Analisi II - 2020/21 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 21 gennaio 2022

Esercizio 1. [4pt] Sia dato il campo scalare

$$f(x,y) = (\sin x + \cos y)^2 + \log(xy^2)$$

(a) Determinare e disegnare il dominio di f, specificando se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato, compatto.

(b) Discutere la differenziabilità di f nel punto $(\pi, 2\pi)$; determinare $\partial_v f(\pi, 2\pi)$, con $v = (1, -1)$, e, se possibile, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(\pi, 2\pi, 1 + \log(4\pi^3))$.

Soluzione.

(a) Il dominio di f è l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \neq 0\}$. Si tratta di un insieme aperto, non chiuso, non limitato, non compatto.

(b) La funzione f è derivabile in tutto il dominio e le sue derivate parziali sono

$$\partial_x f = 2(\sin x + \cos y)\cos x + \frac{y^2}{xy^2},$$

$$\partial_y f = -2(\sin x + \cos y)\sin y + \frac{2xy}{xy^2}.$$

Tali derivate sono anche continue in un intorno di $(\pi, 2\pi)$ (per esempio nell'intorno $B((\pi, 2\pi), \pi/2) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\pi)^2 + (y-2\pi)^2 < \pi/2\}$), quindi è differenziabile in $(\pi, 2\pi)$.
Inoltre, si ha:

$$\partial_x f(\pi, 2\pi) = -2 + \frac{1}{\pi}, \qquad \partial_y f(\pi, 2\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

Per la formula del gradiente, si ha $\partial_v f(\pi, 2\pi) = (-2 + 1/\pi, 1/\pi) \cdot (1, -1) = -2$. Il piano tangente è dato da

$$z = 1 + \log(4\pi^3) + \left(-2 + \frac{1}{\pi}\right)(x - \pi) + \frac{1}{\pi}(y - 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad z = \left(\frac{1}{\pi} - 2\right)x + \frac{y}{\pi} + \log(4\pi^3) + 2\pi - 2.$$

Esercizio 2. [3 pt] Calcolare, o dimostrare che non esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^4)}{x^3 + y^6}.$$

Soluzione. Il limite non esiste, infatti, detta $f(x,y) = \frac{\sin(xy^4)}{x^3+y^6}$, si ha:

$$f(x, 0) = 0 \longrightarrow 0 \text{ per } x \to 0;$$

$$f(y^2, y) = \frac{\sin(y^6)}{2y^6} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ per } y \to 0.$$

Esercizio 3. [3 pt] Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo scalare di classe C^1 e g un secondo campo scalare definito da

$$g(x,y) = \sin x \cdot f(x^2, xe^y) + y^2x^3.$$

Determinare (usando la chain rule) l'espressione di $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$; quindi calcolare $\dfrac{\partial g}{\partial x}(\pi, 0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(\pi, 0)$ sapendo che $f(\pi^2, \pi) = -1$.
Soluzione. Dette (u,v) le variabili di f, si ha, per la regola della catena, che $g_x(x,y) = \cos x\, f(x^2, xe^y) + \sin x\, \left[2x\, f_u(x^2, xe^y) + e^y\, f_v(x^2, xe^y)\right] + 3x^2y^2$,
$g_y(x,y) = \sin x\, x\, e^y\, f_v(x^2, xe^y) + 2x^3y$; da cui segue che $g_x(\pi, 0) = -1 \cdot f(\pi^2, \pi) = 1$; $g_y(\pi, 0) = 0$.

Esercizio 4. [4 pt] Sia $f(x,y) = 6xy - 3x^2 - 2y^2$.

(a) Determinare, nel punto $(0,1)$ la direzione di massima crescita.

(b) Determinare e studiare la natura dei punti critici di f.

(c) Dimostrare che f non ammette massimi e minimi assoluti.

Soluzione. (a) La direzione di massima crescita coincide con quella del gradiente. Si ha $\nabla f(x,y) = (6y - 6x, 6x - 4y)$, da cui $\nabla f(0,1) = (6,-4)$ (il versore della direzione e' $\frac{(6,-4)}{\sqrt{52}}$).
(b) Essendo f di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ i suoi punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 6y - 6x = 0, \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

ovvero la sola origine $(0,0)$. Per studiarne la natura calcoliamo la matrice Hessiana in tale punto

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

essendo il suo determinante strettamente negativo deduciamo che l'origine è un punto di sella.
(c) f non ammette massimi e minimi assoluti in quanto, ad esempio,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = -\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x,x) = +\infty.$$

Si può ottenere la stessa conclusione osservando che se ci fossero massimi e minimi assoluti questi dovrebbero essere anche massimi e minimi locali e quindi (essendo il campo di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$) dovrebbero essere dei punti critici. L'unico punto critico è $(0,0)$ che è un punto di sella.

Esercizio 5. [4 pt] Sia data l'equazione

$$x^3 + 2xz^2 - x^2y + \log\left(\frac{z}{3}\right) = 8.$$

Dire se, in un intorno del punto $P_0(2,9,3)$, l'equazione definisce implicitamente una funzione $z = \varphi(x,y)$ e, se possibile, calcolare $\nabla\varphi(2,9)$.

Soluzione. Sia $f(x,y,z) = x^3 + 2xz^2 - x^2y + \log\left(\frac{z}{3}\right)$. Osserviamo che il punto P_0 soddisfa l'equazione, infatti $f(P_0) = 8$; la funzione f è C^1 sul suo dominio: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z > 0\}$; inoltre,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4xz + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = \frac{73}{3} \neq 0.$$

Il Teorema di Dini assicura quindi che l'equazione definisce implicitamente una funzione $z = \varphi(x,y)$ in un intorno di P_0. Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2z^2 - 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = -6,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = -4,$$

si ha che $\nabla\varphi(2,9) = -3/73(-6,-4) = (18/73, 12/73)$.

Esercizio 6. [4 pt] Calcolare

$$\iint_A \frac{2x - y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$

con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ y \leq x,\ y \geq 2x - 2,\ y \geq 0\}$.
Soluzione: Passando a coordinate polari, l'insieme A diventa

$$A' = \left\{(\rho,\vartheta) : 1 \leq \rho \leq \frac{2}{2\cos\vartheta - \sin\vartheta},\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Si ha quindi che

$$
\begin{aligned}
\iint_A \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \iint_{A'} \frac{2\rho\cos\vartheta-\rho\sin\vartheta}{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_1^{\frac{2}{2\cos\vartheta-\sin\vartheta}} (2\cos\vartheta-\sin\vartheta)\,d\rho \\
&= \int_0^{\pi/4} (2\cos\vartheta-\sin\vartheta)\left(\frac{2}{2\cos\vartheta-\sin\vartheta}-1\right) d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/4} (2-2\cos\vartheta+\sin\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}+1-\frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 7. [4 pt] Calcolare il volume dell'insieme $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\geq x^2,\ y\leq 2-x,\ x\geq 0,\ z\geq 0,\ y\leq 4-x-z\}$.
Soluzione. Il volume di D è dato da $\iiint_D dx\,dy\,dz$. Si ha che la proiezione di D sul piano (x,y) è l'insieme $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\leq y\leq 2-x,\ x\geq 0\}$. Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dy \int_0^{4-x-y} dz \\
&= \iint_A (4-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (4-x-y)\,dy \\
&= \int_0^1 \left[(4-x)(2-x-x^2)-\frac{1}{2}\left((2-x)^2-x^4\right)\right] dx = \frac{191}{60}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 8. [4 pt] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie seguente:

$$
\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),
$$

al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$.

Soluzione. La serie è a termini positivi per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$. Quindi ci limitiamo a studiare la convergenza semplice.
Caso $\alpha>0$. Osservando che $\arctan t\to 0$ per $t\to 0$ si ha che il termine generale è infinitesimo (notiamo che $t=\frac{1}{n^\alpha}\to 0$ per $n\to\infty$). Usiamo quindi il teorema del confronto asintotico per cui

$$
\arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{per} \quad n\to\infty
$$

da cui il comportamento della serie è analogo a quello della serie armonica generalizzata $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$. Da cui si ottiene che la serie converge per $a>1$, e diverge per $0<a\leq 1$.
Caso $\alpha\leq 0$. Osserviamo che se $\alpha\leq 0$ il termine generale non è infinitesimo, dunque la serie è divergente.