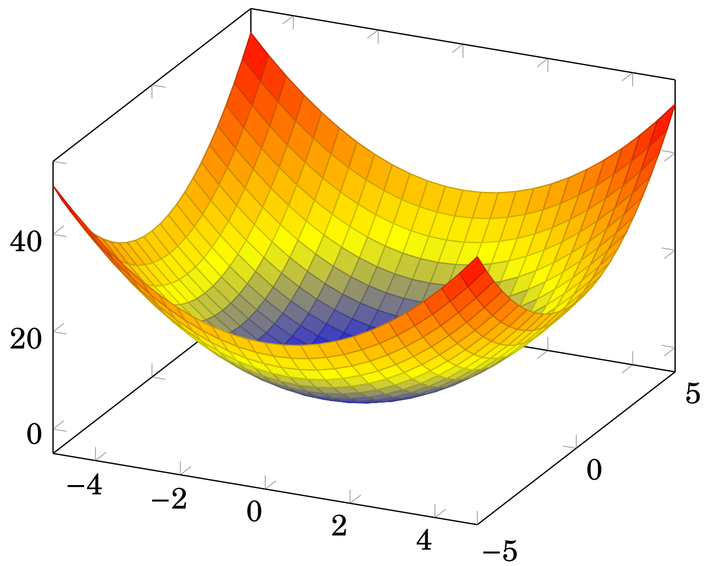
Analisi III

Riassunto da: *"Analisi Matematica 2 - Claudio Canuto, Anita Tabacco"*



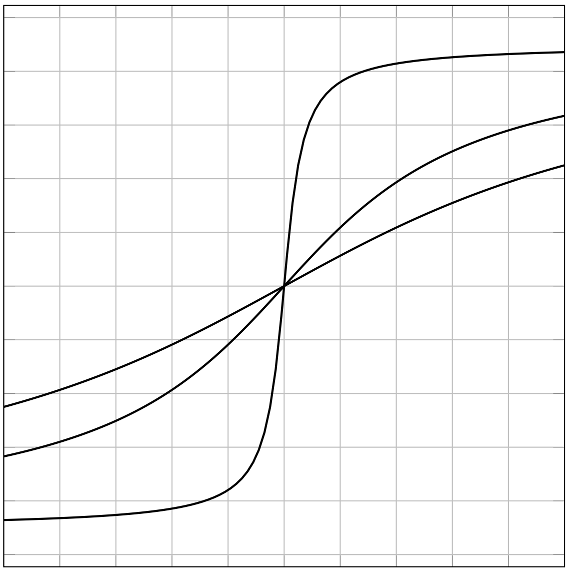
Corso di Laurea in Fisica - Corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Settembre 2024

Indice

1 Successioni di funzioni **2**
1.1 Limiti di successioni 2

2 Serie di funzioni **3**
Convergenza della serie 3

1 Successioni di funzioni



1.1 Limiti di successioni

Definizione: Convergenza puntuale

Definizione: Convergenza uniforme

esempio 1

esempio 2

esempio 3

Teorema 1

dimostrazione:

□

Teorema 2

dimostrazione:

$\square$

esempio 4

Teorema

2 Serie di funzioni

Presa $(f_n)_n$ successione di funzioni, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), chiamiamo **serie di funzioni**, indicata con

$$\sum_n f_n(x)$$

la successione delle ridotte

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

Convergenza della serie Diciamo che la serie converge (puntualmente o uniformemente) su un insieme $E \subseteq A$ se lo fa la successione delle ridotte. Si andrà quindi a studiare il limite di S_N che chiamiamo somma della serie.

Teorema 1S

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se

- f_n continue su $E \subseteq A$;
- $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $E \subseteq A$ alla somma $S(x)$

Allora $S(x)$ è continua su E.

Teorema 2S

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $E = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, se

- f_n continue su $E \subseteq A$;
- $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $E \subseteq A$ alla somma $S(x)$

Allora

$$\int_a^b \sum f_n(x)dx \quad = \quad \sum \int_a^b f_n(x)dx$$

Definizione:

$$I_s = \{x \quad \text{la serie considerata} \sum f_n(x) \text{converge semplicemente}\}$$

per la serie $\sum x^n$ si ha che $I_s = (-1, 1)$

$$I_a = \{x \quad \text{la serie considerata} \sum |f_n(x)| \text{converge semplicemente}\}$$

Teorema: m-test o criterio di convergenza totale

Date

- $(f_n)_n$ successione di funzioni su $E \subseteq \mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$);
- $(m_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ successione di numeri reali positivi.

tali che

- (H_1) $\quad |f_n(x)| \leq m_n \ \forall x \in E, \forall n;$
- (H_2) $\quad \sum m_n(x) < +\infty.$

Allora la serie $\sum f_n(x)$ converge assolutamente in ongi punto di E è uniformemente su E $\implies$ la serie converge totalmente.