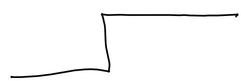
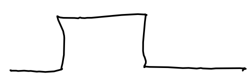
MQ I Corso A

Simon Badger EN 5.9

Esercizi con potenziali unidimensionali

1. Panoramica (Riepilogo di concetti importante)
2. Gradino di potenziale 
3. Barrier di potenziale 
4. Buca di potenziale 
5. Potenziali con δ-Dirac 
6. Potenziali periodici 

1. Panoramica

Vedremo soluzioni all'equazione di Schrödinger in 1d quando il potenziale e independente dal tempo. Ricordate che in questo caso l'eq. di Schrödinger é <u>separabile</u>

Equazione di Schrödinger (posizione)

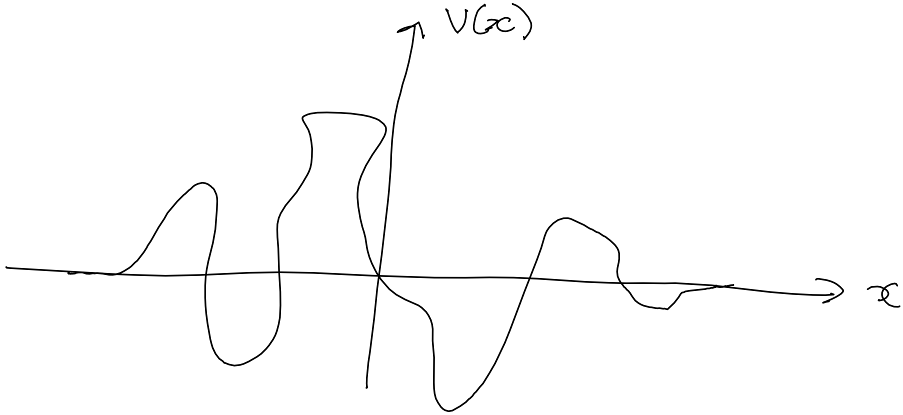
$$V \equiv V(x) \, , \quad H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

Funzione d'onda con depedenza dal tempo

$$\Psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\,\psi(x)$$

Consideriamo potenziali che spariti al $x = \pm\infty$:



In generale é difficile trovare soluzioni analitiche (forma chiusa).

Ci sono due casi importante :

$E > 0$, problemi di <u>scattering</u>

$\rightarrow$ soluzioni <u>continuo</u>

$E < 0$, problemi di <u>stati legati</u>

$\rightarrow$ soluzioni <u>discreto</u>

Nel caso di una particella libera, $E>0$ troviamo soluzioni oscillando:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Rightarrow \psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$= A'\cos(kx) + B'\sin(kx)$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$\boxed{E>0}$

Se invece $E<0$ i soluzioni prendono una forma esponenziale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = -|E|\psi \Rightarrow \psi = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

$$= A'\cosh(kx) + B'\sinh(kx)$$

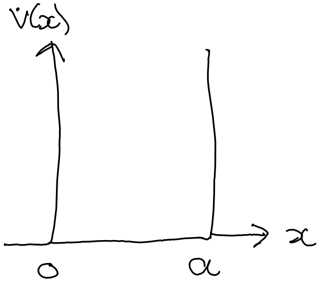
$$k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$\boxed{E<0}$

$\boxed{NB}$ e^{ikx} rappreseta un'onda sta viaggando alla sinistra ad destra:

$$\Psi(x,t) = \Psi(kx-\omega t)$$

Avete già visto l'esempio di una buca di potenziali infinita dove c'era un spettro discretto di autostati:



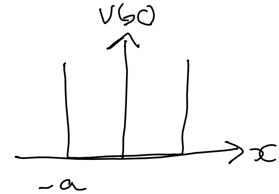
$$V(x) = \begin{cases} \infty & ; \quad 0<x<a \\ 0 & ; \quad x<0,\ x>a \end{cases}$$

autostati normalizzata $\quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

autovalori dell'energie $\quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m a^2}$

Compito #1 : Buca infinitá simetrica

$$V(x) = \begin{cases} \infty \; ; & |x| > a \\ 0 \; ; & |x| < a \end{cases}$$



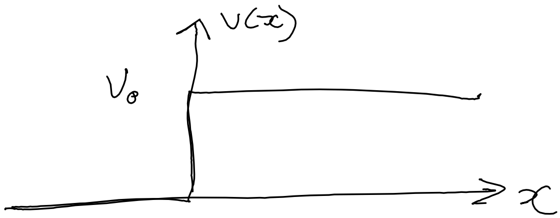
- Mostra che gli autostati dell'energia sono

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos\left(n\pi x/2a\right) \; ; & n = 1, 3, 5 \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(n\pi x/2a\right) \; ; & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

- Desegni i primi 4 funzioni

2. Gradino di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases}$$



Esercizio 2.1 Scrivi il soluzione per la funzione d'onda in caso che la particella ha energia $E > V_0$.

Regione I: $x<0$

$V(x) = 0 \Rightarrow \psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

dove $k = \sqrt{\dfrac{2Em}{\hbar^2}}$

Regione II: $x>0$

$V(x) = V_0$ quindi

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0\right)\psi_{II} = E\psi_{II}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = -q^2\psi_{II} \quad , \quad q^2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

$$> 0$$

$$\Rightarrow \psi_{II} = Ce^{iqx} + De^{-iqx}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_I & x<0 \\ \psi_{II} & x>0 \end{cases}$$

deve essere continuo $\Rightarrow \psi_I(0) = \psi_{II}(0)$

e $\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0)$

condizioni al contorno

ipotesi su scattering

e^{ikx} avanti , e^{-ikx} indietro

prendiamo il caso quando la particella inizia alla sinistra quindi ψ_{II} non ha un componente indietro $\Rightarrow \boxed{D=0}$

① $A + B = C$

② $ik(A - B) = iqC$

$$\Rightarrow \quad A + B = \frac{k}{q}(A - B)$$

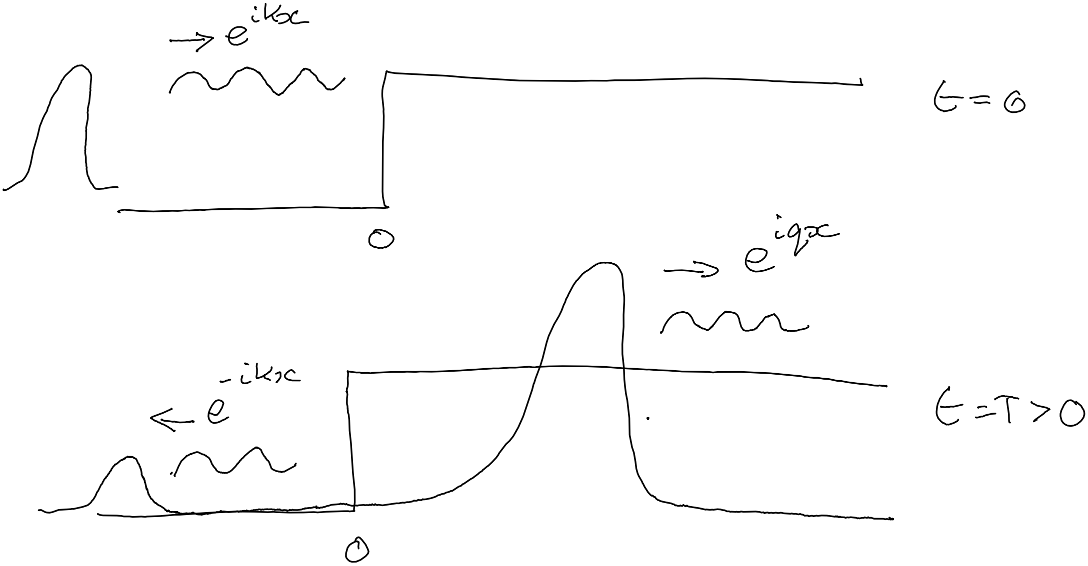
$$\Rightarrow \quad A\left(1 - \frac{k}{q}\right) = -B\left(1 + k/q\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} B &= -A\left(\frac{1 - k/q}{1 + k/q}\right) \\ C &= A\left(1 - \left(\frac{1-k/q}{1+k/q}\right)\right) = A\left(\frac{2k/q}{1+k/q}\right) \end{aligned}}$$

La normalizzazione di ψ determina il coefficiente A.

osservazioni

- Il nostro soluzione rappresenta un forma generale → per vedere come una particella si disperde dal gradino dobbiamo mettere un pacchetto d'onda Gaussiana:



- I coefficienti A, B, C rappresenta la parte della funzione d'onda associato con incidente, riflessione e trasmissione rispettivamente.

Possiamo usare la conservazione della corrente di probabilità per derivare le proprietà dei coefficiente.

$$\rho = |\Psi|^2 \quad \text{densità di probabilità}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \, dx = 1$$

$$\boxed{j = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\right)\Psi\right) \quad \text{corrente di probabilità}}$$

compito #2 : prova che

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

usando l'eq. di schrödinger

$$j_I = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi_I^* \frac{\partial \psi_I}{\partial x} - \frac{\partial \psi_I^*}{\partial x}\psi_I\right)$$

$$= \frac{-i\hbar}{2m}\left[\left(A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}\right) ik \left(A e^{ikx} - B e^{-ikx}\right) - \left(-A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}\right) ik \left(A e^{ikx} + B e^{-ikx}\right)\right]$$

$$= \frac{k\hbar}{2m}\left[|A|^2 + AB^* e^{2ikx} - BA^* e^{-2ikx} - |B|^2 + |A|^2 - AB^* e^{2ikx} + BA^* e^{-2ix} - |B|^2\right]$$

$$= \frac{\hbar}{m} k \left(|A|^2 - |B|^2\right)$$

Sim.

$$j_{II} = \frac{\hbar}{m} q |C|^2$$

perche $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ in questo caso $\Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow j_I = j_{II}$$

adesso definiamo,

$$j_{incidente} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

$$j_{riflessione} = \frac{\hbar k}{m} |B|^2$$

$$j_{trasmissione} = \frac{\hbar q}{m} |C|^2$$

con i coefficiente di trasmissione e riflessione definito come

$$T = \frac{j_{tras.}}{j_{inc.}} = \frac{q |C|^2}{k |A|^2}$$

$$R = \frac{j_{rifl.}}{j_{inc.}} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

con

$$\boxed{T + R = 1}$$

Esercizio 2.2 Scrivi il soluzione per la funzione d'onda quando $0<E<V_0$.
cosé la probabilitá a trovare la particella nella regione $x>0$ se inizia a $x=-\infty$?

$$\psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$ come prima

ma

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0\right)\psi_{II} = E\psi_{II}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = \underbrace{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}_{>0}\psi_{II}$$

$$= \beta^2 \psi_{II}$$

$$\Rightarrow \psi_{II} = Ce^{-\beta x} + \cancel{De^{\beta x}}$$

$\to \infty$ quando $x \to \infty$
$\Rightarrow$ non normalizabile.

$$A + B = C$$

$$ik(A - B) = -\beta C$$

$$\Rightarrow 2A = \left(1 - \frac{\beta}{ik}\right) C$$

$$\Rightarrow C = \frac{2ik}{ik-\beta} A$$

$$B = \left(\frac{2ik - (ik-\beta)}{ik-\beta}\right) A = \left(\frac{ik+\beta}{ik-\beta}\right) A$$

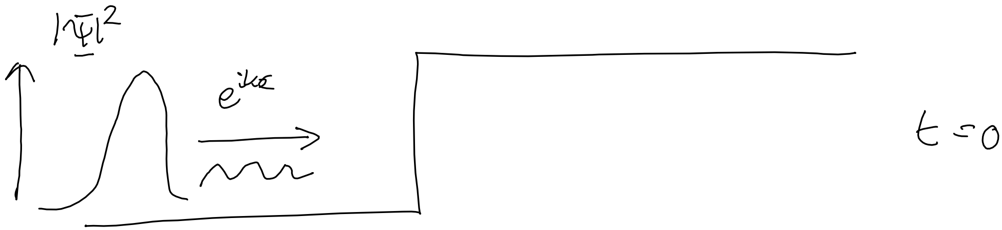
questa volta

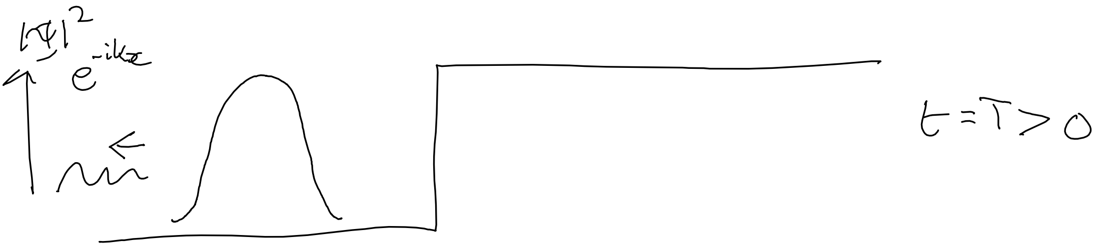
$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{j_R}{j_I} = \left|\frac{ik+\beta}{ik-\beta}\right| = 1$$

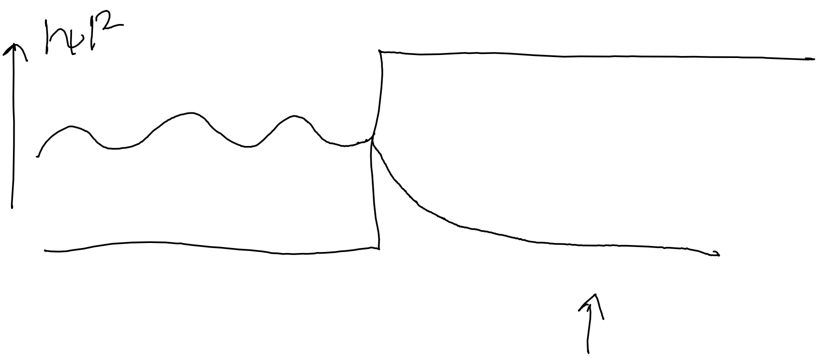
e, perché ψ_{II} è reale,

$$j_T = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi_{II}^* \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{II}^*}{\partial x} \psi_{II}\right) = 0$$

$$\Rightarrow T = 0 .$$



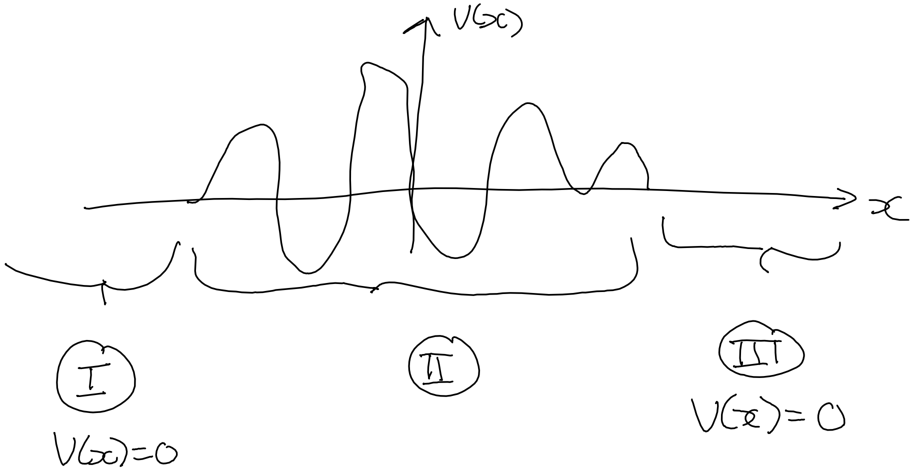




funzione d'onda non-zero
ma non c'é probabilita
a trovare la particella
con $x>0$

La Matrice di Scattering (Griffiths 2.53)

Consideriamo un potenziale localizzato con una forma generica e $E>0$:



$$\psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_{III} = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

non sapiamo la forma esatto per regione II ma che é un soluzione ad un eqn. diff. ordine secondo lineare

$$\Rightarrow \quad \psi_{II} = Cf(x) + Dg(x)$$

dove f, g sono independente linearmente.

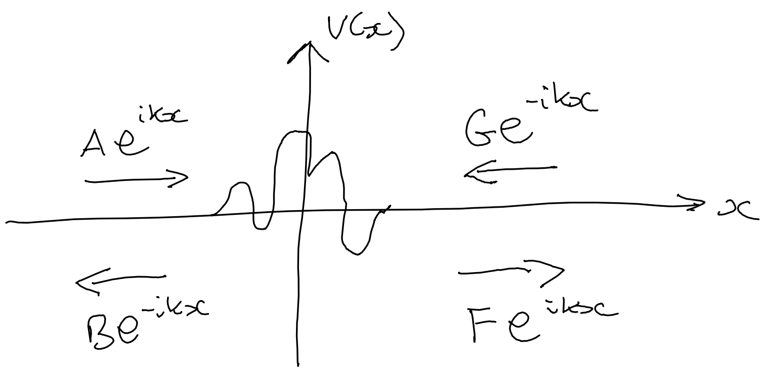
Usando i condizioni di continuità possiamo fare 2 combinazioni independente di C, D :

$$B = S_{11} A + S_{12} G$$
$$F = S_{21} A + S_{22} G$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}$$

dove A, G sono ampiezze <u>incoming</u> (dentro)

e B, F sono ampiezze <u>outgoing</u> (fuori)

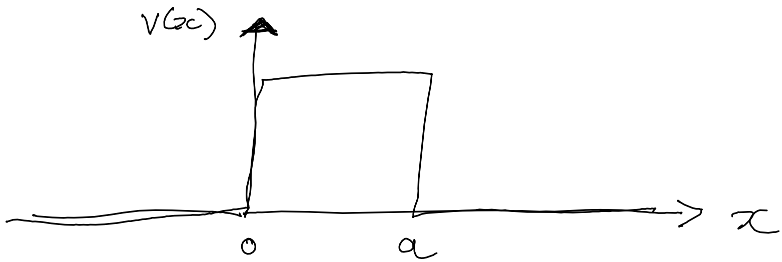


3. Barriera di potenziale

Consideriamo la generalizzazione del gradino in cui

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0<x<a \\ 0 & x<0\,,\ x>a \end{cases}$$

dove $V_0 > 0$



Esercizio 3.1 In caso $0 < E < V_0$ calcoli i coefficienti di riflessione e trasmissione.

$$\psi = \begin{cases} \psi_I = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x<0 \\ \psi_{II} = Ce^{qx} + De^{-qx} & 0<x<a \\ \psi_{III} = Fe^{ikx} & x>0 \end{cases}$$

condizioni di continuità:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0), \qquad \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a),$$

$$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0), \qquad \psi_{II}'(a) = \psi_{III}'(a).$$

$\Rightarrow$

$$A+B = C+D, \qquad Ce^{qa} + De^{-qa} = Fe^{ika},$$

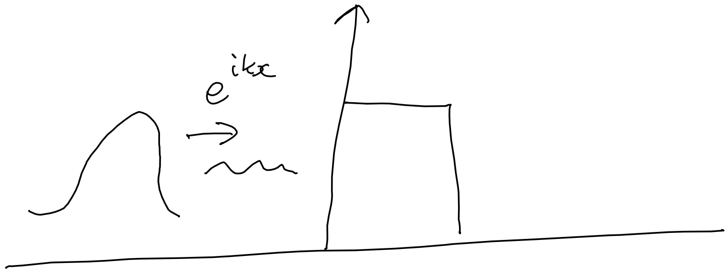
$$ik(A-B) = q(C-D), \qquad q(Ce^{qa} - De^{-qa}) = ikFe^{ika}.$$

4 equazione (lineare) per 5 coefficiente

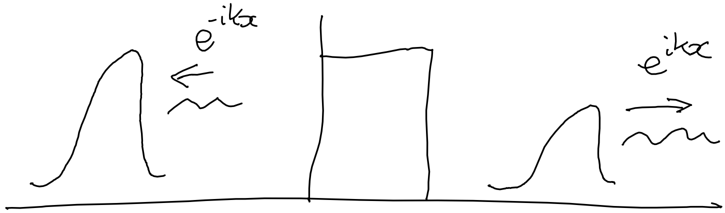
$\Rightarrow$ B, C, D, E in termino di un norm. arbitrario A. $R+T=1$ (controlli) con

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left| \frac{(k^2+q^2)\sinh(aq)}{2ikq\cosh(aq) + (k^2-q^2)\sinh(aq)} \right|^2$$

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \left| \frac{2ie^{-iak}\,kq}{2ikq\cosh(aq) + (k^2-q^2)\sinh(aq)} \right|^2$$



$t = 0$



$t = T > 0$

Effetto tunnel : c'è una probabilità $\neq 0$ che troviamo la particella ad destra della barriera

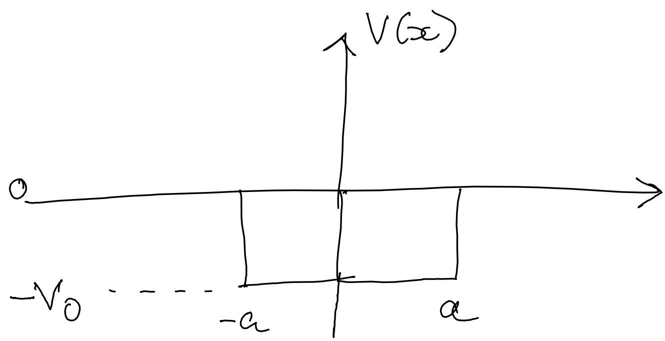
<u>compito #4</u> mostra che in caso la barrier é tra $x=-a$ e $x=a$, $0<V_0<E$ i soluzioni per i cofficienti di riflessione e trasmissione sono

$$R = \left| \frac{(k^2-q^2)\,\mathrm{Sin}(2aq)}{(k^2+q^2)\,\mathrm{Sin}(2aq) + 2i\,kq\,\mathrm{Cos}(2aq)} \right|^2$$

$$T = \left| \frac{2kq}{(k^2+q^2)\,\mathrm{Sin}(2aq) + 2i\,kq\,\mathrm{Cos}(2aq)} \right|^2$$

4. La Buca di Potenziale

Una buca di potenziale (attrattiva) può essere risolto in 2 situazioni interessante



1) $E > 0$, scattering

2) $-V_0 < E < 0$, stati legato

<u>Esercizio 4.1</u> Calcoli la funzione d'onda generale per scattering di una particella (dalla sinistra).

condizione al contorno

$$\psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \qquad x<0$$

$$\psi_2 = C e^{iqx} + D e^{-iqx} \qquad 0<x<a$$

$$\psi_3 = F e^{ikx} \qquad x>a$$

$$q = \sqrt{(E+V_0)\frac{2m}{\hbar^2}}$$

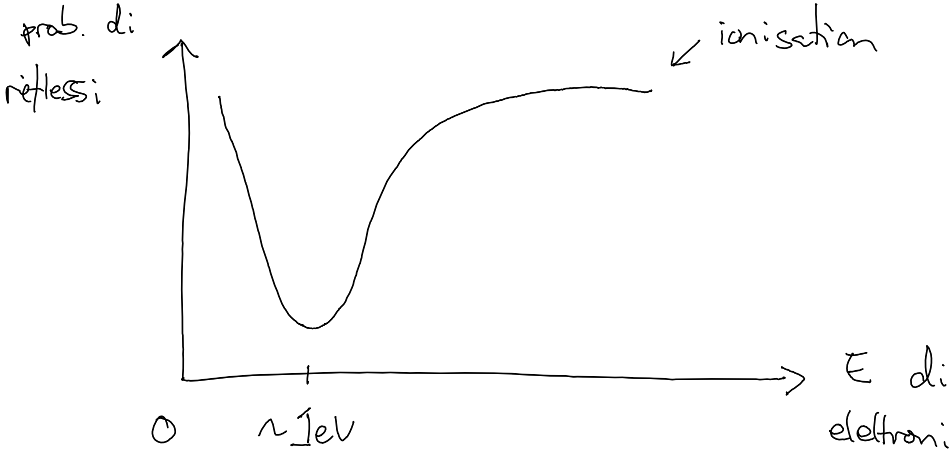
quindi esattamente come compito #4 con:

$$q = \sqrt{(E-V_0)\frac{2m}{\hbar^2}} \rightarrow q = \sqrt{(E+V_0)\frac{2m}{\hbar^2}}$$

⚠ osservazione c'é un situazione interessante se $2aq = n\pi$ $n \in \mathbb{Z}^+$. In questo caso $R=0$ corrispondente all'energie.

$$E = -V_0 + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

Questo modello semplice é stato utilizzato per spiegare l'osservazioni de Ramsauer/Towsend (1921) in cui il scattering di elettroni per un gas nobile (e.g. Xeon).



Il minimo della probabilitá di riflessione é stato osservato ad un energie > 0. L'effeto no ha un speigazione classiche e il modello con una buca finitá é stato proposta di Niels Bohr (~1926) [NB eq. di Schrödinger (1926)]

Esercizio 4.2 $\quad -V_0 < E < 0$

Con $E<0$ il soluzione la funzione d'onda fuori della buca prende la forma di un esponenziale reale

$$\psi_1 = A e^{kx} \qquad x<a$$
$$\psi_3 = D e^{-kx} \qquad x>a$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$$

NB: Non possiamo mettere e^{-kx} alla sinistra della buca perché non è normalizzabile.

Per $0<x<a$ con $q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}$

$$\psi_2 = \tilde{B} e^{iqx} + \tilde{C} e^{-iqx} \qquad |x|<a$$

Tuttavia, stati legati sono soluzioni reali (c.f. buca infinita) quindi è più conveniente a prendere

$$\psi_2 = B\cos(qx) + C\sin(qx).$$

Possiamo osservare che ci sono 4 condizione di continuità più il condizione di normalizzazzione con 4 coefficienti A, B, C, D quindi con soluzione esiste solo per valori particolare di q (quindi valori particolare di E)

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a) \quad ① \quad , \quad \psi_2(a) = \psi_3(a) \quad ③$$

$$\psi_1'(-a) = \psi_2'(-a) \quad ② \quad \quad \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \quad ④$$

① $$Ae^{-ka} = B\cos(-qa) + C\sin(-qa)$$

$$= B\cos(qa) - C\sin(qa)$$

② $$kAe^{-ka} = q\left(B\sin(qa) + C\cos(qa)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{q} = \frac{B\sin(qa) + C\cos(qa)}{B\cos(qa) - C\sin(qa)}$$

lo stessa combinazione di 3 + 4

$$B\cos(qa) + C\sin(qa) = De^{-ka} \qquad (3)$$

$$q\left(-B\sin(qa) + C\cos(qa)\right) = -kDe^{-ka}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{q} = -\left(\frac{-B\sin(qa) + C\cos(qa)}{B\cos(qa) + C\sin(qa)}\right)$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{-Bs + Cc}{Bc + Cs}\right) - \frac{Bs + Cc}{Bc - Cs} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} s = \sin(qa) \\ c = \cos(qa) \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{(Bs - Cc)(Bc - Cs) - (Bs + Cc)(Bc + Cs)}{B^2c^2 - C^2s^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2BC(c^2 + s^2)}{B^2c^2 - C^2s^2} = \frac{-2BC}{B^2c^2 - C^2s^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{B = 0}_{\text{dispari}} \quad \text{or} \quad \underbrace{C = 0}_{\text{pari}}$$

(1) $\underline{c = 0}$ pari

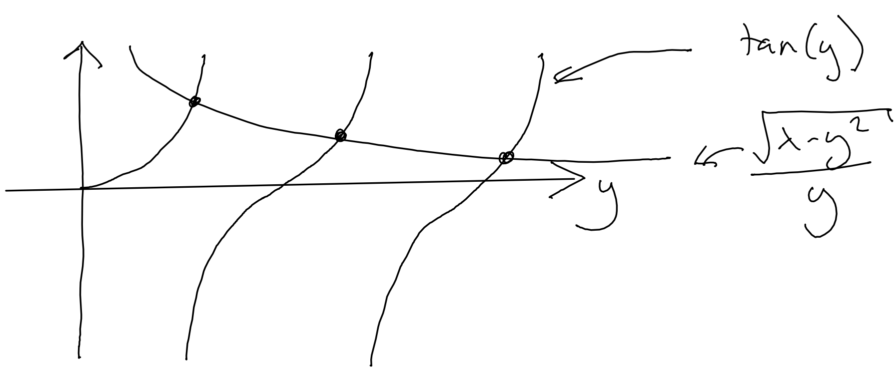
$$\Rightarrow \frac{k}{q} = \tan(aq)$$

per trovare i valori di q che risolvere questo equazione transcendentale cambiano variabili a

$$y = aq$$

$$\lambda = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^2$$

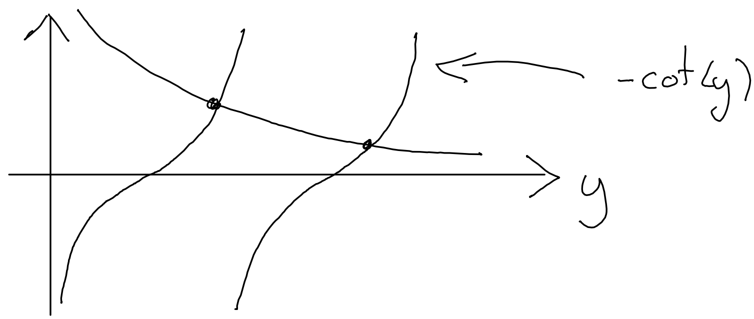
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = \tan(y)}$$



compito #5

per casi dispari (B = 0) mostra che

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = -\cot(y)$$



In case di una particella con m = 1 e (in unitari arbitrario) $\hbar = 1$, $a = 1$, $V_0 = 50$ ($\Rightarrow \lambda = 100$) quanti stati pari e dispari sono e quale sono le suoi energie?

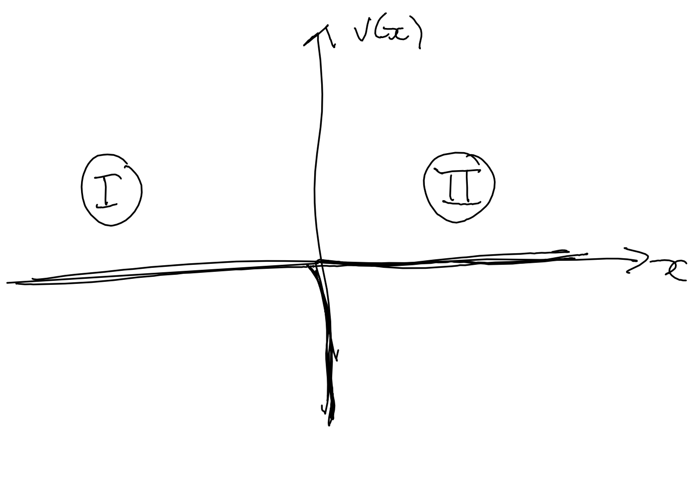
5. Potenziali con Dirac Delta

Un' altro forma della potenziale in cui possiamo trovare soluzione analitic usano δ - Dirac. La differenza é che la derivata della funzione d'onda non é continuó.

Per esempio $V(x) = -V_0\,\delta(x)$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - V_0\,\delta(x)\right)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\left(E + V_0\,\delta(x)\right)\frac{2m}{\hbar^2}\psi(x)$$



Ora, consideriamo la derivata a $x = \pm\varepsilon$

$(\varepsilon > 0,\ \varepsilon << 0)$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^2\psi}{dx^2}\, dx = \psi'_{II}(\varepsilon) - \psi'_{I}(-\varepsilon)$$

oppure, usando l'eq. di Schrödinger

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\left(E + V_0\,\delta(x)\right)\psi(x)\,\frac{2m}{\hbar^2}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\,\psi_I(0) \qquad \left[\text{NB } \psi_I(0) = \psi_{II}(0)\right]$$

Quindi la condizione al contorno per la derivata è (a $x=0$)

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\psi'_{II}(\varepsilon) - \psi'_{I}(-\varepsilon)\right) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\,\psi_I(0)}$$

Compito #6 In caso $E>0$ scrivi la funzione d'onda quando $V(x) = -V_0\,\delta(x)$ (assumendo la particella inizia alla sinistra)

Esercizio 5.1 Stati legati per $V(x) = -V_0\,\delta(x)$ ($E<0$)

In questo caso la funzione d'onda è scritto in termini di esponenziale reale

$$k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$$\psi_I = A e^{kx}$$

$$\psi_{II} = B e^{-kx}$$

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A = B$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\psi_{II}'(\varepsilon) - \psi_I'(\varepsilon)\right] = -kB - kA$$

$$= -2kA$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2} A$$

Quindi c'è solo un soluzione

$$k = \frac{mV_0}{\hbar^2}$$

Possiamo determinare anche la norm.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 2\int_0^{\infty} |\psi_{II}|^2 dx$$

$$= 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx}\, dx$$

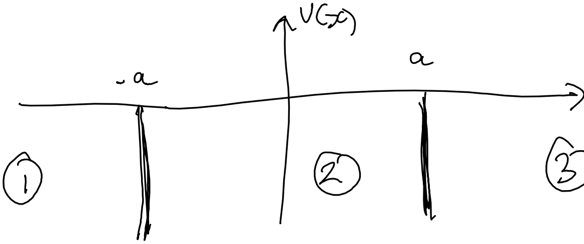
$$= 2A^2 \left[-\frac{1}{2k} e^{-2kx} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{A^2}{k} = 1$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{k}$$

$$\psi = \begin{cases} \sqrt{k}\, e^{kx}, & x < 0 \\ \sqrt{k}\, e^{-kx}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.2 Trova i soluzioni per stati legati per un potenziale con due δ-Dirac a $x=-a$ e $x=a$



$$V(x) = -V_0 \left(\delta(x-a) + \delta(x+a) \right)$$

Sol.

$$\psi_1 = A e^{kx}$$

$$\psi_2 = B \cosh(kx) + C \sinh(kx)$$

$$\psi_3 = D e^{-kx}$$

cerciamo prima per sol. pari $\Rightarrow C = 0$

continuità:

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a) \quad , \quad \psi_2(a) = \psi_3(a)$$

$$\psi_2'(-a) - \psi_1'(-a) = -\frac{2m}{\hbar^2} V_0 \psi_1(-a) ,$$

$$\psi_3'(a) - \psi_2'(a) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \psi_2(a)$$

per soluzioni pari prendiamo $C = 0$

$$A e^{-ka} = B\cosh(-ka) = B\cosh(ka) \quad (1)$$

$$\psi_1'(-a) = kAe^{-ka}$$

$$\psi_2'(-a) = Bk\sinh(-ka) = -Bk\sinh(ka)$$

$$\Rightarrow -Bk\sinh(ka) - kAe^{-ka} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} A e^{-ka} \quad (2)$$

$$B\cosh(ka) = De^{-ka} \quad (3)$$

$$\psi_3'(a) = -Dke^{-ka}$$

$$\psi_2'(a) = kB\sinh(ka)$$

$$\Rightarrow -Dke^{-ka} - kB\sin(ka) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} De^{-ka} \quad (4)$$

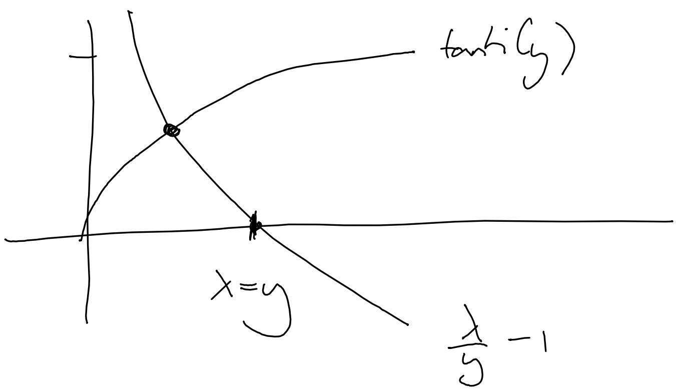
$$(1)+(3) \Rightarrow A = D \qquad B = \frac{Ae^{-ka}}{\cosh(ka)}$$

$$(2)\ (4) \Rightarrow -kAe^{-ka}\frac{\sinh(ka)}{\cosh(ka)} - kAe^{-ka} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} Ae^{-ka}$$

$$\Rightarrow \quad \tanh(ka) + 1 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{1}{k}$$

$$ka = y \;, \quad \lambda = \frac{2mV_0 a}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad \tanh(y) = \frac{\lambda}{y} - 1$$



$\Rightarrow$ 1 soluzione pari

Per il caso dispari possiamo trovare un equazione

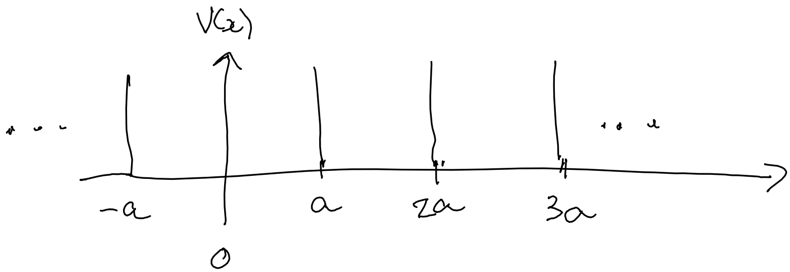
$$\tanh(y) = \left(\frac{\lambda}{y} - 1\right)^{-1} \Rightarrow 1 \text{ sol. } \underline{\underline{\text{se}}}$$

$$\lambda > 1 .$$

6. Potenziali Periodici

Consideriamo potenziali con una forma

$$V(x+a) = V(x)$$



Per trovare soluzione usiamo

Teorema di Bloch

le funzioni d'onda per un potenziale periodici, con periodo a, sodisfano

$$\psi(x+a) = e^{ifa}\psi(x) \quad f \in \mathbb{R}$$

Facciamo la prova dopo, per ora continuiamo assumendo é vero.

In realtà, un solido (reticolo) avrà frontere. Quindi la teorema di Bloch applica solo come un approssimazione. Per fare questa introduciamo un condizione al contorno per un reticolo di lunghezza aN, $N \gg 1$

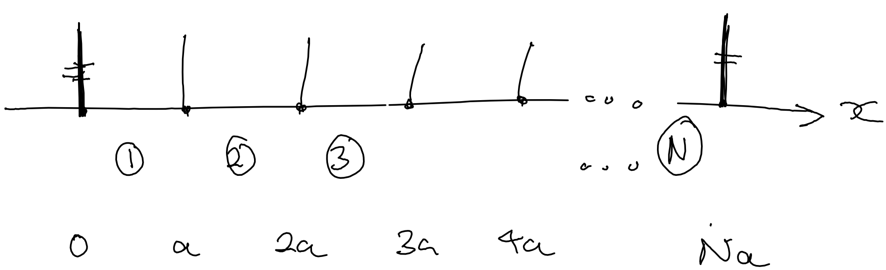
$$x = x + Na$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \psi(x+Na) = e^{ifNa}\psi(x)$$

$$\Rightarrow e^{ifNa} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{2\pi n}{Na}, \quad n \in \mathbb{Z}^+}$$

Esercizio 6.1 Dirac Comb (Pettine)



$$V(x) = \sum_{j=0}^{N-1} V_0 \, \delta(x - ja)$$

Prendiamo il caso di scattering di una particella. Dalla teorema di Bloch:

$$\psi_1(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad , \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_N(x) = e^{-ifa} \psi_1(x+a)$$

- condizioni al contorno

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_N(0) \\ \psi_1'(0) - \psi_N'(0) = -\frac{2m V_0}{\hbar^2} \cdot \psi(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = e^{-ifa}\left(A \sin(ka) + B \cos(ka)\right) & (1) \\ Ak - e^{-ifa} k \left(A \cos(ka) - B \sin(ka)\right) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} B & (2) \end{cases}$$

risolvere (1) per A e sostituire dentro (2)

$$A = B\left(\frac{e^{ita} - \cos(ak)}{\sin(ak)}\right)$$

quindi il costante B cancella dopo il sostituzione.

(2) $$Ak\left(1 - e^{-ita}\cos(ka)\right)$$

$$+ Be^{-ita} k\sin(ka) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} B$$

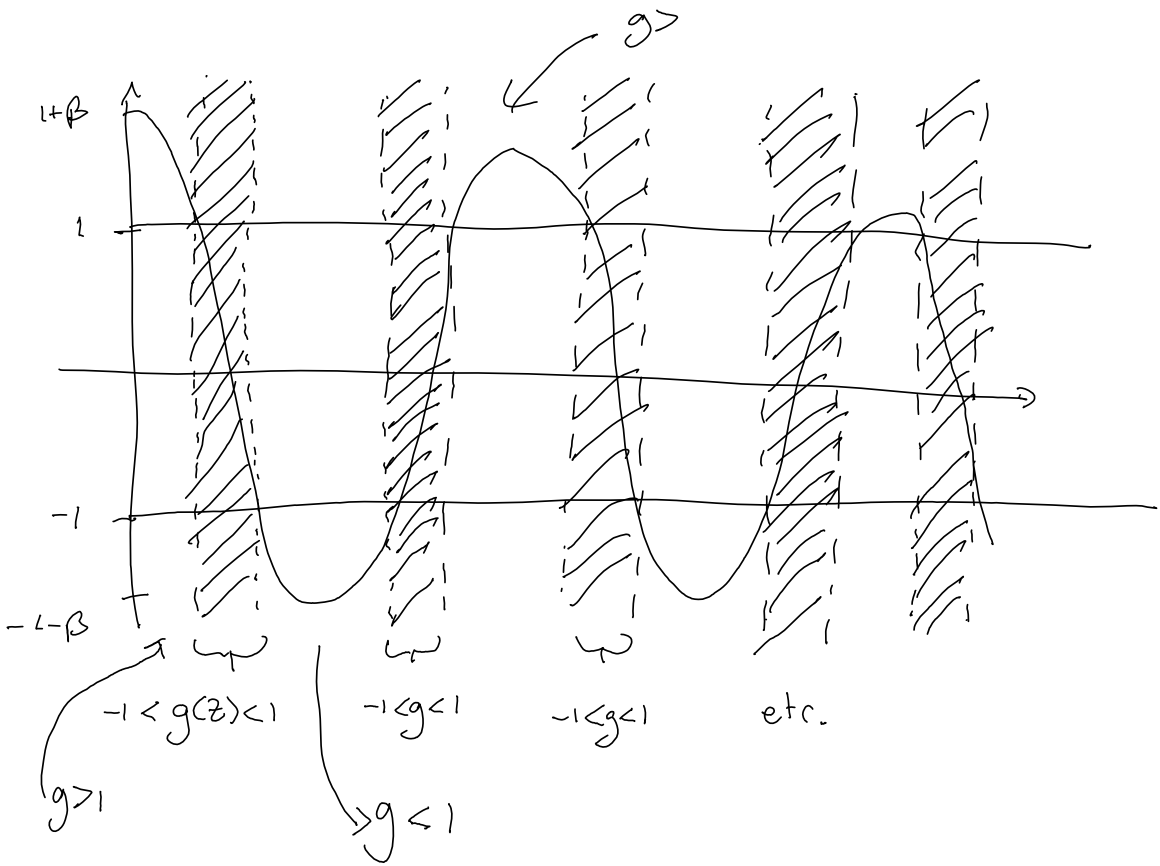
$$\Rightarrow \cancel{B}k\left(\frac{e^{ita} - \cos(ak)}{\sin(ak)}\right)\left(1 - e^{-ita}\cos(ka)\right)$$

$$+ \cancel{B}e^{-ita} k\sin(ka) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \cancel{B}$$

$$\Rightarrow \cos(ta) = \underbrace{\cos(ka) + \frac{mV_0}{\hbar^2}\frac{\sin(ka)}{k}}_{g(z) = \cos(z) + \beta \sin(z)/z}$$

$$z = ka, \quad \beta = mV_0 a/\hbar^2$$

$\cos(fa) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ $n \in \mathbb{Z}^+$ prende valori tra 1 e -1. $g(z)$ invece prende una forma:



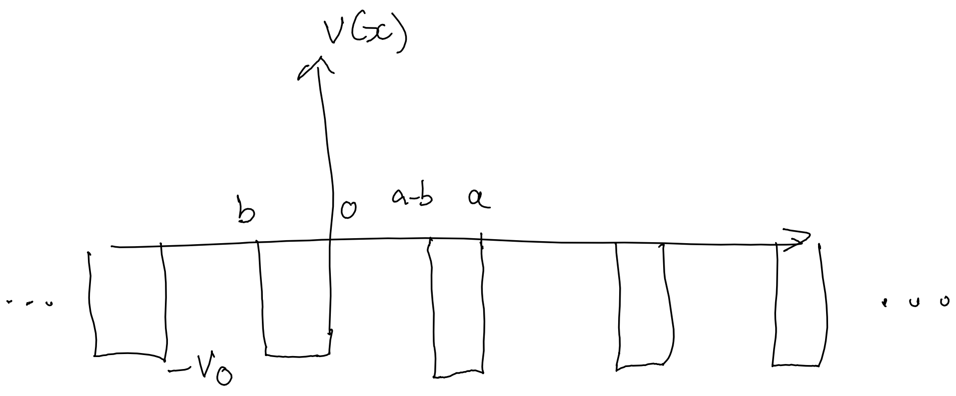
quindi troviamo $\boxed{\text{BAND GAPS}}$ nel spettro di stati quando $g > 1$ oppure $g < 1$.

Compito #7

il modello $\boxed{\text{Kronig - Penney}}$ e un sistema di baci potenziale

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -b+Na < x < Na \\ 0 & Na < x < a-b+Na \end{cases}$$

mostra che il sistema ha <u>band gaps</u> nello spettro di livelli permissibili.



Per la prossima volta...

- Simulazioni di scattering con il metodo di differenza finità.

- Prova della teorema di Bloch.