Onde Fluidi e Termodinamica

Riassunto da:

"Elementary Linear Algebra Applications Version, 11th Edition - Howard Anton, Chris Rorres"
"Algebra lineare e geometria analitica - Elsa Abbena, Anna Maria Fino, Gian Mario Gianella"

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Maggio 2024

Indice

1 Onde meccaniche

Se in casi come il pendolo o un corpo attaccato ad una molla l'oscillazione è **macroscopica** perché tutto il sistema oscilla, in corpi continui elastici possono prodursi moti oscillatori locali, provocati in una zona specifica del corpo. Questa oscillazione indotta localmente si **propaga nel mezzo** con una certa velocità costituendo così un'**onda**.

> Definizione: **Onda**
>
> Un'onda è una perturbazione locale impulsiva e periodica che si porpaga in un mezzo (corpo continuo ed elastico) con una certa velocità v. Nel caso unidimensionale parliamo di **onda piana** $\xi(x,t)$ la cui deformazione è costante in tutti i punti con stessa x

Per descrivere l'andamento di un'onda possiamo: **fissare un istante** t e osservare la deformazione su tutto lo spazio x, come se fosse una foto dell'onda; oppure **fissare un punto dello spazio** x e osservare al variare del tempo come varia la forma dell'onda, come se fosse un filmato.

inserire grafici

Vediamo ora come possiamo scrivere l'equazione che descrive la perturbazione in funzione della posizione **x** e del tempo **t**: per farlo serviamoci di un sistema di riferimento **O** solidale con l'istante $t = 0$ e un sistema di riferimento **O′** solidale con lo spostamento dell'onda che viaggia a velocità v.

Possiamo quindi descrivere la posizione l'andamento di un'onda piana tramite una funzione del tipo

$$\begin{cases} x' = x \pm vt \\ \xi' = \xi \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \xi(x,t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} \pm \mathbf{vt})$$

Una funzione del tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x} \pm \mathbf{vt})$ soddisfa l'equazione differenziale detta **equazione delle onde** o **equazione di d'Alembert**:

$$\nabla^2_\xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

dimostrazione

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{vt} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 1} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = -v} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -v\frac{\partial}{\partial z}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Il passaggio più ambiguo è quello evidenziato in ciano, in cui viene cambiata variabile di derivazione da t a z. Trattando una funzione qualsiasi, la derivata di qualsiasi funzione rispetto a t è uguale a $-v$ derivata rispetto a z ($-v$ rappresenta il dz che va a moltiplicare).

Notare che l'equazione delle onde è soddisfatta solo per funzioni che hanno come argomento combinazioni lineari di x e t ($\xi(x \pm vt)$); è perciò **l'argomento che importa e non la funzione in sè**. Una combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione dell'equazione, la soluzione generale ha forma

$$G(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

1.1 Onde in una sbarra solida

Prendiamo una sbarra solida e supponiamo di sollecitare il tratto iniziale applicando una **forza impulsiva**. Analiziamo un segmento di lunghezza dx: su di esso agiscono la forza elastica $F(x,t)$ esercitata dagli elementi a sinistra del segmento e la forza elastica $-F(x+dx,t)$ di verso opposto esercitata dagli elementi a destra.

inserire grafici

Alla cessazione dello stimolo (t') agiscono le forze elastiche e si ha che la lunghezza dell'elemento passa da dx a

$$(x+dx)+\xi(x+dx,t')-x-\xi(x,t') \quad = \quad dx+d\xi$$

Per quanto riguarda le forze invece vale la legge di Hooke secondo la quale

$$\textbf{Legge di Hooke} \qquad F(x) = ES\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

Possiamo quindi scrivere la legge del moto con accelerazione $a = \partial^2\xi/\partial t^2$:

$$\textbf{Risultante} \qquad dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx = ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \mathbf{dma} = dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

esprimendo la massa come $dm = \rho S dx$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

$$ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx = \rho S dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \tag{1}$$

Inoltre oltre allo spostamento $\xi(x,t)$ si propaga anche la forza $F(x,t)$. Ciò è verificabile riutilizzando l'epressione della forza nella Legge di Hooke (derivandola prima rispetto a t e poi rispetto a x) e ricordando il Teorema di Schwartz, secondo il quale in una derivata mista non dipende dall'ordine di derivazione:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(ES\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ESv^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(ES\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(ESv^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \tag{2}$$

Definizione: onde lognitudinali

Quando, come in questo caso, sia lo spostamento $\xi(x \pm vt)$ sia la forza $F(x \pm vt)$, campi che descrivono le onde che si propagano lungo l'asse x, sono paralleli alla direzione in cui si propaga la perturbazione, l'onda viene chiamata **onda longitudinale**.

1.2 Onde in una corda tesa

Quando si sposta rapidamente in direzione trasversale l'estremo di una corda tesa (con un estremo fisso) vediamo la perturbazione che si propaga lungo la corda da un estremo all'altro. Supponiamo di spostare leggermente la corda dalla sua posizione di equilibrio e andiamo a studiare le tensioni che agiscono su un segmento di corda **dl**. Per piccoli angoli α e α' possiamo introdurre le seguenti approssimazioni:

$$\cos\alpha = 1 \quad \cos\alpha' = 1 \qquad\qquad \sin\alpha = \tan\alpha \quad \sin\alpha' = \tan\alpha'$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} = S(x,t)}$$

inserire grafici

$$dF_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha) = 0$$

$$dF_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha) = T(\tan\alpha' - \tan\alpha) = T\,[S(x+dx,t) - S(x)] = T\,dS = T\frac{\partial S}{\partial x}dx = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)dx = T\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx$$

$$\textbf{Risultante} \qquad dF = T\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx = \mathbf{dma} = dm\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

esprimendo la massa come $dm = \mu dx$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

$$T\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx = \mu dx\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{3}$$

Definizione: onde trasversali

Quando, come in questo caso, le particelle del mezzo attraversato subiscono spostamenti in direzione perpendicolare alla direzione in cui si propaga l'onda l'onda viene chiamata **onda trasversale**.

1.3 Onde nei gas

Se per i solidi la deformazione dipende dal modulo di Young secondo la legge $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\sigma$, nel caso dei gas la variazione relativa di volume segue la legge

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta}\Delta p$$

Supponiamo di avere del gas imperturbato (ρ_0, p_0) bloccato da due pistoni. Fornendo un impulso di pressione tramite i pistoni provociamo una compressione adiacente con una **conseguenti variazione di densità di massa**.

$$\rho = \rho + d\rho \qquad p = p_0 + dp$$

Densità

Considero un elemnto di gas di massa $dm = \rho_0 S(dx)$ che a seguito della perturbazione subisce uno spostamento che lo porta a stare tra

$$x + \xi(x, t') \quad \text{e} \quad x + dx + \xi(x + dx, t')$$

Così la sua dimensione diventa

$$x + dx + \xi(x + dx, t') - x - \xi(x, t') = dx + \xi(x + dx, t') - \xi(x, t') = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = dx\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

A partire da questa nuova espressione della "larghezza" dell'elemnto infinitesimo posso scrivere l'espressione della densità dopo la compressione:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{S(dx)} \frac{\rho_0 S(dx)}{S(dx)\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)} = \rho_0 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1}$$

Ora andremo ad applicare una semplificazione bizzarra. Se la deformazione specifica $|\varepsilon| = \left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| << 1$, allora si può applicare la formula del binomio:

$$(1 + \varepsilon)^{-n} = 1 - n\varepsilon + \frac{n(n+1)}{2!}\varepsilon^2 \dots$$

Quindi posso scrivere la densità come

$$\rho \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

da cui la variazione

$$d\rho(x, t) = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{4}$$

in cui il segno meno indica ce se il volumetto è compresso la densità aumenta, mentre se si espande la densità diminuisce.

Pressione

Ad una variazione di densità corrisponde una variazione di pressione secondo la legge

$$\beta = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad \rightarrow \quad dp(x, t) = p(x, t) - p_0 = \beta \frac{d\rho}{\rho}$$

da cui derivo che la pressione è

$$p(x, t) = \beta \frac{d\rho}{\rho_0} + p_0$$

Sostituendo l'espressione della densità trovata prima nella 4 scrivo

$$p(x, t) = \beta \frac{-\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}}{\rho_0} + p_0 = p_0 - \beta \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Forza

La variazione di pressione causa un movimento del gas e la risultante su dm è

$$\begin{aligned}-dF = F(x,t') - F(x+dx.t') &= S\left[p(x,t') - p(x+dx,t')\right] \\ &= S(dp) \\ &= -S\frac{\partial p}{\partial x}dx \\ &= -S\frac{\partial}{\partial x}\left(p_0 - \beta\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)dx \\ &= S\beta\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx\end{aligned}$$

Risultante $\qquad -dF = S\beta\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx = \mathbf{dma} = \rho_0 S(dx)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\beta}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}} \tag{5}$$

Lungo la colonna di gas si propagano anche un'onda i pressione e una perturbazione di densità del gas, tuttue con la stessa velocitù data da 5.

Modulo di compressibilità adiabatica

Nel caso di trasformazioni adiabatiche vale (come dimostreremo più avanti) l'uguaglianza

$$pV^{\lambda} = \text{costante}$$

dalla quale, sviluppando il differenziale si possono trovare alcune caratteristiche di β in condizioni adiabatiche:

$$d\left(pV^{\gamma}\right) = V^{\gamma}(dp) + \gamma pV^{(\gamma-1)}dV = \mathbf{0}$$

$$\rightarrow \quad V^{\gamma}(dp) = \gamma pV^{(\gamma-1)}(dV) \quad \rightarrow \quad \frac{V^{\gamma}(dp)}{pV^{\gamma}} = \frac{\gamma pV^{(\gamma-1)}(dV)}{pV^{\gamma}}$$

Dalla quale otteniamo (confrontata con l'espressione precedente di β)

$$\frac{dp}{p} = \gamma\frac{dV}{V}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{p\gamma}dp \qquad \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta}\Delta p$$

Da cui si ottiene la nuova espressione di β

$$\boxed{\beta = \gamma p} \tag{6}$$

calcolo velocità del suono

Se assimiliamo l'aria ad un gas perfetto biatomico ($\gamma = 7/5$) dai risultati ottenuti fin'ora si trova che:

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{(7/5)\cdot 1.01325\cdot 10^5}{1.29}} = 331.6\frac{m}{s}$$

Il risultato ottenuto è in accordo (3%) con quello misurato, possiamo quindi dedurre che l'aprossimazione adiabatica è una bona approssimazione.

2 Onde piane armoniche

Un tipo molto importante di onda piana è l'**onda armonica** la cui forma si scrive

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}x \mp \boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\delta})$$

dove k è il **numero d'onde**.

inserire grafici

Periodo spaziale Fissato un tempo $t = t_0$, definiamo la lunghezza d'onda λ come la periodicità spaziale dell'onda. Essendo λ lo spazio tra due creste d'onda possiamo calcolarla come $\lambda = x_2 - x_1 = 2\pi/k$, da cui si deduce che k è uguale al numero di lunghezze d'onda in un intervallo spaziale pari a 2π metri.

In generale il periodo spaziale può essere espresso tramite λ o k.

Lunghezza d'onda λ

La lungheza d'onda è lo spazio percorso dalla perturbaione nell'intervallo di tempo di un periodo T.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = vT$$

Periodo temporale Fissato unpunto nello spazio $x = x_0$, definiamo il periodo $T = t_2 - t_2$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

come l'intervallo temporale tra due istanti nei quali l'onda, essendo armonica, assume lo stesso valore.

Sapendo che la pulsazione è la velocità dell'onda nel percorrere un giro (2π), i due periodi dono legati dalla relazione

$$\lambda = vT$$

Quindi possiamo esprimere il periodo temporale tramite T, f, ω.

Tutte le espressioni della funzione d'onda sono:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx \mp \omega t + \delta) \qquad \xi(x,t) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) + \delta\right] \qquad \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt) + \delta\right]$$

2.1 Analisi di Fourier

2.2 Propagazione dell'energia in una barra solida

La propagazione di un campo che descrive in'onda è sempre accompagnato da una propagazione di energia. Osserviamo prima il fenomeno del flusso di energia legato alla propagazione di un'onda piana armonica in una barra solida andando a calcolare la potenzia media e l'energia per untià di volume ad essa associata.

inserire grafici

Per prima cosa mettiamo in evidenza le equazioni che entrano in gioco:

$$\textbf{Onda:} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Forza:} \quad F = -ES\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

L'espressione della potenza è

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= \vec{F} \cdot \vec{u} \\
&= -ES\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} \\
&= -ES\left[k\xi_0 \cos(kx - \omega t)\right]\left[-\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)\right] \\
&= ESk\omega\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

La potenza quindi è una cosinusoide traslata in alto di una sua ampiezza (con avvallamenti tangenti all'asse orizzontale). la potenza media è espirmibile come la retta che interseca la cosinusoide alla quota pari a metà la sua ampiezza; poi ricordandoci che

$$\boxed{v = \sqrt{E/\rho} \qquad E = v^2\rho} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_m &= \frac{1}{2}ESk\omega\xi_0^2 \\
&= \frac{1}{2}(v^2\rho)S\left(\frac{\omega}{v}\right)\omega\xi_0^2
\end{aligned}$$

$$\mathscr{P}_m = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi^2 Sv \tag{7}$$

Energia per unità di volume

Considero l'elemento infinitesimo di massa $dm = \rho dV = \rho S dx$ descrive un moto armonico con

$$\textbf{Posizione:} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Velocità} \quad v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Quindi l'energia meccanica risulta pari all'energia cinetica massima assunto dall'elemento dm, che si trova utilizzando la velocità massima $v_{\max} = \omega\xi_0$:

$$dU = \frac{1}{2}(dm)v_{\max}^2 = \frac{1}{2}\rho S(dx)\omega^2\xi_0^2 = \frac{1}{2}\rho(dV)\omega^2\xi_0^2$$

Chiamiamo **densità di energia per unità di volume** il valore

$$\mathscr{W} = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

con la quale possiamo esprimere la potenza media come

$$\mathscr{P}_m = \mathscr{W}Sv \tag{8}$$

Intensità dell'onda

Definiamo l'intensità di un'onda come **potenza media per unità di superficie**, quindi

$$I = \frac{\mathscr{P}}{S} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v$$

2.3 Propagazione dell'energia in una corda tesa

Studiamo ora lo stesso fenomeno ma in una corda tesa. La situazione è simile con la differenza che l'onda ora è trasversale.

inserire grafici

Per prima cosa mettiamo in evidenza le equazioni che entrano in gioco:

$$\textbf{Onda:} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Forza:} \quad F = T$$

L'espressione della potenza è

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= F \cdot \vec{u} \\
&= T\frac{\partial \xi}{\partial t}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} \\
&= T\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} \\
&= Tk\omega\xi_0^2\cos^2(kx-\omega t)
\end{aligned}$$

Trovo la potenza media come prima esprimendo k e T come

$$\boxed{v = \sqrt{T/\mu} \qquad T = v^2\mu} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

$$\mathscr{P}_m = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi^2 v \tag{9}$$

Energia per unità di lunghezza

Considero l'elemento infinitesimo di massa $dm = \mu dx$ descrive un moto armonico con

$$\textbf{Posizione:} \quad \xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Velocità} \quad v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega\xi_0\cos(kx-\omega t)$$

Quindi l'energia meccanica risulta pari all'energia cinetica massima assunto dall'elemento dm, che si trova utilizzando la velocità massima $v_{\max} = \omega\xi_0$:

$$dU = \frac{1}{2}(dm)v_{\max}^2 = \frac{1}{2}\mu(dx)\omega^2\xi_0^2$$

Chiamiamo **densità di energia per unità di lunghezza** il valore

$$\mathscr{W} = \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

con la quale possiamo esprimere la potenza media come

$$\mathscr{P}_m = \mathscr{W}v \tag{10}$$

2.4 Onde in più dimensioni

Prima di tutto definiamo **fronte d'onda** la superfici su cui in un certo istante la fase dell'onda è costante ($\phi = kx - \omega t$).

Per le onde piane il fronte d'onda è un piano che si sposta con velocità v dell'onda. Per caratterizzare la direzione di propagazione dell'onda introduciamo il **vettore di propagazione** $\vec{k}$ con $k = 2\pi/\lambda$ e verso uguale a quello di $\vec{v}$ e il vettore posizione $\vec{r}$ che individua la posizione di un punto P su un certo fronte d'onda. Con queste informazioni possiamo riscrivere la funzione d'onda come

$$\xi(r,t) = \xi_0 \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

In un sistema di tre coordinate l'equazione generale delle onde ammette altre soluzioni che rappresentano **onde sferiche** e **onde cilindriche**:

$$\nabla^2 \xi(x,y,z,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,y,z,t)}{\partial t^2}$$

Onde elastiche in una membrana tesa

Consideriamo una membrana piana tesa con tensione T. Supponiamo di spostare leggermente la membrana dalla sua posizione di equilibrio e andiamo a studioare le tensioni che agiscono su un'area $dxdy$.

Il ragionamento è uguale a quello fatto per la corda tesa, in questo caso però la tensione si distribuisce su tutto il lato $d*$ e diventa $T(d*)$:

inserire grafici

$$dF_x(x,y,z,t) = T(dx)\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial y^2}dy = T\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial y^2}dxdy$$

$$dF_y(x,y,z,t) = T\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial x^2}dx = T(dy)\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial x^2}dxdy$$

$$\textbf{Risultante} \qquad dF = T\left(\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial x^2}\right)dxdy = (\mathbf{dm})\mathbf{a} = \rho_s(dxdy)\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial t^2}$$

esprimendo la massa come $dm = \rho_s(dxdy)$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

$$T\left(\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial x^2}\right)dxdy = \rho_s(dxdy)\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho_s}{T}\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial t^2} \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}}} \tag{11}$$

Onde sferiche

Se il mezzo è *isotropo* è quindi la velocità di propagazione è uguale in tutte le direzioni, la funzoine d'**onda sferica armonica** è $\xi(r,t) = A(r)\sin(kr - \omega t)$ dove r è la distanza dalla sorgfente e $A(r)$ è l'ampiezza funzione di r.

Diciamo che la nostra sorgente emetta un'onda di intensità $I(r) = CA^2(r)$ dove C è una costante dipendente dal mezzo. In un'onda sferica la **potenza media** trasmessa attraverso la superficie sferica $S = 4\pi r^2$ deve risultare **costante** ad ogni valore di r:

$$\mathscr{P}_m = IS = \text{cost.}$$

$$\mathscr{P}_m = CA^2 4\pi r^2 = \text{cost.}$$

$$A(r) = \sqrt{\frac{\mathscr{P}_m}{4\pi r^2}} = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{\mathscr{P}_m}{\pi}}$$

Risulta quindi che l'ampiezza è inversamente proporzionale alla distanza r, come la pressione, e quindi può essere scritta come $A = \xi_0 / r$.

$$\boxed{\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t)} \tag{12}$$

mentre l'intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente:

$$I(r) = \frac{\mathscr{P}_m}{S} =<$$

PERCHE SI TRATTA COME UNA CORDA?????????

2.5 Onde cilindriche

2.6 Assorbimento dell'energia

Come abbiamo visto l'intensità di un'onda non rimane costante ma decresce al propagarsi dell'onda (nelle onde sferiche più rapidamente, nelle cilindriche meno...). Questo comportamento viene attribuito ad un **assorbimento di energia** dovuto a fenomeni di attrito interno. Studiando il fenomeno su uno spessore dx si ha un'aattenuazione che può essere considerata proporzionale all'intensità in x e allo spessore dx.

$$dI = -\boldsymbol{\alpha} I(x) dx$$

dove α è il **coefficiente di assorbimento**.

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^x dx$$

$$\boxed{I(x) = I_0 e^{-\alpha x}} \tag{13}$$

Quindi la decrescità dell'intensità è esponenziale. Definiamo la distanza $x_0 = \frac{1}{\alpha}$ detta **lunghezza di assorbimento** la distanza tra due punti tali che $I(x_1)/I(x_2) = \frac{1}{e}$.

Abbiamo appurato precedentemente che l'ampiezza dell'onda è direttamente proporzionale a $\sqrt{I}$

$$I = CA^2 \quad \rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{I}{C}} = \sqrt{\frac{I_0 e^{-\alpha x}}{C}}$$

quindi la funzione d'onda in un mezzo che assorbe energia è:

Onde piane: $$\xi = \left(\frac{I_0 e^{-\alpha x}}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(kx - \omega t) \quad = \quad \xi_0 \left(I_0 e^{-\alpha x/2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(kx - \omega t)$$

Onde sferiche: $$\xi = \frac{\left(\frac{I_0 e^{-\alpha x}}{C}\right)^{\frac{1}{2}}}{r} \sin(kx - \omega t) \quad = \quad \xi_0 \frac{\left(I_0 e^{-\alpha x/2}\right)^{\frac{1}{2}}}{r} \sin(kx - \omega t)$$

Onde cilindriche: $$\xi = \frac{\left(\frac{I_0 e^{-\alpha x}}{C}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r}} \sin(kx - \omega t) \quad = \quad \xi_0 \frac{\left(I_0 e^{-\alpha x/2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r}} \sin(kx - \omega t)$$

2.7 Pacchetti d'onde

Fino ad ora abbiamo considerato onde armoniche di lunghezza e durata infinita. Tutte le sorgenti emettono onde attraverso processi di durata finita, quindi, nella realtà, un'onda ha una propria durata e estensione spaziale.

Considerato un pacchetto di lughezza Δx e durata Δt, tali che $\Delta x = v\Delta t$. Il pacchetto è poi caratterizzato da N oscillazioni tali che

$$\Delta x = N\lambda \qquad \Delta t = NT$$

ed esprimiamo il numero di onde k e la pulsazione ω come

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi N}{\Delta x} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{\Delta t}$$

inserire grafici

Se ammettiamo (come nella figura) che N non sia fisso ma abbia una acerta indeterminazione che esprimiamo come $\Delta N = 1$, possiamo trovare altre espressioni per k e ω:

$$\boxed{\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x}} \qquad \boxed{\Delta \omega = \frac{2\pi}{\Delta t}} \qquad \boxed{\Delta f = \frac{1}{\Delta t}}$$

$$\Delta k \Delta x = 2\pi \qquad \Delta\omega\Delta t = 2\pi \qquad \Delta f \Delta t = 1$$

Queste osservazioni mettono i vevidenza la sostanziale differenza tra onda e pacchetto d'onda: mentre la prima ha una lunghezza d'onda λ e una frequenza f ben definite che la descrivono completamente, nel secondo è presente una **banda di frequenze** e un **intervallo di numeri d'onda**

$$\Delta f = \frac{1}{\boldsymbol{\Delta t}} \qquad \Delta k = \frac{2\pi}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

Da quest'ultime espressioni notiamo che al crescere di Δx e Δt minori risultano queste bande, infatti la limite per $\Delta x, \Delta t \to \infty$ troviamo l'onda armonica. Se andiamo a considerare **brevi durate e piccole lunghezze** nel pacchetto sono contenute bande di lunghezze d'onda e frequenze distribuite significatibamente nell'intorno di $\lambda\ f$.

Velocità di fase e velocità di gruppo

Poiché diversi segmenti d'onda contenuti in un pacchetto possono avere frequenze diverse, la velocità del pacchetto non può essere identificata con quella delle componenti. Tuttavia è essenziale identificare la velocità del pacchetto perché il fenomeno fisico è rappresentato proprio dal pacchetto ed è la sua velocità quella con cui si propaga l'**energia** dell'onda.

Andiamo quindi a distinguere la **velocità di fase**, quella con cui si muovono le singole componenti dell'onda, e **velocità di gruppo**. La velocità dell'onda dipende dalla frequenza quando la propagazione avviene in un **mezzo dispersivo** come può avvenire per onde sulla superficie di un liquido o onde elettromagnetiche in mezzi materiali o in cavità conduttrici.

Mostriamo un esempio di velocità di gruppo nel caso di un pacchetto con solo due onde armoniche:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \xi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\textit{prostaferesi:} \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin\left(\frac{(k_1+k_2)x - (\omega_1+\omega_2)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(k_1-k_2)x + (\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)$$

Definiti k_m, ω_m e $\Delta k, \Delta\omega$

$$\boxed{k_m = \frac{k_1+k_2}{2}} \qquad \boxed{\omega_m = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}} \qquad \boxed{\Delta k = \frac{k_1-k_2}{2}} \qquad \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}}$$

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin(k_m x - \omega_m t)$$

inserire grafici

In sostanza il moto relativo di un'onda rispetto all'altra produce la sovrapposizione mostrata sopra: **l'onda di alta frequenza cambia** durante il moto ma **l'inviluppo conserva la stessa forma**.

L'ampiezza dell'onda modulata

$$A = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

non è costante ma presenta una struttura di tipo ondulatorio e descrive l'inviluppo dell'onda di alta frequenza.

Abbiamo quindi un'onda di alta frequenza che si propaga con **velocità di fase media** v_f e con ampiezza modulata da un'onda che si propaga con velocità v_g **velocità di gruppo**:

$$v_f = \frac{\omega_m}{k_m} \qquad v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Più in dettaglio la velocità di gruppo, nel limite del continuo, è definita come

$$v_g = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\boldsymbol{k}}$$

invece dall'espressione della velocità di fase possiamo esprimere la pulsazione in funzione di v_f e k:

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{k}) = v_f(k)\boldsymbol{k}$$

da cui

$$v_g = v_f + k\frac{dv_f}{dk} \tag{14}$$

La velocità di gruppo può quindi essere minore o maggiore della velocità di fase, dipende dal segno della derivata di v_f: se la velocità delle singole componenti decresce, allora la velocità di gruppo sarà minore, se invece è in crescita, la velocità di gruppo sarà maggiore. Il caso di **mezzo non dispersivo**, ovvero quando $\boldsymbol{v_g = v_f}$ si ha quando $\boldsymbol{dv_f/dk = 0}$.

Servendosi delle seguenti uguaglianze

$$\boxed{\frac{dk}{k}} = \boxed{-\frac{d\lambda}{\lambda}} = \boxed{\frac{df}{f}}$$

la 14 è riscrivibile come

$$= v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda} = v_f + f\frac{dv_f}{df}$$

E' bene capire che la struttura del pacchetto in generale si modifica durante la propagazione e proprio per questo la velocità di fase (delle singole componenti) varia in funzione di k così come la velocità di gruppo

2.8 Effetto Doppler

Se una sorgente di onde $\boldsymbol{S}$ e un rivelatore di onde $\boldsymbol{R}$ sono n moto reciproco la frequenza percepita dal rivelatore è in generale diversa dalla frequenza propira della sorgenre. Questo fenomeno prende il nome di effetto Doppler e si osserva per tutti i tipi di onde.

Prendiamo in esame una sorgente che emette un qualsiasi tipo di onde armoniche sferiche di velocità v, chiamiamo **fronte d'onda** la superficie sferica su cui la fase è costante e facciamo coincidere il fronte d'onda con una cresta. La cresta successiva a quella fissata sul fronte d'onda si trova a distanza spaziale λ e temporale T con differenza di fase 2π. In un tempo Δt l'onda avanza di uno spazio $v\Delta t$ e il rivelatore viene attraversato da tanti fronti contenuti nello spazio $v\Delta t$:

$$N = \frac{v\Delta t}{\lambda}$$

quindi il rivelatore percepisce una frequenza

$$f_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{\lambda \Delta t} = \frac{v}{\lambda} = f$$

In questa condizione la frequenza percepita dal rivelatore è la frequenza propria della sorgente.

Sorgente in moto

Supponiamo che la sorgente si stia muovendo con velocità $\boldsymbol{v_S} < v$ verso il rivelatore. Ogni intervallo T_0 la sorgente percorre un tratto $v_S T_0$ sicuramente minore di λ ($v_S < v \to v_S T_0 < \lambda_0 = vT$). Si ha quindi che la distanza tra due fronti d'onda consecutivi è

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_S T$$

quindi il rivelatore è attraversato da più fronti d'onda del caso precedente poiché è aumentata la loro "densità". Riscrivendo l'espressione di λ_R possiamo trovare una nuova espressione della frequenza percepita da R:

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_S T_0 = vT_0 - v_S T_0 = v\frac{1}{f_0} - v_S\frac{1}{f_0} = \frac{v - v_S}{f_0}$$

quindi essendo la frequenza il numero di creste in un periodo: $f = \frac{N}{T}$, esprimendo N come numero di lunghezze d'onda nello spazio percorso in un periodo: $N = \frac{vT}{\lambda}$, troviamo che un'espressione della frequenza è il rapporto tra la velocità dell'onda e la lunghezza d'onda

$$f_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{\frac{v-v_S}{f_0}} \to$$

$$\boxed{f_R = \frac{v}{v - v_s} f_0} \tag{15}$$

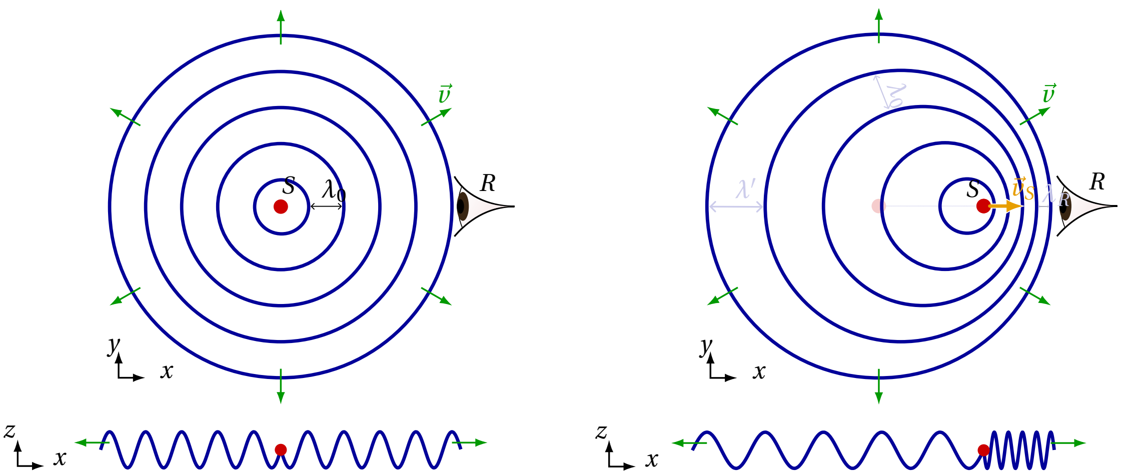

Figure 1: fadslòfas

Rivelatore in moto

Diciamo che il rivelatore si stia muovento con velocità v_R. In questo caso i fronti d'onda non variano la loro densità, tuttavia il rivelatore ne percepirà comunque di più o di meno (in base se si sta avvicinando o allontanando) a causa del suo moto. I fronti d'onda che investono il rivelatore sono

$$N = \frac{\text{spazio percorso}}{\lambda_0} = \frac{(v - v_R)\Delta t}{\lambda_0}$$

da cui ricaviamo la frequenza percepita dal rivelatore

$$f_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v - v_R}{vT_0} = \frac{v - v_R}{v(1/f_0)} \rightarrow$$

$$f_R = \frac{v - v_R}{v} f_0 \tag{16}$$

Come possiamo vedere dalle espressioni di f_R ottenute non sono simmetriche: seppur è il **moto relativo** quello che conta, non è lo stesso se la sorgente si muove o è il rivelatore a farlo.

Espressione generale

Le espressioni trovate nei due casi possono essere riassunte in un'unica formula. Diciamo quindi di avere sia una v_S sia una v_R. La distanza tra i fronti d'onda è influenzata solo dalla velocità della sorgente e vale

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_S T_0 == vT_0 - v_S T_0 = \frac{v - v_s}{f_0}$$

invece il numero N di fronti d'onda che investono il rivelatore dipende anche da v_R:

$$N = \frac{\text{spazio percorso}}{\lambda_R} = \frac{(v - v_R)T_0}{\frac{v - v_s}{f_0}} = \frac{(v - v_R)\frac{1}{f_0}}{\frac{v - v_s}{f_0}} = \frac{v - v_R}{v - v_S}$$

Da queste due otteniamo che la frequenza (il numero di creste in un periodo) percepita vale

$$f_R = \frac{\frac{v - v_R}{v - v_S}}{T_0} \rightarrow$$

$$\boxed{f_R = \frac{v - v_R}{v - v_S} f_0} \tag{17}$$

2.9 Onda d'urto

Quando la sorgente si muove a velocità superiori a quella di propagazione dell'onda ($v_S > v$)

3 Onde stazionarie

Un'altro tipo di oscellazioni rilevanti sono le onde stazionarie, onde i cui punti oscillano con ampiezza che varia solo con la posizione. Si osserva che le posizioni di massima ampiezza e dei punti fermi (nodi) non variano nel tempo, per questo possiamo definire questo tipo di oscillazione un'**oscillazione collettiva** del fenomeno **cui non è associato un fenomeno di propagazione**.

inserire grafici

Consideriamo una corda fissa ad un solo estremo ***O*** su cui poniamo lo zero dell'asse x; sull'estremo libero applichiamo una perturbazione **sinusoidale** regressiva di frequenza f tramite un diapason:

$$\xi_1(x,t) = A\sin(kx+\omega t)$$

L'onda si propaga fino all'estremo fisso ***O*** che deve rimanere fermo, tuttavia sappiamo che in ***O*** risulta una perturbazione $\xi_1(0,t)$. Ci deve essere una seconda perturbazione $\xi_2(0,t)$ generata dal vincolo tale che

$$\xi_1(0,t)+\xi_2(0,t)=0 \quad \longrightarrow \quad \xi_2(0,t) = -A\sin(\omega t) = A\sin(-\omega t)$$

quindi la seconda onda si propaga nel verso positivo dell'asse x con equazione

$$\xi_2(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$$

L'equazione complessiva dell'onda si ottiene sommando le due

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t)+\xi_2(x,t) = A\left[\sin(kx+\omega t)+\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$\textit{prostaferesi:} \quad \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\boxed{\xi(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)} \tag{18}$$

L'equazione rappresenta un'oscillazione armonica semplice di pulsazione ω e con **ampiezza che dipende dalla posizione**; come ci aspettavamo nell'equazione **non compare il termine $\boldsymbol{kx\pm\omega t}$** proprio perché l'oscillazione non si propaga. Troviamo i massimi e i minimi ponendo

$$kx=\pm1 \quad \longrightarrow \quad kx = \frac{1}{2}\pi+m\pi \quad \longrightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi}{2}(1+2m) \quad \longrightarrow$$

$$\textbf{Ventri:} \quad \boxed{x = \frac{\lambda}{4}(1+2m)} \quad m=0,1,2,\dots \tag{19}$$

invece i nodi li troviamo ponendo

$$kx=0 \quad \longrightarrow \quad kx = m'\pi \quad \longrightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}x = m'\pi \quad \longrightarrow$$

$$\textbf{Nodi:} \quad \boxed{x = \frac{\lambda}{2}m'} \quad m'=0,1,2,\dots \tag{20}$$

3.1 Corda tesa con due estremi fissi

Supponiamo di avere una corda vibrante di lunghezza L con noni nei punti di coordinate $x=0$ e $x=L$.

3.2 Corda tesa con un estremo fisso

4 Fluidi

4.1 Pressione

4.2 Equilibrio statico di un fluido

4.3 Principio di Archimede

4.4 Liquido in rotazione

4.5 Moto di un fluido

Teorema di Bernoulli

Moto laminare

Moto turbolento

4.6 Portanza

4.7 Fenomeni di superficie