CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Prova d'esame – 16 luglio 2014

TEMA I

Due punti materiali di uguale massa m si muovono su una circonferenza di raggio l, in assenza di attrito. Fra i due punti agisce una forza repulsiva di tipo coulombiano. Scrivere la Lagrangiana e individuare due costanti del moto. Basandosi su queste e su una scelta opportuna delle coordinate lagrangiane, descrivere qualitativamente il generico moto del sistema.

Svolgimento

Scegliamo inizialmente la parametrizzazione

$$\begin{aligned} x_A &= l\cos(\theta_1) \\ y_A &= l\sin(\theta_1) \\ x_B &= l\cos(\theta_2) \\ y_B &= l\sin(\theta_2) \end{aligned}$$

Il potenziale coulombiano repulsivo ha la forma $U = -\frac{k}{r}$, dove r è la distanza fra i punti materiali. Si noti che lo spazio delle configurazioni è il toro T^2 meno la diagonale (per $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow r = 0$ il potenziale è singolare; non è necessario qui preoccuparsi delle collisioni, poiché a causa del potenziale repulsivo i due punti non possono mai arrivare a collidere). Sostituendo, si ottiene

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (x_A - x_B)^2} \\ &= l\sqrt{\left(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_1)\right)^2 + \left(\sin(\theta_1) - \sin(\theta_1)\right)^2} \\ &= l\sqrt{2 - 2\left(\cos(\theta_1)\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_1)\right)} \\ &= l\sqrt{2 - 2\cos(\theta_1 - \theta_2)} = l\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$L = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{k}{l\sqrt{2 - 2\cos(\theta_1 - \theta_2)}}$$

Poiché il sistema è autonomo si conserva l'energia totale

$$\frac{ml^2}{2}\left(\dot\theta_1^2 - \dot\theta_2^2\right) + \frac{k}{l\sqrt{2-2\cos(\theta_1-\theta_2)}} = E;$$

inoltre la Lagrangiana, poiché dipende solo dalla differenza fra i due angoli θ_1 e θ_2, è invariante rispetto a una rotazione complessiva del sistema, generata dal campo vettoriale

$$X = \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2}.$$

Si conserva pertanto il momento angolare totale

$$ml^2\left(\dot\theta_1 + \dot\theta_2\right) = J$$

Per discutere qualitativamente il moto, è vantaggioso usare un sistema di coordinate adattato alla simmetria della Lagrangiana: ad esempio

$$\begin{aligned} Q &= \theta_1 + \theta_2 \\ q &= \theta_1 - \theta_2. \end{aligned}$$

In questo modo si ha

$$L = \frac{ml^2}{4}\left(\dot Q^2 + \dot q^2\right) - \frac{k}{l\sqrt{2-2\cos(q)}}.$$

Il sistema è ora disaccoppiato; Q è una coordinata ciclica, quindi si trova subito $\dot Q = cost.$ Il moto si compone di un moto di rotazione uniforme per la coordinata Q e di una variazione nel tempo della coordinata q che si può ricavare dalla conservazione dell'energia associata a quel grado di libertà:

$$\frac{ml^2}{4}\dot q^2 + \frac{k}{l\sqrt{2-2\cos(q)}} = E_2.$$

Si ottiene quindi l'equazione di Weierstrass

$$\dot q^2 = \frac{4}{ml^2}\left(E_2 - \frac{k}{l\sqrt{2-2\cos(q)}}\right) = \Phi(q)$$

La funzione $\Phi(q)$ tende a $-\infty$ per $q \to 0$ e per $q \to 2\pi$, e ha un unico massimo in $q = \pi$. La coordinata q oscilla quindi simmetricamente intorno al valore $q = \pi$ con ampiezza dipendente dal valore della costante E_2. Da notare che $q = \pi$ non identifica un punto di equilibrio stabile per il sistema complessivo, dato che la coordinata Q ruota uniformemente ($\Rightarrow$ equilibrio indifferente, ovvero equilibrio relativo per la sola coordinata q).

TEMA II

Si consideri la seguente Lagrangiana per una particella relativistica soggetta al campo elettromagnetico:

$$L = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu} - eA_\mu u^\mu.$$

Scrivere le equazioni di Lagrange *(suggerimento: NON sviluppare la derivata $\frac{d}{d\tau}$)*; adottare nelle equazioni ottenute la parametrizzazione con il tempo relativo ($\tau = t$) e mostrare che con questa scelta le equazioni del moto per le velocità osservate v^i coincidono con quelle ottenute (a lezione) usando la Lagrangiana quadratica e la parametrizzazione con il tempo proprio.

Svolgimento

Le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{mc\eta_{\mu\nu}u^\nu}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}} - eA_\mu\right) + e\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}u^\nu = 0$$

ossia

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{mc\eta_{\mu\nu}u^\nu}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}\right) = eF_{\mu\nu}u^\nu$$

Scegliendo $\tau = t$ si ha $u^0 = c$, $u^i = v^i$ e quindi

$$\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta} = \sqrt{c^2 - |v|^2} = \frac{c}{\gamma}.$$

Le equazioni del moto (per le componenti spaziali) diventano quindi

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma\vec{v}\right) = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right).$$

TEMA III

Data l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

calcolare la funzione generatrice $S(q,\alpha)$ della trasformazione canonica $(q,p) \mapsto (\alpha, I)$, dove le variabili (α, I) sono le variabili azione–angolo (per cui $H = \omega I$).

Svolgimento

La trasformazioni in variabili azione-angolo è

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2I}{\omega}}\sin(\alpha) \\ p &= \sqrt{2I\omega}\cos(\alpha) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} I &= \frac{\omega q^2}{2\sin^2(\alpha)} = -\frac{\partial S}{\partial \alpha} \\ p &= \frac{\omega q}{\tan(\alpha)} = \frac{\partial S}{\partial q} \end{aligned}$$

dalla seconda equazione si ha subito

$$S(q,\alpha) = \frac{\omega q^2}{2\tan(\alpha)} + f(\alpha);$$

derivando rispetto ad α e confrontando con la prima equazione si trova $\frac{df}{d\alpha} = 0$, quindi a meno di una costante additiva (irrilevante)

$$S(q,\alpha) = \frac{\omega q^2}{2\tan(\alpha)}.$$

La funzione S, naturalmente, è definita solo sul dominio del cambiamento di coordinate, $\alpha \in (0, 2\pi)$.