Serie di numeri complessi

1 Richiami sui numeri complessi

Semplificando, si può dire che il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si ottiene aggiungendo alle usuali operazioni di somma e di prodotto per scalari in $\mathbb{R}^2$ (lo spazio vettoriale dei vettori $\bar{v} = (x, y)$ del piano) l'operazione di *prodotto complesso*:

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Si prova che $\mathbb{R}$ si può identificare (attraverso un isomorfismo di campi) con $\{(a, 0)\}_{a\in\mathbb{R}}$; quindi l'elemento $a \in \mathbb{R}$ si identifica con $(a, 0) \in \mathbb{C}$.

Posto $i = (0, 1)$, ogni $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ si scrive come

$$z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy \qquad \textit{(forma cartesiana di } z).$$

Si pone $\operatorname{Re} z = Re(z) = x$ e $\operatorname{Im} z = Im(z) = y$. Il coniugato di z è $\bar{z} = x - iy$.

Se $z \in \mathbb{C}$, il numero $\rho = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ è il *modulo* di z (corrisponde alla lunghezza del vettore z). Se $z = x + iy \neq 0$ il suo argomento $\theta \in [0, 2\pi]$ o $[-\pi, \pi]$ (o un altro intervallo di ampiezza 2π; per la precisione, θ è definito a meno di un multiplo intero di 2π) è definito attraverso la condizione

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

La *forma polare* (o di Eulero o forma esponenziale) di $z \neq 0$ è

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

da cui si deduce che se $z' = \rho e^{i\theta}$

Ricordiamo la seguente proprietà del modulo (si può verificare facilmente usando la forma polare):

$$|z \cdot w| = |z||w|, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

da cui segue che $|z^k| = |z|^k$, $k \in \mathbb{N}$, e $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$, se $w \neq 0$. Un'altra proprietà utile è $|Re(z)| \leq |z|$ e $|Im(z)| \leq |z|$; infine la disuguaglianza

$$|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|, \quad z \in \mathbb{C},$$

ha una semplice interpretazione geometrica.

2 Serie numeriche

Partiamo dalla convergenza di successioni. Data una successione di numeri complessi $z_0, z_1, \ldots$ che indichiamo con $(z_n) \subset \mathbb{C}$ (n varia nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) diciamo che è **convergente** se esiste $l \in \mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} z_n = l \quad \text{(scriviamo anche} \quad z_n \to l).$$

Questo significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha:

$$|z_n - l| < \epsilon.$$

Osserviamo che $z_n \to 0$ se e solo se $|z_n| \to 0$.
Si può provare facilmente che

$$z_n \to l \iff \begin{cases} Re(z_n) \to Re(l) \\ Im(z_n) \to Im(l), \end{cases} \tag{1}$$

dove se $z_n = x_n + iy_n$, $Re(z_n) = x_n$ e $Im(z_n) = y_n$. Riguardo alla dimostrazione di (1), osserviamo solo che $\Longleftarrow$ segue dalla disuguaglianza

$$|z_n - l| \leq |Re(z_n - l)| + |Im(z_n - l)| = |Re(z_n) - Re(l)| + |Im(z_n) - Im(l)|.$$

Per esempio, la successione $\frac{1}{2^n} + i\frac{n+1}{n+2}$ converge a $0 + i = i$ poichè $\frac{1}{2^n} \to 0$ e $\frac{n+1}{n+2} \to 1$.

Una successione $(z_n) \subset \mathbb{C}$ si dice **divergente** se $|z_n| \to +\infty$ (osserviamo che in $\mathbb{C}$ non esiste una relazione d'ordine compatibile con il prodotto complesso; non ha senso parlare di $+\infty$ o $-\infty$).

Una successione $(z_n) \subset \mathbb{C}$ si dice **inderminata** se non ammette limite (ovvero se non è nè convergente nè divergente); un esempio è la successione: 1, -1, 1, -1, ...

Ora introduciamo il concetto di **serie numerica.** Questo permette di definire la somma di infiniti addendi (superando anche possibili paradossi come quelli introdotti da Zenone).

Sia $(a_n) \subset \mathbb{C}$ una successione di numeri complessi. Chiamiamo serie l'espressione

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

(gli a_n si dicono *termini della serie*). Per studiare la serie consideriamo la successione $(S_N) \subset \mathbb{C}$, dove $S_0 = a_0$ e

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + \ldots + a_N, \quad \text{per } N \geq 0.$$

S_N è la somma dei termini fino ad N e si dice **ridotta N-esima o somma parziale N-esima** della serie.

La serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ si dice **convergente, divergente o indeterminata** se la successione (S_N) è rispettivamente *convergente, divergente o indeterminata.*

In particolare se $S_N \to S \in \mathbb{C}$ diciamo che la **serie converge a** S (o che ha per *somma* S) e scriviamo

$$\sum_{n\geq 0} a_n = S.$$

In questo caso abbiamo sommato infiniti termini trovando come risultato il numero S.

Quindi vale $\sum_{n\geq 0} a_n = S$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero naturale $N_0(\epsilon)$ tale che se $n \geq N_0$ si ha:

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \epsilon.$$

Ci interessa molto il **carattere di una serie**, ovvero sapere se *converge o non converge* (è di interesse secondario, nel caso in cui la serie non converga, sapere se diverge o se è indeterminata). D'altra parte la somma di una serie (nel caso in cui converga) può essere determinata solo in pochi casi.

Osserviamo che dato un qualsiasi $m_0 \in \mathbb{N}$, *la serie*

$$\sum_{n \geq m_0} a_n = a_{m_0} + a_{m_0+1} + \dots \tag{2}$$

ottenuta sommando da a_{m_0} *in poi ha lo stesso carattere di* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *(tuttavia nel caso di convergenza, le somme delle due serie in generale saranno diverse). Le ridotte della serie* (2) *sono* $S_{m_0} = a_{m_0}$, $S_{m_0+1} = a_{m_0} + a_{m_0+1}, \dots$

Una serie del tipo $\sum_{n\geq m_0} a_n$ si può sempre scrivere nella forma $\sum_{n\geq 0} a_n$ inponendo che i primi m_0 termini siano nulli.

Una conseguenza di (1) è il seguente risultato.

Proposizione 1. *Sia* $(a_n) \subset \mathbb{C}$. *La serie* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *ha somma* $S \in \mathbb{C}$ *se e solo se*

$$\begin{cases} \sum_{n\geq 0} Re(a_n) = Re(S) \\ \\ \sum_{n\geq 0} Im(a_n) = Im(S). \end{cases}$$

Dimostrazione. Diamo solo un cenno. Si parte da

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = Re(S_N) + iIm(S_N) = \sum_{n=0}^{N} Re(a_n) + i \sum_{n=0}^{N} Im(a_n).$$

Usando anche (1) si ottiene facilmente la tesi. ∎

Dunque basta che una delle due serie, $\sum_{n\geq 0} Re(a_n)$ *o* $\sum_{n\geq 0} Im(a_n)$ *non converga per poter concludere che anche* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *non converge.*

Esempio 2. Una prima classe di esempi di serie numeriche è costituito dalle **serie telescopiche**.
(i) La più famosa di queste serie è quella di Mengoli (1650):

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Questa converge e ha somma 1. Infatti si ha:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Ora se calcoliamo la somma parziale N-esima, troviamo (per $N \geq 0$):

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Segue che esiste $\lim_{N\to\infty} S_N = 1$ e la serie converge a $S = 1$ ovvero $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(ii) Un altro esempio di serie telescopica è

$$\sum_{n\geq 1} \log\big(1+\frac{1}{n}\big) = \sum_{n\geq 1}\big(\log(n+1)-\log(n)\big). \tag{3}$$

Il termine generale $a_n = \log(1+\frac{1}{n}) = \log(\frac{n+1}{n})$ **tende a 0, però la serie non converge.** Infatti

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \log\big(1+\frac{1}{n}\big) = \sum_{n=1}^{N}\big(\log(n+1)-\log(n)\big)$$

$$= \big(\log(N+1)-\log(N)\big) + \big(\log(N)-\log(N-1)\big) + \ldots + \big(\log(2)-\log(1)\big)$$

(si cancellano i termini tranne il primo e l'ultimo) $= \log(N+1)-\log(1) \to +\infty$. ■

Gli esempi appena visti si generalizzano nel modo seguente. Si parte da una successione qualsiasi di numeri complessi $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ e si considera la serie

$$\alpha_0 + \sum_{n\geq 1}(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

(serie telescopica associata ad (α_n)). Si ha $a_0 = \alpha_0$ e $a_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, $n \geq 1$. Se calcoliamo le somme parziali otteniamo

$$S_N = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) + \ldots + (\alpha_N - \alpha_{N-1}) = \alpha_N, \quad N \geq 0.$$

Dunque (S_N) coincide con la successione iniziale (α_N). Per esempio in (i) $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_n = -\frac{1}{n+1}$; invece in (ii) $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_n = \log(n+1)$.

Quanto abbiamo appena detto mostra che partendo da una successione fissata si può sempre costruire una serie che ha questa successione come successione delle somme parziali. In altre parole, la teoria delle serie e quella delle successioni sono equivalenti ("serie e successioni sono come due facce della stessa medaglia").

2.1 La serie geometrica

Fissato $q \in \mathbb{C}$, la **serie geometrica** di ragione q è

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$$

È una serie numerica importante (si può anche vedere come un esempio di serie di potenze). Il suo carattere è completamente determinato da q. Infatti si ha:

$$\sum_{n\geq 0} q^n \begin{cases} \text{converge con somma } \frac{1}{1-q} \text{ se } |q|<1 \\ \\ \text{diverge se } |q|>1 \text{ o } q=1 \\ \\ \text{è indeterminata se } |q|=1,\ \ q\neq 1. \end{cases}$$

Per giustificare i vari casi, si osserva che se $q = 1$, la somma parziale N-esima è $S_N = N$ che tende a $+\infty$, mentre se $q \neq 1$, si trova

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

(infatti $(1-q)\sum_{n=0}^{N} q^n = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{k=1}^{N+1} q^k = 1 - q^{N+1}$).
Verifichiamo bene il primo caso (per gli altri casi diamo solo un cenno di dimostrazione).
Se $|q| < 1$, si trova $|q^{N+1}| = |q|^{N+1} \to 0$, perciò $q^{N+1} \to 0$ e

$$S_N \to \frac{1}{1-q}.$$

Per il secondo caso con $|q| > 1$, si comincia con l'osservare che, se $u, v \in \mathbb{C}$ allora si ha

$$||u| - |v|| \leq |u - v| \tag{4}$$

(infatti $|u| = |u - v + v| \leq |u - v| + |v|$, da cui $|u| - |v| \leq |u - v|$; invertendo u con v si trova (4)).
Applicando la (4) si trova:

$$|S_N| = \Big|\frac{1-q^{N+1}}{1-q}\Big| = \frac{|1-q^{N+1}|}{|1-q|} \geq \frac{|1-|q^{N+1}||}{|1-q|}$$

Poichè $|q| > 1$, si ha: $\lim_{N\to\infty} \frac{|1-|q^{N+1}||}{|1-q|} = \lim_{N\to\infty} \frac{|1-|q|^{N+1}|}{|1-q|} = +\infty$ e si deduce che $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$.
Osserviamo che il terzo caso corrisponde a $q = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$, ovvero $q \neq 1$ si trova sulla circonferenza unitaria di centro 0. Poichè $1 - (1-q)S_N = q^{N+1}$ se (q^{N+1}) è indeterminata anche (S_N) lo è.

In questo caso i numeri q^{N+1} sono sempre sulla circonferenza unitaria (corrispondono a rotazioni proprie di angolo θ del numero complesso q; infatti $q^{N+1} = e^{i(N+1)\theta}$). Se (q^{N+1}) convergesse a $z_0 \in \mathbb{C}$ dovrebbe essere $|q^{N+1}| \to |z_0|$ e risulterebbe $|z_0| = 1$. Ora si può provare che è impossibile che fissato un $\epsilon > 0$ piccolo da un certo N_0 in poi si abbia $|q^{n+1} - z_0| < \epsilon$ per $n \geq N_0$.
■

Un esempio facile di *serie indeterminata* che rientra nel terzo caso è $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$. Infatti in questo caso

$$S_N = \begin{cases} 0 & \text{se } N \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } N \text{ è pari .} \end{cases}$$

Esercizi 3. (1) La serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n} + \frac{i}{4^n}$ converge a $S = \frac{3}{2} + \frac{4}{3}i$. Infatti

$$\sum_{n\geq 0} Re(a_n) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n} = \sum_{n\geq 0} \Big(\frac{1}{3}\Big)^n = \text{ (essendo } |1/3| < 1) \ \frac{1}{1-1/3} = 3/2 \ \text{ e}$$

$$\sum_{n\geq 0} Im(a_n) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-1/4} = 4/3.$$

(2) Studiare il carattere di $\sum_{n\geq 100} \frac{(1+i)^n}{(3-4i)^{2n}}$.

La serie ha lo stesso carattere di

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(1+i)^n}{(3-4i)^{2n}} = \sum_{n\geq 0} \Big(\frac{1+i}{(3-4i)^2}\Big)^n$$

che è geometrica di ragione $q = \frac{1+i}{(3-4i)^2}$. Si trova (usando che $|\frac{u}{v}| = \frac{|u|}{|v|}$ se $v \neq 0$)

$$|q| = \frac{|1+i|}{|3-4i|^2} = \frac{\sqrt{2}}{25} < 1,$$

perciò la serie converge.

(3) Scrivere $0,3\bar{8} = 0,388888\ldots$ sotto forma di frazione.
Si ha:

$$
\begin{aligned}
0,3\bar{8} &= \frac{3}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{10000} + \ldots \\
&= \frac{3}{10} + \frac{8}{100}\Big(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\Big) = \frac{3}{10} + \frac{8}{100}\sum_{n\geq 0}\big(\frac{1}{10}\big)^n \\
&= \frac{3}{10} + \frac{8}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{35}{90}.
\end{aligned}
$$

Teorema 4. *Sia $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Condizione necessaria affinchè la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converga è*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Se la serie converge, si deve avere $S_N \to S \in \mathbb{C}$ (dove $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$). Osserviamo che, per ogni $n \geq 0$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1}.$$

Dunque esiste

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

∎

Osservazione 5. *La condizione del teorema è solo necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie.* Infatti se consideriamo la serie in (3):

$$\sum_{n\geq 1} \log\big(1 + \frac{1}{n}\big),$$

questa non converge anche se il suo termine generale $a_n = \log(1 + \frac{1}{n})$ tende a 0.

Il precedente teorema si può usare anche in "modo negativo". Per esempio

$$\sum_{n\geq 1} \cos(1/n)$$

non converge poichè $\cos(1/n)$ non tende a 0 (tende a 1). In modo simile si vede che anche $\sum_{n\geq 10} \sin(n)$ non può convergere.

Teorema 6. *Siano $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ due serie di numeri complessi entrambe convergenti, rispettivamente a $S \in \mathbb{C}$ e a $T \in \mathbb{C}$. Si ha:*
(i) per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\geq 0}(\lambda\, a_n)$ converge a λS;
(ii) $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)$ converge a $S + T$.

Dimostrazione. Diamo solo un cenno alla dimostrazione di (i). La serie $\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n)$ ha successione delle ridotte (S_N) con

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{N} a_n$$

che converge per ipotesi a λS. ∎

Come applicazione del Teorema 6 studiamo la convergenza di

$$\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{3^n}-\log\big(1+\frac{1}{n}\big)\Big).$$

La serie non converge. Infatti posto $a_n = \Big(\frac{1}{3^n}-\log\big(1+\frac{1}{n}\big)\Big)$, se per assurdo la serie iniziale $\sum_{n\geq 1} a_n$ convergesse, dovrebbe convergere anche la serie $\sum_{n\geq 1}\big(a_n-\frac{1}{3^n}\big) = -\sum_{n\geq 1}\log\big(1+\frac{1}{n}\big)$; ma questo come abbiamo visto in (3) non è possibile.

In generale, se $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge e $\sum_{n\geq 0} b_n$ non converge, ragionando come prima si ottiene che

$$\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n) \quad \text{non converge.}$$

3 Serie a termini positivi (o non negativi)

Si tratta di serie numeriche reali $\sum_{n\geq 0} a_n$ dove $(a_n) \subset \mathbb{R}_+$ (ovvero $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$).

Sono importanti poichè esistono dei criteri semplici che permettono di stabilire il loro carattere.

Osserviamo subito che *i criteri sul carattere della serie si applicano (con piccole modifiche) anche a serie a termini negativi (queste, con un segno meno davanti alla serie, diventano a termini positivi) e a serie che sono a termini positivi da un certo punto in poi (ovvero esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 0$, se $n \geq n_0$).*

Quest'ultimo fatto è in accordo con l'osservazione che il carattere di una qualsiasi serie non cambia se cambiamo solo un numero finito di suoi termini.

Cominciamo con un risultato che afferma che le serie a termini positivi non possono essere indeterminate.

Teorema 7. *Consideriamo una serie a termini positivi $\sum_{n\geq 0} a_n$ dove $(a_n) \subset \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. La serie o converge o diverge (non può essere indeterminata).*

Dimostrazione. Consideriamo la ridotta $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$. Si ha (essendo $S_{N+1} = S_N + a_{N+1}$ con $a_{N+1} \geq 0$)

$$0 \leq S_N \leq S_{N+1} = S_N + a_{N+1}$$

per ogni $N \geq 0$. Dunque (S_N) è crescente ed esiste il limite

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S = \sup_{N\geq 0} S_N = \sup\,\{S_N\}_{N\geq 0} \;\in\; [0,+\infty].$$

Questo dimostra la tesi. Osserviamo in particolare che se la serie converge a $S < +\infty$, si ha:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \leq S, \quad N \geq 0. \tag{5}$$

∎

Teorema 8 (Criterio del confronto)**.** *Siano $\sum_{n\geq 0} a_n$ e $\sum_{n\geq 0} b_n$ due serie a termini positivi. Supponiamo che esista un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che*

$$a_n \leq b_n, \quad n \geq n_0.$$

(i) $\sum_{n\geq 0} b_n$ *converge* $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ *converge (inoltre se* $a_n \leq b_n$*, per ogni* $n \geq 0$*, allora vale anche* $\sum_{n\geq 0} a_n \leq \sum_{n\geq 0} b_n$*).*

(ii) $\sum_{n\geq 0} a_n$ *diverge* $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} b_n$ *diverge.*

Dimostrazione. Diamo solo un cenno di dimostrazione per (i) aggiungendo l'ipotesi che $a_n \leq b_n$, per ogni $n \geq 0$ (cioè $n_0 = 0$). Si ha, per $N \geq 0$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{N} b_n \leq \text{ (usando (5)) } \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Dunque esiste finito $\lim_{N\to\infty} S_N = \sup_{N\geq 0}\{S_N\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. ∎

Dal precedente teorema non è difficile dedurre

Corollario 9 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *e* $\sum_{n\geq 0} b_n$ *serie a termini positivi. Sia* $b_n \neq 0$*, per ogni* n*. Supponiamo che esista finito*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

(i) se $l \neq 0$ *allora le due serie hanno lo stesso carattere; quindi o convergono entrambe o divergono entrambe (in particolare può essere* $l = 1$*; questo corrisponde al caso in cui* $a_n \sim b_n$*).*

(ii) se $l = 0$ $\big($*ovvero* a_n *è* $o(b_n)\big)$ *allora:*

$(ii)_a$ $\sum_{n\geq 0} b_n$ *converge* $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ *converge*

$(ii)_b$ $\sum_{n\geq 0} a_n$ *diverge* $\Longrightarrow \sum_{n\geq 0} b_n$ *diverge.*

3.1 La serie armonica generalizzata

La serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

si dice **serie armonica**. È una serie a termini positivi importante. Poichè

$$\frac{1}{n} \sim \log(1 + \frac{1}{n})$$

e $\sum_{n\geq 1} \log(1 + \frac{1}{n})$ non converge (vedere (3)) possiamo applicare il criterio del confronto asintotico e concludere che la serie armonica non converge (diverge).

Più in generale si considera la **serie armonica generalizzata** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$. Per qualunque valore di a è sempre a termini positivi. Inoltre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} \text{converge se } \ a > 1, \\ \\ \text{diverge se } \ a \leq 1 \end{cases} \tag{6}$$

(osserviamo che il caso $a > 1$ è quello in cui il termine generale $\frac{1}{n^a}$ tende a 0 "più in fretta" rispetto al caso $0 < a \leq 1$ e questo permette di provare la convergenza).

Consideriamo prima il caso $a \leq 1$. Usando che, per ogni $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n^a} = \Big(\frac{1}{n}\Big)^a \geq \frac{1}{n}$$

possiamo applicare il criterio del confronto e ottenere che $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ diverge.

Consideriamo ora il caso $a>1$. Ricordiamo che l'integrale improprio $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx<+\infty$ se $a>1$; inoltre il valore di questo integrale corrisponde all'area della regione compresa tra il grafico di $\frac{1}{x^a}$ e l'asse x per $x\geq 1$.

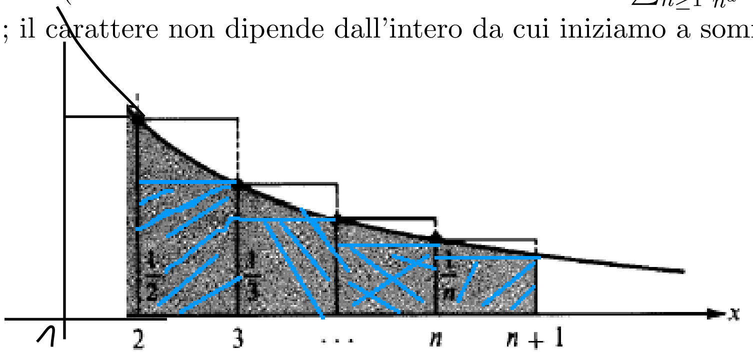
Usando che

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^a}=\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\dots$$

è una somma infinita di aree di rettangoli adiacenti che sono compresi tra il grafico di $\frac{1}{x^a}$ e l'asse x (infatti, $\frac{1}{2^\alpha}$ è l'area del rettangolo di base $[1,2]$ e altezza $\frac{1}{2^\alpha}$, $\frac{1}{3^\alpha}$ è l'area del rettangolo di base $[2,3]$ e altezza $\frac{1}{3^\alpha}$, ...), troviamo

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^a}\leq\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx<+\infty$$

da cui la tesi (occorre ricordare che il carattere della serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ è lo stesso della serie $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^a}$; il carattere non dipende dall'intero da cui iniziamo a sommare).



[Si poteva anche osservare che, per ogni $N\geq 1$,

$$\int_1^{N+1}\frac{1}{x^a}dx=\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{1}{x^a}dx\geq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^a}$$

da cui $\int_1^{N+1}\frac{1}{x^a}dx\geq S_N$. Passando al limite per $N\to\infty$ si trova che $S\leq\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx<+\infty$.]

Lo schema (6) mostra che per la convergenza di una serie $\sum_{n\geq 0}a_n$ il termine generale a_n non solo deve tendere a 0 ma deve anche tendere "molto velocemente" a 0. Il tendere "molto in fretta" a 0 è espresso in (6) dal fatto che $a>1$.

In generale data una serie a termini positivi $\sum_{n\geq 0}a_n$ per capire se il termine generale "tende velocemente a 0" (e quindi la serie converge) è spesso utile confrontare la serie data con una serie armonica generalizzata.

Esercizi 10. Stabilire il carattere delle seguenti serie.

(1) $\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{n+1}{n^2+3}\right)$. Si tratta di una serie a termini positivi (infatti $0\leq\frac{n+1}{n^2+3}\leq\frac{n^2+3}{n^2+3}\leq 1$, $n\geq 1$, e $\sin(t)\geq 0$, $t\in[0,\pi]$). Essendo $\sin t\sim t$ per $t\to 0$ e $\frac{n+1}{n^2+3}\to 0$ per $n\to\infty$, si ha:

$$\sin\left(\frac{n+1}{n^2+3}\right)\sim\frac{n+1}{n^2+3}\sim\frac{1}{n}.$$

Applichiamo il criterio del confronto asintotico, poichè $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, anche la serie di partenza diverge.

(2) $\sum_{n\geq 1} \frac{\log(n)+1}{n^2}$. Si tratta di una serie a termini positivi. Si ha:

$$\frac{\log(n)+1}{n^2} \quad \text{è} \quad o(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

Applichiamo il criterio del confronto asintotico, poichè $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, anche la serie di partenza converge.

(3) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3+\sin(2n))^n}$. Si tratta di una serie a termini positivi (infatti $3+\sin(2n) \geq 0$, $n \geq 0$). Si ha (essendo $3+\sin(2n) \geq 2$, $n \geq 0$):

$$\frac{1}{(3+\sin(2n))^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Applichiamo il criterio del confronto, poichè $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge, anche la serie di partenza converge.

(4) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2-10n}{n^4+1}$. Si tratta di una serie che è a termini positivi per $n \geq 10$. Applicando il criterio del confronto asintotico, poichè $\frac{n^2-10n}{n^4+1} \sim \frac{1}{n^2}$, la serie di partenza converge.

(5) $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right)\left(e^{-1/n}-1\right)$. Si tratta di una serie che è a termini negativi (certamente basta mettere un segno meno davanti e diventa a termini positivi). Applicando il criterio del confronto asintotico, poichè $\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right) \sim \frac{3}{2n}$ e

$$\left(e^{-1/n}-1\right) \sim -\frac{1}{n},$$

si ha: $a_n \sim -\frac{3}{2n^2}$. Poichè $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2n^2}$ converge anche la serie di partenza converge.

(6) $\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{n}-\sin(\frac{1}{n})\right)$. Si tratta di una serie a termini positivi. Essendo $(\frac{1}{n}-\sin(\frac{1}{n})) \sim \frac{1}{6n^3}$ si ha $a_n \sim \frac{1}{6n^2}$. Applicando il criterio del confronto asintotico si trova che la serie data converge.

Teorema 11 (Criterio della radice)**.** *Sia $\sum_{n\geq 0} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che esista (finito oppure no)*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0,+\infty].$$

(i) se $l<1$ la serie converge;

(ii) se $l>1$ la serie non converge (diverge);

(iii) se $l=1$ non possiamo dire nulla con questo criterio (per esempio, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ hanno entrambe $l=1$ ma la prima serie diverge e la seconda converge).

Teorema 12 (Criterio del rapporto)**.** *Sia $\sum_{n\geq 0} a_n$ una serie a termini positivi. Supponiamo che $a_n>0$ per ogni n e che esista (finito oppure no)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0,+\infty].$$

(i) se $l<1$ la serie converge;

(ii) se $l>1$ la serie non converge (diverge);

(iii) se $l=1$ non possiamo dire nulla con questo criterio.

Il criterio della radice è generalmente più usato del criterio del rapporto. Il criterio del rapporto è spesso utile se sono presenti dei fattoriali.

Esercizi 13. Stabilire il carattere delle seguenti serie.

(1) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Si tratta di una serie a termini positivi. Applichiamo il criterio della radice:

$$(a_n)^{1/n} = \frac{n}{2n+1} \to 1/2.$$

Essendo $1/2 < 1$ la serie converge.

(2) $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n}$. Si tratta di una serie a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \big(\frac{n}{n+1}\big)^n = \big(1+\frac{1}{n}\big)^{-n} \to e^{-1}.$$

Essendo $e^{-1} < 1$ la serie converge. Deduciamo dalla convergenza della serie che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0. \blacksquare$$

Esistono anche altri criteri per le serie a termini positivi come il criterio di condensazione e il criterio di Raabe. Citiamo solo il criterio dell'integrale (improprio).

Teorema 14 (Criterio dell'integrale o di McLaurin)**.** *Sia $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ una funzione decrescente (quindi $f(x) \leq f(y)$ se $x \geq y$). La serie*

$$\sum_{n\geq 1} f(n)$$

converge se e solo se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Si ha inoltre

$$\sum_{n\geq 2} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n\geq 1} f(n).$$

Il precedente criterio è utile per provare che la serie

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\,(\log n)^p}, \quad p\in\mathbb{R},$$

converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. Questo segue, usando che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(\log t)^p}dt$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

4 Convergenza assoluta e serie di Leibniz

Data una serie di numeri *complessi* $\sum_{n\geq 0} a_n$ diciamo che **converge assolutamente** se la serie dei moduli

$$\sum_{n\geq 0}|a_n| \tag{7}$$

converge (si osservi che la serie (7) è a termini positivi).

Alla luce di questa nuova definizione, la convergenza vista finora (quella senza i $|\cdot|$) si chiamerà **convergenza semplice**.

Se la serie è a termini positivi allora convergenza semplice e assoluta si equivalgono. Infatti in tale caso $\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0}|a_n|$.

Teorema 15 (conv. assoluta $\Longrightarrow$ conv. semplice)**.** *Consideriamo una serie di numeri complessi* $\sum_{n\geq 0} a_n$. *Se la serie converge assolutamente allora converge anche semplicemente e vale*

$$\Big|\sum_{n\geq 0} a_n\Big| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n|. \tag{8}$$

Osserviamo solo che basta dimostrare il teorema nel caso in cui $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Infatti poichè $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge allora (grazie alle disuguaglianze $|Re(z)| \leq |z|$ e $|Im(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{C}$) convergono anche le serie

$$\sum_{n\geq 0} |Re(a_n)| \ \text{ e } \ \sum_{n\geq 0} |Im(a_n)|.$$

Infine per provare (8) si osserva che $|S_N| = \big|\sum_{n=0}^{N} a_n\big| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|$ e si passa al limite per $N \to \infty$. ■

Come esempio di convergenza assoluta, consideriamo la serie geometrica di ragione $q \in \mathbb{C}$ con $|q| < 1$. Si ha:

$$\sum_{n\geq 0} |q^n| = \sum_{n\geq 0} |q|^n = \frac{1}{1-|q|}.$$

Un altro esempio è dato dalla serie

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2^n + in}{3^n + n^2}.$$

Si ha

$$|a_n| = \Big|(-1)^n \frac{2^n + in}{3^n + n^2}\Big| = \frac{\sqrt{2^{2n} + n^2}}{\sqrt{3^{2n} + n^4}}$$

che è asintotica a $\frac{2^n}{3^n}$. Poichè la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge segue per confronto asintotico che anche $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge. Quindi la serie di partenza converge assolutamente.

Una **serie di Leibniz** è una serie di numeri reali del tipo

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n b_n$$

che verifica:

(i) $b_n > 0$, per $n \geq 0$ (è una serie a segni alterni);

(ii) $b_{n+1} \leq b_n$, per $n \geq 0$ (la successione (b_n) è decrescente);

(iii) $b_n \to 0$.

Teorema 16 (Leibniz)**.** *Ogni serie di Leibniz converge semplicemente. Inoltre se* $S \in \mathbb{R}$ *è la sua somma vale la seguente stima dell'errore:*

$$|S - S_N| \leq b_{N+1}, \quad N \geq 0, \quad \textit{dove } S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n b_n.$$

Il teorema non dice nulla sulla convergenza assoluta di una serie di Leibniz che potrebbe esserci oppure no (per esempio, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$ è di Leibniz e converge assolutamente). Il teorema precisa solo la convergenza semplice.

Osserviamo che fissato $m_0 \in \mathbb{N}$ una serie del tipo

$$\sum_{n \geq m_0} (-1)^n b_n$$

se verifica (iii) e (i), (ii) per ogni $n \geq m_0$ è ancora una serie di Leibniz e le conclusioni del teorema continuano a valere.

Infatti se scegliamo a piacere dei b_n per $0 \leq n \leq m_0 - 1$ che siano positivi e decrescenti possiamo scrivere

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n = \sum_{n \geq m_0} (-1)^n b_n$$

e questa serie converge per il teorema precedente.

Inoltre se $S' = \sum_{n=0}^{m_0-1} (-1)^n b_n$ e $S = \sum_{n \geq m_0} (-1)^n b_n$ si ha, per $N \geq m_0$,

$$\left| (S + S') - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n b_n \right| = \left| S - \sum_{n=m_0}^{N} (-1)^n b_n \right| \leq b_{N+1}.$$

Un esempio importante di serie di Leibniz è

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots . \tag{9}$$

Abbiamo $b_n = \frac{1}{n}$. Questa serie converge semplicemente per il teorema ma non assolutamente. Infatti

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \quad \text{che diverge.}$$

La serie (9) mostra che il Teorema 15 NON si può invertire. Infatti in generale

convergenza semplice $\not\Longrightarrow$ **convergenza assoluta.**

Vediamo ora uno **schema** per lo studio di una serie di numeri complessi

$$\sum_{n \geq 0} a_n.$$

Se osserviamo che $|a_n|$ non tende a 0 possiamo concludere subito che la serie non converge (neanche semplicemente). Altrimenti possiamo procedere così:

(a) Controlliamo la convergenza assoluta ovvero la convergenza di $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ usando i criteri delle serie a termini positivi (il criterio dell'integrale lo useremo poco):

$$\begin{cases} \text{(i) criterio del confronto e del confronto asintotico} \\ \text{(ii) criterio del rapporto} \\ \text{(iii) criterio della radice} \end{cases}$$

(b) Se non c'è convergenza assoluta, occorre concentrarsi sulla possibile convergenza semplice e considerare separatamente la serie delle parti reali e quella delle parti immaginarie:

$$I_1 = \sum_{n \geq 0} Re(a_n) \quad \text{e} \quad I_2 = \sum_{n \geq 0} Im(a_n).$$

Qui potrebbe servire il criterio di Leibniz per provare l'eventuale convergenza di I_1 oppure di I_2.

Può succedere che I_1 e I_2 siano entrambe serie di Leibniz o che una delle due sia di Leibniz mentre l'altra non lo sia anche se magari converge (la serie di partenza in questo caso converge semplicemente). Può succedere che una delle due sia di Leibniz e mentre l'altra non converge (quindi la serie di partenza non converge). In ogni caso se una tra I_1 e I_2 non converge la serie di partenza non converge.

Come esempio consideriamo

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} + i \log\big(1 + \frac{1}{n^2}\big).$$

Non c'è convergenza assoluta. Infatti

$$|a_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \log^2\big(1 + \frac{1}{n^2}\big)} \sim \sqrt{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{n}.$$

Siccome $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ non converge, per confronto, la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ non converge. C'è invece convergenza semplice. Infatti

$$\sum_{n\geq 1} Re(a_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge per il criterio di Leibniz e $\sum_{n\geq 1} Im(a_n) = \sum_{n\geq 1} \log\big(1 + \frac{1}{n^2}\big)$ converge per confronto asintotico (essendo $\log\big(1 + \frac{1}{n^2}\big) \sim \frac{1}{n^2}$).

Osservazione 17. È utile osservare che data una serie di numeri complessi $\sum_{n\geq 0} a_n$, se esiste

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \quad \text{oppure se esiste} \quad \lim_{n\to\infty} \left|a_n\right|^{1/n} > 1,$$

la serie non converge *neanche semplicemente.*

Infatti supponiamo che valga $\lim_{n\to\infty} \left|a_n\right|^{1/n} = l > 1$. Segue che esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq N$ si ha

$$|a_n| \geq 1, \quad n \geq N;$$

quindi non è possibile che sia $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e la serie non può convergere.