 1-forma:

$$\xi_i = J_i^{i'} \xi_{i'}.$$

Si ha allora:

$$d\xi_i \wedge dq^i = d(J_i^{i'} \xi_{i'}) \wedge dq^i = d\xi_{i'} \wedge J_i^{i'} dq^i + \xi_{i'} \partial_j J_i^{i'} dq^j \wedge dq^i.$$

Tuttavia, osservato che $J_i^{i'} dq^i = dq^{i'}$ e che $\partial_j J_i^{i'}$ è simmetrico rispetto agli indici (i, j) (perché è la derivata seconda rispetto a q^i e q^j di $q^{i'}$) mentre il termine $dq^i \wedge dq^j$ è antisimmetrico, il secondo termine si annulla e si ha semplicemente

$$d\xi_i \wedge dq^i = d\xi_{i'} \wedge dq^{i'}.$$

Pertanto la definizione di $d\xi$ è formalmente la stessa qualunque sia il sistema di coordinate scelto. Ciò stabilito, va osservato che il termine $d\xi_i$ è il differenziale di una funzione ed è quindi esprimibile attraverso le sue derivate parziali:

$$d\xi_i = \partial_j \xi_i dq^j.$$

Pertanto la (5.47) si traduce nella formula

$$(5.48) \quad d\xi = \partial_j \xi_i dq^j \wedge dq^i$$

Siccome la (5.48) può anche scriversi, per l'antisimmetria di $dq^i \wedge dq^j$,

$$d\xi = \frac{1}{2}(\partial_j \xi_i - \partial_i \xi_j) dq^j \wedge dq^i$$

segue che le componenti di $d\xi$ sono

$$(5.49) \quad (d\xi)_{ij} = \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i$$

È importante osservare che se in particolare ξ è a sua volta il differenziale di una funzione, cioè se $\xi = df$, allora $d\xi = 0$ perché $\xi_i = \partial_i f$ e quindi le componenti (5.49) si annullano per la commutabilità delle derivate parziali. Da questa considerazione si deducono due fatti importanti: (i) per ogni funzione si ha $ddf = 0$, (ii) condizione necessaria affinché una 1-forma ξ sia un differenziale esatto è che sia $d\xi = 0$. Come si osserverà più avanti, questa condizione è anche sufficiente, in senso locale. Ci si pone inoltre un problema analogo a quello posto per le 1-forme: stabilire se una data 2-forma φ è esatta, cioè il differenziale di una 1-forma ξ : $\varphi = d\xi$. Per questo occorre considerare le 3-forme ed i differenziali di 2-forme. Lo stesso problema si presenta quindi successivamente per forme di grado superiore.

5.4.4 Prodotto esterno di 1-forme

Il prodotto tensoriale $\xi^1 \otimes \xi^2 \otimes \dots \otimes \xi^p$ di p 1-forme ha una definizione analoga a quella data in 2: applicato ad una successione $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p)$ di p campi vettoriali dà come risultato il prodotto numerico delle valutazioni tra ogni 1-forma ed il vettore dello stesso posto. Il prodotto esterno di p 1-forme $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$ è la p -forma definita da

$$(5.50) \quad \xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \dots \wedge \xi^p = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon(\sigma) \xi^{\sigma(1)} \otimes \xi^{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \xi^{\sigma(p)}$$

dove G_p è il gruppo simmetrico d'ordine p (cioè il gruppo delle permutazioni di p oggetti), $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p))$ è la permutazione σ degli indici $(1, 2, \dots, p)$ e $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ a seconda che σ sia pari o dispari. Nella (5.50) il prodotto esterno \wedge è anticommutativo, nel senso che scambiando fra loro due delle 1-forme, tutto cambia di segno. Inoltre esso è lineare su ogni fattore.

NOTA 5.4.1 – Indipendenza di funzioni. Date k funzioni reali differenziabili (f^1, \dots, f^k) su una varietà Q queste si dicono indipendenti se in ogni punto di Q i loro differenziali sono linearmente indipendenti. Dalle proprietà del prodotto esterno di 1-forme segue che l'indipendenza è caratterizzata dalla condizione

$$df^1 \wedge \dots \wedge df^k \neq 0.$$

Si noti che n funzioni indipendenti ($n = \dim(Q)$) determinano un sistema di coordinate.

•

5.4.5 Rappresentazione locale delle p -forme

Estendendo quanto visto per le 2-forme, si può dimostrare che su di una carta di coordinate (q^i) una p -forma φ è combinazione lineare di prodotti esterni dei differenziali delle coordinate dq^i , ammette cioè una rappresentazione del tipo

$$(5.51) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{p!} \varphi_{i_1 i_2 \dots i_p} dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \\ \varphi_{i_1 i_2 \dots i_p} = \varphi(\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_p}) \end{cases}$$

dove le componenti $\varphi_{i_1 i_2 \dots i_p}$ sono antisimmetriche, cambiano cioè di segno scambiando fra loro due indici qualsiasi (e sono quindi nulle se due indici coincidono). Inoltre, comunque si assegnino p campi vettoriali, si ha

$$(5.52) \quad \varphi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) = \varphi_{i_1 i_2 \dots i_p} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_p^{i_p}$$

con (come al solito) somma sottintesa su tutti gli indici ripetuti in alto e in basso. Per esempio nel caso di una 3-forma ($p = 3$) si ha

$$(5.53) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{6} \varphi_{ijk} dq^i \wedge dq^j \wedge dq^k, \\ \varphi_{ijk} = \varphi(\partial_i, \partial_j, \partial_k) \end{cases}$$

e

$$(5.54) \quad \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \varphi_{ijk} X^i Y^j Z^k.$$

5.4.6 Differenziale di una p -forma

Rappresentata una p -forma come nella (5.51) il suo differenziale è la $p + 1$ -forma definita da

$$(5.55) \quad \begin{aligned} d\varphi &= \frac{1}{p!} d\varphi_{i_1 i_2 \dots i_p} \wedge dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \partial_{i_0} \varphi_{i_1 i_2 \dots i_p} dq^{i_0} \wedge dq^{i_1} \wedge dq^{i_2} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \end{aligned}$$

Per esempio, se φ è una 2-forma, si ha

$$(5.56) \quad d\varphi = \frac{1}{2} \partial_h \varphi_{ij} dq^h \wedge dq^i \wedge dq^j.$$

Con un procedimento analogo a quello visto per il differenziale di una 1-forma si vede che le componenti di $d\varphi$ sono

$$(d\varphi)_{hij} = \frac{1}{2} (\partial_h \varphi_{ij} + \partial_i \varphi_{jh} + \partial_j \varphi_{hi} - \partial_h \varphi_{ji} - \partial_j \varphi_{ih} - \partial_i \varphi_{hj}).$$

Ma le φ_{ij} sono antisimmetriche, quindi

$$(5.57) \quad (d\varphi)_{hij} = \partial_h \varphi_{ij} + \partial_i \varphi_{jh} + \partial_j \varphi_{hi}$$

Si noti che a secondo membro gli indici sono permutati ciclicamente. Se applichiamo la definizione di differenziale alla (5.56) troviamo che

$$dd\varphi = \frac{1}{2} d(\partial_h \varphi_{ij}) \wedge dq^h \wedge dq^i \wedge dq^j = \frac{1}{2} \partial_k \partial_h \varphi_{ij} dq^k \wedge dq^h \wedge dq^i \wedge dq^j.$$

Siccome la somma $\partial_k \partial_h \varphi_{ij} dq^k \wedge dq^h$ tra indici (k, h) simmetrici (quelli delle due derivate parziali, che commutano) e antisimmetrici (quelli dei prodotti esterni) è nulla, si ha (anche per $p > 2$) $dd\varphi = 0$. Le considerazioni precedenti conducono alle seguenti definizioni e proprietà fondamentali per il calcolo differenziale.

DEFINIZIONE 5.4.2 – Una p -forma φ si dice **chiusa** se $d\varphi = 0$. Una p -forma φ si dice **esatta** se è il differenziale di una $(p - 1)$ -forma ψ , chiamata **potenziale** di φ : $\varphi = d\psi$.

•

Dalla proprietà $d^2\varphi = 0$ osservata in precedenza segue che *ogni forma esatta è chiusa*. L'implicazione inversa è valida sotto opportune condizioni coinvolgenti il grado della forma e la topologia del dominio di definizione. Si può dimostrare che:

TEOREMA 5.4.1 – Lemma di Poincaré.⁵ Su di una varietà Q omeomorfa a \mathbb{R}^n ogni p -forma chiusa è esatta.

⁵ Jules Henri Poincaré, 1854-1912.

Per le 1-forme e per $n = 2$ o $n = 3$ si dimostra più in particolare che se il dominio D è *semplicemente connesso*, cioè tale che al suo interno ogni curva chiusa è deformabile con continuità in un punto, allora la chiusura implica l'esattezza. Stante il fatto che ogni punto di una varietà ammette un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^n , dal lemma di Poincaré segue che:

TEOREMA 5.4.2 – *Ogni forma chiusa è localmente esatta: per ogni punto della varietà esiste un intorno aperto in cui è esatta.*

Ciò vuol dire che una forma chiusa ammette nell'intorno di ogni punto dei potenziali, detti **potenziali locali**. Possiamo schematizzare la precedente discussione nel quadro seguente:

$$\begin{array}{lll}
 \text{forma esatta} & \implies & \text{forma chiusa} \\
 \text{forma chiusa} & \implies & \text{forma localmente esatta} \\
 \text{forma chiusa su dominio } \simeq \mathbb{R}^n & \implies & \text{forma esatta}
 \end{array}$$

NOTA 5.4.2 – Se una forma è esatta allora il suo potenziale è definito a meno di una forma chiusa. Vale a dire: se $\varphi = d\psi$, allora ogni forma del tipo $\psi' = \psi + \eta$ con $d\eta = 0$ è ancora un potenziale di φ , perché $d\psi = d\psi'$. In particolare se φ è una 1-forma i suoi potenziali sono funzioni che differiscono per delle costanti sulle componenti connesse del dominio di definizione. •

NOTA 5.4.3 – La (5.49) e la (5.57) mostrano che le condizioni di chiusura $d\varphi = 0$ di una 1-forma o di una 2-forma φ si traducono rispettivamente in componenti, qualunque siano le coordinate scelte, nelle equazioni

$$(5.58) \quad \partial_i \varphi_j = \partial_j \varphi_i$$

$$(5.59) \quad \partial_h \varphi_{ij} + \partial_i \varphi_{jh} + \partial_j \varphi_{hi} = 0 \quad \bullet$$

5.4.7 Prodotto tensoriale e prodotto esterno

Diamo in ultimo le definizioni generali del prodotto e del prodotto esterno.

(i) Il **prodotto tensoriale** $\varphi \otimes \psi$ di una forma p -lineare φ (qualunque, anche non antisimmetrica) per una forma q -lineare ψ è la forma $p + q$ -lineare definita da

$$\varphi \otimes \psi(X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_{p+q}) = \varphi(X_1, \dots, X_p) \cdot \psi(X_{p+1}, \dots, X_{p+q}).$$

(ii) Il **prodotto esterno** $\varphi \wedge \psi$ di una p -forma φ per una q -forma ψ è la $p + q$ -forma definita da

$$\varphi \wedge \psi = \frac{(p+q)!}{p! q!} A(\varphi \otimes \psi)$$

dove A è l'**operatore di antisimmetrizzazione** definito su di una forma p -lineare qualsiasi η da

$$A\eta = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon(\sigma) \eta \circ \sigma,$$

dove G_p è il gruppo delle permutazioni di ordine p e $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ è il segno (o parità) di σ . Queste definizioni si estendono al caso in cui $p = 0$ ponendo semplicemente

$$f \otimes \psi = f \wedge \psi = f \psi.$$

(iii) Il prodotto esterno gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi, \\ (a\varphi + b\pi) \wedge \psi = a\varphi \wedge \psi + b\pi \wedge \psi, \\ (\varphi \wedge \psi) \wedge \pi = \varphi \wedge (\psi \wedge \pi). \end{cases}$$

La prima è una **proprietà commutativa graduata**. La seconda mostra che il prodotto esterno è bi-lineare (è lineare sul primo fattore, e quindi anche sul secondo, tenuto conto che vale la proprietà commutativa graduata). La terza mostra che il prodotto esterno è associativo. Il prodotto esterno si estende per linearità alla somma diretta

$$\Phi(Q) = \bigoplus_{p=0}^{+\infty} \Phi^p(Q)$$

degli spazi delle p -forme su di una varietà Q , la quale assume la struttura di algebra associativa, detta **algebra esterna** su Q .

(iv) Nell'ambito della **teoria delle derivazioni** delle forme si dimostra che il **differenziale** è l'applicazione $d: \Phi(Q) \rightarrow \Phi(Q)$ univocamente definita dalle seguenti *proprietà caratteristiche*:

$$\begin{cases} d\Phi^p(Q) \subset \Phi^{p+1}(Q), \\ d(a\varphi + b\psi) = a d\varphi + b d\psi \quad (a, b \in \mathbb{R}), \\ d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d\psi, \\ d^2 = 0, \\ \langle X, df \rangle = X(f). \end{cases}$$

Dunque d aumenta di 1 il grado delle forme, è \mathbb{R} -lineare, soddisfa ad una **regola di Leibniz graduata**, è nilpotente e si riduce per le funzioni al differenziale già definito.

5.5 Sistemi olonomi

Un sistema meccanico può essere schematizzato in un insieme di punti mobili, con o senza vincoli, nello spazio affine tridimensionale euclideo, modello dello spazio fisico osservato

da un riferimento. Sia P_ν il generico punto del sistema; l'indice ν è da intendersi variabile in un opportuno insieme \mathcal{B} , finito o infinito. Scelta un'origine O dello spazio affine, la posizione del punto P_ν è caratterizzata dal vettore $OP_\nu = \mathbf{r}_\nu$. L'insieme dei vettori posizione $\{\mathbf{r}_\nu; \nu \in \mathcal{B}\}$ definisce una **configurazione** del sistema. Denotiamo con Q l'insieme di tutte le possibili configurazioni che il sistema può assumere, compatibilmente coi vincoli imposti, rispetto ad un assegnato riferimento. Lo chiamiamo **spazio delle configurazioni**.

DEFINIZIONE 5.5.1 – *Un sistema di punti $\{P_\nu; \nu \in \mathcal{B}\}$ si dice **olonomo** se il corrispondente spazio delle configurazioni Q ha una struttura di varietà differenziabile. Si dice allora che Q è la **varietà delle configurazioni**. La dimensione n di Q prende il nome di **numero dei gradi di libertà** del sistema. Le coordinate (q^i) associate ad una qualunque carta di Q prendono il nome di **coordinate lagrangiane**.⁶ •*

Per ogni indice $\nu \in \mathcal{B}$ risulta definibile un'applicazione

$$(5.60) \quad \mathbf{r}_\nu: Q \rightarrow E_3,$$

da Q allo spazio vettoriale euclideo tridimensionale E_3 , che assegna il vettore posizione \mathbf{r}_ν del punto P_ν in corrispondenza ad ogni configurazione del sistema. Scelte delle coordinate (q^i) su Q le applicazioni (5.60) si traducono in funzioni vettoriali $\mathbf{r}_\nu(q^i)$ nelle n variabili (q^i) ,

$$(5.61) \quad OP_\nu = \mathbf{r}_\nu(q^i).$$

Queste funzioni svolgono un ruolo di *ponte* tra la descrizione tridimensionale del sistema meccanico e quella, più astratta, ambientata nella varietà delle configurazioni Q ; servono cioè a tradurre entità meccaniche rappresentate nello spazio affine tridimensionale euclideo in entità sopra la varietà delle configurazioni. Una volta costruita la struttura della meccanica lagrangiana scompariranno completamente dalla discussione.

Posto che una configurazione di un sistema olonomo è rappresentata da un *punto* sulla varietà delle configurazioni Q , un **moto** del sistema sarà rappresentato dal moto di un punto su Q vale a dire da una *curva* su Q ,

$$\gamma: I \rightarrow Q: t \mapsto \gamma(t).$$

Assegnate delle coordinate lagrangiane (q^i) , un moto è allora descritto da equazioni parametriche

$$(5.62) \quad q^i = \gamma^i(t).$$

⁶ Si possono considerare definizioni più generali di questa. Per esempio, assumere che la varietà Q possa essere una **varietà con bordo**, cioè ammettere delle carte sopra semispazi di \mathbb{R}^n . La nozione qui data di sistema olonomo sarà comunque estesa, nel prossimo paragrafo, ai sistemi con vincoli dipendenti dal tempo. Le varietà delle configurazioni che consideriamo sono supposte tutte di classe C^∞ . Il termine *olonomo*, derivato da $\delta\lambda\omicron\varsigma$ (intero) e $\nu\acute{o}\mu\omicron\varsigma$ (legge), fu introdotto da H. Hertz (1857-1894) in un'analisi dei vincoli che possono essere imposti ad un sistema meccanico. Esso sta a significare che, pur essendo il sistema costituito da un numero finito o infinito di punti, in virtù dei vincoli imposti la posizione di ciascuno di questi è determinata dai valori di un numero ridotto finito n di parametri reali $(q^i) = (q^1, \dots, q^n)$, come mostra il ragionamento che segue.

Se queste si sostituiscono nelle funzioni $\mathbf{r}_\nu(q^i)$ che danno le posizioni dei singoli punti del sistema, cioè nelle (5.61), si trova il moto di ciascuno di questi:

$$OP_\nu(t) = \mathbf{r}_\nu(q^i(t)).$$

Derivando rispetto al tempo si trova anche la loro velocità:

$$(5.63) \quad \mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt}.$$

Chiamiamo **atto di moto** di un sistema olonomo un sistema di vettori $\{(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu), \nu \in \mathcal{B}\}$ rappresentanti la posizione e la velocità dei suoi punti, compatibili con i vincoli imposti. Il sistema di vettori $\{\mathbf{r}_\nu, \nu \in \mathcal{B}\}$ rappresenta la configurazione corrispondente all'atto di moto. L'atto di moto è quindi un concetto istantaneo. Affinché i vettori velocità siano compatibili con i vincoli occorre e basta che in un qualsiasi sistema di coordinate lagrangiane si abbia

$$(5.64) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_\nu &= \mathbf{r}_\nu(q^i), \\ \mathbf{v}_\nu &= \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \dot{q}^i, \quad (\dot{q}^i) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ciò segue dall'analogia formale tra la (5.63) e la seconda delle (5.64), posto

$$(5.65) \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}.$$

Si osservi infatti che un moto, inteso come successione temporale di configurazioni, stabilisce una successione temporale di atti di moto e che, viceversa, un atto di moto compatibile coi vincoli può sempre essere inteso come immagine istantanea della distribuzione dei vettori posizione e velocità dei punti del sistema olonomo durante un qualche moto. Pertanto: al variare delle coordinate (q^i) nel loro dominio U di definizione e delle (\dot{q}^i) in tutto \mathbb{R}^n , le equazioni (5.64) forniscono tutti i possibili atti di moto corrispondenti alle configurazioni dell'insieme U . I parametri (\dot{q}^i) , chiamati **velocità lagrangiane**, possono interpretarsi come componenti di un vettore tangente alla varietà Q . Di conseguenza un atto di moto in una configurazione $q \in Q$ si identifica con un vettore tangente $\mathbf{v} \in T_q Q$ e quindi il fibrato tangente rappresenta l'insieme di tutti i possibili atti di moto del sistema olonomo. Per questo la varietà tangente TQ è anche chiamata **varietà delle velocità**. Riassumiamo la discussione precedente nel quadro seguente:

ESEMPIO 5.5.1 – Punto libero. L'esempio più semplice di sistema olonomo è il punto libero. La varietà delle configurazioni Q coincide con lo spazio affine euclideo tridimensionale \mathcal{E}_3 (dunque il numero dei gradi di libertà è 3). Come coordinate lagrangiane si possono scegliere delle coordinate cartesiane ortonormali (x, y, z) . Il vettore posizione è allora ovviamente dato da

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Configurazione: punto q della varietà Q

Moto: curva $\gamma: I \rightarrow Q$ sulla varietà Q .

Atto di moto: vettore v tangente a Q .

Si possono anche scegliere coordinate non cartesiane $(q^i) = (q^1, q^2, q^3)$. La configurazione del punto è descritta da una sola funzione vettoriale

$$OP = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3)$$

soddisfacente alla condizione che i vettori $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial q^i$ siano ovunque indipendenti. •

ESEMPIO 5.5.2 – Sistema finito di punti liberi. Si consideri un sistema costituito da N punti liberi. La varietà delle configurazioni Q è lo spazio affine $\mathcal{E}_3^N \simeq \mathbb{R}^{3N}$, potenza N -sima di $\mathcal{E}_3 \simeq \mathbb{R}^3$. Si possono prendere come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane (x_ν, y_ν, z_ν) di tutti i punti. Allora le funzioni vettoriali (5.60) sono semplicemente date da

$$\mathbf{r}_\nu = x_\nu \mathbf{i} + y_\nu \mathbf{j} + z_\nu \mathbf{k}.$$

Da Q si possono eventualmente togliere quelle configurazioni in cui due o più punti vengono a coincidere (si escludono così le *collisioni*). Queste configurazioni formano nel loro complesso un sottoinsieme chiuso $C \subset Q = \mathcal{E}_3^N$, quindi la varietà delle configurazioni *senza collisioni* è una sottovarietà aperta di Q . •

ESEMPIO 5.5.3 – Punto vincolato ad una superficie regolare. La varietà delle configurazioni Q è la stessa superficie (i gradi di libertà sono 2). La posizione del punto è descritta da una funzione vettoriale

$$OP = \mathbf{r}(q^1, q^2)$$

di due parametri (q^i) ($i = 1, 2$), che è la rappresentazione parametrica (locale) della superficie. Considerazioni analoghe valgono per un punto vincolato ad una curva regolare, per cui si ha un solo grado di libertà. Entrambi questi esempi sono casi particolari dell'esempio seguente. •

ESEMPIO 5.5.4 – Sistemi di punti vincolati. Si consideri un sistema costituito da un numero finito N di punti: P_ν ($\nu = 1, \dots, N$). Si supponga che questi punti non siano liberi ma sottoposti a **vincoli di posizione** rappresentati da r equazioni scalari indipendenti

$$F^a(\mathbf{r}_\nu) = 0 \quad (a = 1, \dots, r)$$

coinvolgenti i singoli vettori posizione \mathbf{r}_ν . Queste si traducono in equazioni indipendenti coinvolgenti le $3N$ coordinate cartesiane dei punti e definiscono pertanto una superficie

regolare Q , di dimensione $3N - r$, dello spazio affine $\mathcal{E}_3^N \simeq \mathbb{R}^{3N}$. Questa superficie è la varietà delle configurazioni del sistema.⁷ •

ESEMPIO 5.5.5 – Il pendolo. Dal punto di vista puramente cinematico è un punto vincolato ad una circonferenza. Dunque la sua varietà delle configurazioni è $Q = \mathbb{S}_1$. •

ESEMPIO 5.5.6 – Si consideri un’asta rigida con gli estremi vincolati a scorrere su due guide rettilinee complanari e perpendicolari fra loro (Esempio 3.5.1, Figura 3.6). Si tratta di un sistema olonomo ad un grado di libertà la cui varietà delle configurazioni è ancora $Q = \mathbb{S}_1$. Infatti ogni configurazione dell’asta è univocamente individuata dalla posizione del suo punto medio che si muove su di una circonferenza di centro l’intersezione delle guide e raggio uguale alla metà della lunghezza. Abbiamo così un esempio di due sistemi olonomi, questo ed il pendolo semplice, dal punto di vista meccanico ovviamente diversi ma con la stessa varietà delle configurazioni. •

ESEMPIO 5.5.7 – Il pendolo sferico. Dal punto di vista puramente cinematico è un punto vincolato ad una sfera. Dunque la sua varietà delle configurazioni è $Q = \mathbb{S}_2$. •

ESEMPIO 5.5.8 – Si consideri un’asta rigida con gli estremi vincolati a scorrere uno su di una guida rettilinea e l’altro su di un piano perpendicolare a questa. Si tratta di un sistema olonomo a 2 gradi di libertà la cui varietà delle configurazioni è ancora $Q = \mathbb{S}_2$. Infatti, ogni configurazione è univocamente individuata dalla posizione del punto medio dell’asta, e questo punto si muove sulla sfera di centro l’intersezione della guida rettilinea col piano e raggio uguale alla metà della lunghezza dell’asta. Ecco un altro esempio di due sistemi olonomi diversi ma con la stessa varietà delle configurazioni. •

ESEMPIO 5.5.9 – Il bpendolo piano. È costituito da due punti A e B mobili su di un piano e vincolati rigidamente fra loro, con uno dei due (per esempio il punto A) collegato rigidamente ad un punto fisso O . Si tratta di un sistema olonomo la cui varietà delle configurazioni è il prodotto cartesiano di due circonferenze, cioè il toro bidimensionale: $Q = \mathbb{T}_2$. Se i due punti, restando fisso il punto O , non sono vincolati a muoversi su di un piano allora la varietà delle configurazioni è $Q = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$. Si tratta di un sistema a 4 gradi di libertà: il **bpendolo sferico**. •

ESEMPIO 5.5.10 – I corpi rigidi. Ritorniamo all’Esempio 5.5.4: sistemi di punti vincolati. Un esempio fondamentale di vincolo di posizione è il vincolo di rigidità: le mutue distanze dei punti del sistema restano costanti. Se i punti sono due questo vincolo si traduce in una sola equazione scalare ed il sistema ha quindi 5 gradi di libertà. Se i punti

⁷ La definizione originaria di *sistema olonomo* deriva proprioda questo esempio, incluso il caso di un numero infinito di punti e di equazioni di vincolo (come per un corpo rigido continuo). Per questo motivo, prima che il concetto di varietà differenziabile venisse utilizzato, le varietà delle configurazioni venivano dette *varietà vincolari*.

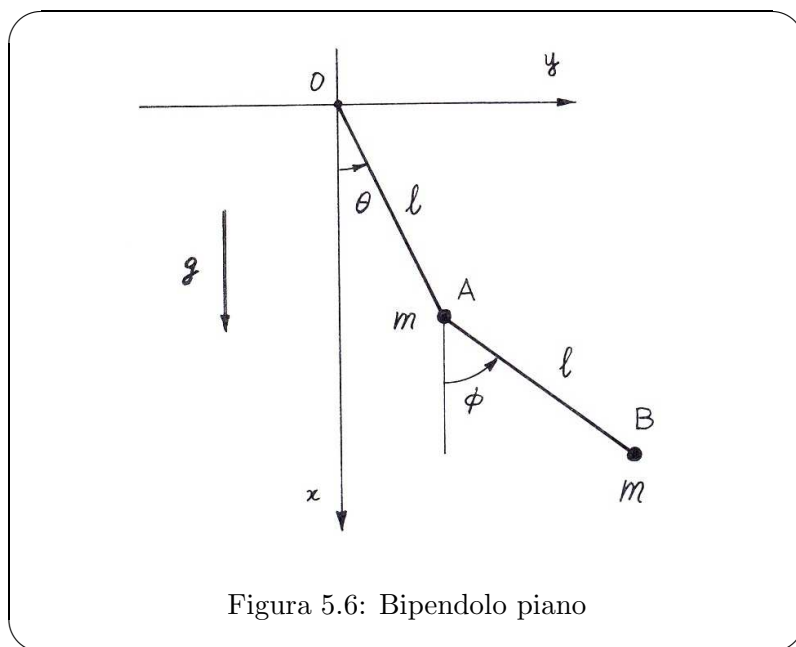


Figura 5.6: Bipendolo piano

sono 3 le equazioni vincolari sono 3 e quindi il sistema ha 6 gradi di libertà. Se i punti sono più di 3 i gradi di libertà restano 6, perché ad ogni punto aggiunto si aggiungono 3 nuove coordinate ma anche 3 equazioni di vincolo, rappresentanti la costanza della distanza dai primi tre punti. D'altra parte va anche osservato che le configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso (che sia composto da un numero finito o infinito di punti, ma non allineati) sono in corrispondenza biunivoca col gruppo delle rotazioni $SO(3)$ dello spazio vettoriale euclideo tridimensionale (che è una varietà differenziabile di dimensione 3). Dunque in questo caso la varietà delle configurazioni è $Q = SO(3)$. Se il corpo rigido è libero, ogni sua configurazione è invece determinata dalla posizione nello spazio di un suo qualunque punto prefissato e da una rotazione intorno a questo punto. Quindi la varietà delle configurazioni è in questo caso il prodotto cartesiano $Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Proseguendo in quest'analisi si conclude che un corpo rigido può avere diverse varietà delle configurazioni. Ne elenchiamo alcune:

$Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3),$	corpo rigido libero.
$Q = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}_2,$	segmento rigido libero.
$Q = SO(3),$	corpo rigido con un punto fisso.
$Q = \mathbb{S}_2,$	segmento rigido con un punto fisso.
$Q = \mathbb{R} \times \mathbb{S}_1,$	corpo rigido scorrevole su di un asse fisso.
$Q = \mathbb{S}_1,$	corpo rigido con un asse fisso.

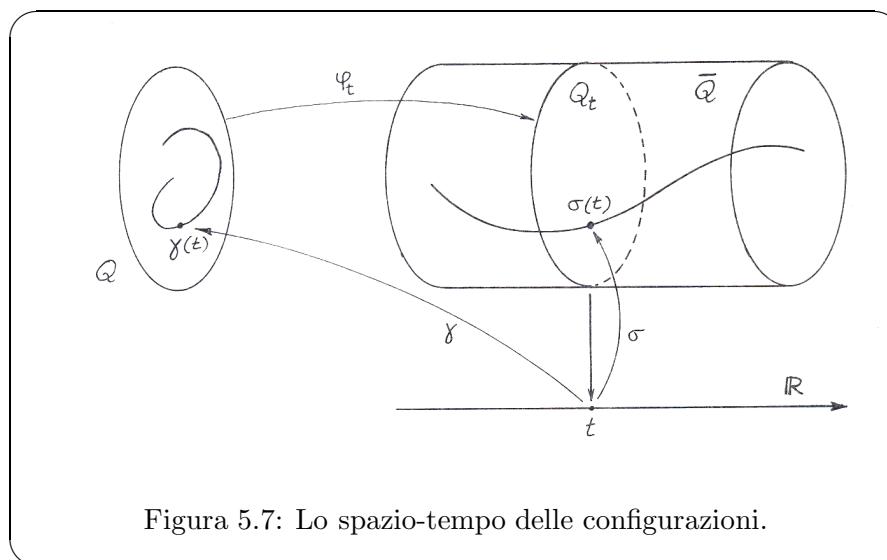


Figura 5.7: Lo spazio-tempo delle configurazioni.

A quest'elenco vanno aggiunti quei casi in cui uno o più punti del corpo rigido sono vincolati a speciali curve o superfici (come negli Esempi 5.5.6 e 5.5.8). •

5.6 Sistemi olonomi a vincoli dipendenti dal tempo

I vincoli imposti ai punti di un sistema meccanico possono dipendere dal tempo. Si pensi ad esempio a uno o più punti vincolati ad una superficie mobile con legge assegnata, oppure ad un insieme di punti le cui mutue distanze variano nel tempo con legge assegnata. Occorre dunque estendere la nozione di sistema olonomo in modo da includere anche questi casi.

DEFINIZIONE 5.6.1 – *Un sistema olonomo è un sistema di punti le cui possibili configurazioni in tutti gli istanti formano una varietà differenziabile \bar{Q} di dimensione $n + 1$, detta **spazio-tempo delle configurazioni** o **varietà estesa delle configurazioni**, tale che: (i) esiste una funzione differenziabile $t: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ che assegna ad ogni configurazione l'istante a cui questa si riferisce; (ii) quest'applicazione è tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme Q_t di tutte le configurazioni possibili all'istante t è una sottovarietà di dimensione n ; (iii) esiste una varietà differenziabile Q di dimensione n e un diffeomorfismo $\varphi: \mathbb{R} \times Q \rightarrow \bar{Q}$ tale da indurre per ogni $t \in \mathbb{R}$ un diffeomorfismo*

$$\varphi_t: Q \rightarrow Q_t: q \mapsto \varphi(t, q)$$

*tra la varietà Q e la varietà Q_t . L'intero n prende il nome di **numero dei gradi di libertà**, la varietà Q di **varietà delle configurazioni di riferimento**. •*

NOTA 5.6.1 – Nel linguaggio della geometria differenziale la Definizione 5.6.1 si riassume dicendo che un sistema olonomo è costituito da una **fibrazione** $t: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ di una varietà \bar{Q}

sopra la retta reale \mathbb{R} . Le **fibre** sono le varietà Q_t delle configurazioni possibili all'istante t . Questa fibrazione è **triviale**, cioè tale che \bar{Q} risulta essere diffeomorfa ad un prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times Q$ e la fibrazione $t: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ equivalente alla proiezione naturale $\mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$. Il diffeomorfismo φ prende allora il nome di **trivializzazione** della fibrazione – Figura 5.7. •

ESEMPIO 5.6.1 – Pendolo a lunghezza variabile. Si consideri un punto vincolato ad una circonferenza su di un piano fisso, con centro fisso O e raggio $\ell(t)$ variabile (mai nullo). L'insieme \bar{Q} di tutte le sue possibili configurazioni si può identificare con il prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$. Si può prendere infatti come varietà di riferimento Q la circonferenza \mathbb{S}_1 di raggio unitario e, tramite le semirette uscenti da O , stabilire tra questa ed ogni circonferenza Q_t di raggio $\ell(t)$ un diffeomorfismo. •

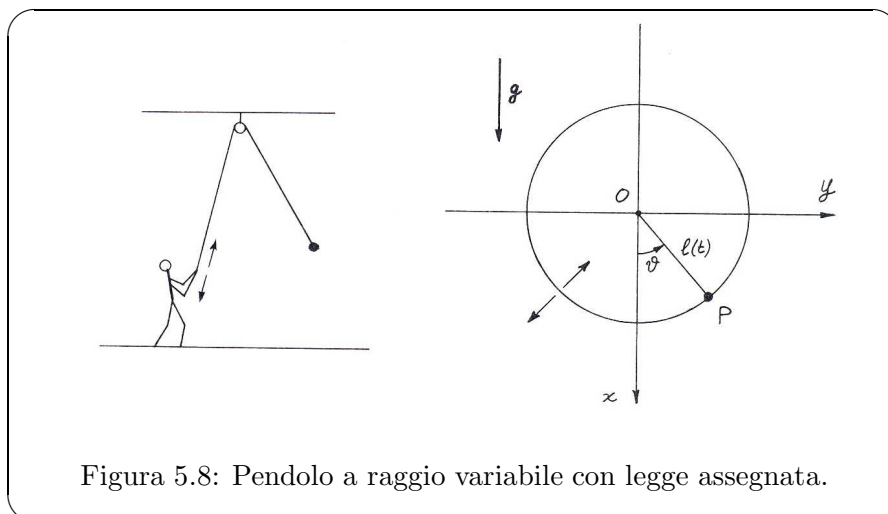


Figura 5.8: Pendolo a raggio variabile con legge assegnata.

ESEMPIO 5.6.2 – Si consideri un punto vincolato ad una circonferenza di centro fisso, raggio costante, ma ruotante con legge assegnata intorno ad un suo diametro fisso. La varietà estesa delle configurazioni \bar{Q} non è la sfera descritta dalla circonferenza (che è, se si vuole, l'insieme di tutte le possibili posizioni occupabili dal punto), bensì il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$. Occorre infatti distinguere le configurazioni “estese”, elementi di \bar{Q} , non solo per la posizione effettivamente occupata dal punto, ma anche per l'istante in cui tale posizione è occupata. •

Se si considerano coordinate (q^i) sulla varietà di riferimento Q e se si interpreta la funzione t come ulteriore coordinata (che denotiamo anche con q^0) risultano definite delle coordinate (t, q^i) sullo spazio-tempo delle configurazioni \bar{Q} . Di conseguenza la posizione dei singoli punti del sistema è determinata da funzioni vettoriali

$$(5.66) \quad OP_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q^i).$$

Se queste non dipendono dal tempo si ricade nel caso considerato al §5.6 dei **sistemi olonomi a vincoli indipendenti dal tempo**, detti anche **scleronomi**. I sistemi olonomi a vincoli dipendenti dal tempo sono detti **reonomi**.

Vi sono due modi, del tutto equivalenti, per rappresentare il moto di un sistema olonomo.

Un moto è una **sezione della fibrazione** $t: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, cioè un'applicazione differenziabile

$$\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \bar{Q}$$

che associa ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ una configurazione $\sigma(t) \in Q_t$, cioè una configurazione corrispondente allo stesso istante. Questa definizione non ricorre alla trivializzazione φ .

Un moto può anche essere definito come curva

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow Q$$

sopra la varietà di riferimento Q . Infatti, attraverso la trivializzazione φ , una curva γ su Q genera una sezione σ ponendo

$$\sigma(t) = \varphi(t, \gamma(t)).$$

Viceversa, una sezione σ genera una curva γ ponendo (si veda la Figura 5.7)

$$\gamma(t) = \varphi_t^{-1}(\sigma(t)).$$

Se, introdotte coordinate su Q , si considerano le equazioni parametriche $q^i = \gamma^i(t)$ della curva γ e queste si sostituiscono nelle (5.66), si ottengono i moti dei singoli punti. Derivando si ottengono le velocità:

$$(5.67) \quad \mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}.$$

Segue che un generico atto di moto compatibile con i vincoli, che chiameremo **atto di moto possibile** o **attuale**, è costituito dall'insieme dei vettori

$$(5.68) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t, q^i), \\ \mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}, \end{cases}$$

con $(\dot{q}^i) \in \mathbb{R}^n$, e quindi è rappresentato da un vettore \mathbf{v} tangente alla varietà di riferimento Q , di componenti (\dot{q}^i) .

5.7 Le equazioni di Lagrange

Un sistema olonomo è costituito da punti liberi o vincolati. Nella dinamica newtoniana del punto l'azione dei vincoli è rappresentata da un vettore \mathbf{F}_r , la forza o reazione vincolare, sulle quali è necessario imporre delle condizioni costitutive. La più semplice è quella di

vincolo liscio che si esprime nell'ortogonalità di \mathbf{F}_r al vincolo (curva o superficie). Per poter estendere questo concetto al caso dei sistemi olonomi va innanzitutto osservato che l'ortogonalità della reazione al vincolo si esprime con la condizione

$$\mathbf{F}_r \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

per ogni vettore $\delta \mathbf{r}$ tangente al vincolo. Se il vincolo è fisso ogni vettore tangente $\delta \mathbf{r}$ rappresenta una velocità compatibile col vincolo, cioè una “velocità attuale”. Se invece il vincolo è mobile (cioè variabile nel tempo con legge assegnata) un suo vettore tangente $\delta \mathbf{r}$ non rappresenta più in generale una velocità attuale ma soltanto una “velocità virtuale” compatibile col vincolo supposto “fisso” nell'istante considerato. Si usa anche dire che un tale vettore rappresenta uno “spostamento virtuale”.

Possiamo pertanto intendere per “vincolo liscio” un vincolo (fisso o mobile) per il quale la “potenza virtuale” della reazione vincolare è nulla per ogni velocità virtuale. Questa definizione ha il vantaggio di potersi estendere immediatamente al caso dei sistemi olonomi pur di estendere a questi il concetto di “velocità virtuale”. Chiamiamo allora **atto di moto virtuale** un atto di moto compatibile coi vincoli imposti al sistema, supposti fissi (o “irrigiditi”, “congelati”) nell'istante considerato. Con riferimento a quanto visto al paragrafo precedente, un tale atto di moto sarà costituito da un insieme di coppie di vettori $(\mathbf{r}_\nu, \delta \mathbf{r}_\nu)$ definiti dalle equazioni

$$(5.69) \quad \begin{cases} \mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q^i, t), \\ \delta \mathbf{r}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \delta q^i, \end{cases}$$

con (δq^i) parametri reali arbitrari.

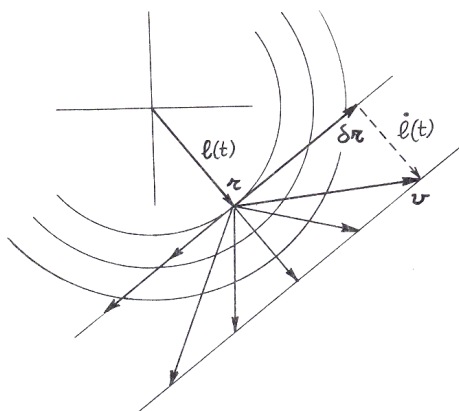


Figura 5.9: Velocità virtuali e possibili per un pendolo a raggio variabile.

Un tale sistema di vettori è anche detto **spostamento virtuale** (col che al termine “potenza virtuale” usato nel seguito va sostituito il termine **lavoro virtuale**). Il confronto con l’espressione generale (5.68) di un atto di moto attuale giustifica le (5.69): sono stati cancellati i termini $\partial \mathbf{r}_\nu / \partial t$. Un tale atto di moto non è quindi compatibile con i vincoli a meno che questi siano indipendenti dal tempo, caso in cui questi termini sono identicamente nulli. Le δq^i possono ancora interpretarsi come componenti di un vettore $\delta \mathbf{r}$ tangente alla varietà delle configurazioni Q , nel caso di un sistema a vincoli indipendenti dal tempo, oppure alla fibra Q_t relativa all’istante t considerato, nel caso di vincoli dipendenti dal tempo. In questo secondo caso, per il diffeomorfismo $\varphi_t: Q \rightarrow Q$, il vettore $\delta \mathbf{r}$ può intendersi tangente alla varietà di riferimento Q . Ciò posto, possiamo assumere la seguente

DEFINIZIONE 5.7.1 – Diciamo che un sistema olonomo è **perfetto o ideale** (o a vincoli **perfetti o ideali**) se la potenza virtuale $W_r^{(v)}$ delle forze reattive è nulla per ogni atto di moto virtuale. •

Nel caso in cui il sistema sia costituito da un numero finito N di punti⁸ questa potenza è data da

$$(5.70) \quad W_r^{(v)} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{r\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_\nu$$

dove $\mathbf{F}_{r\nu}$ è il risultante delle forze reattive sul punto P_ν .

ESEMPIO 5.7.1 – Il vincolo di rigidità è, per il principio di azione e reazione, perfetto. Consideriamo infatti per semplicità due punti di un corpo rigido. La potenza virtuale delle forze reattive che i due punti si esercitano mutuamente è $W_{12}^{(v)} = \mathbf{F}_{r1} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{r2} \cdot \delta \mathbf{r}_2$. Siccome $\mathbf{F}_{r1} = -\mathbf{F}_{r2}$, si ha $W_{12}^{(v)} = \mathbf{F}_{r2} \cdot (\delta \mathbf{r}_2 - \delta \mathbf{r}_1)$. Ma per la formula fondamentale di cinematica $\delta \mathbf{r}_2 - \delta \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, quindi $W_{12}^{(v)} = 0$ perché \mathbf{F}_{r2} è parallelo a $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Alla stessa conclusione si giunge anche osservando che: (i) il vincolo di rigidità è un vincolo indipendente dal tempo, quindi ogni atto moto virtuale è anche attuale; (ii) le forze reattive sono forze interne e queste, per il postulato delle forze interne, hanno potenza nulla (Nota 4.13.3). •

La distinzione tra atto di moto virtuale e atto di moto attuale conserva tuttavia la sua importanza anche nel caso di sistemi scleronomi. Si consideri ad esempio il caso di un punto libero soggetto alla forza di Coriolis o alla forza esercitata da un campo magnetico. Entrambe le leggi di forza sono del tipo $\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$. La “potenza attuale” di questa forza è identicamente nulla: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Con l’introduzione della velocità virtuale $\delta \mathbf{r}$, intesa come puro vettore, la “potenza virtuale” è espressa dal prodotto misto $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}$ e quindi non è più identicamente nulla. Di qui si osserva anche che è possibile risalire al vettore \mathbf{F} conoscendo la sua potenza virtuale per ogni velocità virtuale (o per tre velocità virtuali indipendenti), non quella attuale (che è sempre nulla). Un’analisi più approfondita

⁸ Nella discussione seguente ci limitiamo per semplicità a considerare questo caso, ma le conclusioni varranno in generale per un sistema olonomo qualsiasi.

del caso di una forza attiva \mathbf{F} agente su di un punto soggetto ad un vincolo liscio (fisso o mobile) mostra che l'influenza che essa ha sul moto dipende solo dalla parte tangente al vincolo, supposto questo "congelato" istante per istante, parte che è completamente determinata dalla sua potenza virtuale $\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$. Siamo allora condotti a porre particolare attenzione al concetto di **potenza virtuale delle forze attive** agenti su di un sistema olonomo. Sempre nel caso di un sistema finito di punti si ha

$$(5.71) \quad W_a^{(v)} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{a\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_\nu,$$

dove $\mathbf{F}_{a\nu}$ è il risultante delle forze attive agenti sul punto P_ν .

La potenza virtuale delle forze attive risulta essere una forma lineare nelle componenti (δq^i) dell'atto di moto virtuale,

$$(5.72) \quad \boxed{W_a^{(v)} = \varphi_i \delta q^i}$$

i cui coefficienti φ_i prendono il nome di **forze lagrangiane** o di **componenti lagrangiane delle forze attive**. Infatti, sempre nel caso di un sistema finito, si ha

$$W_a^{(v)} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{a\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{a\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \delta q^i.$$

Vale quindi la (5.73) con

$$(5.73) \quad \varphi_i = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{a\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}.$$

NOTA 5.7.1 – Nel caso generale, in cui le forze attive dipendono dalla posizione e dalla velocità dei singoli punti ed eventualmente dal tempo, le forze lagrangiane risultano essere funzioni delle coordinate lagrangiane, delle velocità lagrangiane e del tempo: $\varphi_i = \varphi_i(q^*, \dot{q}^*, t)$. •

NOTA 5.7.2 – Nel caso di un solo punto la (5.73) diventa

$$\varphi_i = \mathbf{F}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{e}_i.$$

Questa formula è valida sia per il punto libero, nel qual caso $i = 1, 2, 3$ e le q^i sono coordinate dello spazio affine tridimensionale euclideo, sia per il punto vincolato ad una superficie, nel qual caso $i = 1, 2$ e le q^i sono coordinate superficiali. Si osserva quindi che per il punto libero le forze lagrangiane φ_i coincidono con le componenti covarianti della forza attiva rispetto alle coordinate q^i . •

NOTA 5.7.3 – La (5.73) mostra che per poter calcolare le forze lagrangiane si può calcolare la potenza virtuale delle forze attive per atti di moto virtuali in cui le velocità lagrangiane virtuali (δq^i) sono tutte nulle salvo una. La componente φ_1 è per esempio ottenibile calcolando la potenza virtuale corrispondente all'atto di moto virtuale ottenuto ponendo $\delta q^2 = \dots = \delta q^n = 0$ e $\delta q^1 = 1$. •

NOTA 5.7.4 – Chiamiamo **stato dinamico** di un sistema meccanico la distribuzione istantanea delle posizioni, velocità ed accelerazioni dei singoli punti. •

Ad ogni stato dinamico si associa la **potenza virtuale delle forze di massa** $W_m^{(v)}$, dove per **forza di massa** o (**forza d'inerzia**), nel caso di un singolo punto di massa m_ν , s'intende il vettore $\mathbf{F}_{m\nu} = -m_\nu \mathbf{a}_\nu$. Anche la potenza virtuale delle forze di massa risulta essere una forma lineare nelle componenti δq^i dell'atto di moto virtuale,

$$(5.74) \quad \boxed{W_m^{(v)} = a_i \delta q^i}$$

Per esempio, nel caso di un sistema finito di punti si ha

$$W_m^{(v)} = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{m\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \delta q^i,$$

per cui vale la (5.74) con

$$(5.75) \quad a_i = - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{a}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}.$$

Si hanno così tutti gli elementi per formulare un principio generale della meccanica che governa, pur nella sua estrema semplicità, il comportamento dinamico di una vastissima classe di sistemi meccanici, il

Principio di d'Alembert-Lagrange:⁹ *Per un sistema a vincoli ideali, in corrispondenza ad ogni stato dinamico e per ogni atto di moto virtuale è nulla la somma della potenza virtuale delle forze attive e della potenza virtuale delle forze di massa:*

$$(5.76) \quad \boxed{W_a^{(v)} + W_m^{(v)} = 0}$$

La (5.76) prende il nome di **equazione simbolica della dinamica**.

NOTA 5.7.5 – Si noti bene che nel caso di un solo punto materiale soggetto ad un vincolo liscio questo principio è equivalente all'equazione fondamentale della dinamica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r$. Infatti, se la si moltiplica scalarmente per una generica velocità virtuale $\delta \mathbf{r}$ si trova $\mathbf{F}_a \cdot \delta \mathbf{r} - m\mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$, perché $\mathbf{F}_r \cdot \delta \mathbf{r} = 0$, e quindi $W_a^{(v)} + W_m^{(v)} = 0$. Ragionando inversamente, da quest'ultima equazione, supposta valida per ogni velocità virtuale, segue che $\mathbf{F}_a - m\mathbf{a} = \mathbf{F}_r$ con \mathbf{F}_r vettore ortogonale al vincolo. •

Mostriamo ora come dal principio di D'Alembert-Lagrange discendano le equazioni fondamentali della dinamica dei sistemi olonomi.

⁹ Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert, 1717-1783.

TEOREMA 5.7.1 – *Comunque si scelgano le coordinate lagrangiane q^i , i moti di un sistema olonomo a n gradi di libertà e a vincoli ideali sono rappresentati dalle soluzioni $q^i(t)$ delle n equazioni differenziali*

$$(5.77) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = \varphi_i, \quad (i = 1, \dots, n)}$$

dove T è l'energia cinetica del sistema e le φ_i sono le forze lagrangiane.

Le equazioni (5.77) sono le celebri **equazioni di Lagrange**. Posto

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}, \quad \ddot{q}^i = \frac{d\dot{q}^i}{dt} = \frac{d^2 q^i}{dt^2},$$

esse risultano essere del secondo ordine nelle $q^i(t)$ (si veda la discussione più avanti).

DIMOSTRAZIONE. Viste la (5.73) e la (5.74), l'equazione simbolica della dinamica (5.76) si traduce nell'equazione

$$(\varphi_i + a_i) \delta q^i = 0, \quad \forall (\delta q^i) \in \mathbb{R}^n.$$

Siccome le funzioni φ_i e a_i non dipendono dalle δq^i e queste sono arbitrarie, quest'equazione equivale al sistema di n equazioni

$$(5.78) \quad \varphi_i + a_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Occorre allora sviluppare i coefficienti a_i a partire dalla (5.75). Dall'espressione delle velocità dei singoli punti

$$(5.79) \quad \mathbf{v}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t},$$

derivando rispetto alle (\dot{q}^i) , segue l'identità

$$(5.80) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}.$$

Se invece si deriva la (5.79) rispetto alle coordinate lagrangiane si trova

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j \partial t}.$$

D'altra parte

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j \partial t},$$

per cui dal confronto con la precedente espressione segue l'identità

$$(5.81) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j}.$$

A partire dalla (5.75) si ha allora successivamente, tenuto conto delle identità (5.80) e (5.81) (omettiamo il simbolo di sommatoria rispetto all'indice ν):

$$\begin{aligned} a_i &= -m_\nu \frac{d\mathbf{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} = m_\nu \left(\mathbf{v}_\nu \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \right) \right) \\ &= m_\nu \left(\mathbf{v}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) = \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}, \end{aligned}$$

osservato in ultimo che l'energia cinetica è per definizione

$$(5.82) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{v}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu.$$

Dalle (5.78) seguono allora le equazioni di Lagrange. \square

Un primo grande vantaggio del metodo lagrangiano è che le equazioni di Lagrange sono di immediata scrittura, una volta note le espressioni delle forze lagrangiane φ_i e dell'energia cinetica T . Sul calcolo delle forze lagrangiane si è già detto nella Nota 5.7.3 e si ritornerà ancora più avanti (§5.9).

NOTA 5.7.6 – Espressione generale dell'energia cinetica. L'energia cinetica risulta essere un polinomio di secondo grado nelle velocità lagrangiane

$$(5.83) \quad T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + g_{0i} \dot{q}^i + \frac{1}{2} g_{00}$$

a coefficienti (g_{ij}, g_{0i}, g_{00}) dipendenti dalle coordinate lagrangiane e dal tempo. Infatti (ci limitiamo al solito a considerare un sistema finito di punti) sostituendo l'espressione (5.79) delle velocità nella definizione (5.82) dell'energia cinetica si vede che vale la (5.83) posto

$$(5.84) \quad \begin{cases} g_{ij} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j}, \\ g_{0i} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^i}, \\ g_{00} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}. \end{cases}$$

Nel caso di vincoli indipendenti dal tempo i coefficienti g_{0i} e g_{00} si annullano identicamente e l'energia cinetica risulta essere una forma quadratica:

$$(5.85) \quad T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

Questa è definita positiva: innanzitutto perché l'energia cinetica, per sua stessa definizione, è una quantità positiva, nulla se e solo se tutti i punti del sistema hanno velocità nulla cioè se l'atto di moto è nullo; inoltre gli atti di moto nulli sono caratterizzati dall'annullarsi di tutte le velocità lagrangiane, quindi $T \geq 0$ con $T = 0$ se e solo se $(\dot{q}^i) = 0$. Anche nel caso di vincoli indipendenti dal tempo la parte quadratica omogenea dell'energia cinetica (5.83) risulta essere una forma quadratica definita positiva. Per riconoscerlo basta ripetere il ragionamento precedente considerando però atti di moto virtuali, cioè con vincoli istantaneamente fissi, perché la parte quadratica omogenea è proprio l'energia cinetica corrispondente a questi atti di moto. •

Mettiamo in opera il metodo lagrangiano, mostrandone l'efficacia, con alcuni esempi, semplici ma significativi.

ESEMPIO 5.7.2 – Il bipendolo piano (Esempio 5.5.9). Supposti nulli gli attriti, i vincoli sono perfetti. Si consideri per semplicità il caso in cui le masse dei due punti A e B sono uguali ($= m$) così come le lunghezze dei due segmenti OA e AB ($= \ell$). Fissato un riferimento cartesiano (O, x, y) come in figura (asse x verticale orientato verso il basso e asse y orizzontale), conviene scegliere come coordinate lagrangiane i due angoli $(q^1, q^2) = (\theta, \phi)$ come in figura. (a) *Calcolo dell'energia cinetica*: i vettori posizione dei due punti sono

$$\mathbf{r}_A = \ell (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}), \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \ell (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}),$$

quindi le loro velocità sono

$$\mathbf{v}_A = \ell \dot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}), \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \ell \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}).$$

Di qui segue

$$\mathbf{v}_A^2 = \ell^2 \dot{\theta}^2, \quad \mathbf{v}_B^2 = \ell^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \cos(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}],$$

quindi

$$T = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_A^2 + \mathbf{v}_B^2) = \frac{1}{2} m \ell^2 [2 \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \cos(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}]$$

(b) *Calcolo delle forze lagrangiane*: seguono dal calcolo della potenza virtuale delle forze attive: $W_a^{(v)} = \varphi_i \delta q^i = \varphi_\theta \delta \theta + \varphi_\phi \delta \phi$. In questo caso $W_a^{(v)} = m \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r}_A + m \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{r}_B$. Con atto di moto ($\delta \theta \neq 0, \delta \phi = 0$), che provoca una rotazione del segmento OA ed una traslazione del segmento AB , si ha $\delta \mathbf{r}_A = \delta \mathbf{r}_B = \ell (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \delta \theta$ e quindi, posto che $\mathbf{g} = g \mathbf{i}$, $W_a^{(v)} = -2 m g \ell \sin \theta \delta \theta$. Dunque

$$\varphi_\theta = -2 m g \ell \sin \theta$$

Con atto di moto ($\delta \theta = 0, \delta \phi \neq 0$), che provoca una rotazione del solo segmento AB , si ha $\delta \mathbf{r}_A = 0$ e $\delta \mathbf{r}_B = \ell (-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \delta \phi$ e quindi $W_a^{(v)} = -m g \ell \sin \phi \delta \phi$. Dunque

$$\varphi_\phi = -m g \ell \sin \phi$$

(c) *Le equazioni di Lagrange*: tenuto conto che

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \theta} = m \ell^2 (2 \dot{\theta} + \cos(\theta - \phi) \dot{\phi}), & \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 (\dot{\theta} + \cos(\theta - \phi) \dot{\phi}), \\ \frac{\partial T}{\partial \phi} = -m \ell^2 \sin(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m \ell^2 \sin(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}, \end{cases}$$

risultano essere, dividendo per $m \ell$,

$$\begin{cases} 2 \ddot{\theta} + \cos(\theta - \phi) \ddot{\phi} + \sin(\theta - \phi) \dot{\phi}^2 + 2 \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0, \\ \ddot{\phi} + \cos(\theta - \phi) \ddot{\theta} - \sin(\theta - \phi) \dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell} \sin \phi = 0. \end{cases} \bullet$$

ESEMPIO 5.7.3 – **Il pendolo a lunghezza variabile** (Esempio 5.6.1). Utilizzando coordinate polari (r, θ) e tenuto conto che $r = \ell(t)$ si trova subito che

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2)$$

L'unica forza attiva è la gravità $\mathbf{F} = m \mathbf{g}$ (la forza che provoca la variazione della lunghezza del pendolo è di natura vincolare). La potenza virtuale è formalmente identica a quella del pendolo a lunghezza fissa:

$$W_a^{(v)} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = -m g \ell \sin \theta \delta \theta,$$

per cui la forza lagrangiana è

$$\varphi_\theta = -m g \ell \sin \theta$$

Poiché

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2 m \ell \dot{\ell} \dot{\theta} + m \ell^2 \ddot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,$$

l'equazione di Lagrange divisa per $m \ell^2$ (supposto $\ell(t) \neq 0$) diventa

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{\ell}}{\ell} \dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

Chiaramente, per $\dot{\ell} = 0$ ($\ell = \text{cost.}$) si ritrova l'equazione del pendolo. •

5.8 Meccanica riemanniana

In questo paragrafo limitiamo le nostre considerazioni ai sistemi olonomi con vincoli indipendenti dal tempo (§5.5). Si è osservato alla fine del paragrafo precedente che l'energia cinetica è per un tale sistema una forma quadratica definita positiva nelle velocità lagrangiane. Tale circostanza è di importanza fondamentale: grazie all'energia cinetica la varietà delle configurazioni di un sistema scleronomo assume la struttura di *varietà riemanniana*.

DEFINIZIONE 5.8.1 – Una **varietà riemanniana**¹⁰ è una coppia (Q, \mathbf{g}) costituita da una varietà differenziabile Q e da un **tensore metrico \mathbf{g} su Q** . Un **tensore metrico** è un'applicazione differenziabile

$$\mathbf{g}: TQ \times_Q TQ \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni punto $q \in Q$ la restrizione

$$\mathbf{g}_q: T_q Q \times T_q Q \rightarrow \mathbb{R}$$

è una forma bilineare simmetrica definita positiva.¹¹ •

¹⁰ Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 - 1866.

¹¹ Con $TQ \times_Q TQ$ si denota l'insieme delle coppie di vettori (\mathbf{u}, \mathbf{v}) tangenti in un medesimo punto. È una varietà di dimensione $3n$, se $n = \dim(Q)$. Se la segnatura non è positiva si ha una varietà **pseudo-riemanniana** o **semi-riemanniana**.

Una superficie regolare immersa in uno spazio affine euclideo fornisce un esempio elementare di varietà riemanniana: il tensore metrico è la prima forma fondamentale (§2.7).

In un qualunque sistema di coordinate (q^i) di Q il tensore metrico ammette una rappresentazione locale del tipo

$$\mathbf{g} = g_{ij} dq^i \otimes dq^j,$$

Infatti, posto per definizione

$$dq^i \otimes dq^j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^i v^j,$$

risulta

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{ij} u^i v^j.$$

I coefficienti g_{ij} , funzioni delle coordinate lagrangiane, formano una matrice quadrata $n \times n$ simmetrica e ovunque regolare, detta **matrice metrica**.

Il tensore metrico induce su ogni spazio tangente $T_q Q$ una struttura di spazio vettoriale euclideo, quindi un **prodotto scalare** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ed una forma quadratica $\|\mathbf{u}\| = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Esso pertanto consente di estendere alle varietà riemanniane alcune nozioni ed operazioni proprie degli spazi affini euclidei (che sono particolari varietà riemanniane). Ne risulta una generalizzazione della geometria euclidea: la **geometria riemanniana**.

Per un sistema scleronomo l'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva:

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

per ogni vettore tangente \mathbf{v} di componenti (\dot{q}^i) . Si interpretano allora i suoi coefficienti g_{ij} come componenti di un tensore metrico \mathbf{g} , per cui

$$2T(\mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

La presenza della struttura riemanniana sulle varietà delle configurazioni stabilisce uno stretto legame tra la geometria riemanniana e la meccanica lagrangiana. Come si è detto, il moto di un sistema olonomo è rappresentato dal moto di un punto sopra la varietà delle configurazioni Q , cioè da una curva $\gamma: I \rightarrow Q$ descritta localmente da equazioni paratriche $q^i = \gamma^i(t)$ (brevemente: $q^i(t)$). A questa curva corrisponde la curva tangente o curva derivata – Definizione ?? – di equazioni parametriche

$$\begin{cases} q^i = \gamma^i(t), \\ \dot{q}^i = D\gamma^i(t), \end{cases}$$

che fornisce la **velocità** istantanea del sistema, vale a dire l'atto di moto istantaneo per ogni $t \in I$. Grazie alla presenza del tensore metrico è però possibile estendere ai sistemi olonomi anche il concetto di “accelerazione”. Essendo la trattazione rigorosa di questo argomento al di sopra del livello di queste lezioni, possiamo procedere per analogia con l'espressione in coordinate generiche dell'accelerazione di un punto libero (2.27) o dell'accelerazione intrinseca di un punto vincolato ad una superficie (2.74):

DEFINIZIONE 5.8.2 – Chiamiamo **accelerazione istantanea** di un sistema olonomo in un moto di equazioni $q^i(t)$ il vettore $\mathbf{a}(t) \in T_{\gamma(t)}Q$ di componenti $a^i(t)$ definite da

$$(5.86) \quad \boxed{a^i = \frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{jh}^i \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^h}{dt}}$$

posto, con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}$,

$$(5.87) \quad \Gamma_{jh}^i = g^{ik} \Gamma_{jhk}, \quad \Gamma_{jhk} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{hk} + \partial_h g_{kj} - \partial_k g_{jh}).$$

essendo $[g^{ik}]$ la matrice inversa della matrice metrica $[g_{ij}]$. Le funzioni Γ_{jhk} e Γ_{jh}^i sono i **simboli di Christoffel** corrispondenti alle coordinate (q^i) (di prima e seconda specie rispettivamente). •

Si può in effetti dimostrare, a parte l'analogia col caso del punto, che le a^i si trasformano, al cambiare delle coordinate, come le componenti di un vettore tangente, cioè secondo la formula (5.7).

Come per gli spazi affini euclidei, la presenza del tensore metrico consente di definire sulle varietà riemanniane una corrispondenza biunivoca tra 1-forme e campi vettoriali. Ad una 1-forma

$$(5.88) \quad \varphi = \varphi_i dq^i$$

corrisponde il campo vettoriale $\mathbf{F} = \varphi^\sharp$ tale che per ogni vettore \mathbf{v}

$$(5.89) \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \varphi \rangle.$$

Le sue componenti sono definite da

$$(5.90) \quad F^i = g^{ij} \varphi_j.$$

Queste componenti sono dette **contravarianti**.

TEOREMA 5.8.1 – Le equazioni di Lagrange di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo sono equivalenti all'equazione vettoriale

$$(5.91) \quad \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{F}}$$

sulla varietà riemanniana delle configurazioni, cioè al sistema di equazioni

$$(5.92) \quad \boxed{\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{jh}^i \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^h}{dt} = F^i}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione ricalca formalmente quella del §2.2.2. Essa consiste nel dimostrare che, posto $a_i = [T]_i$ dove $[T]_i$ sono i primi membri delle equazioni di Lagrange, allora le quantità $a^i = g^{ij} a_j$ assumono proprio la forma (5.86). Di qui, stante la (5.90), segue che le equazioni di Lagrange $[T]_i = \varphi_i$ sono equivalenti a $a^i = F^i$. Siccome

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = g_{ij} \dot{q}^j, \quad \frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{1}{2} \partial_i g_{jh} \dot{q}^j \dot{q}^h, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) = \partial_h g_{ij} \dot{q}^h \dot{q}^j + g_{ij} \frac{d\dot{q}^j}{dt},$$

si ha

$$[T]_i = g_{ij} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \partial_h g_{ij} \dot{q}^h \dot{q}^j - \frac{1}{2} \partial_i g_{jh} \dot{q}^j \dot{q}^h.$$

Quindi, per la simmetria di $\dot{q}^j \dot{q}^h$ e di g_{ih} ,

$$[T]_i = g_{ij} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \frac{1}{2} (\partial_j g_{hi} + \partial_h g_{ij} - \partial_i g_{jh}) \dot{q}^j \dot{q}^h = g_{ij} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \Gamma_{jhi} \dot{q}^j \dot{q}^h.$$

Con l'innalzamento dell'indice i si trova la (5.86). \square

NOTA 5.8.1 – L'aspetto “newtoniano” dell'equazione (5.91) consente di affermare che: *i moti di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo possono interpretarsi come moti di un punto materiale di massa unitaria sulla varietà riemanniana delle configurazioni, soggetto ad una forza \mathbf{F} le cui componenti covarianti sono le forze lagrangiane.*

•

NOTA 5.8.2 – Quando le forze lagrangiane sono nulle, $\mathbf{F} = 0$, i moti di un sistema olonomo si dicono **moti spontanei**: il sistema si muove soltanto sotto l'azione dei propri vincoli (perfetti, quindi non dissipativi). L'equazione (5.91) diventa $\mathbf{a} = 0$. In analogia con quanto visto per le superfici possiamo definire i moti con accelerazione nulla **moti geodetici**. Pertanto: *i moti spontanei di un sistema olonomo sono moti geodetici sulla varietà riemanniana delle configurazioni.* Sempre in virtù di quest'analogia segue che *nei moti spontanei l'energia cinetica è costante.* Come si vedrà più avanti – Nota 5.13.1 – la definizione di moto geodetico o di geodetica di una varietà riemanniana può darsi in maniera diretta e generale, senza il ricorso all'analogia con la geometria delle superfici. •

NOTA 5.8.3 – Le equazioni (5.92) formano un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale nelle funzioni incognite $q^i(t)$. Esso è equivalente al seguente sistema del primo ordine di $2n$ equazioni nelle $2n$ incognite $q^i(t)$ e $\dot{q}^i(t)$:

$$(5.93) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \\ \frac{d\dot{q}^i}{dt} = F^i - \Gamma_{jh}^i \dot{q}^j \dot{q}^h \end{cases}$$

Se le forze lagrangiane non dipendono dal tempo questo sistema è autonomo e corrisponde quindi ad un campo vettoriale \mathbf{X}_L sopra il fibrato tangente TQ , che chiamiamo **campo lagrangiano**. In questo caso però l'interpretazione geometrica del campo vettoriale \mathbf{F} è diversa. Esso non è più un campo vettoriale su Q bensì un campo vettoriale “verticale”

su TQ . Un campo vettoriale \mathbf{F} su TQ è detto **verticale** se ogni sua curva integrale giace su di una fibra cioè su di uno spazio tangente (che è una sottovarietà). Ciò significa che il sistema dinamico ad esso associato è del tipo

$$(5.94) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = 0, \\ \frac{d\dot{q}^i}{dt} = F^i(q^j, \dot{q}^k). \end{cases}$$

In altri termini, un campo vettoriale su TQ è verticale se per ogni funzione f costante sulle fibre (che quindi è in definitiva una funzione su Q) si ha

$$(5.95) \quad \langle \mathbf{F}, df \rangle = 0.$$

Se denotiamo con \mathbf{X}_G il **campo vettoriale geodetico**, il cui sistema del primo ordine è (si confronti con il sistema di equazioni (2.80))

$$(5.96) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \\ \frac{d\dot{q}^i}{dt} = -\Gamma_{jh}^i \dot{q}^j \dot{q}^h, \end{cases}$$

e le cui curve integrali rappresentano i moti geodetici (perché $F^i = 0$), allora si riconosce che

$$(5.97) \quad \mathbf{X}_L = \mathbf{X}_G + \mathbf{F},$$

cioè che \mathbf{X}_L differisce da \mathbf{X}_G per il campo verticale \mathbf{F} . •

5.9 Il potenziale e la lagrangiana

DEFINIZIONE 5.9.1 – *Sia dato un sistema olonomo a vincoli eventualmente dipendenti dal tempo con varietà delle configurazioni Q . Una funzione $U: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, localmente rappresentata da una funzione $U(q^i, \dot{q}^i, t)$ delle coordinate lagrangiane, delle velocità lagrangiane e del tempo, è detta **potenziale** se le forze lagrangiane sono esprimibili con la formula*

$$(5.98) \quad \boxed{\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i} \right)} \quad \bullet$$

L'interesse di questa definizione risiede nel fatto che se esiste un potenziale U allora le equazioni di Lagrange assumono la forma

$$(5.99) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0}$$

introdotta la funzione

$$(5.100) \quad \boxed{L = T + U}$$

Queste equazioni prendono il nome di **equazioni di Euler-Lagrange**. I primi membri, che denoteremo con $[L]_i$, prendono il nome di **binomi lagrangiani**. La funzione L è chiamata **lagrangiana** del sistema.

La lagrangiana è una funzione reale su $TQ \times \mathbb{R}$, esprimibile localmente in una funzione $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ delle coordinate lagrangiane, delle velocità lagrangiane e del tempo. La lagrangiana racchiude in sé tutte le caratteristiche e le proprietà dinamiche del sistema olonomo, perché è con questa sola funzione che risultano determinate le equazioni che ne governano tutti i possibili moti: le equazioni di Euler-Lagrange.

Analizziamo allora le condizioni di esistenza di un potenziale. Si consideri, come primo caso, un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo e con forze lagrangiane dipendenti solo dalle coordinate lagrangiane. Come si è visto al §5.8, le forze lagrangiane possono interpretarsi come componenti di una forma differenziale lineare sulla varietà delle configurazioni Q :

$$(5.101) \quad \varphi = \varphi_i dq^i.$$

Il potenziale è in questo caso una funzione $U: Q \rightarrow \mathbb{R}$, cioè una funzione delle sole coordinate lagrangiane, per cui la (5.98) si semplifica in

$$(5.102) \quad \varphi_i = \partial_i U.$$

Ciò significa che

$$(5.103) \quad \boxed{\varphi = dU}$$

cioè che φ è esatta e che U ne è un potenziale nel senso della teoria delle forme differenziali. Il potenziale è determinato a meno di una costante additiva. Sappiamo per il lemma di Poincaré che condizione necessaria per l'esistenza di un potenziale (e sufficiente per l'esistenza locale) è che questa forma sia chiusa,

$$(5.104) \quad d\varphi = 0,$$

cioè che valgano le equazioni

$$(5.105) \quad \partial_i \varphi_j = \partial_j \varphi_i.$$

Sulla varietà delle configurazioni, il campo vettoriale \mathbf{F} corrispondente alla forma φ è il gradiente di U : $\mathbf{F} = \text{grad}(U)$:

$$(5.106) \quad F^i = g^{ij} \partial_j U.$$

Un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo le cui forze lagrangiane ammettono un potenziale indipendente dalle velocità e dal tempo si dice **sistema olonomo**

conservativo. Un sistema olonomo conservativo è pertanto caratterizzato da una terna (Q, \mathbf{g}, U) dove (Q, \mathbf{g}) è la varietà riemanniana delle configurazioni e $U: Q \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione potenziale.

Nel caso di un sistema olonomo a vincoli eventualmente dipendenti dal tempo ma con forze lagrangiane non dipendenti dalle velocità (quindi dipendenti dalle coordinate lagrangiane e dal tempo) il potenziale è una funzione $U: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cioè una funzione delle coordinate lagrangiane e del tempo (si veda la Nota 5.9.5 più avanti), per cui il legame (5.98) tra potenziale e forze lagrangiane si riduce ancora all'equazione (5.102).

NOTA 5.9.1 – Occorre osservare che, in questo come nel caso precedente, il potenziale U è legato alla potenza virtuale delle forze attive dall'equazione

$$(5.107) \quad W_a^{(v)} = \delta U = \partial_i U \delta q^i.$$

Qui il simbolo δ applicato alla funzione potenziale U ha formalmente il significato di “derivata totale rispetto al tempo”, fatta però con i vincoli supposti fissi. L'utilità del concetto di potenziale risiede proprio nel fatto che esso si calcola di solito per via diretta, cioè senza il passaggio attraverso le forze lagrangiane, o mediante la (5.107) oppure sommando i potenziali delle varie forze che operano sul sistema. •

ESEMPIO 5.9.1 – Per il bipendolo piano (Esempio 5.5.9) si ha evidentemente $U = m g x_A + m g x_B$ e quindi $U = m g \ell (2 \cos \theta + \cos \phi)$. Per il pendolo a raggio variabile (Esempio 5.5.3) il calcolo del potenziale è immediato, in base a quanto detto nell'osservazione precedente: $U = m g x_P = m g \ell(t) \cos \theta$. •

NOTA 5.9.2 – Dato un sistema olonomo conservativo (Q, \mathbf{g}, U) , possiamo pensare di imporre a questo un ulteriore vincolo di posizione rappresentato da una sottovarietà $C \subset Q$: le configurazioni ammissibili sono ora rappresentate dai punti di C . Si può dimostrare, ricorrendo al principio di d'Alembert-Lagrange, che i moti del nuovo sistema vincolato sono quelli del sistema olonomo conservativo $(C, \mathbf{g}|_{TC}, U|_C)$ dove la nuova varietà delle configurazioni è C , il tensore metrico è la restrizione di \mathbf{g} ai vettori tangenti a C (ovvero l'energia cinetica è la restrizione di T agli atti di moto TC) e il potenziale è la restrizione della funzione U a C . Questa notevole proprietà di “restrizione” è un'altra delle importanti caratteristiche del metodo lagrangiano. •

Discutiamo ora il caso generale.

Poniamo $q^0 = t$, interpretando il tempo come coordinata sullo spazio-tempo delle configurazioni $\bar{Q} \simeq \mathbb{R} \times Q$. Poniamo inoltre $(q^A) = (q^0, q^i)$ con indici latini maiuscoli variabili da 0 a n . Denotiamo con ∂_A la derivata parziale rispetto alla coordinata q^A . Sviluppando il secondo membro della (5.98), tenendo conto che $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$, si trova

$$(5.108) \quad \varphi_i = \frac{\partial U}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 U}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \frac{d\dot{q}^j}{dt} - \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \dot{q}^i}.$$

Se si esclude per principio la dipendenza delle forze lagrangiane dalle accelerazioni, deve essere identicamente

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = 0.$$

La più generale funzione U soddisfacente a queste equazioni è un polinomio di primo grado nelle velocità lagrangiane:

$$(5.109) \quad \boxed{U = \alpha_0 + \alpha_i \dot{q}^i}$$

Se si sostituisce nelle (5.108) una funzione di questo tipo si trova

$$\varphi_i = \partial_i \alpha_0 - \partial_0 \alpha_i + (\partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i) \dot{q}^j.$$

Quindi se si pone

$$(5.110) \quad \begin{cases} \beta_{ij} = \partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i \\ \beta_{i0} = \partial_i \alpha_0 - \partial_0 \alpha_i \end{cases}$$

risulta

$$(5.111) \quad \boxed{\varphi_i = \beta_{i0} + \beta_{ij} \dot{q}^j}$$

con

$$(5.112) \quad \boxed{\beta_{ij} = -\beta_{ji}}$$

Si può pertanto affermare che

TEOREMA 5.9.1 – *Esclusa la dipendenza dalle accelerazioni delle forze lagrangiane, condizione necessaria affinché queste ammettano un potenziale è che esse siano polinomi di primo grado nelle velocità lagrangiane a coefficienti antisimmetrici, cioè del tipo (5.111). In tal caso il potenziale è un polinomio di primo grado nelle velocità lagrangiane, cioè del tipo (5.109).*

Si tratta ora di interpretare i legami (5.110) tra i coefficienti del polinomio U ed i coefficienti dei polinomi φ_i . Per far questo si osserva che ad un potenziale del tipo (5.109) corrisponde una forma differenziale lineare su $T\bar{Q}$

$$(5.113) \quad \bar{\alpha} = \alpha_0 dt + \alpha_i dq^i = \alpha_A dq^A.$$

mentre i coefficienti (β_{i0}, β_{ij}) delle forze lagrangiane (5.111), posto $\beta_{i0} = -\beta_{0i}$, possono interpretarsi come componenti

$$(5.114) \quad [\beta_{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{0j} \\ \beta_{i0} & \beta_{ij} \end{bmatrix}$$

di una 2-forma su $T\bar{Q}$:

$$(5.115) \quad \bar{\beta} = \frac{1}{2} \beta_{AB} dq^A \wedge dq^B.$$

Allora i legami (5.110) si traducono semplicemente nella condizione

$$(5.116) \quad \boxed{\bar{\beta} = d\bar{\alpha}}$$

Infatti differenziando la (5.113) si trova

$$\begin{aligned} d\bar{\alpha} &= \partial_i \alpha_0 dq^i \wedge dq^0 + \partial_0 \alpha_i dq^0 \wedge dq^i + \partial_j \alpha_i dq^j \wedge dq^i \\ &= (\partial_i \alpha_0 - \partial_0 \alpha_i) dq^i \wedge dq^0 + \frac{1}{2} (\partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i) dq^i \wedge dq^j \\ &= \beta_{i0} dq^i \wedge dq^0 + \frac{1}{2} \beta_{ij} dq^i \wedge dq^j = \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Si può quindi affermare che

TEOREMA 5.9.2 – *Se le forze lagrangiane sono polinomi di primo grado nelle velocità lagrangiane con coefficienti antisimmetrici, cioè del tipo (5.111), e se questi coefficienti si interpretano come componenti di una 2-forma $\bar{\beta}$ su \bar{Q} , allora condizione necessaria e sufficiente affinché esista un potenziale è che $\bar{\beta}$ sia esatta: $\bar{\beta} = d\bar{\alpha}$. Il potenziale è in tal caso un polinomio di primo grado nelle velocità lagrangiane i cui coefficienti sono le componenti della 1-forma $\bar{\alpha}$ – formula (5.109).*

Ricordato il lemma di Poincaré, si può anche affermare che

TEOREMA 5.9.3 – *Condizione necessaria per l'esistenza di un potenziale e condizione sufficiente per l'esistenza di potenziali locali è che la 2-forma $\bar{\beta}$ sia chiusa: $d\bar{\beta} = 0$.*

NOTA 5.9.3 – In componenti la condizione di chiusura di $\bar{\beta}$ è espressa dalle equazioni (formula (5.59))

$$(5.117) \quad \partial_A \beta_{BC} + \partial_B \beta_{CA} + \partial_C \beta_{AB} = 0,$$

le quali si spezzano nei due gruppi di equazioni

$$(5.118) \quad \begin{cases} \partial_i \beta_{jk} + \partial_j \beta_{ki} + \partial_k \beta_{ij} = 0 \\ \partial_0 \beta_{ij} + \partial_i \beta_{j0} - \partial_j \beta_{i0} = 0. \quad \bullet \end{cases}$$

NOTA 5.9.4 – La (5.116) mostra che la 1-forma potenziale $\bar{\alpha}$ è determinata a meno di una forma esatta, cioè che essa può essere sostituita da $\bar{\alpha} + dF$ qualunque sia funzione $F: Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ciò significa che il potenziale è determinato a meno di funzioni additive del tipo

$$\partial_0 F + \partial_i F \dot{q}^i,$$

più ovviamente delle costanti. •

NOTA 5.9.5 – Il caso delle forze lagrangiane non dipendenti dalle velocità lagrangiane è caratterizzato dalla condizione $\beta_{ij} = 0$ – si veda la (5.111). La prima delle (5.110) mostra che $\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i$ e quindi che esiste una funzione F delle coordinate e del tempo tale che $\alpha_i = \partial_i F$. La seconda delle (5.110) mostra a sua volta che $\varphi_i = \beta_{i0} = \partial_i(\alpha_0 - \partial_0 F)$, cioè che vale la (5.102) con $U = \alpha_0 - \partial_0 F$, cioè che, se esiste il potenziale, questo è funzione delle sole coordinate e del tempo. La (5.109) mostra invece che il potenziale è del tipo $U = \alpha_0 + \partial_i F \dot{q}^i$, cioè che è lineare nelle velocità. Questa seconda conclusione non è in contraddizione con la prima per quanto visto nell'osservazione precedente. •

5.10 Il caso dello spazio euclideo tridimensionale

Adattiamo le considerazioni ora svolte al caso di un punto materiale mobile nello spazio affine tridimensionale euclideo. Occorrono alcune premesse generali sul calcolo differenziale in tale spazio. La presenza del tensore metrico (cioè del prodotto scalare fra vettori) consente di definire, oltre alla corrispondenza biunivoca tra vettori e covettori e quindi tra campi e 1-forme (come per ogni varietà riemanniana), anche le operazioni di prodotto vettoriale, prodotto misto e aggiunzione. Quest'ultima è una corrispondenza biunivoca, denotata con $*$, tra vettori e forme bilineari antisimmetriche (o 2-forme) e tra scalari e forme trilineari antisimmetriche (o 3-forme). La combinazione di queste operazioni con quella di differenziale consente di introdurre, oltre all'operatore gradiente già visto, altri due operatori differenziali sui campi vettoriali: il “rotore” e la “divergenza”.

Per definire tutte queste operazioni è conveniente riferirsi ad un sistema di coordinate cartesiane ortonormali $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$ (gli indici latini saranno variabili da 1 a 3) di versori (e_i) . In questo caso non vi è differenza tra i valori delle componenti contravarianti e quelle covarianti dei vettori, nel senso che ad ogni vettore (o campo vettoriale)

$$\mathbf{v} = v^i e_i,$$

corrisponde la forma lineare

$$\mathbf{v}^\flat = v_i dx^i$$

dove

$$v_i = v^i.$$

Si osservi che in particolare si ha

$$e_i^\flat = dx^i.$$

Dunque *i versori della base delle coordinate cartesiane corrispondono ai differenziali delle coordinate medesime*. È anche conveniente utilizzare il **simbolo di Levi-Civita**:¹²

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

Vale 1 se la successione degli indici (i, j, k) è una permutazione pari della successione $(1, 2, 3)$, vale -1 se invece è dispari, vale 0 negli altri casi, cioè quando almeno due indici sono coincidenti. Il **prodotto misto** di tre vettori, che rappresenta il volume del parallelepipedo da essi individuato, essendo dato dal determinante delle componenti cartesiane dei vettori, è definibile con la formula

$$(5.119) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \varepsilon_{ijk} u^i v^j w^k.$$

Di conseguenza il **prodotto vettoriale** è definito da

$$(5.120) \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = \varepsilon_{ijk} u^i v^j.$$

¹²Tullio Levi-Civita, 1873-1941.

L'**aggiunzione**, di cui si è già detto nella Nota 3.2.1, fa corrispondere ad ogni vettore $\omega = \omega^i e_i$ la 2-forma

$$(5.121) \quad \Omega = *\omega$$

le cui componenti sono definite da

$$(5.122) \quad \Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega^k.$$

Viceversa

$$(5.123) \quad \omega = *\Omega$$

con

$$(5.124) \quad \omega^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \Omega_{jk}.$$

Intesa la 2-forma Ω come endomorfismo lineare, risulta

$$(5.125) \quad \Omega(v) = \omega \times v.$$

Infatti: $\Omega_{ij} v^i = \varepsilon_{ijk} v^i \omega^k = \varepsilon_{kij} \omega^k v^i = (\omega \times v)_j$.

Il legame tra il prodotto esterno di 1-forme e il prodotto vettoriale di vettori è dato dalla formula

$$(5.126) \quad *(u^b \wedge v^b) = u \times v.$$

Infatti, posto $\Omega = u^b \wedge v^b = u^b \otimes v^b - v^b \otimes u^b$, quindi $\Omega_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$, e $\omega = *\Omega$, risulta:

$$\omega^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (u_j v_k - u_k v_j) = \varepsilon^{ijk} u_j v_k,$$

cioè $\omega = u \times v$. La (5.126) dà come caso particolare

$$(5.127) \quad *(dx^i \wedge dx^j) = \varepsilon^{ijk} e_k.$$

L'aggiunzione fa inoltre corrispondere ad una 3-forma

$$\varphi = \frac{1}{3!} \varphi_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

lo scalare

$$(5.128) \quad *\varphi = \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} \varphi_{ijk}.$$

e viceversa ad uno scalare a la 3-forma $*a$ di componenti

$$(5.129) \quad (*a)_{ijk} = a \varepsilon_{ijk}.$$

In particolare si ha

$$(5.130) \quad * (dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k) = \varepsilon^{ijk}.$$

Dato un campo vettoriale \mathbf{F} , il suo **rotore** è il campo vettoriale definito da

$$(5.131) \quad \boxed{\text{rot}(\mathbf{F}) = * d\mathbf{F}^\flat}$$

Posto $\mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i$, si ha

$$\mathbf{F}^\flat = F_i dx^i \quad (F_i = F^i)$$

e per la definizione di differenziale

$$d\mathbf{F}^\flat = \partial_j F_i dx^j \wedge dx^i.$$

Per la (5.127)

$$* d\mathbf{F}^\flat = \partial_j F_i * (dx^j \wedge dx^i) = \partial_j F_i \varepsilon^{jik} \mathbf{e}_k.$$

Dunque in componenti

$$(5.132) \quad \boxed{(\text{rot}(\mathbf{F}))^k = \varepsilon^{kij} \partial_i F_j}$$

Si ritrova quindi la definizione che utilizza il determinante formale

$$(5.133) \quad \text{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

La **divergenza** di un campo vettoriale \mathbf{F} è il campo scalare definito da

$$(5.134) \quad \boxed{\text{div}(\mathbf{F}) = * d * \mathbf{F}}$$

Si ha successivamente, per le formule precedenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} (*\mathbf{F})_{ij} = \varepsilon_{ijk} F^k, \\ * \mathbf{F} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^k dx^i \wedge dx^j, \\ d * \mathbf{F} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_h F^k dx^h \wedge dx^i \wedge dx^j, \\ * d * \mathbf{F} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_h F^k * (dx^h \wedge dx^i \wedge dx^j) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_h F^k \varepsilon^{ijh}. \end{array} \right.$$

Va allora osservato che sussiste l'identità

$$(5.135) \quad \varepsilon^{ijh} \varepsilon_{ijk} = 2 \delta_k^h.$$

(il secondo membro è il simbolo di Kronecker). Dunque in componenti risulta semplicemente

$$(5.136) \quad \boxed{\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \partial_k F^k}$$

NOTA 5.10.1 – La definizione (5.136) di divergenza si estende ad uno spazio affine di dimensione qualsiasi, purché le coordinate scelte siano cartesiane. Tuttavia si può riconoscere che la definizione resta valida anche se queste non sono ortonormali. In altri termini: in uno spazio affine di dimensione qualunque la definizione di divergenza di un campo vettoriale prescinde dalla presenza della metrica. Si tenga comunque presente che l'operazione di divergenza su campi vettoriali si estende a varietà riemanniane, dove l'intervento del tensore metrico è essenziale. •

NOTA 5.10.2 – Se si introduce il “vettore formale” $\nabla = (\partial_i) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ si hanno per i tre operatori differenziali gradiente, divergenza, rotore le definizioni formali:

$$(5.137) \quad \begin{cases} \operatorname{grad}(U) = \nabla U, \\ \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}. \quad \bullet \end{cases}$$

Tutto ciò premesso, dimostriamo che

TEOREMA 5.10.1 – *Nello spazio affine tridimensionale euclideo la più generale forza che ammette potenziali locali è del tipo*

$$(5.138) \quad \boxed{\mathbf{F} = \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{v}}$$

dove \mathbf{v} è la velocità ed \mathbf{E} , \mathbf{B} sono campi vettoriali (eventualmente dipendenti dal tempo) soddisfacenti alle equazioni

$$(5.139) \quad \boxed{\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = 0}$$

Il potenziale è del tipo

$$(5.140) \quad \boxed{U = \phi + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}$$

ed il legame tra forza e potenziale è dato dalle equazioni

$$(5.141) \quad \boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{E} = \operatorname{grad}(\phi) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$

DIMOSTRAZIONE. (i) La (5.138) è infatti la traduzione in forma vettoriale della formula (5.111), una volta introdotte le 1-forme $\varphi = \mathbf{F}^\flat$ e $\epsilon = \mathbf{E}^\flat$, corrispondenti alle forze \mathbf{F} e \mathbf{E} , di componenti φ_i e $\epsilon_i = \beta_{i0}$ rispettivamente, e la 2-forma $\beta = *\mathbf{B}$, di componenti β_{ij} ,

aggiunta del campo \mathbf{B} . Va osservato che $\mathbf{B} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{v})$ e che in componenti $(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{v}))_i = \beta_{ji} v^j$. (ii) Le (5.139) sono le equivalenti vettoriali delle condizioni di chiusura (5.118). Infatti queste ultime si traducono nella scrittura

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\beta} = 0, \\ \partial_0 \boldsymbol{\beta} + d\boldsymbol{\epsilon} = 0, \end{cases}$$

e quindi, operando con l'aggiunzione su entrambe,

$$\begin{cases} *d*\mathbf{B} = 0, \\ \partial_0 *\boldsymbol{\beta} + *d\boldsymbol{\epsilon} = 0. \end{cases}$$

Vista le definizioni sopra date di divergenza e di rotore si trovano le (5.139). (iii) L'espressione (5.140) del potenziale è la traduzione della (5.109), denotata con $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^\flat$ la 1-forma di componenti α_i corrispondente al vettore \mathbf{A} e posto

$$\phi = \alpha_0.$$

(iv) Infine le equazioni (5.141) sono equivalenti alle condizioni di esattezza (5.110). Infatti queste ultime, con le posizioni fatte, sono equivalenti a

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\alpha}, \\ \boldsymbol{\epsilon} = d\phi - \partial_0 \boldsymbol{\alpha}. \end{cases}$$

Operando sulla prima con l'aggiunzione, sulla seconda con l'operatore inverso di \flat , e ricordata la definizione di gradiente, si trovano le (5.141). \square

Una particella dotata di carica elettrica e immersa in un campo elettrico \mathbf{E} e in un campo magnetico \mathbf{B} (nel vuoto) è soggetta alla forza di Lorentz

$$\mathbf{F}_L = e \left(\mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v} \right),$$

dove c è la costante velocità della luce. è una forza del tipo (5.138). Le corrispondenti equazioni (5.139), con \mathbf{B} sostituito da $\frac{1}{c}\mathbf{B}$, costituiscono la prima coppia delle fondamentali **equazioni di Maxwell** dell'elettromagnetismo.¹³ Il vettore \mathbf{A} è detto **potenziale vettore**, la funzione ϕ **potenziale scalare**.¹⁴ Si noti che le equazioni di Maxwell (5.139) si sono qui dedotte solo come condizioni necessarie per l'esistenza di un potenziale, senza alcuna altra considerazione d'ordine fisico.

5.11 Sistemi lagrangiani

Nel paragrafo precedente si è visto che la dinamica di un sistema olonomo dotato di potenziale è “generata” da una funzione “caratteristica”: la lagrangiana $L = T + U$. Questa circostanza conduce alla seguente estensione del concetto di “dinamica”.

¹³ James Clerk Maxwell, 1831-1879.

¹⁴ Questi potenziali possono apparire di segno opposto in altri testi.

DEFINIZIONE 5.11.1 – Diciamo **sistema lagrangiano** una coppia (Q, L) costituita da una varietà differenziabile Q di dimensione n , detta **varietà delle configurazioni**, e da una funzione reale $L: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ detta **lagrangiana**. Il sistema lagrangiano si dice **tempo-indipendente** (brevemente, *t*-indipendente) se la lagrangiana si riduce ad una funzione $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$. La **dinamica** di un sistema lagrangiano è l'insieme delle curve su TQ soluzioni del sistema di $2n$ equazioni differenziali

$$(5.142) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad \bullet \end{cases}$$

I primi membri del secondo gruppo di queste equazioni,

$$(5.143) \quad [L]_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i},$$

prendono il nome di **binomi lagrangiani**. Le equazioni $(6.71)_2$ prendono il nome di **equazioni di Euler-Lagrange**. Si denotano al solito con (q^i) generiche coordinate su Q e con (q^i, \dot{q}^i) le corrispondenti coordinate su TQ (coordinate e velocità lagrangiane). La lagrangiana L è quindi localmente rappresentata da una funzione nelle $2n + 1$ variabili (q^i, \dot{q}^i, t) oppure nelle sole (q^i, \dot{q}^i) nel caso *t*-indipendente. Il sistema (6.71) è del primo ordine nelle funzioni incognite $q^i(t)$ e $\dot{q}^i(t)$. Le $(6.71)_2$, grazie alle $(6.71)_1$, si riducono a equazioni del secondo ordine nelle $q^i(t)$.

NOTA 5.11.1 – Affinché la definizione ora data di dinamica di un sistema lagrangiano abbia senso occorre verificare il carattere intrinseco delle equazioni di Euler-Lagrange (6.71) , cioè la loro indipendenza dalla scelta delle coordinate lagrangiane. Tuttavia, nel caso dei sistemi olonomi, il carattere intrinseco di queste equazioni è già implicitamente riconosciuto dal fatto che esse sono dedotte dal principio di D'Alembert-Lagrange, che ha carattere intrinseco. Nel prossimo paragrafo sarà comunque dimostrato che le equazioni di Euler-Lagrange, per una qualsiasi lagrangiana, sono equivalenti ad un altro principio di natura intrinseca: il principio della minima azione. •

NOTA 5.11.2 – In certi casi il sistema (6.71) , inteso come sistema del primo ordine nelle (q^i, \dot{q}^i) , può essere posto completamente in forma normale (le prime n equazioni lo sono già) cioè nella forma

$$(5.144) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \\ \frac{d\dot{q}^i}{dt} = f^i(q^h, \dot{q}^k, t). \end{cases}$$

Il sistema lagrangiano è allora un sistema dinamico rappresentato da un campo vettoriale \mathbf{X}_L , detto **campo lagrangiano**. Se la lagrangiana, e quindi i secondi membri del sistema

normale equivalente (6.73), non dipendono esplicitamente dal tempo, col che il sistema (6.73) è *autonomo*, questo campo vettoriale è definito sopra il fibrato tangente TQ . Se invece vi è dipendenza dal tempo, è definito sulla varietà prodotto $TQ \times \mathbb{R}$. In questo secondo caso infatti, seguendo la stessa tecnica vista per la dinamica di un punto, si introduce un tempo fittizio τ come ulteriore variabile e si aggiunge al sistema l'equazione $\frac{d\tau}{dt} = 1$. Quando un sistema lagrangiano è di questo tipo si possono applicare tutte le nozioni ed i teoremi relativi ai campi vettoriali, in particolare (sotto le solite ipotesi di regolarità) il teorema di Cauchy per cui, assegnato un atto di moto iniziale, risulta determinato un unico moto del sistema. •

DEFINIZIONE 5.11.2 – Una lagrangiana si dice **regolare** se è regolare la sua matrice hessiana rispetto alle velocità lagrangiane, cioè se è $\det[g_{ij}] \neq 0$, posto

$$(5.145) \quad g_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}. \quad \bullet$$

TEOREMA 5.11.1 – Se la lagrangiana è regolare il sistema (6.71) è riducibile a forma normale, cioè equivalente ad un sistema del tipo (6.73).

DIMOSTRAZIONE. Lo sviluppo dei binomi lagrangiani (primi membri delle $(6.71)_2$) porta alle seguenti equazioni (si tenga conto delle n equazioni $\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0,$$

che in generale non possono risolversi rispetto alle derivate delle (\dot{q}^i) . Se la lagrangiana è regolare ciò è possibile. Operando con la matrice inversa $[g^{ki}]$ si riconduce il sistema (6.71) alla forma normale

$$(5.146) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \\ \frac{d\dot{q}^k}{dt} = g^{ki} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^i} \right). \end{cases} \quad \square$$

NOTA 5.11.3 – Nel caso dei sistemi olonomi dotati di potenziale è $L = T + U$. Poiché è lineare nelle velocità, il potenziale U non interviene nell'hessiano (6.74) per cui

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}.$$

Questi elementi coincidono proprio con i coefficienti della parte omogenea quadratica dell'energia cinetica,

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + g_{i0} \dot{q}^i + \frac{1}{2} g_{00}.$$

Poiché, come si è osservato nella Nota 5.7.6, questa è una forma quadratica definita positiva, si ha $\det[g_{ij}] > 0$ e la lagrangiana è regolare. •

NOTA 5.11.4 – Si consideri una lagrangiana del tipo

$$(5.147) \quad L = \partial_0 F + \dot{q}^i \partial_i F$$

dove F è una funzione reale sopra $Q \times \mathbb{R}$ (quindi funzione delle coordinate lagrangiane e del tempo). Poiché L è lineare nelle velocità lagrangiane si ha identicamente $g_{ij} = 0$. Non è dunque una lagrangiana regolare. Si verifica che i binomi lagrangiani corrispondenti si annullano identicamente. Ciò significa che la dinamica di una tale lagrangiana è costituita da tutte le curve su Q . Di conseguenza, se ad una qualunque lagrangiana si aggiunge una lagrangiana del tipo (6.76) la dinamica non risulta alterata.¹⁵ •

5.12 Integrali primi dei sistemi lagrangiani

DEFINIZIONE 5.12.1 – Una funzione differenziabile $F: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un **integrale primo** di un sistema lagrangiano (Q, L) se è costante su tutte le soluzioni delle corrispondenti equazioni di Euler-Lagrange, cioè se in corrispondenza ad ogni soluzione vale la condizione

$$(5.148) \quad \frac{dF}{dt} = 0. \quad \bullet$$

Se il sistema lagrangiano è regolare, equivalente quindi ad un campo lagrangiano \mathbf{X}_L , si ricade nella solita definizione di integrale primo di un campo vettoriale. I teoremi seguenti mettono in evidenza due integrali primi tipici dei sistemi lagrangiani.

TEOREMA 5.12.1 – Se la lagrangiana è indipendente dal tempo allora la funzione

$$(5.149) \quad E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L$$

detta **energia**, è un integrale primo.

DIMOSTRAZIONE. Derivando totalmente rispetto al tempo si trova

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\dot{q}^i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\dot{q}^i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Facendo intervenire le equazioni di Euler-Lagrange si trova

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t},$$

per cui l'indipendenza dal tempo della lagrangiana, che equivale all'annullarsi identico della sua derivata parziale rispetto a t , implica

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad \square$$

¹⁵ Si veda anche la Nota 5.9.5.

NOTA 5.12.1 – Per un sistema scleronomo conservativo, dove il potenziale U è una funzione su Q (dipende solo dalle coordinate lagrangiane), la funzione E si riduce proprio all'**energia totale**

$$(5.150) \quad E = T - U.$$

Infatti, siccome l'energia cinetica è omogenea di grado 2 nelle velocità lagrangiane,¹⁶

$$(5.151) \quad \dot{q}^i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = 2T$$

e di conseguenza

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - T - U = T - U. \quad \bullet$$

DEFINIZIONE 5.12.2 – Dato un sistema lagrangiano (Q, L) ed un sistema di coordinate (q^i) sulla varietà Q , le funzioni

$$(5.152) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

prendono il nome di **momenti cinetici o impulsi**. Una coordinata q^i si dice **ignorabile** se essa non compare nella lagrangiana, cioè se si ha identicamente

$$(5.153) \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad \bullet$$

TEOREMA 5.12.2 – Il momento corrispondente ad una coordinata ignorabile è un integrale primo.

¹⁶ È bene ricordare a questo proposito il **teorema di Euler sulle funzioni omogenee**. Una funzione $F(v^i)$ di n variabili (v^i) si dice **omogenea di grado k** se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$F(\alpha v^i) = \alpha^k F(v^i).$$

Il teorema di Euler afferma che se $F(v^i)$ è una funzione omogenea di grado k allora si ha identicamente (somma sottintesa sull'indice ripetuto)

$$v^i \frac{\partial F}{\partial v^i} = k F.$$

L'energia cinetica è omogenea di grado 2 nelle v^i per cui la (5.151) può essere vista come conseguenza di questo teorema. Se F è omogenea di grado k allora le sue derivate parziali $\partial F / \partial v^i$ sono omogenee di grado $k - 1$. Infatti, derivando parzialmente l'uguaglianza precedente rispetto a v^j , risulta

$$v^i \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} = (k - 1) \frac{\partial F}{\partial v^j}.$$

Se in particolare è $k = 1$ si trova che

$$v^i \frac{\partial^2 F}{\partial v^i \partial v^j} = 0.$$

Di qui si trae che se una lagrangiana è omogenea di grado 1 nelle velocità allora essa è necessariamente non regolare, perché valgono le equazioni

$$\dot{q}^i g_{ij} = 0$$

con le (\dot{q}^i) non necessariamente nulle.

DIMOSTRAZIONE. Stante la definizione (5.152) le equazioni di Euler-Lagrange possono scriversi

$$(5.154) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Se una coordinata q^i è ignorabile, il secondo membro è identicamente nullo e quindi p_i è costante. \square

NOTA 5.12.2 – Per un sistema olonomo con potenziale $U = \alpha_0 + \alpha_i \dot{q}^i$ i momenti cinetici sono dati da

$$p_i = g_{ij} \dot{q}^j + g_{0i} + \alpha_i.$$

Per un punto libero e con potenziale indipendente dalla velocità i momenti cinetici p_i coincidono con le componenti covarianti della quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$: $p_i = m \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$. •

ESEMPIO 5.12.1 – Per un punto libero e soggetto ad un campo conservativo la lagrangiana è (in coordinate cartesiane ortonormali)

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z),$$

per cui $p_x = m \dot{x}$, ecc. Se la forza è perpendicolare all'asse z allora il potenziale U non dipende da z perché $F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$. Dunque anche la lagrangiana non dipende da z e il corrispondente momento cinetico p_z è un integrale primo. Si ritrova così l'integrale primo della quantità di moto rispetto ad una direzione. •

ESEMPIO 5.12.2 – Nel moto piano di un punto soggetto ad un campo centrale simmetrico la lagrangiana è (in coordinate polari)

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r).$$

La coordinata θ è ignorabile. Pertanto il corrispondente momento cinetico

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

è un integrale primo. Si ritrova così l'integrale primo delle aree. •

NOTA 5.12.3 – Nei due esempi precedenti gli integrali primi sono conseguenza di un'invarianza della lagrangiana: nel primo caso rispetto a traslazioni lungo una direzione, nel secondo rispetto a rotazioni intorno ad un punto. Anche l'integrale primo dell'energia è conseguenza di un'invarianza: rispetto alle *traslazioni temporali*. Da questo punto di vista il tempo t può essere considerato come coordinata ignorabile. Questi fatti lasciano intravedere una relazione generale tra l'esistenza di integrali primi e l'invarianza della lagrangiana rispetto a trasformazioni o *simmetrie* della varietà Q . •

ESEMPIO 5.12.3 – Il giroscopio pesante o trottola di Lagrange. Uno dei primi notevoli successi del metodo lagrangiano, in particolare rivolto alla ricerca di integrali primi, si ebbe nello studio del moto di un corpo rigido pesante. Considerato un corpo rigido con un punto fisso O , si prendano come coordinate lagrangiane i tre angoli di Euler (ψ, θ, ϕ) della terna principale d'inerzia $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ in O rispetto ad una terna fissa $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, secondo quanto stabilito nel §4.14. Le componenti (p, q, r) della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ secondo la terna $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono date dalle formule (4.142). Poiché

$$T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2),$$

con (A, B, C) momenti principali d'inerzia, utilizzando le suddette formule si trova

$$T = \frac{1}{2} (A (\cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi})^2 + B (-\sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \sin \theta \dot{\psi})^2 + C (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi})^2).$$

Quest'espressione si semplifica notevolmente nel caso in cui $A = B$, cioè nel caso di un corpo rigido simmetrico (detto anche **giroscopio**). Essendo $p^2 + q^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2$, risulta infatti

$$T = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + \frac{C}{2} (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi})^2.$$

Nel caso in cui il corpo rigido simmetrico intorno all'asse \mathbf{k} sia soggetto alla sola forza peso (come accade per una trottola), osservato che il baricentro G si trova sull'asse di simmetria, il potenziale è dato da

$$U = -m g \ell \cos \theta,$$

dove $\ell = |OG|$ (il versore \mathbf{c}_3 è verticale e orientato verso l'alto). La lagrangiana della trottola è pertanto

$$L = \frac{A}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2) + \frac{C}{2} (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi})^2 - m g \ell \cos \theta$$

Si osserva allora che ϕ e ψ sono coordinate ignorabili. Quindi i corrispondenti momenti cinetici

$$\begin{cases} p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = C (\cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi}) = C r, \\ p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \dot{\psi} + C \cos \theta \dot{\phi}, \end{cases}$$

sono integrali primi.¹⁷ Per l'energia totale si trova inoltre l'espressione

$$E = \frac{A}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(p_\psi - p_\phi \cos \theta)^2}{2 A \sin^2 \theta} + \frac{p_\phi^2}{2C} + m g \ell \cos \theta.$$

La presenza di questi tre integrali primi consente di riconoscere facilmente alcune interessanti proprietà del moto di una trottola. Infatti dall'integrale dell'energia si trae un'equazione di Weierstrass per l'angolo di nutazione θ , angolo che l'asse della trottola forma

¹⁷ Che la componente r secondo l'asse di simmetria \mathbf{k} della velocità angolare sia un integrale primo segue immediatamente dalla terza delle equazioni di Euler, $C \dot{r} = (A - B) p q + Z$, osservato che la componente Z rispetto a tale asse del momento \mathbf{M}_O della forza peso è nulla.

con la verticale. Meglio ancora, se si pone $x = \cos \theta$, si vede che l'integrale dell'energia si traduce nell'equazione di Weierstrass

$$\dot{x}^2 = \Phi(x), \quad \Phi(x) = (1 - x^2)(a - bx) - (c - dx)^2,$$

con le costanti (a, b, c, d) date da

$$a = \frac{1}{A} \left(2E - \frac{p_\phi^2}{C} \right), \quad b = \frac{2}{A} m g \ell, \quad c = \frac{p_\psi}{A}, \quad d = \frac{p_\phi}{A}.$$

La funzione $\Phi(x)$ è un polinomio di terzo grado che tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ (essendo $b > 0$ con $\ell \neq 0$). Le costanti di moto ammissibili devono essere tali da non produrre tutti valori negativi di $\Phi(x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ (perché $x = \cos \theta$). Siccome $\Phi(\pm 1) = -(c \mp d)^2 \leq 0$, escludendo i casi in cui si hanno degli zeri agli estremi (si osservi che gli angoli di Euler ψ e ϕ non sono definiti per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$), si devono avere almeno due radici (x_1, x_2) all'interno di quest'intervallo (distinte o coincidenti). Pertanto l'angolo di nutazione, fatta eccezione per i casi esclusi, varia periodicamente tra i due valori (θ_1, θ_2) determinati da queste radici. Dai due integrali primi dei momenti cinetici si possono invece ricavare la velocità di precessione $\dot{\psi}$ e la velocità di rotazione propria $\dot{\phi}$ in funzione di θ . Risulta:

$$\dot{\psi} = \frac{c - dx}{1 - x^2}, \quad \dot{\phi} = e + \frac{x(dx - c)}{1 - x^2},$$

posto ancora

$$e = \frac{p_\phi}{C} = \frac{A}{C} d.$$

Per quel che riguarda il moto di precessione si hanno tre casi, a seconda che lo zero di $\dot{\psi}$, $x_0 = \frac{c}{d}$, si trovi all'esterno o all'interno dell'intervallo (x_1, x_2) o coincida con uno degli estremi. Se si trova all'esterno, $\dot{\psi}$ non cambia di segno e il moto di precessione è monotono; il punto P intersezione dell'asse della trottola con la sfera unitaria di centro O descrive una curva di tipo sinusoidale compresa tra i due meridiani (θ_1, θ_2) . Se è interno, siccome $\dot{\psi}$ cambia di segno, si ha invece un moto "inanellato", cioè di tipo cicloidale accorciato. Se coincide con uno degli estremi, il moto di precessione non si inverte mai ma ha degli istanti di arresto, per cui la curva descritta dall'intersezione P presenta delle cuspidi. Infine, il caso in cui i due zeri coincidono corrisponde a un moto di precessione regolare. Infatti in questo caso θ è costante e di conseguenza anche $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ sono costanti. Questi moti di precessione sono *stabili*, nel senso che una piccola perturbazione non produce sensibili effetti: infatti una piccola variazione delle costanti di moto non può che produrre uno dei tre casi precedenti, con i due meridiani ravvicinati. •

5.13 Il principio dell'azione stazionaria

Sia Ω l'insieme di tutte le n -ple $(q^i(t)) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ di funzioni reali di classe C^k sopra intervalli contenenti un prefissato intervallo chiuso limitato $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Chiamiamo **funzionale** un'applicazione

$$\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

che ad ogni n -pla di funzioni fa corrispondere un numero reale. Un funzionale ϕ si dice **differenziabile** nel “punto” $(q^i(t)) \in \Omega$ se per ogni scelta degli incrementi o **variazioni** $\delta q^i(t)$ tali che $(q^i(t) + \delta q^i(t)) \in \Omega$ sussiste un’uguaglianza del tipo

$$(5.155) \quad \phi(q^i + \delta q^i) = \phi(q^i) + \delta\phi(q^i, \delta q^i) + R,$$

con $\delta\phi$ funzionale lineare delle δq^i ed R funzionale di “ordine superiore” in tali incrementi. Con ciò si vuol dire che se si considera una famiglia di variazioni del tipo

$$(5.156) \quad \delta q^i = \varepsilon \eta^i,$$

con $(\eta^i(t)) \in \Omega$ n -pla fissata a piacere ed ε parametro reale, osservato che risulta definita la funzione reale

$$(5.157) \quad F(\varepsilon) = \phi(q^i + \varepsilon \eta^i),$$

allora il funzionale è differenziabile se per ogni scelta delle η^i risulta

$$(5.158) \quad F(\varepsilon) = F(0) + (A + \sigma(\varepsilon)) \varepsilon$$

con A costante e $\sigma(\varepsilon)$ infinitesimo per $\varepsilon \rightarrow 0$. Dal confronto della (5.155) con la (5.158) segue che

$$(5.159) \quad A\varepsilon = \delta\phi(q^i, \varepsilon \eta^i).$$

Il funzionale $\delta\phi$ prende il nome di **variazione prima** del funzionale ϕ in $(q^i) \in \Omega$. Poiché dalla (5.158) segue

$$A = \left(\frac{dF}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0},$$

per la (5.159) risulta

$$(5.160) \quad \delta\phi = \varepsilon \left(\frac{dF}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

Questa formula consente di calcolare la variazione prima di ϕ attraverso la funzione F costruita con una qualsiasi famiglia di incrementi del tipo (5.156).

Una classe importante di funzionali è costituita dai **funzionali d’azione**. Sia $L = L(q^i, \dot{q}^i, t)$ una funzione reale di classe C^2 in un dominio aperto $D \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ (di coordinate (q^i, \dot{q}^i, t)) tale da rendere definito l’integrale

$$(5.161) \quad \boxed{\phi_L(q^i(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)) dt}$$

per ogni n -pla di funzioni reali $(q^i(t))$ di classe C^1 sopra $[t_1, t_2]$ (intendendo con \dot{q}^i le derivate di queste funzioni). L’integrale (5.161) definisce un funzionale sopra l’insieme Ω di tali n -ple, funzionale che chiamiamo **azione** associata alla funzione L .

La funzione $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ può intendersi come rappresentazione locale di una funzione $L: TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (di classe C^2 almeno), dove Q è una varietà differenziabile di coordinate locali (q^i) . Il funzionale ϕ_L è allora definito sull’insieme delle curve sopra la varietà Q i cui intervalli di definizione contengono l’intervallo chiuso $[t_1, t_2]$.

TEOREMA 5.13.1 – *Il funzionale d'azione ϕ_L è differenziabile e la sua variazione prima è*

$$(5.162) \quad \delta\phi_L = - \int_{t_1}^{t_2} [L]_i \delta q^i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{t_1}^{t_2}$$

posto

$$(5.163) \quad [L]_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

DIMOSTRAZIONE. Occorre far ricorso al teorema sulla derivazione delle funzioni integrali: se

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

allora

$$\frac{dF}{dx} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x).$$

Applichiamo questa formula alla funzione $F(\varepsilon)$, definita come nella (5.157) per il funzionale (5.161):

$$F(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i + \varepsilon \eta^i, \dot{q}^i + \varepsilon \dot{\eta}^i) dt.$$

Siccome gli estremi d'integrazione sono fissi si ha semplicemente

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \eta^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\eta}^i \right) dt.$$

Valendo l'uguaglianza

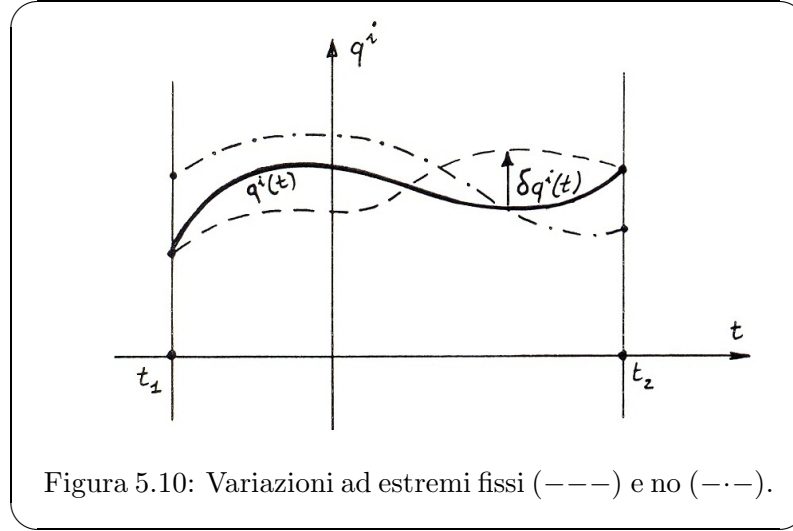
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\eta}^i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta^i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \eta^i,$$

risulta

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \eta^i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta^i \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Di qui, moltiplicando per ε in accordo con la (5.160) e tenuto conto della (5.156), si ottiene la (5.162). Si osservi che questo ragionamento non dipende dalla scelta della famiglia di variazioni del tipo (5.156). \square

DEFINIZIONE 5.13.1 – *Una variazione $(\delta q^i(t))$ si dice ad **estremi fissi** se $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$. •*



TEOREMA 5.13.2 – Le funzioni $(q^i(t))$ per le quali si ha

(5.164)

$$\delta\phi_L = 0$$

per ogni variazione ad estremi fissi sono tutte e sole le soluzioni delle equazioni differenziali

(5.165)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla (5.162) segue che per ogni variazione ad estremi fissi

$$\delta\phi_L = - \int_{t_1}^{t_2} [L]_i \delta q^i dt.$$

è ovvio che $[L]_i = 0$ implica $\delta\phi_L = 0$. Viceversa, se $\delta\phi_L = 0$ per ogni δq^i , con $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$, allora necessariamente $[L]_i = 0$ per ogni indice i . Infatti se fosse per esempio $[L]_1$ positivo in un certo punto t_* , quindi in tutto un suo intorno $I_* \subset [t_1, t_2]$, prendendo una variazione con $\delta q^2 = \dots = \delta q^n = 0$ e δq^1 funzione di classe C^1 non negativa con supporto contenuto in I_* , risulterebbe chiaramente $\delta\phi_L < 0$ e non $\delta\phi_L = 0$: assurdo. \square

Le curve $q^i(t)$ soddisfacenti al Teorema 5.13.2, quindi le soluzioni del sistema (5.165), prendono il nome di **estremali** o **punti critici** del funzionale d'azione ϕ_L . Si dice anche che esse rendono **stazionario** il funzionale.

È notevole il fatto che le equazioni (5.165) coincidono proprio con le equazioni di Euler-Lagrange del sistema lagrangiano (Q, L) . Si può allora affermare che la dinamica di un sistema lagrangiano è costituita da tutte e sole le curve sulla varietà Q che sono estremali del funzionale ϕ_L , per variazioni ad estremi fissi. Questa proprietà, assunta come postulato

della meccanica, prende il nome di **principio dell'azione stazionaria** (o anche **della minima azione**).

Questo principio, sostituibile a quello di D'Alembert-Lagrange nel caso di un sistema olonomo a vincoli perfetti e soggetto a sollecitazioni attive dotate di potenziale (dove la lagrangiana è $L = T + U$), rientra in una classe di principi di *stazionarietà* o di *minimo* assunti a fondamento di molte teorie, per esempio il **principio di Fermat** per la propagazione della luce.¹⁸

NOTA 5.13.1 – Su di una varietà riemanniana (Q, g) è del tutto naturale considerare il funzionale

$$(5.166) \quad \phi_G = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j} dt,$$

di lagrangiana

$$(5.167) \quad G = \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}.$$

Questo funzionale associa ad ogni curva parametrizzata su Q , definita in un intervallo contenente $[t_1, t_2]$, la lunghezza dell'arco da essa descritto tra i due punti estremi corrispondenti ai valori t_1 e t_2 del parametro. Infatti G è il *modulo* o *lunghezza* del vettore tangente $v = (\dot{q}^i)$ alla curva. Chiamiamo **geodetica** ogni curva su Q estrema del funzionale ϕ_G . Le geodetiche sono dunque le curve a lunghezza stazionaria (eventualmente minima) rispetto a curve *prossime* aventi gli stessi estremi. Esaminiamo il legame tra il funzionale ϕ_G ed il funzionale

$$(5.168) \quad \phi_T = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j dt,$$

di lagrangiana

$$(5.169) \quad T = \frac{1}{2} G^2 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Questa è la lagrangiana dei moti spontanei di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, cioè di quei moti relizzati in assenza di forze attive ($U = 0$) per cui la lagrangiana coincide con l'energia cinetica T (la quale a sua volta coincide con l'energia totale, che è costante di moto). Le condizioni di stazionarietà $\delta\phi_G = 0$ e $\delta\phi_T = 0$ non sono equivalenti in senso stretto, poiché non producono le stesse curve estremali. Infatti, mentre la lagrangiana T è regolare e quindi produce equazioni di Euler-Lagrange soddisfacenti al teorema di esistenza ed unicità, non lo è invece la lagrangiana G , che è una funzione omogenea di grado 1 nelle velocità. La non unicità delle soluzioni, con posizione e velocità iniziale assegnate, è resa evidente dal fatto che l'integrale (5.166) è invariante rispetto alla parametrizzazione della curva, cioè che la stessa traiettoria su Q può essere percorsa, sempre nell'intervallo $[t_1, t_2]$, con una qualunque legge temporale e quindi con una qualunque velocità, senza per questo mutare l'integrale (5.166). Se ci si limita a considerare

¹⁸ Pierre de Fermat, 1601-1665.

le estremali percorse con velocità costante, cioè se oltre alla condizione di stazionarietà $\delta\phi_G = 0$ si impone il vincolo

$$G = \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j} = \text{costante},$$

allora le estremali di ϕ_G coincidono con le estremali di ϕ_T . Infatti le equazioni di Euler-Lagrange corrispondenti a G sono

$$\frac{d}{dt} \frac{g_{ij} \dot{q}^j}{G} - \frac{1}{2G} \partial_i g_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k = 0.$$

Se si impone il vincolo della velocità costante si trovano le equazioni

$$\frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{q}^j) - \frac{1}{2} \partial_i g_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k = 0,$$

che sono proprio le equazioni di Euler-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana T e che si riducono alle equazioni delle geodetiche. •

5.14 Cenni di calcolo delle variazioni

Il Teorema 5.13.2 è il **teorema fondamentale del calcolo delle variazioni**. Questo teorema, insieme ad alcune sue varianti ed estensioni, è infatti la base su cui poggia la teoria dei massimi e minimi dei funzionali d'azione (**calcolo delle variazioni**).

Accenniamo a due problemi classici risolti con tale calcolo, *il problema degli isoperimetri* e *il problema della catenaria*. A questo scopo è necessario l'utilizzo di una variante al teorema fondamentale, che tiene conto di una eventuale condizione supplementare, o **vincolo**, sulle variazioni δq^i . Questo vincolo è espresso dall'invarianza di un integrale del tipo

$$(5.170) \quad \phi_V = \int_{t_1}^{t_2} V(q^i, \dot{q}^i, t) dt$$

quindi dalla condizione

$$(5.171) \quad \delta\phi_V = 0.$$

Si può dimostrare che

TEOREMA 5.14.1 – *Le funzioni $q^i(t)$ che rendono stazionario un funzionale d'azione ϕ_L con variazioni ad estremi fissi soddisfacenti al vincolo (5.171) sono tutte e sole quelle che rendono stazionario il funzionale d'azione ϕ_{L^*} associato alla lagrangiana*

$$(5.172) \quad L^* = L + \lambda V,$$

dove λ è un parametro reale costante, detto **moltiplicatore di Lagrange**.

Ciò significa che il funzionale da considerarsi è

$$(5.173) \quad \phi_{L^*} = \phi_L + \lambda \phi_V,$$

e che quindi le equazioni di Euler-Lagrange sono

$$(5.174) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L^*}{\partial q^i} = 0,$$

con la lagrangiana L^* data dalla (5.172) e con la condizione $d\lambda/dt = 0$.

Questo teorema è analogo al teorema, pure dovuto a Lagrange, sui **massimi e minimi vincolati** o **condizionati** di una funzione reale a più variabili: *i punti di stazionarietà (cioè i punti critici) di una funzione $F(x^\alpha)$ soddisfacenti ad un'equazione di vincolo $V(x^\alpha) = 0$ sono i punti critici della funzione $F^* = F + \lambda V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.* Una sua dimostrazione “geometrica” è la seguente. Interpretata l'equazione del vincolo come equazione di una superficie S nello spazio delle (x^α) , la condizione di stazionarietà condizionata si traduce nella stazionarietà della restrizione $F|_S$ della funzione F alla superficie S , cioè alla condizione $\langle \mathbf{v}, dF \rangle = 0$ per ogni vettore \mathbf{v} tangente a S , quindi per ogni vettore tale che $\langle \mathbf{v}, dV \rangle = 0$. Ciò equivale a dire che su ogni punto di S i differenziali dF e dV (ovvero i rispettivi gradienti) sono dipendenti (ovvero paralleli), cioè che deve esistere un λ per cui $dF + \lambda dV = 0$, ovvero $d(F + \lambda V) = 0$, inteso $d\lambda = 0$.

ESEMPIO 5.14.1 – Il problema degli isoperimetri. Si vuole stabilire quali siano le curve piane chiuse che a parità di lunghezza racchiudono aree massime. Per far questo ci si può limitare inizialmente a considerare il caso di una curva chiusa costituita da un intervallo $[x_1, x_2]$ sull'asse x e dal grafico di una funzione $y = f(x)$ di classe C^2 , nulla agli estremi. Il funzionale ϕ_L da rendere stazionario è quello dell'area,

$$\phi_L = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx,$$

il quale quindi corrisponde alla lagrangiana

$$L(x, y, y') = y.$$

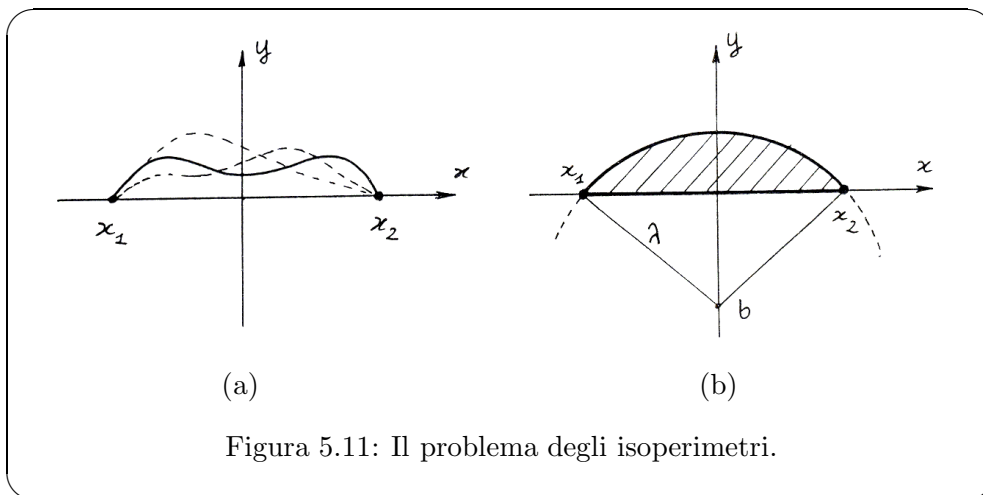
Il vincolo è rappresentato dalla costanza della lunghezza della curva cioè del funzionale

$$\phi_V = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} \, dx,$$

il quale corrisponde alla lagrangiana

$$V(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Rispetto alle notazioni generali prima usate abbiamo nel caso presente $n = 1$, $t = x$ (variabile indipendente), $q = y$ e $\dot{q} = v = y'$. Si tratta quindi effettivamente di un problema con variazioni vincolate ed a estremi fissi – Figura 5.11 (a).



La lagrangiana da considerarsi è allora

$$L^* = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

e l'equazione di Euler-Lagrange è di conseguenza

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial y'} - \frac{\partial L^*}{\partial y} = \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - 1 = 0.$$

Posto $c = \frac{1}{\lambda}$, segue che

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = cx,$$

modulo una costante additiva, che riteniamo nulla, alla quale corrisponde una inessenziale traslazione lungo l'asse x . Dalla formula precedente segue

$$y' = \frac{cx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}},$$

quindi, con semplice integrazione,

$$y = b - \frac{1}{c} \sqrt{1 - c^2 x^2}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Elevando al quadrato si conclude che la curva cercata ha equazione

$$(y - b)^2 + x^2 = \lambda^2.$$

Si tratta di una circonferenza di raggio λ – Figura 5.11 (b). Abbiamo allora dimostrato che le curve che risolvono il problema degli isoperimetri sono gli archi di circonferenza, in particolare che le curve regolari chiuse del piano che a parità di lunghezza racchiudono l'area maggiore sono le circonferenze. •

ESEMPIO 5.14.2 – La catenaria. Si vuole stabilire quale sia la curva descritta da un cavo inestendibile e omogeneo (per esempio una catena sottile) appeso a due estremi fissi, in equilibrio sotto la sola azione della forza peso. Si tratta di un classico problema di statica. Si può far ricorso al **principio di Torricelli**¹⁹ secondo il quale in condizioni di equilibrio il baricentro della catena occupa la più bassa posizione possibile. Questo principio si traduce nell'equazione variazionale

$$\delta z_G = 0.$$

La quota z_G del baricentro è il funzionale (la catena è supposta omogenea e di massa unitaria)

$$z_G = \phi_L = \int_{x_1}^{x_2} z \, ds = \int_{x_1}^{x_2} z \sqrt{1 + z'^2} \, dx$$

corrispondente alla lagrangiana

$$L(x, z, z') = z \sqrt{1 + z'^2},$$

considerata la curva $z = z(x)$ descritta dalla catena sul piano (x, z) di asse verticale z . Il vincolo è ancora rappresentato dall'invarianza della lunghezza, quindi del tipo considerato nell'esempio precedente. Dunque la lagrangiana del problema è

$$L^* = (z + \lambda) \sqrt{1 + z'^2}.$$

Tuttavia, con la sostituzione $z + \lambda \rightarrow z$ corrispondente ad una traslazione verticale, ci si riduce a considerare la lagrangiana

$$L^* = z \sqrt{1 + z'^2}$$

la cui equazione di Euler-Lagrange è

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial z'} - \frac{\partial L^*}{\partial z} = \frac{d}{dx} \left(\frac{zz'}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) - \sqrt{1 + z'^2} = 0.$$

Appare evidente la soluzione

$$z = \frac{1}{a} \cosh a(x - b),$$

perché è

$$1 + z'^2 = 1 + \sinh^2 a(x - b) = \cosh^2 a(x - b) = a^2 z^2$$

e quindi

$$\frac{zz'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{1}{a} z',$$

per cui l'equazione differenziale è chiaramente soddisfatta. Tenendo conto che è sempre disponibile una traslazione verticale, le curve estremali del problema variazionale originario sono le funzioni

$$z = \frac{1}{a} \cosh a(x - b) - \lambda.$$

Le costanti (a, b, λ) devono determinarsi assegnate le posizione degli estremi della catena. è comunque dimostrato che la catenaria è un arco di coseno iperbolico. •

¹⁹ Evangelista Torricelli, 1608-1647.

5.15 Equilibrio e stabilità

Le considerazioni generali svolte al §1.15 sulla stabilità dei punti critici (o punti singolari) di un campo vettoriale su di uno spazio affine, avendo carattere “locale”, possono adattarsi al caso di un campo vettoriale lagrangiano \mathbf{X}_L corrispondente ad un sistema olonomo conservativo, le cui equazioni del primo ordine sono del tipo

$$(5.175) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \\ \frac{d\dot{q}^i}{dt} = F^i - \Gamma_{hj}^i \dot{q}^h \dot{q}^j, \end{cases}$$

con

$$(5.176) \quad F^i = g^{ij} \partial_j U.$$

I punti critici di \mathbf{X}_L sono i punti di TQ in cui $\mathbf{X}_L = 0$ e quindi i punti in cui si annullano simultaneamente i secondi membri del sistema (5.175). Essi sono pertanto caratterizzati dalle condizioni

$$(5.177) \quad F^i = 0, \quad \dot{q}^i = 0.$$

Si può allora affermare che:

TEOREMA 5.15.1 – *I punti critici del campo lagrangiano \mathbf{X}_L sono gli atti di moto nulli corrispondenti alle configurazioni in cui si annullano le forze lagrangiane.*

Per quanto visto al §1.15, segue che se il sistema si trova inizialmente nelle condizioni (5.177) vi resta indefinitamente. è allora naturale dare la

DEFINIZIONE 5.15.1 – *Una configurazione $q_0 \in Q$ è **configurazione di equilibrio** se, posto il sistema in quella configurazione con atto di moto nullo (cioè con tutti i suoi punti a velocità nulla), esso vi permane indefinitamente. •*

Risulta di conseguenza dimostrato che:

TEOREMA 5.15.2 – *Una configurazione $q_0 \in Q$ è di equilibrio se e solo se in essa si annullano le forze lagrangiane, ovvero se e solo se è punto critico (o di “stazionarietà”) del potenziale: $dU(q_0) = 0$.*

Per giustificare questa seconda parte dell’enunciato va osservato che $F^i = 0$ equivale a

$$(5.178) \quad \frac{\partial U}{\partial q^i} = 0.$$

Le configurazioni di equilibrio si determinano pertanto risolvendo il sistema di n equazioni “algebriche” (5.178): ogni n -pla (q_0^i) che lo soddisfa rappresenta una configurazione di equilibrio.

Adattiamo ora al caso di un sistema olonomo (del tipo qui considerato) la nozione di stabilità data dalla Definizione 1.15.1.

DEFINIZIONE 5.15.2 – Una configurazione $q_0 \in Q$ è di **equilibrio stabile** (risp. **instabile**) se il corrispondente atto di moto nullo è punto critico stabile (risp. instabile) del campo \mathbf{X}_L . •

La stabilità di una configurazione di equilibrio può essere riconosciuta attraverso il **teorema di Lagrange-Dirichlet**.²⁰

TEOREMA 5.15.3 – Una configurazione di equilibrio è stabile se in essa il potenziale U ha un massimo locale in senso stretto (ovvero se l'energia potenziale $V = -U$ ha un minimo locale in senso stretto).

DIMOSTRAZIONE. Si può applicare il criterio di Lyapunov al punto critico del campo \mathbf{X}_L , corrispondente all'atto di moto nullo nella configurazione q_0 considerata, prendendo come funzione di Lyapunov l'energia totale $E = T - U = T + V$, che è un integrale primo (Nota 1.15.1). Se infatti in q_0 l'energia potenziale V ha un minimo stretto, supposto $V(q_0) = 0$, nell'intorno di q_0 (escluso q_0) si ha $V > 0$. Per l'atto di moto nullo si ha ovviamente $T = 0$, quindi nel suo intorno si ha $E = V + T > 0$ non potendo essere l'energia cinetica negativa. Pertanto E ha un minimo stretto. □

Si noti che la condizione di massimo stretto del potenziale è una condizione solo sufficiente per la stabilità. Per ottenere una condizione necessaria, e quindi invertire il teorema, occorre aggiungere ulteriori ipotesi sul potenziale. Tra i vari criteri di instabilità o “teoremi inversi di Lagrange-Dirichlet” che sono stati dimostrati va ricordato il **criterio di instabilità di Cetaiev** (1930):

TEOREMA 5.15.4 – Se una configurazione di equilibrio non è di massimo stretto del potenziale e se tale fatto è riconoscibile dall'analisi dei valori delle derivate parziali del potenziale in quella configurazione allora l'equilibrio è instabile.²¹

Per applicare questo criterio occorre osservare che il “carattere” di un punto stazionario di una funzione (cioè l'essere un minimo o un massimo o una sella) è in genere deducibile dall'analisi del suo sviluppo di Taylor in quel punto, quindi in prima istanza dalle sue derivate seconde (le derivate prime sono nulle)

$$(5.179) \quad H_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q^i \partial q^j} \right)_{q_0}$$

Queste formano una matrice simmetrica, detta **matrice hessiana**, e quindi definiscono una forma quadratica \mathbf{H} , dalla cui segnatura (p, q) è possibile, salvo in un caso, determinare il carattere della configurazione di equilibrio:

²⁰ Gustav Peter Lejeune Dirichlet, 1805-1859.

²¹ Come precisato da studi recenti dei matematici russi Koslov e Palamodov, si richiede la riconoscibilità dell'esistenza del minimo stretto dall'analisi del primo termine omogeneo non identicamente nullo dello sviluppo di Taylor del potenziale.

- (a) Se la segnatura è $(n, 0)$, cioè se la forma quadratica è definita positiva, si ha in q_0 un *minimo locale stretto* del potenziale e di conseguenza l'equilibrio è instabile per il criterio di Cetaiev.
- (b) Se la segnatura è $(0, n)$, cioè se la forma quadratica è definita negativa, si ha un *massimo locale stretto* e l'equilibrio è stabile per il criterio di Lagrange-Dirichlet.
- (c) Se la segnatura è (p, q) con p e q non entrambi nulli non si ha *né massimo né minimo* (è indifferente il fatto che la matrice $[H_{ij}]$ sia o no singolare) e l'equilibrio è instabile per il criterio di Cetaiev.
- (d) Se la matrice hessiana è singolare ($H = \det[H_{ij}] = 0$) e la segnatura è $(p, 0)$ o $(0, q)$, allora occorre passare all'esame delle derivate parziali di ordine superiore.

NOTA 5.15.1 – Calcolo della segnatura di una forma quadratica. La segnatura di una forma quadratica si può facilmente calcolare col metodo seguente. Data la matrice quadrata $\mathbf{H}_n = [H_{ij}]$ delle sue componenti rispetto ad una *qualunque* base, si sceglie una *qualunque* successione $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_{n-1})$ di sue sottomatrici quadrate principali di ordine crescente da 1 a $n-1$, ciascuna contenuta nella successiva (una sottomatrice quadrata è *principale* se la sua diagonale principale è contenuta nella diagonale principale della matrice completa \mathbf{H}_n). Si esamina quindi la successione degli $n+1$ numeri

$$(5.180) \quad 1, \mathbf{H}_1, \det \mathbf{H}_2, \dots, \det \mathbf{H}_{n-1}, \det \mathbf{H}_n.$$

Allora il numero q della segnatura (p, q) di \mathbf{H} (vale a dire il numero dei vettori a norma negativa in una base canonica rispetto a \mathbf{H}) è uguale al numero delle variazioni di segno degli elementi di questa successione, dalla quale vanno tolti gli eventuali zeri. Il numero p (dei vettori a norma positiva di una base canonica) si trae dall'uguaglianza $p + q = r$ dove r è il rango della matrice \mathbf{H}_n , cioè il massimo ordine delle sue sottomatrici quadrate a determinante non nullo. Può accadere che la matrice hessiana $[H_{ij}]$ risulti diagonale, cioè che si abbia $H_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Allora la segnatura (p, q) è data dal numero p degli elementi H_{ii} positivi e dal numero q di quelli negativi. •

5.16 Piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile

Si consideri una configurazione di equilibrio stabile q_0 , in cui il potenziale ha un massimo stretto, con matrice hessiana regolare, $\det[H_{ij}] \neq 0$. Questa condizione di regolarità non dipende dalla scelta delle coordinate (q^i) nell'intorno di q_0 . Si supponga inoltre il potenziale U di classe C^3 almeno, nell'intorno di q_0 . In questo caso diciamo che q_0 è una configurazione di **equilibrio stabile regolare** o **non degenerare**. Nell'ambito della teoria delle vibrazioni la matrice $[H_{ij}]$ viene chiamata **matrice di rigidità**. Se le coordinate lagrangiane sono scelte in modo da annullarsi tutte in q_0 e se inoltre si pone $U(q_0) = 0$, allora per la formula di Taylor (con resto di Lagrange) il potenziale U è approssimabile nell'intorno di q_0 dal polinomio di secondo grado omogeneo nelle (q^i)

$$(5.181) \quad \tilde{U} = \frac{1}{2} H_{ij} q^i q^j.$$

(in q_0 si annullano anche le derivate prime di U), a valori sempre negativi (salvo che per le q^i tutte nulle). Per l'energia cinetica si può d'altra parte considerare l'approssimazione

$$(5.182) \quad T = \tilde{T} + \dots = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \dots,$$

posto

$$(5.183) \quad M_{ij} = g_{ij}(q_0).$$

Alla matrice quadrata simmetrica $[M_{ij}]$, chiamata **matrice di massa**, corrisponde una forma quadratica \mathbf{M} definita positiva (l'energia cinetica nella configurazione q_0). Con le approssimazioni (5.181) e (5.182) del potenziale e dell'energia cinetica le equazioni di Lagrange si riducono a

$$(5.184) \quad M_{ij} \ddot{q}^j - H_{ij} q^j = 0.$$

Si noti bene che le matrici $[M_{ij}]$ e $[H_{ij}]$ sono costanti. Queste equazioni prendono il nome di **equazioni di Lagrange linearizzate** nella configurazione di equilibrio q_0 . Le sue soluzioni descrivono le cosiddette **piccole oscillazioni** del sistema nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile. Anche se la questione richiederebbe un'analisi rigorosa, è intuibile che queste soluzioni sono tanto più "vicine" alle soluzioni esatte (cioè delle equazioni di Lagrange non linearizzate) quanto più "piccoli" sono i valori iniziali dell'energia cinetica e delle coordinate. Il sistema di equazioni differenziali (5.184) si può integrare trasformandolo con un opportuno cambiamento di coordinate in un sistema di n equazioni *separate*, coinvolgenti cioè ciascuna una singola coordinata. Il procedimento di trasformazione è suggerito dalla teoria delle forme bilineari negli spazi euclidei. Si consideri il sistema di equazioni agli autovettori

$$(5.185) \quad (H_{ij} - x M_{ij}) v^j = 0$$

e la corrispondente equazione caratteristica

$$(5.186) \quad \det [H_{ij} - x M_{ij}] = 0.$$

Per il teorema sulle forme bilineari simmetriche negli spazi strettamente euclidei (qui la matrice di massa svolge il ruolo di tensore metrico), essendo la forma quadratica \mathbf{H} definita negativa, l'equazione caratteristica (5.186) ammette n radici reali *negative* $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Risultano allora determinati n numeri *positivi* $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, detti **pulsazioni proprie** o **caratteristiche**, tali che

$$(5.187) \quad \lambda_1 = -\omega_1^2, \quad \lambda_2 = -\omega_2^2, \quad \dots, \quad \lambda_n = -\omega_n^2.$$

Per ogni autovalore λ_k si consideri un corrispondente autovettore v_k . Le sue componenti (v_k^j) sono soluzioni del sistema

$$(5.188) \quad (H_{ij} - \lambda_k M_{ij}) v_k^j = 0.$$

In tal modo si può costruire una base di autovettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$. L'indipendenza di questi autovettori equivale alla regolarità della matrice delle componenti $[v_k^j]$: $\det[v_k^j] \neq 0$. Ciò posto, si considerino nuove coordinate (s^i) legate alle (q^i) dalle relazioni lineari (invertibili)

$$(5.189) \quad q^j = v_k^j s^k.$$

Tenuto conto della (5.188) si ha

$$\begin{cases} M_{ij} \ddot{q}^j = M_{ij} v_k^j \ddot{s}^k, \\ H_{ij} q^j = H_{ij} v_k^j s^k = \lambda_k M_{ij} v_k^j s^k, \end{cases}$$

e le equazioni di Lagrange linearizzate (5.184) diventano

$$(5.190) \quad M_{ij} v_k^j (\ddot{s}^k - \lambda_k s^k) = 0.$$

Poiché

$$\det[M_{ij} v_k^j] = \det[M_{ij}] \det[v_k^j] \neq 0,$$

il sistema di equazioni (5.190) è equivalente alle n equazioni “separate”

$$(5.191) \quad \ddot{s}^k + \omega_k^2 s^k = 0 \quad (k \text{ indice non sommato})$$

ciascuna coinvolgente una sola funzione incognita s^k . Ognuna di queste è un'**equazione del moto armonico** ed ammette un integrale generale del tipo

$$(5.192) \quad s^k(t) = A_k \sin(\omega_k t + \phi_k),$$

con A_k e ϕ_k costanti arbitrarie (*ampiezza e fase*). In conclusione:

TEOREMA 5.16.1 – *I moti di un sistema olonomo conservativo nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile regolare sono la composizione di n moti armonici secondo le autodirezioni della matrice di rigidità rispetto alla matrice di massa, con pulsazioni date dalle radici quadrate dei valori assoluti degli autovalori.*

Le autodirezioni vengono anche dette **modi**.

Capitolo 6

Meccanica hamiltoniana

La meccanica hamiltoniana è la naturale evoluzione della meccanica lagrangiana. Trae le sue origini dagli studi di ottica geometrica di William Rowan Hamilton (1805-1865) e dall'opera di Siméon Denis Poisson (1781-1840), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) e Joseph Liouville (1809-1882), sviluppandosi fino ai nostri giorni con un cospicuo corredo di risultati raggiunti e di problematiche aperte.

Mentre la meccanica lagrangiana opera sulle varietà delle configurazioni dei sistemi olonomi e sui corrispondenti fibrati tangenti, consentendo tra l'altro di interpretare le equazioni della dinamica dei sistemi olonomi come naturale estensione alle varietà riemanniane delle equazioni della dinamica del punto nello spazio euclideo, la meccanica hamiltoniana opera invece inizialmente sui fibrati cotangenti delle varietà delle configurazioni, avvalendosi della struttura "simplettica canonica" posseduta da questi fibrati, estendendo successivamente il suo interesse alle più generali "varietà simplettiche".

Le equazioni dinamiche di Lagrange vengono sostituite da un sistema di $2n$ equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, le equazioni di Hamilton, o, in alternativa, da una sola equazione alle derivate parziali del primo ordine: l'equazione di Hamilton-Jacobi. Queste equazioni possiedono un notevole significato intrinsecamente geometrico, dovuto proprio alla presenza della struttura simplettica, grazie alla quale si sviluppano nuovi metodi di analisi e di integrazione.

Il modello hamiltoniano della meccanica propone dunque concetti e metodi di vasta portata, che giungono ad interessare altri importanti settori della fisica matematica, quali l'ottica geometrica, la meccanica statistica, la meccanica quantistica. In questo capitolo ne saranno tratteggiati alcuni degli elementi fondamentali.

6.1 Fibrati cotangenti e sistemi hamiltoniani

Parallelamente al concetto di vettore tangente ad una varietà si può introdurre il concetto *duale* di *covettore tangente*. Come per i vettori, per i covettori si possono dare varie definizioni.

DEFINIZIONE 6.1.1 – Un **covettore tangente** in un punto q di una varietà Q è una **classe di equivalenza di funzioni** su Q . Due funzioni f e f' si dicono **equivalenti** (al primo ordine) in un punto q se, comunque si prenda una curva $\gamma: I \rightarrow Q$ basata in q (quindi tale che $\gamma(0) = q$), si ha

$$(6.1) \quad D(f \circ \gamma)(0) = D(f' \circ \gamma)(0). \quad \bullet$$

Si noti che questa definizione è analoga a quella di vettore tangente come classe di equivalenza di curve. La definizione seguente si basa invece sulla preesistente nozione di vettore tangente.

DEFINIZIONE 6.1.2 – Un **covettore tangente** p in un punto q di una varietà Q è un elemento del duale dello spazio tangente $T_q Q$, vale a dire un'applicazione lineare $p: T_q Q \rightarrow \mathbb{R}$. Si denota con $T_q^* Q$ lo spazio duale di $T_q Q$, detto **spazio cotangente** a Q in q . \bullet

Il legame tra queste due definizioni passa attraverso il concetto di **differenziale di una funzione** f in un punto $q \in Q$: è l'applicazione lineare $d_q f: T_q Q \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$(6.2) \quad \langle [\gamma], d_q f \rangle = D(f \circ \gamma)(0),$$

ovvero da

$$(6.3) \quad \langle v, d_q f \rangle = v(f),$$

a seconda che si consideri il vettore tangente come classe di equivalenza di curve o come derivazione. Dal confronto della (6.1) con la (6.2) si vede che due funzioni appartenenti alla stessa classe di equivalenza hanno lo stesso differenziale. Pertanto $d_q f$ si identifica con la classe di equivalenza di funzioni determinata da f . I differenziali $d_q f$ formano ovviamente un sottospazio di $T_q^* Q$, osservato che $d_q f + d_q f' = d_q(f + f')$ e che $a d_q f = d_q(a f)$, con $a \in \mathbb{R}$. Se inoltre su Q (di dimensione n) si prende un sistema di coordinate (q^i) ($i = 1, \dots, n$) nell'intorno di q , si osserva che gli n differenziali $d_q q^i$ formano una base per questo sottospazio, che pertanto coincide con tutto lo spazio duale $T_q^* Q$.

L'intervento di coordinate porta infine a considerare una terza definizione di covettore, analoga alla Definizione 5.2.3 per i vettori tangenti:

DEFINIZIONE 6.1.3 – Un **covettore tangente** in un punto q di una varietà Q è una **classe di equivalenza di coordinate e componenti** cioè di coppie

$$(q^i, p_i)$$

costituite da un sistema di coordinate (q^i) nell'intorno del punto q e da un insieme di n numeri (p_i) . Due coppie siffatte (q^i, p_i) e $(q^{i'}, p_{i'})$ si dicono equivalenti se sussistono i legami

$$(6.4) \quad p_i = \left(\frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} \right)_q p_{i'}.$$

I numeri (p_i) si dicono **componenti** del covettore secondo le coordinate (q^i) . •

Il legame con la Def. 2, secondo la quale un covettore p è una forma lineare sui vettori, è dato dalla formula

$$(6.5) \quad \langle v, p \rangle = p_i v^i,$$

dove le v^i sono le componenti di v . Il legame con la Def. 1 è invece espresso dal fatto che la scrittura $p = d_q f$ equivale a

$$(6.6) \quad p_i = \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \right)_q.$$

Anche l'insieme di tutti i **covettori tangenti** a Q , denotato con T^*Q e chiamato **fibrato cotangente**, è una varietà differenziabile di dimensione $2n$. La dimostrazione è analoga a quella svolta per il fibrato tangente. Infatti ad ogni sistema di coordinate (q^i) su di un dominio aperto $U \subseteq Q$ corrisponde un sistema di coordinate (q^i, p_i) sull'insieme $T^*U \subseteq T^*Q$ dei covettori tangenti nei punti di U , dette **coordinate canoniche naturali**, definite alla maniera seguente: se $q \in U$ e $p \in T_q^*U$ allora le (q^i) sono le coordinate del punto q e le (p_i) sono le componenti del covettore p , cioè i numeri definiti dalla (6.5). Le (p_i) vengono anche dette **momenti** o **impulsi** corrispondenti alle **coordinate di configurazione** (q^i) (si tratta di una terminologia legata al loro significato meccanico). Si osserva allora che passando da un sistema di coordinate (q^i) ad un altro $(q^{i'})$ le coordinate (p_i) e $(p_{i'})$ sono legate da una relazione analoga alla (6.4)¹

$$(6.7) \quad p_i = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} p_{i'}.$$

Di qui segue che carte compatibili su Q generano carte compatibili su T^*Q e quindi che T^*Q è una varietà differenziabile. Ogni spazio cotangente T_q^*Q costituisce una **fibra** del fibrato cotangente T^*Q . Ogni fibra è una sottovarietà di dimensione n .

Come si vedrà nei prossimi paragrafi, l'importanza della struttura di fibrato cotangente in meccanica è dovuta essenzialmente alla circostanza che *ad ogni funzione differenziabile* $H: T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ *su di un fibrato cotangente corrisponde un campo vettoriale* X_H *su*

¹ Va osservato che a secondo membro di questa equazione le derivate parziali $\partial q^{i'}/\partial q^i$ sono in prima istanza funzioni delle (q^i) . Occorre quindi risostituire a queste le loro espressioni in funzione delle $(q^{i'})$ per avere in definitiva a secondo membro una funzione delle $(q^{i'}, p_{i'})$.

T^*Q , detto **campo hamiltoniano** o **sistema dinamico hamiltoniano** generato dalla hamiltoniana H , le cui equazioni differenziali sono

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{array} \right.$$

Queste prendono il nome di **equazioni di Hamilton** o **equazioni canoniche**.

Vediamo come questa corrispondenza venga realizzata, dando del campo \mathbf{X}_H una definizione intrinseca, indipendente dall'uso di coordinate. A questo scopo si comincia con l'osservare che in coordinate canoniche naturali (q^i, p_i) una generica 1-forma su T^*Q ammette una rappresentazione del tipo

$$(6.9) \quad \theta = \theta_i dq^i + \theta^i dp_i,$$

con le componenti (θ_i, θ^i) espresse mediante funzioni di queste coordinate. Se si scelgono come componenti le funzioni $\theta_i = p_i$ e $\theta^i = 0$ si ottiene una 1-forma particolare

$$(6.10) \quad \boxed{\theta = p_i dq^i}$$

che ha carattere intrinseco, detta **forma di Liouville** o **forma fondamentale** di T^*Q . L'indipendenza dalla scelta delle coordinate di questa definizione segue immediatamente dalla (6.7):

$$p_i dq^i = p_{i'} \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} dq^i = p_{i'} dq^{i'}.$$

Il carattere intrinseco della forma di Liouville (6.10) implica anche il carattere intrinseco del suo differenziale

$$(6.11) \quad \boxed{\omega = d\theta = dp_i \wedge dq^i}$$

Questa 2-forma ω prende il nome di **forma simplettica canonica** su T^*Q . Abbiamo dunque dimostrato che ogni fibrato cotangente possiede per sua stessa natura una 1-forma ed una 2-forma particolari.

Osserviamo ora che un generico campo vettoriale \mathbf{X} sul fibrato cotangente T^*Q , inteso come derivazione, ammette una rappresentazione del tipo

$$(6.12) \quad \mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

dove le componenti (X^i, X_i) sono funzioni delle stesse coordinate (q^i, p_i) . Usando la più comoda notazione

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad \partial^i = \frac{\partial}{\partial p_i},$$

la (6.12) può scriversi

$$(6.13) \quad \mathbf{X} = X^i \partial_i + X_i \partial^i.$$

Se interpretato come sezione $\mathbf{X}: T^*Q \rightarrow TT^*Q$ del fibrato tangente del fibrato cotangente T^*Q , il campo \mathbf{X} ammette una rappresentazione del tipo

$$(6.14) \quad \dot{q}^i = X^i, \quad \dot{p}_i = X_i,$$

denotate con $(q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_i)$ le coordinate su TT^*Q indotte dalle coordinate (q^i, p_i) su T^*Q . Ciò posto, il valore assunto dalla forma симплетica ω su di una coppia di campi vettoriali (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) è

$$(6.15) \quad \begin{aligned} \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= (dp_i \wedge dq^i)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ &= \langle \mathbf{X}, dp_i \rangle \langle \mathbf{Y}, dq^i \rangle - \langle \mathbf{X}, dq^i \rangle \langle \mathbf{Y}, dp_i \rangle \\ &= X_i Y^i - X^i Y_i. \end{aligned}$$

Si osserva allora che se si fissa il campo \mathbf{X} e si fa variare \mathbf{Y} si ottiene un'applicazione lineare dai campi vettoriali alle funzioni su T^*Q ,

$$\omega(\mathbf{X}, \cdot): \mathbf{Y} \mapsto \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

vale a dire una 1-forma differenziale su T^*Q . Per la (6.15) questa 1-forma ammette la rappresentazione

$$(6.16) \quad \boxed{\omega(\mathbf{X}, \cdot) = X_i dq^i - X^i dp_i}$$

Sulla base di queste considerazioni possiamo dimostrare che

TEOREMA 6.1.1 – *Per ogni funzione differenziabile $H: T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ l'equazione*

$$(6.17) \quad \boxed{\omega(\mathbf{X}_H, \cdot) = -dH}$$

*definisce un campo vettoriale \mathbf{X}_H su T^*Q le cui equazioni differenziali del primo ordine in coordinate canoniche naturali (q^i, p_i) sono le equazioni di Hamilton (6.8).*

DIMOSTRAZIONE. Scritto il differenziale di H ,

$$(6.18) \quad dH = \partial_i H dq^i + \partial^i H dp_i$$

e tenuto conto della (6.16), scritta per $\mathbf{X} = \mathbf{X}_H$, la definizione (6.17) equivale all'uguaglianza delle forme differenziali

$$X_i dq^i - X^i dp_i = -\partial_i H dq^i - \partial^i H dp_i,$$

da cui seguono le uguaglianze

$$(6.19) \quad X^i = \partial^i H, \quad X_i = -\partial_i H.$$

Di qui, tenuto conto delle (6.12), si vede che il sistema differenziale associato al campo \mathbf{X}_H coincide proprio con il sistema (6.8), cioè con le equazioni di Hamilton. \square

NOTA 6.1.1 – Si vede dalla (6.11) che la matrice delle componenti della forma simplettica ω nelle coordinate (q^i, p_i) è la matrice antisimmetrica di ordine $2n$

$$(6.20) \quad J = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix}$$

detta **matrice simplettica**, composta da quattro sottomatrici quadrate di ordine n , di cui due nulle (le diagonali), una unitaria ed una antiunitaria.² Sviluppando il determinante di questa matrice secondo le prime n righe con la regola di Laplace si vede che, qualunque sia la dimensione n , è

$$(6.21) \quad \det J = 1.$$

La forma simplettica ω è dunque regolare. Si osserva inoltre che il quadrato della matrice simplettica è l'opposto della matrice unitaria:

$$(6.22) \quad J^2 = -\mathbf{1}_{2n}. \quad \bullet$$

6.2 La trasformata di Legendre

Alla formulazione lagrangiana delle equazioni della meccanica corrisponde una formulazione hamiltoniana equivalente, costruita sui fibrati cotangenti anziché sui fibrati tangenti. Il legame tra le due formulazioni prende il nome di **trasformazione di Legendre**³ ed è costruito alla maniera seguente.

Si consideri un sistema dinamico lagrangiano (Q, L) con lagrangiana L indipendente dal tempo $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ e regolare,⁴ cioè tale che

$$(6.23) \quad \det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right] \neq 0$$

La condizione di regolarità della lagrangiana implica due fatti importanti: primo, come si è visto nella Nota 5.8.3, che la dinamica è rappresentata da un campo lagrangiano X_L sopra la varietà TQ e, secondo, che esiste un diffeomorfismo

$$\varphi_L: TQ \rightarrow T^*Q$$

² In alcuni testi, in base a convenzioni diverse da quelle qui adottate, per “matrice simplettica” s'intende la matrice opposta alla (6.20).

³ Adrien-Marie Legendre, 1752-1833.

⁴ Ci limitiamo qui e nel seguito a considerare sistemi dinamici lagrangiani e hamiltoniani indipendenti dal tempo, che del resto sono i più comuni nelle applicazioni. Il caso tempo-dipendente, il cui interesse è comunque rilevante, richiederebbe un'analisi molto più ampia. Per quel che riguarda il particolare la trasformazione di Legendre va detto che la descrizione qui data, che è quella “classica”, non ne rivela la vera “essenza”. La sua definizione generale è infatti indipendente dall'assegnazione di una lagrangiana e si basa invece sulla particolare struttura posseduta dalle varietà del tipo TT^*Q , oggetto di studi relativamente recenti.

tra il fibrato tangente ed il fibrato cotangente, conservante le fibre, cioè tale che ad un vettore tangente in un punto $q \in Q$ corrisponde un covettore tangente nello stesso punto. Questo diffeomorfismo è definito dalle equazioni

$$(6.24) \quad \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}$$

Con queste equazioni infatti le coordinate p_i risultano espresse come funzioni delle coordinate (q^i, \dot{q}^i) , per cui è definita un'applicazione da TQ a T^*Q .⁵ La condizione di regolarità (6.23) è necessaria e sufficiente per l'invertibilità di quest'applicazione, cioè alla possibilità di esprimere le coordinate (\dot{q}^i) come funzioni delle coordinate (q^i, p_i) .

In effetti le equazioni (6.24) generano solo un diffeomorfismo locale tra TQ e T^*Q . La lagrangiana L si dice **iper-regolare** se con la combinazione di questi diffeomorfismi locali si genera un diffeomorfismo globale φ_L tra TQ e T^*Q . Se allora si è in queste condizioni, come nel caso di un sistema olonomo (si veda la Nota 6.2.1 a fine paragrafo), il campo lagrangiano \mathbf{X}_L sopra TQ si trasforma tramite questo diffeomorfismo in un campo vettoriale sopra T^*Q . Il fatto notevole è che questo campo è hamiltoniano, come mostrato dal teorema seguente:

TEOREMA 6.2.1 – *Il campo vettoriale su T^*Q corrispondente a \mathbf{X}_L mediante il diffeomorfismo φ_L ⁶ è un campo hamiltoniano \mathbf{X}_H con hamiltoniana H definita da*

$$(6.25) \quad \boxed{H(q^*, p_*) = p_i \dot{q}^i - L(q^*, \dot{q}^*)}$$

dove le \dot{q}^* devono intendersi funzioni delle (q^*, p_*) per il tramite delle relazioni inverse delle (6.2).

DIMOSTRAZIONE. Si consideri il differenziale della funzione H definita dalla (6.25):

$$dH = dp_i \dot{q}^i + p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i.$$

L'intervento di φ_L , cioè delle (6.24), annulla i coefficienti di $d\dot{q}^i$, sicché risulta

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i.$$

⁵ Si noti la diversa interpretazione delle equazioni (6.24) e delle analoghe equazioni (5.152). Qui le (6.24) definiscono un'applicazione tra la varietà TQ di coordinate (q^i, \dot{q}^i) e la varietà T^*Q di coordinate (q^i, p_i) . Le equazioni (5.152) definiscono invece delle funzioni su TQ (oppure su $TQ \times \mathbb{R}$ nel caso di una lagrangiana t-dipendente).

⁶ In generale, dato un diffeomorfismo $\varphi: M \rightarrow N$ tra due varietà, ad ogni campo vettoriale \mathbf{X} su M corrisponde un campo vettoriale \mathbf{Y} su N ottenuto attraverso la cosiddetta **applicazione tangente** $T\varphi: TM \rightarrow TN$. Intendendo i vettori tangenti come classi di equivalenza di curve, questa applicazione è definita dall'uguaglianza $T\varphi([\gamma]) = [\varphi \circ \gamma]$. Il campo vettoriale $\mathbf{Y}: N \rightarrow TN$ è la composizione $T\varphi \circ \mathbf{X} \circ \varphi^{-1}$. Se φ è localmente rappresentata da equazioni (invertibili) del tipo $y^a = \varphi^a(x^i)$ allora le componenti di \mathbf{Y} sono date da

$$Y^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} X^i.$$

L'applicazione $T\varphi$ è anche detta “differenziale di φ ”.

Ciò significa che

$$(6.26) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i, \end{cases}$$

Si osserva d'altra parte che le equazioni di Euler-Lagrange possono porsi nella forma

$$(6.27) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Quindi, grazie alle (6.26), esse sono equivalenti alle equazioni di Hamilton

$$(6.28) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases} \quad \square$$

NOTA 6.2.1 – Applichiamo le considerazioni precedenti al caso fondamentale di un sistema olonomo conservativo, la cui lagrangiana è

$$(6.29) \quad L = T + U = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + U(q^*).$$

Le equazioni (6.24) che definiscono φ_L diventano

$$(6.30) \quad \boxed{p_i = g_{ij} \dot{q}^j}$$

e si invertono nelle equazioni

$$(6.31) \quad \boxed{\dot{q}^i = g^{ij} p_j}$$

che rappresentano invece φ_L^{-1} . In questo caso dunque φ_L è un diffeomorfismo globale e la lagrangiana L è iper-regolare. Per le (6.30) e le (6.31)

$$T = \frac{1}{2} p_i \dot{q}^i = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j,$$

e l'hamiltoniana definita dalla (6.25) diventa

$$(6.32) \quad \boxed{H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j - U(q^i)}$$

Di qui seguono le quazioni di Hamilton:

$$(6.33) \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = g^{ij} p_j, \\ \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{hj}}{\partial q^i} p_h p_j. \end{cases}$$

Si vede dalla (6.32) che l'hamiltoniana coincide con la trasformata tramite φ_L dell'energia totale $E = T - U$, a conferma del fatto che l'hamiltoniana è un integrale primo. •

6.3 Il metodo di Jacobi

Uno dei vantaggi principali dell'approccio lagrangiano è la totale libertà di scelta delle coordinate (q^i) sulla varietà delle configurazioni Q . La formulazione hamiltoniana amplia ulteriormente le possibilità di scelta delle coordinate perché la dinamica è sintetizzata in un campo vettoriale \mathbf{X}_H sul fibrato cotangente T^*Q , alla cui definizione concorre un elemento intrinseco proprio di tale varietà: la forma simplettica ω . Questo campo è infatti definito dall'equazione

$$(6.34) \quad \omega(\mathbf{X}_H, \cdot) = -dH$$

In questo contesto è allora del tutto arbitraria la scelta delle coordinate su T^*Q , non solo su Q . Tuttavia, un ruolo primario e privilegiato è svolto dalle **coordinate canoniche**.

DEFINIZIONE 6.3.1 – *Un sistema di coordinate (b^i, a_i) su T^*Q è **canonico** se in queste coordinate la 2-forma simplettica canonica ω assume la forma*

$$(6.35) \quad \omega = da_i \wedge db^i \quad \bullet$$

Va subito osservato che le coordinate canoniche naturali (q^i, p_i) corrispondenti a coordinate (q^i) su Q sono coordinate canoniche nel senso ora dato perché $\omega = dp_i \wedge dq^i$. Tuttavia, come si avrà modo di osservare nel seguito, esistono sistemi di coordinate canoniche (b^i, a_i) dove le prime n coordinate *non sono* coordinate di configurazione, cioè coordinate su Q .

L'importanza delle coordinate canoniche è sostanzialmente dovuta al fatto che, rispetto a queste, le equazioni differenziali del campo \mathbf{X}_H sono sempre equazioni canoniche:

$$(6.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{db^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial a_i} \\ \frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial b^i} \end{array} \right.$$

Per riconoscerlo basta ripercorrere i calcoli svolti nel primo paragrafo di questo capitolo ed osservare che le equazioni di Hamilton (6.36) si deducono dalla definizione intrinseca (6.34) del campo \mathbf{X}_H utilizzando il solo fatto che la forma simplettica ω è suscettibile di una scrittura del tipo $\omega = dp_i \wedge dq^i$, cioè del tipo (6.35).

Dalle equazioni (6.36) si osserva che se la funzione $h(b^i, a_i)$ rappresentatrice dell'hamiltoniana H nelle coordinate canoniche (b^i, a_i) non dipende dalle (b^i) (col che si può dire dire che le (b^i) sono **ignorabili**) allora queste equazioni si riducono a

$$(6.37) \quad \frac{db^i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial a_i}, \quad \frac{da_i}{dt} = 0.$$

In tal caso le seconde n equazioni si integrano subito:

$$(6.38) \quad a_i = \text{costante}.$$

Così le prime, perché anche le derivate parziali

$$(6.39) \quad h^i = \frac{\partial h}{\partial a_i}$$

sono delle costanti, per cui

$$(6.40) \quad b^i = h^i t + c^i$$

con c^i costanti arbitrarie. L'integrazione delle equazioni di Hamilton è dunque riconducibile alla ricerca di questi particolari sistemi di coordinate canoniche. È questa l'idea guida del **metodo di Jacobi**.

Per costruire questo metodo si comincia con l'osservare che se (q^i, p_i) è un sistema di coordinate canoniche (per esempio naturali) allora (b^i, a_i) è ancora un sistema di coordinate canoniche se e solo se

$$(6.41) \quad d(p_i dq^i + b^i da_i) = 0,$$

perché quest'equazione equivale all'uguaglianza $dp_i \wedge dq^i = da_i \wedge db^i$, cioè a $\omega = da_i \wedge db^i$. La (6.41) afferma che la 1-forma $p_i dq^i + b^i da_i$ sopra T^*Q è chiusa, quindi localmente esatta: esistono localmente su T^*Q funzioni W per cui

$$(6.42) \quad \boxed{p_i dq^i + b^i da_i = dW}$$

Si supponga ora che le $2n$ funzioni (q^*, a_*) siano indipendenti, formino cioè un sistema di coordinate su T^*Q . Espressa la funzione W tramite queste coordinate,

$$W = W(q^i, a_i),$$

la (6.42) equivale alle equazioni

$$(6.43) \quad \boxed{p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad b^i = \frac{\partial W}{\partial a_i}}$$

Ma le prime n equazioni devono essere risolubili rispetto alle a_i perché le (q^i, a_i) , dovendo formare un sistema di coordinate, devono potersi esprimere come funzioni (invertibili) delle coordinate (q^i, p_i) . Le (6.43)₁ mostrano che questo accade se e solo se

$$(6.44) \quad \boxed{\det \left[\frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial a_j} \right] \neq 0}$$

La (6.44) è detta **condizione di completezza**. Una funzione $W(q^*, a_*)$ soddisfacente a questa condizione prende il nome di **funzione generatrice della trasformazione canonica** $(q^*, p_*) \rightarrow (b^*, a_*)$. Essa, tramite la (6.42) ovvero le equazioni (6.43), genera delle coordinate canoniche (b^i, a_i) a partire da coordinate canoniche (q^*, p_*) . Infatti, scritte le (6.43), si invertono le (6.43)₁ esprimendo così le (a_*) in funzione delle (q^*, p_*) ; la successiva

sostituzione di queste funzioni nelle (6.43)₂ permette di esprimere anche le (b^*) in funzione delle (q^*, p_*) .⁷

Fatta quest'osservazione sulla costruzione delle coordinate canoniche, ci si chiede quale sia la condizione da imporre alla funzione generatrice W affinché le corrispondenti coordinate canoniche soddisfino al requisito considerato all'inizio, per cui H non viene a dipendere dalle (b^*) e quindi il sistema di Hamilton è facilmente integrabile.

Per far questo è sufficiente osservare che se $H(q^i, p_i)$ è la funzione rappresentativa di H nelle coordinate (q^i, p_i) allora è

$$H(q^i, p_i) = h(a_i)$$

dove a secondo membro compare la funzione rappresentativa di H nelle coordinate (b^*, a_*) . Con l'intervento delle (6.43)₁ quest'uguaglianza assume la forma

$$(6.45) \quad \boxed{H\left(q^i, \frac{\partial W}{\partial q^i}\right) = h}$$

dove, in virtù delle (6.38), h è una costante. Possiamo allora enunciare il classico **teorema di Jacobi**:

TEOREMA 6.3.1 – *Data la rappresentazione $H(q^i, p_i)$ in coordinate canoniche (q^i, p_i) di un'hamiltoniana H , se si conosce una soluzione $W(q^i, a_i)$ dell'equazione differenziale (6.45) soddisfacente alla condizione di completezza (6.44) allora le curve integrali del campo hamiltoniano \mathbf{X}_H sono determinabili con sole operazioni di inversione e di sostituzione.*

Infatti, in base a quanto visto, la funzione W è generatrice di un sistema di coordinate canoniche (b^*, a_*) rispetto alle quali l'hamiltoniana H dipende dalle sole (a_*) e quindi \mathbf{X}_H risulta di immediata integrazione.

Il metodo di Jacobi riconduce il problema della determinazione delle curve integrali del campo \mathbf{X}_H , cioè l'integrazione delle equazioni di Hamilton (6.36), all'integrazione di una sola equazione alle derivate parziali del primo ordine: l'equazione (6.45). Questa prende il nome di **equazione di Hamilton-Jacobi** (più precisamente di equazione di Hamilton-Jacobi **ridotta**). Una sua soluzione $W(q^i, a_i)$ soddisfacente alla condizione (6.44) prende il nome di **integrale completo**.

⁷ La condizione (6.41) è equivalente ad una delle seguenti

$$\begin{cases} d(q^i dp_i - b^i da_i) = 0, \\ d(q^i dp_i - a_i db^i) = 0, \\ d(p_i dq^i + a_i db^i) = 0, \end{cases}$$

alle quali corrispondono altri tre tipi di funzioni generatrici:

$$\begin{cases} q^i dp_i - b^i da_i = dW_1, & W_1 = W_1(p_i, a_i), \\ q^i dp_i - a_i db^i = dW_2, & W_1 = W_1(p_i, b^i), \\ p_i dq^i + a_i db^i = dW_3, & W_1 = W_1(q^i, b^i). \end{cases}$$

La scelta qui fatta è la più conveniente per gli sviluppi successivi.

L'integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi può talvolta rivelarsi più semplice dell'integrazione delle equazioni di Hamilton anche se, una volta determinato un integrale completo W , può presentarsi la difficoltà di invertire le equazioni $(6.43)_1$, operazione possibile in principio (in virtù della condizione (6.44)) ma non sempre facilmente eseguibile in pratica.

Sovente è possibile determinare un integrale completo, o almeno di ricondurre la sua determinazione alle *quadrature*, vale a dire di esprimerlo mediante integrali semplici, attraverso il metodo della **separazione delle variabili**. Questo metodo consiste nel ricercare delle coordinate (q^i) su Q per le quali l'equazione di Hamilton-Jacobi ammette un integrale completo che è somma di funzioni dipendenti ciascuna da una singola coordinata. Numerosi classici problemi sono stati studiati e risolti per questa via. Per esempio il problema delle geodetiche di un ellissoide asimmetrico, che ha in effetti condotto Jacobi all'invenzione del suo metodo.

NOTA 6.3.1 – Nell'integrare l'equazione di Hamilton-Jacobi è spontaneo far coincidere una delle costanti d'integrazione (a_*) con la costante h che compare a secondo membro (la costante dell'energia). Se per esempio si pone

$$(6.46) \quad a_n = h,$$

dalla (6.39) si vede che

$$(6.47) \quad h^i = \delta^{in}.$$

Pertanto le (6.40) diventano

$$(6.48) \quad b^i = \delta^{in} t + c^i \quad \begin{cases} b^k = c^k & (k = 1, \dots, n-1), \\ b^n = t - t_0 & (\text{posto } c^n = -t_0) \end{cases}$$

Tenuto allora conto delle $(6.43)_2$ si conclude che, noto un integrale completo $W(q^i, a_i)$ con $a_n = h$, tutti i moti del sistema sono determinati dalle n equazioni

$$(6.49) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a_k} &= c^k & (k = 1, \dots, n-1) \\ \frac{\partial W}{\partial h} &= t - t_0 \end{aligned}}$$

dove le (c^*) e t_0 sono costanti arbitrarie. Le prime $n-1$ equazioni (6.49) non contengono il tempo, quindi al variare delle $2n-1$ costanti (a_*, c^*) definiscono le orbite. Il modo con cui queste orbite vengono percorse è invece descritto dall'ultima equazione (6.49). •

Mettiamo in opera il metodo di Jacobi in due semplici problemi.

ESEMPIO 6.3.1 – Si consideri la dinamica di un grave di massa m in un piano verticale. La varietà delle configurazioni Q è il piano euclideo (il piano verticale). Prendiamo su

questo delle coordinate cartesiane ortonormali $(q^1, q^2) = (x, z)$ con l'asse z orientato verso l'alto. Poniamo $(p_1, p_2) = (p_x, p_z)$. L'energia cinetica e il potenziale sono

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2), \quad U = -m g z.$$

L'hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_z^2) + m g z.$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi (6.45) diventa

$$(6.50) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + m g z = h.$$

Cerchiamone una soluzione del tipo

$$W = ax + F(z),$$

con $a \in \mathbb{R}$. Sostituendo una tale espressione nella (6.50) si trova

$$\frac{1}{2m} \left[a^2 + \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 \right] + m g z = h.$$

Quindi

$$\left(\frac{dF}{dz} \right)^2 = 2m (h - m g z) - a^2 = 2m^2 g \left(\frac{h}{m g} - z \right) - a^2 = 2m^2 g (z_0 - z),$$

posto

$$(6.51) \quad z_0 = \frac{1}{m g} \left(h - \frac{a^2}{2m} \right).$$

Di qui segue subito che deve essere

$$z \leq z_0.$$

La costante z_0 rappresenta quindi la quota massima raggiungibile dal punto (dotato di energia h). Integrando per valori positivi della derivata di F si ha, a meno di un'inessenziale costante additiva,

$$F = m \sqrt{2g} \int \sqrt{z_0 - z} dz = -\frac{2}{3} m \sqrt{2g} (z_0 - z)^{\frac{3}{2}}.$$

Si trova in definitiva la soluzione

$$W = ax - \frac{2}{3} m \sqrt{2g} (z_0 - z)^{\frac{3}{2}}.$$

Ponendo $a_1 = a$ e $a_2 = h$ si verifica che questa funzione è effettivamente un integrale completo. Infatti, tenuto conto del legame (6.51) tra le varie costanti, si ha

$$\frac{\partial z_0}{\partial a} = -\frac{a}{m^2 g}, \quad \frac{\partial z_0}{\partial h} = \frac{1}{m g}.$$

Per cui:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial a} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial h} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial a} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial h} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial a} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial h} \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial h}$$

$$= \frac{\partial}{\partial h} \left(m \sqrt{2g} (z_0 - z)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2g}} (z_0 - z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pertanto W è un integrale completo definito per $z < z_0$. Mettiamo ora in opera le equazioni (6.49). A conti fatti risulta:

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{a}{m} (z_0 - z)^{\frac{1}{2}} = c, \\ \sqrt{\frac{2}{g}} (z_0 - z)^{\frac{1}{2}} = t_0 - t, \end{cases}$$

con c e t_0 costanti arbitrarie. Elevando entrambe queste equazioni al quadrato (col che si elimina la doppia determinazione del segno della W) si trova in conclusione:

$$\begin{cases} z_0 - z = \frac{gm^2}{2a^2} (x - c)^2, \\ z_0 - z = \frac{g}{2} (t - t_0)^2. \end{cases}$$

La prima equazione mostra che le orbite sono delle parabole. La seconda esprime la nota legge di caduta del grave. Non resta che chiarire il significato delle costanti. Dalla seconda di queste equazioni si vede che la costante t_0 è l'istante in cui la quota massima $z = z_0$ è raggiunta, dalla prima che c è l'ordinata corrispondente. Per quel che riguarda infine la costante a , dall'equazione

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = a$$

si vede che essa coincide con la quantità di moto orizzontale, a conferma del fatto che questa è un integrale primo. •

ESEMPIO 6.3.2 – Si consideri l'oscillatore armonico piano: un punto mobile su di un piano ed attratto da una forza elastica centrata in un punto fisso O . Scegliendo coordinate cartesiane ortonormali $(q^1, q^2) = (x, y)$ centrate nel punto O e posto al solito $(p_1, p_2) = (p_x, p_y)$ l'hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{k}{2} (x^2 + y^2).$$

Moltiplicando per $2m$ l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$(6.52) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + m k (x^2 + y^2) = 2 m h.$$

Anche in questo caso la si può integrare separando le variabili. Con una soluzione del tipo

$$W = W_1(x) + W_2(y)$$

l'equazione (6.52) si spezza nella *somma* di due equazioni differenziali *separate* del tutto simili:

$$\left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 + mkx^2 = mka_1, \quad \left(\frac{dW_2}{dy}\right)^2 + mky^2 = mka_2,$$

posto che si abbia

$$(6.53) \quad h = \frac{k}{2}(a_1 + a_2).$$

Si noti che le costanti arbitrarie (a_1, a_2) devono essere positive. Dalla prima equazione si vede che

$$W_1 = \pm \sqrt{mk} \int \sqrt{a_1 - x^2} dx.$$

Non è tuttavia necessario procedere al calcolo di quest'integrale, perché ciò che in effetti torna utile è conoscere le derivate parziali della funzione W rispetto alle costanti (a_1, a_2) . Derivando sotto il segno di integrale si trova allora (prendendo per esempio il segno +)

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = \frac{\partial W_1}{\partial a_1} = \sqrt{mk} \int \frac{dx}{2\sqrt{a_1 - x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{mk} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a_1}}.$$

Combinando ora le equazioni (6.40) con le equazioni (6.43)₂, tenuto conto che per la (6.53) si ha

$$h_1 = \frac{\partial h}{\partial a_1} = \frac{k}{2},$$

si trova

$$\frac{1}{2} \sqrt{mk} \arccos \frac{x}{\sqrt{a_1}} = \frac{1}{2} kt - c_1.$$

Di qui, con un riaggiustamento della costante arbitraria c_1 , segue infine

$$x = \sqrt{a_1} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - c_1 \right).$$

Per la coordinata y sussiste un'equazione analoga:

$$y = \sqrt{a_2} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - c_2 \right).$$

Si ritrovano così i moti armonici componenti. •

NOTA 6.3.2 – Salvo casi moto speciali, il metodo di Jacobi risulta applicabile solo per separazione delle variabili. I cosiddetti **sistemi separabili** formano una classe importante di sistemi integrabili. •

ESEMPIO 6.3.3 – Un altro classico problema che si integra per separazione delle variabili, già studiato da Euler e Lagrange, è quello di un punto materiale soggetto al campo generato da **due centri fissi** (F_1, F_2) “newtoniani” o “coulombiani” (attrattivi o repulsivi). Si dimostra che, nel caso piano, denotate con (r_1, r_2) le distanze del punto dai due centri, l’equazione di Hamilton-Jacobi si separa rispetto alle coordinate $q^1 = r_1 + r_2$ e $q^2 = r_1 - r_2$. Le curve coordinate sono le **coniche omofocali** di fuochi (F_1, F_2) (ellissi e iperboli). Si dimostra anche che il più generale campo di forza conservativo piano per cui l’equazione di Hamilton-Jacobi si separa rispetto a queste coordinate, dette **ellittico-iperboliche**, è proprio dato dai due centri newtoniani o coulombiani fissi a cui si può aggiungere una forza lineare rispetto alla distanza dal loro punto medio (attrattiva o repulsiva, quindi di tipo elastico o centrifugo). •

6.4 Parentesi di Poisson e integrali primi

Per un generico campo vettoriale \mathbf{X} su T^*Q di componenti (X^i, X_i) (si veda la (6.12)) e per una qualunque funzione reale differenziabile F su T^*Q si ha

$$\langle \mathbf{X}, dF \rangle = X^i \partial_i F + X_i \partial^i F.$$

Se in particolare il campo vettoriale è un campo hamiltoniano \mathbf{X}_H , viste le (6.19), risulta

$$(6.54) \quad \langle \mathbf{X}_H, dF \rangle = \partial^i H \partial_i F - \partial_i H \partial^i F.$$

Se allora si pone, qualunque siano le funzioni H ed F sopra T^*Q ,

$$(6.55) \quad \boxed{\{H, F\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)}$$

l’uguaglianza (6.54) diventa

$$(6.56) \quad \boxed{\langle \mathbf{X}_H, dF \rangle = \{H, F\}}$$

Parallelamente, tenuto conto della definizione (6.17) di campo hamiltoniano, si ha

$$\omega(\mathbf{X}_H, \mathbf{X}_F) = -\langle \mathbf{X}_F, dH \rangle = \partial^i H \partial_i F - \partial_i H \partial^i F,$$

quindi

$$(6.57) \quad \boxed{\omega(\mathbf{X}_H, \mathbf{X}_F) = \{H, F\}}$$

Da queste formule emerge l’importanza dell’operazione definita dalla (6.55).

DEFINIZIONE 6.4.1 – L’operazione binaria interna $\{\cdot, \cdot\}$ sull’insieme delle funzioni differenziabili sopra T^*Q definita dalla (6.55) prende il nome di **parentesi di Poisson**. Due funzioni F e G si dicono **in involuzione** se $\{F, G\} = 0$.⁸ •

⁸ Nei testi di Meccanica Analitica le parentesi di Poisson sono in genere definite con segno opposto a quello qui adottato.

Le parentesi di Poisson istituiscono sull'insieme delle funzioni differenziabili sopra il fibrato cotangente T^*Q una struttura di algebra di Lie, che prende il nome di **algebra di Poisson**.⁹

Esse infatti sono anticommutative, bilineari e soddisfano all'identità di Jacobi:

$$(6.58) \quad \begin{aligned} \{F, G\} &= -\{G, F\}, \\ \{aF + bG, H\} &= a\{F, H\} + b\{G, H\} \quad (a, b \in \mathbb{R}), \\ \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} &= 0. \end{aligned}$$

La verifica delle prime due proprietà è immediata, ma quella dell'identità di Jacobi richiede qualche calcolo. Di immediata verifica sono pure le seguenti proprietà differenziali: la **regola di Leibniz** (per entrambi i fattori)

$$(6.59) \quad \{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G$$

e la **regolarità**,

$$(6.60) \quad \{F, G\} = 0, \forall G \implies dF = 0.$$

NOTA 6.4.1 – Il legame tra la parentesi di Poisson e le parentesi di Lie dei campi vettoriali hamiltoniani è dato dalla formula notevole

$$(6.61) \quad [\mathbf{X}_H, \mathbf{X}_F] = \mathbf{X}_{\{H, F\}}$$

Questa mostra due fatti interessanti:

(i) la parentesi di Lie di due campi hamiltoniani è ancora un campo hamiltoniano: la sua hamiltoniana è proprio la parentesi di Poisson delle due hamiltoniane. Siccome valgono anche le identità (di immediata verifica)

$$(6.62) \quad \mathbf{X}_{aH} = a\mathbf{X}_H \quad (a \in \mathbb{R}), \quad \mathbf{X}_{H+F} = \mathbf{X}_H + \mathbf{X}_F,$$

si conclude che *l'insieme dei campi vettoriali hamiltoniani forma una sottoalgebra di Lie dei campi vettoriali su T^*Q .*

⁹ Un'algebra di Lie è un'algebra il cui "prodotto" è bilineare, anticommutativo e soddisfacente alla proprietà ciclica detta **identità di Jacobi**. Oltre all'algebra di Poisson altri esempi di algebre di Lie già visti sono: (i) Lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale dotato del **prodotto vettoriale** \times . Infatti $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ e inoltre

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

(ii) L'insieme degli endomorfismi antisimmetrici sopra uno spazio vettoriale euclideo (o pseudoeuclideo), assunto come prodotto il **commutatore** $[A, B] = AB - BA$. È ovviamente anticommutativo e si verifica subito che vale l'identità di Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

(iii) L'insieme dei campi vettoriali sopra una varietà differenziabile, dove il prodotto è la parentesi di Lie.

(ii) L'applicazione che associa ad ogni funzione differenziabile H su T^*Q il campo hamiltoniano \mathbf{X}_H su T^*Q è un **omomorfismo di algebre di Lie**, “conserva” cioè le due parentesi. Per dimostrare la (6.61) si usa la definizione (6.56) e l'identità di Jacobi (6.58)₃:

$$\begin{aligned}
 \langle [\mathbf{X}_H, \mathbf{X}_F], dG \rangle &= \langle \mathbf{X}_H, d\langle \mathbf{X}_F, dG \rangle \rangle - \langle \mathbf{X}_F, d\langle \mathbf{X}_H, dG \rangle \rangle \\
 &= \langle \mathbf{X}_H, d\{F, G\} \rangle - \langle \mathbf{X}_F, d\{H, G\} \rangle \\
 &= \{H, \{F, G\}\} - \{F, \{H, G\}\} \\
 &= \{H, \{F, G\}\} + \{F, \{G, H\}\} \\
 &= -\{G, \{H, F\}\} = \langle \mathbf{X}_{\{H, F\}}, dG \rangle. \quad \bullet
 \end{aligned}$$

Le parentesi di Poisson svolgono un ruolo cruciale nella trattazione degli integrali primi di un campo hamiltoniano. Infatti, richiamata la definizione di derivata di una funzione rispetto ad un campo vettoriale,

$$\langle \mathbf{X}_H, dF \rangle = \frac{dF}{dt},$$

si vede dalla (6.56) che la derivata di una funzione F lungo le curve integrali del campo hamiltoniano \mathbf{X}_H è data da

$$(6.63) \quad \frac{dF}{dt} = \{H, F\}.$$

Di qui si conclude che

TEOREMA 6.4.1 – Una funzione F è un integrale primo del campo hamiltoniano \mathbf{X}_H se e solo se $\{H, F\} = 0$, cioè se e solo se essa è in involuzione con l'hamiltoniana H del campo.

Siccome è ovviamente $\{H, H\} = 0$ si ha anche che

TEOREMA 6.4.2 – L'hamiltoniana H è un integrale primo del campo vettoriale \mathbf{X}_H .

È inoltre un'immediata conseguenza dell'identità di Jacobi il seguente classico **teorema di Poisson sugli integrali primi**:

TEOREMA 6.4.3 – Se F e G sono due integrali primi del campo \mathbf{X}_H , allora la loro parentesi di Poisson $\{F, G\}$ è anche un integrale primo.

Dalle condizioni $\{H, F\} = 0$ e $\{H, G\} = 0$ segue infatti, per l'identità di Jacobi, $\{H, \{F, G\}\} = 0$. Si ha così un semplice metodo di costruzione di nuovi integrali primi a partire da integrali primi noti, il cui utilizzo però è limitato dal fatto che la parentesi di Poisson $\{F, G\}$ può essere funzionalmente dipendente da F e G e quindi non dare luogo a nessun integrale primo essenzialmente nuovo, o essere addirittura nulla.

Come sappiamo, la conoscenza di integrali primi facilita l'analisi e la determinazione delle curve integrali di un campo vettoriale. Se, nel migliore dei casi, si conoscono $m - 1$

integrali primi indipendenti (dove m è la dimensione della varietà su cui il campo è definito) allora risultano determinate le orbite e le curve integrali sono almeno “ricondotte alle quadrature”, cioè al calcolo di integrali. Tuttavia è notevole il fatto che per l'integrabilità di un sistema hamiltoniano \mathbf{X}_H è sufficiente conoscere n integrali primi indipendenti (con $n = \frac{1}{2} \dim(T^*Q) = \dim(Q)$) tra i quali possiamo sempre includere l'hamiltoniana H , purché questi siano in involuzione. Si tratta del notevole **teorema di integrabilità di Liouville**:

TEOREMA 6.4.4 – *Se di un campo hamiltoniano \mathbf{X}_H su di un fibrato cotangente T^*Q di dimensione $2n$ si conoscono n integrali primi indipendenti ed in involuzione allora le sue curve integrali sono ricondotte alle quadrature con operazioni di inversione.*

Questo teorema, su cui si ritornerà più avanti, è una conseguenza diretta del fatto che la conoscenza di un sistema di n integrali primi in involuzione equivale alla conoscenza di un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi, come mostrato dal teorema seguente:

TEOREMA 6.4.5 – (i) *Se (F_i) sono n integrali primi verticalmente indipendenti¹⁰ ed in involuzione di un campo hamiltoniano \mathbf{X}_H allora, risolte le n equazioni*

$$(6.64) \quad F_i(q^*, p_*) = a_i$$

rispetto alle p_ , si ottengono delle funzioni*

$$(6.65) \quad p_i = W_i(q^*, a_*)$$

tali che per ogni valore dei parametri a_ la 1-forma $W_i dq^i$ è chiusa. Esiste quindi localmente una funzione $W(q^*, a_*)$ per cui*

$$(6.66) \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}.$$

Questa funzione è un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. (ii) Viceversa, se si conosce un integrale completo $W(q^, a_*)$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi allora, risolvendo le equazioni (6.66) rispetto alle costanti (a_*) , si trovano delle funzioni (6.64) che sono integrali primi in involuzione di \mathbf{X}_H .*

Come si vede, si passa dagli integrali primi in involuzione F_i alle funzioni W_i con operazioni di inversione e dalle W_i alla funzione W con uno o più integrali semplici.¹¹ Infine, dalla W si ottengono le curve integrali con le operazioni viste al paragrafo precedente. L'integrazione

¹⁰ La definizione di indipendenza verticale è data nella Nota 6.4.2 seguente. Il suo significato sarà chiarito nel prossimo paragrafo. L'ipotesi di verticale indipendenza degli integrali primi può essere omessa; la dimostrazione del teorema di Liouville richiederebbe però ulteriori considerazioni sulle trasformazioni di coordinate canoniche.

¹¹ Infatti W è ottenibile integrando la forma differenziale $W_i dq^i$ sul piano coordinato $(q^i) = \mathbb{R}^n$, o lungo una retta uscente dall'origine, oppure lungo una spezzata di segmenti di rette parallele agli assi coordinati.

delle equazioni di Hamilton è dunque ricondotta ad operazioni di inversione e a quadrature, per cui il teorema di Liouville è dimostrato.

Resta dunque da dimostrare il Teorema 6.4.5 il quale peraltro, come si vedrà nel prossimo paragrafo, è un'immediata conseguenza dell'interpretazione geometrica di integrale completo.

NOTA 6.4.2 – Per definizione, le n funzioni $F_i(q^*, p_*)$ sono indipendenti se i loro differenziali dF_i sono ovunque linearmente indipendenti. Questa proprietà è caratterizzata dalla massimalità del rango della matrice $2n \times n$ delle derivate parziali

$$(6.67) \quad \left[\frac{\partial F_i}{\partial q^j}, \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right].$$

Le funzioni (F_i) si dicono in particolare **verticalmente indipendenti** se

$$(6.68) \quad \det \left[\frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right] \neq 0.$$

Questa è proprio la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità delle (6.64) rispetto alle p_* . •

Alla luce del Teorema 6.4.5, l'equazione di Hamilton-Jacobi può anche essere vista come strumento per la costruzione di integrali primi in involuzione. Dalla seconda parte si può infatti estrarre l'enunciato seguente:

TEOREMA 6.4.6 – Se si determina un sistema di n funzioni $p_i = W_i(q^j, a_k)$ dipendenti da n parametri (a_k) tali che

$$(6.69) \quad \begin{cases} \det \left[\frac{\partial W_i}{\partial a_k} \right] \neq 0, \\ \partial_i W_j = \partial_j W_i, \\ H(q^i, W_j) = h = \text{costante}, \end{cases}$$

allora le funzioni $a_i = F_i(q^*, p_*)$ che si ottengono da questo sistema risolto rispetto alle (a_*) sono integrali primi verticalmente indipendenti ed in involuzione.

La differenza rispetto al Teorema 6.4.5 è che qui intervengono solo le funzioni W_i e non l'integrale completo W . La $(6.69)_1$ è la condizione di completezza, la $(6.69)_2$ è la condizione di chiusura della 1-forma $W_i dq^i$ e la $(6.69)_3$ è l'equazione di Hamilton-Jacobi. La $(6.69)_3$ sta a significare che una volta sostituite le funzioni W_i al posto delle p_i nell'hamiltoniana, le q^i scompaiono e l'hamiltoniana si riduce ad una funzione h dei soli parametri (a_*) .

ESEMPIO 6.4.1 – Consideriamo un punto libero sul piano euclideo, con coordinate polari (r, θ) e soggetto ad un **campo di dipolo** di potenziale

$$U = k \frac{\cos \theta}{r^2},$$

con k costante positiva. La lagrangiana e l'hamiltoniana sono rispettivamente (la massa è unitaria)

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + k \frac{\cos \theta}{r^2}, \\ H = \frac{1}{2} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2) - k \frac{\cos \theta}{r^2}, \end{cases}$$

posto che

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\theta = r^2 \dot{\theta}.$$

Dall'esame dell'hamiltoniana si osserva che l'equazione (6.69)₃ è soddisfatta con

$$p_\theta^2 = 2k \cos \theta + a, \quad p_r^2 = 2h - \frac{a}{r^2},$$

per cui, oltre all'integrale dell'energia, troviamo immediatamente l'integrale primo

$$a = p_\theta^2 - 2k \cos \theta = r^4 \dot{\theta}^2 - 2k \cos \theta.$$

La condizione di chiusura (6.69)₂ è soddisfatta perché in questo caso ogni p_i è funzione della corrispondente q^i solamente: si tratta del già citato fenomeno della **separazione delle variabili** nell'equazione di Hamilton-Jacobi. Anche la condizione di completezza (6.69)₃ risulta soddisfatta, come si vede con qualche calcolo (salvo che per $\theta = 0, \pi$, ma queste singolarità isolate sono irrilevanti). Da quest'integrale primo e da quello dell'energia si traggono le equazioni

$$(6.70) \quad \begin{cases} \dot{\theta}^2 = \frac{a + 2k \cos \theta}{r^4}, \\ \dot{r}^2 = 2h - \frac{a}{r^2}, \end{cases}$$

su cui si può basare lo studio dei moti. Si noti che la seconda equazione è del tipo Weierstrass. Si può per esempio dedurre che i moti per cui $h = 0$ e $a = 0$ sono semicircolari, analoghi a quelli di un pendolo centrato nell'origine, con oscillazioni tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Infatti in questo caso la (6.70)₂ implica $r = r_0 = \text{costante}$ e la (6.70)₁ diventa un'equazione di Weierstrass

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2k \cos \theta}{r_0^4},$$

con il secondo membro nullo per $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. •

6.5 Sottovarietà lagrangiane

DEFINIZIONE 6.5.1 – Una sottovarietà $\Lambda \subset T^*Q$ è detta **lagrangiana** se la sua dimensione è n (cioè uguale alla dimensione di Q) e se inoltre la 2-forma simplettica $\omega = d\theta$ si annulla sui vettori tangenti a Λ : $\forall p \in \Lambda, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\Lambda, \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. •

Vediamo ora la caratterizzazione delle sottovarietà lagrangiane attraverso le loro possibili rappresentazioni. Una sottovarietà $\Lambda \subset T^*Q$ di dimensione n può essere descritta (almeno localmente) da un numero complementare (quindi ancora uguale a n) di equazioni

$$(6.71) \quad F_i(q^*, p_*) = 0,$$

dove le F_i sono n funzioni indipendenti su T^*Q , quindi tale che la matrice $n \times 2n$ delle derivate parziali

$$(6.72) \quad \left[\frac{\partial F_i}{\partial q^j}, \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \right]$$

ha rango massimo. La stessa sottovarietà può essere anche descritta localmente da equazioni parametriche in n parametri (u^h)

$$(6.73) \quad \begin{cases} q^i = q^i(u^*), \\ p_i = p_i(u^*), \end{cases}$$

con la matrice $n \times 2n$ delle derivate parziali

$$(6.74) \quad \left[\frac{\partial q^i}{\partial u^h}, \frac{\partial p_i}{\partial u^h} \right]$$

di rango massimo. Cominciamo con l'esame di questa seconda rappresentazione.

TEOREMA 6.5.1 – *La sottovarietà Λ rappresentata dalle equazioni parametriche (6.73) è lagrangiana se e solo se valgono le uguaglianze¹²*

$$(6.75) \quad \frac{\partial p_i}{\partial u^h} \frac{\partial q^i}{\partial u^k} - \frac{\partial p_i}{\partial u^k} \frac{\partial q^i}{\partial u^h} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sostituendo le equazioni parametriche (6.73) nell'espressione $\omega = dp_i \wedge dq^i$ della forma simplettica troviamo

$$(6.76) \quad dp_i \wedge dq^i = \frac{\partial p_i}{\partial u^h} \frac{\partial q^i}{\partial u^k} du^h \wedge du^k.$$

Quindi, per l'antisimmetria del prodotto esterno $du^h \wedge du^k$, l'annullarsi del primo membro equivale alle condizioni (6.75). D'altra parte va osservato che la (6.76) esprime proprio la restrizione di ω ai vettori tangenti a Λ , o come si usa dire, la *restrizione di ω a Λ* , denotata con $\omega|_{\Lambda}$ (si veda l'osservazione seguente).

NOTA 6.5.1 – L'enunciato precedente è una proprietà generale delle forme differenziali ristrette alle sottovarietà. Sia M una varietà di dimensione m e sia $S \subset M$ una sottovarietà di dimensione n . Siano (x^A) ($A = 1, \dots, m$) coordinate su di un dominio U di M a intersezione non vuota con S e

$$x^A = x^A(u^i)$$

¹² Somma sottintesa sull'indice ripetuto i . Le espressioni a primo membro delle (6.75) sono chiamate **parentesi di Lagrange**.

delle equazioni parametriche di S nei parametri (u^i) ($i = 1, \dots, n$). Derivando formalmente queste equazioni si ottengono le componenti (v^A) dei vettori \mathbf{v} tangenti a S ,

$$v^A = \dot{x}^A = \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \dot{u}^i,$$

come funzioni di altri n parametri reali (\dot{u}^i) , che possono essere interpretati come le componenti di un vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Sia allora $\boldsymbol{\theta} = \theta_A dx^A$ una 1-forma su M (questo ragionamento si estende al caso di una qualunque p -forma). Il valore di $\boldsymbol{\theta}$ su di un generico vettore $\mathbf{v} \in TS$ è dato da

$$\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\theta} \rangle = \theta_A \langle \mathbf{v}, dx^A \rangle = \theta_A v^A = \theta_A \frac{\partial x^A}{\partial u^i} \dot{u}^i.$$

Possiamo d'altra parte interpretare le componenti \dot{u}^i come il valore dei differenziali du^i sul generico vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{u}^i = \langle \mathbf{u}, du^i \rangle.$$

Allora la formula precedente mostra che la restrizione di $\boldsymbol{\theta}$ ai vettori tangenti a S , che denotiamo semplicemente con $\boldsymbol{\theta}|_S$ (anziché, come sarebbe più corretto, con $\boldsymbol{\theta}|_{TS}$), si ottiene semplicemente sostituendo nella sua espressione $\theta_A dx^A$ le equazioni parametriche di S :

$$\boldsymbol{\theta}|_S = \theta_A \frac{\partial x^A}{\partial u^i} du^i.$$

Applicando questa regola alla 2-forma simplettica $\boldsymbol{\omega}|_\Lambda$ si trova

$$\boldsymbol{\omega}|_\Lambda = (dp_i \wedge dq^i)|_\Lambda = \left(\frac{\partial p_i}{\partial u^h} du^h \right) \wedge \left(\frac{\partial q^i}{\partial u^k} du^k \right),$$

cioè la (6.76). •

Consideriamo ora la rappresentazione (6.71).

TEOREMA 6.5.2 – *La sottovarietà Λ definita dalle equazioni (6.71) è lagrangiana se e solo se le funzioni F_i sono in involuzione sopra Λ , cioè*

$$(6.77) \quad \{F_i, F_j\}|_\Lambda = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si considerino i campi vettoriali hamiltoniani \mathbf{X}_i generati dalle F_i (usiamo la notazione \mathbf{X}_i , più semplice di \mathbf{X}_{F_i}) e quindi definiti dalle equazioni

$$(6.78) \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_i, \cdot) = -dF_i.$$

Per le definizioni (6.56) e (6.57) del paragrafo precedente seguono le uguaglianze

$$(6.79) \quad \begin{cases} \langle \mathbf{X}_i, dF_j \rangle = \{F_i, F_j\}, \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \{F_i, F_j\}. \end{cases}$$

Se valgono le (6.77) allora segue dalle (6.79) che sui punti di Λ valgono le uguaglianze

$$(6.80) \quad \begin{cases} \langle \mathbf{X}_i, dF_j \rangle = 0, \\ \omega(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = 0. \end{cases}$$

La prima afferma che ogni campo \mathbf{X}_i è tangente a Λ . Siccome questi campi sono punto per punto indipendenti, la seconda mostra che ω ristretta a tutte le coppie di vettori tangenti a Λ è nulla.¹³ Dunque Λ è lagrangiana. Viceversa, dimostriamo che le (6.77) sono necessarie per la lagrangianità cominciando con l'osservare che, valendo le (6.71), un generico vettore tangente \mathbf{v} a Λ è caratterizzato dalle equazioni $\langle \mathbf{v}, dF_i \rangle = 0$, quindi dalle equazioni

$$\omega(\mathbf{X}_i, \mathbf{v}) = 0.$$

Quest'equazione, valida per ogni $\mathbf{v} \in T\Lambda$, mostra che anche ogni campo vettoriale \mathbf{X}_i è a sua volta tangente a Λ . Pertanto, per la lagrangianità di Λ , su Λ è $\omega(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = 0$ e quindi $\{F_i, F_j\} = 0$ per la (6.57). \square

Nell'ultima parte di questa dimostrazione si è utilizzata una proprietà di algebra lineare simplettica, oggetto della nota seguente.

NOTA 6.5.2 – Chiamiamo **spazio vettoriale simplettico** una coppia (E, ω) costituita da uno spazio vettoriale E (reale e a dimensione finita) e da una forma bilineare antisimmetrica ω su E a valori in \mathbb{R} e regolare, cioè tale che $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in E \implies \mathbf{u} = 0$. Se si considera una base qualsiasi (\mathbf{e}_A) di E , le componenti $\omega_{AB} = \omega(\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B)$ di ω soddisfano alle condizioni di antisimmetria $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ e di regolarità $\det[\omega_{AB}] \neq 0$. Siccome una matrice antisimmetrica ha determinante nullo se è di ordine dispari, lo spazio vettoriale E ha necessariamente dimensione pari $m = 2n$. In analogia con quanto si fa per gli spazi euclidei, si definisce l'ortogonale (simplettico) di un sottospazio $K \subset E$ ponendo

$$K^\perp = \{\mathbf{v} \in E \mid \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{u} \in K\}.$$

La dimensione di K^\perp è complementare a quella di K . Si osservi che ogni vettore è ortogonale a se stesso. Un sottospazio $L \subset E$ è detto **lagrangiano** se ha dimensione n (la metà di E) e se su di esso si annulla ω : $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$ (si può dimostrare che in effetti n è la dimensione massima dei sottospazi su cui si annulla ω). È allora interessante osservare che $L^\perp = L$. Infatti da $\mathbf{u} \in L$ segue $\mathbf{u} \in L^\perp$ (perché per la lagrangianità è $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in L$), dunque $L \subset L^\perp$. Ma poiché L ha la stessa dimensione di L^\perp , segue l'uguaglianza dei due sottospazi. Si può allora affermare che un vettore ortogonale a L sta in L . Questa è appunto la proprietà usata alla fine della dimostrazione precedente. Occorre a questo proposito ancora osservare che in ogni punto $p \in T^*Q$ la forma simplettica ω si riduce ad una forma bilineare antisimmetrica regolare, per cui $T_p(T^*Q)$ è uno spazio vettoriale simplettico. Inoltre se $\Lambda \subset T^*Q$ è una sottovarietà lagrangiana, allora per ogni $p \in \Lambda$ lo spazio tangente $T_p\Lambda$ è un sottospazio lagrangiano di $T_p(T^*Q)$. •

¹³ I vettori \mathbf{X}_i sono indipendenti perché dalla (6.78) segue $\omega(a^i \mathbf{X}_i, \cdot) = -a^i dF_i$ e quindi da $a^i \mathbf{X}_i = 0$ segue $a^i dF_i = 0$. Ma i differenziali dF_i sono indipendenti, dunque $a^i = 0$.

Consideriamo ora una classe particolare di sottovarietà lagrangiane.

DEFINIZIONE 6.5.2 – Una sottovarietà lagrangiana $\Lambda \subset T^*Q$ si dice **trasversa alle fibre** se in ogni suo punto p lo spazio tangente $T_p\Lambda$ è complementare allo spazio $V_p(T^*Q)$ dei vettori verticali in p . Un vettore di $T(T^*Q)$, cioè un vettore tangente a T^*Q , si dice **verticale** se le sue componenti (\dot{q}^i) sono nulle.¹⁴ •

TEOREMA 6.5.3 – Una sottovarietà $\Lambda \subset T^*Q$ rappresentata da n equazioni (6.71) è trasversa alle fibre se e solo se le funzioni F_i sono verticalmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. I vettori tangenti a Λ hanno componenti (\dot{q}^i, \dot{p}_i) soddisfacenti alle equazioni lineari

$$(6.81) \quad \partial_k F_i \dot{q}^k + \partial^k F_i \dot{p}_k = 0,$$

ottenute derivando formalmente le (6.71). I vettori verticali di $T\Lambda$ soddisfano quindi alle equazioni

$$(6.82) \quad \partial^k F_i \dot{p}_k = 0.$$

La sottovarietà è trasversa alle fibre se e solo se in ogni suo punto i vettori tangenti e verticali si riducono al vettore nullo, quindi se e solo se il sistema lineare omogeneo (6.82) ammette come unica soluzione quella nulla: $\dot{p}_k = 0$. Ciò equivale alla condizione $\det[\partial^k F_i] \neq 0$. □

TEOREMA 6.5.4 – Una sottovarietà $\Lambda \subset T^*Q$ di dimensione n è trasversa alle fibre se e solo se ammette (localmente) una rappresentazione parametrica del tipo

$$(6.83) \quad p_i = W_i(q^j),$$

cioè tale che i momenti (p_i) sono funzioni delle coordinate (q^j) di Q .¹⁵

DIMOSTRAZIONE. Ritornando al teorema precedente, si osserva che la verticale indipendenza delle funzioni F_i , equivalente alla trasversalità, equivale a sua volta alla risolubilità delle equazioni (6.71) rispetto alle p_i , quindi alla possibilità di scrivere delle equazioni del tipo (6.83). □

È essenziale per i fini che ci siamo proposti il fatto che:

TEOREMA 6.5.5 – Le equazioni (6.83) definiscono una sottovarietà lagrangiana se e solo se la 1-forma su Q

$$(6.84) \quad \mathbf{W} = W_i dq^i$$

è chiusa: $d\mathbf{W} = 0$.

¹⁴ Una definizione equivalente è la seguente: un vettore $v \in T_p(T^*Q)$ è verticale se è una classe di equivalenza di curve su T^*Q la cui immagine sta tutta nello spazio T_q^*Q (cioè nella fibra) contenente p .

¹⁵ Le (q^j) hanno dunque il ruolo di parametri.

DIMOSTRAZIONE. Si può utilizzare il Teorema 6.5.1. In questo caso è $u^h = q^h$ quindi la condizione di lagrangianità (6.75) diventa semplicemente

$$\partial_h p_k - \partial_k p_h = 0,$$

ovvero

$$\partial_h W_k - \partial_k W_h = 0,$$

cioè $d\mathbf{W} = 0$. \square

NOTA 6.5.3 – La chiusura della forma \mathbf{W} equivale alla sua locale esattezza: per ogni punto di Q su cui \mathbf{W} è definita esiste un intorno $U \subseteq Q$ ed una funzione $W: U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $dW = \mathbf{W}|_U$. Ciò significa che $W_i = \partial_i W$ quindi che le (6.83) assumono la forma

$$(6.85) \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}.$$

Queste funzioni, che sulle intersezioni dei loro domini di definizione differiscono per delle costanti, si chiamano **funzioni generatrici** della sottovarietà lagrangiana Λ . Concludiamo pertanto che ogni sottovarietà lagrangiana trasversa alle fibre di T^*Q è generata (almeno localmente) da funzioni generatrici, le quali sono funzioni sopra la varietà delle configurazioni Q , cioè funzioni delle coordinate lagrangiane. \bullet

NOTA 6.5.4 – Siamo ora in grado di dare una notevole interpretazione geometrica di integrale completo. Un **integrale completo**, in senso geometrico, di un'hamiltoniana H è un

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) fogliettamento lagrangiano di } T^*Q, \\ \text{(ii) trasverso alle fibre,} \\ \text{(iii) compatibile con } H \text{ (} H \text{ è costante su ogni foglio).} \end{array} \right.$$

Per **fogliettamento** intendiamo una partizione di un aperto V di T^*Q in sottovarietà connesse e massimali, tutte della stessa dimensione (dette **fogli**). Per la condizione (i) queste sottovarietà sono lagrangiane, quindi di dimensione n ; per la (ii) sono trasverse alle fibre. Con la (iii) s'intende che su ognuna di esse H è costante. Un integrale completo può allora essere rappresentato in due modi: (a) con equazioni del tipo (6.43)₁ dove la funzione $W(q^i, a_j)$ è un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi, (b) con un sistema di equazioni indipendenti

$$(6.86) \quad F_i(q^j, p_h) = a_i$$

dove le funzioni F_i sono integrali primi in involuzione. Infatti, per ogni prefissato valore dei parametri $\mathbf{a} = (a_j)$, la funzione $W(q^i, a_j)$ è generatrice di una sottovarietà lagrangiana $\Lambda_{\mathbf{a}}$ trasversa alle fibre. La condizione di completezza (6.44), assicurando la risolubilità delle suddette equazioni rispetto alle \mathbf{a} , consente di affermare che per ogni punto di V passa una ed una sola di tali sottovarietà, perché le \mathbf{a} vengono ad essere funzioni delle (q^i, p_j) , come nelle (6.49). Le sottovarietà lagrangiane costituiscono pertanto un fogliettamento.

L'equazione di Hamilton-Jacobi (6.46) afferma infine che l'hamiltoniana H calcolata attraverso le suddette equazioni, per ogni prefissato valore delle \mathbf{a} è costante ($=h$), vale a dire che $H|_{\Lambda_{\mathbf{a}}} = \text{costante}$ per ogni $\Lambda_{\mathbf{a}}$. D'altra parte, osservato che le equazioni (6.86), essendo del tutto equivalenti alle (6.43)₁, rappresentano ancora il fogliettamento lagrangiano, le funzioni F_i sono in involuzione per il Teorema 6.5.2, nonché verticalmente indipendenti per il Teorema 6.5.3. Inoltre, per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 6.5.2, i campi vettoriali \mathbf{X}_i generati dalle funzioni F_i sono tangenti a ciascuna delle $\Lambda_{\mathbf{a}}$ e siccome su queste H è costante segue

$$0 = \langle \mathbf{X}_i, dH \rangle = \{F_i, H\}.$$

Dunque le F_i sono integrali primi di \mathbf{X}_H . Il legame tra i due tipi di rappresentazione ora descritto è proprio il contenuto del Teorema 6.4.5, che risulta pertanto dimostrato. Osserviamo ancora, per completare il quadro geometrico, che la condizione che H sia costante sulle sottovarietà lagrangiane equivale alla tangenza del campo hamiltoniano \mathbf{X}_H a queste. Per riconoscerlo basta osservare che

$$\langle \mathbf{X}_H, dF_i \rangle = \{H, F_i\} = 0.$$

Possiamo allora anche affermare che la compatibilità del fogliettamento con H coincide con l'invarianza di ogni sottovarietà lagrangiana rispetto al flusso generato da \mathbf{X}_H . •

6.6 Varietà simplettiche

L'interpretazione geometrica di integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi suggerisce di collocare tutta la materia riguardante le equazioni di Hamilton in un contesto più ampio, che vede sostituita la struttura di fibrato cotangente da una struttura più generale: quella di *varietà simplettica*.

DEFINIZIONE 6.6.1 – Dicesi **varietà simplettica** una coppia (M, ω) costituita da una varietà differenziabile M e da una 2-forma ω su M , chiusa ($d\omega = 0$) e regolare, cioè tale che in ogni punto $p \in M$ vale l'implicazione $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{u} \in T_p M \implies \mathbf{v} = 0$. Una 2-forma soddisfacente a queste condizioni prende il nome di **forma simplettica**. •

Rappresentata ω in un qualunque sistema di coordinate (x^A) di M , $\omega = \frac{1}{2} \omega_{AB} dx^A \wedge dx^B$, la condizione di regolarità equivale a $\det[\omega_{AB}] \neq 0$. Pertanto, per l'antisimmetria della matrice delle componenti $[\omega_{AB}]$, la dimensione di M è necessariamente pari (si veda la Nota 6.5.2).

NOTA 6.6.1 – Un fibrato cotangente è una varietà simplettica. Infatti la forma simplettica canonica ω , essendo esatta perché definita come il differenziale della 1-forma fondamentale di Liouville, è chiusa. Inoltre essa è regolare per quanto visto nella Nota 6.1.1. Esistono però varietà simplettiche che non sono fibrati cotangenti. Si consideri per esempio una qualunque superficie bidimensionale immersa nello spazio affine euclideo ed orientabile.

La forma $\omega = *N$ aggiunta di uno dei due versori ortogonali alla superficie, è una 2-forma regolare. Siccome $d\omega$ è una 3-forma, essa è identicamente nulla (perché la varietà ha dimensione 2). Pertanto ω è una forma symplettica. Certamente, se la superficie è compatta (una sfera, per esempio) come varietà symplettica non può identificarsi con un fibrato cotangente tramite un diffeomorfismo (che per giunta trasformi la forma volume nella forma symplettica canonica) per la semplice ragione che i fibrati cotangenti non sono compatti. •

Le definizioni di campo vettoriale hamiltoniano (quindi di sistema dinamico hamiltoniano), di parentesi di Poisson e di sottovarietà lagrangiana, viste per i fibrati cotangenti, si estendono immediatamente alle varietà symplettiche perché richiedono l'intervento della sola forma symplettica ω (si vedano, rispettivamente, l'equazione (6.34) per i campi hamiltoniani, la formula (6.56) o la (6.57) per le parentesi di Poisson e infine la Definizione 6.5.1 per le sottovarietà lagrangiane). Le condizioni di regolarità e di chiusura imposte ad ω sono poi indispensabili per estendere alle varietà symplettiche le proprietà fondamentali di questi oggetti. Si può infatti dimostrare che la regolarità di ω equivale alla regolarità delle parentesi di Poisson e che la chiusura di ω equivale all'identità di Jacobi. Inoltre resta valida la proprietà che una sottovarietà rappresentata da n equazioni indipendenti $F_i = 0$ è lagrangiana se e solo se le funzioni F_i sono in involuzione (Teorema 6.5.2).

In questo contesto si colloca il **teorema di Darboux**¹⁶ il quale afferma che, assegnata una forma symplettica ω su M , allora nell'intorno di ogni punto di M esistono delle **coordinate canoniche** (q^i, p_j) per cui si ha

$$(6.87) \quad \omega = dp_i \wedge dq^i.$$

Pertanto in queste coordinate le equazioni differenziali del primo ordine di un campo hamiltoniano X_H sono ancora le equazioni di Hamilton (6.8) e le parentesi di Poisson sono ancora esprimibili con la formula (6.55).

6.7 Sistemi hamiltoniani integrabili

Nel contesto più generale delle varietà symplettiche il teorema di Jacobi e il parallelo teorema di Liouville, formulati e dimostrati per i fibrati cotangenti, perdono in tutto o in parte il loro significato. Infatti, sebbene la Definizione 6.5.1 di sottovarietà lagrangiana richieda solo l'uso della forma symplettica e sia quindi senz'altro estendibile alle varietà symplettiche, viene però a decadere il concetto di trasversalità, proprio dei fibrati cotangenti, concetto usato sistematicamente (insieme a quello di verticale indipendenza) sia per la formulazione del teorema di Jacobi sia per la dimostrazione del teorema di Liouville.

Tuttavia, per i sistemi hamiltoniani sulle varietà symplettiche il teorema di integrabilità di Liouville, opportunamente riformulato, assume un notevole significato geometrico globale. Si tratta del fondamentale **teorema di Arnold-Liouville**¹⁷ relativo ai **sistemi hamiltoniani integrabili**.

¹⁶ Gaston Darboux, 1842-1917.

¹⁷ Vladimir Iliic Arnold, Mosca.

DEFINIZIONE 6.7.1 – Un sistema hamiltoniano (M, ω, H) , generato da una funzione H sopra una varietà simplettica (M, ω) di dimensione $2n$, si dice **integrabile** se ammette un sistema di n integrali primi (F_i) indipendenti ed in involuzione.¹⁸ •

TEOREMA 6.7.1 – Se un sistema hamiltoniano è integrabile allora le equazioni $F_i = a_i$ ($=$ costante) definiscono un fogliettamento lagrangiano (Λ_a) a cui \mathbf{X}_H è tangente. Se i campi hamiltoniani generati dalle F_i sono completi,¹⁹ allora ogni Λ_a è diffeomorfa a $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}_k$ con $0 \leq k \leq n$.²⁰ Secondo tale diffeomorfismo su ogni Λ_a la restrizione del campo \mathbf{X}_H è un **campo quasi-periodico**.

La prima parte dell'enunciato è un'immediata estensione alle varietà simplettiche di quanto visto alla Nota 6.5.4 del paragrafo precedente.

La seconda parte, la cui dimostrazione è materia di corsi superiori, fonda la sua importanza sul significato di campo quasi periodico. Si ricordi che il toro \mathbb{T}_k è il quoziente di \mathbb{R}^k rispetto a \mathbb{Z}^k . Si consideri ora su \mathbb{R}^n un campo vettoriale costante $\bar{\mathbf{X}}$ di componenti $(\omega_i) \in \mathbb{R}^n$. Per effetto del quozientamento rispetto a \mathbb{Z}^k che riduce \mathbb{R}^n alla varietà $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}_k$, questo campo si riduce ad un campo \mathbf{X} . Un campo siffatto si dice **quasi-periodico**. È particolarmente interessante il caso $k = n$, cioè il caso in cui le varietà lagrangiane Λ_a sono dei tori. In questo caso le componenti (ω_i) , che sono costanti su ogni toro ma che variano da toro a toro (sono funzioni delle a_*), prendono il nome di **frequenze**.

Per comprendere la ragione di questi termini conviene porsi nel caso di $n = 2$ (toro bidimensionale). Si vede facilmente che se le frequenze (ω_1, ω_2) sono commensurabili, cioè soddisfano ad un'uguaglianza del tipo $z^1 \omega_1 + z^2 \omega_2 = 0$ con (z^1, z^2) interi, allora le curve integrali di \mathbf{X} sono periodiche. Si può invece dimostrare che in caso contrario le curve integrali sono **dense** sul toro: ciò significa che, considerata una qualunque curva integrale massimale $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}_2$,²¹ per ogni prefissato punto $p \in \mathbb{T}_2$ e per ogni suo intorno U esiste almeno un $t_* \in \mathbb{R}$ tale che $\gamma(t_*) \in U$. In altri termini, una curva integrale passa vicino quanto si vuole ad un qualunque punto prefissato. Il teorema di Arnold-Liouville fornisce pertanto una notevole descrizione qualitativa del comportamento delle curve integrali dei sistemi hamiltoniani integrabili.

ESEMPIO 6.7.1 – Un semplice esempio di applicazione di questo teorema è il seguente. Si consideri un punto materiale soggetto ad una forza centrale newtoniana. Questo sistema ammette due integrali primi: quello dell'energia e quello delle aree; è dunque un sistema integrabile nel senso di Arnold-Liouville. Riducendoci al caso piano (la varietà Q è il piano euclideo) il fibrato cotangente è allora fogliettato in cilindri e tori di dimensione 2. Si verifica che i tori sono il supporto dei moti al finito. D'altra parte sappiamo che esiste un terzo integrale primo, l'integrale di Laplace, indipendente e non in involuzione con

¹⁸ Uno di questi può essere la stessa hamiltoniana H . Questa definizione si estende anche al caso in cui i punti in cui gli integrali primi non sono indipendenti formano un insieme chiuso (eventualmente di misura nulla) detto **insieme critico**.

¹⁹ Ipotesi senz'altro soddisfatta se le Λ_a sono compatte.

²⁰ Si ha necessariamente $\Lambda \simeq \mathbb{T}_n$ se la sottovarietà lagrangiana è compatta.

²¹ Essendo il toro una varietà compatta ogni suo campo vettoriale è completo.

quello delle aree. La coppia di integrali primi (energia, Laplace) produce allora un secondo fogliettamento di tori e cilindri diverso dal precedente. Limitandoci a considerare i moti al finito, concludiamo che le loro orbite nello spazio delle fasi T^*Q sono le intersezioni dei tori dei due fogliettamenti. Ma l'intersezione di due tori è una curva chiusa (accettiamo quest'affermazione come "intuitiva"). Quindi le orbite dei moti al finito sono chiuse ed i moti sono periodici. Questo mostra che la periodicità dei moti di un sistema hamiltoniano di dimensione 4 può riconoscersi direttamente dall'esistenza di due integrali primi (non in involuzione) distinti dall'hamiltoniana. •

Capitolo 7

Meccanica relativistica

Le equazioni del campo elettromagnetico di Maxwell prescrivono per le onde elettromagnetiche nel vuoto una velocità di propagazione costante. Questa velocità risulta essere indipendente dalla scelta del riferimento, in evidente contrasto con la meccanica classica e la legge di composizione delle velocità.

Le soluzioni proposte nel 1904 dal fisico Hendrik Antoon Lorentz (Arnhem 1853 - Haarlem 1928) e dal matematico Jules Henri Poincaré (Nancy 1854 - Parigi 1912) per superare questo contrasto, soluzioni basate su di una radicale modifica dei concetti primitivi di tempo e di spazio, vengono nel 1905 raccolte, rielaborate e sintetizzate da Albert Einstein (Ulm 1879 - Princeton 1955) in elementari ma, per quel tempo, rivoluzionari principi per una nuova meccanica.

Tre anni dopo, Hermann Minkowski (Alexotas, Lituania 1864 - Gottinga 1909) mostra che questi principi trovano una chiara e sintetica formulazione in uno spazio affine a quattro dimensioni dotato di un tensore metrico di segnatura iperbolica: lo spazio-tempo di Minkowski. Per descrivere la meccanica di Einstein occorrerà quindi premettere alcune elementari considerazioni sugli spazi vettoriali iperbolici.

7.1 Spazi vettoriali iperbolici

Richiamiamo le definizioni fondamentali concernenti i tensori metrici. Un tensore metrico g su di uno spazio vettoriale E è una forma bilineare simmetrica regolare sopra i vettori di E . Il numero $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ è anche denotato con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ed è detto **prodotto scalare** dei vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} . La regolarità del tensore metrico si esprime nell'implicazione $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{u} = 0$. Due vettori si dicono **ortogonali** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Chiamiamo (anche se impropriamente, rispetto allo stesso termine usato in Analisi) **norma** del vettore \mathbf{u} il numero

$$\|\mathbf{u}\| = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}.$$

Diciamo che il vettore \mathbf{u} è del **genere spazio**, del **genere tempo** o del **genere luce** se la sua norma è rispettivamente positiva, negativa o nulla (in quest'ultimo caso il vettore si dice anche **isotropo**: un vettore isotropo è ortogonale a se stesso). Si noti che la norma $\|\cdot\|$ è la forma quadratica associata alla forma bilineare simmetrica \mathbf{g} . Una base di E si dice **canonica** (o **ortonormale**) se costituita da vettori mutuamente ortogonali e unitari, cioè di norma ± 1 . Si dimostra che esistono basi canoniche e che la coppia (p, q) costituita dal numero p dei vettori a norma positiva e dal numero q di quelli a norma negativa è invariante rispetto alla scelta della base canonica. Questa coppia prende il nome di **segnatura** del tensore metrico (o, con abuso di linguaggio, di segnatura dello spazio). Per la regolarità del tensore metrico si ha $p + q = n$. Se la segnatura è $(n, 0)$ (cioè se la norma è definita positiva) lo spazio si dice **euclideo** (o **strettamente euclideo**). Se la segnatura è $(n - 1, 1)$ lo spazio si dice **iperbolico**.

NOTA 7.1.1 – è un utile esercizio sul concetto di prodotto scalare dimostrare quanto segue. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n e sia $E = \text{End}(V)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi lineari di V (quindi di dimensione n^2). Su di E risulta definito un prodotto scalare ponendo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{AB}).$$

La sua segnatura (p, q) è

$$p = \frac{1}{2}n(n+1), \quad q = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Quindi se $n = 2$, E diventa uno spazio iperbolico a quattro dimensioni. Se si considera su V un tensore metrico positivo, allora gli endomorfismi simmetrici rispetto a questo tensore sono del genere spazio, mentre quelli antisimmetrici sono del genere tempo. Inoltre gli endomorfismi simmetrici sono ortogonali a quelli antisimmetrici. Ad ogni tensore metrico definito positivo su V corrisponde quindi una decomposizione di E nella somma diretta di un sottospazio del genere spazio ed in un sottospazio del genere tempo. Infine, se si assegna su V un tensore metrico positivo si può definire su E il prodotto scalare

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{AB}^T)$$

che, a differenza del precedente, risulta definito positivo. •

Si consideri ora uno spazio vettoriale iperbolico (E, \mathbf{g}) di dimensione $n+1$. Denotiamo una base ortonormale generica di E con (\mathbf{e}_A) , intendendo gli indici latini maiuscoli variabili in $(0, 1, \dots, n)$, assumendo \mathbf{e}_0 del genere tempo e gli altri vettori (\mathbf{e}_i) del genere spazio, per cui gli indici latini minuscoli s'intendono variabili in $(1, \dots, n)$. Posto $g_{AB} = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B$, la matrice metrica ha la forma

$$(7.1) \quad [g_{AB}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo alcune proprietà fondamentali degli spazi iperbolici.

TEOREMA 7.1.1 – *Un vettore (diverso dal vettore nullo) ortogonale ad un vettore del genere tempo è del genere spazio. Il sottospazio ortogonale ad un vettore del genere tempo è uno spazio strettamente euclideo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathbf{u} \in E$ un vettore del genere tempo. Si può costruire una base canonica tale che $\mathbf{e}_0 = \lambda \mathbf{u}$. I restanti vettori (\mathbf{e}_i) formano allora una base del sottospazio dei vettori ortogonali a \mathbf{u} . Siccome questi vettori sono tutti del genere spazio, tale sottospazio è strettamente euclideo ed i suoi vettori (non nulli) hanno tutti norma positiva. \square

Sempre utilizzando una base canonica si dimostra in maniera analoga che:

TEOREMA 7.1.2 – *Il sottospazio ortogonale ad un vettore del genere spazio è uno spazio iperbolico se $n > 1$ o del genere tempo se $n = 1$.*

NOTA 7.1.2 – Dal Teorema 7.1.1 segue che i sottospazi del genere tempo hanno dimensione 1. •

TEOREMA 7.1.3 – *Due vettori del genere luce fra loro ortogonali sono necessariamente paralleli (cioè linearmente dipendenti).*

DIMOSTRAZIONE. Un generico vettore isotropo $\mathbf{v} \neq 0$ può sempre mettersi nella forma $\mathbf{v} = a(\mathbf{u} + \mathbf{e}_0)$, dove \mathbf{u} è un vettore unitario, del genere spazio, ortogonale a \mathbf{e}_0 ; basta infatti porre $\mathbf{u} = \frac{1}{a}\mathbf{v} - \mathbf{e}_0$ con $a = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0$ (si osservi che la condizione $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0 = 0$ violerebbe il Teorema 7.1.1). Se $\mathbf{v}' = a'(\mathbf{u}' + \mathbf{e}_0)$ è un altro vettore isotropo decomposto allo stesso modo, dalla condizione $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = 0$ segue $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' - 1 = 0$. Ma due vettori unitari del genere spazio hanno prodotto scalare uguale a 1 se e solo se sono uguali. Da $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ segue che \mathbf{v} e \mathbf{v}' sono dipendenti. \square

NOTA 7.1.3 – Dal teorema precedente segue che i sottospazi isotropi hanno dimensione 1. Inoltre, fissato un vettore $\mathbf{c} \neq 0$ del genere luce, un qualunque vettore \mathbf{u} ad esso ortogonale e non parallelo è del genere spazio (altrimenti si violerebbe il Teorema 7.1.1 e il Teorema 7.1.3. Pertanto il sottospazio dei vettori ortogonali a \mathbf{c} è a metrica singolare (la restrizione del tensore metrico a questo spazio non è più una forma bilineare regolare). •

Denotiamo con \mathcal{T} il sottoinsieme dei vettori del genere tempo. Diciamo che due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{T}$ sono **ortocroni** se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$.

TEOREMA 7.1.4 – *La relazione di ortocronismo è una relazione di equivalenza che divide \mathcal{T} in due classi, \mathcal{T}^+ e \mathcal{T}^- .*

DIMOSTRAZIONE. La relazione di ortocronismo è *riflessiva* perché si ha $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| < 0$ per ogni vettore del genere tempo (per definizione). È ovviamente *simmetrica*, perché è simmetrico il prodotto scalare. Per dimostrare la proprietà *transitiva* dobbiamo dimostrare l'implicazione

$$(7.2) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0 \quad \implies \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} < 0.$$

Per dimostrare che le classi di equivalenza sono due dobbiamo dimostrare l'implicazione

$$(7.3) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > 0 \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} < 0.$$

Per questo scopo, supposto senza ledere la generalità che il vettore \mathbf{v} sia unitario, si scelga una base canonica tale da aversi $\mathbf{e}_0 = \mathbf{v}$. Si ha allora:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n u^i w^i - u^0 w^0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{00} u^0 = -u^0, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = -w^0.$$

Le condizioni $\mathbf{u} \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{w} \in \mathcal{T}$ sono equivalenti alle disuguaglianze

$$\sum_{i=1}^n (u^i)^2 - (u^0)^2 < 0, \quad \sum_{i=1}^n (w^i)^2 - (w^0)^2 < 0.$$

Per la disuguaglianza di Schwarz, valida nello spazio strettamente euclideo ortogonale a \mathbf{e}_0 e generato dai vettori (\mathbf{e}_i) , si ha anche

$$\left(\sum_{i=1}^n u^i w^i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n (u^i)^2 \sum_{i=1}^n (w^i)^2 < (u^0 w^0)^2.$$

Abbiamo allora le seguenti implicazioni: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0) \iff (u^0 > 0, w^0 > 0) \implies u^0 w^0 > 0 \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} < 0$. Quindi l'implicazione (7.2) è dimostrata. Analogamente si ha: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > 0) \iff (u^0 < 0, w^0 < 0) \implies u^0 w^0 > 0 \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} < 0$. Quindi anche l'implicazione (7.3) è dimostrata. \square

NOTA 7.1.4 – Se $\mathbf{v} \in \mathcal{T}^+$ allora $-\mathbf{v} \in \mathcal{T}^-$, cioè $-\mathcal{T}^- = \mathcal{T}^+$. Inoltre la somma (non la differenza) di due o più vettori di \mathcal{T}^+ (risp. di \mathcal{T}^-) è ancora un vettore di \mathcal{T}^+ (risp. di \mathcal{T}^-). •

NOTA 7.1.5 – Sia \mathcal{L} l'insieme dei vettori del genere luce. Essi formano il cosiddetto **cono di luce**. Se infatti denotiamo con $\mathbf{x} = x^A \mathbf{e}_A$ il generico vettore dello spazio e se imponiamo che esso sia isotropo, cioè che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, troviamo la condizione

$$(7.4) \quad \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - (x^0)^2 = 0.$$

Questa è l'equazione di un cono di centro l'origine (vettore nullo). Il cono di luce è diviso in due falde, \mathcal{L}^+ e \mathcal{L}^- , definite dalle condizioni $\mathcal{T}^+ \cdot \mathcal{L}^+ < 0$ e $\mathcal{T}^- \cdot \mathcal{L}^- < 0$, ciascuna delle quali separa dai vettori del genere spazio i vettori delle classi \mathcal{T}^+ e \mathcal{T}^- rispettivamente, i quali stanno all'interno di ciascuna falda del cono di luce – Figura 7.1. •

NOTA 7.1.6 – I vettori unitari del genere spazio sono caratterizzati dall'equazione

$$(7.5) \quad \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - (x^0)^2 = 1.$$

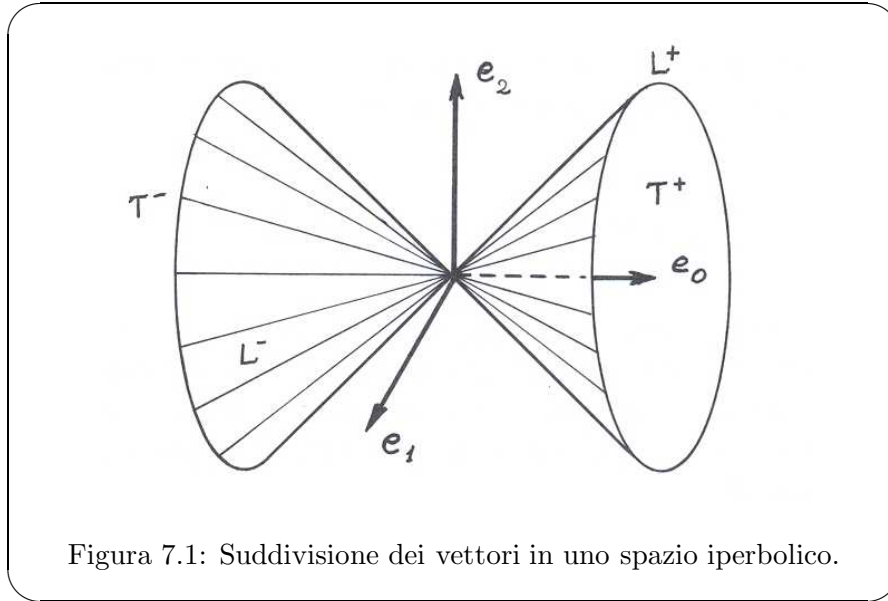


Figura 7.1: Suddivisione dei vettori in uno spazio iperbolico.

Si tratta di un iperboloide a una falda. I vettori unitari del genere tempo sono invece caratterizzati dall'equazione

$$(7.6) \quad \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - (x^0)^2 = -1.$$

Si tratta di un iperboloide a due falde. •

Esaminiamo ora, per meglio comprendere la struttura di uno spazio iperbolico, il caso più semplice dello spazio iperbolico bidimensionale ($n = 1$ nelle formule precedenti). Fissata una base canonica (e_0, e_1) , con e_0 del genere tempo, osserviamo innanzitutto che il cono di luce, insieme dei vettori isotropi, ha ora equazione

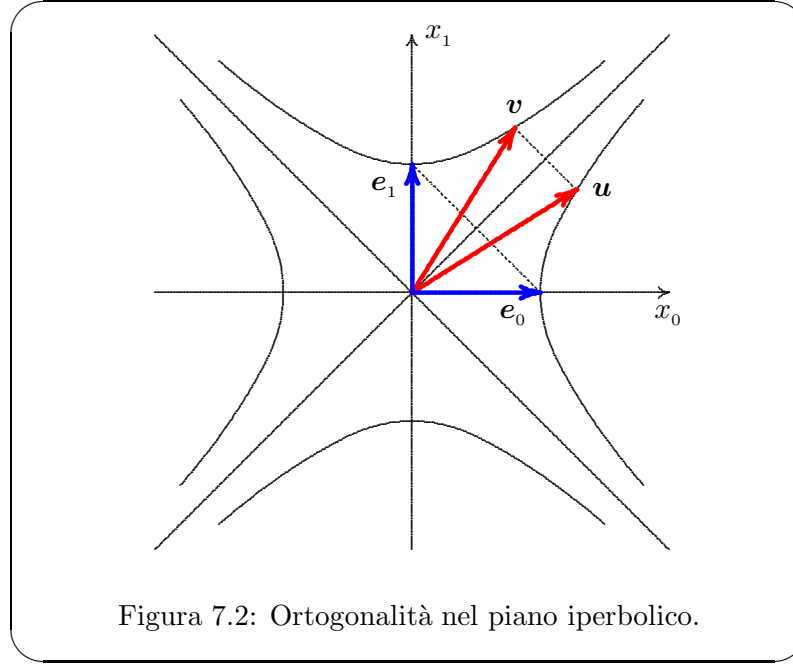
$$(x^1)^2 - (x^0)^2 = 0$$

e si riduce pertanto alle **rette isotrope** di equazione $x^1 - x^0 = 0$ e $x^1 + x^0 = 0$, bisettrici dei quadranti individuati dai vettori della base. Volendo raffigurare su di un piano coordinato i vettori (e_0, e_1) , unitari e ortogonali fra loro, occorre tener presente che il foglio su cui riportiamo la Figura 7.2 è la rappresentazione intuitiva dello spazio bidimensionale strettamente euclideo, non di quello iperbolico. Per esempio, contrariamente al nostro senso euclideo, i vettori che si trovano sulle bisettrici hanno *lunghezza nulla*. Inoltre i vettori unitari del genere tempo sono caratterizzati dall'equazione

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = 1$$

e descrivono quindi un'iperbole di vertici i punti $(\pm 1, 0)$ e asintoti le rette isotrope, mentre i vettori unitari del genere spazio sono caratterizzati dall'equazione

$$(x^1)^2 - (x^0)^2 = 1$$



e descrivono pertanto l'iperbole di vertici i punti $(0, \pm 1)$ con gli stessi asintoti. Dato un vettore $\mathbf{u} = (u^0, u^1)$ unitario del genere tempo, la retta descritta dai vettori \mathbf{x} ortogonali a \mathbf{u} ha equazione

$$u^1 x^1 - u^0 x^0 = 0.$$

Si consideri fra questi uno dei due vettori \mathbf{v} unitari. Sappiamo che questi sono del genere spazio. Allora

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1 + 1 - 0 = 0.$$

Ciò significa che il vettore differenza $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ è isotropo, quindi giacente su una delle due bisettrici. Concludiamo che, nella rappresentazione euclidea, due vettori del piano iperbolico unitari e ortogonali sono simmetrici rispetto ad una delle due bisettrici – Figura 7.2.

Si osservi ancora, guardando la figura, che per un “osservatore iperbolico” la coppia (\mathbf{u}, \mathbf{v}) è ancora una base canonica quindi del tutto equivalente alla coppia $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ e ottenibile da questa mediante una *rotazione*. Siamo allora condotti ad esaminare il gruppo delle isometrie sullo spazio iperbolico bidimensionale. Ci limitiamo a quelle di determinante +1, cioè alle rotazioni proprie. Data una rotazione \mathbf{R} , si ponga

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_0) = a \mathbf{e}_0 + b \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{R}(\mathbf{e}_1) = c \mathbf{e}_0 + d \mathbf{e}_1.$$

Ciò equivale a considerare la matrice delle componenti di \mathbf{R} :

$$[R_A^B] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dalle condizioni $\mathbf{R}(\mathbf{e}_A) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{e}_B) = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B$, $\det \mathbf{R} = 1$, caratteristiche di una rotazione, seguono le uguaglianze:

$$a^2 - b^2 = 1, \quad d^2 - c^2 = 1, \quad bd - ac = 0, \quad ad - bc = 1.$$

Dalle ultime due si trae $a = d$ e $b = c$. Dalla prima segue $a^2 \geq 1$. Possiamo allora porre

$$(7.7) \quad a = \cosh \kappa, \quad b = \sinh \kappa,$$

oppure

$$(7.8) \quad a = -\cosh \kappa, \quad b = \sinh \kappa.$$

Nel primo caso è $a > 0$ e siccome $a = -\mathbf{R}(\mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0$ segue $\mathbf{R}(\mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 < 0$. Dunque \mathbf{R} è una **rotazione ortocrona**, conserva cioè le classi dei vettori del genere tempo. La matrice delle componenti di una rotazione ortocrona ha quindi la forma:

$$(7.9) \quad [Q_A^B] = \begin{bmatrix} \cosh \kappa & \sinh \kappa \\ \sinh \kappa & \cosh \kappa \end{bmatrix}.$$

Nel secondo caso si ha una rotazione non ortocrona e la matrice corrispondente è:

$$(7.10) \quad [Q_A^B] = \begin{bmatrix} -\cosh \kappa & \sinh \kappa \\ \sinh \kappa & -\cosh \kappa \end{bmatrix}$$

Il parametro κ che interviene nella rappresentazione (7.9) prende il nome di **pseudoangolo della rotazione**. Esso può variare da $-\infty$ a $+\infty$, ricoprendo tutte le rotazioni ortocrone. Per $\kappa = 0$ si ha ovviamente $\mathbf{R} = \mathbf{1}$. La composizione di due rotazioni di pseudoangolo κ_1 e κ_2 è la rotazione di pseudoangolo $\kappa_1 + \kappa_2$; lo si desume dalla (7.9) utilizzando le proprietà elementari delle funzioni trigonometriche iperboliche. Sempre in base a tali proprietà, si osserva che si può scegliere come parametro rappresentativo la tangente iperbolica dello pseudoangolo,

$$(7.11) \quad \beta = \tanh \kappa = \frac{\sinh \kappa}{\cosh \kappa},$$

variabile nell'intervallo aperto $(-1, 1)$. La (7.9) diventa allora

$$(7.12) \quad [Q_A^B] = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}.$$

7.2 Lo spazio-tempo di Minkowski

La meccanica classica (o newtoniana) postula l'esistenza di un tempo assoluto e di una classe particolare di riferimenti (i riferimenti inerziali o galileiani) rispetto ai quali una particella libera da vincoli e isolata (non soggetta cioè ad alcuna sollecitazione) si muove di

moto rettilineo uniforme. Postula inoltre l'invarianza delle leggi della meccanica in questi riferimenti (**principio di relatività galileiana**). Di conseguenza le leggi della meccanica ammettono una formulazione assoluta, cioè indipendente dalla scelta del riferimento, nell'insieme degli eventi dotato di una struttura di spazio affine a quattro dimensioni: lo **spazio-tempo di Newton**. I moti inerziali, cioè i moti dei punti liberi e isolati, sono rappresentati da rette nello spazio-tempo ed il tempo assoluto definisce un fogliettamento di sottospazi affini tridimensionali di eventi contemporanei.

La meccanica relativistica (o einsteiniana) postula ancora l'esistenza dei riferimenti inerziali ma abbandona l'idea di un tempo assoluto, assumendo invece che ogni riferimento inerziale sia dotato di un suo tempo (il **tempo relativo**). All'invarianza rispetto alla scelta del riferimento dell'intervallo temporale $t(P) - t(O)$ di due eventi (O, P) viene sostituita l'invarianza della quantità

$$(7.13) \quad \|OP\| = |OP|_s^2 - c^2 |OP|_t^2,$$

detta **intervallo spazio-temporale**. Qui il simbolo $|OP|_s$ indica la **distanza spaziale relativa** al riferimento dei due eventi e il simbolo $|OP|_t = t(P) - t(O)$ il loro **intervallo temporale relativo**. Inoltre c è una costante universale (la velocità della luce nel vuoto). Più precisamente, se in due riferimenti (o laboratori) inerziali diversi \mathcal{R} e \mathcal{R}' si misurano con strumenti dello stesso tipo distanze spaziali s ed s' e tempi relativi t e t' rispettivamente, allora si ha

$$|OP|_t = |OP|_{t'} \quad \text{in meccanica newtoniana,}$$

$$|OP|_s^2 - c^2 |OP|_t^2 = |OP|_{s'}^2 - c^2 |OP|_{t'}^2 \quad \text{in meccanica relativistica.}$$

L'esistenza dei riferimenti inerziali e dei moti inerziali porta ancora ad assumere per lo spazio-tempo M della meccanica einsteiniana una struttura di spazio affine a quattro dimensioni. Inoltre l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale (7.13) si traduce nell'esistenza su M (cioè sullo spazio vettoriale soggiacente) di un tensore metrico \mathbf{g} tale che $\|OP\|$ è proprio la norma del vettore OP . Questo tensore metrico è iperbolico, cioè di segnatura (3,1). Infatti, se in un riferimento inerziale consideriamo coordinate cartesiane ortonormali (x, y, z) aventi origine nel punto dove si verifica l'evento O ed il tempo relativo t si misura a partire dallo stesso evento O , allora ogni altro evento P è determinato dalle coordinate spazio-temporali (x, y, z, t) ed inoltre

$$|OP|_s^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad |OP|_t^2 = t^2.$$

Di conseguenza

$$(7.14) \quad \|OP\| = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

Dunque la metrica ha segnatura (3,1).

Possiamo allora sintetizzare tutte le precedenti considerazioni nel seguente

PRINCIPIO: *lo spazio-tempo M della relatività ristretta, detto **spazio-tempo di Minkowski**, è uno spazio affine iperbolico a quattro dimensioni.*

Adotteremo le seguenti convenzioni riguardanti i riferimenti affini in M . Conformemente a quanto fatto al §7.1, denoteremo con

$$(\mathbf{e}_A) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

una generica base canonica, dove

$$\|\mathbf{e}_0\| = -1, \quad \|\mathbf{e}_i\| = 1.$$

Gli indici latini maiuscoli assumeranno quindi i valori $(0, 1, 2, 3)$, quelli minuscoli i valori $(1, 2, 3)$. La matrice delle componenti del tensore metrico $g_{AB} = \mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B$ assume la forma canonica

$$(7.15) \quad [g_{AB}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denoteremo con

$$(x^A) = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x, y, z)$$

le corrispondenti coordinate cartesiane ortonormali aventi origine in un punto (evento) $O \in M$. Pertanto per ogni punto P

$$OP = x^A \mathbf{e}_A = x^0 \mathbf{e}_0 + x^i \mathbf{e}_i = x^0 \mathbf{e}_0 + x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

e

$$\|OP\| = -(x^0)^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Dal confronto di quest'ultima uguaglianza con la (7.14) si osserva che conviene porre

$$(7.16) \quad x^0 = ct.$$

Come si vede da queste premesse, e come sarà ulteriormente precisato nel seguito, un versore del genere tempo \mathbf{e}_0 individua un riferimento inerziale¹ e, con la (7.16), il corrispondente tempo relativo t .

Passiamo ora a definire gli enti cinematici fondamentali del moto di un punto. Nello spazio-tempo il moto di una particella è una successione di eventi (la sua “storia”) rappresentabile con una curva di equazione parametrica vettoriale

$$(7.17) \quad OP = \mathbf{R}(\tau).$$

Ad ogni valore del parametro τ corrisponde il vettore posizione $\mathbf{R}(\tau)$ dell'evento $P(\tau)$ rispetto ad un prefissato evento di riferimento O . Questo parametro τ può essere pensato come “tempo” misurato da un orologio posseduto dalla particella. La scelta del parametro non è unica, ma noi assumeremo che sia tale da soddisfare alla seguente definizione:

¹ È infatti del tutto arbitraria la scelta dei tre vettori ortonormali del genere spazio (\mathbf{e}_i) ortogonali a \mathbf{e}_0 .

DEFINIZIONE 7.2.1 – La **storia di una particella materiale** è una curva parametrizzata tale che il vettore

$$(7.18) \quad \boxed{\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau}}$$

è del genere tempo e soddisfa alla **condizione di normalizzazione**

$$(7.19) \quad \boxed{\|\mathbf{V}\| = -c^2}$$

Il vettore \mathbf{V} ed il parametro τ (definito a meno di una costante additiva) sono detti rispettivamente **velocità assoluta** e **tempo proprio** della particella. •

NOTA 7.2.1 – Occorre aggiungere una ulteriore convenzione: che tutte le particelle abbiano velocità assolute **ortocrone**, appartengano cioè all'interno di una medesima falda del cono di luce dello spazio vettoriale soggiacente a M . Chiamiamo questa falda **futuro** e la denotiamo con \mathcal{T}^+ (l'altra falda \mathcal{T}^- sarà chiamata **passato**). Ciò significa che le velocità assolute di due particelle, oltre alla condizione di normalizzazione (7.19), soddisfano anche alla **condizione di ortocronismo** (si veda il §7.1)

$$(7.20) \quad \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 < 0. \quad \bullet$$

NOTA 7.2.2 – La storia di una particella materiale è dunque una **curva del genere tempo**, cioè tale che in ogni suo punto il vettore tangente è del genere tempo. Questa assunzione trova giustificazione nelle considerazioni seguenti. Per **particella materiale** intendiamo una particella tale che in ogni evento della sua storia esiste un riferimento inerziale in cui è in quiete (un **fotone**, espressione della teoria particellare della luce, non soddisfa a questa condizione). In un generico riferimento affine si ha

$$(7.21) \quad \mathbf{V} = \frac{dx^0}{d\tau} \mathbf{e}_0 + \frac{dx^i}{d\tau} \mathbf{e}_i.$$

Dunque, per ogni prefissato valore di τ deve esistere un riferimento nel quale

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0$$

(queste derivate rappresentano infatti le componenti della velocità relativa a quel riferimento). Allora in quell'istante

$$\mathbf{V} = \frac{dx^0}{d\tau} \mathbf{e}_0$$

e quindi

$$(7.22) \quad \|\mathbf{V}\| = -\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 < 0.$$

Dunque \mathbf{V} è sempre del genere tempo. Per quel che riguarda invece la condizione di normalizzazione (7.19) va osservato quanto segue. È ragionevole assumere che *per una*

particella in quiete in un riferimento il tempo proprio τ coincida a meno di una costante additiva col tempo relativo t , cioè che si abbia sempre $\frac{dt}{d\tau} = 1$. Allora dalla (7.21), tenuto conto della (7.16), segue $\|\mathbf{V}\| = -c^2$. D'altra parte, siccome per una particella materiale qualsiasi esiste in ogni evento della sua storia un riferimento di “quiete istantanea”, è ragionevole assumere la condizione $\|\mathbf{V}\| = -c^2$ per tutti questi eventi. •

NOTA 7.2.3 – Per ogni evento $O \in M$ l'insieme degli eventi P tali che $\|OP\| = 0$ (cioè tali che i vettori OP sono del genere luce) prende il nome di **cono di luce** in O . Questo termine è giustificato dalle considerazioni seguenti. Si supponga che l'evento O , origine di un sistema di coordinate affini, corrisponda all'accensione di una lampada puntiforme al tempo $t = 0$. Il fronte d'onda luminoso che si propaga nello spazio tridimensionale è una sfera centrata nell'origine e di raggio ct , dove c è la velocità della luce. Esso ha quindi equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Nello spazio-tempo questa è l'equazione di un cono di vertice l'origine e asse l'asse x^0 . Gli eventi P che si trovano sui vari fronti d'onda soddisfano quindi alla condizione

$$\|OP\| = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Il vettore OP è pertanto isotropo. Si noti che questa è una condizione assoluta, cioè indipendente dal riferimento, per l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale. Si osservi inoltre che ogni retta generatrice del cono rappresenta un *raggio di luce* emesso dall'evento O . Pertanto nello spazio-tempo i raggi luminosi nel vuoto sono rappresentati da **rette isotrope**. •

7.3 Riferimenti inerziali e tempo relativo

Possiamo ora precisare la nozione di riferimento e di tempo relativo. Un *riferimento fisico* \mathcal{R} è identificabile con un insieme continuo di particelle materiali ideali invadente (in tutto o in parte) l'universo. Le storie di queste particelle vengono a formare nello spazio-tempo M una *congruenza di curve*, cioè un insieme di curve non intersecantisi, ricoprenti M in tutto o in parte. I vettori velocità assoluta di queste particelle definiscono dunque un campo vettoriale \mathbf{X} su M soddisfacente alla condizione di normalizzazione

$$(7.23) \quad \|\mathbf{X}\| = -c^2.$$

Pertanto identificheremo un riferimento con un campo vettoriale \mathbf{X} a valori in \mathcal{T}^+ e soddisfacente alla (7.23). Le curve integrali di \mathbf{X} sono le storie delle particelle del riferimento. In particolare abbiamo che *un riferimento è inerziale se e solo se \mathbf{X} è costante*. Infatti questa condizione è verificata se e solo se tutte le particelle del riferimento hanno storie rettilinee. Diamo ora la generale definizione di tempo relativo ad un riferimento.

DEFINIZIONE 7.3.1 – *Il tempo relativo ad un riferimento \mathbf{X} è una funzione $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$(7.24) \quad dt = -\frac{1}{c^2} \xi, \quad \xi = \mathbf{X}^\flat. \quad \bullet$$

Questa definizione ha senso perché, essendo lo spazio-tempo dotato di un tensore metrico, ad ogni campo vettoriale \mathbf{X} una 1-forma $\xi = \mathbf{X}^\flat$ tale che, per ogni vettore \mathbf{u} ,

$$(7.25) \quad \langle \mathbf{u}, \xi \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{X}.$$

Di conseguenza,

$$(7.26) \quad \langle \mathbf{X}, dt \rangle = 1$$

perché

$$\langle \mathbf{X}, dt \rangle = -\frac{1}{c^2} \langle \mathbf{X}, \xi \rangle = -\frac{1}{c^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = 1.$$

Affinché esista la funzione t , nel qual caso essa è definita modulo una costante, è necessario e sufficiente che la 1-forma ξ sia chiusa (lemma di Poincaré: si osservi che M è identificabile con \mathbb{R}^4):

$$(7.27) \quad d\xi = 0.$$

Questa condizione è senz'altro soddisfatta se \mathbf{X} è costante, cioè se il riferimento è inerziale.

Le proposizioni seguenti mostrano che la nozione di tempo relativo ora introdotta è coerente con quella già utilizzata nei ragionamenti precedenti.

TEOREMA 7.3.1 – *Il tempo relativo ad un riferimento coincide (modulo una costante) col tempo proprio delle particelle del riferimento.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti la derivata del tempo relativo t rispetto al tempo proprio τ di una particella del riferimento coincide con la derivata di t rispetto al campo vettoriale \mathbf{X} , quindi, per la (7.26),

$$\frac{dt}{d\tau} = \langle \mathbf{X}, dt \rangle = 1. \quad \square$$

TEOREMA 7.3.2 – *Le varietà di contemporaneità $t = \text{costante}$ sono ortogonali al campo \mathbf{X} cioè alle storie delle particelle del riferimento. Esse sono varietà tridimensionali riemanniane, con metrica definita positiva.*

DIMOSTRAZIONE. Siccome $dt \neq 0$ le equazioni $t = \text{costante}$ definiscono effettivamente delle sottovarietà tridimensionali di M . Ogni vettore \mathbf{u} tangente ad una superficie $t = \text{costante}$ è caratterizzato dalla condizione $\langle \mathbf{u}, dt \rangle = 0$ che per la (7.24) e la (7.25) equivale a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{X} = 0$. Per dimostrare la seconda parte del teorema basta ricordare che in uno spazio vettoriale iperbolico il sottospazio ortogonale ad un vettore del genere tempo è strettamente euclideo. \square

TEOREMA 7.3.3 – *Se il riferimento rappresentato dal campo \mathbf{X} è inerziale allora il tempo relativo definito dalla (7.24) è tale che per ogni coppia (O, P) di eventi vale l'uguaglianza*

$$(7.28) \quad t(P) - t(O) = -\frac{1}{c^2} OP \cdot \mathbf{X}.$$

Gli spazi affini tridimensionali ortogonali a \mathbf{X} sono strettamente euclidei e rappresentano gli insiemi degli eventi contemporanei rispetto al tempo relativo t .

DIMOSTRAZIONE. In un qualunque sistema di coordinate ortonormali (x^A) ($A = 0, 1, 2, 3$) per ξ sussiste la rappresentazione

$$\xi = \xi_A dx^A,$$

con le componenti ξ_A costanti. Si consideri su M la funzione

$$t = -\frac{1}{c^2} \xi_A x^A.$$

Differenziando si trova

$$dt = -\frac{1}{c^2} \xi_A dx^A = -\frac{1}{c^2} \xi,$$

quindi t è un tempo relativo. Inoltre, per ogni coppia di eventi (O, P) ,

$$t(P) - t(O) = -\frac{1}{c^2} \xi_A (x^A(P) - x^A(O)) = -\frac{1}{c^2} \langle OP, \xi \rangle$$

e la (7.28) è soddisfatta. La seconda parte è conseguenza diretta del teorema precedente. \square

NOTA 7.3.1 – Per i riferimenti inerziali nello spazio-tempo di Minkowski si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle svolte per i riferimenti inerziali nello spazio-tempo di Newton. (i) Le storie delle particelle costituenti un riferimento inerziale \mathbf{X} formano un fascio di rette parallele al vettore \mathbf{X} . (ii) Le varietà M_s costituite dagli eventi contemporanei ($t = s$) nel tempo relativo a quel riferimento sono gli spazi affini tridimensionali euclidei ortogonali a \mathbf{X} (Teorema 7.3.3). (iii) L'insieme $M_{\mathbf{X}}$ delle rette del fascio è uno spazio affine euclideo tridimensionale: esso rappresenta l'universo osservato dal riferimento \mathbf{X} . (iv) Lo spazio-tempo di Minkowski risulta di conseguenza identificabile nel prodotto di due spazi affini euclidei: $M \simeq M_{\mathbf{X}} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Appare evidente dalle considerazioni precedenti, in particolare dall'osservazione (iii), che la *contemporaneità* degli eventi è un concetto relativo, non assoluto. Questo fatto è discusso nei dettagli più avanti. •

7.4 Decomposizioni relative

D'ora innanzi considereremo solo riferimenti inerziali, ciascuno dei quali sarà quindi rappresentato da un vettore \mathbf{X} costante del genere tempo, orientato verso il futuro e normalizzato (di norma uguale a $-c^2$). Denoteremo con \mathcal{S} il sottospazio dei vettori ortogonali ad \mathbf{X} , i quali si diranno **vettori spaziali rispetto a \mathbf{X}** . Per ogni vettore \mathbf{U} sussisterà una **decomposizione relativa** ad un riferimento \mathbf{X}

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \alpha \mathbf{X}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{X} = 0,$$

Il vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ e lo scalare α si diranno rispettivamente **parte spaziale** e **parte temporale** relativa a \mathbf{X} di \mathbf{U} .

Per il vettore posizione $OP = \mathbf{R}(\tau)$ di una particella materiale nello spazio-tempo M sussiste la decomposizione relativa

$$(7.29) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \kappa \mathbf{X}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

La parte spaziale \mathbf{r} rappresenta il vettore posizione della particella nello spazio affine tridimensionale euclideo $M_{\mathbf{X}}$ rappresentante lo spazio fisico osservato dal riferimento. La parte temporale κ rappresenta l'intervallo temporale relativo perché per la (7.28) e per la (7.29)

$$(7.30) \quad t(P) - t(O) = -\frac{1}{c^2} \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} = \kappa.$$

Se si pensa \mathbf{R} funzione del tempo proprio attraverso il tempo relativo t si trova

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{X} \right),$$

cioè

$$(7.31) \quad \mathbf{V} = \gamma (\mathbf{v} + \mathbf{X})$$

posto

$$(7.32) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

e

$$(7.33) \quad \gamma = \frac{dt}{d\tau}$$

La (7.31) è la **decomposizione relativa della velocità assoluta**. Dalla (7.32) si osserva che il vettore spaziale \mathbf{v} è la **velocità relativa** al riferimento \mathbf{X} . Lo scalare γ prende il nome di **fattore di Lorentz**. Oltre che dalla (7.33) esso è anche definito dall'uguaglianza

$$(7.34) \quad \gamma = -\frac{1}{c^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}$$

ottenuta moltiplicando scalarmente la (7.31) per \mathbf{X} . Siccome i vettori velocità assoluta sono per convenzione ortocroni, si ha $\mathbf{V} \cdot \mathbf{X} < 0$ e quindi $\gamma > 0$.

NOTA 7.4.1 – Moltiplicando ambo i membri della (7.31) per se stessi si trova $\gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2$ quindi, essendo $\gamma > 0$,

$$(7.35) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dove v è la velocità scalare relativa al riferimento inerziale scelto. Di qui segue la limitazione

$$(7.36) \quad v < c$$

imposta alle velocità relative delle particelle materiali e la limitazione

$$(7.37) \quad \gamma \geq 1$$

per il fattore di Lorentz. Si ha $\gamma = 1$ solo per gli eventi di istantanea quiete nel riferimento.

•

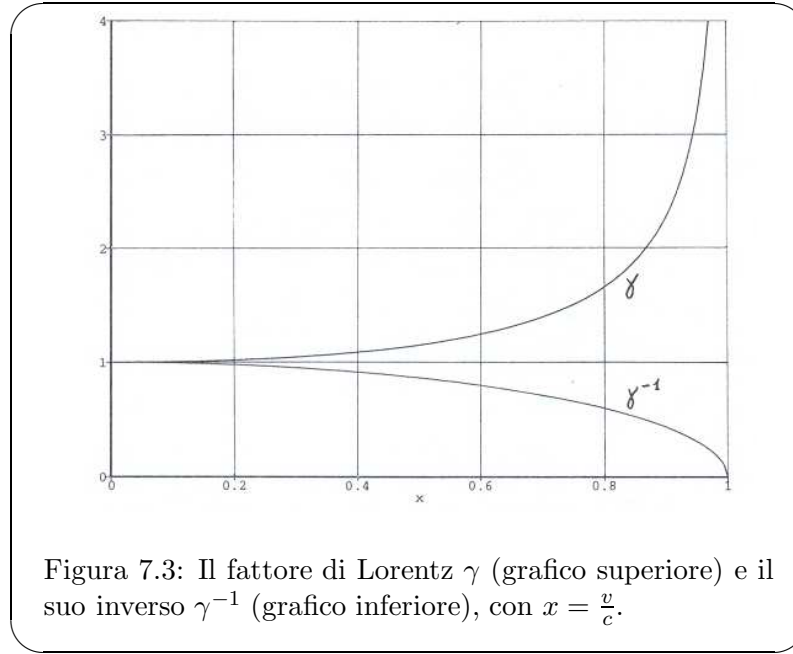


Figura 7.3: Il fattore di Lorentz γ (grafico superiore) e il suo inverso γ^{-1} (grafico inferiore), con $x = \frac{v}{c}$.

NOTA 7.4.2 – Il paradosso dei gemelli. Si noti bene che il tempo relativo ad un riferimento è una funzione reale definita su tutto lo spazio-tempo, $t: M \rightarrow \mathbb{R}$, e che invece il tempo proprio di una particella può essere visto come una funzione definita lungo la storia di questa. Dalle (7.33) e (7.37) segue che

$$\frac{dt}{d\tau} \geq 1.$$

Ciò mostra che lungo la storia di una particella non in quiete rispetto ad un riferimento inerziale \mathbf{X} il tempo relativo al riferimento cresce più rapidamente del tempo proprio della particella. Una conseguenza è che al ritorno sulla Terra, dopo un viaggio interplanetario di lunga durata e ad alta velocità, un astronauta risulta essere più giovane del fratello gemello rimasto sul pianeta: il suo orologio, sincronizzato al momento della partenza con un orologio di egual tipo posseduto dal gemello, segna un tempo trascorso $\Delta\tau$ pari a

$$\Delta\tau = \frac{1}{\gamma} \Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$$

dove Δt è il tempo trascorso sulla Terra. Si suppone, per la validità di questa formula, che il viaggio avvenga a velocità scalare costante v rispetto al riferimento inerziale definito dal sistema solare, nel quale la Terra si muove con velocità decisamente trascurabile rispetto a quella della luce. Nel caso di una velocità pari a $v = \frac{c}{10} = 30.000 \text{ Km/sec}$ il fattore di Lorentz è di circa $\gamma = 1,005$ e quindi $\gamma^{-1} = 0,99498$ circa. Se l'intervallo di tempo Δt è di 50 anni (~ 18.262 giorni) la differenza con $\Delta\tau$ è comunque soltanto di ~ 91 giorni. L'andamento del fattore di Lorentz è illustrato in Figura 7.3. •

Si consideri ora la **decomposizione relativa di un intervallo assoluto** OP di due eventi di M . Si ponga cioè

$$(7.38) \quad OP = \mathbf{r} + \kappa \mathbf{X}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

La parte spaziale \mathbf{r} è l'**intervallo spaziale relativo** al riferimento e lo scalare κ è l'**intervallo temporale relativo** (si veda la (7.30)):

$$(7.39) \quad \kappa = -\frac{1}{c^2} OP \cdot \mathbf{X} = t(P) - t(O).$$

Se $\mathbf{r} = 0$ i due eventi O e P sono **spazialmente coincidenti**, avvengono cioè nel medesimo luogo rispetto al riferimento. Se $\kappa = 0$ allora essi sono **contemporanei** rispetto al riferimento. Se $\kappa > 0$, cioè se $t(P) > t(O)$, si dice che P segue (o è successivo a) O nella cronologia determinata dal riferimento. Consideriamo separatamente i due casi in cui l'intervallo assoluto OP è del genere tempo oppure del genere spazio.

TEOREMA 7.4.1 – *Se OP è del genere tempo ed orientato verso il futuro ($OP \in \mathcal{T}^+$) allora esiste un riferimento in cui i due eventi avvengono nel medesimo luogo e inoltre l'evento P è successivo a O in ogni riferimento (si dice che P appartiene al **futuro assoluto** di O).*

DIMOSTRAZIONE. Se OP è del genere tempo si può porre $OP = \kappa \mathbf{X}$ con $\mathbf{X} \in \mathcal{T}^+$, $\|\mathbf{X}\| = -c^2$ e $\kappa > 0$. Allora \mathbf{X} definisce un riferimento inerziale in cui $\mathbf{r} = 0$, nel quale cioè gli eventi occorrono nel medesimo luogo. Per ogni altro riferimento \mathbf{X}' si ha, tenuto conto della (7.39),

$$\kappa' = t'(P) - t'(O) = -\frac{1}{c^2} OP \cdot \mathbf{X}' = -\frac{1}{c^2} \kappa \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}' > 0$$

essendo $\kappa > 0$ e $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}' < 0$ per l'ortocronismo dei vettori rappresentanti i riferimenti. Ciò prova che P segue O in ogni riferimento. \square

TEOREMA 7.4.2 – *Se OP è del genere spazio allora esiste un riferimento rispetto al quale gli eventi O e P sono contemporanei. La relazione temporale tra i due eventi dipende dal riferimento: a seconda della scelta di questo l'evento P può precedere o essere contemporaneo o seguire l'evento O .*

DIMOSTRAZIONE. Se OP è del genere spazio esiste certamente un vettore del genere tempo ad esso ortogonale, quindi un riferimento \mathbf{X} tale che $OP \cdot \mathbf{X} = 0$. Quindi rispetto al riferimento \mathbf{X} i due eventi sono contemporanei. Nel 2-piano iperbolico generato dai vettori OP e \mathbf{X} si può sempre scegliere un vettore \mathbf{X}' rappresentante un riferimento, quindi tale che $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}' < 0$ e $\|\mathbf{X}'\| = -c^2$, tale da soddisfare alla condizione $OP \cdot \mathbf{X}' < 0$, così come se ne può scegliere un altro \mathbf{X}'' tale che $OP \cdot \mathbf{X}'' > 0$. \square

Nella Figura 7.4 le linee tratteggiate rappresentano il fogliettamento ortogonale a \mathbf{X}'' degli eventi contemporanei secondo il tempo t'' relativo a questo riferimento; quelle a punto e tratto rappresentano il fogliettamento ortogonale a \mathbf{X}' , di tempo relativo t' . Seguendo il tempo relativo t' si osserva che l'evento O precede P , mentre nel tempo relativo t'' l'evento O segue P .

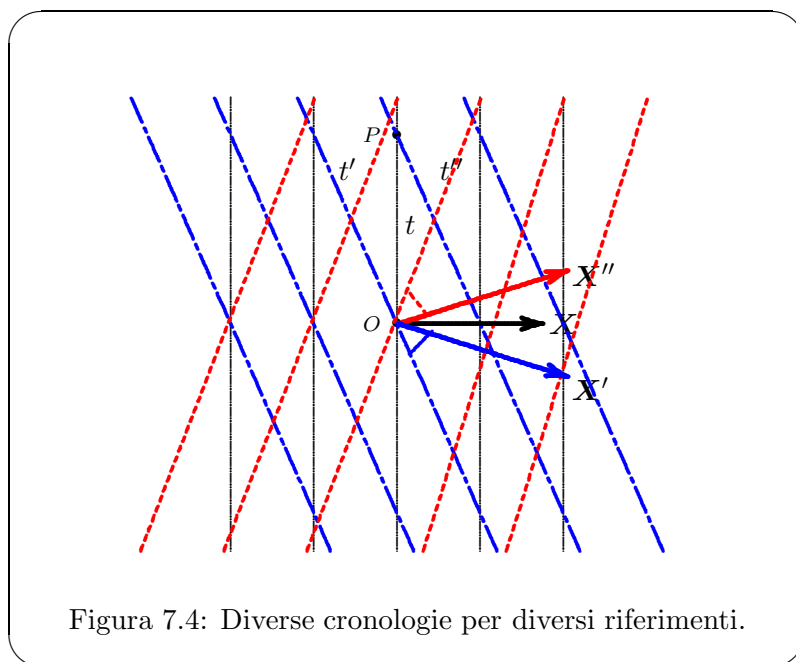
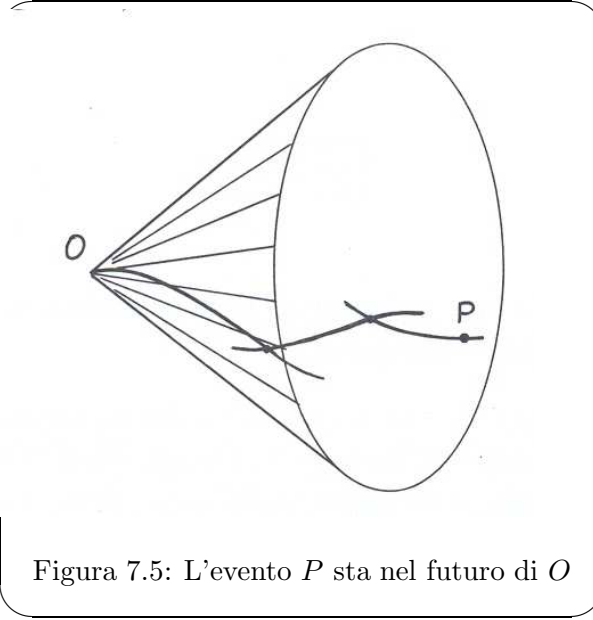


Figura 7.4: Diverse cronologie per diversi riferimenti.

NOTA 7.4.3 – La circostanza che i due eventi (O, P) possano avere relazione cronologica invertita a seconda della scelta del riferimento può suscitare perplessità, per l'eventuale sussistenza di una relazione di causa-effetto tra gli eventi stessi. Una tale relazione è tuttavia esclusa se si assume il seguente **principio di causalità**: *due eventi (O, P) sono in relazione di causa-effetto se e solo se sono connessi da storie, cioè da archi di curve del genere tempo*. Da questo principio segue che se due eventi O e P sono collegati da storie allora il vettore OP è necessariamente del genere tempo e quindi, per il Teorema 7.4.1, vi è una relazione cronologica assoluta fra i due eventi. Sia infatti $\mathbf{R}(\tau)$ una curva del genere tempo tale che $OP_0 = \mathbf{R}(\tau_0)$ e $OP_1 = \mathbf{R}(\tau_1)$ con $\tau_1 > \tau_0$. Allora, posto che la velocità assoluta $\mathbf{V}(\tau)$ è la derivata di $\mathbf{R}(\tau)$, si ha

$$P_0P_1 = \mathbf{R}(\tau_1) - \mathbf{R}(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathbf{V}(\tau) d\tau.$$

D'altra parte la somma di due vettori \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 del genere tempo ed entrambi orientati nel futuro è ancora un vettore del genere tempo ed orientato nel futuro. Quindi anche l'integrale precedente dà luogo ad un vettore del genere tempo orientato nel futuro. Alla stessa conclusione si giunge se O e P sono congiunti da più storie: l'evento P appartiene al futuro assoluto di O , cioè sta all'interno del cono di luce originato in O – Figura 7.5. •

Figura 7.5: L'evento P sta nel futuro di O

7.5 Le trasformazioni di Lorentz

Si considerino nello spazio-tempo di Minkowski due riferimenti inerziali \mathbf{X} e \mathbf{X}' . Siccome questi vettori rappresentano le velocità assolute delle particelle inerziali dei rispettivi riferimenti, se ne possono considerare le reciproche decomposizioni relative. Per esempio

$$(7.40) \quad \mathbf{X}' = \rho(\mathbf{u} + \mathbf{X}), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{X} = 0$$

dove

$$(7.41) \quad \rho = -\frac{1}{c^2} \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

e $u^2 = \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, è la decomposizione della velocità assoluta \mathbf{X}' rispetto a \mathbf{X} . La parte spaziale \mathbf{u} , essendo la velocità delle particelle del riferimento \mathbf{X}' rispetto a \mathbf{X} , ha il significato di **velocità di trascinamento**. Scambiando il ruolo dei due riferimenti, posto cioè

$$(7.42) \quad \mathbf{X} = \rho'(\mathbf{u}' + \mathbf{X}'), \quad \mathbf{u}' \cdot \mathbf{X}' = 0,$$

$$(7.43) \quad \rho' = -\frac{1}{c^2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}' = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

e confrontando la (7.41) con la (7.43) si osserva che

$$(7.44) \quad \rho = \rho'$$

e quindi che

$$(7.45) \quad u^2 = u'^2$$

Pertanto:

TEOREMA 7.5.1 – *Le due velocità di trascinamento determinate da due riferimenti hanno uguale intensità.*

NOTA 7.5.1 – Si noti che a questo risultato, ovvio nell'ambito della cinematica classica, non corrisponde l'analoga classica relazione tra le velocità di trascinamento, una opposta all'altra: $\mathbf{u} = -\mathbf{u}'$. L'eliminazione del vettore \mathbf{X}' dal sistema di equazioni (7.40) e (7.42) porta infatti all'uguaglianza

$$(7.46) \quad -\mathbf{u}' = \rho \mathbf{u} + \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{X}.$$

Poiché per la (7.41) si ha

$$(7.47) \quad 1 - \frac{1}{\rho^2} = \frac{u^2}{c^2},$$

si può anche scrivere

$$(7.48) \quad -\mathbf{u}' = \rho \left(\mathbf{u} + \frac{u^2}{c^2} \mathbf{X} \right).$$

La (7.48) mostra che $-\mathbf{u}'$ ha componente positiva rispetto a \mathbf{X} . •

Si consideri ora l'intervallo assoluto OP di sue eventi decomposto rispetto ai due riferimenti:

$$(7.49) \quad OP = \mathbf{r} + \kappa \mathbf{X} = \mathbf{r}' + \kappa' \mathbf{X}'.$$

Moltiplicando scalarmente quest'uguaglianza con la (7.40),

$$\mathbf{X}' \cdot (\mathbf{r}' + \kappa' \mathbf{X}') = \rho (\mathbf{u} + \mathbf{X}) \cdot (\mathbf{r} + \kappa \mathbf{X}),$$

si deduce la formula

$$(7.50) \quad \kappa' = \rho \left(\kappa - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right).$$

Se si introduce la distanza nella direzione di trascinamento dei due eventi

$$(7.51) \quad \delta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{u}$$

con

$$u = |\mathbf{u}| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|} > 0,$$

allora la relazione precedente si scrive

$$(7.52) \quad \kappa' = \rho \left(\kappa - \frac{u \delta}{c^2} \right)$$

Si ha così il legame tra gli intervalli temporali relativi dei due eventi.

NOTA 7.5.2 – La dilatazione dei tempi. Si supponga che gli eventi O e P avvengano nel medesimo luogo rispetto al riferimento \mathbf{X} , cioè che sia $\mathbf{r} = 0$. Allora dalla (7.50) segue

$$(7.53) \quad \kappa' = \rho \kappa.$$

Siccome $\rho > 1$ (infatti $\rho = 0$ è escluso perché $\mathbf{X} \neq \mathbf{X}'$) dalla (7.53) segue

$$\kappa' > \kappa.$$

Pertanto: l'intervallo temporale di due eventi relativo al riferimento in cui sono spazialmente coincidenti (perché questo esista deve essere OP del genere tempo, Teoremi 7.4.1 e 7.4.2) è sempre inferiore all'intervallo temporale relativo ad un qualunque altro riferimento. Questo fenomeno è chiamato *dilatazione dei tempi*. •

ESEMPIO 7.5.1 – Un'astronave viaggia di moto inerziale nel cosmo con velocità \mathbf{u} costante rispetto al riferimento inerziale solare (Sole e stelle “fisse”) \mathbf{X}' . Anche l'astronave definisce un riferimento inerziale \mathbf{X} . Su questa viene osservato un fenomeno o un processo della durata di κ secondi. Gli eventi finali ed iniziali di questo processo avvengono nello stesso luogo rispetto al riferimento \mathbf{X} . Osservati dal riferimento solare (per esempio dalla Terra) questi due eventi hanno un intervallo temporale pari a $\kappa' = \rho \kappa > \kappa$. •

Dalla (7.52) per simmetria segue, tenuto conto della (7.44) e della (7.45),

$$(7.54) \quad \kappa = \rho \left(\kappa' - \frac{u \delta'}{c^2} \right)$$

e quindi

$$\kappa' = \frac{\kappa}{\rho} + \frac{u \delta'}{c^2}.$$

Combinando quest'uguaglianza con la (7.52) si trova

$$\rho \left(\left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right) \kappa - \frac{u \delta}{c^2} \right) = \frac{u \delta'}{c^2}.$$

Stante l'identità (7.47) si conclude che

$$(7.55) \quad \delta' = \rho (u \kappa - \delta).$$

Si ottiene così il legame tra le distanze spaziali dei due eventi nella direzione delle velocità di trascinamento.

NOTA 7.5.3 – Contrazione delle lunghezze. Si supponga che gli eventi siano contemporanei in \mathbf{X} : $\kappa = 0$. Dalla (7.55) segue

$$(7.56) \quad \delta' = -\rho \delta,$$

e quindi

$$|\delta'| > |\delta|.$$

Pertanto: la distanza spaziale di due eventi contemporanei in un riferimento \mathbf{X} , misurata nella direzione della velocità di trascinamento di un qualunque altro riferimento \mathbf{X}' , è inferiore all'analoga distanza spaziale misurata in \mathbf{X}' . Questo fenomeno è chiamato *contrazione delle lunghezze*. •

ESEMPIO 7.5.2 – Un'esperienza “ideale” classica che di solito si cita per illustrare il fenomeno della contrazione delle lunghezze è la seguente. Un'asta rigida si muove lungo una guida rettilinea di moto uniforme con velocità \mathbf{u} . La guida è fissa in un riferimento inerziale \mathbf{X} e quindi anche l'asta definisce un riferimento inerziale \mathbf{X}' . Uno sperimentatore fermo nel riferimento \mathbf{X} della guida misura la lunghezza dell'asta in moto. Per far questo rileva la posizione contemporanea dei due estremi dell'asta in un dato istante, considerando due eventi per lui contemporanei collocati in tali estremi (per esempio, l'accensione di due lampade), e ne misura la distanza δ . Per un osservatore posto nel riferimento solidale \mathbf{X}' la distanza spaziale dei due eventi è la **lunghezza propria** dell'asta. Siamo nelle condizioni di poter applicare la (7.45). Pertanto: *la lunghezza dell'asta misurata da un osservatore rispetto al quale l'asta è in moto (rettilineo uniforme) risulta sempre minore della sua lunghezza propria*. •

NOTA 7.5.4 – Trasformazioni di Lorentz. Diciamo che un sistema di coordinate ortonormali (x^A) è **adattato** ad un riferimento \mathbf{X} se la base dei vettori (\mathbf{e}_A) è tale che $\mathbf{X} = c\mathbf{e}_0$. In questo caso $x^0 = ct$ dove t è il tempo relativo al riferimento, con $t(O) = 0$, essendo O l'origine delle coordinate. Si considerino due sistemi di coordinate (x^A) e $(x^{A'})$ adattate ai due riferimenti \mathbf{X} e \mathbf{X}' ed aventi la stessa origine O . Posto $(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $(\mathbf{e}_{i'}) = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$, si scelgano i vettori \mathbf{i} e \mathbf{i}' nel 2-spazio generato dai vettori \mathbf{X} e \mathbf{X}' e

$$(7.57) \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}', \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}'.$$

Siccome \mathbf{X}' è complanare alla coppia di vettori ortogonali (\mathbf{i}, \mathbf{X}) – Figura 7.6 (a) – la decomposizione relativa (7.40) mostra che il vettore \mathbf{u} , che è ortogonale a \mathbf{X} , deve essere parallelo a \mathbf{i} . Supponiamo che sia

$$(7.58) \quad \mathbf{u} = u\mathbf{i}$$

con $u > 0$ (se non è così basta invertire \mathbf{i}). Ciò significa che la velocità di trascinamento di \mathbf{X} rispetto a \mathbf{X}' è parallela e concorde al versore \mathbf{i} . Tenuto inoltre conto che il vettore $-\mathbf{u}'$, che deve essere parallelo a \mathbf{i}' , ha componente positiva rispetto a \mathbf{X} (Nota 7.5.1), si può scegliere \mathbf{i}' in modo che si abbia – si veda ancora la Figura 7.6(a),

$$(7.59) \quad \mathbf{u}' = -u\mathbf{i}'.$$

La scelta così fatta per i due riferimenti cartesiani adattati equivale, nella visione tridimensionale, a scegliere gli assi omologhi fra loro paralleli ed equiorientati, con l'asse x scorrevole su se stesso con velocità positiva u – Figura 7.6 (b). Si noti però che mentre nella visione

spazio-temporale, a cui per principio dobbiamo attenerci, gli assi x e x' non coincidono, nella visione tridimensionale (che è imperfetta) gli assi coordinati x e x' sono paralleli. Per quel che riguarda i tempi, siccome per definizione si ha $t(O) = t'(O) = 0$, posto genericamente $t = t(P)$ e $t' = t'(P)$ per un qualunque evento P , risulta $\kappa = t(P) - t(O) = t$ ed analogamente $\kappa' = t'$. Inoltre, stante la (7.58), dalla definizione (7.51) e da $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ segue $\delta = x$. Analogamente dalla (7.59) segue $\delta' = -x'$. Le relazioni (7.52) e (7.55) diventano pertanto

$$(7.60) \quad \begin{cases} t' = \rho \left(t - \frac{ux}{c^2} \right) \\ x' = \rho (x - ut) \end{cases}$$

Queste equazioni, insieme alle uguaglianze

$$(7.61) \quad y' = y, \quad z' = z$$

dovute alle (7.57), forniscono i legami tra le coordinate cartesiane relative ai due riferimenti scelti. Nel loro complesso esse prendono il nome di **trasformazioni standard di Lorentz**. •

NOTA 7.5.5 – Le trasformazioni delle velocità. Data la storia di una particella, per il vettore velocità assoluta sussiste la doppia decomposizione relativa

$$(7.62) \quad \mathbf{V} = \gamma(\mathbf{v} + \mathbf{X}) = \gamma'(\mathbf{v}' + \mathbf{X}').$$

Ricordata la definizione (7.34) del fattore di Lorentz, si ha successivamente:

$$\begin{aligned} \gamma' &= -\frac{1}{c^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}' = -\frac{\rho}{c^2} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{X}) = -\frac{\rho}{c^2} (\gamma(\mathbf{v} + \mathbf{X}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}) \\ &= \rho \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Di qui, per la definizione (7.33) del fattore di Lorentz, segue

$$(7.63) \quad \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{dt}{dt'} = \frac{\sigma}{\rho},$$

posto

$$(7.64) \quad \sigma = \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)^{-1}.$$

Alle (7.63) e (7.64) corrispondono per simmetria le uguaglianze analoghe

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{dt'}{dt} = \frac{\sigma'}{\rho}, \quad \sigma' = \left(1 - \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}{c^2} \right)^{-1}.$$

Dal loro confronto segue

$$(7.65) \quad \sigma \sigma' = \rho^2.$$

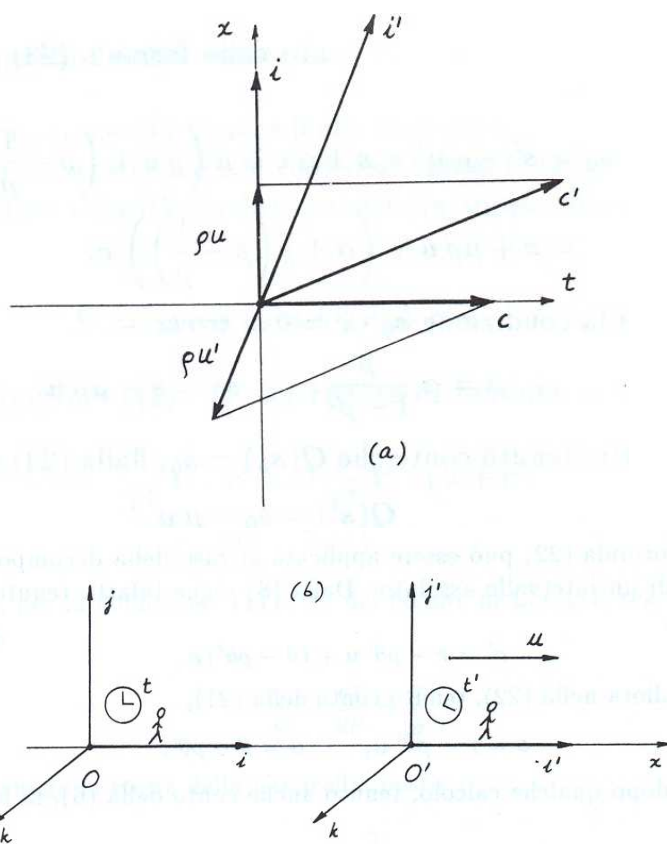


Figura 7.6: Cambiamento di riferimenti: $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{X}'$. (a) Il piano $(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ nello spazio-tempo, (gli assi $y = y'$ e $z = z'$ sono ortogonali a questo piano). (b) Rappresentazione nello spazio tridimensionale.

Ciò premesso, si osserva che dalla trasformazione di Lorentz (7.60)₂ segue, derivando rispetto a t' :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dx'}{dt} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho(x - ut)) = \sigma \left(\frac{dx}{dt} - u \right).$$

Operando allo stesso modo sulle (7.61) si vede che tra le componenti cartesiane delle velocità relative ai due riferimenti intercorrono i seguenti legami:

$$(7.66) \quad v'_x = \sigma (v_x - u), \quad v'_y = \frac{\sigma}{\rho} v_y, \quad v'_z = \frac{\sigma}{\rho} v_z. \quad \bullet$$

7.6 Dinamica relativistica di una particella materiale

Anche in relatività ristretta lo schema dinamico più semplice, adatto allo studio del moto di corpi poco estesi, è quello di **punto** o **particella materiale**. Un punto materiale è caratterizzato da un numero positivo m detto **massa propria**. Come in meccanica newtoniana, assumiamo come *principio* che i moti di un punto materiale siano governati da una **equazione dinamica assoluta**

$$(7.67) \quad \boxed{m \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \mathbf{F}}$$

dove per la **forza assoluta** \mathbf{F} è postulata una **legge di forza**, cioè una dipendenza dalla posizione del punto nello spazio-tempo e dalla sua velocità assoluta:

$$(7.68) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathbf{V}).$$

La derivata rispetto al tempo proprio della velocità assoluta è l'**accelerazione assoluta**

$$(7.69) \quad \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau}$$

e la legge (7.67) può anche scriversi

$$(7.70) \quad m \mathbf{A} = \mathbf{F}.$$

Essendo \mathbf{V} a norma costante, l'accelerazione assoluta è ortogonale a \mathbf{V}

$$(7.71) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = 0$$

e quindi necessariamente del genere spazio. Pertanto:

TEOREMA 7.6.1 – *La legge di forza (7.68) deve essere tale da rendere il vettore forza assoluta \mathbf{F} sempre ortogonale alla velocità assoluta \mathbf{V} :*

$$(7.72) \quad \mathbf{F}(\mathbf{R}, \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Non sono ammissibili leggi di forza puramente posizionali, cioè non dipendenti da \mathbf{V} .

Siamo allora condotti ad considerare il caso più semplice di una **legge di forza lineare**

$$(7.73) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{V}),$$

interpretando \mathbf{F} come endomorfismo lineare, dipendente dalla posizione del punto. Dovendo essere per la (7.72) $\mathbf{F}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = 0$, si conclude che \mathbf{F} è necessariamente un endomorfismo antisimmetrico. Siccome si è in presenza di un tensore metrico, cioè di un prodotto scalare, \mathbf{F} può anche essere interpretato come forma bilineare antisimmetrica ponendo

$$(7.74) \quad \mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{U}$$

per ogni coppia di vettori (\mathbf{V}, \mathbf{U}) . Concludiamo pertanto che:

TEOREMA 7.6.2 – *La più generale legge di forza lineare nella velocità assoluta è rappresentata da una forma bilineare antisimmetrica.*

Il tipo di forza ora considerato si ritrova effettivamente in natura: è la forza prodotta da un campo elettromagnetico (nel vuoto) su di una particella carica. Per riconoscerlo occorre esprimere l'equazione assoluta del moto (7.67) e la legge di forza (7.73) in termini relativi ad un generico riferimento inerziale. Cominciamo con l'esaminare alcune conseguenze algebriche della legge di forza (7.73).

TEOREMA 7.6.3 – *Assegnato un vettore \mathbf{X} del genere tempo, tale che $\|\mathbf{X}\| = -c^2$, e considerato lo spazio vettoriale tridimensionale euclideo \mathcal{S} dei vettori ortogonali a \mathbf{X} , ogni endomorfismo antisimmetrico \mathbf{F} equivale ad una coppia (\mathbf{E}, \mathbf{B}) di vettori di \mathcal{S} . (i) Assegnato \mathbf{F} , i due vettori sono determinati dalle equazioni*

$$(7.75) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{B} \times \mathbf{v} = -c(\mathbf{F}(\mathbf{v}) + \frac{1}{c^2} \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X} \mathbf{X}) \end{cases}$$

per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$, con \times prodotto vettoriale in \mathcal{S} . (ii) Viceversa, assegnati i due vettori, l'endomorfismo \mathbf{F} è determinato da

$$(7.76) \quad \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{V}) = \gamma \left(\mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \mathbf{X} \right) \\ \mathbf{V} = \gamma(\mathbf{v} + \mathbf{X}), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{X} = 0 \end{cases}$$

NOTA 7.6.1 – Interpretando il vettore \mathbf{X} come rappresentante un riferimento inerziale e il vettore \mathbf{V} che compare nelle (7.76) come velocità assoluta (per cui \mathbf{v} è la velocità relativa e γ il fattore di Lorentz, la (7.76)₁ esprime la **decomposizione relativa della forza assoluta** nel caso lineare. •

DIMOSTRAZIONE. (i) Dato \mathbf{F} , il vettore \mathbf{E} definito dalla (7.75)₁ appartiene ad \mathcal{S} perché $\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} = 0$ per l'antisimmetria di \mathbf{F} . Per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ poniamo

$$(7.77) \quad \mathbf{F}_{\mathcal{S}}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) + \frac{1}{c^2} \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X} \mathbf{X}.$$

Si ha $\mathbf{F}_S(\mathbf{v}) \in \mathcal{S}$ perché, essendo $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = -c^2$,

$$\mathbf{F}_S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X} - \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X} = 0.$$

è pertanto definito un endomorfismo lineare $\mathbf{F}_S: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Questo è antisimmetrico perché

$$\mathbf{F}_S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X} \mathbf{X} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

essendo $\mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$ (perché \mathbf{F} è antisimmetrico) e $\mathbf{X} \cdot \mathbf{v} = 0$ (perché $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$). L'antisimmetria di \mathbf{F}_S equivale all'esistenza di un vettore $\mathbf{K} \in \mathcal{S}$ tale che $\mathbf{K} \times \mathbf{v} = \mathbf{F}_S(\mathbf{v})$. Per la successiva interpretazione fisica conviene porre

$$(7.78) \quad \mathbf{F}_S(\mathbf{v}) = -\frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v}.$$

Combinando questa uguaglianza con la (7.77) si trova la (7.75)₂. (ii) Viceversa, definiti i vettori come nelle (7.75), dalla (7.75)₂ si ricava

$$(7.79) \quad \mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \mathbf{X},$$

tenuto conto che $\mathbf{F}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{X} = -\mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. Di qui, applicando \mathbf{F} ad un qualunque vettore \mathbf{V} decomposto come nella (7.76)₂ si ricava la (7.76)₁. \square

NOTA 7.6.2 – Se si interpreta \mathbf{F}_S come forma bilineare antisimmetrica, allora questa forma risulta la restrizione a \mathcal{S} della forma bilineare antisimmetrica \mathbf{F} . Di conseguenza il vettore \mathbf{B} definito dalla (7.78) è, a meno del fattore $-c$, il vettore aggiunto di \mathbf{F}_S :

$$(7.80) \quad \mathbf{B} = -c * \mathbf{F}_S. \quad \bullet$$

Se si riportano le decomposizioni relative (7.76) nell'equazione dinamica assoluta (7.67) si prova che:

TEOREMA 7.6.4 – *In un riferimento inerziale l'equazione dinamica assoluta (7.67) si decompone nelle equazioni dinamiche relative*

$$(7.81) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v} \\ \frac{dm_r}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \end{cases}}$$

posto

$$(7.82) \quad \boxed{m_r = \gamma m, \quad \mathbf{p} = m_r \mathbf{v}}$$

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto che $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$ dalla decomposizione relativa di una velocità assoluta si ricava

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \gamma \left(\frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{X} \right).$$

Siccome m è costante, per la (7.76)₁ l'equazione (7.67) si spezza nelle (7.81). \square

NOTA 7.6.3 – Lo scalare positivo $m_r = \gamma m$ prende il nome di **massa relativa** della particella. Si noti che $m_r \geq m$, con $m_r = m$ se e solo se la velocità relativa è nulla. Per questo la massa propria m viene anche detta **massa a riposo** della particella. Il vettore spaziale \mathbf{p} prende il nome di **impulso relativo** della particella. Al vettore

$$(7.83) \quad \mathbf{P} = m \mathbf{V} = \mathbf{p} + m_r \mathbf{X}$$

si dà il nome di **impulso assoluto**.² •

NOTA 7.6.4 – Il secondo membro dell'equazione (7.81)₁, cioè il vettore

$$(7.84) \quad \mathbf{F}_r = \mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v}$$

prende il nome di **forza relativa** o **forza di Lorentz**. È di questo tipo la forza che un **campo elettrico** \mathbf{E} ed un **campo magnetico** \mathbf{B} (nel vuoto) esercitano su di una particella dotata di carica unitaria. Qualora si vogliano interpretare le equazioni trovate come equazioni della dinamica di una particella di carica elettrica e non unitaria (e massa propria m) occorre sostituire i vettori (\mathbf{E}, \mathbf{B}) con $(e\mathbf{E}, e\mathbf{B})$, vale a dire \mathbf{F} con $e\mathbf{F}$. •

NOTA 7.6.5 – L'equazione scalare (7.81)₂ è conseguenza dell'equazione vettoriale (7.81)₁. Infatti dalla (7.83), moltiplicata scalarmente per se stessa, si ricava $-m^2 c^2 = p^2 - m_r^2 c^2$ quindi il legame

$$(7.85) \quad m_r^2 - m^2 = \frac{p^2}{c^2}.$$

Derivando e tenendo conto della (7.81)₁ si trova

$$m_r \frac{dm_r}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_r \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E},$$

cioè la (7.81)₂. •

NOTA 7.6.6 – Se si introduce la quantità

$$(7.86) \quad E_r = m_r c^2$$

la (7.81)₂ diventa

$$(7.87) \quad \frac{dE_r}{dt} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Siccome il secondo membro è la potenza della forza relativa,

$$\mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v},$$

la quantità E_r ha il significato di **energia relativa** della particella. Se la particella è in quiete quest'energia si riduce alla **energia propria**

$$(7.88) \quad \boxed{E = m c^2} \quad \bullet$$

² Nei testi di Fisica la massa a riposo di una particella è di solito denotata con m_0 , mentre la massa relativa è denotata con m . L'uguaglianza (7.82)₂, scritta $m = \gamma m_0$, viene interpretata come fenomeno di crescita della massa col crescere della velocità della particella.

NOTA 7.6.7 – L'equazione di moto $(7.81)_1$ è equivalente al sistema dinamico

$$(7.89) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} g(\mathbf{E} - \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} g), \end{cases}$$

nelle incognite (\mathbf{r}, \mathbf{v}) posizione e velocità relative della particella, funzioni del tempo relativo t . In queste equazioni i vettori (\mathbf{E}, \mathbf{B}) devono intendersi come funzioni assegnate di (\mathbf{r}, t) . Per dimostrare le (7.89) basta derivare $\mathbf{p} = m_r \mathbf{v}$ rispetto a t :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \frac{dm_r}{dt} + m_r \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Di qui, isolando la derivata di \mathbf{v} e tenendo conto di entrambe le (7.81) si ricavano le (7.89). Il sistema dinamico (7.89) descrive dunque il moto di una particella materiale relativistica in un qualunque riferimento inerziale, nel caso in cui la forza assoluta dipende linearmente dalla velocità assoluta. •

ESEMPIO 7.6.1 – Si consideri il caso in cui $\mathbf{E} = \text{costante}$ e $\mathbf{B} = 0$. La seconda equazione (7.89) coinvolge la sola funzione incognita $\mathbf{v}(t)$:

$$(7.90) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m\gamma} g(\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} g).$$

Di qui, moltiplicando vettorialmente per \mathbf{E} (costante), si ricava

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{E} \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{m\gamma c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \mathbf{E} \times \mathbf{v}.$$

Ciò mostra che la condizione $\mathbf{E} \times \mathbf{v} = 0$ è invariante, cioè che se è soddisfatta all'istante iniziale è sempre soddisfatta. Ciò significa che se la velocità \mathbf{v} è inizialmente parallela a \mathbf{E} , lo è sempre. Si consideri per semplicità questo caso. L'equazione (7.90) si riduce allora ad una sola equazione scalare

$$(7.91) \quad m \frac{dv}{dt} = E_x \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

posto

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i}, \quad E_x > 0, \quad \mathbf{v} = v \mathbf{i}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. Posto $v = c \sin \theta$ la (7.91) diventa

$$mc \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = E_x \cos^3 \theta,$$

cioè

$$d \tan \theta = \frac{E_x}{mc} dt.$$

L'equazione (7.91) è pertanto risolta implicitamente dalle equazioni

$$(7.92) \quad v(t) = c \sin \theta(t), \quad c(\tan \theta(t) - \tan \theta_0) = \frac{E_x}{m} t.$$

è conveniente rappresentare questo risultato come nella Figura 7.7 che mostra come cresce la velocità v al crescere di $\frac{1}{m} E_x t$. La velocità tende asintoticamente a c (raggio della circonferenza). Dalla similitudine dei due triangoli di vertice il centro della circonferenza si deduce che

$$(7.93) \quad v(t) = \frac{c E_x t}{\sqrt{m^2 c^2 + E_x^2 t^2}}.$$

Questa è la soluzione della (7.91) con la condizione iniziale $v(0) = 0$. Posto ancora $\mathbf{r} = x \mathbf{i}$ con un'integrazione si ottiene

$$(7.94) \quad x(t) = \frac{m c^2}{E_x} (\sec \theta - \sec \theta_0).$$

Infatti:

$$d \sec \theta = d \frac{1}{\cos \theta} = \sin \theta d \tan \theta = \frac{v}{c} \frac{E_x}{m c} dt = \frac{E_x}{m c^2} dx,$$

per cui

$$dx = \frac{m c^2}{E_x} d \sec \theta.$$

Se si pone $x(0) = 0$ e quindi $\theta_0 = 0$ dalla (7.94) si trae

$$(7.95) \quad x(t) = \frac{m c^2}{E_x} (\sec \theta(t) - 1) = \frac{m c^2}{E_x} g \left(\sqrt{1 + \frac{E_x^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right).$$

Si è così completamente determinato il moto della particella inizialmente in quiete. •

ESEMPIO 7.6.2 – Si consideri il caso $\mathbf{B} = \text{costante}$ e $\mathbf{E} = 0$. La seconda delle (7.89) diventa

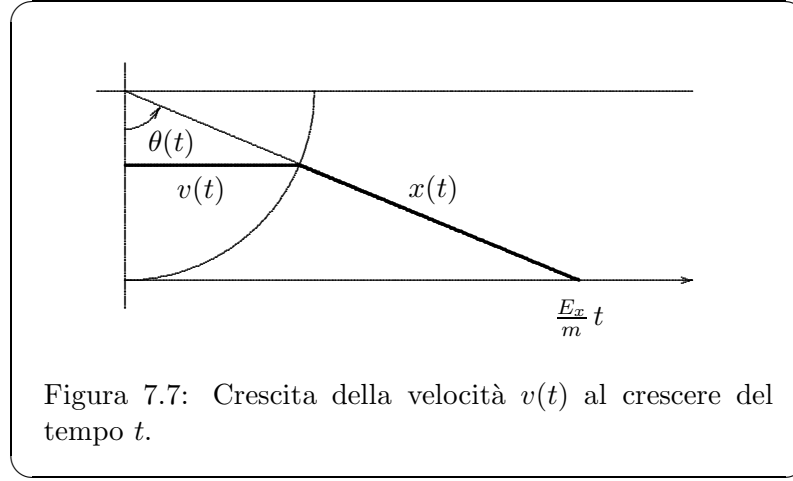
$$(7.96) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{1}{m c \gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{v}.$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} si vede che sussiste l'integrale primo della velocità

$$(7.97) \quad v^2 = \text{costante}.$$

Dunque i moti sono tutti uniformi. Moltiplicando invece scalarmente per \mathbf{B} , che è costante, si trova l'integrale primo

$$(7.98) \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \text{costante}.$$



Dunque anche la componente della velocità nella direzione di \mathbf{B} è costante. È pertanto sufficiente studiare il moto in cui questa è inizialmente nulla, cioè il moto piano in cui la velocità iniziale \mathbf{v}_0 è non nulla e ortogonale a \mathbf{B} . Si ponga

$$\mathbf{B} = B \mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = v \mathbf{u},$$

con

$$B > 0, \quad v > 0$$

e con \mathbf{i} versore ortogonale al piano del moto e \mathbf{u} versore ortogonale a \mathbf{i} . Introdotto l'angolo ψ compreso tra \mathbf{u} ed una retta fissa nel piano e orientato concordemente a \mathbf{i} , risulta

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = v \frac{d\mathbf{u}}{dt} = v \dot{\psi} \mathbf{i} \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{B} \times \mathbf{v} = B v \mathbf{i} \times \mathbf{u}.$$

La (7.96) si riduce pertanto all'equazione scalare

$$(7.99) \quad \frac{d\psi}{dt} = - \frac{B}{mc\gamma},$$

dove il secondo membro è costante. Ciò significa che la velocità \mathbf{v} ruota nel piano con velocità angolare costante, negativa rispetto al versore \mathbf{i} , mantenendosi costante in modulo. Segue che il moto è circolare uniforme. Se invece la velocità iniziale non è ortogonale a \mathbf{B} allora il moto è elicoidale uniforme, con asse parallelo a \mathbf{B} . Ritornando al caso del moto circolare uniforme si osserva che il raggio r della traiettoria è dato da

$$(7.100) \quad r = \frac{mcv\gamma}{B} = \frac{pc}{B}.$$

Se infatti si considerano coordinate polari (r, θ) centrate nel centro della traiettoria e angolo concorde a \mathbf{i} , osservato che $v = r\dot{\theta}$ e che $\dot{\theta} = \dot{\psi}$, la (7.100) segue direttamente dalla (7.99). •

7.7 Il campo elettromagnetico

Ritornando alla legge di forza lineare $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{V})$, consideriamo il caso in cui l'endomorfismo lineare \mathbf{F} è un campo sopra lo spazio-tempo M . Interpretato \mathbf{F} come forma bilineare antisimmetrica, è conveniente, per le ragioni che ora si vedranno, considerare la 2-forma

$$(7.101) \quad \boxed{\varphi = c \mathbf{F}}$$

Si prendano in M coordinate cartesiane ortonormali (x^A) di base (e_A) e origine O , adattate ad un riferimento inerziale di vettore \mathbf{X} , per cui

$$(7.102) \quad \boxed{\mathbf{X} = c e_0}$$

Si consideri la rappresentazione della 2-forma φ nelle coordinate (x^A) :

$$(7.103) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2} \varphi_{AB} dx^A \wedge dx^B, \\ \varphi_{AB} = \varphi(e_A, e_B). \end{cases}$$

Dimostriamo che la matrice delle componenti φ_{AB} della 2-forma φ assume la forma (il primo indice A è indice di colonna):

$$(7.104) \quad [\varphi_{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dove (E_i, B_i) sono le componenti dei vettori (\mathbf{E}, \mathbf{B}) dello spazio \mathcal{S} ortogonale a \mathbf{X} , rappresentativi di \mathbf{F} , quindi di φ , secondo la (7.104). Va osservato a questo proposito che, essendo la base $(e_i) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ di \mathcal{S} ortonormale, non vi è differenza tra componenti covarianti e contravarianti dei vettori.³ Infatti per la (7.76)₁,

$$\varphi_{0i} = \varphi(e_0, e_i) = \frac{1}{c} \varphi(\mathbf{X}, e_i) = \frac{1}{c} \varphi(\mathbf{X}) \cdot e_i = \mathbf{E} \cdot e_i,$$

dunque

$$(7.105) \quad \varphi_{0i} = E_i.$$

Inoltre si osserva che le φ_{ij} sono le componenti della restrizione $\varphi_{\mathcal{S}}$ di φ ai vettori di \mathcal{S} . Poiché si ha

$$\varphi_{\mathcal{S}} = c \mathbf{F}_{\mathcal{S}}, \quad \mathbf{B} = -c * \mathbf{F}_{\mathcal{S}},$$

³ In una base qualsiasi, posto $\mathbf{E} = E^i e_i$ e $\mathbf{E}^b = E_i dx^i$, si ha $E_i = \mathbf{E} \cdot e_i = g_{ij} E^j$, con $g_{ij} = e_i \cdot e_j$. In una base ortonormale si ha $g_{ij} = \delta_{ij}$ e quindi $E_i = E^i$.

risulta

$$\varphi_S = - * \mathbf{B},$$

dunque, ricordando la definizione dell'aggiunzione (§5.10),

$$(7.106) \quad \varphi_{ij} = - B^k \varepsilon_{kij}.$$

La (7.104) è così dimostrata. Il confronto coi testi di Fisica mostra che la matrice (7.104) è tipica della rappresentazione in componenti (covarianti) del **campo elettromagnetico** φ .

Un ulteriore interessante aspetto matematico della teoria del campo elettromagnetico è messo in evidenza dalla proprietà seguente:

TEOREMA 7.7.1 – *La chiusura della 2-forma φ ,*

$$(7.107) \quad d\varphi = 0$$

è equivalente alle equazioni di Maxwell

$$(7.108) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. (i) La condizione di chiusura (7.107) si traduce in componenti nelle equazioni (vedi (5.59))

$$\partial_A \varphi_{BC} + \partial_B \varphi_{CA} + \partial_C \varphi_{AB} = 0.$$

Con la scelta $(A, B, C) = (0, i, j)$ si trova l'equazione

$$0 = \partial_0 \varphi_{ij} + \partial_i \varphi_{j0} + \partial_j \varphi_{0i} = \partial_0 \varphi_{ij} - \partial_i E_j + \partial_j E_i.$$

Siccome $\partial_i E_j - \partial_j E_i$ sono le componenti del differenziale $d\mathbf{E}^b$ della 1-forma corrispondente al campo vettoriale \mathbf{E} , quest'ultima equazione è la traduzione in componenti dell'equazione intrinseca

$$\partial_0 \varphi_S - d\mathbf{E}^b = 0.$$

Operando con l'aggiunzione e ricordando che $* d\mathbf{E}^b = \operatorname{rot} \mathbf{E}$ si trova la seconda delle (7.108), osservato che

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Con la scelta $(A, B, C) = (h, i, j)$ si trova la condizione

$$\partial_h \varphi_{ij} + \partial_i \varphi_{jh} + \partial_j \varphi_{hi} = 0,$$

cioè $d\varphi_S = 0$, che è equivalente a $d * \mathbf{B} = 0$ cioè a $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. \square

NOTA 7.7.1 – La condizione di chiusura $d\varphi = 0$ implica, per il Lemma di Poincaré, l'esistenza (locale) di una 1-forma **potenziale** α tale che

$$(7.109) \quad \varphi = d\alpha.$$

Il campo vettoriale corrispondente ammette una decomposizione relativa del tipo

$$(7.110) \quad \alpha^\sharp = \mathbf{A} + \frac{1}{c} \phi \mathbf{X}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = 0,$$

dove \mathbf{A} è detto **potenziale vettore** e ϕ **potenziale scalare**. In coordinate adattate al riferimento si ha

$$(7.111) \quad \alpha = \alpha_i dx^i + \alpha_0 dx^0.$$

Dall'uguaglianza $\langle \mathbf{X}, \alpha \rangle = \alpha^\sharp \cdot \mathbf{X}$ segue

$$\alpha_0 = -\phi.$$

D'altra parte $A^i = \alpha_i$. La (7.109) è allora equivalente alle equazioni⁴

$$(7.112) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi, \\ \mathbf{B} = -\text{rot} \mathbf{A}. \end{cases}$$

Infatti, siccome la (7.109) equivale a $\varphi_{AB} = \partial_A \alpha_B - \partial_B \alpha_A$, ne risultano le uguaglianze

$$\begin{cases} E_i = \varphi_{0i} = \partial_0 \alpha_i - \partial_i \alpha_0 = \partial_0 \alpha_i + \partial_i \phi, \\ B^k = -\varepsilon^{kij} \varphi_{ij} = -\varepsilon^{kij} \partial_i \alpha_j, \end{cases}$$

equivalenti alle (7.112). •

NOTA 7.7.2 – Le (7.108) costituiscono in effetti la **prima coppia** delle equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico. La **seconda coppia** è

$$(7.113) \quad \begin{cases} \text{div} \mathbf{D} = \rho \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H} \end{cases}$$

dove \mathbf{D} è l'**induzione elettrica**, \mathbf{H} il **campo magnetico**, \mathbf{j} la **corrente** di carica e ρ la **densità di carica**. Anche queste equazioni sono la traduzione relativa ad un riferimento inerziale di equazioni differenziali assolute, coinvolgenti un'altra 2-forma Ψ . Sia Ψ una 2-forma su M di componenti Ψ_{AB} e sia $\Psi = \Psi^\sharp$ il campo tensoriale antisimmetrico di componenti Ψ^{AB} ottenute con l'innalzamento degli indici tramite la matrice $[g^{AB}]$ inversa della $[g_{AB}]$,

$$(7.114) \quad \Psi^{AB} = g^{AC} g^{BD} \Psi_{CD}. \quad \bullet$$

⁴ Nei testi di Fisica si adotta di norma una convenzione che vede α e quindi la coppia (\mathbf{A}, φ) cambiata di segno.

Chiamiamo **codifferenziale** di Ψ il campo vettoriale $\delta\Psi$ di componenti

$$(7.115) \quad (\delta\Psi)^B = \partial_A \Psi^{AB}.$$

Questa definizione si estende immediatamente al caso di una p -forma Ψ di componenti $\Psi_{AB\dots C}$. Il risultato dell'operazione di codifferenziale è un campo tensoriale antisimmetrico contravariante di ordine $p-1$. Se si procede ad un riabbassamento degli indici si riottiene una $p-1$ -forma. In particolare, nel caso $p=1$ la definizione di codifferenziale si riduce a quella di **divergenza** di un campo vettoriale \mathbf{J} (che è un campo scalare)

$$(7.116) \quad \delta\mathbf{J} = \partial_A J^A.$$

Si pone in particolare $\delta f = 0$ per ogni funzione (0-forma). Si noti che il codifferenziale è nilpotente:

$$\delta(\delta\Psi) = \partial_B \partial_A \Psi^{AB} = 0,$$

perché la doppia derivata parziale è simmetrica negli indici mentre le componenti Ψ^{AB} sono antisimmetriche. Si può dimostrare che la definizione data di codifferenziale non dipende dalla scelta della coordinate, purché queste siano coordinate cartesiane. Questa definizione può estendersi, con opportune avvertenze, a varietà riemanniane. Dimostriamo allora che

TEOREMA 7.7.2 – *Se i vettori (\mathbf{D}, \mathbf{H}) rappresentano nello spazio-tempo M la 2-forma Ψ (nello stesso modo con cui (\mathbf{E}, \mathbf{B}) rappresentano φ) allora la coppia di equazioni (7.113) equivale all'equazione*

$$(7.117) \quad \delta\Psi = \frac{1}{c} \mathbf{J},$$

dove \mathbf{J} è il vettore **corrente assoluta di carica**, la cui decomposizione relativa è

$$(7.118) \quad \mathbf{J} = \mathbf{j} + \rho \mathbf{X}.$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente alle (7.105) e (7.106) si ha

$$\psi_{0i} = D_i, \quad \psi_{ij} = -H^k \varepsilon_{kij},$$

quindi

$$\psi^{ij} = -\varepsilon^{ijk} H_k.$$

Va osservato che la matrice inversa $[g^{AB}]$ ha la stessa forma (7.102) della matrice $[g_{AB}]$, per cui

$$\psi^{0i} = g^{00} g^{ij} \psi_{0j} = -D^i.$$

Inoltre la (7.118) può scriversi $\mathbf{J} = J^0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{j}$, e moltiplicando scalarmente per \mathbf{X} queste due scritture si trova $\mathbf{J} \cdot \mathbf{X} = -c^2 \rho = -c J^0$, per cui

$$J^0 = c \rho.$$

Pertanto, traducendo in componenti l'equazione (7.117), si trova

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} J^0 &= \partial_A \psi^{A0} = \partial_i \psi^{i0} = \partial_i D^i = \operatorname{div} \mathbf{D}, \\ \frac{1}{c} J^i &= \partial_A \psi^{Ai} = \partial_0 \psi^{0i} + \partial_j \psi^{ji} = -\partial_0 D^i - \varepsilon^{jik} \partial_j H_k \\ &= -\partial_0 D^i + \varepsilon^{ijk} \partial_j H_k.\end{aligned}$$

Di qui segue l'equivalenza con le (7.113). \square

Per le due 2-forme (φ, ψ) rappresentatrici del campo elettromagnetico e per il campo vettoriale \mathbf{J} occorre postulare delle **equazioni costitutive** atte a rappresentare le caratteristiche fisiche del mezzo in cui ha sede il campo. Per il vuoto si assume

$$\psi = \varphi,$$

quindi

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}.$$

Il vettore \mathbf{J} rappresenta la corrente di cariche sorgenti del campo elettromagnetico. Nel caso di una **corrente di convezione** si ha

$$(7.119) \quad \mathbf{J} = \rho_0 \mathbf{V}$$

dove \mathbf{V} è la velocità assoluta delle particelle e ρ_0 è la **densità di carica propria**. La decomposizione relativa (7.118) assume allora la forma

$$(7.120) \quad \mathbf{J} = \rho (\mathbf{v} + \mathbf{X}), \quad \rho = \gamma \rho_0.$$

Essendo $\delta^2 = 0$, dalla (7.117) segue l'equazione

$$(7.121) \quad \delta \mathbf{J} = 0$$

che prende il nome di **equazione di continuità** della carica. In un riferimento inerziale si riduce all'equazione

$$(7.122) \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0}$$

Questa è immediata conseguenza della decomposizione relativa di una velocità assoluta:

$$\begin{aligned}0 &= \partial_A J^A = \partial_A (\rho_0 V^A) = \partial_0 (\rho_0 V^0) + \partial_i (\rho_0 V^i) \\ &= \partial_0 (\rho_0 \gamma c) + \partial_i (\rho_0 \gamma v^i).\end{aligned}$$