Simulazione 6 - calcoli

Curva
Si consideri la curva chiusa $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ di parametrizzazione

$$\gamma(t) = \begin{cases} (3\cos t, 3\sin t) & \forall t \in [0, 2\pi] \\ (2+\cos t, -\sin t) & \forall t \in (2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

1. La curva è semplice. [vero / falso]
Falso: la curva non è semplice perché passa due volte per il punto $P = (3, 0)$. Infatti $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (3, 0)$.

2. La curva è regolare. [vero / falso]
Falso: la seconda componente di $\gamma(t)$, data da

$$y(t) = \begin{cases} 3\sin t & \forall t \in [0, 2\pi] \\ -\sin t & \forall t \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

non è di classe C^1. Infatti

$$y'(t) = \begin{cases} 3\cos t & \forall t \in [0, 2\pi) \\ -\cos t & \forall t \in (2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

e in particolare non esiste la derivata in 2π perché $\lim_{t\to 2\pi_-} y'(t) = 3$ e $\lim_{t\to 2\pi_+} y'(t) = -1$.

3. Lunghezza della curva.
La curva γ è la giustapposizione di due circonferenze semplici, la prima centrata nell'origine e di raggio 3 e la seconda di raggio 1, interna alla prima, e tangente alla prima nel punto $(3, 0)$. La lunghezza della curva è quindi $L = 6\pi + 2\pi = 8\pi$.

4. Baricentro della curva.
Il baricentro della curva è un punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ di componenti $x_0 = \frac{1}{L}\int_\gamma x\,ds$ e $y_0 = \frac{1}{L}\int_\gamma y\,ds$. Siccome

$$\int_\gamma x\,ds = \int_0^{2\pi} 9\cos t\,dt + \int_{2\pi}^{4\pi} (2+\cos t)\,dt = 4\pi$$
$$\int_\gamma y\,ds = \int_0^{2\pi} 9\sin t\,dt + \int_{2\pi}^{4\pi} (-\sin t)\,dt = 0$$

e $L = 8\pi$, si ottiene $P = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

5. Il sottoinsieme aperto e limitato A di $\mathbb{R}^2$ il cui bordo è Γ:

(a) *non è stellato ma è semplicemente connesso;*

(b) *A è stellato e semplicemente connesso;*

(c) *A è stellato ma non è semplicemente connesso;*

(d) *A non è né stellato né semplicemente connesso.*

L'insieme A è un cerchio privato di un altro cerchio più piccolo, interno al primo e ad esso tangente in un punto del bordo. Tale insieme non è stellato ma è semplicemente connesso. La risposta corretta è quindi la (a).

6. Circuitazione lungo Γ del campo $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.
Il campo in questione è l'esempio fondamentale di campo irrotazionale ma non conservativo sul proprio dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. È noto che la sua circuitazione lungo una circonferenza semplice, centrata nell'origine, di raggio qualunque e percorsa in senso antiorario vale 2π (lo si verifica per calcolo diretto). La curva Γ è la giustapposizione di due curve chiuse $\Gamma_1 =$ circonferenza semplice, centrata nell'origine, di raggio 3 e percorsa in senso antiorario, e $\Gamma_2 =$ circonferenza semplice, centrata in $(2,0)$, di raggio 1 e percorsa in senso orario. Siccome Γ_2 è contenuta in un sottodominio semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ad esempio nel semipiano destro, in tale dominio il campo è conservativo, per il lemma di Poincaré, e quindi la circuitazione di F lungo Γ_2 è nulla. In conclusione

$$\int_\Gamma F \cdot ds = \int_{\Gamma_1} F \cdot ds + \int_{\Gamma_2} F \cdot ds = 2\pi\,.$$

Campo
Si consideri il campo vettoriale

$$F_\alpha(x,y) = (y^3 \cos(xy), xy^\alpha \cos(xy) + 2y \sin(xy) + 2y)$$

dove α è un parametro reale.

1. Il dominio di F_α non dipende da α. [vero/falso]
Falso: ad esempio, se α è un intero positivo il dominio di F_α è $\mathbb{R}^2$, se $\alpha = \frac{1}{2}$ il dominio di F_α è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$.

2. Per quali valori di α il campo F_α è conservativo sul proprio dominio?
Condizione necessaria affinché il campo F_α sia conservativo sul proprio dominio D_α è che sia irrotazionale in D_α, cioè

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[xy^\alpha \cos(xy) + 2y\sin(xy) + 2y\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[y^3 \cos(xy)\right] \quad \forall (x,y) \in D_a \\
&\Leftrightarrow\ y^\alpha \cos(xy) - xy^{\alpha+1}\sin(xy) + 2y^2\cos(xy) = 3y^2\cos(xy) - xy^3\sin(xy) \quad \forall (x,y) \in D \\
&\Leftrightarrow\ \alpha = 2\,.
\end{aligned}$$

Per $\alpha = 2$ il dominio di F_α è tutto $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso. Quindi per il lemma di Poincaré, per $\alpha = 2$ e solo per tale valore, il campo F_α è conservativo sul proprio dominio.

3. Siano $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (2\pi, 1)$ e sia $\gamma = \overrightarrow{P_0P_1} \cup \overrightarrow{P_1P_2}$.
L'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma F_\alpha \cdot ds$
(a) assume lo stesso valore per qualunque valore di $\alpha > 0$, oppure

(b) dipende da α?
Parametrizziamo il segmento orientato $\overrightarrow{P_0P_1}$ con $\varphi(t) = (0, t)$, $t \in [0, 1]$ e calcoliamo

$$\int_{\overrightarrow{P_0P_1}} F_\alpha \cdot ds = \int_0^1 F_\alpha(0,t) \cdot (0,1)\, dt = \int_0^1 2t\, dt = 1\,.$$

Similmente, parametrizziamo il segmento orientato $\overrightarrow{P_1P_2}$ con $\varphi(t) = (t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$ e calcoliamo

$$\int_{\overrightarrow{P_1P_2}} F_\alpha \cdot ds = \int_0^{2\pi} F_\alpha(t,1) \cdot (1,0)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0\,.$$

Quindi $\int_\gamma F_\alpha \cdot ds = 1$ qualunque sia α e la risposta corretta è la (a).

4. Siano P_0 e P_2 come al punto precedente e $P_3 = (2\pi, 0)$. Sia $\widetilde{\gamma} = \overrightarrow{P_0P_3} \cup \overrightarrow{P_3P_2}$. L'integrale curvilineo $\displaystyle\int_{\widetilde{\gamma}} F_\alpha \cdot ds$
(a) vale 1 per i valori di α per cui il campo è conservativo, oppure
(b) vale 0 per i valori di α per cui il campo è conservativo, oppure
(c) vale -1 per i valori di α per cui il campo è conservativo, oppure
(d) assume lo stesso valore per qualunque valore di $\alpha > 0$?
Se $\alpha = 2$ il campo è conservativo in $\mathbb{R}^2$. Siccome le curve γ e $\widetilde{\gamma}$ hanno gli stessi estremi, per $\alpha = 2$ si ha che $\int_{\widetilde{\gamma}} F_\alpha \cdot ds = \int_\gamma F_\alpha \cdot ds = 1$. Quindi la risposta (a) è corretta mentre le risposte (b) e (c) sono errate. Per completezza, verifichiamo che anche la risposta (d) è errata. Se parametrizziamo il segmento orientato $\overrightarrow{P_0P_3}$ con $\varphi(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ otteniamo che

$$\int_{\overrightarrow{P_0P_3}} F_\alpha \cdot ds = \int_0^{2\pi} F_\alpha(t,0) \cdot (1,0)\, dt = 0\,.$$

Similmente, se parametrizziamo il segmento orientato $\overrightarrow{P_3P_2}$ con $\varphi(t) = (2\pi, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, abbiamo che

$$\int_{\overrightarrow{P_3P_2}} F_\alpha \cdot ds = \int_0^1 F_\alpha(2\pi,t) \cdot (0,1)\, dt = \int_0^1 \left[2\pi t^\alpha \cos(2\pi t) + 2t \sin(2\pi t) + 2t\right] dt = 0\,.$$

Siccome $\int_0^1 t^\alpha \cos(2\pi t)\, dt$ dipende da α (ad esempio, vale 0 se $\alpha = 1$ e vale $\frac{1}{2\pi^2}$ se $\alpha = 2$), anche la risposta (d) è errata.

Flusso
Sia C il cono ottenuto ruotando il triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$ attorno al lato verticale. Siano S_1 la porzione di piano orizzontale $z = 1$ facente parte del bordo di C e S_2 la superficie laterale del cono, entrambe orientate con normale uscente dal cono. Inoltre sia

$$F(x,y,z) = \left(3x - \frac{y^3}{3}, 3y + \frac{x^3}{3}, xyz\right).$$

1. Flusso del rotore di F attraverso S_1.
La superficie S_1 è una superficie cartesiana data da $S_1 = \varphi_1(D)$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+$

$y^2 \leq 1\}$ e $\varphi_1(x,y) = (x,y,1)$. Quindi $\varphi_x \wedge \varphi_y = (0,0,1)$ e il flusso del rotore di F attraverso S_1 vale

$$\int_{S_1} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(3y + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(3x - \frac{y^3}{3} \right) \right] dx \, dy = 2\pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \, .$$

2. Flusso del rotore di F attraverso S_2.

La superficie S_2 coincide a meno dell'orientazione con la superficie cartesiana data da $\varphi_2(D)$ dove D è come nel punto precedente e $\varphi_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Quindi, grazie al teorema di Stokes e siccome $\varphi_1|_{\partial D} = \varphi_2|_{\partial D}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma &= - \int_{\varphi_2(D)} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = - \int_{\varphi_2(+\partial D)} F \cdot ds \\ &= - \int_{\varphi_1(+\partial D)} F \cdot ds = - \int_{S_1} \operatorname{rot}(F) \cdot N \, d\sigma = -\frac{\pi}{2} \, . \end{aligned}$$

3. Flusso di F uscente da C.

Possiamo applicare il teorema della divergenza per calcolare il flusso di F uscente da C:

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz = \int_C (6 + xy) \, dx \, dy \, dz \, .$$

L'integrale $\int_C xy \, dx \, dy \, dz$ è nullo perché il dominio di integrazione è simmetrico rispetto a x e la funzione integranda è dispari rispetto a x. Resta quindi

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = 6 \operatorname{vol}(C) = 6 \, \frac{\pi}{3} = 2\pi \, .$$

Serie

Sia $f(x) = \dfrac{1}{3x - x^2}$.

1. La serie di Taylor di f centrata in $x_0 = 1$ è:

(a) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{2^{-n-1} + (-1)^n}{3} (x-1)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{2^{-n-1} + (-1)^{n+1}}{3} (x-1)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{2^{-n} + (-1)^n}{3} (x-1)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{2^{-n+1} + (-1)^n}{3} (x-1)^n$

La serie di Taylor di f centrata in $x_0 = 1$ è quella serie di potenze con coefficienti $a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$ per ogni $n = 0, 1, 2, ...$ In particolare deve essere $a_0 = \frac{1}{2}$ e $a_1 = -\frac{1}{4}$. Per verifica diretta, l'unica serie tra quelle elencate che soddisfa queste condizioni è la (a).

2. Insieme di convergenza della serie.
L'insieme di convergenza di una serie di Taylor di una data funzione razionale f è un intervallo aperto $(x_0 - R, x_0 + R)$ dove x_0 è il centro della serie e R è la distanza di x_0 dai punti singolari di f. Nel caso in questione $x_0 = 1$ e la funzione è singolare in 0 e in 3. Quindi $R = 1$ e l'insieme di convergenza della serie è l'intervallo $(0, 2)$.

3. Derivata quinta di f in $x_0 = 1$.
In base alle considerazioni già esposte al punto 1, si ha che

$$f^{(5)}(1) = 5!\, a_5 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1 - 2^6}{3 \cdot 2^6} = -\frac{5 \cdot 63}{2^3}\,.$$

4. Serie di Taylor di f' centrata in $x_0 = 1$.
Basta derivare termine a termine la serie di Taylor di f e si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{2^{-n-1} + (-1)^n}{3}(x-1)^n\right] &= \sum_{n\geq 0} \frac{n[2^{-n-1} + (-1)^n]}{3}(x-1)^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{n[2^{-n-1} + (-1)^n)]}{3}(x-1)^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3}\left[\frac{1}{2^{n+2}} - (-1)^n\right](x-1)^n\,.
\end{aligned}$$