Corso di Studio in Fisica

Tutorato di Analisi III

Superfici, integrali di superficie, flussi di campi, teoremi di Stokes e della divergenza

Esercizio 1. Sia S la superficie parametrica definita da

$$\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, hu)\,, \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,R]$$

($R > 0$, $h \in \mathbb{R}$ costanti fissate). Si provi che, per $h \neq 0$, S è una superficie regolare e semplice. Inoltre calcolare l'area di S (suggerimento: $\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\log(t+\sqrt{t^2+1}) + \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + C$).
Soluzione.
Un buon esercizio è quello di immaginare cosa sia tale superficie: un consiglio per come farlo consiste nel fissare prima la variabile $u = u_0$ e far variare v e poi viceversa. Fissando u siamo ad altezza hu costante e stiamo costruendo un segmento di raggio crescente o 0 a R nella direzione $(\cos u, \sin u)$. Fissando v abbiamo invece un'elica circolare distante esattamente v dall'asse z.
Verificare che una superfice S è regolare consiste nel dimostrare che per ogni punto $p \in S$ il piano tangente T_pS è ben definito. Nel caso di una superficie parametrica $S = \varphi(D)$ ciò corrisponde al dimostrare che in ogni $p = \varphi(u,v)$ i vettori che generano il piano tangente $\varphi_u(u,v)$ e $\varphi_v(u,v)$ siano linearmente indipendenti. Siccome ci troviamo in $\mathbb{R}^3$ ciò equivale a mostrare che $\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v) \neq 0$.
Nel nostro caso

$$\varphi_u = (-v\sin u, v\cos u, h) \quad \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

e quindi

$$\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v) = (h\sin u, h\cos u, -v) \neq 0 \text{ per ogni } (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,R]$$

Verificare che una superficie è semplice significa controllare che essa non abbia autointersezioni, il che chiaramente significa, per una superficie parametrica, dimostrare che φ è iniettiva. Proviamolo nel nostro caso:
sia $\varphi(u_0,v_0) = \varphi(u_1,v_1)$. Questo equivale a dire che

$$(v_0\cos u_0, v_0\sin u_0, hu_0) = (v_1\cos u_1, v_1\sin u_1, hu_1)$$

da cui segue immediatamente che $u_0 = u_1 = \alpha$. Si ottiene quindi $(v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha, h\alpha) = (v_1\cos\alpha, v_1\sin\alpha, h\alpha)$ e pertanto $v_0 = v_1$. Abbiamo quindi mostrato che $\varphi(u_0,v_0) = \varphi(u_1,v_1) \iff (u_0,v_0) = (u_1,v_1)$ il che equivale a dire che φ è iniettiva e pertanto che S è semplice.

Esercizio 2. Si calcoli l'area della superficie parametrica S con parametrizzazione $\varphi(u,v) = (u-v, uv, u+v)$ e dominio di parametri $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1,\ u \leq 0 \leq v\}$.
Soluzione. Possiamo usare la formula vista a lezione

$$Area(S) = \int_D |\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)|\,du\,dv$$

Quindi

$$\varphi_u = (1,v,1),\ \varphi_v = (-1,u,1) \implies \varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v) = (v-u, -2, v+u)$$

che ha norma $\sqrt{2u^2+2v^2+4}$. Pertanto

$$Area(S) = \int_D \sqrt{2u^2+2v^2+4}\,du\,dv = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 \rho\sqrt{2\rho^2+4}\,d\rho\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{6}-\frac{4}{3}\right)$$

avendo usato nel penultimo passaggio le coordinate polari $u = \rho\cos\theta\,,\ v = \rho\sin\theta$.

Esercizio 3. Si calcoli l'area della fascia sferica $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,:\, x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ 0 \le 2z \le 1\}$.

Soluzione. Possiamo considerare S come superficie di rotazione attorno all'asse z e trovare la curva nel semipiano xz (che sarebbe il piano $y=0$) con $x \ge 0$ data dalla proiezione di S. Tale proiezione ci restituisce $S_y = \{(x,0,z) : x^2+z^2 = 1,\ 0 \le z \le \frac{1}{2}\ \ x \ge 0\}$ ossia la curva cercata è $\gamma(t) = (\sqrt{1-t^2},0,t) = (g_1(t),0,g_2(t))$ con $t \in [0,\frac{1}{2}]$, che descrive un arco di circonferenza unitaria centrata nell'origine, giacente nel semipiano $y=0$ con $x \ge 0$, e di estremi $(1,0,0)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$. Usando la formula di Pappo-Guldino vista a lezione, troviamo che :

$$Area(S) = 2\pi L\overline{x} = 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(t)|\gamma'(t)|\,dt = 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-t^2}\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2}+1}\,dt = \pi$$

essendo L la lunghezza di γ e $\overline{x}$ la prima coordinata del baricentro di γ.
Avremmo potuto calcolare l'area di S parametrizzando S in coordinate sferiche

$$r(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad (\theta,\varphi) \in \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]$$

oppure scrivendo S come superficie cartesiana

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D\,,\ z = f(x,y)\}$$

con

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{e} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{3}{4} \le x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Esercizio 4. Si calcoli l'area della superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,:\, x^2+y^2 = 1\,,\ 0 \le z \le y\}$.

Soluzione. Tale superficie non è una superficie di rotazione. Essa è data dalla superficie laterale di un cilindro circolare di raggio unitario tagliato prima verticalmente a metà dal piano $y=0$ (per prendere solo la parte di cilindro in cui $y \ge 0$) e poi diagonalmente dal piano $z=y$ (per considerare solo la parte di cilindro in cui $0 \le z \le y$). Vogliamo renderla una superficie parametrica. Passando in coordinate polari possiamo costruire la parametrizzazione data da $\varphi(\theta,z) = (\cos\theta,\sin\theta,z)$ tale che $S = \varphi(D)$ e pertanto $D = \{(\theta,z) : \theta \in [0,\pi],\ 0 \le z \le \sin\theta\}$. A questo punto possiamo procedere con la formula

$$Area(S) = \int_D |\varphi_\theta(\theta,z)\wedge\varphi_z(\theta,z)|\,d\theta\,dz\,.$$

Quindi

$$\varphi_\theta = (-\sin\theta,\cos\theta,0),\ \varphi_z = (0,0,1),\ \Longrightarrow\ \varphi_\theta(\theta,z)\wedge\varphi_z(\theta,z) = (\cos\theta,\sin\theta,0)$$

che ha norma 1. Pertanto

$$Area(S) = \int_D 1\, d\theta\, dz = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sin\theta} dz \right) d\theta = 2.$$

Esercizio 5. Si calcoli l'integrale di superficie $\int_S f\, d\sigma$ del campo scalare f sulla superficie S nei seguenti casi:

(i) $f(x,y,z) = z$, $S = \{(u\cos v, u \sin v, u) \mid (u,v) \in [1,2] \times [0, 2\pi]\}$ (tronco di cono).

(ii) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $S =$ porzione di grafico della funzione $z = xy$ che si trova all'interno del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 8$.

Soluzione (i) Vale la formula

$$\int_S f\, d\sigma = \int_D f(\varphi(u,v)) |\varphi_u \wedge \varphi_v|\, du\, dv\,.$$

Possiamo calcolare $\varphi_u \wedge \varphi_v = (\cos v, \sin v, 1) \wedge (-u\sin v, u\cos v, 0) = (-u\cos v, -u\sin v, u)$ di norma $\sqrt{2}|u| = \sqrt{2}u$. Quindi inserendo nella formula si ottiene:

$$\int_S f\, d\sigma = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, u^2\, du\, dv = \frac{14\pi\sqrt{2}}{3}\,.$$

(ii) Per prima cosa dobbiamo parametrizzare la superficie S:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \;\; z = g(x,y) = xy\}$$

dove $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 8\}$
Pertanto la superficie ammette una parametrizzazione globale $\varphi(x,y) = (x, y, g(x,y)) = (x, y, xy)$ e $S = \varphi(D)$.
Vale la formula

$$\int_S f\, d\sigma = \int_D f(\varphi(x,y)) |\varphi_x \wedge \varphi_y|\, dx\, dy$$

dove $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-g_x, -g_y, 1) = (-y, -x, 1)$ ha norma $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

$$\int_S f\, d\sigma = \int_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} r^3 \sqrt{1 + r^2}\, dr = \frac{2\pi}{15} 596$$

dove nel penultimo passaggio si è passati in cordinate polari (ricordando di moltiplicare per r che è il determinante della Jacobiana del cambio di coordinate).

Esercizio 6. Si calcoli il flusso del rotore del campo $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso la superficie S sia direttamente (cioè calcolando il rotore e usando la definizione di flusso) sia mediante il teorema di Stokes (cioè calcolando un integrale curvilineo) nei casi seguenti:

(i) $F(x,y,z) = \left(z, y, \frac{x^2}{2} + y\right)$,

S superficie cartesiana di equazione $z = x^2$, sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\}$.

(ii) $F(x, y, z) = \big(y + y^2, 1, 1\big)$,

S superficie cartesiana di equazione $z = x^2 + y^2$ sul dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(iii) $F(x, y, z) = (xy, 0, 1)$,

S superficie cartesiana di equazione $z = \cos(x + y)$ sul dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\, y \geq 0, x + y \leq \pi/2\}$.

(iv) $F(x, y, z) = (yz, -xz, 0)$,

S = porzione di superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ compresa tra i piani $z = 1$ e $z = 2$.

(v) $F(x, y, z) = (y, z, x)$,

S = porzione di superficie cilindrica parametrizzata da $\varphi(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ con dominio di parametri $D = \{(\theta, z) \mid |\theta| \leq \pi,\ 0 \leq z \leq 2 + \cos\theta\}$.

Inoltre nei casi (iv) e (v), si chiede di calcolare il flusso uscente rispettivamente dalla superficie conica e cilindrica.

Soluzione (i) Possiamo scrivere esplicitamente $S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z = f(x, y) = x^2\}$, dove $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$. Esiste quindi una parametrizzazione globale per S data da $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, x^2)$ e possiamo calcolare $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-2x, 0, 1)$. Ricordiamo che

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & \partial_x & F_1 \\ j & \partial_y & F_2 \\ k & \partial_z & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & \partial_x & z \\ j & \partial_y & y \\ k & \partial_z & \frac{x^2}{2} + y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -x + 1 \\ 0 \end{bmatrix} = G\,.$$

Vale inoltre la formula

$$\int_S (\operatorname{rot} F) \cdot N \, d\sigma = \int_D G(\varphi(x, y)) \cdot \varphi_x(x, y) \wedge \varphi_y(x, y) \, dx \, dy$$

che nel nostro caso diventa

$$\int_D (1, -x + 1, 0) \cdot (-2x, 0, 1) \, dx \, dy = \int_D (-2x) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^x (-2x) \, dy \, dx = -\frac{2}{3}\,.$$

Se invece usiamo il teorema di Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma = \int_{+\partial S} F \cdot ds$$

dobbiamo quindi parametrizzare il triangolo definito dal bordo di S e orientare la direzione delle curve in senso antiorario (altrimenti ottereemmo il risultato a segno invertito).
$\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 1]$
$\gamma_2(t) = (1, t)$ con $t \in [0, 1]$
$\gamma_3(t) = (1 - t, 1 - t)$ con $t \in [0, 1]$
Consideriamo la loro immagine tramite la parametrizzazione, cioè stiamo sollevando le curve su

D a delle curve su S.
$\tilde{\gamma}_1(t) = \varphi(\gamma_1(t)) = (t, 0, t^2)$ con $t \in [0, 1]$
$\tilde{\gamma}_2(t) = \varphi(\gamma_2(t)) = (1, t, 1)$ con $t \in [0, 1]$
$\tilde{\gamma}_3(t) = \varphi(\gamma_3(t)) = (1-t, 1-t, (1-t)^2)$ con $t \in [0, 1]$
Pertanto abbiamo che

$$\int_{+\partial S} F \cdot ds = \int_0^1 F(\tilde{\gamma}_1) \cdot \tilde{\gamma}_1' + \int_0^1 F(\tilde{\gamma}_2) \cdot \tilde{\gamma}_2' + \int_0^1 F(\tilde{\gamma}_3) \cdot \tilde{\gamma}_3' =$$

$$= \int_0^1 (t^2, 0, t^2/2) \cdot (1, 0, 2t) dt + \int_0^1 (1, t, \frac{1}{2} + t) \cdot (0, 1, 0) dt + \int_0^1 ((1-t)^2, 1-t, \frac{(1-t^2)}{2} + (1-t)) \cdot (-1, -1, -2(1-t)) dt$$

$$= \int_0^1 t^2 + t^3 dt + \int_0^1 t dt + \int_0^1 [-(1-t)^2 - (1-t) - (1-t)^3 - 2(1-t)^2] = -\frac{2}{3}$$

(ii) Scriviamo esplicitamente $S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z = f(x, y) = x^2 + y^2\}$ con $D = \{(x, y) : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Usando le formule del punto precedente ricaviamo

- $\operatorname{rot} F = (0, 0, -1 - 2y)$
- $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-2x, -2y, 1)$

Pertanto

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N\, d\sigma = \int_D (0, 0, -1 - 2y) \cdot (-2x, -2y, 1) dxdy = \int_D (-1 - 2y) dxdy = -Area(D) = -\frac{\pi}{2}.$$

Se invece utilizziamo il teorema di Stokes:
$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\gamma_2(t) = (0, -t),\ t \in [-1, 1]$
Consideriamo la loro immagine tramite la parametrizzazione, cioè stiamo sollevando le curve su D a delle curve su S.
$\tilde{\gamma}_1(t) = \varphi(\gamma_1(t)) = (\cos t, \sin t, 1)$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\tilde{\gamma}_2(t) = \varphi(\gamma_2(t)) = (0, -t, t^2)$ con $t \in [-1, 1]$
Pertanto abbiamo che

$$\int_{+\partial S} F \cdot ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\tilde{\gamma}_1) \cdot \tilde{\gamma}_1' + \int_{-1}^1 F(\tilde{\gamma}_2) \cdot \tilde{\gamma}_2' = I_1 + I_2$$

Dove

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \sin^2 t, 1, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t - \sin^3 t + \cos t) dt = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (-t + t^2, 1, 1) \cdot (0, -1, 2t) dt = \int_{-1}^1 (-1 + 2t) dt = -2$$

Pertanto $I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2}$ come desiderato.

(iii) $S = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z = \cos(x + y)\}$ dove $D = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq \frac{\pi}{2}\}$.
Dalle definizioni si ottiene che

$$\operatorname{rot} F = (0, 0, -x)$$

ed esiste la parametrizzazione globale

$$\varphi(x,y) = (x, y, \cos(x+y)) \text{ e pertanto } \varphi_x \wedge \varphi_y = (\cdot, \cdot, 1)$$

dove $\cdot$ sta a indicare che non ci interessa quale siano quei valori di $\varphi_x \wedge \varphi_y$ poiché dovremmo farne il prodotto scalare con un vettore che ha prime due componenti uguali a 0.

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma = \int_D (0,0,-x) \cdot (\cdot, \cdot, 1) dx dy = -\int_D x dx dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} x dy dx = -\frac{1}{6}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^3$$

Invece tramite il teorema di Stokes abbiamo che:
$\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$\gamma_2(t) = (\frac{\pi}{2} - t, t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$\gamma_3(t) = (0, \frac{\pi}{2} - t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
Consideriamo la loro immagine tramite la parametrizzazione, cioè stiamo sollevando le curve su D a delle curve su S.
$\tilde{\gamma}_1(t) = \varphi(\gamma_1(t)) = (t, 0, \cos t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$\tilde{\gamma}_2(t) = \varphi(\gamma_2(t)) = (\frac{\pi}{2} - t, t, \cos\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2} - t, t, 0)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$\tilde{\gamma}_3(t) = \varphi(\gamma_3(t)) = (0, \frac{\pi}{2} - t, \cos\big(\frac{\pi}{2} - t\big)) = (0, \frac{\pi}{2} - t, \sin t))$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$I_1 = \int_{\tilde{\gamma}_1} F \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,0,1) \cdot (1, 0, -\sin t) \, dt = -1$$

$$I_2 = \int_{\tilde{\gamma}_2} F \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\Big(\frac{\pi}{2} - t\Big)t, 0, 1\Big) \cdot (-1, 1, 0) \, dt = -\frac{1}{6}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^3$$

$$I_3 = \int_{\tilde{\gamma}_3} F \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0,0,1) \cdot (0, -1, \cos t) \, dt = 1$$

Pertanto

$$\int_{+\partial S} F \cdot ds = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{6}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^3$$

(iv) $S = \big\{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\big\}$ dove $D = \big\{(x,y) : 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\big\}$.
Esiste, quindi, una parametrizzazione globale per S data da

$$\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y)) = \Big(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\Big)$$

e possiamo calcolare $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1) = \Big(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big)$. Inoltre

$$\operatorname{rot} F = \Big(x, y, -2\sqrt{x^2+y^2}\Big) = G$$

Vale la formula

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma = -\int_D G(\varphi(x,y)) \cdot \varphi_x(x,y) \wedge \varphi_y(x,y) \, dx \, dy$$

dove il segno meno è dato dal fatto che l'orientazione prescritta da φ è quella entrante mentre a noi interessa quella uscente. Nel nostro caso la formula diventa

$$-\int_D \Big(x, y, -2\sqrt{x^2+y^2}\Big) \cdot \Big(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big) \, dx \, dy =$$

$$= -\int_D \Big(-3\sqrt{x^2+y^2}\Big)\, dx\, dy = -3\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\, d\theta\, dr = 14\pi$$

Se invece volessimo usare il teorema di Stokes: osserviamo che il dominio dei parametri è una corona circolare il cui bordo, orientato positivamente, è dato dall'unione di due circonferenze concentriche una più interna di raggio 1, percorsa in senso orario e una più esterna, di raggio 2, percorsa in senso antiorario, di parametrizzazioni rispettivamente

$$\gamma_1(t) = (\cos t, -\sin t) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]\,.$$

La loro immagine tramite la parametrizzazione φ è:

$$\widetilde{\gamma}_1(t) = (\cos t, -\sin t, 1) \quad \text{e} \quad \widetilde{\gamma}_2(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]\,.$$

Pertanto abbiamo che

$$\int_{+\partial S} F\cdot ds = \underbrace{\int_0^{2\pi} F(\widetilde{\gamma}_1(t))\cdot \widetilde{\gamma}_1'(t)\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} F(\widetilde{\gamma}_2(t))\cdot \widetilde{\gamma}_2'(t)\, dt}_{I_2}\,.$$

Ora calcoliamo

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 0)\cdot(-\sin t, -\cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi$$
$$I_2 = \int_0^{2\pi} (4\sin t, -4\cos t, 0)\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} (-8\sin^2 t - 8\cos^2 t)\, dt = -16\pi$$

e così troviamo che

$$\int_S \operatorname{rot} F\cdot N\, d\sigma = -\int_{+\partial S} F\cdot ds = 14\pi\,.$$

Anche qui, il segno meno è dato dal fatto che l'orientazione prescritta da φ è quella entrante mentre a noi interessa quella uscente.

(v) $S = \varphi(D)$ dove $D = \{(\theta, z) : |\theta| \le \pi, 0 \le z \le 2 + \cos\theta\}$ e $\varphi(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$. Quindi

$$\varphi_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,, \quad \varphi_z = (0,0,1) \quad \text{da cui} \quad \varphi_\theta \wedge \varphi_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,.$$

Inoltre

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial)y & \partial_z \\ y & z & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto si ha che

$$\int_S \operatorname{rot} F\cdot N\, d\sigma = \int_D (-1,-1,-1)\cdot(\cos\theta, \sin\theta, 0) d\theta\, dz = \int_D (-\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta\, dz$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{2+\cos\theta} (-\cos\theta - \sin\theta)\, dz\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos\theta - \sin\theta)(2+\cos\theta)\, d\theta = -\pi\,.$$

In questo caso, l'orientazione prescritta da φ è quella uscente.

Con il Teorema di Stokes: studiamo il trasformato del perimetro del dominio D (nel piano (θ, z)) mediante la parametrizzazione φ. Il bordo di D orientato positivamente è dato da $\partial D^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ dove:

$\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [-\pi, \pi]$
$\gamma_2(t) = (\pi, t)$ con $t \in [0, 1]$
$\gamma_3(t) = (-t, 2 + \cos t)$ con $t \in [-\pi, \pi]$
$\gamma_4(t) = (-\pi, 1 - t)$ con $t \in [0, 1]$
Suggerimento: Disegnare graficamente D sul piano (θ, z).
Solleviamo queste curve su $\mathbb{R}^3$ tramite φ e otteniamo il bordo di S, o più precisamente, il trasformato di ∂D^+ mediante φ, cioè $+\partial S = \varphi(\partial D^+) = \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2 \cup \tilde{\gamma}_3 \cup \tilde{\gamma}_4$ dove:
$\tilde{\gamma}_1(t) = \varphi(\gamma_1(t)) = (\cos t, \sin t, 0)$ con $t \in [-\pi, \pi]$
$\tilde{\gamma}_2(t) = \varphi(\gamma_2(t)) = (-1, 0, t)$ con $t \in [0, 1]$
$\tilde{\gamma}_3(t) = \varphi(\gamma_3(t)) = (\cos t, -\sin t, 2 + \cos t)$ con $t \in [-\pi, \pi]$
$\tilde{\gamma}_4(t) = \varphi(\gamma_4(t)) = (-1, 0, 1 - t)$ con $t \in [0, 1]$.
Pertanto

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma = \int_{+\partial S} F \cdot ds = \sum_{i=1}^{4} \int_{a_i}^{b_i} F(\tilde{\gamma}_i(t)) \cdot \tilde{\gamma}_i'(t) \, dt = \sum_{i=1}^{4} I_i$$

con

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} F(\tilde{\gamma}_1(t)) \cdot \tilde{\gamma}_1'(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin t, 0, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} -\sin^2 t \, dt = -\pi$$

$$I_2 = \int_0^1 F(\tilde{\gamma}_2(t)) \cdot \tilde{\gamma}_2'(t) \, dt = \int_0^1 (0, t, -1) \cdot (0, 0, 1) \, dt = -1$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} F(\tilde{\gamma}_3(t)) \cdot \tilde{\gamma}_3'(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin t, 2 + \cos t, \cos t) \cdot (-\sin t, -\cos t, -\sin t) \, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t - 2\cos t - \cos^2 t - \sin t \cos t) \, dt = 0$$

$$I_4 = \int_0^1 F(\tilde{\gamma}_4(t)) \cdot \tilde{\gamma}_4'(t) \, dt = \int_0^1 (0, 2 - t, -1) \cdot (0, 0, -1) \, dt = 1$$

Da cui

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -\pi \, .$$

Esercizio 7. Siano S_1 l'emisfero superiore della sfera unitaria centrata nell'origine orientato con normale entrante e S_2 la superficie laterale del cono con base $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$ e vertice $v = (0, 0, 1)$, orientata con normale diretta verso l'interno del cono. Calcolare i flussi del rotore del campo vettoriale $F(x, y, z) = (2xy, yz^2, y^2z)$ attraverso S_1 e attraverso S_2. Stabilire se e, in caso affermativo, perché è possibile dedurre il valore di un flusso dall'altro senza svolgere alcun conto.
Soluzione. Le due superfici sono $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z) : z = -\sqrt{x^2 + y^2} + 1\}$.
Osserviamo immediatamente che $+\partial S_1 = +\partial S_2$ e pertanto il teorema di Stokes ci assicura che il flusso del rotore di F attraverso le due superfici sarà uguale. Calcoliamo quindi Φ_1.

$$rotF = (0, 0, -2x)$$

e possiamo scrivere una parametrizzazione di S_1 data da

$$p(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),\ \phi \in [0, 2\pi],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \, .$$

Osserviamo che
$$p_\theta \wedge p_\phi = (\sin\theta)p = \sin\theta(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$
Quindi
$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N\, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, (0,0,-2\sin\theta\cos\phi)\cdot(\cdot,\cdot,\cos\theta) = 0\,.$$
Osserviamo infine che l'esercizio chiede di calcolare il flusso di F attraverso S_1 orientata con versore normale entrante in essa. La parametrizzazione che abbiamo utilizzato, però, ha versore normale uscente dalla superficie e ce ne accorgiamo perché, ad esempio, nel punto P di coordinate $(\theta,\phi) = (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $P = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ si ha che il versore normale $N = (\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2})$ punta all'esterno della superficie. Quindi il risultato corretto da considerare è 0.

Esercizio 8. Dato il campo vettoriale $\bar{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\bar{F}(x,y,z) = (e^x - y^3, e^y + x^3, e^z)$ si calcoli
$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{F}\cdot d\bar{s}, \ \text{ dove } \bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, \sin(2t)),\ t\in[0,2\pi],$$
osservando che il sostegno di $\bar{\gamma}$ giace sul sostegno della superficie cartesiana di equazione $z = 2xy$ e usando il teorema di Stokes.

Soluzione. Vale che
$$\int_{\bar{\gamma}} F\cdot ds = \int_{+\partial S} F\cdot ds$$
Dove $S = \{(x,y,z) : (x,y)\in D,\ z = 2xy\}$ e $D = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ dotata di una parametrizzazione globale $\varphi(x,y) = (x,y,2xy)$. Osserviamo che la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ è tale che $\varphi(\gamma(t)) = \bar{\gamma}(t)$ e pertanto $+\partial S = \Gamma$. Quindi
$$\int_{\bar{\gamma}} F\cdot ds = \int_{+\partial S} F\cdot ds = \int_S \operatorname{rot} F\cdot N\, d\sigma$$
Dalle formule si ottiene che
$$\operatorname{rot} F = (0,0,3x^2+3y^2) \text{ e } \varphi_x \wedge \varphi_y = (\cdot,\cdot,1)$$
Svolgendo i conti si ha
$$\int_S \operatorname{rot} F\cdot N\, d\sigma = \int_D 3(x^2+y^2)dxdy = 3\int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{2}\pi.$$

Esercizio 9. Per ogni punto $v\in\mathbb{R}^3$ sia S_v la superficie laterale del cono di vertice v e base data dal disco unitario giacente sul piano $z = 0$. Tale superficie si può parametrizzare con
$$\varphi(t,\theta) = tv + (1-t)\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{bmatrix}, \quad (t,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi].$$
Dato un campo vettoriale $F\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ di classe C^1, dimostrare mediante il teorema di Stokes che il flusso del rotore di F attraverso S_v non dipende da v.

Soluzione. Abbiamo una parametrizzazione globale per S_v data da $\varphi(t,\theta) = tv - (1 - t)(\cos\theta, \sin\theta, 0))$ per tutti i $(t,\theta) \in D = [0,1] \times [0, 2\pi]$.

$$\Phi_v = \int_{S_v} \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma = \int_{+\partial S_v} F \cdot ds$$

Quindi parametrizziamo il bordo di D con
$\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0,1]$
$\gamma_2(t) = (1, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
$\gamma_3(t) = (1 - t, 2\pi)$ con $t \in [0,1]$
$\gamma_4(t) = (0, 2\pi - t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
Consideriamo la loro immagine tramite la parametrizzazione, cioè stiamo sollevando le curve su D a delle curve su S.
$\tilde{\gamma}_1(t) = \varphi(\gamma_1(t)) = tv + (1 - t)e_1$ con $t \in [0,1]$
$\tilde{\gamma}_2(t) = \varphi(\gamma_2(t)) = \varphi(1, t) = v$
$\tilde{\gamma}_3(t) = \varphi(\gamma_3(t)) = (1 - t)v + te_1$ con $t \in [0,1]$
$\tilde{\gamma}_4(t) = \varphi(\gamma_4(t)) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t), 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$
Osserivamo che l'integrale su $\tilde{\gamma}_2$ è nullo poiché la curva è costante e che gli integrali sulle curve $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_3$ sono uguali e opposti e pertanto si elidono. Quindi:

$$\int_{+\partial S_v} F \cdot ds = \int_{\tilde{\gamma}_4} F \cdot ds$$

che non dipende da v.

Esercizio 10. Usando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uscente dal bordo del solido C nei seguenti casi:

(i) $F(x, y, z) = \left(0, 1, \frac{3}{2}z^2 + 1\right)$,

$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$.

(ii) $F(x, y, z) = (ye^{x+y}, -xe^{x+y}, xy)$,

$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq x \leq 2 - |y|,\ 0 \leq z \leq x + y\}$.

(iii) $F(x, y, z) = \left(xz, -\frac{y^2}{2}, -z^2 + zy\right)$,

$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 8,\ 1 \leq z \leq 2\}$.

(iv) $F(x, y, z) = \left(xz, e^{x+z}, z^2\right)$,

$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$.

Soluzione. (i) Si ha che

$$\operatorname{div} F = 3z$$

Per il Teorema della divergenza, il flusso attraverso ∂C del campo dei versori normali è dato da

$$\Phi = \int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

In questo caso

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 3z\, dz \right) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[\frac{3}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{3}{2}(1-x-y)^2\, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(y+x-1)^3 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{2}(x-1)^3\, dx = \left[-\frac{1}{8}(x-1)^4 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

(ii) Si ha

$$\operatorname{div} F = (y-x)e^{x+y}$$

e

$$\Phi = \int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int_D dx\, dy \int_0^{x+y} (y-x)e^{x+y}\, dz = \int_D (y^2 - x^2)e^{x+y}\, dx\, dy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \le x \le 2 - |y|,\ 0 \le z \le x+y\}$$

è il quadrato nel piano di coordinate (x,y) di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ e $(1,-1)$. Operiamo un cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} s = x - y \\ t = x - y \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \varphi(s,t) \quad \text{dove} \quad \varphi(s,t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s+t \\ t-s \end{bmatrix}.$$

Quindi, se $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{x+y}$, si ha che

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\varphi^{-1}(D)} f(\varphi(s,t))\, |J_\varphi(s,t)|\, ds\, dt$$

dove $|J_\varphi|$ è il determinante in valore assoluto della matrice jacobiana di φ. Risulta che

$$J_\varphi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |J_\varphi| = \frac{1}{2}\,.$$

Inoltre $f(\varphi(s,t)) = -ste^t$. Infine, osservando che φ è una trasformazione lineare, anche φ^{-1} lo è e si riconosce che $\varphi^{-1}(D)$ è il quadrato nel piano di coordinate (s,t) di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ e $(0,2)$. Dunque

$$\Phi = -\frac{1}{2} \int_0^2 ds \int_0^2 dt\, ste^t = -\frac{1}{2} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{s=0}^{s=2} \left[te^t - e^t \right]_{t=0}^{t=2} = -(e^2+1)\,.$$

(iii) Si ha

$$\operatorname{div} F = -z$$

e

$$\Phi = \int_{\partial C} F \cdot N\, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int_C -z\, dx\, dy\, dz$$

Operiamo un cambiamento di coordinate da cartesiane a cilindriche:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

con $r \in [0, \sqrt{8-z^2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in [1, 2]$.
Otteniamo quindi:

$$\int_C -z\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\sqrt{8-z^2}} \int_0^{2\pi} \int_1^2 -rzdr\, d\theta\, dz = -\frac{31}{4}\pi$$

(iv) Si ha

$$\operatorname{div} F = 3z$$

e

$$\Phi = \int_{\partial C} F \cdot N\, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int_C 3z\, dx\, dy\, dz$$

Operiamo un cambiamento di coordinate da cartesiane a cilindriche:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

con $z \in [0, 3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $r : r^2 \in [0, z]$.
Otteniamo quindi:

$$\int_C 3z\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^3 \int_0^{2\pi} 3zr\, dr\, dz\, d\theta = 27\pi$$

Esercizio 11. Dato un dominio regolare C di $\mathbb{R}^3$ verificare che l'area di ∂C è il flusso attraverso ∂C del campo dei versori normali e il volume di C è il flusso uscente da C del campo $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$.
Soluzione. Il flusso attraverso ∂C del campo dei versori normali è

$$\Phi = \int_{\partial C} N \cdot N\, d\sigma = \int_{\partial C} 1\, d\sigma = Area(\partial C)$$

Inoltre il flusso uscente da C di $F(p) = \frac{1}{3}p$ è dato da

$$\int_{\partial C} F \cdot N\, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int_C 1\, dx\, dy\, dz = Vol(C)$$