Onde Fluidi e Termodinamica

Riassunto da:
"Elementary Linear Algebra Applications Version, 11th Edition - Howard Anton, Chris Rorres"
"Algebra lineare e geometria analitica - Elsa Abbena, Anna Maria Fino, Gian Mario Gianella"

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Maggio 2024

Indice

1 Onde meccaniche

Se in casi come il pendolo o un corpo attaccato ad una molla l'oscillazione è **macroscopica** perché tutto il sistema oscilla, in corpi continui elastici possono prodursi moti oscillatori locali, provocati in una zona specifica del corpo. Questa oscillazione indotta localmente si **propaga nel mezzo** con una certa velocità costituendo così un'**onda**.

Definizione: **Onda**

Un'onda è una perturbazione locale impulsiva e periodica che si porpaga in un mezzo (corpo continuo ed elastico) con una certa velocità v. Nel caso unidimensionale parliamo di **onda piana** $\xi(x,t)$ la cui deformazione è costante in tutti i punti con stessa x

Per descrivere l'andamento di un'onda possiamo: **fissare un istante** t e osservare la deformazione su tutto lo spazio x, come se fosse una foto dell'onda; oppure **fissare un punto dello spazio** x e osservare al variare del tempo come varia la forma dell'onda, come se fosse un filmato.

inserire grafici

Vediamo ora come possiamo scrivere l'equazione che descrive la perturbazione in funzione della posizione $\mathbf{x}$ e del tempo $\mathbf{t}$: per farlo serviamoci di un sistema di riferimento $\mathbf{O}$ solidale con l'istante $t = 0$ e un sistema di riferimento $\mathbf{O'}$ solidale con lo spostamento dell'onda che viaggia a velocità v.

Possiamo quindi descrivere la posizione l'andamento di un'onda piana tramite una funzione del tipo

$$\begin{cases} x' = x \pm vt \\ \xi' = \xi \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \xi(x,t) = \mathbf{f(x \pm vt)}$$

Una funzione del tipo $\mathbf{f(x \pm vt)}$ soddisfa l'equazione differenziale detta **equazione delle onde** o **equazione di d'Alembert**:

$$\nabla^2_\xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

dimostrazione

$$\mathbf{z = x - vt} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 1} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = -v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{f = f(z)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -v\frac{\partial}{\partial z}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Il passaggio più ambiguo è quello evidenziato in ciano, in cui viene cambiata variabile di derivazione da t a z. Trattando una funzione qualsiasi, la derivata di qualsiasi funzione rispetto a t è uguale a $-v$ derivata rispetto a z ($-v$ rappresenta il dz che va a moltiplicare).

Notare che l'equazione delle onde è soddisfatta solo per funzioni che hanno come argomento combinazioni lineari di x e t ($\xi(x \pm vt)$); è perciò **l'argomento che importa e non la funzione in sè**. Una combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione dell'equazione, la soluzione generale ha forma

$$G(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

1.1 Onde in una sbarra solida

Prendiamo una sbarra solida e supponiamo di sollecitare il tratto iniziale applicando una **forza impulsiva**. Analiziamo un segmento di lunghezza dx: su di esso agiscono la forza elastica $F(x,t)$ esercitata dagli elementi a sinistra del segmento e la forza elastica $-F(x+dx,t)$ di verso opposto esercitata dagli elementi a destra.

inserire grafici

Alla cessazione dello stimolo (t') agiscono le forze elastiche e si ha che la lunghezza dell'elemento passa da dx a

$$(x+dx)+\xi(x+dx,t')-x-\xi(x,t') \quad = \quad dx+d\xi$$

Per quanto riguarda le forze invece vale la legge di Hooke secondo la quale

$$\textbf{Legge di Hooke} \qquad F(x)=ES\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

Possiamo quindi scrivere la legge del moto con accelerazione $a=\partial^2\xi/\partial t^2$:

$$\textbf{Risultante} \qquad dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx=\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx=ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\mathbf{dma}=dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

esprimendo la massa come $dm=\rho S dx$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

$$ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx=\rho S dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad\qquad v=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1}$$

Inoltre oltre allo spostamento $\xi(x,t)$ si propaga anche la forza $F(x,t)$. Ciò è verificabile riutilizzando l'epressione della forza nella Legge di Hooke (derivandola prima rispetto a t e poi rispetto a x) e ricordando il Teorema di Schwartz, secondo il quale in una derivata mista non dipende dall'ordine di derivazione:

$$\frac{\partial^2F}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(ES\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(ESv^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(ES\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(ESv^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2F}{\partial t^2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2F}{\partial t^2}\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2F}{\partial t^2} \qquad\qquad v=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{2}$$

Definizione: onde lognitudinali

Quando, come in questo caso, sia lo spostamento $\xi(x\pm vt)$ sia la forza $F(x\pm vt)$, campi che descrivono le onde che si propagano lungo l'asse x, sono paralleli alla direzione in cu si propaga la perturbazione, l'onda viene chiamata **onda longitudinale**.

1.2 Onde in una corda tesa

Quando si sposta rapidamente in direzione trasversale l'estremo di una corda tesa (con un estremo fisso) vediamo la perturbazione che si propaga lungo la corda da un estremo all'altro. Supponiamo di spostare leggermente la corda dalla sua posizione di equilibrio e andiamo a studiare le tensioni che agiscono su un segmento di corda **dl**. Per piccoli angoli α e α' possiamo introdurre le seguenti approssimazioni:

$$\cos\alpha = 1 \quad \cos\alpha' = 1 \qquad\qquad \sin\alpha = \tan\alpha \quad \sin\alpha' = \tan\alpha'$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\partial\xi}{\partial x} = S(x,t)}$$

inserire grafici

$$dF_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha) = 0$$

$$dF_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha) = T(\tan\alpha' - \tan\alpha) = T\left[S(x+dx,t) - S(x)\right] = TdS = T\frac{\partial S}{\partial x}dx = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx = T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

$$\textbf{Risultante} \qquad dF = T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx = \mathbf{dma} = dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

esprimendo la massa come $dm = \mu dx$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

$$T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx = \mu dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{3}$$

Definizione: onde trasversali

Quando, come in questo caso, le particelle del mezzo attraversato subiscono spostamenti in direzione perpendicolare alla direzione in cui si propaga l'onda l'onda viene chiamata **onda trasversale**.

1.3 Onde nei gas

Riprendiamo la definizione di **modulo di compressibilità** $\beta = -V\frac{dp}{dV}$. Il valore di β dipende da come la pressione varia con la densità
Supponiamo di avere del gas imperturbato (ρ_0, p_0) bloccato da due pistoni. Fornendo un impulso di pressione tramite i pistoni provociamo una compressione adiacente con una **conseguenti variazione di densità di massa**.

$$\rho = \rho + d\rho \qquad p = p_0 + dp$$

Densità

Considero un elemnto di gas di massa $dm = \rho_0 S(dx)$ che a seguito della perturbazione subisce uno spostamento che lo porta a stare tra

$$x + \xi(x, t') \quad \text{e} \quad x + dx + \xi(x + dx, t')$$

Così la sua dimensione diventa

$$x + dx + \xi(x + dx, t') - x - \xi(x, t') = dx + \xi(x + dx, t') - \xi(x, t') = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x}dx = dx\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

A partire da questa nuova espressione della "larghezza" dell'elemnto infinitesimo posso scrivere l'espressione della densità dopo la compressione:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{S(dx)}\frac{\rho_0 S(dx)}{S(dx)\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)} = \rho_0\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1}$$

Ora andremo ad applicare una semplificazione bizzarra. Se la deformazione specifica $|\varepsilon| = \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| << 1$, allora si può applicare la formula del binomio:

$$(1 + \varepsilon)^{-n} = 1 - n\varepsilon + \frac{n(n+1)}{2!}\varepsilon^2 \dots$$

Quindi posso scrivere la densità come

$$\rho \approx \rho_0\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

da cui la variazione

$$d\rho(x, t) = \rho - \rho_0 = -\rho_0\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{4}$$

in cui il segno meno indica ce se il volumetto è compresso la densità aumenta, mentre se si espande la densità diminuisce.

Pressione

Ad una variazione di densità corrisponde una variazione di pressione secondo la legge

$$\beta = \rho\frac{dp}{d\rho} \quad \rightarrow \quad dp(x, t) = p(x, t) - p_0 = \beta\frac{d\rho}{\rho}$$

da cui derivo che la pressione è

$$p(x, t) = \beta\frac{d\rho}{\rho_0} + p_0$$

Sostituendo l'espressione della densità trovata prima nella 4 scrivo

$$p(x, t) = \beta\frac{-\rho_0\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\rho_0} + p_0 = p_0 - \beta\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Forza

La variazione di pressione causa un movimento del gas e la risultante su dm è

$$\begin{aligned}
-dF = F(x,t') - F(x+dx.t') =& S\left[p(x,t') - p(x+dx,t')\right] \\
=& S(dp) \\
=& -S\frac{\partial p}{\partial x}dx \\
=& -S\frac{\partial}{\partial x}\left(p_0 - \beta\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)dx \\
=& S\beta\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx
\end{aligned}$$

$$\textbf{Risultante} \qquad -dF = S\beta\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx = \mathbf{dma} = \rho_0 S(dx)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\beta}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \tag{5}$$

2 Onde piane armoniche

Un tipo molto importante di onda piana è l'**onda armonica** la cui forma si scrive

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin\left(\boldsymbol{k}x \mp \boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\delta}\right)$$

dove k è il **numero d'onde**.

inserire grafici

Periodo spaziale Fissato un tempo $t = t_0$, definiamo la lunghezza d'onda λ come la periodicità spaziale dell'onda. Essendo λ lo spazio tra due creste d'onda possiamo calcolarla come $\lambda = x_2 - x_1 = 2\pi/k$, da cui si deduce che k è uguale al numero di lunghezze d'onda in un intervallo spaziale pari a 2π metri.

In generale il periodo spaziale può essere espresso tramite λ o k.

Lunghezza d'onda λ

La lungheza d'onda è lo spazio percorso dalla perturbaione nell'intervallo di tempo di un periodo T.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = vT$$

Periodo temporale Fissato unpunto nello spazio $x = x_0$, definiamo il periodo $T = t_2 - t_2$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

come l'intervallo temporale tra due istanti nei quali l'onda, essendo armonica, assume lo stesso valore.

Sapendo che la pulsazione è la velocità dell'onda nel percorrere un giro (2π), i due periodi dono legati dalla relazione

$$\lambda = vT$$

Quindi possiamo esprimere il periodo temporale tramite T, f, ω.

Tutte le espressioni della funzione d'onda sono:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin\left(kx \mp \omega t + \delta\right) \qquad \xi(x,t) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) + \delta\right] \qquad \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(x \mp vt\right) + \delta\right]$$

2.1 Analisi di Fourier

2.2 Onde sulla superficie di un liquido

2.3 Propagazione dell'energia in una barra solida

La propagazione di un campo che descrive in'onda è sempre accompagnato da una propagazione di energia. Osserviamo prima il fenomeno del flusso di energia legato alla propagazione di un'onda piana armonica in una barra solida andando a calcolare la potenzia media e l'energia per untià di volume ad essa associata.

inserire grafici

Per prima cosa mettiamo in evidenza le equazioni che entrano in gioco:

$$\textbf{Onda:}\quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Forza:}\quad F = -ES\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

L'espressione della potenza è

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} =& \vec{F} \cdot \vec{u} \\
=& -ES\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} \\
=& -ES\left[k\xi_0 \cos(kx - \omega t)\right]\left[-\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)\right] \\
=& ESk\omega\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

La potenza quindi è una cosinusoide traslata in alto di una sua ampiezza (con avvallamenti tangenti all'asse orizzontale). la potenza media è espirmibile come la retta che interseca la cosinusoide alla quota pari a metà la sua ampiezza; poi ricordandoci che

$$\boxed{v = \sqrt{E/\rho} \qquad E = v^2\rho} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{P}} =& \frac{1}{2}ESk\omega\xi_0^2 \\
=& \frac{1}{2}(v^2\rho)S\left(\frac{\omega}{v}\right)\omega\xi_0^2
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi^2 Sv \qquad (6)$$

Energia per unità di volume

Considero l'elemento infinitesimo di massa $dm = \rho dV = \rho S dx$ descrive un moto armonico con

$$\textbf{Posizione:}\quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Velocità}\quad v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Quindi l'energia meccanica risulta pari all'energia cinetica massima assunto dall'elemento dm, che si trova utilizzando la velocità massima $v_{\max} = \omega\xi_0$:

$$dU = \frac{1}{2}(dm)v_{\max}^2 = \frac{1}{2}\rho S(dx)\omega^2\xi_0^2 = \frac{1}{2}\rho V\omega^2\xi_0^2$$

Chiamiamo **densità di energia per unità di volume** il valore

$$\mathcal{W} = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

con la quale possiamo esprimere la potenza media come

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{W}Sv \qquad (7)$$

Intensità dell'onda

Definiamo l'intensità di un'onda com e**potenza media per unità di superficie**, quindi

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v$$

2.4 Propagazione dell'energia in una corda tesa

Studiamo ora lo stesso fenomeno ma in una corda tesa. La situazione è simile con la differenza che l'onda ora è trasversale.

inserire grafici

Per prima cosa mettiamo in evidenza le equazioni che entrano in gioco:

$$\textbf{Onda:} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Forza:} \quad F = T$$

L'espressione della potenza è

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} =& \vec{F} \cdot \vec{u} \\
=& T\frac{\partial \xi}{\partial t}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} \\
=& T\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} \\
=& Tk\omega\xi_0^2\cos^2(kx-\omega t)
\end{aligned}$$

Trovo la potenza media come prima esprimendo k e T come

$$\boxed{v = \sqrt{T/\mu} \qquad T = v^2\mu} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi^2 v \quad (8)$$

Energia per unità di volume

Considero l'elemento infinitesimo di massa $dm = \mu dx$ descrive un moto armonico con

$$\textbf{Posizione:} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Velocità} \quad v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega\xi_0\cos(kx - \omega t)$$

Quindi l'energia meccanica risulta pari all'energia cinetica massima assunto dall'elemento dm, che si trova utilizzando la velocità massima $v_{\max} = \omega\xi_0$:

$$dU = \frac{1}{2}(dm)v_{\max}^2 = \frac{1}{2}\rho S(dx)\omega^2\xi_0^2 = \frac{1}{2}\rho V\omega^2\xi_0^2$$

Chiamiamo **densità di energia per unità di volume** il valore

$$\mathcal{W} = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

con la quale possiamo esprimere la potenza media come

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{W}v \qquad (9)$$

2.5 Assorbimento dell'energia

2.6 Onde in più dimensioni

Prima di tutto definiamo **fronte d'onda** la superfici su cui in un certo istante la fase dell'onda è costante ($\phi = kx - \omega t$).

Per le onde piane il fronte d'onda è un piano che si sposta con velocità v dell'onda. Per caratterizzare la direzione di propagazione dell'onda introduciamo il **vettore di propagazione** $\vec{k}$ con $k = 2\pi/\lambda$ e verso uguale a quello di $\vec{v}$ e il vettore posizione $\vec{r}$ che individua la posizione di un punto P su un certo fronte d'onda. Con queste informazioni possiamo riscrivere la funzione d'onda come

$$\xi(r,t) = \xi_0 \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

In un sistema di tre coordinate l'equazione generale delle onde ammette altre soluzioni che rappresentano **onde sferiche** e **onde cilindriche**:

$$\nabla^2\xi(x,y,z,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi(x,y,z,t)}{\partial t^2}$$

Onde elastiche in una membrana tesa

Consideriamo una membrana piana tesa con tensione T. Supponiamo di spostare leggermente la membrana dalla sua posizione di equilibrio e andiamo a studioare le tensioni che agiscono su un'area $dxdy$.

Il ragionamento è uguale a quello fatto per la corda tesa, in questo caso però la tensione si distribuisce su tutto il lato $d*$ e diventa $T(d*)$:

inserire grafici

$$dF_x(x,y,z,t) = T(dx)\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial y^2}dy = T\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial y^2}dxdy$$
$$dF_y(x,y,z,t) = T\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial x^2}dx = T(dy)\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial x^2}dxdy$$

Risultante $\quad dF = T\left(\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial x^2}\right)dxdy = (\mathbf{dm})\mathbf{a} = \rho_s(dxdy)\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial t^2}$

esprimendo la massa come $dm = \rho_s(dxdy)$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

$$T\left(\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial x^2}\right)dxdy = \rho_s(dxdy)\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho_s}{T}\frac{\partial^2\xi(x,y,t)}{\partial t^2} \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \qquad (10)$$

Onde sferiche

Se il mezzo è *isotropo* è quindi la velocità di propagazione è uguale in tutte le direzioni, la funzoine d'**onda sferica armonica** è $\xi(r,t) = A(r)\sin(kr - \omega t)$ dove r è la distanza dalla sorgfente e $A(r)$ è l'ampiezza funzione di r.

Diciamo che la nostra sorgente emetta un'onda di intensità $I(r) = CA^2(r)$ dove C è una costante dipendente dal mezzo. Il punto fondamentale nella comprensione delle onde sferiche sta nel fatto che la potenza media trasmessa attraverso la superficie sferica $S = 4\pi r^2$ deve risultare costante ad ogni valore di r:

$$\mathcal{P}_m = IS = \text{cost.}$$

$$\mathcal{P}_m = CA^2 4\pi r^2 = \text{cost.}$$

$$A(r) = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_m}{4\pi r^2}} = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{\mathcal{P}_m}{\pi}}$$

Risulta quindi che l'ampiezza è inversamente proporzionale alla distanza r e quindi può essere scritta come $A = \xi_0/r$.

$$\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r}\sin(kr - \omega t) \quad (11)$$

2.7 Pacchetti d'onde

2.8 Velocità di fase e velocità di gruppo

2.9 Effetto Doppler

2.10 Onda d'urto

3 Onde stazionarie

4 Fluidi