Studi di funzione

Lo studio di funzione consiste nel determinare le singolarità e gli zeri di una funzione, specificandone il tipo. In particolare una singolarità può essere una *singolarità non isolata* oppure una *singolarità essenziale* oppure un *polo*; nell'ultimo caso bisogna determinare l'ordine del polo. Per quanto riguarda gli zeri bisogna determinarne l'ordine.

1 Determinare le singolarità di una funzione e il loro tipo

Le singolarità di una funzione sono i punti dove la funzione non è analitica. A parte il caso in cui la funzione sia funzione di z^* (nel qual caso non è mai analitica) e il caso delle funzioni polidrome[1], in generale le singolarità sono i punti dove

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \text{o non definito.}$$

Per determinare il tipo di singolarità, si deve innanzitutto capire se è una singolarità isolata o no. Le singolarità non isolate sono dei punti di accumulazione di singolarità, cioè affinchè z_0 sia una singolarità non isolata bisogna avere un numero infinito di singolarità che diventano sempre più fitte (cioè "si accumulano") man mano che ci si avvicina a z_0. Le singolarità isolate sono invece quei punti dove la funzione è singolare, ma nelle cui immediate vicinanze la funzione non è singolare. Cioè

$$z_0 \text{ è una singolarità isolata} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{l} \text{in } z_0 \ f(z) \text{ è singolare} \\ \text{e intorno a } z_0 \ f(z) \text{ è regolare.} \end{array}$$

Una volta identificate le singolarità isolate, bisogna determinare se si tratta di una singolarità essenziale o di un polo.

- Se si conosce lo sviluppo di Laurent di $f(z)$ intorno a z_0, un primo modo per capire se una singolarità isolata è una singolarità essenziale o un polo è di scrivere

[1] Le funzioni polidrome sono funzioni che possono assumere più di un valore. Si chiama *punto di diramazione* di una funzione polidroma un punto tale per cui la funzione è discontinua (cioè assume valori diversi) quando si percorre un giro su una circonferenza attorno a questo punto di raggio arbitrariamente piccolo.

Tipici esempi di funzioni polidrome sono z^α ($\alpha \notin \mathbb{Z}$) e $\ln z$, che hanno un punto di diramazione in $z = 0$. Fare un giro su una circonferenza di raggio ρ intorno all'origine significa andare dal punto $z = \rho e^{i\theta}$ al punto $w = \rho e^{i(\theta+2\pi)}$. Naturalmente w coincide con z, però:

$$w^\alpha = \left[\rho e^{i\theta+2\pi}\right]^\alpha = \rho^\alpha e^{i\alpha\theta+2\pi\alpha i} = \rho^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi\alpha i} = \left[\rho e^{i\theta}\right]^\alpha e^{2\pi\alpha i} = z^\alpha\, e^{2\pi\alpha i} \neq z^\alpha \qquad \alpha \notin \mathbb{Z}$$

$$\ln w = \ln\left(\rho e^{i\theta+2\pi}\right) = \ln\rho + \ln\left(e^{i\theta+2\pi i}\right) = \ln\rho + i\theta + 2\pi i = \ln\left(\rho e^{i\theta}\right) + 2\pi i = \ln z + 2\pi i \neq \ln z.$$

esplicitamente i termini dello sviluppo di Laurent:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k (z-z_0)^k \\ &= \dots + d_{-2}(z-z_0)^{-2} + d_{-1}(z-z_0)^{-1} + d_0 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \dots \\ &= \dots + \frac{d_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{d_{-1}}{z-z_0} + d_0 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Se i termini con le potenze negative di $(z - z_0)$ si estendono fino all'infinito, z_0 è una singolarità essenziale. Se invece le potenze negative si interrompono ad un certo $(z - z_0)^{-n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-n}^{+\infty} d_k (z-z_0)^k \\ &= d_{-n}(z-z_0)^{-n} + \dots + d_{-1}(z-z_0)^{-1} + d_0 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \dots \\ &= \frac{d_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{d_{-1}}{z-z_0} + d_0 + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

allora z_0 è un polo di ordine n.

- Un altro modo è usare la seguente proprietà dei poli di una funzione:

  z_0 è polo di ordine n di $f(z)$ se e solo se $f(z)$ si può scrivere:

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}, \qquad \text{con } g(z) \text{ regolare e non nulla in } z_0.$$

  Detto in altro modo:

  z_0 è polo di ordine n di $f(z)$ se e solo se

  $$\begin{gathered} f(z),\ (z-z_0)f(z),\ \dots (z-z_0)^{n-1} f(z) \quad \text{singolare in } z_0 \\ \text{e} \qquad (z-z_0)^n f(z) \quad \text{regolare e non nulla in } z_0 \end{gathered}$$

  Quindi si può procedere in sequenza:

  1. Prima si studia $f(z)$:

  $$\begin{aligned} f(z) \text{ regolare e non nulla in } z_0 &\Rightarrow z_0 \text{ è un punto regolare di } f(z) \\ f(z) \text{ singolare in } z_0 &\Rightarrow \begin{array}{l} z_0 \text{ è polo di ordine } n \geq 1 \\ \text{o sing. essenziale} \\ \text{e si passa al punto 2.} \end{array} \end{aligned}$$

2. Se $f(z)$ singolare in z_0, bisogna studiare $(z-z_0)f(z)$:

$$
\begin{array}{rcl}
(z-z_0)f(z) \text{ regolare e non nulla in } z_0 & \Rightarrow & z_0 \text{ è polo di ordine } n=1 \\
& & \text{(polo semplice) di } f(z) \\
(z-z_0)f(z) \text{ singolare in } z_0 & \Rightarrow & z_0 \text{ è zero di ordine } n\geq 2 \\
& & \text{o sing. essenziale} \\
& & \text{e si passa al punto 3.}
\end{array}
$$

3. Se $(z-z_0)f(z)$ singolare in z_0, bisogna studiare $(z-z_0)^2f(z)$:

$$
\begin{array}{rcl}
(z-z_0)^2f(z) \text{ regolare e non nulla in } z_0 & \Rightarrow & z_0 \text{ è polo di ordine } n=2 \text{ di } f(z) \\
(z-z_0)^2f(z) \text{ singolare in } z_0 & \Rightarrow & z_0 \text{ è polo di ordine } n\geq 3 \\
& & \text{o sing. essenziale} \\
& & \text{e si passa al punto 4.}
\end{array}
$$

4. ...

Si procede così fino a quando si trova un n per cui $(z-z_0)^nf(z)$ è regolare e non nulla in z_0. In questo caso z_0 è un polo di ordine n.

Se invece non troviamo questo n, possiamo concludere che z_0 è una singolarità essenziale. In altre parole se

$$(z-z_0)^mf(z) \text{ singolare in } z_0 \text{ per qualsiasi } m \quad\Rightarrow\quad z_0 \text{ è una singolarità essenziale.}$$

2 Determinare gli zeri di una funzione e il loro ordine

Per determinare gli zeri di una funzione si devono cercare tutti i punti dove la funzione si annulla. Quindi, affinché z_0 sia uno zero di $f(z)$ deve essere[2]:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0.$$

Per determinare l'ordine dello zero, si può procedere in tre modi:

- Se si conosce le sviluppo di Taylor di $f(z)$ intorno a z_0, un primo modo usa la definizione di zero di ordine n che asserisce che

$$z_0 \text{ è zero di ordine } n \text{ di } f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k \quad\Leftrightarrow\quad a_k=0,\ \forall\, k<n, \quad a_n\neq 0$$

  Quindi scrivendo esplicitamente lo sviluppo di Taylor mettendo in ordine le potenze di $(z-z_0)$ iniziando dalla più piccola

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k = a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\ldots$$

[2]Per le funzioni polidrome può succedere che in un punto di diramazione la funzione si annulli, ma questo non fa di quel punto uno zero della funzione. Infatti non saremmo in grado di determinarne l'ordine.

basta guardare il grado della prima potenza che compare nello sviluppo. Se la prima potenza è di grado 0 (cioè se $a_0 \neq 0$), allora z_0 non è uno zero. Se invece il grado della prima potenza che compare nello sviluppo è $n \neq 0$ (cioè se $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ e $a_n \neq 0$), allora z_0 è uno zero di ordine n.

- Un altro modo usa il fatto che z_0 è zero di ordine n se e solo

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f'(z) = \cdots = \lim_{z \to z_0} f^{(n-1)}(z) = 0$$

$$\text{e} \qquad f^{(n)}(z) \quad \text{regolare non nulla in } z = z_0.$$

Quindi si possono studiare le derivate in sequenza:

1. Prima si studia $f(z)$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} f(z) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad z_0 \text{ non è zero di } f(z) \\ \lim_{z \to z_0} f(z) = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_0 \text{ è zero di ordine } n \geq 1 \text{ e si passa al punto 2.} \end{aligned}$$

2. Se $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$, bisogna studiare $f'(z)$:

$$\begin{aligned} f'(z) \text{ regolare e non nulla in } z_0 \quad &\Rightarrow \quad z_0 \text{ è zero di ordine } n = 1 \\ &\qquad \text{(zero semplice) di } f(z) \\ \lim_{z \to z_0} f'(z) = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_0 \text{ è zero di ordine } n \geq 2 \\ &\qquad \text{e si passa al punto 3.} \end{aligned}$$

3. Se $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f'(z) = 0$, bisogna studiare $f''(z)$:

$$\begin{aligned} f''(z) \text{ regolare e non nulla in } z_0 \quad &\Rightarrow \quad z_0 \text{ è zero di ordine } n = 2 \text{ di } f(z) \\ \lim_{z \to z_0} f''(z) = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_0 \text{ è zero di ordine } n \geq 3 \\ &\qquad \text{e si passa al punto 4.} \end{aligned}$$

4. ...

Si procede così fino a quando una derivata è diversa da zero in z_0. L'ordine della prima derivata diversa da zero è l'ordine dello zero.

- Un altro modo è usare la proprietà:

$$z_0 \text{ è zero di ordine } n \text{ di } f(z) \text{ se e solo se } f(z) \text{ si può scrivere:}$$

$$f(z) = (z - z_0)^n \, g(z), \qquad \text{con } g(z) \text{ regolare e non nulla in } z_0.$$

Detto in altro modo:

$$z_0 \text{ è zero di ordine } n \text{ di } f(z) \text{ se e solo se}$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = \cdots = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n-1}} = 0,$$

$$\text{e} \qquad \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \quad \text{regolare non nulla in } z = z_0.$$

Quindi si può procedere in sequenza:

1. Prima si studia $f(z)$:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} f(z) \neq 0 \ &\Rightarrow \ z_0 \text{ non è zero di } f(z) \\ \lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \ &\Rightarrow \ z_0 \text{ è zero di ordine } n \geq 1 \text{ e si passa al punto 2.} \end{aligned}$$

2. Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$, bisogna studiare $f(z)/(z-z_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z-z_0} \text{ regolare e non nulla in } z_0 \ &\Rightarrow \ z_0 \text{ è zero di ordine } n = 1 \\ &\qquad \text{(zero semplice) di } f(z) \\ \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = 0 \ &\Rightarrow \ z_0 \text{ è zero di ordine } n \geq 2 \\ &\qquad \text{e si passa al punto 3.} \end{aligned}$$

3. Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}[f(z)/(z-z_0)] = 0$, bisogna studiare $f(z)/(z-z_0)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \text{ regolare e non nulla in } z_0 \ &\Rightarrow \ z_0 \text{ è zero di ordine } n = 2 \text{ di } f(z) \\ \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} = 0 \ &\Rightarrow \ z_0 \text{ è zero di ordine } n \geq 3 \\ &\qquad \text{e si passa al punto 4.} \end{aligned}$$

4. ...

Si procede così fino a quando $\lim_{z\to z_0}[f(z)/(z-z_0)^n]$ è diversa da zero per un certo n, che è quindi l'ordine dello zero.

3 Studio del prodotto di due funzioni

In questa sezione vediamo come studiare funzioni che possono essere scritte come prodotto di due funzioni:

$$f(z) = f_1(z)\, f_2(z)$$

Per studiare tali funzioni conviene spesso studiare le funzioni $f_1(z)$ e $f_2(z)$ separatamente, cioè determinare gli zeri e le singolarità delle funzioni $f_1(z)$ e $f_2(z)$ separatamente.
Prima di tutto, gli zeri di $f(z)$ vanno cercati tra gli zeri di $f_1(z)$ e tra gli zeri di $f_2(z)$, cioè

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to z_0} f_1(z) = 0 \quad \text{e/o} \quad \lim_{z\to z_0} f_2(z) = 0.$$

Analogamente, le singolarità di $f(z)$ vanno cercate tra le singolarità di $f_1(z)$ e tra le singolarità di $f_2(z)$, cioè

$$f(z) \text{ singolare in } z_0 \quad \Rightarrow \quad f_1(z) \text{ singolare in } z_0 \quad \text{e/o} \quad f_2(z) \text{ singolare in } z_0.$$

Il caso da studiare con attenzione è quando, delle due funzioni f_1 e f_2, una funzione ha uno zero in un punto z_0 e l'altra ha una singolarità nello stesso punto. Se per esempio in un punto z_0 f_1 ha uno zero, mentre f_2 ha una singolarità[3] abbiamo:

$$\lim_{z \to z_0} f_1(z) = 0, \qquad f_2(z) \text{ singolare in } z_0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = f_1(z)\, f_2(z) = ?$$

In questo caso per studiare

$$f(z) = f_1(z)\, f_2(z)$$

si può procedere confrontando gli sviluppi in serie di f_1 e f_2 intorno a z_0.

Tuttavia, nel caso degli zeri e dei poli di f_1 e f_2, si possono sfruttare le proprietà degli zeri e dei poli di una funzione per arrivare a delle regole generali.

- **$f_1(z)$ e $f_2(z)$ sono regolari e non nulle in z_0**

$f_1(z)$ è regolare e non nulla in z_0 e $f_2(z)$ è regolare e non nulla in z_0	$\Rightarrow$	$f(z)$ è regolare e non nulla in z_0

- **$f_1(z)$ ha uno zero in z_0, $f_2(z)$ è regolare e non nulla in z_0**

  Se $f_1(z)$ ha uno zero di ordine n_1 in z_0, allora $f_1(z)$ si può scrivere:

  $$f_1(z) = (z - z_0)^{n_1} g_1(z),$$

  con $g_1(z)$ regolare e non nulla in z_0. Quindi $f(z)$ può essere scritta:

  $$f(z) = (z - z_0)^{n_1} g_1(z)\, f_2(z) = (z - z_0)^{n_1} g(z)$$

  con $g(z) = g_1(z) f_2(z)$ regolare e non nulla in z_0. Ma questo implica che $f(z)$ ha uno zero di ordine n_1 in z_0.

  Riassumendo:

$f_1(z)$ ha uno zero di ordine n_1 in z_0 e $f_2(z)$ è regolare e non nulla in z_0	$\Rightarrow$	$f(z)$ ha uno zero di ordine n_1 in z_0

[3] Non serve trattare separatamente il caso in cui f_1 ha una singolarità, mentre f_2 ha uno zero, poiché il prodotto è commutativo ed è indifferente quale funzione chiamiamo f_1 e quale f_2. Non tratteremo quindi separatamente i casi che si possono ricavare dai casi trattati scambiando semplicemnte f_1 con f_2.

- **Sia $f_1(z)$ che $f_2(z)$ hanno uno zero in z_0**

  Se $f_1(z)$ ha uno zero di ordine n_1 in z_0 e $f_2(z)$ ha uno zero di ordine n_2, allora $f_1(z)$ che $f_2(z)$ si possono scrivere:

$$f_1(z) = (z-z_0)^{n_1} g_1(z), \qquad f_2(z) = (z-z_0)^{n_2} g_2(z)$$

  con $g_1(z)$ e $g_2(z)$ regolari e non nulle in z_0. Quindi $f(z)$ può essere scritta:

$$f(z) = (z-z_0)^{n_1} g_1(z)\,(z-z_0)^{n_2} g_2(z) = (z-z_0)^{n_1+n_2} g_1(z)\,g_2(z) = (z-z_0)^{n_1+n_2} g(z)$$

  con $g(z) = g_1(z)g_2(z)$ regolare e non nulla in z_0. Ma questo implica che $f(z)$ ha uno zero di ordine $n_1 + n_2$ in z_0.

  Riassumendo:

$f_1(z)$ ha uno zero di ordine n_1 in z_0 e $f_2(z)$ ha un zero di ordine n_2 in z_0	$\Rightarrow$	$f(z)$ ha uno zero di ordine $n_1 + n_2$ in z_0

- **$f_1(z)$ ha un polo in z_0, $f_2(z)$ è regolare e non nulla in z_0**

  Se $f_1(z)$ ha un polo di ordine n_1 in z_0, si può scrivere:

$$f_1(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_0)^{n_1}},$$

  con $g_1(z)$ regolare e non nulla in z_0. Quindi $f(z)$ può essere scritta:

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_0)^{n_1}}\, f_2(z) = \frac{g_1(z)\, f_2(z)}{(z-z_0)^{n_1}} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_1}}$$

  con $g(z) = g_1(z)f_2(z)$ regolare e non nulla in z_0. Ma questa implica che $f(z)$ ha un polo di ordine n_1 in z_0.

  Riassumendo:

$f_1(z)$ ha un polo di ordine n_1 in z_0 e $f_2(z)$ è regolare e non nulla in z_0	$\Rightarrow$	$f(z)$ ha un polo di ordine n_1 in z_0

- **Sia $f_1(z)$ che $f_2(z)$ hanno un polo in z_0**

  Se $f_1(z)$ ha un polo di ordine n_1 in z_0 e $f_2(z)$ ha un polo di ordine n_2, allora $f_1(z)$ che $f_2(z)$ si possono scrivere:

$$f_1(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_0)^{n_1}}, \qquad f_2(z) = \frac{g_2(z)}{(z-z_0)^{n_2}}$$

  con $g_1(z)$ e $g_2(z)$ regolari e non nulle in z_0. Quindi $f(z)$ può essere scritta:

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_0)^{n_1}}\,\frac{g_2(z)}{(z-z_0)^{n_2}} = \frac{g_1(z)\,g_2(z)}{(z-z_0)^{n_1+n_2}} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_1+n_2}}$$

con $g(z) = g_1(z)g_2(z)$ regolare e non nulla in z_0. Ma questo implica che $f(z)$ ha un polo di ordine $n_1 + n_2$ in z_0.

Riassumendo:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1(z) \text{ ha un polo di ordine } n_1 \text{ in } z_0 \\ \text{e} \\ f_2(z) \text{ ha uno polo di ordine } n_2 \text{ in } z_0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f(z) \text{ ha un polo di} \\ \text{ordine } n_1 + n_2 \text{ in } z_0 \end{array}}$$

- **$f_1(z)$ ha un polo in z_0, $f_2(z)$ ha uno zero in z_0**

  Se $f_1(z)$ ha un polo di ordine n_1 in z_0 e $f_2(z)$ ha uno zero di ordine n_2, allora $f_1(z)$ che $f_2(z)$ si possono scrivere:

$$f_1(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_0)^{n_1}}, \qquad f_2(z) = (z-z_0)^{n_2} g_2(z)$$

con $g_1(z)$ e $g_2(z)$ regolari e non nulle in z_0. Quindi $f(z)$ può essere scritta:

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_0)^{n_1}}\, g_2(z)\,(z-z_0)^{n_2} = (z-z_0)^{n_2-n_1}\, g_1(z)\, g_2(z) = (z-z_0)^{n_2-n_1}\, g(z)$$

con $g(z) = g_1(z)g_2(z)$ regolare e non nulla in z_0. Da qui segue che, se $n_1 > n_2$, allora $n = n_1 - n_2 > 0$ e

$$f(z) = (z-z_0)^{n_2-n_1} g(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_1-n_2}} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n}} \quad \text{ha un polo di ordine } n \text{ in } z_0.$$

Viceversa, se $n_1 < n_2$, allora $n' = n_2 - n_1 > 0$ e

$$f(z) = (z-z_0)^{n_2-n_1} g(z) = (z-z_0)^{n'} g(z) \qquad \text{ha uno zero di ordine } n' \text{ in } z_0.$$

Invece, se $n_1 = n_2$, avremo:

$$f(z) = (z-z_0)^{0} g(z) = g(z) \qquad \text{è regolare e non nulla in } z_0.$$

Riassumendo:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1(z) \text{ ha un polo di ordine } n_1 \text{ in } z_0 \\ \text{e} \\ f_2(z) \text{ ha un zero di ordine } n_2 \text{ in } z_0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Se } n_1 > n_2 & \begin{array}{l} f(z) \text{ ha un polo di} \\ \text{ordine } n_1 - n_2 \text{ in } z_0 \end{array} \\ \text{Se } n_1 < n_2 & \begin{array}{l} f(z) \text{ ha uno zero di} \\ \text{ordine } n_2 - n_1 \text{ in } z_0 \end{array} \\ \text{Se } n_1 = n_2 & \begin{array}{l} f(z) \text{ è regolare e} \\ \text{non nulla in } z_0 \end{array} \end{cases}}$$