Analisi II - 2019/20 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 8 luglio 2020

Esercizio 1. Sia dato il campo scalare $f(x,y) = \sin(x\sqrt{y})\dfrac{y}{x}$.

a) Determinare e disegnare il dominio D di f. D è chiuso o aperto? Quale è la frontiera di D? (giustificare le risposte).

b) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Soluzione: Il dominio è $D = \{(x,y) \mid x \neq 0,\ y \geq 0\}$. Non è né aperto né chiuso. Infatti punti del tipo $(0,x)$ non ammettono nessun intorno tutto contenuto in D e quindi D non può essere aperto; d'altra parte $\mathbb{R}^2 \setminus D$ non è aperto poichè punti del tipo $(0,y)$, $y \geq 0$, non ammettono nessun intorno tutto contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus D$. La frontiera di D è data da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0,\ y \geq 0\}$ (semiasse positivo delle y e asse delle x). Si calcola

$$f_x(x,y) = \sqrt{y}\cos(x\sqrt{y})\frac{y}{x} - \sin(x\sqrt{y})\frac{y}{x^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{2}\cos(x\sqrt{y}) + \sin(x\sqrt{y})\frac{1}{x}.$$

Visto che $f(\pi/2,1) = 2/\pi$, $f_x(\pi/2,1) = -4/\pi^2$, $f_y(\pi/2,1) = 2/\pi$, l'equazione del piano tangente è

$$z = -\frac{4}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}(y-1) + \frac{2}{\pi} \iff z + \frac{4}{\pi^2}x - \frac{2}{\pi}y = \frac{2}{\pi}.$$

Esercizio 2. Calcolare o dimostrare che non esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)\sqrt{1-\cos y^2}}{x^2(y^2+|x|)}.$$

Soluzione: Scegliendo $y = 0$ e $0 \neq x \to 0$ risulta

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{0}{x|x|} = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

D'altra parte, scegliendo $x = y^2$, risulta

$$\frac{\sin(y^4)\sqrt{1-\cos y^2}}{y^4(y^2+|y^2|)} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{y\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Segue che il limite non esiste.
[Osserviamo anche che essendo $\sin t/t \to 1$ e $(1-\cos t)/t^2 \to 1/2$ per $t \to 0$ e' equivalente studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{xy^2\sqrt{y^4}}{x^2(y^2+|x|)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y^4}{x(y^2+|x|)}.]$$

Esercizio 3. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Inoltre sia $Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $(0,1)$ sia un punto stazionario (o critico) di g con $g(0,1) = 0$. Si giustifichi l'esistenza di un intorno U del punto $(0,1)$ tale che

$$T(x,y) = f\big(g(x,y) + \sin x, y^2 - e^x\big)$$

definisca una funzione biunivoca $T : U \to T(U)$.
Soluzione: Come composizione di funzioni di classe C^1 anche T è di classe C^1. Usando il teorema di derivazione di funzione composta,

$$JT(x,y) = Jf(g(x,y) + \sin x, y^2 - e^x)\begin{pmatrix} \cos x + g_x(x,y) & g_y(x,y) \\ -e^x & 2y \end{pmatrix}.$$

Risulta che $JT(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile. Quindi il TIL assicura l'esistenza di U.

Esercizio 4. Studiare la natura dei punti critici del seguente campo scalare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = y\sqrt{3 + x^2} - 2\log(1 + y^2) + z^2.$$

Esistono punti di minimo globale per f? (Giustificare la risposta!)

Soluzione: Si calcola

$$f_x(x, y, z) = \frac{xy}{\sqrt{3 + x^2}}, \qquad f_y(x, y, z) = \sqrt{3 + x^2} - \frac{4y}{1 + y^2}, \qquad f_z(x, y, z) = 2z.$$

Risultano due punti stazionari: $P_0 = (0, \sqrt{3}, 0)$ e $P_1 = (0, 1/\sqrt{3}, 0)$. Inoltre

$$f_{xx}(x, y, z) = \frac{(3 + x^2)y - x^2 y}{(3 + x^2)^{3/2}}, \qquad f_{xy}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}},$$

$$f_{yy}(x, y, z) = \frac{4y^2 - 4}{(1 + y^2)^2}, \qquad f_{zz}(x, y, z) = 2, \qquad f_{xz}(x, y, z) = f_{yz}(x, y, z) = 0.$$

Allora le matrici Hessiane nei punti critici sono

$$H(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H(P_1) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi P_0 è un punto di minimo relativo mentre P_1 è una sella.
Non esistono minimi globali: $f(P_0) = 3 - 2\log 4 > 0$ ma $f(0, -1, 0) = -\sqrt{3} - 2\log 2 < 0$.

Esercizio 5. Calcolare l'integrale triplo

$$\int_A x\,dxdydz, \qquad A = \Big\{(x, y, z) \,\Big|\, x^2 + x \le y \le |x|,\ 2xy \le z \le x^2 + y^2\Big\}.$$

Soluzione: Ponendo $D := \{(x, y) \,|\, x^2 + x \le y \le |x|\}$ l'integrale equivale a

$$\int_D \Big(\int_{2xy}^{x^2+y^2} x\,dz\Big) dxdy = \int_D x(x^2 + y^2 - 2xy)\,dxdy = \int_D x(x - y)^2\,dxdy.$$

Essendo $D = \{(x, y) \mid -2 \le x \le 0,\ x^2 + x \le y \le -x\}$ risulta

$$\int_D x(x - y)^2\,dxdy = \int_{-2}^{0} x\Big(\int_{x^2+x}^{-x} (x - y)^2\,dy\Big)dx = -\frac{1}{3}\int_{-2}^{0} (8x^4 + x^7)\,dx = -\frac{32}{5}.$$