CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Raccolta di temi d'esame – 2012

MECCANICA LAGRANGIANA

(ML1) Si consideri un punto materiale di massa m, soggetto alla forza peso e vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di equazione $z = -\frac{1}{r}$ (in coordinate cilindriche (r, θ, z) con l'asse z verticale e orientato verso l'alto).

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
(2) Individuare le costanti del moto.
(3) Trovare, in funzione dei dati iniziali $(r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)$, il valore minimo $r_{\min}$ della coordinata radiale che il punto può assumere lungo la traiettoria.
(4) Scrivere l'integrale che rappresenta il tempo necessario perché il punto raggiunga il valore $r_{\min}$ a partire dalla posizione iniziale data.

(ML2) Si consideri un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi senza attrito su una guida curva posta in un piano verticale fisso. La forma della guida è descritta dall'equazione $y = f(x)$, dove le coordinate x e y sono, rispettivamente, orizzontale e verticale, e f è una funzione incognita. Scrivere l'integrale che fornisce il tempo necessario al punto materiale, posto in un punto A della guida con velocità iniziale nulla, per raggiungere un secondo punto B (supponendo che B si trovi più in basso).

(ML3) Si consideri un punto materiale di massa m, libero di muoversi nello spazio tridimensionale, soggetto a un insieme di forze elastiche corrispondenti a N molle con lunghezza a riposo nulla. La i-ma molla ($i = 1, \ldots N$) ha costante elastica k_i e ha l'estremo fisso nel punto di coordinate $(x_{(i)}, y_{(i)}, z_{(i)})$. Scrivere la Lagrangiana del sistema, individuare la configurazione di equiibrio stabile, calcolare le frequenze caratteristiche e mostrare che il sistema, quali che siano il numero N di molle, le loro costanti elastiche e i punti a cui sono attaccate, è equivalente a un oscillatore armonico isotropo (cioè tutte le molle si possono sostituire con un'unica molla di costante elastica opportuna, ottenendo gli stessi moti).

(ML4) Si consideri un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi senza attrito in un piano orizzontale, restando a distanza costante r da un punto O dello stesso piano. Al punto sono attaccate due molle, di massa e lunghezza a riposo trascurabili e di uguale costante elastica k. Una ha l'altro estremo fisso nel punto (del piano) avente coordinate $(0, 3r)$ (supponendo che il punto O sia nell'origine); l'altra molla ha l'estremo fisso in un altro punto di coordinate (x_c, y_c).

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
(2) Discutere l'esistenza e la stabilità delle configurazioni di equilibrio, al variare delle coordinate del punto di attacco (x_c, y_c) della molla.

MECCANICA RELATIVISTICA

(MR1) Si consideri nello spaziotempo di Minkowski l'insieme di tutti i *boost* nella direzione x^1:

(1) mostrare che questo insieme forma un flusso di trasformazioni (qual è il parametro gruppale?);
(2) calcolare il generatore infinitesimo di tale flusso e il suo rilevamento $\hat{X}$;
(3) mostrare che il flusso è una simmetria per la Lagrangiana di una particella libera, $L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$, e scrivere la costante del moto noetheriana corrispondente.

(MR2) Una sorgente luminosa puntiforme, intermittente, emette un lampo di luce al secondo per un osservatore in quiete rispetto alla sorgente. Calcolare l'intervallo temporale con cui arrivano due lampi di luce consecutivi per un osservatore che si muove verso la sorgente con velocità v.

(MR3) Due eventi P_A e P_B nello spaziotempo risultano simultanei per un dato osservatore; per lo stesso osservatore la distanza spaziale fra P_A e P_B è di 1 secondo luce. Discutere quale sia l'intervallo temporale (con segno) fra i due eventi per un secondo osservatore in moto rettilineo uniforme rispetto al primo con velocità v_{tr}, in funzione della direzione e del modulo di v_{tr}.

(MR4) (a) Calcolare le componenti del quadripotenziale A_μ che corrispondono a un campo magnetico B costante diretto lungo l'asse z. (b) Trovare le simmetrie della Lagrangiana $L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu + eA_\mu u^\mu$, dove A_μ è il quadripotenziale trovato al punto precedente. (c) Scrivere le costanti del moto corrispondenti a tali simmetrie.

MECCANICA HAMILTONIANA

(MH1) Si consideri lo spazio delle fasi $\mathbb{R}^2$, con coordinate canoniche (q,p). Si mostri che un cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} q = q(Q,P) \\ p = p(Q,P) \end{cases}$$

è una trasformazione canonica se e solo se il determinante jacobiano è costante e uguale a 1.

(MH2) Si consideri il seguente cambio di coordinate $(q,p) \mapsto (Q,P)$ in $T^*\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} P = -q^2 \\ Q = f(q)\, p \end{cases}$$

Determinare la funzione $f(q)$ affinché la trasformazione sia canonica, e trovare la sua funzione generatrice $S(q,Q)$.

(MH3) Nello spazio delle fasi $T^*\mathbb{R}^3$, con coordinate $(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3)$, si considerino i due campi vettoriali

$$\begin{cases} X_{(1)} = q^3 \frac{\partial}{\partial q^2} - q^2 \frac{\partial}{\partial q^3} + p_3 \frac{\partial}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} \\ \\ X_{(2)} = q^3 \frac{\partial}{\partial q^1} - q^1 \frac{\partial}{\partial q^3} + p_3 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_3} \end{cases}$$

(1) Mostrare che i due campi vettoriali $X_{(1)}$ e $X_{(2)}$ sono entrambi hamiltoniani, e trovare le funzioni hamiltoniane $f_{(1)}, f_{(2)}$ corrispondenti.
(2) Calcolare il commutatore dei due campi, $[X_{(1)}, X_{(2)}]$, e trovare la funzione hamiltoniana del campo che si ottiene.

(MH4) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per un pendolo piano (non linearizzato), costituito da un punto di massa m vincolato a muoversi senza attrito su una circonferenza di raggio l posta in un piano verticale, sotto l'azione della forza peso; Si scriva l'espressione (integrale) che fornisce la soluzione S di tale equazione.