Relazione di laboratorio - Pendolo semplice

Misura del periodo di un pendolo semplice

Federico Cesari
1096759

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
4 aprile 2024

Indice

1 Scopo dell'esperienza

L'esperienza di laboratorio ha lo scopo di studiare il periodo di un pendolo semplice del quale conosciamo le espressioni del periodo teorico (in condizioni ideali e prive di attrito) al variare della sua lunghezza e dell'angolo di partenza. Verrà quindi misurato il periodo e se ne osserverà la variazione in funzione dell'angolo, della lunghezza e della massa appesa ad esso.

2 Premesse teoriche

aggiungi equazioni

3 Strumentazione

Strumento	Sensibilità
Cr. Analogico	0.2s
Cr. Digitale	0.01s
Fotocellula	0.001s
Goniometro	1°
Asta graduata	0.1cm
Calibro	0.01mm
Bilancia digitale	1g

4 Scelta strumento di misura

Al fine di stabilire il migliore strumento di misura per le succesive misurazioni, registro 8 misure del periodo del pendolo prima con un angolo di partenza $\vartheta = 5°$ e poi con $\vartheta = 30°$ utilizzando un cronometro analogico, uno digitale e una fotocellula. Lo strumento che mostrerà discrepanze significative tra il periodo calcolato con $\vartheta = 5°$ e $\vartheta = 30°$ sarà quello utilizzato per i testi successivi. Procedo quindi con le misurazioni dei periodi del pendolo a cui è stata agganciata una sfera di massa $m = (110 \pm 1)g$

sistema valori per C.Analogico e capire se aggiungere errori per T medi.

	C.Analogico	**C. Digitale**	**Fotocellula**
	$T(s) \pm 0.2s$	$T(s) \pm 0.01s$	$T(s) \pm 0.001s$
	1.6	1.63	1.702
$\vartheta = 5°$	1.7	1.65	1.703
	1.5	1.60	1.703
	1.7	1.71	1.703
	1.7	1.71	1.703
	1.7	1.65	1.702
	1.6	1.70	1.703
	1.7	1.70	1.703
$\bar{\mathbf{T}}_5$**(s)**	**1.65**	**1.67**	**1.703**
σ_{T_5}	0.05	0.02	0.000

	C.Analogico	**C. Digitale**	**Fotocellula**
	$T(s) \pm 0.2s$	$T(s) \pm 0.01s$	$T(s) \pm 0.001s$
	1.8	1.65	1.733
$\vartheta = 30°$	1.7	1.67	1.733
	1.6	1.70	1.733
	1.7	1.62	1.733
	1.7	1.70	1.731
	1.8	1.72	1.733
	1.7	1.80	1.733
	1.6	1.69	1.732
$\bar{\mathbf{T}}_{30}$**(s)**	**1.70**	**1.69**	**1.715**
$\sigma_{T_{30}}$	0.08	0.03	0.0005

Da questi primi set di dati noto subito che la deviazione standard dei periodi misurati dal cronometro digitale è più grande della sensibilità dello strumento, quindi dovrei scegliere la deviazione standard come errore sulla singola misura.

Invece per evidenziare quale dei tre strumenti fornisca periodi significativamente differenti per i due angoli di partenza sottopongo le coppie di periodi medi a un test Z:

Z	$\sigma_{\bar{T}_5}$	$\sigma_{\bar{T}_{30}}$
$z_{\text{an.}}$	***0.234***	***0.234***
$z_{\text{dig.}}$	***0.170***	***0.132***
$z_{\text{fot.}}$	***22.8***	***14.2***

Il test mostra che i periodi misurati con i cronometri analogico e digitale con ancgoli di partenza $\vartheta = 5°$ e $\vartheta = 30°$, risultano essere compatibili con livelli di significatività maggiori dell'80% (specifica bene i valori). Per quanto riguarda i periodi registrati con la fotocellula questi risultano appartenere a popolazioni differenti e posso quindi affermare che lo strumento che fornisce periodi significativamente differenti per i due angoli di partenza sia proprio la fotocellula.

5 Dipendenza dall'angolo

La prima parte dell'esperienza consiste nel verificare la dipendenza di T, periodo del pendolo a cui è stata attaccata una sferetta di legno di massa $m = (10 \pm 1)g$, da ϑ, angolo di partenza. Per prima cosa si procede alla misurazoine della lunghezza del pendolo. Attraverso l'asta graduata misuro prima la distanza da terra alla cima del pendolo (L_C) e poi la distanza da terra al centro della sfera appesa (L_F)[1].

Cima	**Fondo**
L_C(cm) $\pm$ 0.1cm	L_F(cm) $\pm$ 0.1cm
89.0	16.8

Ricavo quindi la lunghezza del pendolo:

$$l = L_C + L_F = (72.2 \pm 0.2)\text{cm.}^2$$

A questo punto prendo tre misurazioni del periodo del pendolo, partendo da un angolo di partenza di 5°. Continuo a prendere le misure avanzando di 5° fino ad arrivare a 30°.

	5°	**10°**	**15°**	**20°**	**25°**	**30°**
	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$
	1.703	1.706	1.710	1.715	1.723	1.730
	1.702	1.706	1.710	1.715	1.723	1.731
	1.701	1.706	1.710	1.715	1.723	1.731
$\bar{T}$(s)	**1.702**	**1.706**	**1.710**	**1.715**	**1.723**	**1.731**

capire se aggiungere errori per T medi.

Dall'espressione del periodo del pendolo sappiamo che il periodo è direttamente proporzionale a $\sin(\vartheta/2)^2$, più precisamente:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin(\vartheta/2)^2 \right]$$

Se dovessi riportare su un grafico i periodi sperimentali in funzione di $x = \sin(\vartheta/2)^2$ mi aspetto quindi un andamento lineare e più precisamente una retta del tipo

$$y = T_0 + \frac{T_0}{4} x$$

Per verificare ciò mi avvalgo del metodo dei minimi quadrati... inserire qualche informazione a riguardo

[1] Avrei potuto misurare il diametro della sfera con il calibro e aggiungere il raggio della sfera successivamente invece che includerlo nelle misura di cima e fondo, tuttavia la sensibilità dell'asta e il fatto che questa non fosse perfettamente perpendicolare ha reso gli errori di L_C e L_F troppo grossolani rendendo così inutile la maggiore cura nella misura del raggio.

[2] Propago l'errore linearmente ($(0.1 + 0.1)$ cm $= 0.2$cm) perché essendo solo due misure (per di più effettuate con un asta graduata imperfetta) rischio di sottostimare l'errore sommandolo in quadratura

5.1 Retta di best-fit

Appurato che T e $\sin(\vartheta/2)^2$ siano *teoricamente* linearmente correlati, è di mio interesse trovare quale retta della forma $y = A + Bx$ meglio interpola i dati sperimentali così da appurare se i valori misurati soddisfano la attesa teorica che y sia lineare in x.

Posso fare questo avvalendomi del metodo dei minimi quadrati che ha proprio lo scopo di determinare i parametri che legano due variabili legate da essi, nel mio caso due variabili x e y legati da due parametri A e B. Questo metodo necessita di alcune assunzioni importanti:

1. Le misure devono essere statisticamente indipendenti;
2. Una delle due variabili (sceglierò la x) deve avere errori trascurabili rispetto all'altra [3].
3. Gli errori della variabile y devono essere distribuiti normalmente.

preso letteralmente dal Cannelli

Per rispettare la seconda assunzione confronto gli errori relativi delle mie due variabili (δ_x è l'errore assoluto, δ_x/x è l'errore relativo).

T		
$T(s)$	$\delta_T(s)$	δ_T/T
1.702	0.001	**0.000339**
1.706	0.001	**0.000338**
1.710	0.001	**0.000337**
1.715	0.001	**0.000336**
1.723	0.001	**0.000335**
1.731	0.001	**0.000333**

$y = \mathbf{sin}(\vartheta/\mathbf{2})^\mathbf{2}$		
y	δ_y	δ_y/y
0.0019	0.00075	**0.398**
0.0076	0.0015	**0.198**
0.017	0.0023	**0.132**
0.030	0.0030	**0.099**
0.047	0.0037	**0.078**
0.067	0.0044	**0.065**

[4]

Come si può leggere nelle tabelle l'errore associato alle misure dei periodi è perfettamente trascurabile rispetto a quello associato al seno, quindi scelgo di portare le misure del periodo sull'asse x e quelle del seno sull'asse y.

Procedo al calcolo dei parametri A e B e dei rispettivi errori:

$$\mathbf{A} = -3.68 \qquad \sigma_\mathbf{A} = 0.18$$

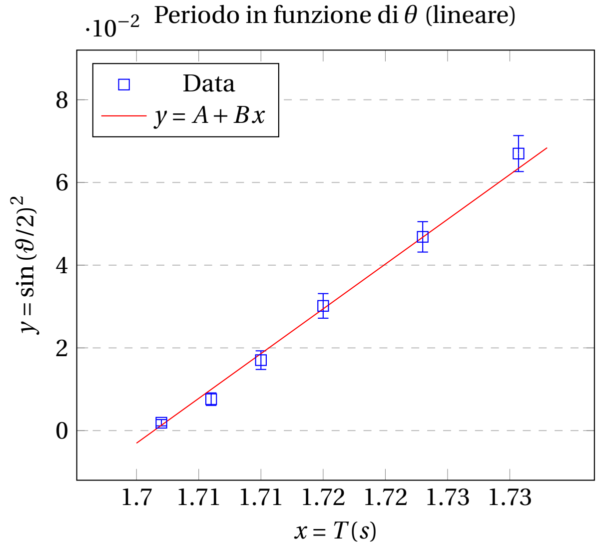
$$\mathbf{B} = 2.16 \qquad \sigma_\mathbf{B} = 0.10$$

[3] Giudico un errore come trascurabile rispetto all'altro quando si trovano in rapporto 1 a 3,4,5.

[4] Lascio 3 cifre significative negli errori relativi del periodo per evidenziarne le piccole discrepanze.

l'errore sulla x è da scrivere?

$T(s) \pm \delta_T$	$\sin(\vartheta/2)^2 \pm \delta_y$
1.702	0.0019
1.706	0.0076
1.710	0.0170
1.715	0.0302
1.723	0.0468
1.731	0.0669



La retta di "best-fit" può fornire altre importanti informazioni: per esempio nella retta

$$T = T_0 + \frac{T_0}{4}\sin(\vartheta/2)^2$$

il termine noto della retta è T_0 che rappresenta il periodo delle piccole oscillazioni. Nel mio caso invece (ho il seno in funzione di T) la retta è espressa come

$$\sin(\vartheta/2)^2 = 4\frac{T}{T_0} - 4$$

nella quale T_0 compare a denominatore del coefficiente angolare della retta. Posso allora ricavarlo imponendo

$$B = 4\frac{1}{T_0} \qquad T_0 = \frac{4}{B}$$

a cosa mi dovrebbe servire trovare il periodo delle piccole oscillazioni?

Ho quindi trovato anche il valore sperimentale del periodo delle piccole oscillazioni del mio pendolo:

$$\mathbf{T_0} = (1.85 \pm 0.09)\mathrm{s}$$

[5]

5.2 Determinazione dell'accelerazione di gravità g

Sappiamo le piccole oscillazioni del pendolo hanno periodo descritto da

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove l è la distanza dalla cima del pendolo al centro di massa della sfera appesa ad esso, nel mio caso $l = (72.2 \pm 0.2)$cm. Dall'equazione precedente (e ricordando che $T_0 = 4/B$) troviamo l'espressione dell'accelerazione di gravità:

$$g = \frac{\pi^2 b^2 l}{4}$$

[5] L'errore di T_0 è $\sigma_{T_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_0}{\partial B}\sigma_B\right)^2} = \left|\frac{\partial T_0}{\partial B}\sigma_B\right| = \frac{4}{B^2}\sigma_B$

con errore associato

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2} \quad = \quad \sqrt{\left(\frac{B^2\pi^2}{4}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{lB\pi^2}{2}\right)^2 \sigma_B^2}$$

Posso quindi conlcudere e scrivere il valore sperimentale di **g** determinato dalle mie misurazioni:

$$\mathbf{g} = (830 \pm 81)\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

Sapendo che il valore dell'accelerazione di gravità terrestre vale circa $9.81 ms^{-2}$ si nota subito la differenza con il g determinato sperimentalmente che risulta essere sottostimato del 15%. Tale sottostima è da imputare alla misura della lunghezza del pendolo l e al valore di B. (inserire il fatto che B sia il rapporto sin / T?) Per capire chi influenza maggiormente la bontà del risultato ottenuto calcolo l'errore associato a g "più grossolanamente" così da evidenziare in modo più facile il "colpevole":

$$\frac{\sigma_g}{g} = \frac{\sigma_l}{l} + 2\frac{\sigma_b}{b}$$

$$\approx \quad 0.28\% + 9.72\% \quad \approx \quad 10\%$$

trovando quindi che l'errore su B è quello che più influisce sull'accuratezza del valore di g calcolato.

5.2.1 Test Z

Infine è bene verificare l'accordo tra g da me calcolato e $G = 9.81 ms^{-2}$. In linea teorica infatti mi aspetto che i due siano uguali e che eventuali discrepanze siano dovute unicamente al caso. Applico allora un Test Z:

Ipotesi nulla Il valore g da me calcolato è compatibile con il valore vero G accelerazione di gravità terrestre.

Livello di significatività α	0.05
Valore di z_{oss}	1.86
Valore di z_{critico}	1.96

Poiché $z_{\text{oss}} < z_{\text{critico}}$ posso concludere che con un livello di significatività del 5% g risulta essere compatibile con G.

5.3 Parabola di best-fit

Poiché nel processo di determinazione della retta di best-fit è risultato opportuno studiare la funzione $T(y)$ con $y = \sin(\vartheta/2)^2$ per poter studiare la funzione in forma parabolica basta prendere $y = \sin(\vartheta/2)$.

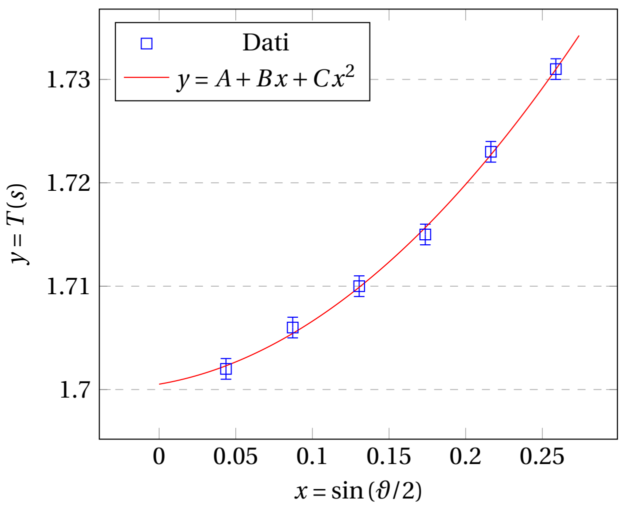
Come ho fatto per il fit lineare, controllo quale delle due variabili, T e $\sin(\vartheta/2)$, ha errore relativo trascurabile rispetto a quello dell'altra.

T		
$T(s)$	$\delta_T(s)$	δ_T/T
1.702	0.001	**0.000339**
1.706	0.001	**0.000338**
1.710	0.001	**0.000337**
1.715	0.001	**0.000336**
1.723	0.001	**0.000335**
1.731	0.001	**0.000333**

$y = \mathbf{sin}(\vartheta/\mathbf{2})$		
y	δ_y	δ_y/y
0.044	0.00869	**0.199**
0.087	0.00867	**0.099**
0.131	0.00863	**0.066**
0.174	0.00857	**0.049**
0.216	0.00849	**0.039**
0.259	0.00840	**0.032**

In questo caso, al contrario del fit lineare, non posso invertire le variabili per mettere non ho capito

Periodo in funzione di ϑ (parabolico)



$T(s) \pm \delta_T$	$\sin(\vartheta/2) \pm \delta_y$
1.702	0.044
1.706	0.087
1.710	0.130
1.715	0.174
1.723	0.216
1.731	0.259

$\mathbf{A} = 1.70 \qquad \sigma_\mathbf{A} = 0.0018$

$\mathbf{B} = 0.0252 \qquad \sigma_\mathbf{B} = 0.0273$

$\mathbf{C} = 0.357 \qquad \sigma_\mathbf{C} = 0.088$

5.3.1 Test Z

Per constatare se la parabola descrive bene l'andamento dei miei dati (graficamente sembrerebbe farlo) vado a confrontare i parametri ottenuti con quelli teorici. La parabola teorica

$$T = T_0 + \frac{T_0}{4} \sin(\vartheta/2)^2$$

ha come parametri teorici

$$A_{\text{teo}} = T_0 \qquad B_{\text{teo}} = 0 \qquad C_{\text{teo}} = \frac{T_0}{4}$$

Procedo quindi con un Test Z per verificare la compatibilità tra i valori:

Ipotesi nulla I parametri della parabola sperimentale sono compatibili con i parametri della parabola teorica.

	Sperimentali	**Teorici**	z_{oss}
A	1.700 ± 0.0018	1.704	1.774
B	0.0252 ± 0.0273	0	0.923
C	0.357 ± 0.088	0.426	0.778

da cui concludo che con un livello di significatività del 5%, e quindi con un valore $z_{\text{critico}} = 1.96$, tutti i parametri risultano essere compatibili con le aspettative teoriche.

6 Dipendenza dalla lunghezza

6.1 Retta di best-fit

Ricordando l'espressione teorica del periodo del pendolo è possibile evidenziare la relazione lineare tra T^2 (il periodo al quadrato) e l (lunghezza del pendolo):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin(\vartheta/2)^2\right) \qquad T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}\left(1 + \frac{1}{4}\sin(\vartheta/2)^2\right)^2$$

Per applicare al meglio il metodo dei minimi quadrati controllo sempre quale delle due variabili ha errore relativo più piccolo.

T		
$T(s)$	$\delta_T(s)$	δ_T/T
1.702	0.001	**0.000339**
1.706	0.001	**0.000338**
1.710	0.001	**0.000337**
1.715	0.001	**0.000336**
1.723	0.001	**0.000335**
1.731	0.001	**0.000333**

$y = \mathbf{sin}(\vartheta/\mathbf{2})$		
y	δ_y	δ_y/y
0.044	0.00869	**0.199**
0.087	0.00867	**0.099**
0.131	0.00863	**0.066**
0.174	0.00857	**0.049**
0.216	0.00849	**0.039**
0.259	0.00840	**0.032**

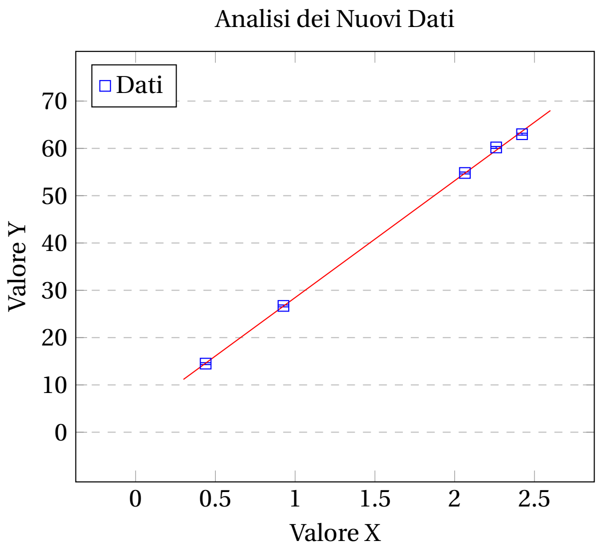


Figure 1: Rappresentazione grafica dei dati sperimentali con errori.

$$\mathbf{A} = 1.70 \qquad \sigma_{\mathbf{A}} = 0.0018$$

$$\mathbf{B} = 0.0252 \qquad \sigma_{\mathbf{B}} = 0.0273$$

7 Dipendenza dalla massa

8 Conclusioni