Analisi II - 2023/24 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta -2 luglio 2024

Esercizio 1. [5pt] Sia dato il campo scalare

$$f(x,y) = \sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2} - x.$$

(a) Dopo aver determinato e disegnato il dominio D di f, stabilire se è un sottoinsieme aperto, chiuso, limitato del piano (giustificando la risposta).

(b) Giustificare la differenziabilità di f in $(\sqrt{3},1)$ e determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(\sqrt{3},1,1-\sqrt{3})$.

Soluzione. (a) Si ha

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 \le 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \le \sqrt{x^2+y^2}-2 \le 1\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9\right\}. \end{aligned}$$

Il dominio è dunque la corona circolare chiusa di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 3. Si tratta di un insieme limitato e chiuso, quindi compatto.
(b) Per ogni (x,y) interno a D si ha:

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}} - 1,$$

$$f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}}.$$

Osserviamo che $(\sqrt{3},1)\in D$ e le derivate parziali esistono e sono continue in un intorno di $(\sqrt{3},1)$, pertanto f è differenziabile in tale punto. Inoltre, vale:

$$f(\sqrt{3},1) = 1-\sqrt{3}, \qquad f_x(\sqrt{3},1) = -1, \qquad f_y(\sqrt{3},1) = 0.$$

Dunque l'equazione del piano tangente richiesto è $x+z-1=0$.

Esercizio 2. [3 pt] Calcolare o dimostrare che non esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)\sqrt{1-\cos y^2}}{x^2(y^2+|x|)}.$$

Soluzione: Scegliendo $y=0$ e $0\neq x\to 0$ risulta

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{0}{x|x|} = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

D'altra parte, scegliendo $x=y^2$, risulta

$$\frac{\sin(y^4)\sqrt{1-\cos y^2}}{y^4(y^2+|y^2|)} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{y\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Segue che il limite non esiste.

Esercizio 3. [4 pt] Sia data la curva $\gamma(t) = (e^t-1, \log(1-t^2))$ per $t\in(-1,1)$.

(i) Si dica, giustificando la risposta, se γ è una curva regolare e se ne determini il sostegno.

(ii) Si calcoli la derivata del campo scalare $f(x,y) = (x+1)^3 + e^y$ lungo la curva γ in $t=\frac{1}{2}$.

Soluzione: (i) Si ha che $\gamma \in C^1((-1,1))$ e $\gamma'(t) = (e^t, -\frac{2t}{1-t^2}) \neq (0,0)$ per ogni $t \in (-1,1)$ in quanto la prima componente non si annulla mai. Ne segue che γ è una curva regolare. Per determinare il sostegno di γ consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = \log(1-t^2) \end{cases} ;$$

dalla prima equazione si ottiene $t = \log(1+x)$ e, sostituendo nella seconda equazione, otteniamo $y = \log(1 - \log^2(1+x))$. Poiché $t \in (-1,1)$, si ha $x \in (e^{-1}-1, e-1)$. Pertanto il sostegno di γ è l'insieme

$$\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (e^{-1}-1, e-1), y = \log(1-\log^2(1+x))\}.$$

(ii) Per la regola della catena si ha: $(f\circ\gamma)'(\frac{1}{2}) = \langle \nabla f(\gamma(\frac{1}{2})), \gamma'(\frac{1}{2})\rangle$. Dopo aver calcolato $\gamma(\frac{1}{2}) = (\sqrt{e}-1, \log(\frac{3}{4}))$, $\gamma'(\frac{1}{2}) = (\sqrt{e}, -\frac{4}{3})$ e $\nabla f(x,y) = (3(x+1)^2, e^y)$ otteniamo:

$$(f\circ\gamma)'\left(\frac{1}{2}\right) = \left\langle \left(3(\sqrt{e}-1+1)^2, e^{\log(\frac{3}{4})}\right), \left(\sqrt{e}, -\frac{4}{3}\right)\right\rangle = 3e\sqrt{e} - 1.$$

Esercizio 4. [4 pt] Determinare tutti i punti critici del campo scalare

$$f(x,y,z) = x^2y - y^2 - \frac{1}{2}x^2 - \log(1+z^2)$$

e studiare la loro natura. Esiste un punto di massimo globale per f? (Giustificare la risposta)

Soluzione: f è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Si ha

$$\partial_x f = 2xy - x, \qquad \partial_y f = x^2 - 2y, \qquad \partial_z f = -\frac{2z}{1+z^2}$$

per cui i punti critici sono dati dalle soluzioni di

$$\begin{cases} 2xy - x = 0 \\ x^2 - 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x(2y-1) = 0 \\ y = \frac{1}{2}x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x = 0$ oppure $y = \frac{1}{2}$. Nel primo caso dalla seconda ricaviamo $y = 0$. Mentre se $y = \frac{1}{2}$ allora sostituendo nella seconda si ricava l'equazione $x^2 = 1$ che ha due soluzioni $x = -1$ oppure $x = 1$. Quindi si hanno tre punti critici: $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (-1, \frac{1}{2}, 0)$ e $P_3 = (1, \frac{1}{2}, 0)$. Le derivate parziali seconde sono

$$\partial_{xx} f = 2y - 1, \quad \partial_{yx} f = \partial_{xy} f = 2x, \quad \partial_{yy} f = -2,$$

$$\partial_{zz} f = -\frac{2(1+z^2) - 4z^2}{(1+z^2)^2}, \quad \partial_{xz} f = \partial_{zx} f = 0, \quad \partial_{yz} f = \partial_{zy} f = 0.$$

Pertanto

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Essendo la matrice diagonale con elementi sulla diagonale tutti negativi deduciamo che $H_f(0,0,0)$ è definita negativa, e $(0,0,0)$ è un punto di massimo locale (stretto).
Per quanto concerne i punti P_2, P_3, si ha

$$H_f\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

e

$$H_f\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

In entrambi i casi le matrici sono non singolari in quanto $\det\left(H_f\left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)\right) = \det\left(H_f\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)\right) = 8 > 0$. Possiamo quindi applicare il criterio di Jacobi-Sylvester, e dato che la successione dei determinanti dei minori principali di Nord-Ovest, in ambo i casi, è 0,-4,8, allora, essendo la successione dei segni, né $(+,+,+)$, né $(-,+,-)$ abbiamo che tali matrici sono indefinite. Quindi sia P_2 che P_3 sono punti di sella.
Infine f non ammette massimo assoluto in quanto la restrizione $f(x,1,0) = \frac{1}{2}x^2 - 1 \to +\infty$, se $x \to +\infty$.

Esercizio 5. [4 pt] Si consideri l'equazione

$$(1 + \log x)^2 + (e^y - x)\cos(xy) = 5 - e.$$

a) Giustificare il fatto che l'equazione data definisce implicitamente in un intorno di $x = e$ un'unica funzione $y = \phi(x)$ tale che $\phi(e) = 0$.

b) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $\phi(x)$ nel punto $(e, 0)$.

Soluzione: Poniamo $f(x,y) := (1+\log x)^2 + (e^y - x)\cos(xy)$, allora $f \in C^1(A)$, dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ e l'equazione si scrive come $f(x,y) = 5 - e$.

a) Si verifica che $f(e,0) = 5 - e$, cioè $x = e$, $y = 0$ è una soluzione. Si verifica che

$$f_y(x,y) = e^y\cos(xy) - x(e^y - x)\sin(xy),$$

quindi

$$f_y(e,0) = 1.$$

In particolare $f_y(e,0) \neq 0$ e il teorema di Dini assicura l'esistenza di ϕ avente le proprietà richieste.

b) Si verifica che

$$f_x(x,y) = \frac{2(1+\log x)}{x} - \cos(xy) - y(e^y - x)\sin(xy)$$

e quindi $f_x(e,0) = \frac{4}{e} - 1$ e dall'espressione della derivata della funzione ϕ fornita dal teorema del Dini abbiamo

$$g'(e) = -\frac{f_x(e,0)}{f_y(e,0)} = 1 - \frac{4}{e}.$$

Allora l'equazione della retta tangente al grafico di ϕ nel punto $(e,0)$ è quindi $y = (1 - \frac{4}{e})(x - e)$ ovvero $y = (1 - \frac{4}{e})x - e + 4$.

Esercizio 6. [4 pt] Calcolare

$$\int_\Omega \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove Ω è la regione del primo quadrante compresa tra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$.
Soluzione: Osserviamo che Ω è y-semplice in quanto

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^2 x\,dx \int_{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^2 x\left[\log(x^2+y^2)\right]_{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{4-x^2}} \\
&= \int_0^2 x\left[\log 4 - \log\left(\frac{3}{4}x^2 + 1\right)\right]dx = 4\log 2 - \int_0^2 x\log\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)dx \\
&= 4\log 2 - \frac{2}{3}\int_1^4 \log t\,dt = -\frac{4}{3}\log 2 + 2.
\end{aligned}$$

Esercizio 7. [4 pt] Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}.$$

[**Suggerimento**: Si suggerisce di integrare per fili e usare il cambiamento di variabili $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$ per il calcolo dell'integrale doppio].

Soluzione: Integrando per fili, si ottiene:

$$\text{vol}(E) = \iint_D dxdy \int_0^{\sqrt{xy}} dz = \iint_D \sqrt{xy}\, dxdy,$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}.$$

Per calcolare l'integrale doppio possiamo usare il cambiamento di variabili $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$, da cui si ottiene $(x,y) = \phi(u,v) = (u^2, v^2)$. Poiché $\det J_\phi(u,v,w) = 4uv$, risulta:

$$\text{vol}(E) = 4 \iint_{D'} uv\, dudv$$

dove

$$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}.$$

Dunque, si ha:

$$\text{vol}(E) = 4 \int_0^1 u^2 \int_0^{1-u} v^2\, dv = \frac{4}{3} \int_0^1 u^2(1-u)^3\, du = \frac{4}{3} \int_0^1 (u^2 - u^5 - 3u^3 + 3u^4)\, du = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{45}.$$

Esercizio 8. [4 pt] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

Soluzione. La serie è chiaramente a termini positivi, quindi la convergenza semplice coincide con quella assoulta. Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n n!} = \frac{3 \cdot 3^n (n+1) n! n^n}{(n+1)(n+1)^n 3^n n!} = \\ &= \frac{3n^n}{n^n(1+1/n)^n} = \frac{3}{(1+1/n)^n}.\end{aligned}$$

Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{(1+1/n)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

e quindi la serie diverge.