

È il raggio di un guscio sferico di carica totale  $-e/c$  (vedi 116)  
energia elettrostatica eguaglia l'energia a riposo  $mc^2$  dell'elettrone.  
Nello scattering classico di radiazione che abbiamo descritto, l'elettrone  
si comporta come una sferetta con questo raggio.

Insediando il valore (399) nella (397) si ha

$$\left[ \sigma_{\text{Thomson}} \sim 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2 \right] \quad (400)$$

La sez d'urto classica di Thomson è modificata quando l'energia  
e il momento del "fotone" incidente ( $h\nu$  e  $h\nu/c$  come vedete) è  
sufficiente a cambiare l'impulso (velocità) della particella, non solo a  
modificarne l'oscillazione. Questo avviene quando  $h\nu$  è comparabile  
con  $mc^2$ .

Il processo è allora quello di un urto relativistico ma la conservazione  
del quadrato-impulso implica che la radiazione uscente cambia la  
sua lunghezza d'onda (Effetto Compton, vedi (spero) l'ultima lezione di ds).

l'espressione della sezione d'urto per tale processo è della sezione d'urto  
di Klein-Nishina. All'aumentare dell'energia dei fotoni incidenti,  
il forward scattering è favorito (si perde la simmetria  $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$ ).

### Scattering Rayleigh

Nell'interazione della radiazione con la materia, è stato visto  
che è efficace modellizzare gli elettroni legati ad un nucleo

come oscillatori armonici smorzati. È come se avessero una posizione di equilibrio ( $\vec{S} = \vec{0}$ ) attorno alla quale oscillano con una frequenza caratteristica  $\omega_0$ . Le oscillazioni, però, sono smorzate. In assenza di forzante esterna, la loro equazione del moto è

$$m_e \ddot{\vec{S}} = -m_e \omega_0^2 \vec{S} - \gamma_0 m_e \dot{\vec{S}} \quad (401)$$

forza di richiamo  
elastica

fattore di smorzamento  
( $\gamma_0 =$  tasso di smorzamento)

Dividendo per  $m_e$ , quindi, si ha

$$\ddot{\vec{S}} + \omega_0^2 \vec{S} + \gamma_0 \dot{\vec{S}} = 0 \quad (402)$$

In presenza del campo elettrico <sup>di un</sup> ~~si deve~~ <sup>magnetico</sup> con velocità non relativistiche  $\vec{S}$  in moto da parte trascurare l'effetto del campo magnetico come nella (370), la (402) si modifica per la presenza della forza elettrica  $-e\vec{E}$ :

$$\boxed{\ddot{\vec{S}} + \omega_0^2 \vec{S} + \gamma_0 \dot{\vec{S}} = -\frac{e}{m_e} \vec{E}} \quad (403)$$

(da confrontare con la (347) del caso in cui la particella carica è libera)

• Se il campo  $\vec{E}$  è quello di un'onda di frequenza angolare  $\omega$ , ~~ci si aspetta~~ esso imporrà un'oscillazione di frequenza  $\omega$  della posizione dell'elettrone. Inseriamo dunque l'ansatz:

$$\vec{S} \propto e^{i\omega t} \quad (404)$$

(dovremo poi prendere la parte reale).

Di conseguenza,

$$\ddot{\vec{S}} \approx i\omega \dot{\vec{S}}, \quad \ddot{\vec{S}} \approx -\omega^2 \vec{S} \quad (405)$$

per cui possiamo riscrivere la (403) come

$$\ddot{\vec{S}} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\gamma_0}{i\omega} \right) = -\frac{e}{m_e} \vec{E} \quad (406)$$

cioè

$$\ddot{\vec{S}} \frac{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma_0 \omega}{\omega^2} = -\frac{e}{m_e} \vec{E} \quad (407)$$

ovvero infine

$$\ddot{\vec{S}} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_0 \omega} \frac{e}{m_e} \vec{E} \quad (408)$$

Confrontando con la (371) del caso di una particella carica libera, vediamo che è come se avesse il rimpiazzamento (nell'eq. del nat. con nella denominazione!)

$$q \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_0 \omega} \cdot e \quad (409)$$

dopo di che si può seguire esattamente l'analisi dello scattering Thomson, tenendo conto della necessità, allo fine, di prendere la parte reale delle quantità. Il risultato finale è

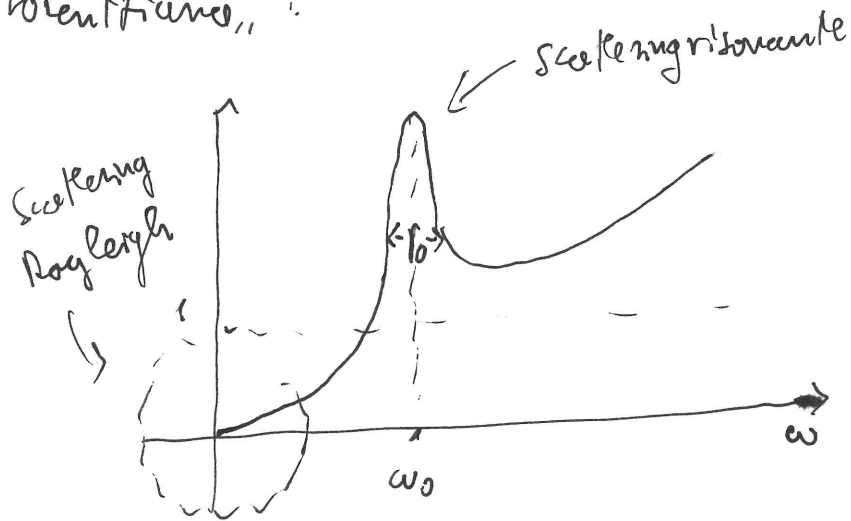
$$\sigma = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_0 \omega)^2} \quad \sigma_{\text{Thomson}} \quad (410)$$

La dipendenza angolare in  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  ha la stessa forma che nel caso Thomson.

$$\text{Lavoro: } \sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{6\pi c^3} \left\langle \left( \frac{d\vec{E}}{dt} \right)^2 \right\rangle$$

primo ordine dell'eq. (408)  
Anche uguale

Il fattore modulante  $\omega$ -dipendente è una cosiddetta "Lorentziana".



(411)

Il valore massimo della sezione d'urto si ottiene per  $\omega \sim \omega_0$

(412)

ovè per uno scattering risonante. In tal caso

$$\sigma \sim \frac{\omega_0^2}{\gamma_0^2} \sigma_{\text{Thomson}} \gg \sigma_{\text{Thomson}} \quad (413)$$

Il che avviene, ovviamente, ( $\gamma_0 \ll \omega_0$ ).

Nel limite di elettrone fortemente legato, ovè se

$$\omega \ll \omega_0$$

(414)

abbiamo la sezione d'urto di Rayleigh

$$\left[ \sigma \sim \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \sigma_{\text{Thomson}} \right]$$

(415)

siccome

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

(416)



vediamo che

120

$$\sigma \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

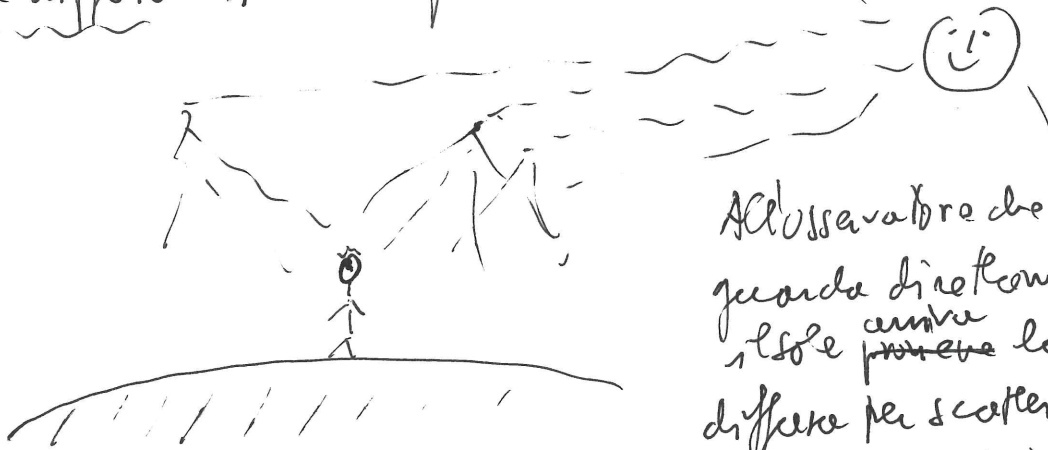
(417)

Questa dipendenza è alla base della spiegazione del colore blu del cielo.

i) In atmosfera, la densità di molecole neutre contenenti elettroni legati, su cui avviene scattering Rayleigh, è molto maggiore della densità di elettroni liberi, su cui avviene lo scattering Thomson. Anche se per un dato  $\lambda$  lo scattering Rayleigh è molto minore di quello Thomson, l'effetto Rayleigh prevale

ii) ~~La luce~~ ~~Nello spettro del visibile~~, la luce blu-violetta ha la lunghezza d'onda  $\lambda$  minore; è dunque quella che viene maggiormente diffusa in atmosfera

(418)



Un osservatore che non guarda direttamente verso il sole <sup>anche</sup> ~~perché~~ la luce diffusa per scattering Rayleigh, prevalentemente blu

iii) Al tramonto, guardando verso il sole



l'osservatore vede di più la lunghezza d'onda verso il rosso, che non viene deviate