Simulazione 4 - calcoli

Curva

Si consideri la curva γ definita come giustapposizione $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3)$ dove

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = (t,t), & t \in [1,2] \\ \gamma_2(t) = (t,-t+4), & t \in [1,2] \\ \gamma_3(t) = (1,t), & t \in [1,3] \end{array}$$

1. γ è una curva chiusa e semplice?

Il punto iniziale di γ è $p = \gamma_1(1) = (1,1)$ e il punto finale è il punto iniziale di γ_3 cioè $q = \gamma_3(1) = (1,1)$. Siccome $p = q$ la curva è chiusa. I sostegni delle curve γ_1, γ_2 e γ_3 sono segmenti orientati nel piano, perché le corrispondenti parametrizzazioni sono lineari. In particolare $\gamma_1 = \overrightarrow{p_1q_1}$, $\gamma_2 = \overrightarrow{p_2q_2}$ e $\gamma_3 = \overrightarrow{p_3q_3}$, dove $p_1 = p_3 = (1,1)$, $q_1 = q_2 = (2,2)$, $p_2 = q_3 = (1,3)$. I tre segmenti non si intersecano in nessun punto interno. Quindi la curva γ è anche semplice.

2. γ è il bordo del triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$ orientato in senso orario?

No, perché i vertici non corrispondono. In particolare $(3,1)$ non è uno dei vertici del bordo del triangolo corrispondente al sostegno di γ.

3. γ è il bordo del triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$ orientato in senso antiorario?

Sì, perché γ è il bordo del triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$ percorso nel senso da $p_1 = (1,1)$ a $q_1 = (2,2)$ a $p_2 = (1,3)$ a p_1, cioè in senso antiorario.

4. Calcolo dell'integrale $\int_\gamma [2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy]$.

Dato che $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3)$, si ha che

$$\int_\gamma [2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy] = I_1 - I_2 - I_3$$

dove

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} [2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy] = \int_1^2 [2(t^2+t^2) + (t+t)^2]\,dt = \frac{56}{3} \\ I_2 &= \int_{\gamma_2} [2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy] = \int_1^2 [2(t^2+(-t+4)^2) - (t-t+4)^2]\,dt = \frac{4}{3} \\ I_3 &= \int_{\gamma_3} [2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy] = \int_1^3 (1+t)^2\,dt = \frac{56}{3} \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_\gamma [2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy] = -\frac{4}{3}\,.$$

Campo

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $F_a(x,y) = \left(ay^2 - 2x\cos(x^2) - \dfrac{1}{2\sqrt{x-y^2}}, 6xy + \dfrac{y}{\sqrt{x-y^2}} \right)$ e sia D_a il suo dominio.

1. D_a non dipende da a. Vero o falso?
Il dominio di F_a è l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > y^2\}$. Dunque non dipende da a. L'affermazione è vera.

2. D_a è un aperto connesso. Vero o falso?
L'insieme D è la regione contenuta all'interno della parabola di equazione $x = y^2$ ed è un aperto connesso, ad esempio, perché convesso. Pertanto l'affermazione è vera.

3. D_a è stellato rispetto all'origine. Vero o falso?
Falso, l'origine non appartiene al dominio.

4. Per quali valori di a il campo F_a è conservativo sul proprio dominio?
Dato che il dominio D è convesso, è anche semplicemente connesso e quindi, per il lemma di Poincaré, il campo F_a è conservativo su D se e solo se è irrotazionale in D, ossia se e solo se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(6xy + \frac{y}{\sqrt{x-y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(ay^2 - 2x\cos(x^2) - \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}}\right) \quad \forall (x,y) \in D$$
$$\Leftrightarrow \quad 6y - \frac{y}{2(x-y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2ay + \frac{-2y}{4(x-y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \forall (x,y) \in D \quad \Leftrightarrow \quad a = 3\,.$$

5. Detta Γ la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (2+\cos t, \sin t)$ con $t \in [0,\pi]$, per i valori di a determinati al punto precedente calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma F_a \cdot ds$.
La curva Γ è la semicirconferenza superiore di raggio 1 e centro in $(2,0)$, percorsa in senso antiorario ed è contenuta in D perché $2+\cos t \geq 1$, $\sin^2 t \leq 1$ e l'unico valore in $[0,\pi]$ in cui $\sin t = 1$ è $t = \frac{\pi}{2}$, dove però $2 + \cos t = 2$. Quindi $2+\cos t > \sin^2 t$ per ogni $t \in [0,\pi]$. Per $a = 3$ il campo $F = F_a$ è conservativo in D. Allora l'integrale di F lungo Γ non dipende dalla curva ma solo dai suoi estremi che sono

$$\gamma(0) = (3,0) = A\,, \quad \gamma(\pi) = (1,0) = B\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot ds &= \int_{\overrightarrow{AB}} F \cdot ds = -\int_{\overrightarrow{BA}} F \cdot ds = -\int_1^3 F(t,0)\cdot(1,0)\,dt \\ &= -\int_1^3 \left(-2t\cos(t^2) - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) dt = -\Big[-\sin(t^2) - \sqrt{t}\Big]_1^3 = \sin 9 + \sqrt{3} - \sin 1 - 1\end{aligned}$$

avendo parametrizzato il segmento orientato $\overrightarrow{BA}$ con $\varphi(t) = (t,0)$, $t \in [1,3]$.

Flusso
Siano P_1, P_2 e P_3 rispettivamente i punti di intersezione del piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + 2y + 2z = 2$ con gli assi cartesiani x, y e z. Inoltre siano $P_0 = (0,0,0)$ e $F(x,y,z) = (x-y, y+z, x)$.

1. Calcolo del flusso di F uscente da ∂C, dove C è il tetraedro di vertici P_0, P_1, P_2 e P_3.
Per il teorema della divergenza, il flusso di F uscente da ∂C vale

$$\int_{\partial C} F \cdot N\, d\sigma = \int_C \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz = 2\,\mathrm{vol}(C)\,.$$

Il tetraedro C si può vedere come cono a sezione triangolare, con base data dal triangolo T di vertici $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (2,0,0)$ e $P_2 = (0,1,0)$ e altezza $h = \overline{P_0P_3} = 1$ e quindi il suo volume si può calcolare secondo la formula $\mathrm{vol}(C) = \frac{1}{3}\, h\, \mathrm{area}(T) = \frac{1}{3}$. Quindi $\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \frac{2}{3}$.

2. Calcolo della circuitazione di F lungo la curva $\Gamma = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_1}$.
Parametrizziamo $\overrightarrow{P_1P_2}$ con $\varphi_1(t) = (1-t)P_1 + tP_2 = (2-2t, t, 0)$, $t \in [0,1]$, $\overrightarrow{P_2P_3}$ con $\varphi_2(t) = (1-t)P_2 + tP_3 = (t, 1-t, 0)$, $t \in [0,1]$, $\overrightarrow{P_3P_1}$ con $\varphi_3(t) = (1-t)P_3 + tP_1 = (2t, 0, 1-t)$, $t \in [0,1]$ e calcoliamo

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\overrightarrow{P_1P_2}} F \cdot ds = \int_0^1 F(\varphi_1(t)) \cdot \varphi_1'(t)\, dt = \int_0^1 [-2(2-3t) + t]\, dt = \frac{7}{2} - 4 \\
I_2 &= \int_{\overrightarrow{P_2P_3}} F \cdot ds = \int_0^1 F(\varphi_2(t)) \cdot \varphi_2'(t)\, dt = \int_0^1 (-1)\, dt = -1 \\
I_3 &= \int_{\overrightarrow{P_3P_1}} F \cdot ds = \int_0^1 F(\varphi_3(t)) \cdot \varphi_3'(t)\, dt = \int_0^1 (4t - 2t)\, dt = 1\,.
\end{aligned}
$$

Quindi la circuitazione di F lungo Γ vale

$$\int_\Gamma F \cdot ds = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{2}\,.$$

3. Calcolo del flusso del rotore di F attraverso S = faccia del tetraedro C di vertici P_1, P_2 e P_3 orientata con normale entrante in C.
Parametrizziamo S come superficie cartesiana, cioè $S = \varphi(D)$ dove D è il triangolo in $\mathbb{R}^2$ di vertici $v_1 = (2,0)$ e $v_2 = (0,1)$ e $v_3 = (0,0)$, e $\varphi(x,y) = (x, y, 1 - \frac{x}{2} - y)$. Secondo tale parametrizzazione, il vettore normale $\varphi_x \wedge \varphi_y$ ha la terza componente positiva, cioè è uscente da C. Quindi il flusso del rotore di F attraverso S orientata con normale entrante in C vale

$$\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = -\int_{\varphi(D)} \mathrm{rot}(F) \cdot N \, d\sigma\,.$$

Per il teorema di Stokes

$$\int_{\varphi(D)} \mathrm{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = \int_{\varphi(+\partial D)} F \cdot ds$$

Inoltre $+\partial D = \overrightarrow{v_1v_2} + \overrightarrow{v_2v_3} + \overrightarrow{v_3v_1}$, $P_1 = \varphi(v_1)$, $P_2 = \varphi(v_2)$, e $P_3 = \varphi(v_3)$. Quindi

$$\int_{\varphi(+\partial D)} F \cdot ds = \int_\Gamma F \cdot ds$$

dove Γ è la spezzata chiusa del punto precedente. Pertanto, per i calcoli già fatti nel punto precedente

$$\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = \frac{1}{2}\,.$$

Serie

Si consideri la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ dove $f_n(x) = \dfrac{1}{ne^{nx}}$.

1. La serie converge uniformemente in $[0,\infty)$ *perché* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *per ogni* $x \in [0,\infty)$*: sì/no?*

No. Il fatto che il termine generale sia infinitesimo è condizione solo necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie.

2. La serie converge uniformemente in $[1,\infty)$ *perché si può applicare il test di Weierstrass prendendo come successione maggiorante la successione* $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ *con*

- $M_n = e^{-n}$
  Sì perché per $x \in [1,\infty)$ e per ogni $n \geq 1$ vale che $|f_n(x)| \leq e^{-n}$ e la serie numerica $\sum_{n\geq 1} e^{-n}$ converge, in quanto serie geometrica di ragione $\frac{1}{e} \in (0,1)$.
- $M_n = 1$
  No, perché la serie numerica $\sum_{n\geq 1} 1$ non converge.
- $M_n = \frac{1}{n}$
  No, perché la serie numerica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ non converge.

3. La serie converge uniformemente in $[r,\infty)$ *per ogni* $r > 0$*: sì/no?*

Fissato $r > 0$, per ogni $x \in [r,\infty)$ e per ogni $n \geq 1$ vale che $|f_n(x)| \leq f_n(r)$ e la serie numerica $\sum_{n\geq 1} f_n(r)$ converge (confronto con la serie geometrica di ragione e^{-r}). Quindi per il test di Weierstrass la serie converge uniformemente in $[r,\infty)$. Dunque la risposta corretta è sì.

4. La serie converge uniformemente in $(0,\infty)$*: sì/no?*

No, perché altrimenti, essendo tutte le f_n continue su $[0,\infty)$, la serie convergerebbe in $[0,\infty)$. In particolare anche in $x = 0$. Ma $\sum_{n\geq 1} f_n(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$.

5. La serie converge assolutamente in $(0,\infty)$*: sì/no?*

Sì, per ogni $x > 0$ la serie $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ converge, ad esempio, per confronto con la serie geometrica di ragione $e^{-x} \in (0,1)$.

6. Calcolo della funzione somma nell'insieme di convergenza semplice.

Ricordiamo che se $t \in [-1,1)$ allora $\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$. Applichiamo tale formula con $t = e^{-x}$ $(x > 0)$ e troviamo che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{ne^{nx}} = -\ln(1-e^{-x}) = -\ln\frac{e^x - 1}{e^x} = x - \ln(1-e^{-x}) \quad \forall x > 0\,.$$