Raccolta prove scritte dell'esame di Meccanica Classica

Dipartimento di Fisica (UniTO)

A.A. 2017-2018 $\longrightarrow$ A.A. 2022-2023

- last update: May 24, 2024 -

Contents

1 Esame del 21.03.2017

1.1 Esercizio 1 (16.4)

La piattaforma di una giostra circolare di raggio R, partendo da ferma, si muove di moto circolare non uniforme, ma con accelerazione angolare costante ed in modulo pari a $\alpha = 0.2\,\mathrm{rad/s^2}$. Calcolare

1. la velocità angolare dopo $t^* = 2\,\mathrm{s}$;
2. il tempo τ impiegato a percorrere un giro;
3. il modulo dell'accelerazione di un punto che si trova a distanza R dall'asse di rotazione passante per il centro della piattaforma.

Sol. **[1]** $\omega(t^*) = \alpha\, t^*$ **[2]** $\tau = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}$ **[3]** $a(t) = \alpha\, R\sqrt{1+\alpha^2 t^2}$

1.2 Esercizio 2 (16.30)

Un tratto del percorso di una gara ciclistica è formato da due tratti pianeggianti separati da un tratto in discesa lungo $l = 2\,\mathrm{km}$ con pendenza costante ed assimilabile ad un piano inclinato di un angolo $\vartheta = 5^\circ$ rispetto all'orizzonte. Un ciclista di massa $m = 60\,\mathrm{kg}$ approccia il tratto in discesa con una velocità $v_0 = 36\,\mathrm{km/h}$. Per non affaticarsi decide di non pedalare lungo il tratto in discesa. Assumendo che l'unica forza di attrito sia la resistenza dell'aria, il cui modulo è direttamente proporzionale alla velocità del ciclista, secondo la legge $F_{att} = kv$, la cui costante vale $k = 3.6\,\mathrm{N\,s/m}$, calcolare:

1. la velocità di regime v_{lim} che il ciclista raggiungerà.

Assumendo che tale velocità di regime sia raggiunta prima della fine della discesa, calcolare inoltre:

2. il lavoro svolto dalla forza di attrito W_{att} sul ciclista nel percorrere il tratto in discesa;
3. la potenza P che dovrà erogare il ciclista pedalando, nel tratto pianeggiante, per continuare a muoversi con la stessa velocità che aveva al termine della discesa.

Sol. **[1]** $v_{lim} = \frac{mg}{k}\sin\vartheta$ **[2]** $W_{att} = \frac{1}{2}m(v_{lim}^2 - v_0^2) - mgl\sin\vartheta$ **[3]** $P = kv_{lim}^2$

1.3 Esercizio 3 (15.1)

Una piattaforma cilindrica, rigida ed omogenea, di massa $m_p = 100\,\mathrm{kg}$ ed avente raggio $R = 5$ m, può ruotare senza attriti intorno al suo asse verticale. Inizialmente un uomo di massa $m_u = 60\,\mathrm{kg}$, di dimensioni trascurabili rispetto a quelle della piattaforma, è fermo sul bordo, mentre tutto il sistema ruota liberamente con velocità angolare $\omega_0 = 0.2\,\mathrm{rad/s}$. Ad un certo istante l'uomo si mette a camminare fino a raggiungere il centro della piattaforma. Calcolare:

1. la velocità angolare del sistema ω_2 nell'istante in cui l'uomo raggiunge il centro della piattaforma;
2. la variazione dell'energia cinetica ΔK tra l'istante iniziale e quello finale.
3. A partire da un certo istante la piattaforma (nella situazione finale con l'uomo al centro) viene rallentata da un momento frenante costante $M_f = 20\,\mathrm{N\,m}$, calcolare in quanto tempo si ferma la piattaforma.

Sol. **[1]** $\omega_2 = \frac{m_p+2m_u}{m_p}\omega_0$ **[2]** $\Delta K = m_u\omega_0^2 R^2\left(\frac{1}{2}+\frac{m_u}{m_p}\right)$ **[3]** $\tau = \frac{m_p R^2\omega_2}{2M_f}$

2 Esame del 07.04.2017

2.1 Esercizio 1 (16.10)

Un'automobile, partendo da ferma dalla posizione $x(t = 0) = x_0$, si muove lungo un tratto rettilineo con la sua velocità che varia secondo la legge $v = k\,x^2$. Calcolare:

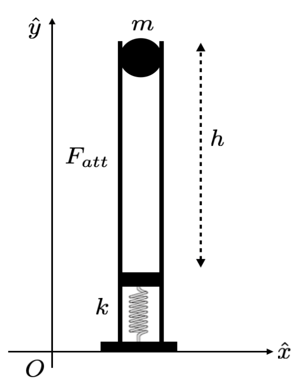
1. la legge oraria $x(t)$;
2. il modulo dell'accelerazione in funzione del tempo $a(t)$.

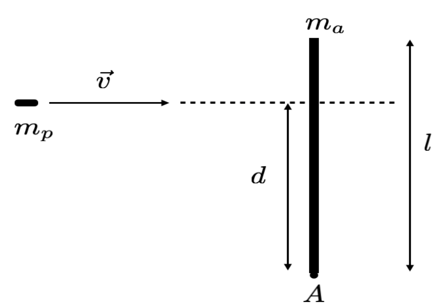
Sol. **[1]** $x(t) = \frac{x_0}{1-kx_0t}$ **[2]** $a(t) = \frac{2kx_0^3}{(1-kx_0t)^3}$

2.2 Esercizio 2 (16.56)

Una pallina di massa $m = 500\,\mathrm{g}$ si trova ferma all'interno di un tubo ad una quota $h = 1\,\mathrm{m}$ da una molla di massa trascurabile e di costante elastica $k = 40\,\mathrm{N/m}$, come mostrato in figura, quando inizia a cadere. Nel cadere tocca la parete del tubo ed è soggetta cosí ad una forza di attrito costante di modulo $F_{att} = 2\,\mathrm{N}$ che si oppone al moto della pallina durante tutto il suo moto. Calcolare:

1. la velocità v della pallina nell'istante immediatamente precedente al contatto con la molla;
2. il valore del tratto $\Delta\,l$ di cui si comprime la molla quando la pallina si ferma (i.e., massima compressione);
3. la quota H a cui risale la pallina assumendo che dalla posizione di massima compressione la molla si allunghi rilanciando la pallina verso l'alto.





Sol. **[1]** $v = \sqrt{2h\left(g - \frac{F_{att}}{m}\right)}$ **[2]** $\Delta\,l = \frac{1}{k}\left[(mg - F_{att}) + \sqrt{(mg - F_{att})^2 - 2kh(mg - F_{att})}\right]$ **[3]** $H = \frac{mgh - F_{att}(h+2\Delta\,l)}{(mg+F_{att})}$

2.3 Esercizio 3 (6.12)

Un'asta di lunghezza $l = 1.4$ m e massa $m_a = 0.9$ kg può ruotare senza attrito, in un piano orizzontale, attorno ad un perno collegato ad uno dei suoi estremi liberi A. Un proiettile di massa $m_p = 0.05$ kg e velocità $v = 42$ m/s, muovendosi in direzione perpendicolare all'asta, la colpisce alla distanza $d = 0.63$ m dal perno A, come mostrato in figura, e vi resta conficcato. Assumendo come trascurabile l'intervallo di tempo in cui il proiettile si conficca all'interno dell'asta e dunque che il sistema asta+proiettile non si muova durante questo intervallo, calcolare:

1. la velocità angolare ω del sistema nell'istante in cui inizia a muoversi;
2. la velocità del centro di massa v_{cm} del sistema immediatamente dopo l'urto;
3. la differenza $\Delta\,p$ del modulo della quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto.

Sol. **[1]** $\omega = \frac{3m_pd}{m_al^2+m_pd^2}v$ **[2]** $v_{cm} = \frac{3m_pd}{m_al^2+m_pd^2}v\frac{m_al+2m_pd}{2(m_a+m_p)}$ **[3]** $\Delta\,p = m_pv - (m_a+m_p)v_{cm}$

3 Esame del 06.07.2017

3.1 Esercizio 1 (4.21)

Un uomo nuota partendo dalla riva sud di un fiume in direzione perpendicolare alla riva stessa. La riva a nord è parallela a quella da cui è partito ed egli si muove inizialmente con velocità in modulo pari a $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ in direzione nord. Durante il tragitto risente dell'effetto di una corrente, diretta sempre verso ovest, il cui modulo della velocità varia linearmente con la distanza percorsa dalla riva sud, ovvero secondo la relazione $\frac{dv_c}{dy} = -k$ con $k = 0.2\,\mathrm{s}^{-1}$. Sapendo che la distanza tra le due rive è pari ad $l = 30\,\mathrm{m}$ e che la corrente è nulla sulla riva sud, determinare:

1. in quanto tempo t^* raggiunge la riva nord;
2. a che distanza d_1 rispetto alla posizione iniziale, lungo la riva, raggiunge la sponda nord.
3. Assumendo che la velocità iniziale del nuotatore sia diretta verso nord-est, inclinata di un angolo $\vartheta = 30^\circ$ rispetto alla riva sud del fiume, calcolare la distanza Δ tra la posizione del nuotatore quando raggiunge la riva nord in questa condizione rispetto al caso precedente in cui $\vartheta = 90^\circ$.

Sol. **[1]** $t^* = l/v_0$ **[2]** $d_1 = -\frac{1}{2}\frac{kl^2}{v_0}$ **[3]** $\Delta = \frac{l}{\tan\vartheta} + \frac{1}{2}\frac{kl^2}{v_0}\left(1 - \frac{1}{\sin\vartheta}\right)$

3.2 Esercizio 2 (16.31)

Un corpo di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$, viene lanciato su per un piano inclinato di un angolo $\vartheta_0 = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale con una velocità pari a $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$. Nel primo tratto di lunghezza $l_0 = 1\,\mathrm{m}$ il corpo scivola senza attrito; la parte rimanente del piano inclinato presenta invece un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.5$ ed uno di attrito statico $\mu_s = 0.6$. Determinare

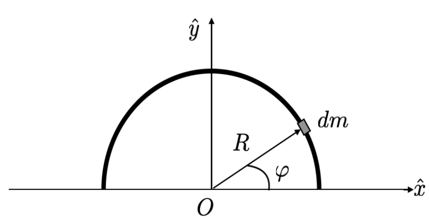
1. la lunghezza l del tratto percorso dal corpo lungo il piano inclinato prima di fermarsi;
2. l'energia ΔE dissipata durante il moto;
3. verificare se raggiunto l'apice della sua traiettoria il corpo scende nuovamente lungo il piano inclinato oppure resta fermo.

Sol. **[1]** $l = \frac{v_0^2 + 2\mu_d g l_0 \cos\vartheta_0}{2g(\sin\vartheta_0 + \mu_d\cos\vartheta_0)}$ **[2]** $\Delta E = \mu_d m g \cos\vartheta_0 (l - l_0)$ **[3]** $\mu_s > \frac{\sqrt{3}}{3}$

3.3 Esercizio 3 (16.155)

Una sbarra di forma semicircolare, di massa m, raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$ e densità lineare costante $\lambda = 3\,\mathrm{g/cm}$ è libera di ruotare rispetto ad un asse passante per il punto O. L'asse attorno al quale la sbarra può ruotare è ortogonale al piano contenete la sbarra stessa. Calcolare (i) la massa totale del corpo; (ii) la posizione del centro di massa; (iii) il momento di inerzia della sbarra per un asse passante per il centro di massa.

Sol. **[1]** $m = \pi\lambda R$ **[2]** $(x_{cm}, y_{cm}) = (0, \frac{2R}{\pi})$ **[3]** $I_{cm} = mR^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$



4 Esame del 30.08.2017

4.1 Esercizio 1 (16.9)

Un corpo si muove lungo l'asse $\hat{x}$ con accelerazione in modulo direttamente proporzionale al quadrato della sua velocità ma diretta in verso contrario al suo moto: $a = -kv^2$, dove $k = 0.5\,$u.m. è una costante. Se al tempo $t = 0\,$s il corpo passa per l'origine del sistema di riferimento con velocità $v_0 = 9$m/s, calcolare:

1. le unità di misura $u.m.$ della costante k nel sistema m.k.s. e l'espressione della velocità in funzione del tempo;
2. dopo quanto tempo la velocità si riduce al valore $\frac{1}{10}$ del valore iniziale;
3. la legge oraria del moto $x(t)$.

Sol. **[1]** $[k] = \mathrm{m}^{-1}$, $v(t) = \frac{v_0}{1+kv_0t}$ **[2]** $t_{10} = \frac{9}{kv_0}$ **[3]** $x(t) = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0t)$

4.2 Esercizio 2 (16.60)

Una barca di massa m_0 si trova al centro di un lago di forma circolare quando l'equipaggio decide di rientrare verso riva muovendosi in direzione radiale per tutto il tragitto. A causa di un guasto la barca imbarca acqua ad un tasso costante $\frac{dm}{dt} = \lambda$ con $\lambda = 0.2\,$kg/s. Trascurando le forze di attrito, calcolare:

1. il lavoro W fatto dal motore per mantenere la velocità costante, pari al valore iniziale $v_0 = 20$m/s durante un intervallo di tempo $\tau = 60\,$s.
2. Se ad un certo istante t^* si spegne il motore determinare quanto vale la velocità $v(m)$ quando la massa è aumentata del 10%;
3. derivare inoltre l'espressione della velocità in funzione del tempo $v(t)$, dopo aver spento il motore.

Sol. **[1]** $W = \lambda\, v_0^2\tau$ **[2]** $v(m) = \frac{m_0}{m}v$ **[3]** $v(t) = \frac{m_0}{m_0+\lambda\, t}v_0$

4.3 Esercizio 3 (16.156)

Un'asta di lunghezza $l = 1\,$m e massa $m = 1\,$kg è incernierata nel suo estremo superiore O ed è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse passante per O. Nell'istante iniziale essa è posta in equilibrio in posizione verticale, ferma, quando viene urtata a distanza $d = l/4$ da punto O, da una pallina di massa $m_p = m/4$ con velocità $v_0 = 10\,$m/s che si muove in direzione orizzontale. Assumendo l'urto completamente anelastico, calcolare:

1. la velocità angolare ω del sistema asta+pallina dopo l'urto;
2. l'angolo massimo ϑ_{max} rispetto alla verticale raggiunto dal sistema asta+pallina dopo l'urto;
3. il periodo T delle piccole oscillazioni del sistema asta+pallina.

Sol. **[1]** $\omega = \frac{3m_pv_0d}{ml^2+3m_pd^2}$ **[2]** $\vartheta_{max} = arcos\left[1 - \frac{3m_p^2v_0^2l^2}{g(ml^2+3m_pd^2)(ml+2m_pd)}\right]$ **[3]** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2ml^2+6m_pd^2}{g(3ml+6m_pd)}}$

5 Esame del 15.09.2017

5.1 Esercizio 1 (16.5)

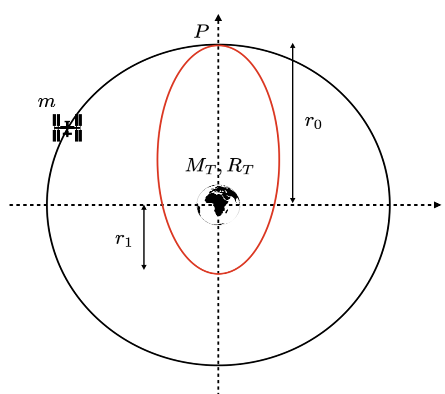
Due ciclisti percorrono una pista circolare di raggio $R = 1\,\mathrm{km}$ partendo dalla stessa posizione, ma in direzioni opposte. Il primo si muove con velocità angolare in modulo costante e pari a $\omega_0 = 8\,\mathrm{rad/s}$ mentre per il secondo ciclista il modulo della velocità angolare varia linearmente con il tempo per il tramite di una costante $\alpha = 4\,\mathrm{rad/s^2}$. Calcolare: (i) dopo quanto tempo t^* i due ciclisti di incontrano; (ii) l'angolo $\vartheta_1(t^*)$ e $\vartheta_2(t^*)$ descritto da entrambi nel momento in cui si incontrano; (iii) l'espressione del modulo delle componenti dell'accelerazione $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_2$ di entrambi i ciclisti nell'istante in cui hanno la stessa posizione in funzione dei parametri forniti dal problema (i.e., R, ω_0, α).

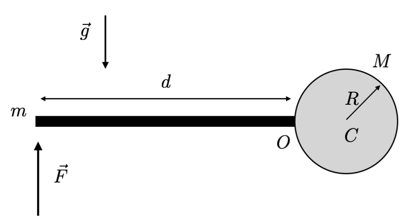
Sol. **[1]** $t^* = -\frac{\omega_0}{\alpha} + \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 4\pi\alpha}}{\alpha} = 0.67\,\mathrm{s}$ **[2]** $\vartheta_1(t^*) \simeq 307^\circ$, $\vartheta_2(t^*) \simeq 57^\circ$ **[3]** $\vec{a}_1 = (0, \omega_0^2 R)$, $\vec{a}_2 = (R\alpha, R\alpha^2 t^2)$

5.2 Esercizio 2 (16.229)

Un satellite di massa m si trova inizialmente in un punto P a distanza $r_0 = 5 \times 10^4\,\mathrm{km}$ dal centro della Terra (vedere Fig. 2). Trascurando ogni attrito con l'atmosfera, determinare: (i) la velocità v_T con cui il satellite raggiungerebbe la superficie terrestre se lasciato libero di cadere dalla posizione di quiete nel punto P; (ii) la velocità v_0, in modulo, direzione e verso che dovrebbe avere il satellite in P per percorrere un'orbita circolare di raggio r_0. Assumendo che la velocità del satellite nel punto P sia in modulo $v_1 = v_0/2$ e che quindi esso percorra un orbita ellittica, calcolare la distanza r_1 del secondo vertice dell'orbita dal centro della Terra e la velocità in tale punto. Considerare la Terra come una sfera di massa $M_T = 5.97 \times 10^24\,\mathrm{kg}$ e raggio $R_T = 6.37 \times 10^3\,\mathrm{km}$.

Sol. **[1]** $v_T = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_0}\right)}$ **[2]** $v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$ **[3]** $\frac{1}{r_1} = \frac{8GM_T}{r_0^2 v_0^2} - \frac{1}{r_0}$





5.3 Esercizio 3 ()

Un corpo rigido è costituito da una sbarra di massa $m = 8.0\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $d = 0.5\,\mathrm{m}$ collegata ad un disco di massa $M = 3m$ e raggio $R = d/4$, saldati nel punto O come in figura. Il sistema può ruotare liberamente intorno ad un asse perpendicolare al piano del disco e passante per il punto di contatto. Per mantenere il sistema in equilibrio statico, con la sbarra in posizione orizzontale è necessario applicare la forza F sul suo estremo libero con la stessa direzione e lo stesso verso della forza peso. Calcolare:

1. il modulo della forza F e della reazione vincolare N nel punto di contatto O;
2. l'accelerazione angolare α del sistema nel caso in cui non sia presente la forza F;
3. e, sempre assumendo che non vi sia la forza F, la velocità angolare ω del sistema nell'istante in cui la sbarra è in posizione verticale.

Sol. **[1]** $F = \frac{mg}{4}$, $N = F + 4mg$ **[2]** $\alpha = \frac{24}{59}\frac{g}{d}$ **[3]** $\omega = \sqrt{\frac{48}{59}\frac{g}{d}}$

6 Esame del 21.12.2017

6.1 Esercizio 1 (1.9)

Un corpo si muove di moto circolare vario in senso antiorario lungo una circonferenza di raggio R. Il modulo della sua velocità è dato dall'equazione: $v(t) = v_0\, e^{-t/\tau}$, dove v_0 e τ sono due costanti. Assegnato un sistema di coordinate polari (r,ϑ), con origine al centro della traiettoria circolare, ed assumendo che la coordinata angolare iniziale sia $\vartheta_0 = \vartheta(t = 0) = 0$, ricavare, in tale sistema di riferimento: (i) le componente radiale: v_r e quella tangenziale: v_ϑ, della velocità in funzione del tempo; (ii) la coordinata $\vartheta(t)$ in funzione del tempo ed il valore ϑ_∞ per $t \to \infty$; (iii) le componenti a_r ed a_ϑ dell'accelerazione in funzione del tempo.

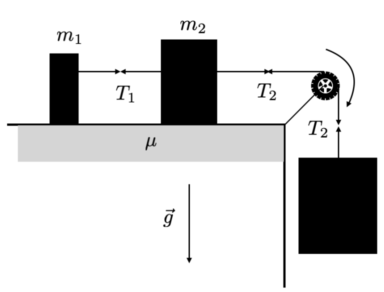
Sol. **[1]** $v_r = 0$, $v_\vartheta = R\dot{\vartheta} = v_0\, e^{-t/\tau}$ **[2]** $\vartheta(t) = \frac{v_0\tau}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ **[3]** $a_\vartheta = -\frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau}$, $a_r = -\frac{v_0}{R^2} e^{-t/\tau}$

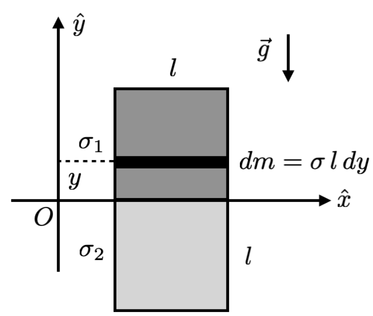
6.2 Esercizio 2 (16.29)

Nel dispositivo mostrato in figura, in cui il piolo P è privo di attrito, il corpo (3) di massa $m_3 = 10\,\mathrm{kg}$ è tale da trascinare i corpi (1) e (2) di masse $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$ ed $m_2 = 8\,\mathrm{kg}$, rispettivamente. I tre corpi sono collegati tra loro da fili inestensibili e privi di massa. Il coefficiente di attrito tra i corpi (1), (2) ed il piano vale μ. Ricavare:

1. il modulo a dell'accelerazione e della tensione τ del filo tra il corpo (2) ed il corpo (3);
2. per quale valore del coefficiente di attrito il corpo (3) si muove di moto rettilineo uniforme;
3. come cambierebbe il valore dell'accelerazione se invece che avere i due corpi (1) e (2) avessimo un solo corpo di massa $m_1 + m_2$.

Sol. **[1]** $a = g\frac{m_3 - \mu(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3}$, $\tau = m_3(g - a)$ **[2]** $\mu = \frac{m_3}{m_1+m_2}$ **[3]** nessuna variazione di a





6.3 Esercizio 3 (6.6)

Un corpo rigido è costituito da due lamiere omogenee piane entrambe di forma quadrata con alto L, posizionate come in figura. Le loro densità superficiali sono rispettivamente: σ_1 e σ_2. Le due lastre sono saldate tra loro lungo il lato passante per l'asse $\hat{x}$ intorno al quale il corpo rigido può ruotare senza attrito. L'asse di rotazione è posto orizzontalmente con il corpo rigido in equilibrio su di un piano verticale, ed la lastra (1), di densità superficiale $\sigma_1 > \sigma_2$ posizionata in alto. L'equilibrio è instabile e, con una leggera perturbazione, il corpo rigido, partendo da fermo, inizia a ruotare intorno all'asse $\hat{x}$. Calcolare

1. la coordinata y_{cm} del centro di massa del corpo rigido;
2. il momento di inerzia I del corpo rigido rispetto all'asse $\hat{x}$;
3. l'espressione della velocità angolare ω del sistema nel momento in cui il corpo rigido compie un ribaltamento completo di 180° intorno all'asse $\hat{x}$.

Sol. **[1]** $y_{cm} = \frac{L}{2}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$ **[2]** $I = \frac{L^4}{3}(\sigma_1 + \sigma_2)$ **[3]** $\omega = \sqrt{\frac{6g}{L}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}}$

7 Esame del 20.03.2018

7.1 Esercizio 1 (1.8)

Una barca rientrando al porticciolo di un lago incontra una forte corrente che le fa deviare la rotta. Assumendo che la sua velocità iniziale è un vettore di componenti $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (3, -2)\,\text{km/h}$ e che la corrente diretta solo lungo l'asse $\hat{y}$ abbia un'intensità che cresce linearmente con il tempo imprimendo alla barca un'accelerazione che varia secondo la legge $a(t) = \gamma t$ con γ una costante del valore di $2\,\text{m/s}^3$. assumendo come origine del sistema di riferimento la posizione iniziale della barca, calcolare:

1. la traiettoria della barca $y(x)$;
2. la sua velocitá in funzione del tempo $v(t)$;
3. sapendo che nelle posizioni $P_1 = (4, -1)\,\text{km}$ e $P_2 = (9, 3)\,\text{km}$ ci sono due barche ferme stabilire se urta queste due imbarcazioni durante il moto ed eventualmente in quale istante avviene l'impatto.

Sol. **[1]** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{x^3}{81}$ **[2]** $\vec{v}(t) = v_{0x}t, \frac{\gamma}{6}t^3 + v_{0y}t$ **[3]** urta solo la barca in P_2 al tempo $t_2 = \frac{x_2}{v_{0x}}$.

7.2 Esercizio 2 (16.61)

Un'automobile ibrida di massa m si muove lungo una strada pianeggiante e rettilinea alla velocità costante v_0 quando il motore termico si spegne. L'auto procede allora come se fosse in folle e la sua velocità decresce in funzione del tempo, per via delle forze di attrito secondo la legge $v(t) = \frac{v_0}{1+\frac{t}{\tau}}$, dove τ è una costante arbitraria. Calcolare: (i) l'espressione per il modulo della forza $F(v)$ che rallenta l'auto in funzione della velocità; (ii) utilizzando l'espressione ricavata in precedenza, la potenza P richiesta alle batterie elettriche per far procedere l'auto lungo la stessa traiettoria alla velocità costante $\frac{v_0}{2}$; (iii) il lavoro W fatto dalle batterie nell'intervallo di tempo $(0, 4\tau)$ in cui si è mossa a velocità costante $\frac{v_0}{2}$. $[m = 1700\,\text{kg};\ v_0 = 110\,\text{km/h};\ \tau = 58\,\text{s}]$

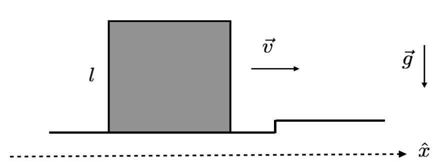
Sol. **[1]** $F(v) = -\frac{m}{v_0\tau}v$ **[2]** $P = \frac{mv_0^2}{8\tau}$ **[3]** $W = \frac{1}{m}mv_0^2$

7.3 Esercizio 3 (16.157)

Un cubo solido omogeneo di massa $m = 1\,\text{kg}$ e lato $L = 10\,\text{cm}$ scorre senza attrito su una superficie orizzontale con velocità iniziale v, ortogonale ad una delle due facce, sino a che incontra un piccolo scalino parallelo allo spigolo frontale come mostrato in figura. In seguito all'urto lo spigolo si arresta immediatamente (non vi è rimbalzo) ed il cubo inizia a ruotare attorno allo spigolo. Trascurare l'altezza dello scalino. Calcolare:

1. il momento di inerzia I del cubo rispetto al suo spigolo;
2. la minima velocità v_0 necessaria affinchè il cubo si ribalti in avanti;
3. per il valore $v = v_0$, la variazione di energia cinetica tra l'istante immediatamente prima e quello successivo all'impatto con il gradino.

Sol. **[1]** $I = \frac{2}{3}mL^2$ **[2]** $v_0 = \sqrt{\frac{8(\sqrt{2}-1)}{3}gL}$ **[3]** $\frac{\Delta K}{K_{in} = -\frac{5}{8}}$



8 Esame del 06.04.2018

8.1 Esercizio 1 (16.11)

Una particella si muove lungo l'asse $\hat{x}$ secondo la legge oraria descritta dall'equazione:

$$x(t) = A \ln\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)$$

dove $A = 1\,\mathrm{m}$ e $\tau = 1\,\mathrm{s}$ sono due costanti. Calcolare: (i) la velocità e l'accelerazione della particella; (ii) il tempo t^* in cui il punto raggiunge la coordinata $x = 3\,\mathrm{m}$; (iii) la velocità media nell'intervallo di tempo $[0,\tau]$ ed in quello $[\tau,2\tau]$; (iv) la velocità massima v_{max} raggiunta dalla particella ed il tempo impiegato a raggiungerla.

Sol. **[1]** $v(t) = \frac{2At}{t^2+\tau^2}$; $a(t) = \frac{2A(t^2+\tau^2)}{(t^2+\tau^2)^2}$ **[2]** $t^* = \tau\sqrt{e^{L/A}-1}$ **[3]** $< v > (0,\tau) = \frac{A\ln 2}{\tau}$, $< v > (\tau, 2\tau) = \frac{A\ln 5 - A\ln 2}{\tau}$
[4] $v_{max} = \frac{A}{\tau}$

8.2 Esercizio 2 (16.230)

Un'astronave di massa m percorre inizialmente un'orbita circolare di raggio a_0 attorno alla Terra (di massa M). Ad un certo istante un modulo di massa $m/3$ si stacca dall'astronave in direzione opposta al vettore velocità, di modulo pari ad v_0 con cui il sistema astronave+modulo si muove prima del distacco. Indicando con v_a e v_m le velocità dell'astronave (priva di modulo) e del modulo stesso, subito dopo il distacco si ha che $v_m = v_0 - \Delta\, v_m$, dove $\Delta\, v_m = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{GM}{a_0}}$. Calcolare:

1. la velocità v_0 e la velocità relativa v_r con cui l'astronave vede allontanarsi il modulo subito dopo il distacco;

2. determinare raggio massimo r_{max} e minimo r_{min} dell'orbita dell'orbita dell'astronave priva di modulo;

3. il lavoro W prodotto durante il distacco.

Si noti che, dopo il distacco v_a e v_m hanno stessa direzione e stesso verso di v_0.

Sol. **[1]** $v_m = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{GM}{a_0}}$, $v_r = -v_m$ **[2]** $r_{max} = \frac{v_a^2 a_0^2}{2GM - v_1^2 a_0}$ con $v_a = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{GM}{a_0}}$ **[3]** $W = \frac{1}{25}\frac{GMm}{a_0}$

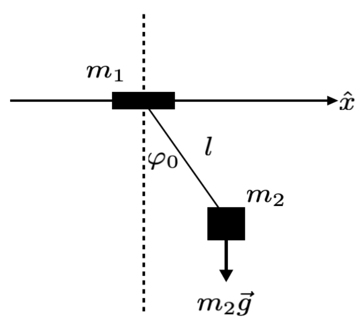
8.3 Esercizio 3 (6.7)

I due corpi rappresentati in figura sono collegati da un filo inestensibile di massa trascurabile e di lunghezza $l = 100\,\mathrm{cm}$. Il corpo di massa m_1 =0.1 kg può scorrere senza attrito lungo un'asta orizzontale. L'altro corpo di massa $m_2 = 0.1\,\mathrm{kg}$ può essere considerato di dimensioni trascurabili. I due corpi vengono lasciati liberi di muoversi con velocità iniziali nulle in corrispondenza del valore $\alpha_0 = 60°$ dell'angolo che il filo forma con la verticale. Calcolare:

1. l'ampiezza A del moto oscillatorio del corpo di massa m_1 lungo l'asse orizzontale;

2. il modulo della velocità v_2 del corpo di massa m_2 quando il filo è allineato con la verticale.

Sol. **[1]** $A = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\sin\alpha_0$ **[2]** $v_2 = \sqrt{\frac{2m_1 gl(1-\cos\alpha_0)}{m_1+m_2}}$



m_1
$\hat{x}$
l
φ_0
m_2
$m_2\vec{g}$

9 Esame del 02.07.2018

9.1 Esercizio 1 ()

Una particella si muove lungo l'asse $\hat{x}$ secondo la legge oraria descritta dall'equazione:

$$x(t) = ut\,(1 - 2\sin\omega\,t)$$

dove $u = 3$ m/s e $\omega = 4\,\mathrm{s}^{-1}$ sono due costanti. Calcolare:

1. la velocità media $< v >$ della particella nell'intervallo di tempo tra $0.5\,\mathrm{s}$ ed $1\,\mathrm{s}$ e confrontarla con la velocità instantanea $v(t^*)$ nell'istante medio t^* di tale intervallo temporale;
2. il valore dell'accelerazione $a(t_1)$ nell'istante $t_1 > 0$ in cui la particella torna per la prima volta nell'origine;
3. stabilire infine se si tratta di un moto armonico con pulsazione ω motivando la risposta.

Sol. **[1]** $< v >= \frac{ut_B(1-\sin\omega\,t_B)-ut_A(1-\sin\omega\,t_B)}{t_B-t_A}$ **[2]** $a(t_1) = u(-4\omega\,t_1 + 2\omega^2 t_1 \sin\omega\,t_1)$ con $t_1 = \frac{\pi}{6\omega}$ **[3]** non è moto armonico

9.2 Esercizio 2 (16.28)

La forza di resistenza del mezzo esercitata dall'aria su due sfere aventi la stessa densità che cadono, partendo da ferme, per effetto della gravità è direttamente proporzionale alla velocità v per il tramite di un coefficiente b che dipende da quadrato del loro raggio R secondo la relazione $b = \alpha\,\pi\,R^2$ con α costante uguale per entrambe le sfere. Determinare: (i) la velocità relativa $v_r(t)$ delle due sfere in funzione del tempo, assumendo che partano entrambe con velocità iniziale nulla; (ii) il rapporto ρ delle velocità di regime in funzione del rapporto tra i raggi.

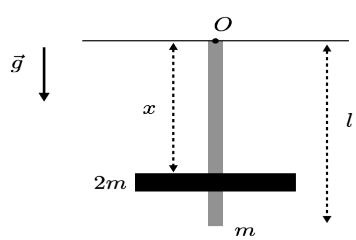
Sol. **[1]** $v_r(t) = v_{lim,1} - v_{lim,2} + v_{lim,2}e^{t/\tau_2} - v_{lim,1}e^{t/\tau_1}$ con $v_{lim,1,2} = \frac{mg}{b_{1,2}} = g\tau_{1,2}$ **[2]** $\rho = \frac{R_1}{R_2}$

9.3 Esercizio 3 ()

Un pendolo fisico è composto da una sbarra omogenea di lunghezza $l = 200\,\mathrm{cm}$ e massa incognita m vincolata a ruotare attorno all'estremità O. Attaccata perpendicolarmente e simmetricamente alla sbarra vi è posizionata una seconda sbarretta omogenea di massa $2m$ e lunghezza trascurabile, il cui centro è a distanza regolabile x dal punto O. Indicando con d la distanza del centro di massa del sistema delle due sbarre dal punto O e con I_O il momento di inerzia totale del sistema rispetto ad O. Nella situazione iniziale si ha $x = l$, calcolare

1. il valore numerico della costante b tale che $I_O = bml^2$;
2. il periodo delle piccole oscillazioni T_0;
3. variando invece la distanza x della sbarretta di massa $2m$ da punto di sospensione, verificare se esiste un valore di x in modo tale che il periodo delle piccole oscillazioni valga $T_1 = 10\,\mathrm{s}$.

Sol. **[1]** $b = \frac{7}{3}$ **[2]** $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgl}}$ **[3]** non vi sono soluzioni accettabili



10 Esame del 03.09.2018

10.1 Esercizio 1 (4.2)

Un pallone aerostatico parte da terra e per un certo tratto nel suo moto ascensoniale incontra un vento che soffia parallelamente al suolo con velocità crescente linearmente con la quota. Al livello della terra il modulo della velocità del vento vale $v_0 = 18\,\text{km/h}$, mentre quando l'altezza dal suolo vale $h = 100\,\text{m}$ vale $v_1 = 36\,\text{km/h}$. Supponendo che la velocità del pallone abbia componente costante v_p =9km/h lungo la verticale e componente orizzontale uguale alla velocità del vento alla quota a cui si trova il pallone, calcolare:

1. l'equazione della traiettoria $x(z)$ del pallone;
2. quanto tempo τ dopo la partenza il pallone avrà percorso un tratto $l = 100\,\text{m}$ in direzione del vento.

Sol. **[1]** $x(z) = \frac{v_0}{v_p} z + \frac{v_1 - v_0}{2 v_p h} z^2$ **[2]** $\tau = \frac{z^*}{v_p}$ con $z^* = -\frac{h v_0}{v_1 - v_0} + \sqrt{\frac{h^2 v_0^2}{(v_1 - v_0)^2} + \frac{2 h v_p l}{v_1 - v_0}}$

10.2 Esercizio 2 (16.57)

Una pallina di massa $m = 0.2\,\text{kg}$ si muove su un piano orizzontale liscio, restando a distanza r =0.5m da un punto fisso O del piano al quale è collegata tramite una fune di massa trascurabile e carico di rottura $\tau = 10\,\text{N}$. Sulla pallina agisce una forza, costantemente perpendicolare alla fune e giacente nel piano orizzontale, che sviluppa una potenza costante $P = 0.1\,\text{W}$. Assumendo che all'istante iniziale la velocità della pallina sia nulla calcolare

1. l'istante t_1 in cui si rompe il filo;
2. lo spazio Δx percorso dalla pallina nell'intervallo di tempo $[0, t_1]$.

Sol. **[1]** $t_1 = \frac{\tau r}{2P}$ **[2]** $\Delta x = \frac{2}{3} \left(\frac{2 P t_1^3}{m} \right)^{1/2}$

10.3 Esercizio 3 (16.167)

Una sbarretta AB, di dimensioni trasversali trascurabili, ha massa $m = 0.2\,\text{kg}$ e lunghezza $L = 40\,\text{cm}$. La sua densità varia linearmente lungo la sbarretta e nell'estremo B ha valore doppio di quello in A. La sbarretta è incernierata nel suo punto di mezzo ad un asse orizzontale, ortogonale ad essa, intorno al quale può ruotare senza attrito. La sbarretta, lasciata libera di ruotare con velocità iniziale nulla nella posizione orizzontale, sotto l'azione della forza peso ruota intorno all'asse di sospensione. Calcolare

1. il valore delle costanti α e β nell'espressione della densità lineare della sbarretta $\lambda(x) = \alpha + \beta\, x$;
2. la posizione x_{cm} del centro di massa della sbarretta;
3. il modulo della velocità angolare ω della sbarretta nell'istante in cui essa passa per la verticale.

11 Esame del 18.09.2018

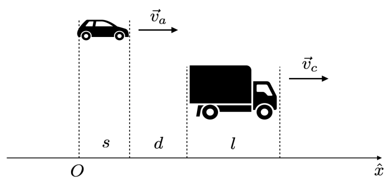
11.1 Esercizio 1 (1.1)

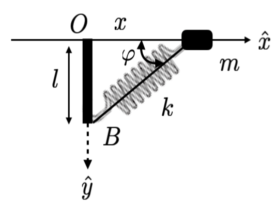
Un'automobile viaggia lungo un tratto di autostrada rettilineo lungo l'asse $\hat{x}$ come riportato in figura, e deve superare un camion che viaggia nella stessa direzione alla velocità costante v_c. Sapendo che la distanza iniziale tra auto e camion è L, che il camion è lungo l e che la macchina è lunga s, calcolare quanto tempo impiega l'automobile a superare completamente il camion (i.e. fanali posteriori dell'auto oltre fanali anteriori del camion)

1. nel caso in cui si muova a velocità costante v_a;

2. nel caso in cui partendo con velocità iniziale v_a abbia un'accelerazione costante a.

Sol. **[1]** $\tau_1 = \frac{s+l+L}{v_1-v_c}$ **[2]** $\tau_{2,3} = \frac{(v_c-v_a)\pm\sqrt{(v_a-v_c)^2+2a(s+l+L)}}{a}$





11.2 Esercizio 2 ()

Ad una molla di costante elastica $k = 40\,\mathrm{N/m}$, massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla è attaccata un oggetto di massa $m = 200\,\mathrm{g}$ libero di scorrere senza attrito su una guida orizzontale corrispondente all'asse $\hat{z}$. L'estremo fisso della molla si trova a distanza d =50cm sotto la guida in corrispondenza dell'origine dell'asse $\hat{z}$ come mostrato in figura. Al tempo $t = 0\,\mathrm{s}$ l'oggetto è istantaneamente fermo e la sua coordinata z vale $z_0 = 80\,\mathrm{cm}$. Calcolare

1. la velocità massima v_m dell'oggetto durante il suo moto;

2. l'accelerazione dell'oggetto in funzione del tempo $a(t)$.

3. Assumendo che la molla abbia una lunghezza a riposo d, trovare la velocità massima v'_m e verificare se si tratta ancora di moto armonico semplice.

Sol. **[1]** $v_m = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$ **[2]** $a(t) = -\omega^2 x_0 \cos\omega\, t$ **[3]** $v'_m = (\sqrt{d^2+x_0^2}-d)\sqrt{\frac{k}{m}}$ e non si tratta di moto armonico

11.3 Esercizio 3 ()

Un disco omogeneo, di raggio $R = 10\,\mathrm{cm}$ e massa $m = 6\,\mathrm{kg}$, ruota intorno al suo asse baricentrale con velocità angolare di modulo pari a $\omega_0 = 6\pi\,\mathrm{rad/s}$. Il disco viene posato con una sua faccia su una superficie orizzontale scabra avente coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.2$. Calcolare

1. il momento M_{att} risultante della forza di attrito;

2. l'intervallo di tempo τ in cui il disco di ferma;

3. l'angolo $\vartheta(\tau)$ di cui ruota il disco nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$.

Sol. **[1]** $M_{att} = \frac{2}{3}\mu\, mgR$ **[2]** $\tau = \frac{3}{4}\frac{\omega_0 R}{\mu\, g}$ **[3]** $\vartheta(\tau) = \frac{3}{8}\frac{\omega_0^2 R}{\mu\, g}$

12 Esame del 20.12.2018

12.1 Esercizio 1 (16.6)

Una barca a motore si muove di moto rettilineo uniforme lungo un tratto di fiume di lunghezza $l = 1.2\,\mathrm{km}$ prima a favore della corrente e poi controcorrente. Si calcoli il modulo della velocità v_c della corrente del fiume e quello v della barca sapendo che i tempi impiegati per percorrere i due tratti sono rispettivamente $\tau_1 = 600\,\mathrm{s}$ e $\tau_2 = 1200\,\mathrm{s}$. Determinare inoltre per quale valore della velocità della corrente il cammino di andata e ritorno è minimo. Assumere che la velocità della barca rispetto all'acqua resti sempre costante.

Sol. **[1]** $v_c = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)$, $v = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)$ **[2]** $v_{c,min} = 0$

12.2 Esercizio 2 (16.34)

Una cassa di massa $m = 10\,\mathrm{kg}$ si muove sopra ad una superficie orizzontale scabra, con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.2$, ed all'istante $t = 0$ il modulo della sua velocità è $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$. La cassa è soggetta, oltre che al suo peso ed alla reazione vincolare della superficie, ad una forza verticale f che la spinge verso la superficie scabra. Calcolare quando tempo t^* impiega a fermarsi nel caso in cui il modulo della forza f cresca linearmente con il tempo: $f = bt$, con $b = 100\,\mathrm{N/s}$ e lo spazio percorso x^* nel caso in cui il modulo di f dipenda linearmente dallo spazio percorso: $f = cx$, con $c = 25\,\mathrm{N/m}$.

Sol. **[1]** $t^* = \frac{m}{\mu\, b}\left[-\mu\, g \pm \sqrt{\mu^2 g^2 + \frac{2\mu\, b v_0}{m}}\right]$ **[2]** $x^* = -\frac{mg}{c} + \sqrt{\frac{m^2 g^2}{c^2} + \frac{m v_0^2}{\mu\, c}}$

12.3 Esercizio 3 (16.166)

Un rullo cilindrico omogeneo, di massa m e raggio R, si mette in moto, sotto l'azione della forza peso, lungo un piano inclinato di un angolo α, misurato rispetto all'orizzontale, soggetto ad una forza di attrito. Calcolare l'espressione della forza di attrito F_{att} ed il valore del coefficiente di attrito minimo che permette al cilindro di rotolare senza strisciare; il momento di inerzia di una sfera non omogenea, di massa m e raggio R, con densità dipendente dal raggio secondo al relazione $\rho = \rho_0\, r$ passante per il centro di massa. Questo per ripetere poi il calcolo precedente assumendo che al posto del rullo cilindrico vi sia proprio la sfera non omogenea.

Sol. **[1]** $F_{att} = \left(1 - \frac{1}{c}\right) mg \sin\alpha$ $c = \frac{3}{2}$ cilindro , $\mu_s = \frac{\tan\alpha}{3}$ **[2]** $I_{sfera} = \frac{25}{9} mR^2$ **[3]** $\mu_s = \frac{16\tan\alpha}{25}$

13 Esame del 19.03.2019

13.1 Esercizio 1 (16.233)

Un satellite artificiale di massa $m = 100\,\text{kg}$, in moto su un'orbita circolare a distanza $d = 6670$ km dal centro della Terra, viene diviso in due parti A e B di masse $m_A = \frac{3}{4}m$ e $m_B = \frac{1}{4}m$; le velocità delle due parti, subito dopo l'esplosione si trovano nel piano dell'orbita originale del satellite e formano angoli uguali $\vartheta_A = \vartheta_B = \frac{\pi}{3}$ rad rispetto alla velocità del satellite prima dell'esplosione. Calcolare: (i) i moduli delle velocità delle due parti v_A e v_B subito dopo l'esplosione; (ii) l'energia sviluppata dalla carica esplosiva; (iii) il tipo di orbita descritta da ciascuna delle due parti; (iv) le distanze minima r_{min} e massima r_{max} dal centro della Terra raggiunte dalla parte A durante la sua orbita. [Massa della Terra $M_T = 6 \times 10^{24}\,\text{kg}$; Costante di Gravitazione Universale $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$.]

Sol. **[1]** $v_A = \frac{4}{3}v_0$, $v_B = 4v_0$ **[2]** $\Delta E = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 - \frac{1}{2}m v_0^2$ **[3]** $E_{A,B} = \frac{1}{2}m_{A,B}v_{A,B}^2 - \frac{GM_T m_{A,B}}{d}$ (A ellittica, B iperbolica)

13.2 Esercizio 2 (3.3)

La forza esercitata da un gruppo di cani da slitta per trascinarne una di massa m lungo un tratto rettilineo di lunghezza l è tale che la velocità della slitta sia direttamente proporzionale al quadrato del tempo per il tramite di una costante b (i.e., $v(t) = b\,t^2$). Trascurando gli attriti. Calcolare: (i) l'espressione della forza $F(t)$ in funzione del tempo; (ii) la legge oraria della slitta $x(t)$ ed il tempo t_p per percorrere il tratto l; (iii) il lavoro fatto durante l'intervallo $[0, t_p]$; (iv) indicare infine se la forza è conservativa.

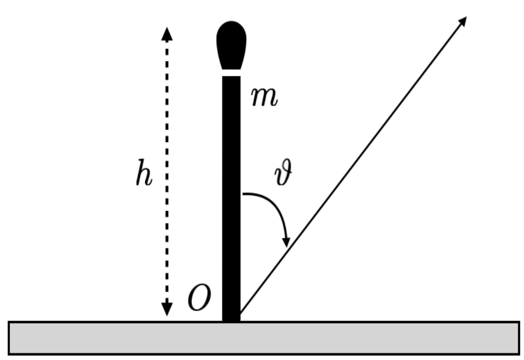
Sol. **[1]** $F(t) = 2mbt$ **[2]** $x(t) = \frac{bt^3}{3}$, $t_p = \left(\frac{3l}{b}\right)^{1/3}$ **[3]** $W = \frac{mb^2}{2}\left(\frac{3l}{b}\right)^{4/3}$ **[4]** Forza non conservativa

13.3 Esercizio 3 ()

Un palo della luce, assimilabile ad un'asta omogenea di lunghezza $h = 5\,\text{m}$ e massa $m = 30\,\text{kg}$ è inizialmente piantato, fermo, in posizione verticale, al terreno nel punto O. Ad un certo istante il palo inizia a cadere rimanendo fissato al terreno nel punto O, con velocità iniziale nulla. Trascurando gli attriti,

- calcolare la velocità finale v_f con cui l'estremo superiore del palo impatta sul terreno, confrontando questo valore con quello che avrebbe un corpo in caduta libera dalla stessa altezza h partendo da fermo;
- indicando con ϑ l'angolo tra la verticale ed il palo ad un generico istante durante la caduta, determinare la componente radiale N_r, ovvero parallela al palo stesso, della reazione vincolare che tiene il palo incernierato al punto O per $\vartheta = 60°$.

Sol. **[1]** $v_f = \sqrt{3gh}$ **[2]** $N_r = \frac{mg}{2}(5\cos\vartheta - 1)$

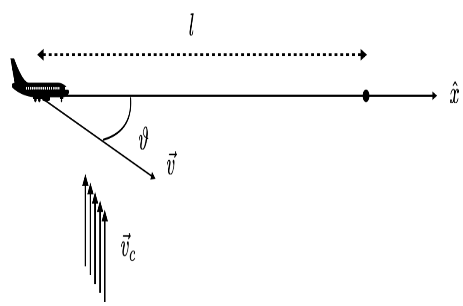


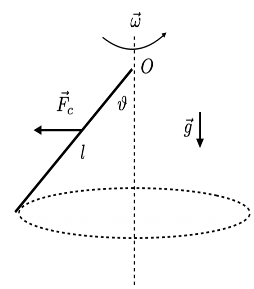
14 Esame del 02.04.2019

14.1 Esercizio 1 (16.7)

Un aereo si trova in volo a velocità costante diretta lungo l'asse $\hat{x}$ alla quota di crociera ed ad una distanza l dal punto in cui iniziare la discesa per l'atterraggio. Ad un certo istante, in direzione perpendicolare alla direzione di volo, risente dell'effetto di una forte corrente di aria, la cui velocità ha il modulo dipendente dalla posizione x secondo la relazione: $v_c = 3kx^2$. Per contrastare l'effetto della corrente d'aria il pilota vira di un angolo ϑ rispetto alla direzione di volo originale, mantenendo il modulo della velocità costante, come indicato in figura. Calcolare la legge oraria $x(t)$ dell'aereo ed il suo spostamento complessivo D lungo la direzione perpendicolare alla linea di volo iniziale nel percorrere il tratto l.

Sol. **[1]** $x(t) = v_a \cos\vartheta\, t$, $y(t) = v_a \sin\vartheta\, t - k v_a^2 t^3 \cos\vartheta$ **[2]** $D = l\tan\vartheta - \frac{k}{v_a}\frac{l^3}{\cos\vartheta}$





14.2 Esercizio 2 (16.65)

Una forza di direzione costante ed intensità variabile nel tempo agisce su un corpo di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$, inizialmente fermo. La sua energia cinetica cresce quindi nel tempo secondo la legge: $E_C(t) = \alpha\, t^3$, dove α è una costante. Sapendo che l'impulso della forza nell'intervallo $[0, \tau]$, con $\tau = 10\,\mathrm{s}$, ha modulo $i = 2\,\mathrm{Ns}$, calcolare:

- la costante α;
- l'espressione della velocità $v(t)$ in funzione del tempo;
- l'intensità della forza f all'istante τ.

Sol. **[1]** $\alpha = \frac{i}{2m\tau^3}$ **[2]** $v(t) = \sqrt{\frac{2\alpha\, t^3}{m}}$ **[3]** $f(\tau) = \frac{3i}{2\tau}$

14.3 Esercizio 3 (15.6)

Una sbarretta omogenea di lunghezza l e di massa m, incernierata nel punto O, può ruotare liberamente senza attrito attorno ad un asse verticale con velocità angolare ω costante (diretta verso l'alto), inclinata di un angolo ϑ rispetto all'asse verticale. Calcolare:

- il momento angolare totale L della sbarretta in modulo direzione verso;
- la forza centripeta F_c a cui è soggetta la sbarretta;
- l'angolo di equilibrio ϑ_{eq}.

Sol. **[1]** $L = \frac{1}{3} m l^2 \omega \sin\vartheta$ **[2]** $F_c = \frac{1}{2} m\omega^2 l \sin\vartheta$ **[3]** $\cos\vartheta_{eq} = \frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2 l}$

15 Esame del 02.07.2019

15.1 Esercizio 1 (4.2)

Un pallone aerostatico parte da terra e per un certo tratto nel suo moto ascensionale incontra un vento che soffia parallelamente al suolo con velocità crescente linearmente con la quota z, secondo la legge $v(z) = a + b\,z$. Al livello di terra il modulo della velocità del vento vale $v_0 = 18\,\mathrm{km/h}$, mentre alla quota $h = 100\,\mathrm{m}$ vale $v_1 = 36\,\mathrm{km/h}$. Supponendo che la velocità del pallone abbia componente costante $v_p = 9\,\mathrm{km/h}$ lungo la verticale e componente orizzontale uguale alla velocità del vento alla quota dove il pallone si trova. Calcolare il valore delle costanti a, b, l'equazione della traiettoria del pallone e quanto tempo dopo la partenza il pallone avrà percorso il tratto $l = 100\,\mathrm{m}$ nella direzione del vento.

Sol. **[1]** $a = v_0$, $b = \frac{v_1 - v_0}{h}$ **[2]** $x(z) = \frac{v_0}{v_p} z + \frac{v_1 - v_0}{2 v_p h} z^2$ **[3]** $\tau = \frac{z^*}{v_p}$ con $z^* = -\frac{h v_0}{v_1 - v_0} + \sqrt{\frac{h^2 v_0^2}{(v_1 - v_0)^2} + \frac{2 h v_p l}{v_1 - v_0}}$

15.2 Esercizio 2 (16.116)

Un proiettile di massa $m = 3\,\mathrm{kg}$ viene sparato verso l'alto dal suolo in direzione verticale con modulo della velocità $v_0 = 20\,\mathrm{ms}^{-1}$. Alla quota $h = 15\,\mathrm{m}$ il proiettile viene spezzato da una piccola carica esplosiva in due frammenti di masse $m_1 = \frac{2}{3}m$ ed $m_2 = \frac{m}{3}$ che, rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il centro di massa del proiettile, vengono emessi in direzione parallela al suolo. L'energia liberata nell'esplosione ed acquisita dai due frammenti è $E = 300\,\mathrm{J}$. Calcolare il modulo delle velocità dei due frammenti v_1, v_2 nell'istante successivo all'esplosione e la distanza D fra i due punti in cui i due frammenti giungono al suolo.

Sol. **[1]** $v_{1x} = \sqrt{\frac{2E}{m_1 + 4m_2}}$, $v_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1x}$, $v_{1y} = v_{2y} = v_0 - g\tau$ con $\tau = \frac{v_0}{g} - \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}$ **[2]** $D = \frac{v_{1x} - v_{2x}}{\tau_1 - \tau}$ con $\tau_1 = \frac{2v_0}{g}$

15.3 Esercizio 3 (15.7)

Una moneta, assimilabile ad un disco di raggio R e massa m, la cui densità superficiale è funzione della coordinata radiale r secondo la relazione: $\sigma = \sigma_0 \left(\frac{r}{R}\right)$ è posto in un piano verticale e può ruotare attorno ad un'asse passante per il suo diametro. Determinare:

- la massa totale della moneta;
- il momento di inerzia I della moneta;
- l'andamento della velocità angolare in funzione del tempo, $\omega(t)$, assumendo che il valore iniziale sia ω_0 e che sia soggetto ad una forza di attrito, il cui momento complessivo vale $M_{att} = -k\,\omega$, direttamente proporzionale alla stessa velocità angolare ω, parallelo all'asse di rotazione della moneta, ma diretto in verso opposto al vettore $\vec{\omega}$.

[nota: $\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \pi$]

Sol. **[1]** $m = \frac{2}{3}\pi\rho R^2$ **[2]** $I = \frac{3}{10} m R^2$ **[3]** $\omega(t) = \omega_0 e^{-t\tau}$ con $\tau = \frac{I}{k}$

16 Esame del 02.09.2019

16.1 Esercizio 1 ()

Un corpo A viene lasciato cadere dalla quota $h_A = 45\,\text{m}$ con velocità nulla; contemporaneamente, un secondo corpo B, situato sulla verticale passante per A si trova ad una quota $h_B = 21\,\text{m}$ e viene lanciato verso l'alto con velocità in modulo pari a v_0. Trascurando al resistenza dell'aria, calcolare:

- il valore minimo v_0^* di v_0 per il quale i due corpi di urtano prima di giungere al suolo;
- la velocità relativa con cui si urtano nel caso in cui $v_0 \geqslant v_0^*$;
- il valore di v_0 per cui A e B si incontrano alla quota $h_C = 40\,\text{m}$.

Sol. **[1]** $v_0^* = \frac{h_A - h_B}{\sqrt{\frac{2h_A}{g}}}$ **[2]** $v_r = v_0$ **[3]** $v_0 = \frac{h_A - h_B}{t_c}$ con $t_c = \sqrt{\frac{2(h_A - h_C)}{g}}$

16.2 Esercizio 2 ()

Un proiettile di massa $m = 50\,\text{g}$, sparato con velocità di modulo $v_0 = 300\,\text{m/s}$, penetra in un mezzo viscoso nel quale risente di una forza frenante di intensità pari a $b\,v^2$, dove b è una costante e v il modulo della velocità del proiettile. Dopo aver percorso un tratto di lunghezza $l = 10\,\text{m}$ la velocità del proiettile di è ridotta del 10%. Trascurando l'effetto della forza peso, si calcoli:

- il lavoro W fatto dal mezzo resistente sul proiettile per il tratto di lunghezza l;
- il valore della costante b.

Sol. **[1]** $W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ **[2]** $b = -\frac{m}{l}\ln\frac{v}{v_0}$

16.3 Esercizio 3 (15.5)

Un carrello di massa m_c può muoversi con attrito trascurabile su una superficie piana orizzontale; sul carrello si trova una persona di massa m. Inizialmente il carrello e la persona sono in quiete. All'istante $t = 0\,\text{s}$ la persona inizia a camminare sul piano del carrello di moto rettilineo sviluppando una potenza costante w.

- Calcolare la velocità della persona $v(t)$ e del carrello $v_c(t)$ all'istante generico t.
- Ricavare la legge oraria dell'uomo $x(t)$ e del carrello $x_c(t)$ rispetto al suolo.
- Assumendo che $m_c = 250\,\text{kg}$, $m = 50\,\text{kg}$ ed all'istante $\tau = 25\,\text{s}$ la velocità dell'uomo relativa al carrello vale $u = 3\,\text{m/s}$, calcolare il valore numerico della potenza P.

Sol. **[1]** $v(t) = \frac{m_c}{m+m_c}u(t)$, $v_c(t) = \frac{m}{m+m_c}u(t)$ con $u(t) = v(t) + v_c(t)$ **[2]** $x_c(t) = \frac{m}{m_c}x(t)$ con $x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2m_cP}{m(m_c+m)}}$
[3] $P = \frac{W}{\tau}$ con $W = \frac{1}{2}mv^2(\tau) + \frac{1}{2}m_cv_c^2(\tau)$

17 Esame del 17.09.2019

17.1 Esercizio 1 ()

Il periodo di rotazione della Luna attorno alla Terra è $T_L = 27.32$ giorni e la sua orbita è approssimativamente circolare di raggio $R_L = 384400\,\text{km}$. Sapendo che l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre vale $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, ed utilizzando **soltanto** i dati precedenti, si determini:

1. il raggio della Terra R_T;
2. la distanza R_s dal centro della Terra ed il modulo v_s della velocità di un satellite artificiale in rotazione su un'orbita circolare situata nel piano equatoriale terrestre, con periodo $T_s = 1$ giorni. Trascurare l'attrazione gravitazionale esercitata dalla Luna.

Sol. **[1]** $R_T = \sqrt{\frac{GM_T}{g}}$ con $GM_T = \frac{4\pi^2 R_L^3}{T_L^2}$ **[2]** $R_s = \left(\frac{T_s}{T_L}\right)^{2/3} R_L$ con $T_s = \frac{2\pi\, R_s}{v_s}$, $v_s = \left(\frac{2\pi\, GM_T}{T_s}\right)^{1/3}$

17.2 Esercizio 2 ()

Un corpo di massa m si muove di moto rettilineo ed il modulo della sua quantità di moto varia nel tempo secondo la legge $p(t) = c\,t^2$, con c costante. Questo moto può essere prodotto da una forza $F(t)$ dipendente dal tempo oppure da una forza $F(r)$ dipendente dalla posizione del corpo. Si determini in entrambi i casi l'intensità della forza in funzione del tempo e della posizione.
Sol. **[1]** $F(t) = 2ct$ **[2]** $F(x) = 2c^{2/3}[3m(x - x_0)]^{1/3}$

17.3 Esercizio 3 ()

Una sbarretta rettilinea, di lunghezza $l = 40\,\text{cm}$, massa $m = 0.2\,\text{kg}$ e dimensioni trascurabili, ha una densità lineare che varia rispetto alla sua lunghezza secondo la legge $\lambda = \alpha\, x$. È fissata con un suo estremo ad un filo di lunghezza $D = 0.5\,\text{m}$ di massa trascurabile vincolato nel punto O. Il sistema sbarretta più filo ruota in un piano orizzontale con velocità angolare di modulo costante $\omega = 2\pi\,\text{rad/s}$. Calcolare:

1. il valore della costante α;
2. il modulo della forza F che si deve esercitare su O per mantenerlo fermo;
3. il lavoro W che viene fatto per mettere in moto la sbarretta trascurando le forze di attrito.

Sol. **[1]** $\alpha = \frac{2m}{l^2}$ **[2]** $F = \frac{\omega^2\alpha}{3}[(l + D)^3 - D^3]$ **[3]** $W = \frac{\omega^2\alpha}{8}[(l + D)^4 - D^4]$

18 Esame del 28.10.2019

18.1 Esercizio 1 (16.11)

Una particella si muove lungo l'asse $\hat{x}$ secondo la legge oraria descritta dall'equazione:

$$x(t) = A \ln \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2} \right)$$

dove $A = 1\,\mathrm{m}$ e $\tau = 1\,\mathrm{s}$ sono due costanti. Calcolare: (i) la velocità e l'accelerazione della particella; (ii) il tempo t^* in cui il punto raggiunge la coordinata $x = 3\,\mathrm{m}$; (iii) la velocità media nell'intervallo di tempo $[0,\tau]$ ed in quello $[\tau,2\tau]$; (iv) la velocità massima v_{max} raggiunta dalla particella ed il tempo impiegato a raggiungerla.

Sol. **[1]** $v(t) = \frac{2At}{t^2+\tau^2}$; $a(t) = \frac{2A(t^2+\tau^2)}{(t^2+\tau^2)^2}$ **[2]** $t^* = \tau\sqrt{e^{L/A}-1}$ **[3]** $< v > (0,\tau) = \frac{A\ln 2}{\tau}$, $< v > (\tau, 2\tau) = \frac{A\ln 5 - A\ln 2}{\tau}$ **[4]** $v_{max} = \frac{A}{\tau}$

18.2 Esercizio 2 (16.66)

Un tratto del percorso di una gara ciclistica è formato da due tratti pianeggianti separati da un tratto in discesa lungo $l = 2\,\mathrm{km}$ con pendenza costante ed assimilabile ad un piano inclinato di un angolo $\vartheta = 5^\circ$ rispetto all'orizzonte. Un ciclista di massa $m = 60\,\mathrm{kg}$ approccia il tratto in discesa con una velocità $v_0 = 36\,\mathrm{km/h}$. Per non affaticarsi decide di non pedalare lungo il tratto in discesa. Assumendo che l'unica forza di attrito sia la resistenza dell'aria, il cui modulo è direttamente proporzionale alla velocità del ciclista, secondo la legge $F_{att} = kv$, la cui costante vale $k = 3.6\,\mathrm{N\,s/m}$, calcolare:

1. la velocità di regime v_{lim} che il ciclista raggiungerà.

Assumendo che tale velocità di regime sia raggiunta prima della fine della discesa, calcolare inoltre:

2. il lavoro svolto dalla forza di attrito W_{att} sul ciclista nel percorrere il tratto in discesa;
3. la potenza P che dovrà erogare il ciclista pedalando, nel tratto pianeggiante, per continuare a muoversi con la stessa velocità che aveva al termine della discesa.

Sol. **[1]** $v_{lim} = \frac{mg}{k}\sin\vartheta$ **[2]** $W_{att} = \frac{1}{2}m(v_{lim}^2 - v_0^2) - mgl\sin\vartheta$ **[3]** $P = kv_{lim}^2$

18.3 Esercizio 3 (16.167)

Una sbarretta AB, di dimensioni trasversali trascurabili, ha massa $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $l = 40\,\mathrm{cm}$. La sua densità varia linearmente lungo la sbarretta e nell'estremo B ha valore doppio di quello in A. La sbarretta è incernierata nel suo punto di mezzo ad un asse orizzontale, ortogonale ad essa, intorno al quale può ruotare senza attrito. La sbarretta, lasciata libera di ruotare con velocità iniziale nulla nella posizione orizzontale, sotto l'azione della forza peso ruota intorno all'asse di sospensione. Calcolare

1. il valore delle costanti α e β nell'espressione della densità lineare della sbarretta $\lambda(x) = \alpha + \beta\, x$;
2. la posizione del centro di massa x_{cm} della sbarretta;
3. il modulo della velocità angolare ω della sbarretta nell'istante in cui essa passa per la verticale.

Sol. **[1]** $\lambda(x) = \frac{2m}{3l}\left(1 + \frac{x}{l}\right)$ **[2]** $x_{cm} = \frac{5}{9}l$ **[3]** $\omega = \sqrt{\frac{2g}{7l}}$

19 Esame del 13.12.2019

19.1 Esercizio 1 ()

Un ascensore di altezza $h = 2.25\,\mathrm{m}$ scende verso il suolo con accelerazione in modulo costante e pari ad $a_0 = 2\,\mathrm{m/s^2}$. Una pallina di gomma viene lanciata dal pavimento dell'ascensore verso l'alto con velocità u_0 rispetto all'ascensore. Si determini

- la condizione che deve soddisfare u_0 affinchè la pallina raggiunga il soffitto dell'ascensore trascurando la resistenza dell'aria;
- assumendo poi $u_0 = 15\,\mathrm{m/s}$ calcolare il tempo τ impiegato dalla pallina per arrivare al soffitto, contro il quale urta elasticamente, il tutto rispetto ad un sistema solidale all'ascensore.

Sol. **[1]** $u_0 \geqslant \sqrt{2(g-a_0)h}$ **[2]** $\tau = \frac{u_0-\sqrt{u_0^2-2(g-a_0)h}}{(g-a_0)}$

19.2 Esercizio 2 (16.55)

Un carrello di massa m si muove lungo una strada rettilinea alla velocità costante v_0 quando il motore si spegne. Il carrello procede soggetto alle sole forze di attrito e la sua velocità decresce in funzione del tempo secondo la legge

$$v(t) = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove τ è una costante arbitraria. Determinare l'espressione per il modulo della forza F_{att} che rallenta il carrello e calcolare la potenza P richiesta al motore per farlo procedere lungo la stessa traiettoria a velocità costante dopo il tempo τ. Calcolare inoltre il lavoro delle forze di attrito W_{att} nell'intervallo di tempo $[0,\tau]$.

Sol. **[1]** $F_{att} = -\frac{m}{\tau} v_0 e^{-t/\tau}$ **[2]** $P = \frac{m v_0^2}{\tau\, e^2}$ **[3]** $W_{att} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$

19.3 Esercizio 3 ()

Una carrucola è formata da un cilindro omogeneo di massa m_1 e raggio R è disposto in modo da ruotare intono ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro di massa e coincidente con l'asse del cilindro stesso. Tale rotazione avviene con attrito costante il cui momento risultante vale M_A. Sul cilindro e' avvolto un filo inestensibile, di massa trascurabile, che non slitta sulla superficie del cilindro ed alla cui estremità inferiore è collegato un corpo di dimensioni trascurabili e massa m_2. Partendo da fermo si osserva che lasciando il corpo libero di cadere, quando questo è sceso di una quota h il cilindro ruota con velocità angolare ω_0. In questo momento il filo viene tagliato, calcolare

- il momento delle forze di attrito M_{att};
- e dopo quanto tempo τ il cilindro si ferma.

Sol. **[1]** $M_{att} = m_2 g R - \frac{\omega_0^2 R^2}{4h}(m_1 + 2m_2)$ **[2]** $\tau = \frac{\omega_0 m_1 R^2}{2M_{att}}$

20 Esame del 25.03.2020

20.1 Esercizio 1 ()

Una particella si muove in direzione rettilinea secondo la sua legge oraria descritta dalla relazione:

$$x(t) = v_0\, t + \alpha\, t^2 + \beta\, t^3$$

dove v_0 =1 m/s ed α e β sono due costanti rispettivamente del valore di 2 m/s^2 e $-\frac{1}{3}$ m/s^3. Calcolare la velocità $v(t)$ e l'accelerazione $a(t)$ della particella in funzione del tempo ed il valore massimo della velocità v_{max} quando questa è diretta verso l'asse $\hat{x}$. Calcolare quando $(t_{1,2,3})$, durante tutto il suo moto si trova a passare per il punto da cui è partita e gli istanti $\tau_{1,2}$ in cui la velocità è nulla.

Sol. **[1]** $v(t) = v + 0 + 2\alpha\, t + 3\beta\, t^2$, $a(t) = 2\alpha + 6\beta\, t$ **[2]** $v_{max} = v_0 - \frac{\alpha^2}{3\beta}$ **[3]** $t_{1,2,3} = 0, \frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4v_0\beta}}{2\beta}$, $\tau_{1,2} = \frac{-2\alpha\pm\sqrt{4\alpha^2-12v_0\beta}}{6\beta}$

20.2 Esercizio 2 (16.62)

Una massa puntiforme m, in quiete in un sistema di riferimento inerziale, è soggetta, ad un certo istante $t = 0$ s, ad una forza avente direzione e verso costanti ed il cui modulo varia con il tempo secondo la legge: $F = F_0\, e^{-kt}$. Si determini (i) la potenza dissipata $P(t)$ in funzione del tempo ed (ii) il lavoro W compiuto da tale forza fra gli istanti $t = 0$ s e $t = \tau$. Si calcoli infine (iii) la legge oraria $x(t)$ della massa m.
($m = 0.5$ kg, $F_0 = 2$ N, $k = 0.02$ Hz, $\tau = 1$ s)

Sol. **[1]** $P(t) = \frac{F_0}{mk}\left(e^{-kt} - e^{-2kt}\right)$ **[2]** $W = \frac{F_0^2}{mk^2}\left(1 - e^{-k\tau}\right) - \frac{F_0^2}{2mk^2}\left(1 - e^{-2k\tau}\right)$ **[3]** $x(t) = \frac{F_0}{mk}t - \frac{F_0}{mk^2}e^{-kt}$

20.3 Esercizio 3 (15.10)

Un recipiente a forma di disco, con un bordo rialzato di massa trascurabile, (massa m_0 e raggio R) ruota attorno ad un asse baricentrale con velocità iniziale ω_0. Ad un certo istante viene applicato un momento esterno delle forze frenanti M costante. Determinare dopo quanto tempo t_1 il cilindro si ferma. Se all'interno del cilindro viene versata della sabbia in maniera uniforme con un tasso costante k, considerando trascurabile il momento delle forze frenanti, calcolare la velocità angolare $\omega(t)$ in funzione del tempo e dopo quanto tempo si arresta. Considerare trascurabile anche l'impulso con cui viene rilasciata la sabbia all'interno del recipiente. Determinare in queste condizioni il tempo necessario per compiere il primo giro τ_1.

Sol. **[1]** $t_1 = \frac{\omega_0 m_0 R^2}{2M}$ **[2]** $\omega(t) = \frac{m\omega_0}{m_0+kt}$, il recipiente non si arresta **[3]** $\tau_1 = \frac{m_0}{k}\left(e^{2\pi\, k/m\omega_0} - 1\right)$

21 Esame del 22.06.2020

21.1 Esercizio 1 (15.4)

Un proiettile di massa m_p e velocità v_0 colpisce un cilindro, posizionato con il suo asse di simmetria in verticale, pieno di sabbia, di massa m_c e raggio R, come riportato in figura. Il proiettile viaggia su una linea di volo che dista $\frac{R}{2}$ dall'asse del cilindro ed è perpendicolare all'asse stesso. Il proiettile resta conficcato sulla superficie del cilindro, ma subito dopo l'impatto la sabbia in esso contenuta comincia a fuoriuscire con un tasso $\frac{dm}{dt} = -2kt$, dove k è una costante positiva. Assumendo che il cilindro sia vincolato a muoversi soltanto attorno al suo asse di simmetria, calcolare:

1. la velocità angolare ω_0 con cui il cilindro inizia a ruotare immediatamente dopo l'urto e prima che la sabbia inizi a fuoriuscire;

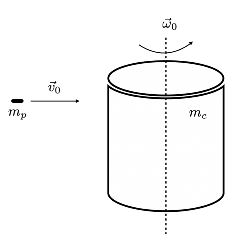
2. la variazione relativa di energia cinetica del sistema cilindro+proiettile, ovvero il rapporto tra la variazione di energia cinetica ΔK ed il suo valore iniziale K_{in};

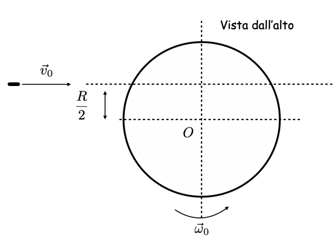
3. assumendo che dopo l'urto non agiscano forze esterne, determinare inoltre l'intervallo di tempo τ, misurato da quando la sabbia inizia ad uscire, in cui la velocità angolare del sistema cilindro+proiettile raddoppia;

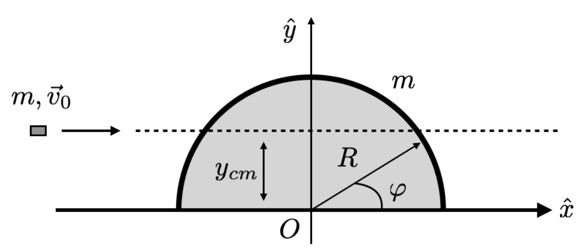
4. indicare infine come la variazione relativa di energia cinetica ed il tempo τ dipendono dalla velocità iniziale del proiettile.

Ipotizzare che anche se il cilindro perde sabbia al suo interno questa e' sempre distribuita in forma cilindrica ovvero quello che cambia è la sua altezza.

Sol. **[1]** $\omega_0 = \frac{m_p v_0}{(m_c R + 2 m_p R)}$ **[2]** $\frac{\Delta K}{K_i n} = \frac{2m_c + 3m_p}{2m_c + 4m_p}$ **[3]** $\tau = \sqrt{\frac{m_c + 2m_p}{2k}}$







21.2 Esercizio 2 (16.67)

Un auto di massa m si muove, partendo da ferma all'istante $t = $0s, di moto rettilineo su un tratto di strada per un intervallo di tempo τ. L'auto è soggetta alla sola azione della forza prodotta dal suo motore (si trascurino quindi le forze di attrito dinamico) che eroga una potenza $P(t)$ che è direttamente proporzionale al quadrato del tempo per il tramite di una costante k (i.e., $P(t) = kt^2$). Calcolare:

1. l'espressione della velocità $v(t)$ in funzione del tempo;

2. il tratto l percorso nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$;

3. l'espressione dell'accelerazione a cui è soggetta l'auto nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$ in funzione della velocità $a(v)$;

4. assumendo infine che dopo il tempo τ l'auto risenta esclusivamente dell'effetto di una forza di attrito direttamente proporzionale alla sua velocità, per il tramite di una costante b (i.e., $|F_{att}| = b\,v$), calcolare il lavoro della forza di attrito W_{att} fino all'istante in cui l'auto si arresta.

Sol. **[1]** $v(t) = \sqrt{\frac{2k}{3m}} t^{3/2}$ **[2]** $l = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2k}{3m}} \tau^{5/2}$ **[3]** $a(v) = \frac{k}{m}\left(\frac{3m}{2k}\right)^{2/3} v^{1/3}$ **[4]** $W_{att} = \frac{k\tau^3}{3}$

21.3 Esercizio 3 (16.168)

Un corpo rigido a forma di semicerchio di massa m e raggio R giace in un piano orizzontale ed ha una densità superficiale di massa che varia in funzione della sua coordinata radiale r secondo la relazione $\rho = c\,r^2$, dove c è una costante. Un proiettile, sempre di massa m e con velocità v_0, si muove in direzione parallela al suo diametro, ovvero lungo l'asse $\hat{x}$ riportato in figura. Questo colpisce il semicerchio sul bordo all'altezza del suo centro di massa e vi resta conficcato. Trascurando gli attriti, determinare:

1. la posizione del centro di massa $\vec{r}_{cm}$ in funzione solo del suo raggio R prima dell'urto;
2. il momento di inerzia I del corpo a forma di semicerchio prima dell'urto, calcolato rispetto ad un asse passante per il punto O e perpendicolare al piano su cui giace;
3. la velocità angolare ω con cui ruota il sistema dopo l'urto nell'ipotesi in cui il proiettile resti conficcato sul bordo del semicerchio ed assumendo che il corpo rigido sia vincolato a ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano passante per il punto O, origine degli assi cartesiani.

Sol. **[1]** $(x_{cm}, y_{cm}) = \left(0, \frac{8}{5\pi}R\right)$ **[2]** $I = \frac{2}{3}mR^2$ **[3]** $\omega = \frac{24}{25\pi}\frac{v_0}{R}$

21.4 Esercizio 4 (3.3)

La forza risultante esercitata da un gruppo di cani da slitta per trascinarne una di massa m lungo un tratto rettilineo di lunghezza l è diretta lungo l'asse $\hat{x}$ ed è in modulo direttamente proporzionale al quadrato del tempo per il tramite di una costante b (i.e., $F(t) = b\,t^2$). Trascurando gli attriti, ricavare:

1. l'espressione della velocità in funzione del tempo $v(t)$;
2. la legge oraria della slitta $x(t)$;
3. calcolare inoltre il lavoro W svolto dalla forza per percorrere il tratto l sia integrando la relazione $L = \int_0^{t_p} P\,dt$, indicando con t_p il tempo di percorrenza del tratto l;
4. dimostrare che si ottiene lo stesso risultato usando l'integrazione $L = \int_0^l \vec{F} \cdot d\vec{x}$;
5. dire se la forza è conservativa.

Sol. **[1]** $v(t) = \frac{b}{3m}t^3$ **[2]** $x(t) = x_0 + \frac{b}{12m}t^4$ **[3]** $W = \left(\frac{16}{3}\right)^{3/2} b^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}$ **[4]** la forza non é conservativa

22 Esame del 16.07.2020

22.1 Esercizio 1 (16.169)

Un quadrato di lato l e massa m si trova posizionato in un piano verticale ed ha uno dei suoi vertici posizionati nell'origine di un sistema di assi cartesiani che hanno direzioni coincidenti con i suoi lati, come mostrato in figura. Il quadrato è vincolato a ruotare attorno all'asse $\hat{x}$. Sapendo che la sua densità superficiale di massa dipende dalla coordinata x secondo la relazione $\sigma = c\,x$. Calcolare:

1. la posizione del centro di massa del quadrato (x_{cm}, y_{cm});

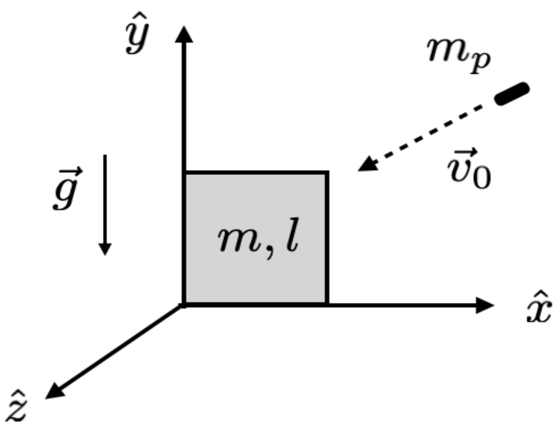
2. il suo momento di inerzia I_x per una rotazione attorno all'asse $\hat{x}$;

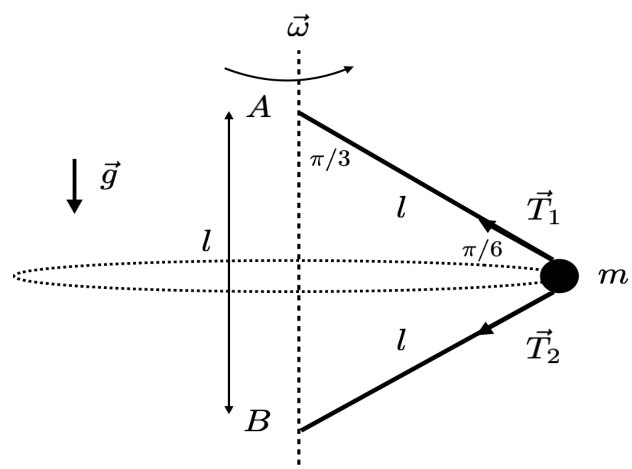
3. assumendo che venga colpito da un proiettile di massa m_p e velocità v_0 in direzione perpendicolare ai suoi lati, ovvero lungo l'asse $\hat{z}$, nel centro geometrico del quadrato, come mostrato in figura, determinare la velocità angolare ω_0 con cui ruota il sistema quadrato+proiettile immediatamente dopo l'urto. Il proiettile resta infatti conficcato nel centro del quadrato.

4. quando il sistema quadrato+proiettile di trova al di sotto dell'asse $\hat{x}$ oscilla rispetto a questo. In tale configurazione calcolare inoltre il periodo delle piccole oscillazioni T attorno all'asse $\hat{x}$ del sistema quadrato+proiettile.

NOTA: Per il calcolo del momento di inerzia del quadrato lo si può considerare come formato da tante sbarrette di massa dm e momento di inerzia dI che ruotano rispetto ad un loro estremo posizionato lungo l'asse $\hat{x}$.

Sol. **[1]** $(x_{cm}, y_{cm}) = (2l/3, l/2)$ **[2]** $I_x = \frac{ml^2}{3}$ **[3]** $\omega_0 = \frac{m_p v_0}{\frac{2}{3}ml + \frac{1}{2}m_p l}$ **[4]** $T = 2\pi\sqrt{\frac{I + \frac{1}{4}m_p l^2}{(m+m_p)g y_{cm}}}$





22.2 Esercizio 2 (15.11)

Una sfera di massa m è fissata ad un'asta verticale per mezzo di due funi inestensibili di massa trascurabile, lunghe l. Le funi sono fissate alla sbarra alla distanza l l'una dall'altra. Il sistema ruota con velocità costante attorno alla sbarra in modo da formare con le due funi un triangolo equilatero, come mostrato in figura. Calcolare

1. il valore della tensione T_1 e T_2 nei due tratti di fune;

2. assumendo che al posto della fune inferiore vi sia una molla di lunghezza a riposo nulla, massa trascurabile e costante elastica k, e nell'ipotesi che la massa m sia sempre ai vertici di un triangolo equilatero, calcolare il valore della costante elastica della molla se il sistema ruota alla stessa velocità angolare;

3. assumendo che ad un certo istante la fune di tensione T_2 si rompa, determinare la variazione di quota Δh della massa m.

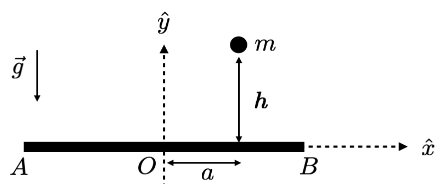
Sol. **[1]** $T_{1,2} = \frac{m}{2}\omega^2 l \pm \frac{mg}{2\sin\beta}$ **[2]** $k = \frac{m}{2}\omega^2 - \frac{mg}{2l\sin\beta}$ **[3]** $\Delta h = \frac{l}{2} - \frac{g}{\omega^2}$

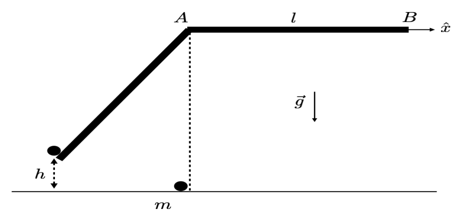
22.3 Esercizio 3 (16.170)

Una sbarra orizzontale AB di massa $m_0 = 1\,\text{kg}$ e lunghezza $l = 50\,\text{cm}$ e densità uniforme, è posta in quiete in un piano verticale, ma libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale fisso passante per il suo centro di simmetria O, come riportato in figura. Ad un certo istante cade, partendo da ferma e da una quota $h = 1\,\text{m}$, una pallina di dimensioni trascurabili e massa $m = 0.1\,\text{kg}$ che colpisce la sbarra ad una distanza $a = 10\,\text{cm}$ dal suo centro. Sapendo che l'urto è completamente anelastico determinare

1. la posizione del centro di massa H ed il momento di inerzia I_O rispetto all'asse orizzontale passante per O del sistema sbarra+pallina;
2. l'ampiezza delle oscillazioni angolari ϑ_{max} del sistema sbarra+pallina;
3. la percentuale di energia meccanica dissipata (i.e., $\frac{\Delta E}{E_{in}} = \frac{E_{fin}-E_{in}}{E_{in}}$).

Sol. **[1]** $H = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{m_0 l^2}{12}a^2\right)\omega_0^2}{(m_0+m)g}$, $I_O = ma^2 + \frac{m_0 l^2}{12}$ **[2]** $\vartheta_{max} = \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}$ con $\vartheta_0 = arcsin\left(\frac{H(m+m_0)}{ma}\right)$ **[3]** $\frac{\Delta E}{E_{in}} = 1 - \frac{I_O}{2mgh}$





22.4 Esercizio 4 (16.171)

Una sbarra AB di lunghezza l è vincolata a muoversi in un piano verticale, libera di oscillare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo estremo A, come mostrato in figura. Questa ha una densità lineare λ che varia in funzione della sua distanza dall'estremo A (indicata con x) secondo la relazione $\lambda = cx$, dove c è una costante. La sbarra si trova inizialmente in posizione orizzontale ed in quiete, poi, quando passa in posizione verticale, urta in modo completamente anelastico una pallina di massa m_p e dimensioni trascurabili, che vi resta attaccata. Calcolare

1. la massa m totale della sbarra;
2. la posizione del centro di massa x_{cm} ed il momento di inerzia I_A rispetto all'asse orizzontale passante per l'estremo A della sbarra;
3. la velocità angolare ω_0 del sistema sbarra+pallina immediatamente dopo l'urto;
4. la quota h a cui risale il sistema sbarra+pallina.

Sol. **[1]** $m = \frac{cl^2}{2}$ **[2]** $x_{cm} = \frac{2}{3}l$, $I_A = \frac{1}{2}ml^2$ **[3]** $\omega_0 = \sqrt{\frac{8g}{3l}}$ **[4]** $h = l(1-\cos\vartheta) = \frac{4I_A g}{3(I_A+m_p l^2)\left(\frac{2}{3}mgl+m_p gl\right)}$

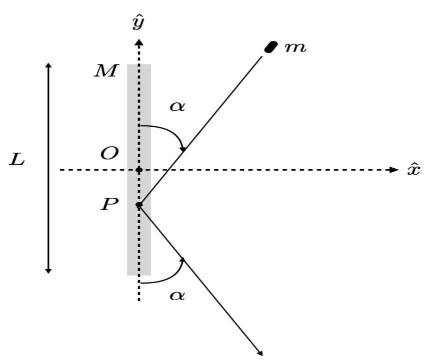
23 Esame del 07.09.2020

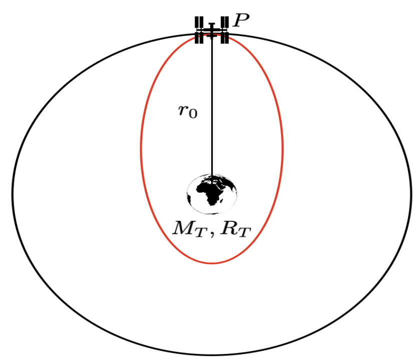
23.1 Esercizio 1 ()

Su una superficie orizzontale priva di attrito è posizionata un'asta omogenea di lunghezza L e massa M in quiete. Considerando un sistema di assi cartesiani centrato nel centro di massa dell'asta nella sua posizione iniziale quando questa è posizionata completamente lungo l'asse $\hat{y}$, come mostrato in figura. Un corpo di massa m e di dimensioni trascurabili si muove sulla stessa superficie e colpisce l'asta nel punto di coordinate $(0, -\frac{L}{15})$ con una velocità pari a v_0 ed un angolo di impatto α misurato a partire dalla direzione della sbarra. La velocità del corpo subito dopo l'urto vale in modulo $\frac{v_0}{4}$ con un angolo di rimbalzo ancora pari ad α =30° come in figura. Sapendo che il rapporto tra le masse vale $\frac{m}{M} = \frac{4}{5}$ calcolare:

1. componenti cartesiane e modulo del vettore $\vec{v}$, velocità del centro di massa dell'asta dopo l'urto;
2. modulo direzione e verso del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ dell'asta dopo l'urto;
3. il rapporto tra le energia cinetica totale, cioè quella del sistema asta+corpo dopo e prima dell'urto e dire se l'urto è elastico oppure no.

Sol. **[1]** $\vec{v}_{cm} = \left(-\frac{v_0}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{10}v_0\right)$ **[2]** $\omega = \frac{2v_0}{5l}$ **[3]** $\frac{K_{fin}}{K_{in}} = 0.73$





23.2 Esercizio 2 ()

Un satellite si trova inizialmente in orbita circolare di raggio r_0, misurato a partire dal centro della Terra. Calcolare il periodo di rivoluzione del satellite. Assumendo che ad un certo istante, trovandosi nel punto P, il satellite dimezza il modulo della sua velocità mantenendo la stessa direzione. In conseguenza di questo evento l'orbita del satellite diviene ellittica. Calcolare il semiasse maggiore a della nuova orbita. Determinare inoltre l'eccentricità dell'orbita ellittica considerando il fatto che il punto P corrisponde proprio all'apogeo della nuova orbita ellittica.

Sol. **[1]** $T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_T}}$ **[2]** $a = \frac{4}{7}r_0$ **[3]** $r_0 = a(1-e) \rightarrow e = \frac{3}{4}$

24 Esame del 28.01.2021

24.1 Esercizio 1 ()

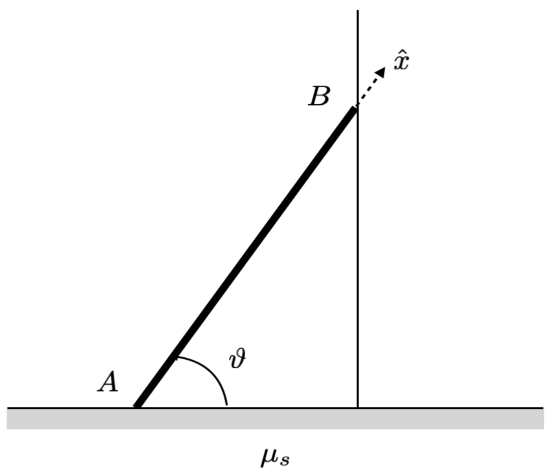
Una scala di lunghezza l poggia su una parete verticale liscia come mostrato in figura. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra la scala ed il pavimento vale μ_s e che la scala ha una densità crescente linearmente dall'estremo che poggia sul pavimento A verso quello che poggia sulla parete verticale B secondo la relazione

$$\rho(x) = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) \ , \tag{1}$$

calcolare:

1. la posizione del centro di massa x_{cm} della scala in funzione della sola lunghezza l.
2. calcolare il valore massimo dell'angolo ϑ_{max} per la quale la scala resta in equilibrio.

Sol. **[1]** $x_{cm} = \frac{5}{9}l$ **[2]** $\vartheta_{max} = arctg\left(\frac{5}{9\mu_s}\right)$

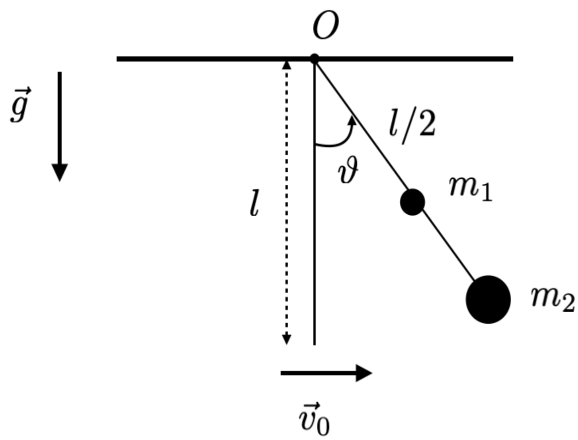


25 Esame del 15.02.2021

25.1 Esercizio 1 ()

Un pendolo è costituito da un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza l sospesa nel punto O. Una massa m_1 è fissata alla distanza $l/2$ dal punto O mentre una seconda massa $m_2 = 2m_1$ si trova all'estremo libero dell'asta come mostrato in figura. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni T_0 del sistema. Assumendo poi che il sistema parta dalla posizione verticale con una velocità orizzontale v_0 calcolare la velocità v_{max} con cui passa nuovamente per la verticale nel caso in cui raggiunto il punto di massima altezza la massa m_2 si stacchi dal pendolo.

Sol. **[1]** $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{9l}{10g}}$ **[2]** $v_{max} = \frac{v_0}{2}$



25.2 Esercizio 2 ()

Due dischi omogenei di uguale massa ma raggio diverso, rispettivamente pari a $3R$ per il primo disco ed R per il secondo, ruotano senza attrito con uguale velocità angolare ω_0 attorno ad un asse passante per il loro centro e disposto orizzontalmente, ma con verso opposto. I due dischi sono posti inizialmente ad una certa distanza, quando vengono lentamente avvicinati e portati a contatto. Le forze di attrito tra le superfici di contatto fanno si che entrambi raggiungano una comune velocità angolare finale ω_f. Calcolare:

1. il valore della velocità angolare finale ω_f in funzione di quello iniziale ω_0;
2. il rapporto tra l'energia cinetica totale finale ed iniziale $\rho = \frac{K_{fin}}{K_{in}}$ e la percentuale di energia dissipata per attrito $f = \frac{\Delta K}{K_{in}}$.

Sol. **[1]** $\omega_f = \frac{4}{5}\omega_0$ **[2]** $\rho = \left(\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2 = 0.64$, $f = -0.36$

26 Esame del 22.06.2021

26.1 Esercizio 1 (16.158)

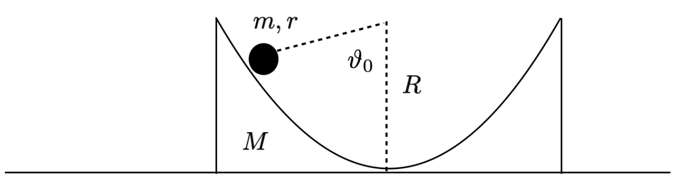
Una conca semisferica di raggio $R = 71\,\mathrm{cm}$ e massa $M = 3.64\,\mathrm{kg}$ può scorrere senza attrito sopra un piano orizzontale liscio. Una sferetta piena e uniforme di massa $m = 0.335\,\mathrm{kg}$ e raggio r, con $r << R$, viene posizionata all'interno della conca, come indicato in figura, in modo che la congiungente fra il suo centro e il centro della conca formi un angolo $\vartheta_0 = 82^\circ$ con la verticale, e lasciata libera con velocità iniziale nulla. La sferetta rotola nella conca senza strisciare, con moto di puro rotolamento. Si determini, rispetto a un sistema di riferimento solidale con l'osservatore

1. lo spostamento orizzontale s subito dalla conca quando la sferetta è giunta al punto di inversione sull'altro versante della conca;

2. la velocità v del centro di massa della sferetta nel punto più basso della conca e la velocità V della conca in corrispondenza del transito della sferetta presso tale punto.

Trascurare il raggio r rispetto al raggio della conca R, ma non trascurare l'energia cinetica della sferetta intesa come corpo rigido. Trascurare inoltre lo spessore della conca nel punto che tocca terra.

Sol. **[1]** $s = \frac{2mR\sin\vartheta_0}{m+M}$ **[2]** $v = \sqrt{\frac{10Mgy_0}{7M+5m}}$, $V = -\frac{m}{M}v$ con $y_0 = R(1 - \cos\vartheta_0)$



27 Esame del 15.07.2021

27.1 Esercizio 2 (5.5)

Un corpo di massa $m_1 = 0.02\,\mathrm{kg}$ si muove su di un piano orizzontale liscio con velocità $v_0 = 1.4\,\mathrm{m/s}$. Ad un certo istante esso inizia a salire su una rampa liscia, di massa $m_2 = 0.26\,\mathrm{kg}$, che può muoversi sul piano. Il corpo salirà lungo la rampa fino a raggiungere una certa altezza massima (situazione a); a questo punto invertirà il suo moto iniziando la discesa lungo la rampa fino a raggiungere nuovamente il piano orizzontale (situazione b).

1. Indicare, motivando la risposta, a che tipo di urto sono rispettivamente assimilabili le situazioni (a) e (b);
2. con riferimento alla situazione (a) calcolare massima altezza h raggiunta dal corpo e la velocità della rampa v_1;
3. con riferimento alla situazione (b) calcolare la velocità della rampa u_1 e del corpo quando questo è tornato sul piano orizzontale u_2.

Trascurare gli attriti.

Sol. **[1]** $h = \frac{m_2 v_0^2}{2(m_1+m_2)g}$, $v_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0$ **[2]** $u_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_0$, $u_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} v_0$

28 Esame del 08.09.2021

28.1 Esercizio 2 ()

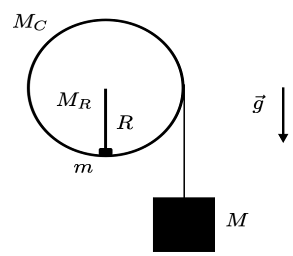
Una ruota è costituita da un cerchione di massa $M_C = 8\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 100\,\mathrm{cm}$ posto in un piano verticale e vincolato a ruotare senza attrito attorno al suo centro a cui è collegato da un solo raggio, corrispondente ad una sbarra uniforme di massa $M_R = 2\,\mathrm{kg}$ e lunghezza R, verticale ed inizialmente diretta verso il basso (come mostrato in figura). Lungo il raggio è libero di scorrere senza attrito un anellino di massa $m = 1\,\mathrm{g}$. Il sistema è inizialmente fermo con il raggio in posizione verticale ed all'istante t =0 viene messo in rotazione da una massa M collegata al bordo della ruota tramite un filo arrotolato attorno al bordo, che inizia a scendere sotto l'azione della gravità. Calcolare:

1. il momento di inerzia I del sistema ruotante (cerchione+raggio) rispetto all'asse di rotazione trascurando il contributo dell'anellino;

2. la posizione del centro di massa x_{cm} dello stesso sistema ruotante nella configurazione iniziale, trascurando la massa dell'anellino;

3. il valore minimo di M_{min} affinchè dopo 1/2 giro l'anellino resti attaccato al cerchione senza ricadere verso il centro, specificando la condizione affinchè questo avvenga.

Sol. **[1]** $I = \left(M_C + \frac{M_R}{3}\right) R^2$ **[2]** $x_{cm} = \frac{R M_R}{2(M_C + M_R)}$ **[3]** $M_{min} = \frac{1}{2\pi - 1}\left(M_C + \frac{7}{3} M_R\right)$



28.2 Esercizio 3 (3.2)

Un'auto di massa $m = 1000\,\mathrm{kg}$ si muove lungo un rettilineo a motore spento e partendo con velocità iniziale, misurata all'istante $t_0 = 1\,\mathrm{s}$, $v(t_0) = v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$. Assumendo che la resistenza dell'aria sia tale che la velocità dell'auto diminuisca secondo la legge $v(t) = \frac{k}{t}$, dove la costante $k = v_0\, t_0$, calcolare:

1. l'espressione della forza di attrito F_{att} in funzione delle costanti assegnate e della velocità $v(t)$;

2. la legge oraria $x(t)$ dell'auto considerando che la sua posizione iniziale sia $x(t_0)$ =0 ed il tempo τ impiegato a percorrere un tratto di lunghezza $l = 2\,\mathrm{km}$;

3. il lavoro W_{att} fatto dalla forza di attrito lungo il tratto l.

Sol. **[1]** $F_{att} = -mbv^2$ con $b = \frac{1}{k}$ **[2]** $x(t) = v_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0}$, $\tau = t_0 e^{l/(t_0 v_0)}$ **[3]** $W_{att} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[1 - e^{-2l/(t_0 v_0)}\right]$

29 Esame del 25.01.2022

29.1 Esercizio 2 ()

Un veicolo spaziale deve raggiungere un'orbita geostazionaria partendo da un'orbita circolare di raggio $r_1 = 7000\,\text{km}$. Per questo il pilota accende i razzi di un veicolo e si mette su di un'orbita ellittica di perigeo r_1 ed apogeo r_2 pari al raggio dell'orbita geostazionaria e successivamente accende nuovamente i razzi per portarsi sull'orbita desiderata. Ricordando che la Terra ha una massa di $M_T = 5.97 \times 10^{24}\,\text{kg}$ e che la costante di gravitazione universale vale $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}$ calcolare:

1. il modulo della velocità del veicolo spaziale v quando si trova sull'orbita iniziale;
2. il modulo della velocità v_3 quando questo si trova all'apogeo dell'orbita ellittica;
3. l'energia, per unità di massa $\frac{\Delta K}{m}$, spesa per passare dall'orbita ellittica a quella geostazionaria.

Sol. **[1]** $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}$ **[2]** $v_3 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}}$ con $r_2 = \left(\frac{GM_T}{4\pi}T^2\right)^{1/3}$ **[3]** $\frac{\Delta K}{m} = \frac{1}{2}v_3^2 - v_2^2$ con $v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_2}\frac{r_1}{r_1+r_2}}$

29.2 Esercizio 3 ()

Un'asta rigida, di lunghezza l e densità uniforme, è vincolata ad un perno ad una delle sue estremità e può ruotare in un piano verticale per un asse orizzontale passante per il suo estremo fisso O. Questa è inizialmente sospesa in posizione orizzontale e tenuta ferma da un piccolo chiodo. Quando il chiodo viene rimosso l'asta ruota liberamente e nell'istante in cui raggiunge la posizione verticale si spezza in corrispondenza del suo centro di massa. La parte superiore continua a ruotare nel piano verticale poichè è ancora collegata al perno in O, mentre la metà inferiore, staccatasi, inizia a cadere sotto l'azione della forza di gravità. Assumendo che tutte le forze di attrito siano trascurabili e che non vi siano forze impulsive durante la rottura dell'asta, calcolare: (i) la velocità angolare dell'asta ω_0 nell'istante immediatamente prima che questa si spezzi, (ii) l'ampiezza angolare massima ϑ_{max} che compie il moto oscillatorio della parte superiore dell'asta proseguendo la rotazione dopo la rottura ed (iii) il rapporto ρ fra l'energia cinetica rotazionale e quella totale per il frammento inferiore dell'asta nell'istante immediatamente dopo che questa si è spezzata.

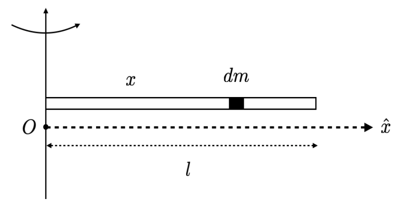
Sol. **[1]** $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ **[2]** $\vartheta_{max} = \frac{\pi}{3}$ **[3]** $\rho = \frac{K_{rot}}{K_{tras}+K_{rot}} = \frac{\frac{1}{64}mgl}{\frac{27}{64}mgl+\frac{1}{64}mgl}$

30 Esame del 17.02.2022

30.1 Esercizio 1 (6.2)

Una sbarretta di lunghezza l e densità lineare di massa pari a $\lambda = c\,x$, dove l e c sono due costanti note è libera di ruotare attorno ad un asse passante per un suo estremo e perpendicolare ad essa. Calcolare: (i) la massa totale m della sbarretta, (ii) il momento di inerzia I per l'asse indicato in figura e per un asse parallelo passante per il suo centro di massa; (iii) determinare inoltre il modulo della reazione vincolare N a cui è soggetto l'asse quando questa ruota con velocità angolare ω costante e parallela all'asse stesso.

Sol. **[1]** $m = \frac{1}{2}cl^2$ **[2]** $I = \frac{1}{2}ml^2$, $I_{cm} = \frac{17}{18}ml^2$ **[3]** $N = \frac{2}{3}m\omega^2 l$



31 Simulazione d'esame del 07.04.2022

31.1 Esercizio 1 (16.117)

Una massa M, collegata ad una molla orizzontale, poggia su di un piano orizzontale privo di attrito e compie oscillazioni armoniche di ampiezza A con frequenza ω. Nell'istante in cui la massa transita per la posizione di equilibrio, nella direzione negativa dell'asse $\hat{x}$ viene colpita da un proiettile di massa m e velocitá v_p che si muove nella direzione positiva dell'asse $\hat{x}$. Assumendo che l'urto sia istantaneo e che si tratti di un urto completamente anelastico. Calcolare il modulo della velocità finale del sistema, l'energia dissipata nell'urto e l'ampiezza delle nuove oscillazioni.

Sol. [1] [2] [3]

31.2 Esercizio 2 (16.153)

Un cilindro di massa m_0 e raggio R ruota con velocità angolare ω_0 attorno al suo asse baricentrale. All'istante $t = 0$ tramite un bocchettone posizionato al di sopra del cilindro viene rilasciata al suo interno della sabbia con un tasso costante $\dot{m} = ke^{t/\tau}$. Calcolare come varia la velocità del cilindro in funzione del tempo e l'espressione della potenza che deve erogare un motore per mantenere la velocità del cilindro costante e pari al valore iniziale ω_0. Assumere che la sabbia che cade nel cilindro si distribuisca sempre in forma cilindrica. Trascurare gli attriti.

Sol. [1] [2] [3]

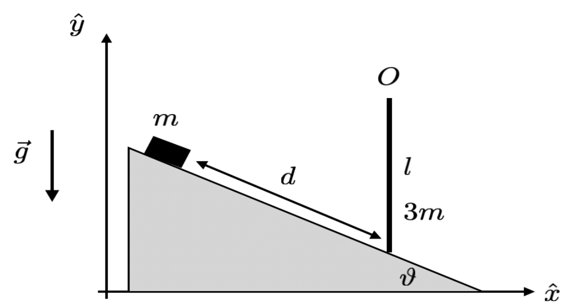
32 Simulazione d'esame del 08.06.2022

32.1 Esercizio 1 (16.8)

Un fuoco d'artificio, lanciato verticalmente con velocità iniziale v_0, esplode in due frammenti di ugual massa. Dopo un tempo t_1 dall'istante in cui avviene l'esplosione, uno dei due frammenti si trova alla quota h_1; calcolare la quota dell'altro frammento nello stesso istante.
Sol. **[1]** $h_2 = 2v_0 t_1 - g t_1^2 - h_1$

32.2 Esercizio 2 (16.172)

Una pallina di massa m scende su un piano inclinato di un angolo ϑ, privo di attrito, partendo da fermo. Dopo aver percorso una distanza d, urta in modo totalmente anelastico l'estremo di un'asta verticale di lunghezza l e massa $3m$ che è libero di ruotare senza attrito intorno all'estremo O. Calcolare la posizione del centro di massa del sistema $\vec{r}_{cm}$, rispetto ad O, nell'istante immediatamente precedente l'urto e la massima variazione di quota $\Delta\, h$ che esso subisce in seguito all'urto. $[m = 1\,\mathrm{kg},\ \vartheta = 60°,\ d = 1.2\,\mathrm{m},\ l = 0.8\,\mathrm{m}]$
Sol. **[1]** $\vec{r}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}) = (0, \frac{\frac{3}{2}ml + ml}{3m+m})$ **[2]** $\Delta\, h = \frac{ml^2\omega^2}{(3m+m)g}$ con $\omega = \frac{mvl\sin\vartheta}{2ml^2}$

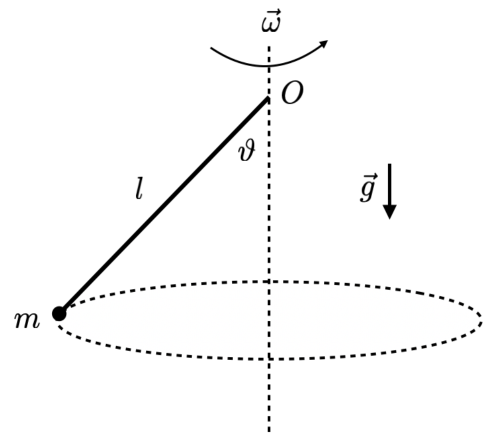


33 Esame del 23.06.2022

33.1 Esercizio 1 (R.17)

Pendolo conico. Si consideri la massa m, vincolata tramite un filo di massa trascurabile e di lunghezza l, a muoversi lungo la circonferenza come mostrato in figura. Calcolare la componente verticale del momento angolare quando questo è inclinato di un angolo ϑ rispetto alla verticale. Esprimere il valore della componente verticale del momento angolare L_z solo in funzione dei dati del problema: m, g, l, ϑ.

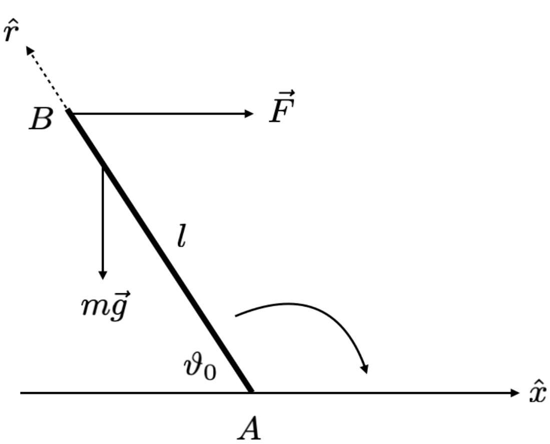
Sol. **[1]** $L_z = \sqrt{m^2 l^3 g \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}}$



33.2 Esercizio 2 (16.154)

Una sbarretta di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $l = 80\,\mathrm{cm}$ è vincolata a ruotare, in un piano verticale, attorno al suo estremo A posto lungo l'asse $\hat{x}$, come mostrato in figura. La sua densità lineare λ varia in funzione della distanza dall'estremo A secondo la legge: $\lambda = kr^{1/2}$, dove il verso di $\hat{r}$ è indicato in figura. La sbarretta è inizialmente inclinata di un angolo $\vartheta_0 = 40^\circ$ rispetto all'asse $\hat{x}$ in una posizione di equilibrio grazie all'azione di una forza $\vec{F}$ orizzontale che viene applicata all'estremo opposto B della sbarretta. Determinare il valore di del modulo della forza F_{eq} per mantenere il sistema nella posizione di equilibrio. Assumendo poi che il modulo della forza F sia pari a due volte il valore nella posizione di equilibrio: $F = 2\,F_{eq}$, e che questa sia sempre costante e diretta parallelamente all'asse $\hat{x}$, calcolare il lavoro W effettuato da questa forza per portare la sbarretta in posizione verticale.

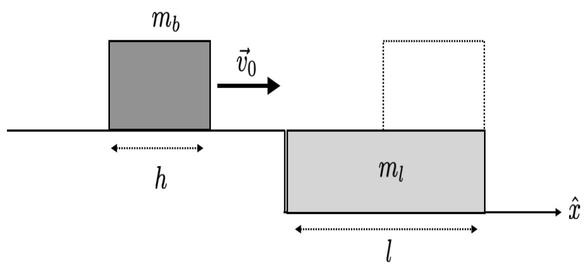
Sol. **[1]** $F_{eq} = \frac{3}{5} mg\, cotg\vartheta_0$ **[2]** $W = \frac{6}{5} mgl\, cotg\vartheta_0 \cos\vartheta_0$



34 Esame del 18.07.2022

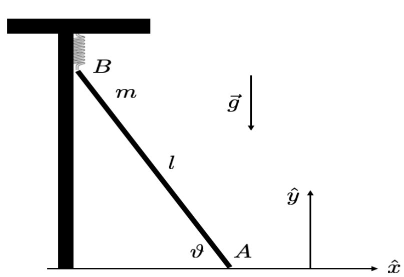
34.1 Esercizio 1 (15.18)

Un blocco di massa m_1 scorre senza attrito su un piano orizzontale con velocità v_0, ad un certo istante inizia a scivolare, con attrito dinamico, sopra un secondo blocco di massa m_2, come mostrato in figura. Dopo aver percorso la distanza l sulla superficie del blocco m_2, il blocco m_1 si ferma rispetto a quello sottostante. Calcolare la velocità v dei due blocchi m_1 ed m_2 quando si muovono insieme, la differenza di energia cinetica ΔK tra l'istante iniziale in cui si muove solo il primo blocco e quello finale in cui si muovono entrambi con la stessa velocità. Determinare infine il coefficiente di attrito μ fra i blocchi.
Sol. **[1]** $v = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0$ **[2]** $\Delta K = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_0^2$ **[3]** $\mu = \frac{v_0^2}{2gl\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)}$



34.2 Esercizio 2 ()

Un'asta di densità uniforme, lunghezza l e massa m, è appoggiata con l'estremo A su un piano orizzontale scabro (i.e., con attrito statico), come mostrato in figura. L'altro estremo B poggia ad una parete verticale liscia ed è collegato ad una molla di costante elastica k, la quale, a sua volta, è ancorata al soffitto in modo che la molla stessa si possa allungare (o comprimere) solo nella direzione verticale. Il sistema si trova in equilibrio statico con la molla allungata di un tratto δ, rispetto alla sua lunghezza a riposo e l'asta che forma un angolo ϑ con la verticale. Calcolare le reazioni vincolari N_A ed N_B nei punti A e B assumendo i seguenti valori numerici: $m = 1\,\text{kg}$, $k = 4\,\text{N/m}$, $\delta = 2\,\text{m}$, $\vartheta = 63.5°$. Sol. **[1]** $N_A = mg - k\delta$ **[2]** $N_B = \left(\frac{mg}{2} - k\delta\right)\tan\vartheta$



35 Esame del 14.09.2022

35.1 Esercizio 1 ()

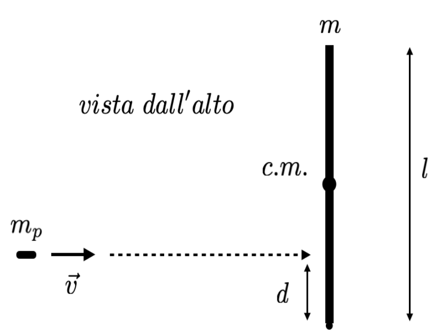
Una pallina di massa $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ è attaccata ad una molla posta in un piano orizzontale. La lunghezza a risposo della molla vale $l_0 = 50\,\mathrm{cm}$ ed ha massa trascurabile; questa è a sua volta incernierata al muro per il suo estremo O. Inizialmente la molla è compressa per un tratto $h = 5\,\mathrm{cm}$. Ad un certo istante la molla viene lasciata libera di allungarsi e la pallina alla sua estremità va a colpire, elasticamente, una seconda pallina di massa $m_2 = 3m_1$ che si trova alla distanza $d = 53\,\mathrm{cm}$ dall'estremo O. Determinare la massima compressione della molla δ nel moto della pallina di massa m_1 successivamente all'urto.

Sol. [**1**] $\delta = \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{3}{4}(d - l_0)^2}$

35.2 Esercizio 2 (16.152)

Un'asta omogenea di massa m e lunghezza l giace ferma in un piano orizzontale liscio, priva di vincoli, come mostrato in figura (sinistra). Ad un certo istante una pallina di massa m_p che si muove sul piano urta l'asta, elasticamente, in direzione perpendicolare ad essa con velocità v in un punto a distanza d dal suo centro di massa. Calcolare per quale valore di m_p la pallina resta ferma dopo l'impatto, in funzione di m, l, d.

Sol. [**1**] $m_p = \frac{ml^2}{l^2 + 12d^2}$

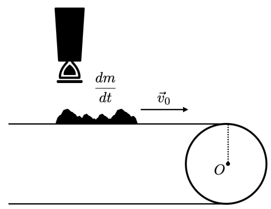


36 Esame del 24.01.2023

36.1 Esercizio 1 ()

Della sabbia cade verticalmente ed in modo continuo su un nastro trasportatore orizzontale ad un ritmo costante $r = \frac{dm}{dt} = 310\,\mathrm{kg/s}$. Il nastro è in movimento con velocità costante $v_0 = 3.40\,\mathrm{m/s}$. Calcolare (i) la forza F da applicare sul nastro trasportatore per mantenere il movimento a velocità costante e (ii) la potenza P del motore che guida il nastro, assumendo che una percentuale $f = 5\%$ dell'energia disponibile venga dissipata dagli attriti presenti nel sistema.

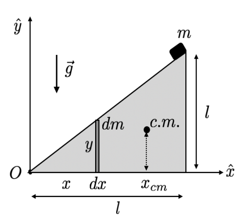
Sol. **[1]** $F = rv$ **[2]** $P = \frac{rv^2}{1-f}$

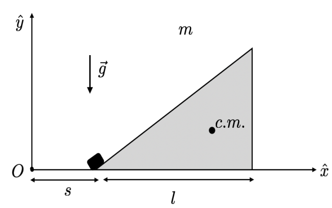


36.2 Esercizio 2 (16.139)

Un piano inclinato è posizionato su un piano orizzontale privo di attrito, assimilabile ad un triangolo rettangolo isoscele di massa m_p e cateto di lato l. Il piano inclinato è libero di muoversi lungo l'asse $\hat{x}$. Sulla sua sommità c'è un blocco di massa m, inizialmente fermo. Ad un certo istante il blocco viene lasciato libero di scivolare, calcolare (i) la posizione del centro di massa x_{cm} del triangolo lungo l'asse $\hat{x}$; (ii) lo spostamento s lungo l'asse orizzontale del piano inclinato, rispetto alla posizione iniziale e (iii) la componente orizzontale della velocità v_x del blocco e del piano inclinato, nell'istante in cui il blocco raggiunge il piano orizzontale. Si osservi che la relazione che lega le componenti della velocità del blocco, v_x e v_y, al suo modulo v si scrive: $v_x = v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}v$.

Sol. **[1]** $x_{cm} = \frac{2}{3}l$ **[2]** $s = \frac{m}{m+m_p}l$ **[3]** $v_x = \sqrt{\frac{2m_pgl}{2m_p+m}}$



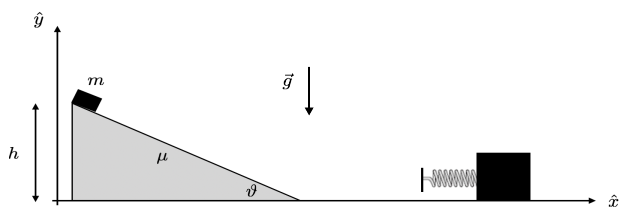


37 Esame del 16.02.2023

37.1 Esercizio 1 (16.69)

Un blocco di massa $m = 0.5\,\text{kg}$ si trova nel punto più alto di un piano inclinato alla quota $h = 2\,\text{m}$ dal suolo quando viene lasciato libero di scivolare. L'angolo di inclinazione del piano vale $\vartheta = 30^\circ$ e la superficie dove scivola il blocco è scabra ed il suo coefficiente di attrito dinamico vale $\mu = 0.2$. Una volta giunto nel punto più basso prosegue la sua corsa su un piano liscio, dove non è presente alcun attrito finchè non viene frenato da una molla di costante elastica $k = 4 \cdot 10^3\,\text{N/m}$. Calcolare: (i) il lavoro W_{att} della forza di attrito e (ii) la massima compressione della molla δ. Determinare inoltre il rapporto ρ tra la massima compressione della molla in presenza di attrito ed il suo valore nel caso in cui l'attrito sia trascurabile.

Sol. **[1]** $W_{att} = \mu\, mgh \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$ **[2]** $\delta = \sqrt{\frac{2mgh}{k}\left(1 - \mu\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)}$ **[3]** $\rho = \frac{\delta}{\sqrt{\frac{2mgh}{k}}}$



37.2 Esercizio 2 ()

Una sbarra rettilinea omogenea di lunghezza $l = 1.0\,\text{m}$ e massa $m = 3.3\,\text{kg}$ si trova in quiete su un piano orizzontale liscio. Ad un certo istante un proiettile di massa trascurabile e di quantità di moto in modulo pari a $p = 5.6\,\text{Ns}$, parallela al piano orizzontale, colpisce la sbarra in direzione perpendicolare e resta conficcato in uno dei suoi estremi. A questo punto la sbarra si mette in movimento. Calcolare (i) la velocità del centro di massa v_{cm} della sbarra; (ii) la velocità angolare ω della sbarra e (iii) l'energia cinetica K complessiva della sbarra.

Sol. **[1]** $v_{cm} = \frac{J}{m}$ **[2]** $\omega = \frac{6J}{ml}$ **[3]** $K = K_{rot} + K_{tras} = \frac{3}{2}\frac{J^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{J^2}{m}$

38 Simulazione d'esame del 25.05.2023

38.1 Esercizio 1 (16.114)

Un proiettile di massa m lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $v = 30\,\mathrm{m/s}$, giunto a metà salita, si spezza in due frammenti, uno dei quali, di massa $2/3\,m$, prosegue verticalmente verso l'alto. Trascurando l'energia rilasciata nell'esplosione, ovvero assumendo che l'esplosione sia assimilabile ad un urto elastico, calcolare: (i) la velocità del frammento più piccolo al momento dell'esplosione e (ii) dopo quanto tempo dall'esplosione questo toccherà terra.

Sol. [1] [2] [3]

38.2 Esercizio 2 (16.115)

Un lappone, complessivamente di massa $m = 80\,\mathrm{kg}$, si trova bloccato al centro di un lago gelato assimilabile ad un cerchio di raggio $R = 10\,\mathrm{m}$. Per raggiungere la riva lancia, con un angolo $\vartheta = 30^\circ$ misurato rispetto all'orizzonte, uno scarpone di massa $m_s = 2\,\mathrm{kg}$ con velocità in modulo pari a $v_0 = 6\,\mathrm{m/s}$. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico tra l'uomo e il ghiaccio vale $\mu = 10^{-5}$, calcolare:

1. la velocità acquisita dal lappone;
2. il tempo impiegato dal lappone per raggiungere la riva;
3. il valore minimo della velocità con cui deve lanciare lo scarpone, allo stesso angolo, per giungere a riva.

Sol. [1] [2] [3]

38.3 Esercizio 3 (16.165)

Un cilindro omogeneo pieno di sabbia, di massa $m_c = 200\,\mathrm{g}$ e raggio $R = 15\,\mathrm{cm}$, sta ruotando in un piano orizzontale attorno al proprio asse baricentrale con velocità angolare $\omega_0 = 20\,\mathrm{rad/s}$. Ad un certo istante una quantità $m = 5\,\mathrm{g}$ di sabbia, di dimensioni trascurabili, contenuta al suo interno, fuoriesce in direzione tangenziale. Assumendo che all'interno del cilindro la sabbia restante si ridistribuisca a simmetria cilindrica con raggio R, calcolare:

1. la velocità angolare del cilindro dopo la fuoriuscita della sabbia;
2. il lavoro speso nel processo.

Sol. [1] [2] [3]

39 Esame del 13.06.2023

39.1 Esercizio 1 (16.32)

Un oggetto di massa m è appeso al soffitto tramite una molla. Ad un certo istante, quando si trova nella posizione di equilibrio, l'oggetto si spezza improvvisamente in due frammenti di masse rispettivamente $m_1 = 2/3m$ ed $m_2 = 1/3m$. Il primo frammento di massa m_1 resta attaccato alla molla e si mette ad oscillare mentre il secondo cade a terra. Calcolare il valore dell'accelerazione massima a_{max} a cui è soggetto il frammento m_1 che resta collegato alla molla.

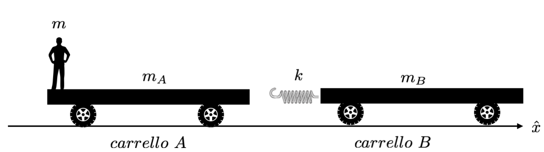
Sol. **[1]** $a_{max} = \frac{g}{2}$

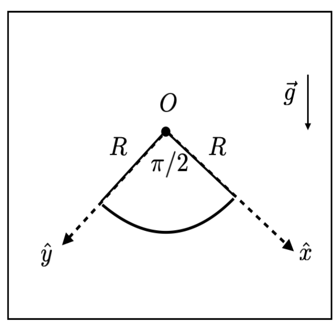
39.2 Esercizio 2 (16.111)

Due carrelli A e B, di massa rispettiva $m_A = 104\,\mathrm{kg}$ e $m_B = 128\,\mathrm{kg}$, sono posizionati come mostrato in figura, ad una certa distanza tra loro, e sono liberi di muoversi su un binario orizzontale privo di attrito. Sopra il carrello A si trova una persona di massa $m = 70\,\mathrm{kg}$ mentre sul carrello B, dal lato del carrello A, è collegata una molla di costante elastica $k = 3100\,\mathrm{N/m}$, il cui asse è allineato con il binario. Il sistema è inizialmente in quiete e la molla ha lunghezza uguale a quella a riposo pari ad $l = 0.40\,\mathrm{m}$. All'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ la persona salta giù dal carrello A, dalla parte opposta rispetto al carrello B. La velocità della persona è parallela al binario e di modulo pari a $u = 2.65\,\mathrm{m/s}$, misurata rispetto al carrello A, nell'istante immediatamente successivo al salto. Calcolare:

1. la velocità v_A del carrello A rispetto al suolo immediatamente dopo il salto;
2. il lavoro W compiuto dalla persona per saltare;
3. la compressione massima della molla δ_{max} situata sul retro del carrello B.

Sol. **[1]** $v_A = \frac{m}{m+m_A}u$ **[2]** $W = \frac{1}{2}\frac{mm_A}{m+m_A}u^2$ **[3]** $\delta_{max} = \sqrt{\frac{m_A m_B m}{(m_a+m_B)(m+m_A)}\frac{u^2}{k}}$





39.3 Esercizio 3 (16.160)

Il pendolo di un antico orologio è costituito da una piastra di metallo di massa m, densità uniforme ed avente la forma di un quarto di cerchio di raggio R, come mostrato in figura. Questa è libera di oscillare in un piano verticale rispetto al punto O. Calcolare:

1. la posizione del centro di massa, in coordinate cartesiane: $\vec{r}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm})$, della piastra metallica, misurata rispetto al punto O;
2. il momento di inerzia I_O della piastra per un asse passante per O e perpendicolare ad essa;
3. il periodo T delle piccole oscillazioni del pendolo.

Sol. **[1]** $\vec{r}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}) = \left(\frac{4}{3\pi}R, \frac{4}{3\pi}R\right)$ **[2]** $I_O = \frac{1}{2}mR^2$ **[3]** $T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi\, mR}{8\sqrt{2}mg}}$

40 Esame del 03.07.2023

40.1 Esercizio 1 (R.19)

Un razzo viene lanciato tangenzialmente alla superficie terrestre con velocità iniziale $v_0 = 9\,\mathrm{km/s}$. Assumendo che il motore del razzo resti accesso solo per un breve intervallo di tempo, questo descriverà un'orbita ellittica tangente all'equatore terrestre. Calcolare:

1. la massima distanza r_{max} da Terra a cui può arrivare;

2. la velocità $v_{max} = v(r_{max})$ raggiunta a questa distanza.

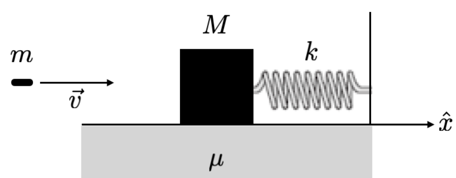
Assumere per il raggio terrestre il valore $R_T = 6.36\times10^6$ m e per la massa terrestre $M_T = 5.98\times10^{24}$ kg.

Sol. **[1]** $r_{max} = \frac{R^2 v_0^2}{2GM_T - R_T v_0^2}$ **[2]** $v_{max} = v(r_{max}) = \frac{2GM_T - R_T v_0}{R v_0}$

40.2 Esercizio 2 (16.112)

Un proiettile di massa m si muove in direzione orizzontale quando urta in modo completamente anelastico un blocco di massa M che è collegato ad una molla ideale di massa trascurabile di costante elastica k. Al momento dell'urto la molla si trova nella posizione di equilibrio. Il blocco poggia inoltre su un piano scabro il cui coefficiente di attrito vale μ, come mostrato in figura. Trascurando la compressione della molla durante l'impatto del proiettile e fino all'istante in cui questo si arresta all'interno del blocco, calcolare la massima compressione della molla δ_{max}.

Sol. **[1]** $\delta_{max} = -\frac{\mu(m+M)g}{k} + \sqrt{\frac{\mu^2(m+M)^2g^2}{k^2} + \frac{m^2v^2}{(m+M)k}}$



40.3 Esercizio 3 (16.162)

Un anello di massa m_0, raggio R e spessore trascurabile, ruota con velocità angolare ω_0, senza attrito, in un piano orizzontale attorno al suo asse si simmetria perpendicolare al piano su cui poggia. Ad un certo istante sul bordo dell'anello comincia a cadere della sabbia con un tasso costante k che si deposita sul bordo dell'anello alla distanza R dall'asse rispetto a cui sta ruotando. Assumendo che la sabbia inizi a muoversi solidalmente con l'anello non appena lo tocca, calcolare:

1. dopo quanto tempo τ la velocità angolare si è dimezzata;

2. il modulo dell'accelerazione angolare α.

Sol. **[1]** $\tau = \frac{m_0}{k}$ **[2]** $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{k}{m_0\omega_0}\omega(t)$ con $\omega(t) = \frac{m_0}{m_0+kt}\omega_0$

41 Esame del 07.09.2023

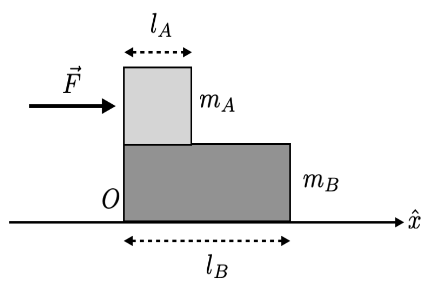
41.1 Esercizio 1 (16.232)

Un satellite artificiale di massa $m = 500\,\mathrm{kg}$ si muove su un'orbita circolare di raggio $r = 7500\,\mathrm{km}$ attorno alla Terra quando vengono accesi i motori per portarlo su una seconda orbita circolare di raggio $R = 8000\,\mathrm{km}$. Assumendo che la nuova orbita venga raggiunta in un tempo $\Delta t = 20\,\mathrm{min}$, calcolare:

1. la velocità con cui si muove quando si trova sulla prima orbita v_r e sulla seconda orbita v_R;
2. il lavoro compiuto dai motori W;
3. la potenza media P sviluppata dai motori, assumendo che il lavoro fatto nell'intervallo di tempo sia costante.

[Assumere per la massa terrestre il valore $M_T = 5.98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

Sol. **[1]** $v_r = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, $v_R = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$ **[2]** $W = \frac{GM_T}{2}\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\right)$ **[3]** $P = \frac{W}{\Delta t}$



41.2 Esercizio 2 (16.33)

Due blocchi A e B, di masse $m_A = 4.5\,\mathrm{kg}$ ed $m_B = 9.0\,\mathrm{kg}$ sono posizionati uno sopra l'altro come mostrato in figura. Le loro lunghezze sono rispettivamente $l_A = 15\,\mathrm{cm}$ ed $l_B = 30\,\mathrm{cm}$. Il coefficiente di attrito dinamico fra i due blocchi è $\mu = 0.20$, mentre non vi è attrito fra il blocco B e il pavimento orizzontale su cui poggia. I due blocchi sono inizialmente fermi. A partire da un certo istante il blocco A viene spinto orizzontalmente nel verso concorde con l'asse $\hat{x}$ da una forza $F = 22\,\mathrm{N}$, costante. Assumendo che il coefficiente di attrito statico fra i due blocchi non sia sufficiente ad evitare lo scorrimento relativo, calcolare:

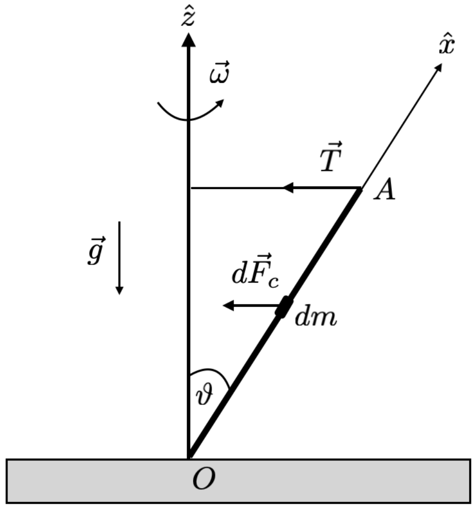
1. l'accelerazione del blocco A e del blocco B;
2. l'istante in cui il bordo destro dei due blocchi è allineato;
3. il valore minimo del coefficiente di attrito statico fra i due blocchi necessario affinchè questi si muovano all'unisono sotto l'azione della forza $\vec{F}$.

Sol. **[1]** $a_A = \frac{F}{m_A} - \mu\, g$, $a_B = \mu \frac{m_A}{m_B} g$ **[2]** $\tau = \sqrt{\frac{2(l_A - l_B)}{a_A - a_B}}$ **[3]** $\mu_s = \frac{m_B}{m_A(m_A + m_B}\frac{F}{g}$

41.3 Esercizio 3 (R.20)

Una sbarra $\overline{OA}$, di lunghezza l e massa m, ha il suo estremo O che poggia su un piano orizzontale. La sua densità lineare λ cresce linearmente con la distanza x dal punto O per il tramite di una costante c positiva: $\lambda = cx$. La sbarra è inclinata di un angolo ϑ misurato rispetto alla verticale e ruota, con velocità angolare costante ω, rispetto all'asse $\hat{z}$ verticale, come mostrato in figura. L'estremo libero A è collegato all'asse $\hat{z}$ da un filo inestensibile di massa trascurabile. Calcolare:

1. la posizione del centro di massa x_{cm};



2. il momento della forza peso M_p;

3. indicando con $d\vec{F}_c$ l'elemento infinitesimo di forza centripeta, applicata all'elemento di massa dm, ricavare il modulo del momento totale di questa forza, M_c, utilizzando come polo l'estremo O, punto di contatto della sbarra con il terreno;

4. il modulo della tensione del filo T.

Sol. **[1]** $x_{cm} = \frac{2}{3}l$, $M_p = \frac{2}{3}mgl\sin\vartheta$ **[2]** $M_c = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \cos\vartheta \sin\vartheta$ **[3]** $T = \frac{2}{3}mg\tan\vartheta + \frac{1}{2}m\omega^2 l \sin\vartheta$

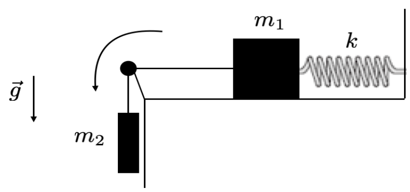
42 Esame del 25.01.2024

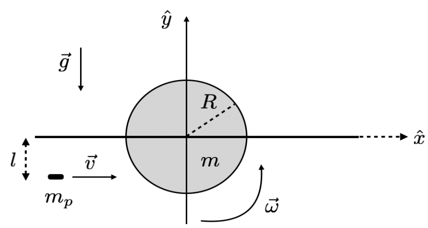
42.1 Esercizio 1 (16.54)

Un corpo di massa m si muove su un piano orizzontale, privo di attrito, soggetto alla sola azione di una molla di massa e lunghezza a riposo trascurabili e di costante elastica k. Assumendo che nella posizione iniziale la molla sia allungata di un tratto A e che il corpo inizi a muoversi all'istante di tempo $t = 0$, calcolare:

1. la potenza $P(t)$ sviluppata dalla molla in funzione di k ed A;
2. il valore della potenza per $t = T/8$ dove T è il periodo delle oscillazioni;
3. la potenza media della forza elastica su un periodo di oscillazione T.

Sol. **[1]** $P(t) = kA^2\omega \sin \omega\, t \cos \omega\, t$ **[2]** $P(T/8) = \frac{1}{2}kA^2\omega$ **[3]** $\bar{P} = 0$





42.2 Esercizio 2 (16.64)

Un blocco di massa $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ poggia su un piano liscio, privo di attrito, ed è vincolato a una molla ideale di costante elastica $k = 98\,\mathrm{N/m}$. Questo è anche collegato, mediante una carrucola ideale e priva di massa, ad un secondo blocco di massa $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, come mostrato in figura. Calcolare:

1. l'allungamento della molla nella posizione di equilibrio e la tensione del filo in questa posizione;
2. assumendo poi che la massa m_2 venga sollevata fino a riportare la molla alla sua lunghezza a riposo prima di rilasciarla nuovamente, determinare in questa condizione il periodo delle oscillazioni e l'allungamento massimo della molla.

Sol. **[1]** $x_{eq} = \frac{m_2 g}{k}$, $T = m_2 g$ **[2]** $\delta_{max} = 2x_{eq} = \frac{2m_2 g}{k}$ **[3]** $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$

42.3 Esercizio 3 (16.164)

Un disco omogeneo di massa $m = 11.0\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 49.0\,\mathrm{cm}$ può ruotare senza attriti nel piano verticale (x, y) attorno ad un asse orizzontale ortogonale al piano stesso passante per il suo centro O posto nell'origine, come mostrato in figura. Il disco è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa $m_p = 1.6\,\mathrm{kg}$ e dimensioni trascurabili si muove in moto rettilineo lungo una retta orizzontale parallela all'asse $\hat{x}$ ma posta alla distanza $l = 16.8\,\mathrm{cm}$ da questo e con velocità $v = 2.70\,\mathrm{m/s}$. Ad un certo istante urta il bordo del disco rimanendovi attaccato. Supponendo che l'asse del disco venga tenuto fermo da un supporto, che lo blocca nel suo centro, calcolare:

1. la velocità angolare del disco immediatamente dopo l'urto;
2. le componenti della variazione della quantià di moto $\Delta\vec{p}$ nell'urto del proiettile.

Assumendo invece che non via sia alcun vincolo, ricavare la velocità del centro di massa del sistema disco+proiettile immediatamente dopo l'urto.

Sol. **[1]** $\omega = \frac{2m_p}{m+2m_p}\frac{vl}{R^2}$ **[2]** $\Delta\, p_x = m_p\omega\, R \sin\vartheta - m_p v$, $\Delta\, p_y = -m_p\omega\, R\cos\vartheta$ *con* $l = R\sin\vartheta$ **[3]** $v_{cm} = \frac{m_p v}{m+m_p}$

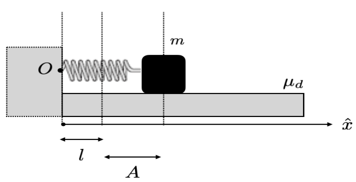
43 Esame del 16.02.2024

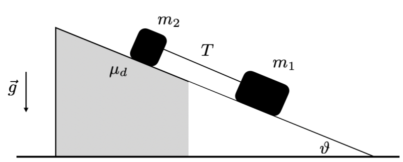
43.1 Esercizio 1 (16.27)

Una molla ideale, avente massa nulla, costante elastica $k = 19.6\,\text{N/m}$ e lunghezza a riposo $l = 40\,\text{cm}$, è poggiata su una guida orizzontale, come mostrato in figura. Un estremo è fissato nel punto O ad una parete verticale, mentre all'altro estremo è agganciato un corpo di massa $m = 100\,\text{g}$. La guida su cui il corpo si può muovere è scabra ed il suo coefficiente d'attrito dinamico vale $\mu_d = 0.5$. Inizialmente la molla è allungata di un tratto $A = 30\,\text{cm}$. Quando viene lasciata libera, il corpo di massa m inizia ad oscillare. Calcolare:

1. la distanza minima x_{min} dal punto O raggiunta dal corpo di massa m;
2. la velocità con cui m passa la seconda volta per il punto a distanza l. Assumere che il coefficiente di attrito statico tra la guida ed il corpo sia tale da permettere alla massa m di ripartire, sotto l'azione della molla, dopo essersi fermata.

Sol. **[1]** $x_{min} = \left(\frac{\mu\, mg}{k} + l\right) - \sqrt{\left(\frac{\mu\, mg}{k} + l\right)^2 + \left[A^2 - l^2 - \frac{2\mu\, mg}{k}(l + A)\right]} = 0.15\,\text{m}$ **[2]** $v = \sqrt{\frac{k}{m}(l - x_{min})^2 - 2\mu\, g(l - x_{min})} = 3.13\,\text{m/s}$





43.2 Esercizio 2 (16.30)

Due corpi, rispettivamente di massa $m_1 = 3\,\text{kg}$ ed $m_2 = 1\,\text{kg}$, sono posti su un piano inclinato di un angolo $\vartheta = \pi/6$ rispetto all'orizzonte e sono legati fra loro da una fune ideale, come mostrato in figura. Il corpo di massa m_1 è libero di scorrere senza attrito sul piano inclinato, mentre fra il corpo di massa m_2 e il piano c'è attrito ed il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d = 0.3$. Calcolare:

1. l'accelerazione del corpo di massa m_2 ed il valore della tensione della fune.
2. Assumendo che ad un certo istante il sistema dei due corpi si stia muovendo, lungo il piano inclinato ma verso l'alto, con velocità v_0, calcolare il valore del modulo della forza $\vec{F}$ costante, che deve essere applicata alla massa m_2, in direzione parallela al piano, affinchè il sistema continui a muoversi alla velocità v_0.

Sol. **[1]** $a = g\sin\vartheta - \mu\frac{m_2}{m_1+m_2}g\cos\vartheta = 4.27\,\text{m/s}^2$; $T = m_1(g\sin\vartheta - a) = 1.91\,\text{N}$ **[2]** $F = (m_1+m_2)g\sin\vartheta + \mu\, m_2 g\cos\vartheta = 22.17\,\text{N}$

43.3 Esercizio 3 (16.159)

Un'asta omogenea di massa $m = 1\,\text{kg}$ e lunghezza $l = 1\,\text{m}$, si trova appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Questa è incernierata al piano nel suo punto centrale O. Ad un certo istante un proiettile di massa $m_p = 0.1\,\text{kg}$ che si muove nel piano orizzontale con velocità di modulo $v_p = 10\,\text{m/s}$, diretta perpendicolarmente all'asta, la colpisce ad un estremo, restandovi conficcato. Subito dopo l'urto, il sistema si mette in rotazione, ma rallenta a causa di un attrito fra cerniera e sbarra, che esercita un momento frenante costante, di modulo M_{att}. Tutto il processo avviene nel piano orizzontale. Determinare

1. il modulo della velocità angolare subito dopo l'urto del proiettile;
2. il valore di M_{att} sapendo che il sistema si ferma dopo aver compiuto 2 giri.

Sol. **[1]** $\omega = \frac{2m_p v_p}{\left(\frac{1}{3}m + m_p\right)l}$ **[2]** $M_{att} = \frac{m_p^2 v_p^2}{8\pi\left(\frac{1}{3}m + m_p\right)} = 0.092\,\text{N}$