Simulazione 9 - calcoli

Curva

Si consideri la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ di parametrizzazione

$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t + \sin^3 t, \cos^3 t - \sin^3 t\right)\ , \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

1.-2.-3. Descrizione della curva γ

γ è una curva chiusa e semplice, infatti $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ e, presi $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$, abbiamo

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \iff \begin{cases} \cos^3 t_1 = \cos^3 t_2 \\ \sin^3 t_1 = \sin^3 t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases} \iff t_1 = t_2.$$

La curva non è regolare; ad esempio $\gamma'(0) = (0, 0, 0)$.

Per determinarne il verso di percorrenza osserviamo che

$$\gamma(0) = (1, 1),\ \gamma(\pi/2) = (1, -1),\ \gamma(\pi) = (-1, -1),\ \gamma(3\pi/2) = (-1, 1),$$

e deduciamo che la crva viene percorsa in senso orario.

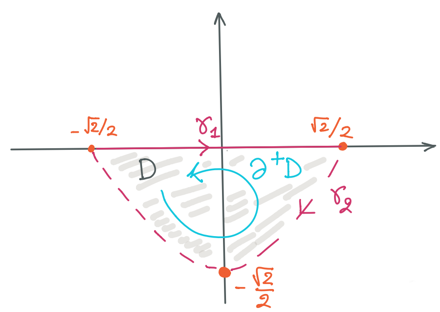
4. Detto D il dominio definito dalla parte di semipiano inferiore $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ racchiuso tra il supporto della curva γ e l'asse delle ascisse, calcolare larea di D.

La curva interseca l'asse $y = 0$ quando $t = \pi/4, 5\pi/4$ rispettivamente nei punti $(-\sqrt{2}/2, 0)$ e $(\sqrt{2}/2, 0)$; è inoltre contenuta nel semipiano inferiore quando $t \in [\pi/4, 5\pi/4]$. Il bordo della regione D, percorso in senso orario, possiamo quindi scriverlo come giustapposizione $\partial^- D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad t \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

e

$$\gamma_2(t) = \gamma(t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$



Il teorema di Gauss-Green permette quindi il calcolo

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial^+ D} x\, dy = -\int_{\partial^- D} x\, dy = -\int_{\gamma_1} x\, dy - \int_{\gamma_2} x\, dy = -\int_{\gamma_2} x\, dy.$$

Essendo $\gamma'(t) = \left(\ldots, -3\cos^2 t \sin t - 3\sin^2 t \cos t\right)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\text{Area}(D) &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(\cos^3 t + \sin^3 t\right)\left(3\cos^2 t \sin t + 3\sin^2 t \cos t\right)\, dt \\ &= 3\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(\cos^5 t \sin t + \sin^5 t \cos t + \sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t\right)\, dt \\ &= 3\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2 t \sin^2 t\, dt = \frac{3}{4}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin^2(2t)\, dt = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

Campo
Si considerino i seguenti campi vettoriali dipendenti dal parametro reale a:

$$F_a(x,y,z) = \left(2x + z^2, ze^{y^2} + 2zy^2e^{y^2}, ye^{y^2} + axz\right)$$

$$G_a(x,y,z) = F_a(x,y,z) + \left(0, \frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

1. Valore del parametro, $a = \hat{a}$, che rende il campo F_a conservativo.
Il dominio di F_a è tutto $\mathbb{R}^3$, ogni valore di a; è quindi un aperto semplicemente connesso. L'esattezza di F_a equivale quindi alla sua chiusura. Imponiamo dunque le condizioni

$$\frac{\partial F^1}{\partial y} = \frac{\partial F^2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F^1}{\partial z} = \frac{\partial F^3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F^2}{\partial z} = \frac{\partial F^3}{\partial y},$$

dove abbiamo chiamate F^1, F^2, F^3 le componenti del campo F_a. La prima e la terza sono verificate per ogni valore di a; la seconda invece equivale a $2z = az$, che impone $a = 2$.

2. Per il valore determinato al punto precedente trovare il potenziale che vale 5 nel punto $(1,0,0)$.
Quando $a = 2$ il campo F_2 diventa

$$F_2(x,y,z) = \left(2x + z^2, ze^{y^2} + 2zy^2e^{y^2}, ye^{y^2} + 2xz\right);$$

volendo U tale che $\nabla U = F_2$, usiamo delle integrazioni successive per ottenere

$$U(x,y,z) = x^2 + xz^2 + f(y,z)$$

dove f deve soddisfare $f_y(y,z) = ze^{y^2} + 2zy^2e^{y^2}$. Otteniamo quindi $f(y,z) = yze^{y^2} + g(y)$ per qualche funzione g. Imponendo $2xz + f_z(y,z) = ye^{y^2} + 2xz$ concludiamo che per ogni $C \in \mathbb{R}$ la funzione

$$U_C(x,y,z) = x^2 + xz^2 + yze^{y^2} + C$$

è un potenziale per il campo. Determiniamo la costante C:

$$5 = U_C(1,0,0) = 1 + C \quad \Longrightarrow \quad C = 4.$$

3. Dominio di $G_{\hat{a}}$
Il dominio di G_2 è $\mathbb{R}^3$ privato della retta $(x,0,0)$, che un insieme connesso, ma non semplicemente connesso.

Flusso
Si considerino la superficie parametrica $S = r(D)$ con

$$D = [1,2] \times [0,1], \quad r(u,v) = (v^2, u^2, uv),$$

il campo $F(x,y,z) = \left(0, y, 1 - \frac{x^2}{2}\right)$ e le curve

$$\begin{cases} \phi_1(t) = (0, t^2, 0), \ t \in [1,2] \\ \phi_2(t) = (t^2, 4, 2t), \ t \in [0,1] \\ \phi_3(t) = (1, t^2, t), \ t \in [1,2] \\ \phi_4(t) = (t^2, 1, t), \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

1. La superficie S è semplice e regolare in ogni punto.
Essendo $r_u = (0, 2u, v)$ e $r_v = (2v, 0, u)$, si ha $r_u \wedge r_v = (2u^2, 2v^2, -4uv)$, che si annulla se e solo se $(u,v) = (0,0) \notin D$. La superficie risulta quindi essere regolare.

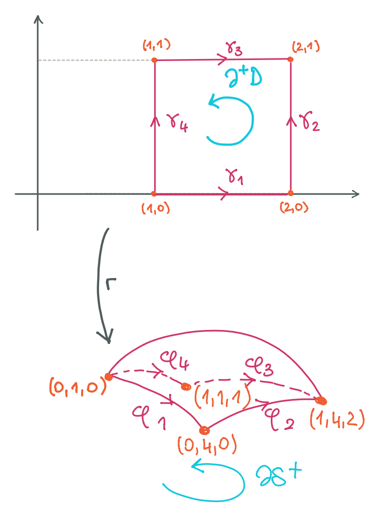
2. Descrivere il bordo di S orientato positivamente

$\partial^+ S$ è l'immagine del bordo di D, orientato positivamente, $\partial^+ D$. Introducendo le parametrizzazioni

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0), \ t \in [1,2] \\ \gamma_2(t) = (2, t), \ t \in [0,1] \\ \gamma_3(t) = (t, 1), \ t \in [1,2] \\ \gamma_4(t) = (1, t), \ t \in [0,1] \end{cases}$$

si ha $\partial^+ D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (-\gamma_3) \cup (-\gamma_4)$.
Quindi $\partial^+ S = \phi_1 \cup \phi_2 \cup (-\phi_3) \cup (-\phi_4)$, con

$$\begin{cases} \phi_1(t) = r(\gamma_1(t)) = (0, t^2, 0), \ t \in [1,2] \\ \phi_2(t) = r(\gamma_2(t)) = (t^2, 4, 2t), \ t \in [0,1] \\ \phi_3(t) = r(\gamma_3(t)) = (1, t^2, t), \ t \in [1,2] \\ \phi_4(t) = r(\gamma_4(t)) = (t^2, 1, t), \ t \in [0,1]. \end{cases}$$



3. Calcolo del flusso del rotore di F attraverso S
Il calcolo del flusso risulta semplice, senza applicare il teorema di Stokes; infatti $\text{rot}F = (0, x, 0)$, quindi

$$\text{rot}F(r(u,v)) \cdot (r_u \wedge r_v) = (0, v^2, 0)(\ldots, 2v^2, \ldots) = 4v^4$$

e

$$\int_S \text{rot}F \, d\sigma = \int_D 2v^4 \, dudv = \frac{2}{5}.$$

Serie
Si consideri la serie di funzioni di variabile reale $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ dove $f_n(x) = (1 - 2x^2)^n$.

1. Insieme di convergenza semplice della serie.
Fissato x, la serie è una serie geometrica di ragione $(1-2x^2)$ che quindi converge se e solo se

$$-1 < 1-2x^2 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < -2x^2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-1,0) \cup (0,1)$$

2. Insieme di convergenza uniforme della serie.
La serie converge uniformemente in tutti i sottoinsiemi compatti dell'insieme di convergenza semplice. Converge quindi uniformemete in $[1/2, 2/3]$ e quindi anche in $(1/2, 2/3)$.

3. Funzione somma.
Ricordando che

$$\sum_{0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{per ogni } q \in (-1,1),$$

otteniamo che per ogni $x \in (-1,0) \cup (0,1)$

$$\sum_{0}^{+\infty} (1-2x^2)^n = \frac{1}{1-(1-2x^2)} = \frac{1}{2x^2}.$$

4. Insieme di convergenza semplice della serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
Essendo $f_n'(x) = -4nx(1-2x^2)^{n-1}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è certamente convergente in $x=0$, che non appartiene invece all'insieme di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.