Dunque, integrando per parti,

$$0 = -m \int_\Gamma d\tau \, \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \eta_{\mu\nu} \delta x^\nu \qquad (293)r$$

per δx^ν arbitrario, da cui

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau} = 0} \qquad (294)r$$

cioè proprio l'eq. del moto attesa per una particella libera, vedi (279)r.
In termini del quadrimpulso, qs corrisponde a

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0} \qquad (295)r$$

cioè alla conservazione del quadrimpulso per una particella libera

. Quadriaccelerazione Se introduciamo la

$$\boxed{a^\mu \equiv \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau}} \qquad (296)r$$

l'eq. del moto è semplicemente

$$\boxed{a^\mu = 0} \qquad (297)r$$

per una particella libera. Ricordiamo che (eq (247)r)

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \qquad (298)r$$

da cui otteniamo

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \vec{v}) = \left(c\gamma \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \right) \qquad (299)r$$

Ora,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{(-2)}{c^2}\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{\gamma^3}{c^2}\,\vec{v}\cdot\vec{a} \qquad (300)_r$$

per cui

$$\boxed{a^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{a}\,,\ \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{v} + \gamma^2\vec{a}\right)} \qquad (301)_r$$

La relazione con la accelerazione $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ è quindi leggermente complicata.

Nel limite non-relativistico, $\gamma \to 1$, $v/c \ll 1$ per cui

$$a^\mu \longrightarrow (0, \vec{a}) \qquad (302)_r$$

. La quadriforza

In meccanica newtoniana, se la particella non è libera ma soggetta al (un campo di) forza si ha

$$\vec{a} = \vec{F}/m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad (303)_r$$

Essendo espresso in termini di tri-vettori, questa legge non è covariante.

L'analogo relativisticamente covariante è

$$\boxed{a^\mu = f^\mu/m} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu} \qquad (304)_r$$

dove f^μ è un quadrivettore covariante che codifica l'effetto dell'interazione sulla particella, detto quadriforza.

La sua relazione con la forza non-relativistica $\vec{F}$ è data da ~~data da~~ segue dalla (301)$_r$ e dalla (303)$_r$:

$$\boxed{f^\mu = m a^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c} \vec{F}\cdot\vec{v},\ \gamma^2 \vec{F} + \frac{\gamma^4}{c^2} (\vec{F}\cdot\vec{v})\vec{v} \right)} \qquad (305)_r$$

l'equazione (304), scritta in termini di p^μ, richiede che

$$\begin{cases} \dfrac{dp^0}{d\tau} = \dfrac{1}{c}\dfrac{d\varepsilon}{d\tau} = f^0 = \dfrac{\gamma^4}{c}\vec{F}\cdot\vec{v} \\[2ex] \dfrac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{f} = \gamma^2\vec{F} + \dfrac{\gamma^4}{c^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\vec{v} \end{cases} \qquad (306)_r$$

Nel limite non relativistico $|\vec{v}|/c \ll 1$ e $\gamma \to 1$, $\tau \to t$ ~~otteniamo~~ e otteniamo quindi

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad \text{potenza} \\[2ex] \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \end{cases}} \qquad (307)$$

Dunque $\dfrac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu$ codifica a livello relativistico sia il tasso di variazione dell'energia che quello della q.tà di moto.

- Per una ~~specifica~~ particella ~~desc~~ ~~la~~ descritta da una azione interagente

$$S[\Gamma] = S_{free}[\Gamma] + S_{int}[\Gamma] \qquad (308)$$

dove

$$S_{free}[\Gamma] = -mc^2 \int_\Gamma d\tau \qquad (309)$$

(vedi la $(286)_r$)

f^μ è ottenuto dalla variazione di S_{int} rispetto alla traiettoria.

~~Dalla~~ Siccome la (292)$_r$-(293)$_r$ ci dicono che

$$\delta S_{free} = -\int_r d\tau \, \frac{dp^\mu}{d\tau} \cdot \eta_{\mu\nu} \delta x^\nu \qquad (310)$$

se ~~ponendo~~ ~~abbiamo~~ scriviamo

$$\delta S'_{int} = \int_r d\tau \, f^\mu \cdot \eta_{\mu\nu} \delta x^\nu \qquad (311)$$

allora la condizione di stazionarietà ci dice che

$$0 = \delta S_{free} + \delta S_{int} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \qquad (312)$$

Consideriamo ora una situazione di quest'ultimo tipo: una particella massiva dotata di carica q che interagisce con un campo e.m. "esterno" ("di background").
Esaminare questa situazione ci ~~fornisce~~ darà un'indicazione cruciale su come organizzare in modo conveniente la trattazione dei campi elettromagnetici stessi.

- L'azione di una particella carica

Ricordiamo dalle lezioni di CQM (~~fino~~ e dai corsi precedenti) che una particella carica in interazione col campo e.m.

subisce la forza

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (313)$$

Come avete visto nel corso di MAS o di MMMC, è possibile derivare questo effetto da un'azione di interazione che però può essere scritta solo in termini dei potenziali ϕ, $\vec{A}$:

$$\boxed{S_{int} = q \int_\Gamma dt \left(-\phi + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right)} \qquad (314)$$

Questa azione la avete ricavata nel formalismo non relativistico ma l'elettromagnetismo è intrinsecamente relativistico ed infatti questa azione è direttamente scrivibile in forma covariante. Riscriviamola come

$$S_{int} = q \int_\Gamma dt \left(-\phi \frac{dt}{dt} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = q \int_\Gamma dt \left(-\frac{\phi}{c} \frac{dx^0}{dt} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \qquad (315)$$

Se introduciamo

$$A_\mu = (-\phi, c\vec{A}) \qquad (316)$$

allora

$$S_{int} = \frac{q}{c} \int_\Gamma dt \left(A_0 \frac{dx^0}{dt} + \underbrace{\vec{A}}_{c\vec{A}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \frac{q}{c} \int_\Gamma dt \, A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} \qquad (317)$$

Questa espressione è invariante per riparametrizzazioni $t \to f(t)$.

Supponiamo che l'osservatore inerziale che sta descrivendo il moto decido di usare come parametro il tempo proprio $\tau(t)$ della particella. Invertendo la relazione per scrivere $t = t(\tau)$.

$$S_{int} = q\int_\Gamma d\tau \cancel{\frac{dt}{d\tau}}\, A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}\cancel{\frac{d\tau}{dt}} = q\int_\Gamma d\tau\, A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad (318)$$

cioè

$$\boxed{S_{int} = q\int_\Gamma d\tau\, A_\mu u^\mu} \qquad (319)$$

- Questa azione è relativisticamente invariante se determiniamo che

$$\boxed{A_\mu \quad \text{sia un vettore covariante}} \qquad (320)$$

(infatti u^μ è un vettore controvariante $\Rightarrow A_\mu u^\mu$ è invariante, e $d\tau$ è invariante).

- La posizione (320) ci guiderà nello scrivere in modo covariante la teoria di Maxwell!

- Ci fornisce anche ~~...~~ un esempio di espressione esplicita della quadriforza f^μ derivata da un'azione d'interazione, secondo la (311).

- Dalla (319) infatti, ricordando che $A_\mu = A_\mu(x(\tau))$ e $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

abbiamo

$$\delta S_{int} = q\int_\Gamma d\tau \left\{ (\partial_\nu A_\mu)\,\delta x^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} + A_\mu \frac{d}{d\tau}\delta x^\mu \right\} \qquad (321)$$

Integrando per parti il 2° termine e rinominando gli indici,

$$\delta S_{int} = \frac{q}{c}\int_\gamma d\tau \left\{ \partial_\nu A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{dA_\nu}{d\tau} \right\} \delta x^\nu$$

$$= \frac{q}{c}\int_\gamma d\tau \left\{ \partial_\nu A_\rho \frac{dx^\rho}{d\tau} - \frac{dx^\rho}{d\tau}\partial_\rho A_\nu \right\} \delta x^\nu$$

$$= \frac{q}{c}\int_\gamma d\tau \, (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) \frac{dx^\rho}{d\tau}\, \delta x^\nu \qquad (322)$$

Confrontando con la (311) leggiamo che $f_\nu = f^\mu \eta_{\mu\nu}$ è data da

$$\boxed{f_\nu = \frac{q}{c}\left(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu\right)\frac{dx^\rho}{d\tau}} \qquad (323)$$

Vedremo a breve che questa quadriforza nel limite non-relativistico corrisponde effettivamente alla forza di Coulomb e Lorentz, eq. (313).

- Il tensore del campo elettromagnetico

I campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ possono essere scritti in termini del quadripotenziale A_μ.

Infatti

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla}A_0 - c\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^0} = \vec{\nabla}A_0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial x^0} \qquad (324)$$

cioè

$$\boxed{E^i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i} \qquad (325)$$

Inoltre, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, cioè

$$B^x = B^1 = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = \frac{1}{c}\left(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2\right) \qquad (326)$$

$$B^y = B^2 = \dots \text{ (ciclicamente)}$$

ovverosia

$$\boxed{B^i = \frac{1}{2c}\varepsilon^{ijk}\left(\partial_j A_k - \partial_k A_j\right)} \qquad (327)$$

- Inoltre però le componenti dei campi elettromagnetici sono in realtà organizzate in un tensore

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} \qquad (328)$$

- Questo è un tensore con due indici covarianti perché
  * A_μ lo abbiamo assunto essere un vettore covariante
  * l'operatore ∂_μ si trasforma in modo covariante e, applicato ad un tensore, lo trasforma ~~in un tensore~~, per quanto riguarda le trasformazioni di Lorentz, in un tensore con un altro indice μ

- È un tensore antisimmetrico ~~per definizione perché segno~~

$$\boxed{F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}} \qquad (329)$$

come si vede esplicitamente dalla definizione (328).
Ovviamente perciò $F_{\mu\mu} = 0 \quad \forall \mu$, e il numero di componenti indipendenti è dato dal numero di componenti

$$F_{\mu\nu}, \qquad \mu < \nu \qquad (330)$$

cioè $\frac{4\times 3}{2} = \boxed{6}$: tante quante le componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Dalle (325) e (327), che riscriviamo come

$$E^i = -F_{0i} \left(= F_{i0}\right), \qquad B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk} \qquad (331)$$

deduciamo che, rappresentando $F_{\mu\nu}$ come una matrice antisimmetrica da 4×4 luoghi,

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & cB^z/4 & -cB^y/4 \\ E^y & -cB^z/4 & 0 & cB^x/4 \\ E^z & cB^y/4 & -cB^x/4 & 0 \end{pmatrix}} \qquad (332)$$

. Le trasformazioni di Lorentz, dunque, in particolare i boosts, mischiano tra di loro il potenziale scalare e vettore, e i campi elettrici e magnetici.

. Il quadripotenziale trasforma come

$$\begin{cases} A_\mu \to A'_\mu = A_\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \\ \underline{A} \to \left(\Lambda^{-1}\right)^T \underline{A} \quad (\text{forma matriciale}) \end{cases} \qquad (333)$$

. Il tensore di campo trasforma come

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= F_{\rho\sigma} \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\sigma{}_\nu \\ &= \left(\Lambda^{-1T}\right)_\mu{}^\rho F_{\rho\sigma} \left(\Lambda^{-1}\right)^\sigma{}_\nu \end{aligned} \qquad (334)$$

In termini matriciali, dunque,

$$F \to F' = \left(\Lambda^{-1}\right)^T F \Lambda^{-1} \qquad (335)$$

• <u>Esempio</u> Supponiamo che l'osservatore O osservi un campo elettrico con l'unica componente E^z non nulla.

Dunque

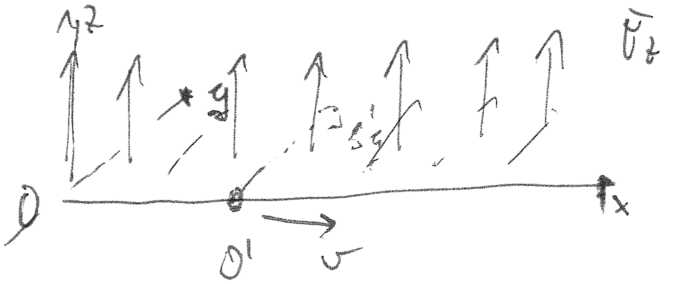
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -E^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (336)$$

Questo corrisponde ad un potenziale $\phi = \phi(z)$, $\vec{A} = 0$, con

$\dfrac{d\phi}{dz} = -E^z$. Dunque

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -\phi \\ \vec{0} \end{pmatrix} \qquad (337)$$

Cosa viene percepito da un osservatore O' che si muove con velocità v nella direzione positiva dell'asse x?



(338)

La TL è effettuata da Λ tale che

$$\Lambda^{-1} = \cancel{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (339)$$

Dunque

$$\underline{A}' = (\Lambda^{-1})^T A = \cancel{\gamma} \begin{pmatrix} -\gamma\phi(z) \\ -\beta\gamma\phi(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (z' = z) \qquad (340)$$

Dunque O' percepisce anche un potenziale vettore

$$A'^x(z') = -\beta\gamma_c\,\phi(z') \qquad (341)$$

e quindi un campo magnetico

$$B'^y = \partial_{z'} A^{x'} = -\beta\gamma_c \frac{d\phi(z')}{dz'} = \beta\gamma_c\, E^z \qquad (342)$$

Questo si vede anche direttamente trasformando il tensore di campi F:

$$F' = (\Lambda^{-1})^T F \Lambda^{-1} = \underset{\text{(esercizio)}}{\cdots} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\gamma E^z \\ 0 & 0 & 0 & -\beta\gamma_c E^z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underset{\pm E'^z}{\gamma E^z} & \underset{B'^y}{\beta\gamma_c E^z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (343)$$

• <u>La quadriforza elettromagnetica</u>

Torniamo all'espressione (323) della quadriforza percepita da una particella carica in un campo e.m. Abbiamo

$$f^0 = -f_0 = -\frac{q}{c}\left(\partial_0 A_j - \partial_j A_0\right)\frac{dx^j}{d\tau} = -\frac{q}{c}\left(\partial_0 A_i - \partial_i A_0\right)\frac{dx^i}{d\tau} \qquad (344)$$

cioè, usando la (325)

$$f^0 = \frac{q}{c} E^i \frac{dx^i}{d\tau} \qquad (345)$$

Nel limite non-relativistico, $d\tau \to dt$, e quindi

$$f^0 = \frac{1}{c}\, q\vec{E}\cdot\vec{v} = \frac{1}{c}\vec{F}^e\cdot\vec{v} \qquad (346)$$