Analisi II - 2020/21 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 2 luglio 2021

Esercizio 1. Si consideri il campo scalare definito da

$$f(x,y)=\sqrt{6-x^2-y^2}-e^{\sqrt{x+y}}.$$

(i) Determinare il dominio D di f e rappresentarlo graficamente. Stabilire inoltre se è aperto o chiuso oppure nessuno dei due casi e determinarne la frontiera.
(ii) Verificare che f è differenziabile in $(1,1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z=f(x,y)$ nel punto $(1,1,2-e^{\sqrt{2}})$.
(iii) Dire, giustificando la risposta, se f ammette massimo e/o minimo assoluto su D.

Soluzione: (i) Il dominio è l'insieme

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 6, y\ge -x\}.$$

La frontiera di D è

$$\mathrm{Fr}(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=6, y\ge -x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0, x^2+y^2<6\}$$

ed è tutta contenuta in D, pertanto D è chiuso.
(ii) Le derivate parziali di f nei punti interni a D sono date da

$$f_x(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{6-x^2-y^2}}-\frac{e^{\sqrt{x+y}}}{2\sqrt{x+y}},$$

$$f_y(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}-\frac{e^{\sqrt{x+y}}}{2\sqrt{x+y}}$$

e sono continue su tutto l'interno di D. Osservando che $(1,1)$ è un punto interno a D, risulta quindi che f è di classe C^1 in un intorno di $(1,1)$, dunque in particolare è differenziabile in $(1,1)$. Osservando che

$$f_x(1,1)=-\frac{\sqrt{2}+e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}},\ f_y(1,1)=-\frac{\sqrt{2}+e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}, f(1,1)=2-e^{\sqrt{2}},$$

si ha che l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1,1,2-e^{\sqrt{2}})$ è

$$z=2-e^{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}+e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}(x-1)-\frac{\sqrt{2}+e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}(y-1).$$

(iii) Osserviamo che D, oltre che chiuso, è anche limitato perché è contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{6}$, dunque è compatto. Poiché f è continua su D, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo assoluti su D.

Esercizio 2. Si calcoli o si dimostri la non esistenza del seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(1-e^{xy^2}\right)\tan x}{|y|^a}$$

al variare del parametro $a\ge 0$.
Suggerimento: studiare separatamente i casi $0\le a\le 2$ e $a>2$.

Soluzione: La funzione è definita su $\mathbb{R}^2$ privato dell'asse x. Risulta $1-e^{xy^2}\sim -xy^2$ e $\tan x\sim x$ per $(x,y)\to(0,0)$. Dunque, studiare il limite dato è equivalente a studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-x^2y^2}{|y|^a}.$$

Detta $g(x,y) = \frac{-x^2y^2}{|y|^a}$, osserviamo prima di tutto che g è identicamente nulla lungo l'asse y, dunque, se il limite esiste, deve valere 0. Ora se $0 \le a \le 2$, in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine risulta $|g(x,y)| = x^2|y|^{2-a} \le x^2 \to 0$ per $x \to 0$, dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ per $a \in [0,2]$. Al contrario, se $a > 2$, il limite non esiste. Infatti, basta restringere la funzione g lungo la curva $x = |y|^{\frac{a-2}{2}}$ che passa per l'origine. Su tale curva la g vale identicamente 1.

Esercizio 3. Determinare tutti i punti critici del campo scalare

$$f(x,y) = xy\log(xy^2) + x^2y$$

e studiare la loro natura. Esistono punti di minimo globale per f? (Giustificare la risposta)

Soluzione: La funzione f è definita e di classe C^2 su

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \neq 0\}.$$

Le derivate parziali di f sono

$$f_x(x,y) = y(\log(xy^2) + 1 + 2x), \quad f_y(x,y) = x(\log(xy^2) + 2 + x).$$

Pertanto, troviamo i punti critici di f risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y(\log(xy^2) + 1 + 2x) = 0 \\ x(\log(xy^2) + 2 + x) = 0 \end{cases}.$$

Risolvendolo si ottengono i punti critici $P_0 = (1, e^{-\frac{3}{2}})$ e $P_1 = (1, -e^{-\frac{3}{2}})$. La matrice Hessiana di f è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y\left(\frac{1}{x} + 2\right) & \log(xy^2) + 2x + 3 \\ \log(xy^2) + 2x + 3 & \frac{2x}{y} \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 3e^{-\frac{3}{2}} & 2 \\ 2 & 2e^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a $2 > 0$ e $a_{11} = 3e^{-\frac{3}{2}} > 0$. Quindi per il test dei minori $H_f(P_0)$ risulta definita positiva e quindi P_0 è un punto di minimo locale per f. Invece

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -3e^{-\frac{3}{2}} & 2 \\ 2 & -2e^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a $2 > 0$ e $a_{11} = -3e^{-\frac{3}{2}} < 0$, pertanto per il test dei minori la matrice è definita negativa e P_1 è un punto di massimo locale per f. Osserviamo che $f(x,x) = 3x^2\log x + x^3 \to +\infty$ per $x \to +\infty$, per cui P_1 non è punto di massimo globale. Inoltre $f(1,y) = y\log(y^2) + y \to -\infty$ per $y \to -\infty$, quindi P_0 non è punto di minimo globale.

Esercizio 4. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definite come $f(x,y) = (xy, 2, e^{x+y})$ e $g(u,v,w) = (u^2v, w^2)$.

(i) Calcolare la matrice Jacobiana della funzione $g \circ f$ in un generico punto di $\mathbb{R}^2$.

(ii) Verificare che $g \circ f$ è localmente invertibile in un intorno di $(2,-1)$.

Soluzione: (i) Osserviamo che f, g sono entrambe di classe C^1 nei rispettivi domini, quindi differenziabili e che

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{pmatrix}.$$

Pertanto, per la regola della catena, si ha:

$$J_{g\circ f}(x,y) = J_g(f(x,y))J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy & x^2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{x+y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xy^2 & 4x^2y \\ 2e^{2(x+y)} & 2e^{2(x+y)} \end{pmatrix}.$$

(ii) Nel punto $(2,-1)$ in particolare si ha

$$J_{g\circ f}(2,-1) = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 2e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $48e^2 \neq 0$. Pertanto, per il teorema di inversione locale (TIL), la funzione $g \circ f$ è localmente invertibile in un intorno di $(2,-1)$.

Esercizio 5. Si consideri la superficie σ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u - v \\ z = u + v \end{cases}, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Verificare che σ è una superficie regolare;

b) Determinare il piano tangente al suo sostegno nel punto $(1,0,2)$.

c) Scrivere il sostegno di σ come grafico di una funzione della forma $x = g(y,z)$. Di che tipo di superficie si tratta?

Soluzione: a) La funzione $\sigma(u,v) = (uv, u-v, u+v)$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Inoltre

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ perché la seconda e la terza riga sono linearmente indipendenti.
b) Osserviamo che $(1,0,2) = \sigma(1,1)$. Il piano tangente richiesto ha equazione data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - z + 1 = 0.$$

c) Dalla seconda e dalla terza delle equazioni parametriche della superficie si ricava che $u = \frac{y+z}{2}$ e $v = \frac{z-y}{2}$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene $x = \frac{z^2-y^2}{4}$, funzione il cui grafico è per l'appunto il sostegno di σ. Osserviamo che si tratta di un paraboloide iperbolico.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A y\,dxdy,$$

dove

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y + x \geq 1, x \geq y\}.$$

Soluzione: Possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2$, dove

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - x \leq y \leq x\}$$

e

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Si ha:

$$\int_{A_1} y\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{1-x}^{x} yd, dy = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [x^2 - (1-x)^2]\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8},$$

mentre

$$\int_{A_2} y\,dxdy = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left[1 - x^2 - (1-x)^2\right]\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{\sqrt{2}-1}{12}.$$

In conclusione si ha che

$$\int_A y\,dxdy = \frac{7-4\sqrt{2}}{24}.$$

Esercizio 7. Calcolare la massa di un solido C con densità di massa $\mu(x,y,z) = ze^{1/xy}$ che occupa la regione

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \le x \le 2, 1/x \le y \le 2/x, 0 \le yz \le 1\right\}.$$

Soluzione: Integrando per strati si ha

$$m(C) = \int_A ze^{1/xy}\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 dx \iint_{A_x} ze^{1/xy}\,dy\,dz,$$

dove $A_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 1/x \le y \le 2/x, 0 \le yz \le 1\} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le xy \le 2, 0 \le yz \le 1\}$. Utilizzando il cambiamento di variabili $u = xy, v = yz$, da cui si ottiene $y = u/x, z = vx/u$, che ha determinante jacobiano $1/u$, si ha

$$\iint_{A_x} ze^{1/xy} = x\int_1^2 \int_0^1 \frac{v}{u^2} e^{1/u}\,dvdu = x\int_1^2 \frac{1}{u^2}e^{1/u} \cdot \int_0^1 v\,dv = \frac{x}{2}(e - \sqrt{e}),$$

da cui segue che

$$m(C) = \frac{1}{2}(e - \sqrt{e})\int_1^2 x\,dx = \frac{3}{4}(e - \sqrt{e}).$$

Esercizio 8. (solo per gli studenti immatricolati a partire dal 2019/20). Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\sin\left(\frac{\log n^n}{n^3}\right).$$

Soluzione: Osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi da un certo n in poi. Infatti $\frac{\log n^n}{n^3} = \frac{\log n}{n^2} \to 0$ per $n \to \infty$ e dunque possiamo supporre che da un certo n in poi $0 < \frac{\log n^n}{n^3} < \frac{\pi}{2}$ e dunque $\sin\left(\frac{\log n^n}{n^3}\right) > 0$. Inoltre, si ha

$$\sqrt{n}\sin\left(\frac{\log n}{n^2}\right) \sim \sqrt{n}\cdot\frac{\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n^{3/2}}.$$

Osserviamo infine che $\sum_{n\ge1} \frac{\log n}{n^{3/2}}$ converge perché $\log n = o(n^\delta)$ per $n \to \infty$ per ogni $\delta > 0$, dunque la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente per confronto con la serie armonica generalizzata.