trasformazione continuata:

$$\boxed{\phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad , \quad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi} \quad , \qquad (41)$$

dove $\chi(t, \vec{x})$ è una generica funzione. Infatti i potenziali trasformati ϕ' ed A' danno origine agli stessi campi e.m.:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} - \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}}_{=0}\chi = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi - \cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial \chi}{\partial t}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi} = \vec{E} \qquad (42)$$

. Condizioni di gauge

La libertà di ridefinire i potenziali tramite la trasformazione (23) ci dà la possibilità di imporre una condizione sui potenziali stessi. Tali possibili condizioni sono dette "condizioni di gauge" o anche semplicemente "gauge di ...". Ad esempio:

- Gauge di Coulomb: consiste nel fissare

$$\phi = 0 \qquad (43)$$

Questo si può ottenere partendo da un ϕ qualsiasi e scegliendo χ tale che $\frac{d\chi}{dt} = -\phi$, di modo che

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0 \qquad (44)$$

è nel gauge di Coulomb.

- Gauge di Lorentz (che non è il Lorentz delle trasformazioni relativistiche). Consiste nell'imporre

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad (45)$$

cioè, per via della (24),

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0} \qquad (46)$$

Questa condizione, come vedremo più avanti, è invariante sotto le trasformazioni di Lorentz della Relatività speciale che collegano SR in moto relativo uniforme lasciando invariate le equazioni di Maxwell.

Se partiamo da potenziali ϕ, $\vec{A}$ che non soddisfano questa condizione, con la trasformazione (41) otteniamo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \chi =$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta \chi \right) =$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \Box \chi \qquad (47)$$

dove

$$\boxed{\Box = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta} \qquad (48)$$

è l'operatore di D'Alambert, cioè l'operatore che compare nell'equazione delle onde (25). Dalla (47) segue che, scegliendo χ in modo che

$$\Box\chi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}, \qquad (49)$$

i potenziali trasformati $\phi', \vec{A}'$ soddisfano il gauge di Lorentz.

• Equazioni di Maxwell inomogenee nel gauge di Lorentz

Abbiamo risolto le eq. di Maxwell omogenee (2) e (3) tramite la posizione (40) che esprime $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in termini dei potenziali. Le rimanenti equazioni ~~diventano conseguentemente~~ si riscrivono come segue. L'eq (1) diviene

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (49)$$

sfruttando il gauge di Lorentz (46) possiamo rimpiazzare

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (50)$$

nella (49) ottenendo

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = \rho/\varepsilon_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Box\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad (51)$$

l'eq. (4) diviene (usando anche la (24))

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \mu_0\vec{J} \qquad (52)$$

Sfruttiamo l'identità (22) così che qs equazione diviene

$$-\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\vec{J} \qquad (53)$$

cioè

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\Delta\vec{A}}_{=-\Box\vec{A}}+\vec{\nabla}\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{=0 \text{ nel gauge di Lorentz}}\Big)=\mu_0\vec{J} \qquad (54)$$

Nel gauge di Lorentz, quindi, l'equazione si riduce a

$$\boxed{\Box\vec{A}=-\mu_0\vec{J}} \qquad (55)$$

Le equazioni (51) e (55) hanno la medesima struttura:

$$\Box\, u(t,\vec{x}) = v(t,\vec{x}) \qquad (56)$$

operatore — funzione da determinare — funzione nota (sorgente)

Conviene sviluppare una metodologia per risolvere questo tipo di equazioni.

Il metodo delle funzioni di Green

Consideriamo un'equazione matriciale della forma

$$M\cdot u = v \qquad (57)$$

operatore lineare = matrice — vettore incognito — termine noto (sorgente)

Essa si risolve sfruttando la matrice inversa M^{-1}, tale che

$$M^{-1}\cdot M = M\cdot M^{-1} = \mathbb{1} \qquad (58)$$

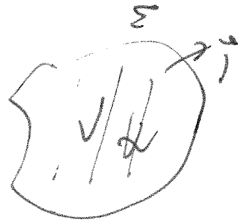
$\mathbb{1}$ ← matrice identità

prodotto matriciale

· <u>Energia</u> e <u>quantità di moto</u> dei <u>campi e.m</u>

· Le leggi dell'e.m sono consistenti solo se cariche e correnti soddisfano l'equazione di continuità (32),

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \xrightarrow{\text{(in forma integrale)}} \frac{d}{dt}Q(V) = -\Phi_j(\Sigma) \qquad (E1)$$



Dunque la <u>carica</u> totale in tutto il volume a disposizione (dal cui bordo non può fluire corrente) è <u>conservata</u>:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \qquad (E2)$$

· Vi sono altre quattro importanti quantità conservate che nascono dal fatto che la teoria del campo e.m. è invariante per traslazioni spaziali e temporali. Queste quantità sono l'<u>energia</u> e la <u>quantità di moto</u>.

· Avete già visto nei corsi precedenti che ad una configurazione di campi $\vec{E}(t,\vec{x})$ e $\vec{B}(t,\vec{x})$ è associata una <u>densità di energia</u>

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}} \qquad (E3)$$

N.B. Check dimensionale!

$$[\varepsilon_0 \vec{E}^2] = [\cancel{\varepsilon_0}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{Q}}{\cancel{\varepsilon_0} L^2}}_{E}\cdot\frac{F}{\cancel{Q}}] = [\frac{F}{L^2}] = [\frac{F\cdot L}{L^3}] = [\frac{\text{energia}}{\text{volume}}]$$

$$[\frac{\vec{B}^2}{\mu_0}] = [\frac{1}{\cancel{\mu_0}}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{\mu_0} Q}{TL}}_{B}\cdot\underbrace{\frac{F}{Q\cdot v}}_{\text{cfr. 17}}] = [\frac{F}{t\cdot L v}] = [\frac{F}{L^2}] = \ldots = [\frac{\text{energia}}{\text{volume}}] \qquad (E4)$$

- Sappiamo anche che i campi e.m agiscono su di una particella carica esercitando la forza (34):

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \qquad (E5)$$

I 2 campi fanno dunque su di essa un lavoro infinitesimo

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{x} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = q\vec{v}\cdot\vec{E}\,dt + \underbrace{q\,\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})\,dt}_{=0} \qquad (E6)$$

il secondo termine non contribuisce (è analogo all'eq (30)) e quindi

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = q\vec{v}\cdot\vec{E}} \qquad (E7)$$

potenza

Questo lavoro è fatto a spese dell'energia $\mathcal{E}$ del campo e.m, quindi

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -q\vec{v}\cdot\vec{E}} \qquad (E8)$$

- Per una situazione continua avremo una densità di carica e una densità di energia collegate da una relazione in cui il termine $-\vec{j}\cdot\vec{E}$ fa da "pozzo" di densità di energia. Ci aspettiamo dunque un'equazione della forma

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = -\vec{j}\cdot\vec{E}} \qquad (E9)$$

$\vec{u}$ = densità di corrente di energia

- Per $\vec{j}=0$, questa è un'equazione di continuità per l'energia e.m.:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \qquad (E10)$$

• Ora vogliamo mostrare che la relazione (E9) segue dalle equazioni di Maxwell, con $\vec{u}$ dato dal vettore di Poynting

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}} \qquad (E11)$$

• Inoltre, sempre dalla forza (E5) esercitata dai campi e.m. su una particella carica, per il teorema dell'impulso abbiamo che la q.tà di moto (momento) $\vec{p}$ della particella varia di

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \qquad (E12)$$

Per una distribuzione continua, la densità di impulso varierà come

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}} \qquad (E13)$$

Dalla conservazione della q.tà di moto per il sistema complessivo (campi e.m. + "materia") questo avviene a scapito della densità di quantità di moto contenuta nei campi e.m.. Usiamo la notazione

$g^{(i)}$ = densità di quantità di moto nella direzione i ($i = 1,2,3 = x,y,z$) contenuta nel campo e.m. (E14)

e $\vec{G}^{(i)}$ = densità di corrente della quantità di moto in direzione i contenuta nei campi e.m. (E15)

• In assenza di "materia", la conservazione della q.tà di moto corrisponde ad una equazione di continuità:

$$\frac{\partial g^{(i)}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}^{(i)} = 0 \qquad (E16)$$

In presenza di cariche e correnti, la quantità di moto può da queste essere assorbita tramite la (E13), quindi [stiamo considerando la componente i-ma]

$$\boxed{\frac{\partial g^{(i)}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}^{(i)} = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})^i} \qquad (E17)$$

. Vogliamo mostrare che anche questa relazione segue dalle eq. di Maxwell con, in particolare,

$$\boxed{g^{(i)} = \frac{1}{c^2} \frac{(\vec{E} \times \vec{B})^i}{\mu_0} = \frac{1}{c^2} \underbrace{u^i}_{\text{vettore di Poynting}}} \qquad (E18)$$

e con

$$\boxed{G^{ij} \equiv G^{(i)j} = \varepsilon_0 \left[\frac{|\vec{E}|^2}{2} \delta_{ij} - E_i E_j \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{|\vec{B}|^2}{2} \delta_{ij} - B_i B_j \right]} \qquad (E19)$$

Dimostrazione

. Partiamo dalla conservazione dell'energia

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (E20)$$

Dalle equazioni di Maxwell (3) e (4) abbiamo:

$$(3) \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$(4) \rightarrow \quad \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{j}$$

per cui la (E20) diviene

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{E}\cdot\vec{J} - \frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}\,(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

ovverosia

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right] - \vec{E}\cdot\vec{J} \qquad (E21)$$

Usiamo ora l'identità

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = -\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})} \qquad (E22)$$

che si può verificare direttamente:

$$\partial_x(\vec{E}\times\vec{B})^x = \partial_x(E^y B^z - E^z B^y) = (\partial_x E^y)B^z + E^y\,\partial_x B^z - (\partial_x E^z)B^y - E^z(\partial_x B^y)$$

$$\partial_y(\vec{E}\times\vec{B})^y = \partial_y(E^z B^x - E^x B^z) = (\partial_y E^z)B^x + E^z\,\partial_y B^x - (\partial_y E^x)B^z - E^x\,\partial_y B^z$$

$$\partial_z(\vec{E}\times\vec{B})^z = \partial_z(E^x B^y - E^y B^x) = (\partial_z E^x)B^y + E^x\,\partial_z B^y - (\partial_z E^y)B^x - E^y\,\partial_z B^x$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) &= B^z(\partial_x E^y - \partial_y E^x) + B^y(\partial_z E^x - \partial_x E^z) + B^x(\partial_y E^z - \partial_z E^y) \\
&\quad - E^z(\partial_x B^y - \partial_y B^x) - E^y(\partial_z B^x - \partial_x B^z) - E^x(\partial_y B^z - \partial_z B^y) \\
&= \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})
\end{aligned}$$

Utilizzando la qs identità nella (E21) otteniamo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right) = -\vec{E}\cdot\vec{J} \qquad (E23)$$

che coincide con la (E9) - (E11).

- Passiamo ora alla conservazione dell'impulso. Dalla (E18) abbiamo [ricordiamo che $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$]

$$\frac{\partial g^{(i)}}{\partial t} = \frac{1}{c^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)^i = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right)^i + \left(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)^i \right] \qquad (E24)$$

- Le eq. di Maxwell ci dicono che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{j} \end{cases} \qquad (E25)$$

da cui

$$\frac{\partial g^{(i)}}{\partial t} = \left[\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \vec{j} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right]^i \qquad (E26)$$

. Usiamo ora la proprietà (22-1), valida $\forall$ vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ anche non commutanti fra di loro:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \vec{b} c^i - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \qquad (E27)$$

da cui segue

$$\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = E_i \vec{\nabla} E^i - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{E}|^2 - E^j \partial_j \vec{E} \qquad (E28)$$

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \quad '' \quad = \frac{1}{2} \vec{\nabla} |\vec{B}|^2 - B^j \partial_j \vec{B}$$

Notiamo che

$$E^j \partial_j E^i = \partial_j (E^j E^i) - E^i \partial_j E^j = \partial_j (E^i E^j) - E^i \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \longleftarrow \text{eq Maxwell (1)}$$

$$= \partial_j (E^i E^j) - E^i \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (E29)$$

Similmente

$$B^j \partial_i B^i = \partial_j (B^i B^j) - B^i \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0,\ \text{eq Maxwell (2)}} = \partial_j (B^i B^j) \qquad (\text{E}30)$$

Inserendo le (E28, E29, E30) nella (E26) otteniamo

$$\frac{\partial g^{(i)}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}\partial^i |\vec{B}|^2 - \partial_j (B^i B^j)\right) - \varepsilon_0 \left(\frac{1}{2}\partial^i |\vec{E}|^2 - \partial_j (E^i E^j) + \frac{E^i \rho}{\varepsilon_0}\right)$$
$$-(\vec{j}\times\vec{B})^i \qquad (\text{E}31)$$

ovverosia

$$\frac{\partial g^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\partial_j\left(\frac{1}{2}|\vec{B}|^2 \delta^{ij} - B^i B^j\right) + \varepsilon_0 \partial_j \left(\frac{1}{2}|\vec{E}|^2 \delta^{ij} - E^i E^j\right)$$
$$= -\rho E^i - (\vec{j}\times\vec{B})^i \qquad (\text{E}32)$$

che coincide esattamente con la (E17) cioè

$$\frac{\partial g^{(i)}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}^{(i)} = -(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})^i \qquad (\text{E}33)$$

identificando

$$G^{(i)j} = \varepsilon_0 \left(\frac{|\vec{E}|^2}{2}\delta^{ij} - E^i E^j\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{|\vec{B}|^2}{2}\delta^{ij} - B^i B^j\right) \qquad (\text{E}34)$$

in accordo con la (E19).

- L'eq. (E33) per la conservazione dell'impulso viene spesso espressa introducendo la matrice 3×3 σ di componenti

$$\boxed{\sigma^{ij} = -G^{(i)j}} \qquad (\text{E}35)$$

In termini di qs matrice ~~scriviamo~~ possiamo usare la notazione h

$$\partial_j \sigma^{ij} \equiv (\vec{\nabla}\cdot\sigma)^i$$

~~per~~ e quindi scrivere la (E33) come

$$\overleftrightarrow{\nabla}\cdot\sigma - \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$$

~~esp~~ usando la (E.17), la conservazione dell'impulso si può esprimere come

$$\boxed{\overleftrightarrow{\nabla}\cdot\sigma - \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B}\right) = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}} \qquad (E36)$$

e la matrice σ^{ij} è detta "tensore degli sforzi di Maxwell".

N.B. Le leggi di conservazione per l'energia e l'impulso nel formalismo relativistico sono "unificate" e scritte più compattamente