Corso di Studi in Fisica

Soluzione della prova scritta di Analisi III del 28 novembre 2016

Esercizio 1 (punti 6). Si consideri la seguente serie di potenze complesse:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-3n}{3n+1}\right)^{n^2} (z+i)^n.$$

a) Si calcoli il raggio di convergenza della serie.

b) Si determini il cerchio (aperto) di convergenza e gli insiemi in cui la serie converge uniformemente.

c) Si dica se la serie converge in $z = 2$.

Soluzione. a) Usando il test della radice risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2-3n}{3n+1}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{3n+1}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\log\left(1-\frac{3}{3n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{3n}{3n+1}} = e^{-1}.$$

Pertanto, il raggio di convergenza della serie è $\rho = e$.
b) La serie converge assolutamente nel cerchio aperto

$$B_e(-i) = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < e\}.$$

Inoltre, per ogni fissato $r \in (0, e)$, converge uniformemente in

$$\overline{B}_r(-i) = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| \leq e\}.$$

c) Poiché $|2+i| = \sqrt{5} < e$, la serie converge assolutamente in $z = 2$.

Esercizio 2 (punti 5). Utilizzando il teorema della divergenza, si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = (x^3, z, yz)$$

uscente dal solido

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4-x-y\}.$$

Soluzione. Il campo $\bar{F}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e C è un dominio regolare, dunque possiamo applicare il teorema della divergenza. Risulta che div $\bar{F}(x,y,z) = 3x^2 + y$. Denotando con

D_2 il cerchio di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio 2, il flusso uscente richiesto è

$$
\begin{aligned}
\Phi_e &= \iiint_C \operatorname{div} \bar{F}(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_C (3x^2+y)\, dxdydz \\
&= \iint_{D_2} (3x^2+y)\, dxdy \int\int_0^{4-x-y} dz = \iint_{D_2} (3x^2+y)(4-x-y)\, dxdy \\
&= \iint_{D_2} \left(12x^2+4y-3x^3-xy-3x^2y-y^2\right) dxdy
\end{aligned}
$$

$$
= \int_0^2\int_0^{2\pi}\left(12\rho^3\cos^2\theta+4\rho^2\sin\theta-3\rho^4\cos^3\theta-\rho^3\sin\theta\cos\theta-3\rho^4\sin\theta\cos^2\theta-\rho^3\sin^2\theta\right) d\theta d\rho
$$

$$
= 12\int_0^2 \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\rho + 4\int_0^2 \rho^2\, d\rho\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta - 3\int_0^2\rho^4\, d\rho\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\, d\theta
$$

$$
-\int_0^2\rho^3\, d\rho\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta - 3\int_0^2\rho^4\, d\rho\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta - \int_0^2\rho^2\, d\rho\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = 32\pi.
$$

Esercizio 3 (punti 7). Sia data la forma differenziale

$$
\omega_\alpha(x,y,z) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2\alpha xz}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{2yz}{x^2+y^2} - \alpha\right) dy + \left(e^z + \log(x^2+y^2)\right) dz
$$

dipendente dal parametro reale α.

a) Determinare il dominio D_α di ω_α.

b) Determinare i valori di α per i quali ω_α è chiusa.

c) Verificare che per tali valori la forma è anche esatta e calcolarne la primitiva che si annulla in $(1,0,0)$.

d) Per i valori di cui ai punti b) e c) calcolare $\int_{\bar{\gamma}} \omega$ dove

$$
\bar{\gamma}(t) = (e^{t^2}-1, t^5, t), \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].
$$

Soluzione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $D_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\}$, ovvero $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse z.
b) La forma è chiusa se e solo se per ogni $(x,y,z) \in D_\alpha$ valgono le seguenti condizioni:

$$
\begin{cases}
\partial_x F_2 = \partial_y F_1 \\
\partial_x F_3 = \partial_z F_1 \\
\partial_y F_3 = \partial_z F_2
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
-\frac{4xyz}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4\alpha xyz}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{2x}{x^2+y^2} = -\frac{2\alpha x}{x^2+y^2} \\
\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2}
\end{cases}
\Leftrightarrow \alpha = -1.
$$

Poiché il dominio D_α non è semplicemente connesso, non possiamo concludere che per $\alpha = -1$ la forma differenziale è anche esatta. Dobbiamo provare a calcolarne una primitiva U. Usando il metodo delle integrazioni parziali siamo ridotti a risolvere il sistema

$$
\begin{cases}
\partial_x U = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \frac{2xz}{x^2+y^2} \\
\partial_y U = \frac{2yz}{x^2+y^2} + 1 \\
\partial_z U = e^z + \log(x^2+y^2)
\end{cases}.
$$

Dalla terza equazione ricaviamo che

$$
U(x,y,z) = e^z + z\log(x^2+y^2) + h(x,y).
$$

Derivando tale funzione rispetto a y e sostituendo nella seconda equazione si ottiene:

$$\frac{2yz}{x^2+y^2} + \partial_y h(x,y) = \frac{2yz}{x^2+y^2} + 1,$$

da cui segue che $h(x,y) = y + k(z)$, ovvero

$$U(x,y,z) = e^z + z\log(x^2+y^2) + y + k(x).$$

Derivando questa funzione rispetto a x e sostituendo nella prima equazione, si ricava infine

$$\frac{2xz}{x^2+y^2} + k'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{2xz}{x^2+y^2},$$

da cui segue che $k(x) = -\sqrt{x^2+1} + c, c \in \mathbb{R}$. Pertanto, ω è anche esatta nel suo dominio e la sua generica primitiva di ω è:

$$U(x,y,z) = e^z + z\log(x^2+y^2) + y - \sqrt{x^2+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo che $U(1,0,0) = 0$, si ottiene $c = \sqrt{2} - 1$.
d) Poiché la forma è esatta, si ha che:

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega = U(\bar{\gamma}(1)) - U(\bar{\gamma}(\frac{1}{2})) = U(e-1,1,1) - U\left(e^{\frac{1}{4}} - 1, \frac{1}{32}, \frac{1}{2}\right)$$
$$= \log(e^2+e+2) - \sqrt{e^2+e+2} + e + 1 - \frac{1}{2}\log\left((e^{\frac{1}{4}}-1)^2 + \frac{1}{(32)^2}\right) - \sqrt{1+(e^{\frac{1}{4}}-1)^2} + e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{32}.$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(x^2y, yz, y\right).$$

a) Calcolare, usando la definizione di flusso, il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie parametrica $\bar{r}(u,v) = (v, -u, uv)$, $(u,v) \in D$, dove

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3}|u| \le v \le \sqrt{4-u^2}\}.$$

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

c) La superficie $\bar{r}$ è regolare?

Soluzione. Si ha:

$$\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2y & yx & y \end{vmatrix} = (1-y, 0, x^2).$$

Inoltre, vale $\bar{r}_u(u,v) = (0,-1,v), \bar{r}_v(u,v) = (1,0,u)$ da cui segue che

$$(\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v)(u,v) = (-u, v, 1).$$

Pertanto il flusso richiesto è dato da:

$$\Phi = \iint_D (1+u, 0, -v^2) \cdot (-u, v, 1)\, dudv = \iint_D (-u - u^2 - v^2)\, dudv$$
$$= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-\rho^2\cos\theta - \rho^3)\, d\theta d\rho - \int_0^2 \rho^2\, d\rho \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\theta\, d\theta - \frac{\pi}{3}\int_0^2 \rho^3\, d\rho = 0 - \left[\frac{\pi}{12}\rho^4\right]_0^2 = -\frac{4}{3}\pi.$$

b) Osserviamo che $+\partial D = \bar\gamma_1 \cup \bar\gamma_2 \cup \bar\gamma_3$, dove $\bar\gamma_1(t) = (t, \sqrt{3}t), t \in [0,1]$, $\bar\gamma_2(t) = (2\cos t, 2\sin t), t \in [\pi/3, 2\pi/3]$, $\bar\gamma_3(t) = (t, -\sqrt{3}t), t \in [-1, 0]$. Pertanto, il trasformato mediante $\bar r$ di D è dato dall'unione delle seguenti curve:

$$\bar r \circ \bar\gamma_1(t) = (\sqrt{3}t, -t, \sqrt{3}t^2), \qquad t \in [0,1],$$

$$\bar r \circ \bar\gamma_2(t) = (2\sin t, -2\cos t, 4\cos t \sin t), \qquad t \in [\pi/3, 2\pi/3],$$

$$\bar r \circ \bar\gamma_3(t) = (-\sqrt{3}t, -t, -\sqrt{3}t^2), \qquad t \in [-1, 0].$$

Pertanto, per il teorema di Stokes, il flusso richiesto è uguale a

$$\begin{aligned}\Phi = &\int_0^1 (-3t^3, -\sqrt{3}t^3, -t)\cdot(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3}t)\,dt \\ &+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-8\sin^2 t\cos t, -8\sin t\cos^2 t, -2\cos t)\cdot(2\cos t, 2\sin t, 4\cos(2t))\,dt \\ &+ \int_{-1}^0 (-3t^3, \sqrt{3}t^3, -t)\cdot(-\sqrt{3}, -1, -2\sqrt{3}t)\,dt \\ &= \int_0^1 (-2\sqrt{3}t^3 - 2\sqrt{3}t^2)\,dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (-32\cos^2 t\sin^2 t - 8\cos t\cos(2t))\,dt \\ &+ \int_{-1}^0 (2\sqrt{3}t^3 + 2\sqrt{3}t^2)\,dt = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}t^4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}t^3\right]_0^1 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}t^4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}t^3\right]_{-1}^0 \\ &- 8\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2(2t)\,dt - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos t\,dt + 16\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos t\sin^2 t\,dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} - 8\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt = -\sqrt{3} - 8\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\sin(4t)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} = -\frac{4}{3}\pi.$$

c) La superficie $\bar r$ è regolare perch abbiamo trovato che

$$(\bar r_u \wedge \bar r_v)(u,v) = (-u, v, 1) \neq (0,0,0) \qquad \forall (u,v) \in D.$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \int_n^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy, \qquad x > 0.$$

Facoltativo: studiare la convergenza uniforme della serie.

Soluzione. Osserviamo prima di tutto che per ogni $n \geq 1$ si ha $\int_n^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy > 0$ per ogni $x > 0$. Si tratta quindi di una serie a segni alterni per ogni $x > 0$. Per quanto riguarda la convegenza semplice si può utilizzare il criterio di Leibniz in quanto per $x > 0$ fissato, la successione $f_n(x)$ è decrescente e tende a 0 per $n \to \infty$. Pertanto la serie converge puntualmente su $(0, +\infty)$. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, occorre studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 1} \int_n^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy, \qquad x > 0.$$

Osserviamo che per $y \in [n, +\infty)$ si ha $e^{-xy^2} \leq e^{-nxy}$. Pertanto, risulta:

$$\int_n^{+\infty} e^{-xy^2}\,dy \leq \int_n^{+\infty} e^{-nxy}\,dy = \left[-\frac{1}{nx}e^{-nxy}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{nx}e^{-n^2x}.$$

Inoltre, la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{nx} e^{-n^2 x}$ converge per il criterio della radice perché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{nx} e^{-n^2 x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{nx}} e^{-nx} = 0.$$

Pertanto, per il criterio del confronto la serie di funzioni converge assolutamente su $(0, +\infty)$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme osserviamo che la serie converge uniformemente su ogni intervallo della forma $[\delta, +\infty), \delta > 0$. Infatti, detta $f(x)$ la somma della serie, per ogni fissato $\delta > 0$ si ha, per il criterio di Leibiniz:

$$\sup_{[\delta,+\infty)} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_n^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy \right| \leq \int_{N+1}^{+\infty} e^{-\delta y^2}\, dy \to 0 \quad \text{per} \quad N \to \infty.$$

Corso di Studi in Fisica

Prova scritta di Analisi III del 15 dicembre 2016

Esercizio 1 (punti 6). Si consideri la seguente funzione razionale:

$$f(x) = \frac{x+1}{3x^2 - 7x + 2}.$$

a) Si determini lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di f;

b) Si determinino il raggio di convergenza e l'intervallo (aperto) di convergenza della serie trovata;

c) Si determini il comportamento della serie trovata agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Soluzione. a) Osserviamo che $3x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1/3$ o $x = 2$. Pertanto, si ha che $3x^2 - 7x + 2 = (3x-1)(x-2)$. Decomponendo in fratti semplici la funzione f si ottiene

$$f(x) = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3x-1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Ricordando che

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{n \geq 0} (3x)^n, \qquad |x| < \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad |x| < 2,$$

si ottiene allora per $|x| < 1/3$:

$$f(x) = \frac{4}{5} \sum_{n \geq 0} (3x)^n - \frac{3}{10} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{5} \sum_{n \geq 0} \left[4 \cdot 3^n - \frac{3}{2^{n+1}}\right] x^n.$$

b) Poiché la serie di McLaurin di f è somma di due serie di potenze con raggi di convergenza $\rho_1 = 1/3$ e $\rho_2 = 2$ rispettivamente, allora essa ha raggio di convergenza $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = 1/3$, dunque l'intervallo aperto di convergenza della serie è $I = (-1/3, 1/3)$.
c) Per quanto riguarda il comportamento agli estremi di I, osserviamo che per $x = -1/3$ si ottiene la serie

$$\frac{1}{5} \sum_{n \geq 0} \left[4 \cdot 3^n - \frac{3}{2^{n+1}}\right] \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{5} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left[4 - \frac{3}{2 \cdot 6^n}\right]$$

che non converge perché il termine generale non tende a 0 per $n \to \infty$. Infatti:

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \left[4 - \frac{3}{2 \cdot 6^n}\right]$$

non esiste. In modo simile, risulta che la serie non converge neanche per $x = 1/3$ in quanto per tale scelta di x si ottiene la serie

$$\frac{1}{5} \sum_{n \geq 0} \left[4 - \frac{3}{2 \cdot 6^n}\right]$$

il cui termine generale tende a $4/5$ per $n \to \infty$ e dunque non può convergere. In conclusione, la serie di McLaurin di f non converge negli estremi dell'intervallo I.

Esercizio 2 (punti 6). Si consideri la curva piana

$$\bar{\gamma}(t) = \left(\frac{t^2}{1-t}, 1 - t^2\right), \qquad t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

a) Si verifichi che $\bar{\gamma}$ è una curva semplice e che il suo sostegno è contenuto tutto nel primo quadrante.

b) Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_D y\,dxdy,$$

dove D è il dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ compreso tra gli assi e la parte del sostegno di $\bar{\gamma}$ che collega i punti di coordinate $(1/2, 0)$ e $(0, 1)$.

Soluzione. a) Osserviamo che se $t_1, t_2 \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ sono tali che $\bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$, allora: vale:

$$\begin{cases} \frac{t_1^2}{1-t_1} = \frac{t_2^2}{1-t_2} \\ 1 - t_1^2 = 1 - t_2^2 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione segue che deve essere $t_1^2 = t_2^2$. Sostituendo questa relazione nella prima equazione si ottiene allora che deve valere $1 - t_1 = 1 - t_2$ da cui segue che $t_1 = t_2$. Dunque la funzione $\bar{\gamma}$ è iniettiva e quindi la curva $\bar{\gamma}$ è semplice. Inoltre si osserva che per

$$\frac{t^2}{1-t} \geq 0 \quad \forall t < 1 \qquad \text{e} \qquad 1 - t^2 \geq 0 \quad \forall t \in [-1, 1],$$

quindi in particolare le due relazioni valgono per $t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Il sostegno della curva è dunque contenuto nel primo quadrante.
b) Osserviamo che $\bar{\gamma}(-1) = (1/2, 0)$ e $\bar{\gamma}(0) = (0, 1)$. Pertanto, il dominio D è delimitato dagli assi e dal sostegno della restrizione di $\bar{\gamma}$ all'intervallo $[-1, 0]$. Denotiamo con $\bar{\varphi}$ tale restrizione. Per il teorema di Gauss-Green, risulta che

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{+\partial D} \bar{F} \cdot \bar{ds},$$

dove $\bar{F}$ è un qualunque campo vettoriale definito su un aperto A contenente D, di classe C^1 su A, della forma $\bar{F} = (P, Q)$ tale che $Q_x - P_y = y$. Ad esempio possiamo scegliere il campo $\bar{F}(x, y) = (0, xy)$. Risulta che $+\partial D = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\varphi} \cup \bar{\gamma}_2$, dove $\bar{\gamma}_1(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 1/2]$, $-\bar{\gamma}_2(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$. È immediato verificare che il lavoro di $\bar{F}$ lungo γ_1 e $-\bar{\gamma}_2$ è nullo, pertanto si ha:

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{\bar{\varphi}} \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_{-1}^{0} (0, t^2(1+t)) \cdot (-2t)\,dt = -2\int_{-1}^{0} (t^3 + t^4)\,dt = \frac{1}{10}.$$

Esercizio 3 (punti 7). a) Si determinino tutte e sole le funzioni $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ per le quali il campo vettoriale

$$\bar{F}(x, y, z) = \left(\sqrt{1+y^2} + 2xf(y, z), x^2 \sin z + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}, x^2 y \cos z\right)$$

risulta conservativo.
b) Tra le funzioni determinate al punto a) si scelga quella che si annulla sul piano $z = 0$. Si determini, per tale scelta, il generico potenziale di $\bar{F}$.
c) Si calcoli il lavoro compiuto dal campo $\bar{F}$ per spostare un punto materiale dal punto $A = (1, 1, \pi)$ al punto $B = (2, 3, 0)$ lungo il segmento che congiunge i due punti.

Soluzione. Poiché vogliamo che f sia di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$, il dominio del campo $\bar{F}$ è $\mathbb{R}^3$, dunque è semplicemente connesso. Pertanto, $\bar{F}$ sarà conservativo se e solo se è irrotazionale, ovvero se e solo se valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + 2x\partial_y f = 2x\sin z + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \\ 2xy\cos z = 2x\partial_z f \\ x^2\cos z = x^2\cos z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_y f = \sin z \\ \partial_z f = y\cos z \end{cases} .$$

Le soluzioni della prima equazione dell'ultimo sistema sono tutte e sole le funzioni della forma $f(y,z) = y\sin z + \alpha(z)$. Sostituendo nella seconda equazione si ricava che $\alpha(z)$ deve essere costante, dunque le funzioni che rendono il campo conservativo sono tutte e sole quelle della forma $f(y,z) = y\sin z + c$, $c \in \mathbb{R}$.
b) Imponendo che f si annulli sul piano $z = 0$ si ottiene come unica possibilità $c = 0$. Calcoliamo quindi il generico potenziale del campo

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(\sqrt{1+y^2} + 2xy\sin z, x^2\sin z + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}, x^2y\cos z\right) \tag{1}$$

con il metodo delle integrazioni parziali. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y,z) = \sqrt{1+y^2} + 2xy\sin z \\ \partial_x U(x,y,z) = x^2\sin z + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} \\ \partial_z U(x,y,z) = x^2y\cos z \end{cases} .$$

Dalla prima equazione si ricava

$$U(x,y,z) = x\sqrt{1+y^2} + x^2y\sin z + h(y,z).$$

Derivando questa funzione rispetto a y e sostituendo nella seconda equazione si ottiene $\partial_y h(y,z) = 0$ da cui segue che $h(y,z) = k(z)$. Infine, dalla terza equazione si ricava che $k(z)$ è una funzione costante. Pertanto, il generico potenziale del campo (1) è:

$$U(x,y,z) = x\sqrt{1+y^2} + x^2y\sin z + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

c) Poiché il campo è conservativo, il lavoro richiesto è uguale a $U(2,3,0) - U(1,1,\pi) = 2\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

Esercizio 4 (punti 7). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(0, -2z, y^2\right).$$

a) Calcolare (utilizzando la definizione di flusso) il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie cartesiana di equazione $z = 1 - x^2 - y$, $(x,y) \in D$ dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x - 1 \le y \le 1 - x\}.$$

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

Soluzione. a) Risulta:

$$\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & -2z & y^2 \end{vmatrix} = (2y+2, 0, 0),$$

mentre $\bar{r}_x \wedge \bar{r}_y(x,y) = (2x,1,1)$. Pertanto il flusso richiesto è dato da:

$$\begin{aligned}\Phi = \iint_D (2y+2,0,0)\cdot(2x,1,1)\,dxdy &= \iint_D 4x(y+1)\,dxdy \\ &= \int_0^1 4x\int_{x-1}^{1-x}(y+1)\,dydx = \int_0^1 4x\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_{x-1}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 4x(2-2x)\,dx = 8\int_0^1 (x-x^2)\,dx = 8\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

b) Il bordo $+\partial D$ è unione delle tre curve $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$, dove: $\bar{\gamma}_1(t) = (t, t-1)$, $t \in [0,1]$, $-\bar{\gamma}_2(t) = (t, 1-t)$, $t \in [0,1]$, $-\bar{\gamma}_3(t) = (0,t)$, $t \in [-1,1]$. Pertanto, il trasformato $\bar{r}(+\partial D) = \cup_{i=1}^3 (\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i)$. Si ha:

$$\begin{aligned}\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1(t) &= (t, t-1, -t^2-t+2), \qquad t\in[0,1],\\ -\bar{r}\circ\bar{\gamma}_2(t) &= (t, 1-t, t-t^2), \qquad t\in[0,1],\\ -\bar{r}\circ\bar{\gamma}_3(t) &= (0,t,1-t), \qquad t\in[-1,1].\end{aligned}$$

Di conseguenza, per il teorema di Stokes, vale:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_1} \bar{F}\cdot\bar{ds} - \int_{-\bar{r}\circ\bar{\gamma}_2} \bar{F}\cdot\bar{ds} - \int_{-\bar{r}\circ\bar{\gamma}_3} \bar{F}\cdot\bar{ds} \\ &= \int_0^1 (0, 2t^2+2t-4, t^2-2t+1)\cdot(1,1,-2t-1)\,dt \\ &= -\int_0^1 (0, 2t^2-2t, t^2-2t+1)\cdot(1,-1,1-2t)\,dt - \int_{-1}^1 (0,2t-2,t^2)\cdot(0,1,-1)\,dt \\ &= \int_0^1 (-2t^3+5t^2+2t-5)\,dt - \int_0^1 (-2t^3+3t^2-2t+1)\,dt - \int_{-1}^1 (-t^2+2t-2)\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^4+\frac{5}{3}t^3+t^2-5t\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{2}t^4+t^3-t^2+t\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{3}t^3+t^2-2t\right]_{-1}^1 = -\frac{17}{6}-\frac{1}{2}+\frac{14}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^x}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

(Facoltativo: studiare la convergenza totale della serie).

Soluzione. Osserviamo che si tratta di una serie a termini non negativi, quindi la convergenza semplice e quella assoluta sono equivalenti in questo caso.
Inoltre, vale:

$$\sqrt[n]{n}-1 = e^{\log(\sqrt[n]{n})}-1 = e^{\frac{\log n}{n}}-1 \sim \frac{\log n}{n} \qquad \text{per} \quad n\to\infty,$$

da cui segue che la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n^{x+1}}$.
In particolare, il termine generale della serie soddisfa la condizione necessaria per la convergenza se e solo se $x > -1$, mentre per $x \leq -1$ la serie diverge. Ora, se $-1 < x \leq 0$, possiamo usare il fatto che

$$\frac{\log n}{n^{x+1}} \geq \frac{1}{n^{x+1}}, \qquad n\geq 3,$$

e che la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{x+1}}$ diverge per $x \leq 0$ per concludere che anche la nostra serie diverge.
Consideriamo il caso $x > 0$. Per $x > 0$ osserviamo che per ogni $\epsilon > 0$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n}{n^{x+1}}}{\frac{1}{n^{x+1-\epsilon}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\epsilon}} = 0$$

e che la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{x+1-\epsilon}}$ converge se $\epsilon \in (0, x)$, pertanto, per il criterio del confronto asintotico converge anche la nostra serie per ogni $x > 0$. In conclusione, la serie converge semplicemente ed assolutamente su $(0, +\infty)$.
Per quanto riguarda la convergenza totale, non c'è convergenza totale su $(0, +\infty)$ ma, per ogni $\delta > 0$ fissato, la serie converge totalmente su $(\delta, +\infty)$. Infatti, per n abbastanza grande vale:

$$\sup_{x\geq\delta} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n^x} \leq M_n = \frac{1}{n^{\delta+1}}$$

e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\delta+1}}$ converge.

Corso di Studi in Fisica

Prova scritta di Analisi III del 6 aprile 2017

Esercizio 1 (punti 5). Si consideri la seguente funzione razionale:

$$f(x) = \frac{5+x}{x^2+x-2}.$$

a) Si determini lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di f;

b) Si determinino il raggio di convergenza e l'intervallo (aperto) di convergenza della serie trovata;

c) Si determini il comportamento della serie trovata agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Soluzione. a) Osserviamo che $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ o $x = 1$. Decomponendo f in fratti semplici si ottiene:

$$f(x) = -\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} - 2 \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Ricordando che

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n, \qquad |x| < 2$$

e

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad |x| < 1,$$

allora per $|x| < 1$ vale:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n - 2 \sum_{n\geq 0} x^n = -\sum_{n\geq 0} \left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 2 \right] x^n.$$

b) La serie ottenuta è somma di due serie di potenze con raggi di convergenza uguali a 2 e ad 1 rispettivamente. Quindi il suo raggio di convergenza è 1 e il suo intervallo aperto di convergenza è $I = (-1, 1)$.
c) Per $x = \pm 1$, la serie non converge perché in tali punti si ottiene una serie il cui termine generale non tende a 0 per $n \to \infty$.

Esercizio 2 (punti 6). Utilizzando il teorema della divergenza, si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\bar{F}(x, y, z) = (x^3, y + z, 1),$$

uscente dall'ellissoide

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\}.$$

Soluzione. Il campo $\bar{F}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Inoltre C è un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$. Pertanto, sono soddisfatte le ipotesi del teorema della divergenza e il flusso Φ_e richiesto è dato da:

$$\Phi_e = \iiint_C \text{div}\bar{F}(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_C (3x^2 + 1)\, dxdydz.$$

Osserviamo che

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} \leq 1\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} \leq 1 - x^2\right\}.$$

Pertanto, se per $x \in [-1,1]$ fissato consideriamo l'ellisse

$$D_x = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} \leq 1 - x^2 \right\},$$

la cui area è $2\sqrt{2}\pi(1-x^2)$. Si ha allora:

$$\Phi_e = \int_{-1}^{1} (3x^2+1)\text{Area}(D_x)\,dx = 2\sqrt{2}\pi \int_{-1}^{1} (3x^2+1)(1-x^2)\,dx$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_{-1}^{1} (2x^2 - 3x^4 + 1)\,dx = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^5 + x \right]_{-1}^{1} = \frac{64\sqrt{2}}{15}\pi.$$

In alternativa, per calcolare l'integrale triplo possiamo utilizzare il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = 2\rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \sqrt{2}\rho\cos\theta \end{cases}, \qquad \rho \in [0,1], \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi],$$

la cui matrice jacobiana ha determinante uguale a $2\sqrt{2}\rho^2 \sin\theta$. Pertanto, risulta:

$$\Phi_e = 2\sqrt{2} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\theta (3\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + 1)\,d\varphi d\theta d\rho$$

$$6\sqrt{2} \int_0^1 \rho^4\,d\rho \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi + 2\sqrt{2} \int_0^1 \rho^2\,d\rho \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{24}{15}\sqrt{2}\pi + \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi = \frac{64}{15}\sqrt{2}\pi.$$

Esercizio 3 (punti 7). a) Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{ay}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + b, 3 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)$$

dipendente dai parametri reali a, b.

a) Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $\bar{F}_{a,b}$.

b) Determinare, se esistono, i valori di a e b per i quali il campo è conservativo.

c) Per tali valori determinare il potenziale del campo che si annulla in $(0,0,0)$.

Soluzione. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ si ha $D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\}$.
b) Poiché il dominio è un cilindro, quindi è semplicemente connesso, risulta che $\bar{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale ovvero se e solo se per ogni $(x,y,z) \in D_{a,b}$ vale:

$$\begin{cases} \partial_y \left(-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) = \partial_x \left(\frac{ay}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + b \right) \\ \partial_z \left(-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) = \partial_x \left(3 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right) \\ \partial_z \left(\frac{ay}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + b \right) = \partial_y \left(3 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right) \end{cases}.$$

La seconda e la terza relazione sono soddisfatte per ogni valore di a e b, mentre la prima dà

$$\frac{2xy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}} = \frac{-axy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}$$

che è soddisfatta per $a = -2$ e per ogni $b \in \mathbb{R}$.
c) Consideriamo ora il campo

$$\bar{F}_b(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -\frac{2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + b, 3 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)$$

ottenuto sostituendo il valore $a = -2$ nell'espressione del campo $\bar{F}_{a,b}$. Utilizzando il metodo delle integrazioni parziali cerchiamo il generico potenziale U come soluzione del sistema

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y,z) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \partial_y U(x,y,z) = -\frac{2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + b \\ \partial_z U(x,y,z) = 3 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ottiene che

$$U(x,y,z) = 2\sqrt{1-x^2-y^2} + \alpha(y,z).$$

Derivando tale funzione rispetto a y e sostituendo nella seconda equazione si ottiene:

$$\partial_y \alpha(y,z) = b,$$

da cui segue che $\alpha(y,z) = by + \beta(z)$. Infine, derivando rispetto a z e sostituendo nella terza equazione segue che $\beta(z) = 3z + \sqrt{1+z^2} + c, c \in \mathbb{R}$. In conclusione si ha:

$$U(x,y,z) = 2\sqrt{1-x^2-y^2} + by + 3z + \sqrt{1+z^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Il potenziale che si annulla in $(0,0,0)$ si ottiene prendendo $c = -3$.

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(3z^2, y, xy\right).$$

a) Calcolare (utilizzando la definizione di flusso) il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie parametrica

$$\bar{r}(u,v) = (u, v^2, uv), \qquad (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le u \le 0, u \le v \le 2u+1\}.$$

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

c) La superficie $\bar{r}$ è regolare? È semplice?

Soluzione. a) Si ha:

$$\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3z^2 & y & xy \end{vmatrix} = (x, 6z - y, 0).$$

Inoltre, si ha $\bar{r}_u(u,v) = (1,0,v), \bar{r}_v(u,v) = (0,2v,u)$, da cui segue che:

$$\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 2v & u \end{vmatrix} = (-2v^2, -u, 2v).$$

Pertanto, il flusso richiesto è dato da

$$\begin{aligned}
\Phi = \iint_D (u, 6uv - v^2, 0) \cdot (-2v^2, -u, 2v)\, du dv &= -\iint_D (uv^2 + 6u^2 v)\, du dv \\
&= -\int_{-1}^{0} u\, du \int_u^{2u+1} v^2\, dv - 6\int_{-1}^{0} u^2 du \int_u^{2u+1} v\, dv \\
&= -\int_{-1}^{0} u \left[\frac{v^3}{3}\right]_u^{2u+1} du - 6\int_{-1}^{0} u^2 \left[\frac{v^2}{2}\right]_u^{2u+1} du \\
&= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{0} (7u^4 + 12u^3 + 6u^2 + u)\, du - 3\int_{-1}^{0} (3u^4 + 4u^3 + u^2)\, du \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{7}{5}u^5 + 3u^4 + 2u^3 + \frac{1}{2}u^2\right]_{-1}^{0} - 3\left[\frac{3}{5}u^5 + u^4 + \frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{0} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}$$

b) Il campo $\bar{F}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$ e la superficie $\bar{r}$ è di classe C^2 quindi possiamo applicare il teorema di Stokes. Risulta che $+\partial D = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3$ dove $\bar{\gamma}_1(t) = (t, t)$, $t \in [-1, 0]$, $\bar{\gamma}_2(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$, $-\bar{\gamma}_3(t) = (t, 2t + 1)$, $t \in [-1, 0]$. Pertanto il trasformato del bordo è l'unione delle curve $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_i(t), i = 1, 2, 3$, dove $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (t, t^2, t^2)$, $t \in [-1, 0]$, $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) = (0, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$, $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3(t) = (t, 4t^2 + 4t + 1, 2t^2 + t)$, $t \in [-1, 0]$. Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned}
\Phi = \sum_{i=1}^{3} \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i} \bar{F} \cdot \bar{ds} &= \int_{-1}^{0} (3t^4, t^2, t^3) \cdot (1, 2t, 2t)\, dt + \int_0^1 (0, t^2, 0) \cdot (0, 2t, 0)\, dt \\
&- \int_{-1}^{0} (12t^4 + 12t^3 + 3t^2, 4t^2 + 4t + 1, 4t^3 + 4t^2 + t) \cdot (1, 8t + 4, 4t + 1)\, dt \\
&= \int_{-1}^{0} (5t^4 + 2t^3)\, dt + \int_0^2 2t^3\, dt - \int_{-1}^{0} (28t^4 + 64t^3 + 59t^2 + 25t + 4)\, dt \\
&= -\int_{-1}^{0} (23t^4 + 62t^3 + 59t^2 + 25t + 4)\, dt + \int_0^1 2t^3\, dt \\
= -\left[\frac{23}{5}t^5 + \frac{31}{2}t^4 + \frac{59}{3}t^3 + \frac{25}{2}t^2 + 4t\right]_{-1}^{0} &+ \left[\frac{t^4}{2}\right]_0^1 = -\frac{23}{5} + \frac{31}{2} - \frac{59}{3} + \frac{25}{2} - 4 + \frac{1}{2} = \frac{7}{30}.
\end{aligned}$$

c) La superficie non è regolare su D perché $\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(0, 0) = (0, 0, 0)$ e $(0, 0) \in D$. La superficie è invece semplice in quanto se $\bar{r}(u, v) = \bar{r}(u', v')$ allora questo implica che

$$\begin{cases} u = u' \\ v = \pm v' \\ uv = u'v' \end{cases} .$$

Ora se $u = u' \neq 0$, dalla terza relazione segue che $v = v'$. Se invece $u = u' = 0$, dalla seconda segue che $v = v'$ perché su D il fatto che $u = u' = 0$ implica $v \geq 0, v' \geq 0$, pertanto non può valere $v = -v'$.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \log n}{n^2 x + n}, \qquad x \geq 0.$$

(Facoltativo: studiare la convergenza uniforme della serie).

Soluzione. Per ogni $x \geq 0$ la serie è a segni alterni. Per $x = 0$ la serie si riduce a $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \log n}{n}$ che non converge assolutamente per confronto con la serie armonica, in quanto

$$\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}, \qquad n \geq 3.$$

La serie converge però puntualmente in $x = 0$ per il criterio di Leibniz. Infatti, per $n \geq 3$ la successione $b_n = \frac{\log n}{n}$ è infinitesima, positiva ed è decrescente. Infatti, la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$ è tale che

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} < 0, \qquad x > e,$$

pertanto b_n è decrescente per $n \geq 3$. Per $x > 0$ la serie converge anche assolutamente. Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $N = N(\varepsilon)$ tale che $|\log n| \leq n^{\varepsilon}$ per $n \geq N$. Pertanto, scelto $\varepsilon \in (0, 1)$, per $n > N$ si ha:

$$\left| \frac{(-1)^n \log n}{n^2 x + n} \right| \leq \frac{1}{x n^{2-\varepsilon}}$$

e la serie $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{x n^{2-\varepsilon}}$ converge. Pertanto, anche la serie data converge assolutamente. Dunque la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) per $x > 0$ e converge solo semplicemente in $x = 0$. La convergenza è anche uniforme su $[0, +\infty)$. Infatti poiché si tratta di una serie di Leibniz per ogni $x \geq 0$, allora, detta $f(x)$ la somma della serie, risulta che per ogni $x \geq 0$ vale:

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \log n}{n^2 x + n} \right| \leq \frac{\log(N+1)}{(N+1)^2 x + (N+1)} \leq \frac{\log(N+1)}{N+1},$$

da cui segue che

$$\sup_{x \geq 0} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \log n}{n^2 x + n} \right| \leq \frac{\log(N+1)}{N+1} \to 0 \qquad N \to \infty.$$

Pertanto, la serie converge uniformemente su $[0, +\infty)$.

Corso di Studi in Fisica

Soluzione della prova scritta di Analisi III del 27 giugno 2017

Esercizio 1 (punti 5). Sia data la seguente serie di potenze reali:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!e^n}{n^{n+2}} x^n.$$

a) Determinare il raggio di convergenza e l'intervallo (aperto) di convergenza della serie.
b) Studiare il carattere della serie negli estremi dell'intervallo di convergenza.
c) Discutere la convergenza uniforme della serie.

Soluzione. a) Posto $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+2}}$, usando il test del rapporto si ottiene:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+3}} \cdot \frac{n^{n+2}}{n!e^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} = e\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-2} = e\cdot e^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Dunque il raggio di convergenza della serie è $\rho = 1$ e l'intervallo aperto di convergenza è $I = (-1, 1)$.
b) Per $x = 1$ si ottiene la serie a termini positivi $\sum_{n\geq 1} \frac{n!e^n}{n^{n+2}}$. Osserviamo che dalla formula di Stirling si ha che $n!e^n \sim n^n\sqrt{2\pi n}$ per $n \to \infty$. Pertanto, risulta che

$$\frac{n!e^n}{n^{n+2}} \sim \sqrt{2\pi} n^{-\frac{3}{2}}, \qquad n\to\infty.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie converge assolutamente in $x = 1$. Per $x = -1$ otteniamo la serie a segni alterni $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n!e^n}{n^{n+2}}$ che converge assolutamente per quanto detto per il caso $x = 1$. Pertanto, la serie converge assolutamente in $[-1, 1]$.
c) Dal Teorema di Abel segue che la serie converge uniformemente in $[-1, 1]$.

Esercizio 2 (punti 6). Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}\, dx - \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}\, dy.$$

Si calcoli l'integrale di ω lungo il bordo positivamente orientato di

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, -x \leq y\}.$$

utilizzando la formula di Gauss-Green.

Soluzione. Poiché il dominio D è regolare e la forma differenziale ω è di classe C^1 possiamo applicare la formula di Gauss-Green. Pertanto, si ha che

$$\int_{\bar\gamma} \omega = \iint_D \left[\partial_x\left(-\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) - \partial_y\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}\right)\right] dxdy = \iint_D \frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy.$$

Passando a coordinate polari si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{\bar\gamma} \omega &= 8\int_0^1 \frac{\rho^3}{(1+\rho^2)^2}\, d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = -2\left[\cos(2\theta)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho^3}{(1+\rho^2)^2}\, d\rho \\ &= \int_0^1 \rho^2 \cdot \frac{2\rho}{(1+\rho^2)^2}\, d\rho = \left[-\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2\rho}{1+\rho^2}\, d\rho = -\frac{1}{2} + \log 2.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punti 7). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_a(x,y,z) = \left(-\frac{xe^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{2ax}{x^2+1} + z^2, -5 - \frac{ye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} - axz \right).$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare il dominio D_a di $\bar{F}_a$.

(b) Determinare, se esistono, i valori di a per i quali il campo $\bar{F}_a$ è irrotazionale.

(c) Verificare che per tali valori il campo è anche conservativo e calcolarne il potenziale che si annulla in $(0,1,0)$.

(d) Calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva

$$\bar{\gamma}(t) = (t, t, \log t)\,, \quad t \in [1,2].$$

Soluzione. (a) Risulta $D_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0)\}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Si osserva che il dominio non è semplicemente connesso.

(b) Il campo è irrotazionale se e solo se per ogni $(x,y,z) \in D_a$ valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \partial_y \left(-\frac{xe^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{2ax}{x^2+1} + z^2 \right) = \partial_x \left(-5 - \frac{ye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right) \\ \partial_x \left(\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} - axz \right) = \partial_z \left(-\frac{xe^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{2ax}{x^2+1} + z^2 \right) \\ \partial_y \left(\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} - axz \right) = \partial_z \left(-5 - \frac{ye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3xye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} = \frac{3xye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}} \\ -\frac{xe^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - az = -\frac{xe^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + 2z \\ -\frac{ye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = -\frac{ye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{cases}$$

da cui segue che il campo $\bar{F}_a$ è irrotazionale se e solo se $a = -2$.
(c) Per vedere se per tale valore il campo è anche conservativo proviamo a calcolarne un potenziale usando il metodo delle integrazioni parziali. Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y,z) = -\frac{xe^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - \frac{4x}{x^2+1} + z^2 \\ \partial_y U(x,y,z) = -5 - \frac{ye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \\ \partial_z U(x,y,z) = \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2xz \end{cases}.$$

Dalla terza equazione si ottiene:

$$U(x,y,z) = \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} + xz^2 + \alpha(x,y).$$

Derivando tale funzione rispetto a x e sostituendola nella prima equazione si ricava:

$$-\frac{xe^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + z^2 + \partial_x \alpha(x,y) = -\frac{xe^z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - \frac{4x}{x^2+1} + z^2$$

da cui segue che

$$\alpha(x,y) = -2\log(x^2+1) + \beta(y).$$

Infine dalla seconda equazione si ottiene che $\beta(y) = -5y + c, c \in \mathbb{R}$. Dunque il generico potenziale del campo $\bar{F}_{-2}$ è

$$U(x,y,z) = \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} + xz^2 - 2\log(x^2+1) - 5y + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Il potenziale che si annulla in $(0,1,0)$ si ottiene prendendo $c = 4$.
(d) Il lavoro richiesto è

$$\begin{aligned}W &= U(\bar\gamma(2)) - U(\bar\gamma(1)) = U(2,2,\log 2) - U(1,1,0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\log^2 2 - 2\log 5 - 10 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\log 2 + 5 = 2\log^2 2 + \log\frac{4}{25} - 5.\end{aligned}$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia data la superficie parametrica

$$\bar r(u,v) = (uv, -u, v), \qquad (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \le 4, -\sqrt{3}v \le u \le 0\}.$$

(a) Si dimostri che $\bar r$ è una superficie regolare e semplice.

(b) Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$\bar F(x,y,z) = (yz, xz, x+1)\,.$$

lungo il sostegno orientato $\bar r(+\partial D)$ usando la definizione di integrale curvilineo di seconda specie.

(c) Si calcoli la stessa circuitazione utilizzando il teorema di Stokes.

Soluzione. (a) Risulta che $\bar r_u(u,v) = (v,-1,0)$ e $\bar r_v(u,v) = (u,0,1)$ da cui segue che:

$$\bar r_u \wedge \bar r_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ v & -1 & 0\\ u & 0 & 1\end{vmatrix} = (-1,-v,u) \ne \bar 0 \qquad \forall (u,v) \in D.$$

Pertanto la superficie $\bar r$ è regolare. Inoltre se $(u,v),(u',v') \in D$ sono tali che $\bar r(u,v) = \bar r(u',v')$, allora vale

$$\begin{cases} uv = u'v'\\ -u = -u'\\ v = v'\end{cases}$$

e dalle ultime due identità segue che $(u,v) = (u',v')$. Dunque $\bar r$ è anche semplice.

(b) Risulta che $+\partial D = \bar\gamma_1 \cup \bar\gamma_2 \cup \bar\gamma_3$ dove $\bar\gamma_1(t) = (0,t)$, $t \in [0,2]$, $\bar\gamma_2(t) = (2\cos t, 2\sin t), t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $\bar\gamma_3(t) = \left(t, -\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$, $t \in [-\sqrt{3}, 0]$. Da ciò segue che $\bar r(+\partial D) = \bigcup_{i=1}^3 \bar r \circ \bar\gamma_i$, dove $\bar r \circ \bar\gamma_1(t) = (0,0,t), t \in [0,2]$, $\bar r \circ \bar\gamma_2(t) = (2\sin(2t), -2\cos t, 2\sin t), t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $\bar r \circ \bar\gamma_3(t) = \left(-\frac{t^2}{\sqrt{3}}, -t, -\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$, $t \in [-\sqrt{3}, 0]$. La circuitazione richiesta è data da:

$$\begin{aligned}&\int_{\bar r(+\partial D)} \bar F \cdot d\bar s = \sum_{i=1}^3 \int_{\bar r \circ \bar\gamma_i} \bar F(\bar r \circ \bar\gamma_i(t)) \cdot (\bar r \circ \bar\gamma_i)'(t)\, dt\\
&= \int_0^2 (0,0,1)\cdot(0,0,1)\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (-2\sin(2t), 8\sin^2 t\cos t, 2\sin(2t)+1)\cdot(4\cos(2t), 2\sin t, 2\cos t)\, dt\\
&\qquad + \int_{-\sqrt{3}}^0 \left(\frac{t^2}{\sqrt{3}}, \frac{t^3}{3}, -\frac{t^2}{\sqrt{3}} + 1\right)\cdot\left(-\frac{2t}{\sqrt{3}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) dt\\
&= 2 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (-4\sin(4t) + 16\sin^3 t\cos t + 8\cos^2 t\sin t + 2\cos t)\, dt + \int_{-\sqrt{3}}^0 \left(-t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dt\\
&\qquad = 2 + \left[\cos(4t) + 4\sin^4 t - \frac{8}{3}\cos^3 t + 2\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{9} - \frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{-\sqrt{3}}^0\\
&\qquad\qquad = 2 + \sqrt{3} - \frac{25}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5}{4} = -3 + \frac{4}{3}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

(c) Utilizzando il teorema di Stokes, la circuitazione precedente è uguale al flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie $\bar{r}$. Risulta:

$$\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz & x+1 \end{vmatrix} = (-x, y-1, 0) \qquad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Il flusso richiesto è

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_D \mathbf{rot}\bar{F}(\bar{r}(u,v)) \cdot (\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v)(u,v)\,dudv \\ &= \iint_D (-uv, -u-1, 0) \cdot (-1, -v, u)\,dudv = \iint_D (2uv + v)\,dudv \\ &= \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\rho^3 \cos\theta \sin\theta + \rho^2 \sin\theta)\,d\theta d\rho = \int_0^2 \rho^3\,d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin(2\theta)\,d\theta + \int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta\,d\theta \\ &= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \cdot [-\cos\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} = 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3 + \frac{4}{3}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}x \arctan(n^x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Facoltativo: discutere la convergenza totale della serie.

Soluzione. Osserviamo che per $x = 0$ la serie ha i termini tutti nulli e quindi converge assolutamente. Per $x > 0$ fissato, il termine generale della serie non tende a 0 per $n \to \infty$, dunque la serie non converge neanche semplicemente. Per $x < 0$, la serie è a termini negativi, dunque la convergenza semplice e quella assoluta sono equivalenti. Osserviamo allora che per $x < 0$ si ha:

$$\sqrt{n}x \arctan(n^x) \sim xn^{x+\frac{1}{2}} \qquad n \to \infty.$$

Pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie converge se e solo se $-x - \frac{1}{2} > 1$ ovvero se e solo se $x < -\frac{3}{2}$. In conclusione la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) per $x < -\frac{3}{2}$ e per $x = 0$ mentre non converge neanche semplicemente per $x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

Per quanto riguarda la convergenza totale, osserviamo che ovviamente la serie non converge totalmente su $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, altrimenti convergerebbe totalmente e quindi anche assolutamente su $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$. Sia $\delta > \frac{3}{2}$ fissato e sia $x \in (-\infty, -\delta]$. Risulta:

$$|\sqrt{n}x \arctan(n^x)| \leq \sqrt{n}|x|n^x,$$

perché $\arctan t \leq t$ se $t \geq 0$. Inoltre, per ogni n fissato la funzione $f_n(x) = \sqrt{n}xn^{-x}$ è decrescente sull'intervallo $[\delta, +\infty)$. Pertanto, risulta:

$$\sup_{x\in(-\infty,-\delta]} |\sqrt{n}x \arctan(n^x)| \leq \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \sqrt{n}|x|n^{-x} \leq \sqrt{n}\delta n^{-\delta} = \delta n^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

Inoltre osserviamo che la serie

$$\sum_{n\geq 0} \delta n^{\frac{1}{2}-\delta}$$

è convergente se $\delta > \frac{3}{2}$. Pertanto, la serie converge totalmente su $(-\infty, -\delta]$ per ogni $\delta > \frac{3}{2}$ fissato.

Corso di Studi in Fisica

Soluzione della prova scritta di Analisi III del 12 settembre 2017

Esercizio 1 (punti 5). Sia data la seguente serie di potenze complesse:

$$\sum_{n\geq 1}(in)^{2n+1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{2}}-1\right)^n z^n.$$

a) Determinare il raggio di convergenza della serie.
b) Discutere la convergenza uniforme della serie.
c) La serie converge in $z=\dfrac{i}{\sqrt{2}}$?

Soluzione. a) Sia

$$a_n=(in)^{2n+1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{2}}-1\right)^n.$$

Usando il test della radice, si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}n^2\sqrt[n]{n}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\sqrt[n]{n}\frac{\sqrt{2}}{n^2}=\sqrt{2}.$$

Pertanto, il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
b) La serie converge assolutamente nel cerchio aperto di centro 0 e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e uniformemente in ogni cerchio della forma

$$B_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq r\},\qquad 0<r<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

c) Il punto $z=\frac{i}{\sqrt{2}}$ si trova sul bordo del cerchio di convergenza, quindi il carattere della serie in tale punto non si può dedurre dal teorema del cerchio di convergenza. Per tale valore si ottiene la serie a termini complessi

$$\sum_{n\geq 1}(in)^{2n+1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{2}}-1\right)^n\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Tale serie non converge perché

$$\left|(in)^{2n+1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{2}}-1\right)^n\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n\right|\sim n^{2n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{n^2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=n,\qquad n\to\infty.$$

Pertanto, il termine generale della serie non tende a 0 e quindi la serie non può convergere nel punto dato.

Esercizio 2 (punti 6). Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z)=(x,y,z^2)$$

uscente dalla porzione del cilindro $x^2+2y^2\leq 1$ compresa tra il piano $z=-1$ e il paraboloide di equazione $z=x^2+y^2$.

Soluzione. Possiamo applicare il teorema della divergenza nel dominio regolare

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+2y^2\leq 1, -1\leq z\leq x^2+y^2\}.$$

Pertanto, detto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 1\}$, il flusso richiesto è dato da:

$$\Phi_e = \iiint_C \operatorname{div}\bar{F}(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_C (2+2z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{-1}^{x^2+y^2} (2+2z)\,dz.$$

Usando le coordinate polari $x = \rho\cos t$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin t$, $(\rho,t) \in [0,1]\times[0,2\pi]$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\Phi_e &= \iint_D [2z + z^2]_{-1}^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D [2x^2 + 2y^2 + (x^2+y^2)^2 + 1]\,dxdy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho\left[2\rho^2\cos^2 t + \rho^2\sin^2 t + \left(\rho^2\cos^2 t + \frac{1}{2}\rho^2\sin^2 t\right)^2 + 1\right] dtd\rho \\
&\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[\rho^3 + \rho^3\cos^2 t + \frac{1}{4}\rho^5 + \frac{1}{4}\rho^5\cos^4 t + \frac{1}{2}\rho^5\cos^2 t + \rho\right] dtd\rho \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt + \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt + \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt + \pi\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{19}{12}\pi + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt + \frac{1}{24}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - \sin^2 t\cos^2 t)\,dt\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{19}{12}\pi + \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt - \frac{1}{96}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{19}{12}\pi + \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt - \frac{1}{96}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{19}{12}\pi + \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{96}\pi\right) = \frac{187}{192}\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punti 7). a) Si determinino tutte e sole le funzioni $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ per le quali la forma differenziale

$$\omega_f(x,y,z) = (xf(x)y + e^x)\,dx + (f(x) + 2\sin y)\,dy + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\,dz.$$

è esatta in $\mathbb{R}^3$.
b) Scelta tra tali funzioni quella per cui $f(1) = 1$, si determini la generica primitiva di ω_f.
c) Per tale f, calcolare

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega_f,$$

dove $\bar{\gamma}(t) = \left(t^2, \sqrt[4]{t^2+1}, 2t\right), \quad t \in [0,1]$.

Soluzione. a) Il dominio della forma differenziale ω_f è $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso. Dunque, è sufficiente trovare tutte e sole le $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ per le quali la forma differenziale è chiusa. Pertanto deve valere

$$\begin{cases} \partial_x(f(x) + 2\sin y) = \partial_y(xf(x)y + e^x) \\ \partial_x \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} = \partial_z(xf(x)y + e^x) \\ \partial_y \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} = \partial_z(f(x) + 2\sin y) \end{cases} \quad \Leftrightarrow f'(x) = xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Risolvendo l'equazione differenziale ottenuta, risulta che le funzioni f che rendono ω_f esatta sono tutte e sole quelle della forma

$$f(x) = ke^{\frac{x^2}{2}}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

b) Imponendo la condizione $f(1) = 1$ si ottiene $k = e^{-\frac{1}{2}}$. Consideriamo dunque la forma differenziale esatta

$$\omega(x,y,z) = \left(xye^{\frac{x^2-1}{2}} + e^x\right)\, dx + \left(e^{\frac{x^2-1}{2}} + 2\sin y\right)\, dy + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\, dz.$$

Utilizzando il metodo delle integrazioni parziali per calcolare la generica primitiva, si è ricondotti a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \partial_x U(x,y,z) = xye^{\frac{x^2-1}{2}} + e^x \\ \partial_y U(x,y,z) = e^{\frac{x^2-1}{2}} + 2\sin y \\ \partial_z U(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \end{cases}.$$

Dalla terza equazione si ricava

$$U(x,y,z) = \sqrt{1+z^2} + \alpha(x,y).$$

Derivando rispetto a x e sostituendo nella prima equazione si ricava che

$$\partial_x \alpha(x,y) = xye^{\frac{x^2-1}{2}} + e^x$$

da cui segue che $\alpha(x,y) = ye^{\frac{x^2-1}{2}} + e^x + \beta(y)$. Dunque

$$U(x,y,z) = \sqrt{1+z^2} + ye^{\frac{x^2-1}{2}} + e^x + \beta(y).$$

Infine, dalla seconda equazione si ricava che

$$e^{\frac{x^2-1}{2}} + \beta'(y) = e^{\frac{x^2-1}{2}} + 2\sin y$$

da cui segue che $\beta(y) = -2\cos y + c, c \in \mathbb{R}$. Dunque la generica primitiva di ω è

$$U(x,y,z) = \sqrt{1+z^2} + ye^{\frac{x^2-1}{2}} + e^x - 2\cos y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c) Poiché ω è esatta, risulta

$$\begin{aligned} \int_{\bar\gamma} \omega = U(\bar\gamma(1)) - U(\bar\gamma(0)) = U(1, \sqrt[4]{2}, 2) - U(0,1,0) \\ = \sqrt{5} + \sqrt[4]{2} + e - 2\cos(\sqrt[4]{2}) - 2 - e^{-\frac{1}{2}} + 2\cos(1). \end{aligned}$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar F(x,y,z) = (x, xy - z, x).$$

Si calcoli il flusso del rotore di $\bar F$ attraverso la superficie cartesiana di equazione

$$y = 2x^2 + 1, \qquad (x,z) \in D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, z \geq 0, 3x^2 + z^2 \leq 3\}$$

sia usando la definizione di flusso che mediante il teorema di Stokes.

Soluzione. Risulta

$$\mathbf{rot}\bar F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & xy - z & x \end{vmatrix} = (1, -1, y).$$

Inoltre, la superficie data, in forma parametrica, è della forma $\bar{r}(x,z) = (x, 2x^2+1, z)$, con $(x,z) \in D$ da cui segue che

$$\bar{r}_x \wedge \bar{r}_z(x,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4x, -1, 0).$$

Pertanto, il flusso richiesto è dato da:

$$\Phi = \iint_D (1, -1, 2x^2+1) \cdot (4x, -1, 0)\, dt = \iint_D (4x+1)\, dxdz.$$

Cambiando coordinate e ponendo $x = \rho\cos\theta, y = \sqrt{3}\rho\sin\theta$, con $(\rho,\theta) \in [0,1] \times [0,\pi/2]$, risulta che

$$\begin{aligned}\Phi = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (4\rho^2\cos\theta + \rho)\, d\rho d\theta = 4\sqrt{3}\int_0^1 \rho^2\, d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\int_0^1 \rho\, d\rho \\ = \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi.\end{aligned}$$

Il flusso in questione può essere anche calcolato mediante il teorema di Stokes, in quanto la superficie è di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$ e il campo è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Pertanto, risulta che

$$\Phi = \int_{\bar{r}(+\partial D)} \bar{F} \cdot \bar{d}s.$$

Ora $+\partial D = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3$, dove $\bar{\gamma}_1(t) = (t,0)$, $t \in [0,1]$, $\bar{\gamma}_2(t) = (\cos t, \sqrt{3}\sin t)$, $t \in [0,\pi/2]$, $-\bar{\gamma}_3(t) = (0,t)$, $t \in [0,\sqrt{3}]$. Pertanto, si ha che $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (t, 2t^2+1, 0)$, $t \in [0,1]$, $\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) = (\cos t, 2\cos^2 t + 1, \sqrt{3}\sin t)$, $t \in [0,\pi/2]$, $-\bar{r}\circ\bar{\gamma}_3(t) = (0,1,t)$, $t \in [0,\sqrt{3}]$. Applicando il teorema di Stokes, si ha allora:

$$\begin{aligned}\Phi = \sum_{i=1}^{3}\int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i} \bar{F} \cdot \bar{d}s = \int_0^1 (t, 2t^3+t, t) \cdot (1, 4t, 0)\, dt \\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t, 2\cos^3 t + \cos t - \sqrt{3}\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, -4\sin t\cos t, \sqrt{3}\cos t)\, dt \\ - \int_0^{\sqrt{3}} (0, -t, 0) \cdot (0,0,1)\, dt = \int_0^1 (t + 8t^4 + 4t^2)\, dt \\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t\cos t - 8\sin t\cos^4 t - 4\sin t\cos^2 t + 4\sqrt{3}\cos t\sin^2 t + \sqrt{3}\cos^2 t)\, dt \\ = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{8}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{8}{5}\cos^5 t + \frac{4}{3}\cos^3 t + \frac{4}{3}\sqrt{3}\sin^3 t + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{1}{2} + \frac{8}{5} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi - \frac{1}{4} - \frac{8}{5} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 2} \frac{e^{-n(x^2-x)}}{n(\log n)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Facoltativo: discutere la convergenza totale della serie.

Soluzione. La serie è a termini positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato. Pertanto, la convergenza semplice e quella assoluta sono equivalenti. Inoltre, il termine generale della serie tende a 0 se e solo se $x^2 - x \geq 0$ ovvero se e solo se $x \leq 0$ oppure $x \geq 1$. Quindi la serie diverge senz'altro per $0 < x < 1$. Utilizzando il criterio della radice, si osserva poi che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{-n(x^2-x)}}{n(\log n)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-(x^2-x)}}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{(\log n)^2}} = e^{-(x^2-x)}.$$

Tale limite è minore di 1 se e solo se $x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ o $x > 1$. Per tali valori la serie converge assolutamente. Per $x = 0$ e per $x = 1$, si ottiene la serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

che converge per il criterio integrale in quanto l'integrale improprio $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}$ converge. Dunque la serie converge semplicemente e assolutamente se e solo se $x \in A = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Su tale insieme la convergenza è anche totale in quanto si ha:

$$\sup_A \frac{e^{-n(x^2-x)}}{n(\log n)^2} \leq M_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$$

e la serie $\sum_{n\geq 2} M_n$ converge per quanto detto prima.