# Relazione di laboratorio - Pendolo semplice

*Misura del periodo di un pendolo semplice*

Federico Cesari
1096759

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
4 aprile 2024

# Indice

# 1 Scopo dell'esperienza

L'esperienza di laboratorio ha lo scopo di studiare il periodo di un pendolo semplice del quale conosciamo le espressioni del periodo teorico (in condizioni ideali e prive di attrito) al variare della sua lunghezza e dell'angolo di partenza. Verrà quindi misurato il periodo e se ne osserverà la variazione in funzione dell'angolo, della lunghezza e della massa appesa ad esso.

# 2 Premesse teoriche

aggiungi equazioni

# 3 Strumentazione

| **Strumento** | **Sensibilità** |
|---|---|
| Cr. Analogico | 0.2s |
| Cr. Digitale | 0.01s |
| Fotocellula | 0.001s |
| Goniometro | 1° |
| Asta graduata | 0.1cm |
| Calibro | 0.01mm |
| Bilancia digitale | 1g |

# 4 Scelta strumento di misura

Al fine di stabilire il migliore strumento di misura per le succesive misurazioni, registro 8 misure del periodo del pendolo prima con un angolo di partenza $\vartheta = 5°$ e poi con $\vartheta = 30°$ utilizzando un cronometro analogico, uno digitale e una fotocellula. Lo strumento che mostrerà discrepanze significative tra il periodo calcolato con $\vartheta = 5°$ e $\vartheta = 30°$ sarà quello utilizzato per i testi successivi. Procedo quindi con le misurazioni dei periodi del pendolo a cui è stata agganciata una sfera di massa $m = (110 \pm 1)g$

sistema valori per C.Analogico e capire se aggiungere errori per T medi.

| | **C.Analogico** | **C. Digitale** | **Fotocellula** |
|---|---|---|---|
| | $T(s) \pm 0.2s$ | $T(s) \pm 0.01s$ | $T(s) \pm 0.001s$ |
| | 1.6 | 1.63 | 1.702 |
| $\vartheta = 5°$ | 1.7 | 1.65 | 1.703 |
| | 1.5 | 1.60 | 1.703 |
| | 1.7 | 1.71 | 1.703 |
| | 1.7 | 1.71 | 1.703 |
| | 1.7 | 1.65 | 1.702 |
| | 1.6 | 1.70 | 1.703 |
| | 1.7 | 1.70 | 1.703 |
| $\mathbf{\bar{T}_5(s)}$ | **1.65** | **1.67** | **1.703** |
| $\sigma_{T_5}$ | 0.05 | 0.02 | 0.000 |

| | **C.Analogico** | **C. Digitale** | **Fotocellula** |
|---|---|---|---|
| | $T(s) \pm 0.2s$ | $T(s) \pm 0.01s$ | $T(s) \pm 0.001s$ |
| | 1.8 | 1.65 | 1.733 |
| $\vartheta = 30°$ | 1.7 | 1.67 | 1.733 |
| | 1.6 | 1.70 | 1.733 |
| | 1.7 | 1.62 | 1.733 |
| | 1.7 | 1.70 | 1.731 |
| | 1.8 | 1.72 | 1.733 |
| | 1.7 | 1.80 | 1.733 |
| | 1.6 | 1.69 | 1.732 |
| $\mathbf{\bar{T}_{30}(s)}$ | **1.70** | **1.69** | **1.715** |
| $\sigma_{T_{30}}$ | 0.08 | 0.03 | 0.0005 |

Da questi primi set di dati noto subito che la deviazione standard dei periodi misurati dal cronometro digitale è più grande della sensibilità dello strumento, quindi dovrei scegliere la deviazione standard come errore sulla singola misura.

Invece per evidenziare quale dei tre strumenti fornisca periodi significativamente differenti per i due angoli di partenza sottopongo le coppie di periodi medi a un test Z:

| Z | $\sigma_{\bar{T}_5}$ | $\sigma_{\bar{T}_{30}}$ |
|---|---|---|
| $z_{\text{an.}}$ | ***0.234*** | ***0.234*** |
| $z_{\text{dig.}}$ | ***0.170*** | ***0.132*** |
| $z_{\text{fot.}}$ | ***22.8*** | ***14.2*** |

Il test mostra che i periodi misurati con i cronometri analogico e digitale con ancgoli di partenza $\vartheta = 5°$ e $\vartheta = 30°$, risultano essere compatibili con livelli di significatività maggiori dell'80% (specifica bene i valori). Per quanto riguarda i periodi registrati con la fotocellula questi risultano appartenere a popolazioni differenti e posso quindi affermare che lo strumento che fornisce periodi significativamente differenti per i due angoli di partenza sia proprio la fotocellula.

## 5 Dipendenza dall'angolo

La prima parte dell'esperienza consiste nel verificare la dipendenza di $T$, periodo del pendolo a cui è stata attaccata una sferetta di legno di massa $m = (10 \pm 1)g$, da $\vartheta$, angolo di partenza. Per prima cosa si procede alla misurazoine della lunghezza del pendolo. Attraverso l'asta graduata misuro prima la distanza da terra alla cima del pendolo ($L_C$) e poi la distanza da terra al centro della sfera appesa ($L_F$)[1].

| **Cima** | **Fondo** |
|---|---|
| $L_C$(cm) $\pm$ 0.1cm | $L_F$(cm) $\pm$ 0.1cm |
| 89.0 | 16.8 |

Ricavo quindi la lunghezza del pendolo:

$$l = L_C + L_F = (72.2 \pm 0.2)\text{cm}.^2$$

A questo punto prendo tre misurazioni del periodo del pendolo, partendo da un angolo di partenza di 5°. Continuo a prendere le misure avanzando di 5° fino ad arrivare a 30°.

| | **5°** | **10°** | **15°** | **20°** | **25°** | **30°** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $T(s) \pm 0.001s$ | $T(s) \pm 0.001s$ | $T(s) \pm 0.001s$ | $T(s) \pm 0.001s$ | $T(s) \pm 0.001s$ | $T(s) \pm 0.001s$ |
| | 1.703 | 1.706 | 1.710 | 1.715 | 1.723 | 1.730 |
| | 1.702 | 1.706 | 1.710 | 1.715 | 1.723 | 1.731 |
| | 1.701 | 1.706 | 1.710 | 1.715 | 1.723 | 1.731 |
| **$\bar{T}$(s)** | **1.702** | **1.706** | **1.710** | **1.715** | **1.723** | **1.731** |

capire se aggiungere errori per T medi.

Dall'espressione del periodo del pendolo sappiamo che il periodo è direttamente proporzionale a $\sin(\vartheta/2)^2$, più precisamente:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4}\sin(\vartheta/2)^2\right]$$

Se dovessi riportare su un grafico i periodi sperimentali in funzione di $x = \sin(\vartheta/2)^2$ mi aspetto quindi un andamento lineare e più precisamente una retta del tipo

$$y = T_0 + \frac{T_0}{4}x$$

Per verificare ciò mi avvalgo del metodo dei minimi quadrati... inserire qualche informazione a riguardo

[1] Avrei potuto misurare il diametro della sfera con il calibro e aggiungere il raggio della sfera successivamente invece che includerlo nelle misura di cima e fondo, tuttavia la sensibilità dell'asta e il fatto che questa non fosse perfettamente perpendicolare ha reso gli errori di $L_C$ e $L_F$ troppo grossolani rendendo così inutile la maggiore cura nella misura del raggio.

[2] Propago l'errore linearmente ($(0.1 + 0.1)$ cm $= 0.2$cm) perché essendo solo due misure (per di più effettuate con un asta graduata imperfetta) rischio di sottostimare l'errore sommandolo in quadratura

### Minimi quadrati

Appurato che $T$ e $\sin(\vartheta/2)^2$ siano *teoricamente* linearmente correlati, è di mio interesse trovare quale retta della forma $y = A + Bx$ meglio interpola i dati sperimentali così da appurare se i valori misurati soddisfano la attesa teorica che $y$ sia lineare in $x$.

Posso fare questo avvalendomi del metodo dei minimi quadrati che ha proprio lo scopo di determinare i parametri che legano due variabili legate da essi, nel mio caso due variabili $x$ e $y$ legati da due parametri $A$ e $B$. Questo metodo necessita di alcune assunzioni importanti:

1. Le misure devono essere statisticamente indipendenti;
2. Una delle due variabili (sceglierò la $x$) deve avere errori trascurabili rispetto all'altra [3].
3. Gli errori della variabile $y$ devono essere distribuiti normalmente.

preso letteralmente dal Cannelli

Per rispettare la seconda assunzione confronto gli errori relativi delle mie due variabili ($\delta_x$ è l'errore assoluto, $\delta_x/x$ è l'errore relativo).

| **T** | | |
|---|---|---|
| $T(s)$ | $\delta_T(s)$ | $\delta_T/T$ |
| 1.702 | 0.001 | **0.000339** |
| 1.706 | 0.001 | **0.000338** |
| 1.710 | 0.001 | **0.000337** |
| 1.715 | 0.001 | **0.000336** |
| 1.723 | 0.001 | **0.000335** |
| 1.731 | 0.001 | **0.000333** |

| $y = \mathbf{sin}(\vartheta/\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$ | | |
|---|---|---|
| $y$ | $\delta_y$ | $\delta_y/y$ |
| 0.0019 | 0.00075 | **0.398** |
| 0.0076 | 0.0015 | **0.198** |
| 0.017 | 0.0023 | **0.132** |
| 0.030 | 0.0030 | **0.099** |
| 0.047 | 0.0037 | **0.078** |
| 0.067 | 0.0044 | **0.065** |

[4]

Come si può leggere nelle tabelle l'errore associato alle misure dei periodi è perfettamente trascurabile rispetto a quello associato al seno, quindi scelgo di portare le misure del periodo sull'asse $x$ e quelle del seno sull'asse $y$.

Procedo al calcolo dei parametri $A$ e $B$ e dei rispettivi errori:

$$\mathbf{A} = -3.68 \qquad \sigma_{\mathbf{A}} = 0.18$$

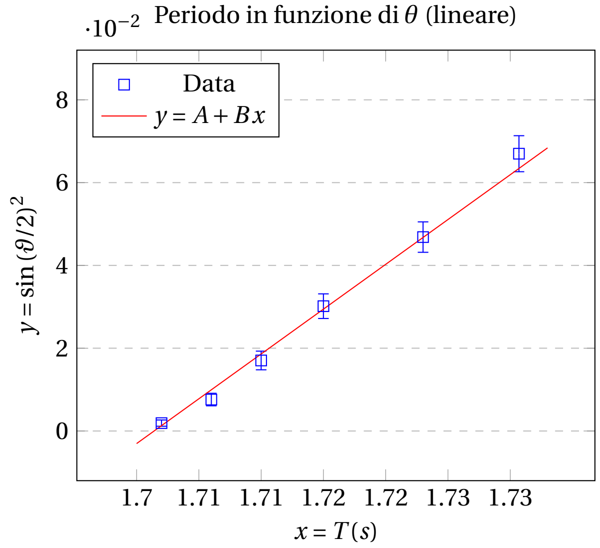
$$\mathbf{B} = 2.16 \qquad \sigma_{\mathbf{B}} = 0.10$$

[3] Giudico un errore come trascurabile rispetto all'altro quando si trovano in rapporto 1 a 3,4,5.

[4] Lascio 3 cifre significative negli errori relativi del periodo per evidenziarne le piccole discrepanze.

l'errore sulla x è da scrivere?

| $T(s) \pm \delta_T$ | $\sin(\vartheta/2)^2 \pm \delta_y$ |
|---|---|
| 1.702 | 0.0019 |
| 1.706 | 0.0076 |
| 1.710 | 0.0170 |
| 1.715 | 0.0302 |
| 1.723 | 0.0468 |
| 1.731 | 0.0669 |




La retta di "best-fit" può fornire altre importanti informazioni: per esempio nella retta

$$T = T_0 + \frac{T_0}{4}\sin(\vartheta/2)^2$$

il termine noto della retta è $T_0$ che rappresenta il periodo delle piccole oscillazioni. Nel mio caso invece (ho il seno in funzione di $T$) la retta è espressa come

$$\sin(\vartheta/2)^2 = 4\frac{T}{T_0} - 4$$

nella quale $T_0$ compare a denominatore del coefficiente angolare della retta. Posso allora ricavarlo imponendo

$$B = 4\frac{1}{T_0} \qquad T_0 = \frac{4}{B}$$

a cosa mi dovrebbe servire trovare il periodo delle piccole oscillazioni?
Ho quindi trovato anche il valore sperimentale del periodo delle piccole oscillazioni del mio pendolo:

$$\mathbf{T_0} = (1.85 \pm 0.09)\mathrm{s}$$

[5]

**Determinazione dell'accelerazione di gravità g**

Sappiamo le piccole oscillazioni del pendolo hanno periodo descritto da

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove $l$ è la distanza dalla cima del pendolo al centro di massa della sfera appesa ad esso, nel mio caso $l = (72.2 \pm 0.2)$cm. Dall'equazione precedente (e ricordando che $T_0 = 4/B$) troviamo l'espressione dell'accelerazione di gravità:

$$g = \frac{\pi^2 b^2 l}{4}$$

[5] L'errore di $T_0$ è $\sigma_{T_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_0}{\partial B}\sigma_B\right)^2} = \left|\frac{\partial T_0}{\partial B}\sigma_B\right| = \frac{4}{B^2}\sigma_B$

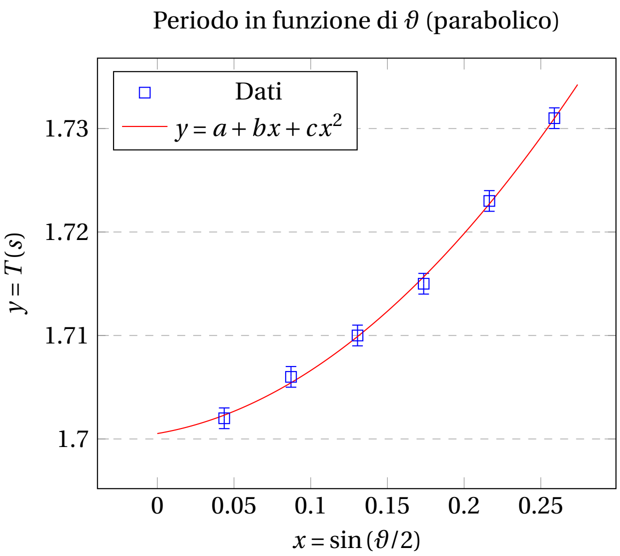
con errore associato

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2} \quad = \quad \sqrt{\left(\frac{B^2\pi^2}{4}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{lB\pi^2}{2}\right)^2 \sigma_B^2}$$

Posso quindi conlcudere e scrivere il valore sperimentale di **g** determinato dalle mie misurazioni:

$$\mathbf{g} = (830 \pm 81)\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

Sapendo che il valore dell'accelerazione di gravità terrestre vale circa $9.81 ms^{-2}$ si nota subito la differenza con il $g$ determinato sperimentalmente che risulta essere sottostimato del 15%. Le fonti di errore in gioco sono la lunghezza del pendolo $l$ e il coefficiente della retta $B$. (inserire il fatto che B sia il rapporto sin / T?)



Periodo in funzione di $\vartheta$ (parabolico)
Dati
$y = a + bx + cx^2$
1.73
1.72
1.71
1.7
$y = T(s)$
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
$x = \sin(\vartheta/2)$

# 6 Dipendenza dalla lunghezza

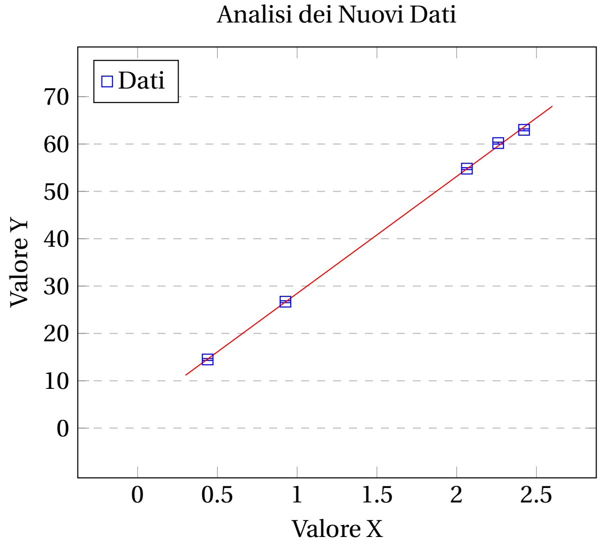



Figure 1: Rappresentazione grafica dei dati sperimentali con errori.

## 6.1 Confronto parametri retta

# 7 Dipendenza dalla massa

# 8 Conclusioni