1 Alcune Proprietà della Trasformata di Fourier

Questi esempi riguardano lo studio delle proprietà della trasformata di Fourier (TF) $\mathcal{F}_k\{f\}$, a partire di quelle di f. Prima di guardare i esempi, è importante sottolineare alcuni aspetti.

Singolarità e Discontinuità Eliminabili.

Consideriamo la funzione

$$g_1(x) = \frac{\cos(\pi x)}{(x^2 + x - 3/4)}\,.$$

Formalmente dovremmo dire che non è definita per $x_1 = 1/2,\;\; x_2 = -3/2$. Ciò nonostante, visto che i limiti per $x \to x_1$ e $x \to x_2$ esistono, noi possiamo definire una funzione continua per $x = x_1, x_2$ a partire da questi limiti:

$$f(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)}{x^2 + x - \frac{3}{4}} & , \quad x \notin \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\} \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2} & , \quad x = \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & , \quad x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

I punti x_1, x_2 sono nominate punti di singolarità eliminabili, perchè siamo stati riusciti a definire una funzione **continua** per $x = x_1, x_2$ usando

$$f(x_i) = \lim_{x \to x_i} g_1(x)\,, \quad i = 1, 2 \qquad \text{(Eq. 1)}$$

Le funzioni g_1 e f hanno le estese proprietà sotto il segno di integrazione perchè sono uguali per tutti i reali trane due punti isolati. Possiamo anche dire che $\mathcal{F}_k\{g_1\} = \mathcal{F}_k\{f\}$, perchè la TF viene definita come un integrale. Questo ci permette di studiare f e calcolare $\mathcal{F}_k\{f\}$ sapendo che tutti i risultati valgono anche per g_1 e $\mathcal{F}_k\{g_1\}$.

La stesa argomentazione vale nel caso di una funzione che abbia delle discontinutà eliminabili, ciò è, una funzione per cui i limiti nei punti di discontinuità esistono. Ad esempio

$$g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)}{x^2 + x - \frac{3}{4}} & , \quad x \notin \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\} \\[2ex] 0 & , \quad x = \frac{1}{2} \\[2ex] 3 & , \quad x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

non è continua per $x = x_1, x_2$ però il limite

$$f(x_i) = \lim_{x \to x_i} g_2(x)\,, \quad i = 1, 2 \qquad \text{(Eq. 2)}$$

esiste per $x = x_1, x_2$. Si nota che la f della (Eq. 1) e della (Eq. 2) sono la stesa funzione anche se $g_1 \neq g_2$. Formalmente si dice che $g_1 = g_2 = f$ quasi ovunque[1]. Per funzioni con più singolarità (discontinuità) eliminabili, anche un numero infinito numerabile, possiamo sempre definire una funzione f che sia continua per questi punti, basta che i limiti esistano.

In quanto segue, si presupone che tutte le singolarità e discontinuità eliminabili di una funzione g, sono stati "rimosse" come nelle (Eq.1) e (Eq.2), e usiamo f per fare i test descriti, sapendo che le nostre conclusione valgono anche per la funzione originale g.

[1]Noi non provediamo una definizione formale di "quasi ovunque". Quello è un concetto che appartiene alla teoria della misura

Alcune Proprietà della TF di Funzioni Sommabili .

Data una funzione di variable reale $f(x)$, è possibile dedurre alcune proprietà della sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k\{f\}$ prima di calcolarla. Un caso de molta importanza è quello delle funzioni sommabili. In pratica, una funzione è sommabile se la integrale del suo valore assoluto, su tutti i reali, esiste ed è finita. In questo caso, entrambe le integrali di $f(x)$ su tutti i reali e la integrale che definisce la TF esistono. Alcune delle proprietà importanti della trasformata di Fourier $\mathcal{F}_k\{f\}$ di $f(x)$ sommabile sono[2]:

1. Se $f(x)$ è sommabile
   (a) $\mathcal{F}_k\{f\}$ è continua (per tutti i valori reali di k)
   (b) $\mathcal{F}_k\{f\}$ è limitata
   (c) $\lim_{k\to\pm\infty} \mathcal{F}_k\{f\} = 0$
2. Se $f(x)$ è sommabile e tutte $xf(x)\,,\ x^2 f(x)\,,\ \ldots\,,\ x^n f(x)$ sono sommabili
   (a) $\mathcal{F}_k\{f\}$ è derivabile $n-$volte (derivabile significa per tutti i valori reali di k)
   (b) $\mathcal{F}_k\{x^m f\} = i^m \dfrac{d^m}{d\,k^m}\mathcal{F}_k\{f\}$, per $m = 1, 2, \ldots, n$
3. Se $f(x)$ è sommabile e continua, e tutte le derivate $f^{(1)}(x)\,,\ f^{(2)}(x)\,, \ldots\,, f^{(n-1)}(x)$ sono sommabile e continue, e $f^{(n)}(x)$ è sommabile.N.B: basta che $f^{(n)}(x)$ sia definitita quasi ovunque, cioè, la derivata $f^{(n)}(x)$ potrebbe non esistere in un insieme di punti di misura zero (ad esempio, un numero finito di punti isolati).
   (a) $\mathcal{F}_k\{f\} = \dfrac{(-i)^m}{k^m}\mathcal{F}_k\{f^{(m)}\}$, per $m = 1, 2, \ldots, n$

   Se (3a) vale, possiamo dire che $\mathcal{F}_k\{f\}$ è $o(1/k^n)$ (va zero più velocemente di $1/k^n$) per $k \to \pm\infty$.

Propietà della antitrasformata di una funzione sommabile.

Se invece abbiamo una funzione nello spazio k, $F(k)$, possiamo derrure alcune proprietà della sua antitrasformata

$$f(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\{F\}\,,$$

usando le stese proprietà della sezione precedente, con le sostituzioni:

$$i \to -i\,, \qquad x \leftrightarrow k\,, \qquad f \leftrightarrow F\,, \qquad \mathcal{F}_k\{\} \to \mathcal{F}_x^{-1}\{\}\,.$$

[2] come descrito nella sezione precedente, presuponiamo che le singolarità/discontinuità eliminabili sono già state rimosse.

Esercizio 1.1

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

1. $f(x)$ è una funzione sommabile, quindi abbiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ esiste ed è continua, limitata e va a zero per $k \to \pm\infty$.

2. $x^n f(x)$ è una funzione sommabile $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, quindi abbiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ è infinitamente derivabile e vale

$$\mathcal{F}_k\{x^n f\} = i^n \frac{d^n}{d\,k}\mathcal{F}_k\{f\} \ , \forall\, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Possiamo dire quindi che $\mathcal{F}_k\{f\}$ è infinitamente derivabile. Si nota che una funzione derivable è continua, quindi una funzione infinitamente derivabile ha tutte le derivate continue.

3. $f(x)$ è sommabile ma non è continua quindi non possiamo usare (3a) per dire niente sul andamento di $\mathcal{F}_k\{f\}$ per $k \to \pm\infty$. Si nota che da (1) sapiamo già che $\mathcal{F}_k\{f\} \to 0$ per $k \to \pm\infty$.

La TF di $f(x)$ è

$$\mathcal{F}_k\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} \ ,$$

che soddisfa tutte le proprietà previste. La funzione $\mathcal{F}_k\{f\}$ è ordine $O(1/k)$ per $k \to \pm\infty$, però noi non potevamo usare (3a) per dedurlo.

Esercizio 1.2

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad , & 1 < |x| \end{cases}$$

1. $f(x)$ è una funzione sommabile, quindi abbiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ esiste ed è continua, limitata e va a zero per $k \to \pm\infty$.

2. $x^n f(x)$ è una funzione sommabile $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, quindi abbiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ è infinitamente derivabile e vale

$$\mathcal{F}_k\{x^n f\} = i^n \frac{d^n}{d\,k}\mathcal{F}_k\{f\} \;, \forall\, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1}$$

Possiamo dire quindi che $\mathcal{F}_k\{f\}$ è infinitamente derivabile. Si nota che una funzione derivable è continua, quindi una funzione infinitamente derivabile ha tutte le derivate continue.

3. $f(x)$ è sommabile e continua e la sua derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 < x < 0 \\ -1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad 1 < |x| \end{cases}$$

è sommabile (anche se non è definita per $x = -1, 0, 1$), quindi (3a) vale per $n = 1$. Quindi sapiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ è $o(1/k)$ (va a zero più velocemente di $1/k$) per $k \to \pm\infty$.

La TF di $f(x)$ è

$$\mathcal{F}_k\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1-\cos k}{k^2}\right) ,$$

che soddisfa tutte le proprietà previste.

Esercizio 1.3

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & , \quad |x| < 1 \\ \\ 0 & , \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

1. Anche se $f(x)$ non è limitata è sommabile, perchè le singolarità per $x \to 1^-$ e $x \to -1^+$ sono integrabile. Quindi abbiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ esiste ed è continua, limitata e va a zero per $k \to \pm\infty$.

2. $x^n f(x)$ è una funzione sommabile $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, quindi abbiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ è infinitamente derivabile e vale

$$\mathcal{F}_k\{x^n f\} = i^n \frac{d^n}{d\,k} \mathcal{F}_k\{f\} \; , \forall\, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2}$$

Possiamo dire quindi che $\mathcal{F}_k\{f\}$ è infinitamente derivabile. Si nota che una funzione derivable è continua, quindi una funzione infinitamente derivabile ha tutte le derivate continue.

3. $f(x)$ è sommabile ma non è continua. Quindi non possiamo usare (3a) per redurre il andmento di $\mathcal{F}_k\{f\}$ per $k \to \pm\infty$.

IMPORTANTE: Il calcolo della TF di quest a f non è facile da fare con quello imparato nel corso. Questo esempio si intende solo per dimostrare che ci sono casi dove il andamento della TF va a zero però non è al meno ordine $O(1/k)$ per $k \to \pm\infty$.

La TF di $f(x)$ è una funzione di Bessel

$$\mathcal{F}_k\{f\} = J_0(k)\,,$$

che ha un andamento asintotico

$$J_0(k) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\,, \text{ per } k \to \pm\infty\,.$$

$J_0(k)$ soddisfa tutte le proprietà previste. Questo un esempio di una TF che va zero per $k \to \infty$ anche se non è al meno ordine $O(1/k^n)$, per $n \in \mathbb{Z}^+$. Infatti non siamo stati riusciti a dire che $\mathcal{F}_k\{f\}$ era $o(1/k)$.

Esercizio 1.4*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)^2}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. $f(x)$ è sommabile, perchè è limitata e

$$\lim_{x\to\pm\infty} x f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0\,. \tag{3}$$

Quindi abbiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ esiste ed è continua, limitata e va a zero per $k \to \pm\infty$.

2. $x^n f(x)$ non è una funzione sommabile per nessun valore di $n \in \mathbb{Z}^+$ perchè $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$, il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\,(x^n f(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} \ x^{n-1}\,\sin^2(x) \tag{4}$$

è indeterminato. Quindi non possiamo dire niente sulla derivabilità di $\mathcal{F}_k\{f\}$.

3. Prima di usare (3a), dobbiamo anche capire quante volte la nostra funzione $f(x)$ è derivabile e se quelle derivate sono sommabili.

Dalla sua definizione, $f(x)$ è analitica (nel senso di funzioni di variabile reale): per $x \neq 0$, $\sin^2(x)$ e $1/x^2$ sono analitiche quindi $f(x)$ è analitica per $x \neq 0$; per $x = 0$, $f(x)$ è una costante ed è anche continua. Quindi $f(x)$ è una funzione analitica (per tutti i valori reali di x). La sua analiticità per tutti i reali, significa che $f(x)$ è infinitamente derivabile con $f^{(n)}(x)$ regolari per tutti valori di x.

Per usare (3a), solo ci resta controllare il comportamento delle derivate per $x \to \pm\infty$ e verificare i valori di n per cui

$$\lim_{x\to\pm\infty} x f^{(n)}(x) = 0.$$

Per $x \to \pm\infty$, le derivate di $\sin^2(x)$ sono ordine $O(1)$ perchè sono sempre polinomi di $\sin(x)$ e $\cos(x)$. Le derivate di $1/x^2$ portando sempre un potenza in più di x nel denominatore (quindi termini che vanno a zero più velocemente di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$). Dalla regola della derivata del prodotto di due funzioni, questo significa dopo ogni derivata, avremo un termine dominante della forma $P(\sin x, \cos x)/x^2 = O(1/x^2)$, dove il numeratore è un polinomio di $\sin(x)$ e $\cos(x)$. Quindi il termine dominante della derivata n della nostra funzione $f(x)$ è ordine $O(1/x^2)$ per $x \to \pm\infty$, quindi tutte le derivate sono sommabili. Verifichiamo questo esplicitamente per le prime tre derivate

$$\begin{aligned} \text{per } x \to \pm\infty, \qquad f^{(1)}(x) &\sim \frac{2\sin(x)\cos(x)}{x^2}\,, \\ f^{(2)}(x) &\sim \frac{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)}{x^2}\,, \\ f^{(3)}(x) &\sim -\frac{8\sin(x)\cos(x)}{x^2}\,. \end{aligned}$$

Sapiamo quindi che (3a) vale $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ $\mathcal{F}_k\{f\}$ e

$$\lim_{k\to\pm\infty} k^n \mathcal{F}_k\{f\} = 0\,, \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}^+\,.$$

La TF di $f(x)$ è

$$\mathcal{F}_k\{f\} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{8}}(2-|k|) & , \quad |k| \leq 2 \\ 0 & , \quad |k| > 2 \end{cases}$$

Si possono verificare tutte le proprietà previste. In particolare, si nota che la funzione $\mathcal{F}_k\{f\}$, anche se è continua, non è derivabile perchè la derivata per $k=0$ non esiste.

Esercizio 1.5*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^3(x)}{x^3} & , \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

1. $f(x)$ è sommabile, perchè è limitata e

$$\lim_{x\to\pm\infty} x f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} = 0\,. \tag{5}$$

Quindi abbiamo che $\mathcal{F}_k\{f\}$ esiste ed è continua, limitata e va a zero per $k \to \pm\infty$.

2. $x^n f(x)$ è una funzione sommabile per $n = 1$ perchè è limitata al finito e il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\,(x^n f(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-2}\sin^3(x) = 0\,,\ \text{per } n = 1. \tag{6}$$

Per $n > 1$ il limite è indeterminato. Quindi possiamo usare (2b) per dire che $\mathcal{F}_k\{f\}$ e derivabile una volta però non possiamo dire niente su altre derivate.

3. La discusione per il essempio precedente vale anche per questa funzione $f(x)$. Solo cambia il andamento asintotico che in questo caso e $O(1/x^3)$ per tutte le derivate. Verifichiamo questo per le primertre derivate di $f(x)$:

$$\text{per } x \to \pm\infty, \qquad \begin{aligned} f^{(1)}(x) &\sim \frac{3\sin^2(x)\cos(x)}{x^3}\,, \\ f^{(2)}(x) &\sim \frac{6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x)}{x^3}\,, \\ f^{(3)}(x) &\sim \frac{6\cos^3(x) - 21\sin^2(x)\cos(x)}{x^3}\,. \end{aligned}$$

Come nel esempio precedente $f(x)$ è tutte le sue derivate sono sommabili. Sapiamo quindi che (3a) vale $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$ $\mathcal{F}_k\{f\}$ e

$$\lim_{k\to\pm\infty} k^n \mathcal{F}_k\{f\} = 0\,, \qquad \forall\ n \in \mathbb{Z}^+\,.$$

La TF di $f(x)$ è

$$\mathcal{F}_k\{f\} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,(3 - k^2) & , \quad |k| < 1 \\ \\ \dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(3 - |k|)^2 & , \quad 1 \leq |k| \leq 3 \\ \\ 0 & , \quad |k| > 3 \end{cases}$$

che soddisfa tutte le proprietà previste. È interesante vedere che la funzione è derivabile una volta. La seconda derivata non esiste per $k \in \{-3, -1, 1, 3\}$ quindi $\mathcal{F}_k\{f\}$ non è derivabile due volte.