# 1 Trasformata di Laplace.

## 1.1

Data la funzione

$$F(s) = \frac{e^{as}}{(s-3b)^2} + \frac{c}{\sin \pi s},$$

(a) dire quali restrizioni si debbano imporre su $a \in \mathbb{R}$ e $b$, $c \in \mathbb{C}$ affinché $F(s)$ possa essere interpretata come una trasformata di Laplace;

(b) trovare l'ascissa di convergenza e calcolare l'antitrasformata mediante la formula di inversione;

(c) riottenere il risultato precedente senza calcoli espliciti, a partire unicamente dalle proprietà della trasformata di Laplace.

### Soluzione

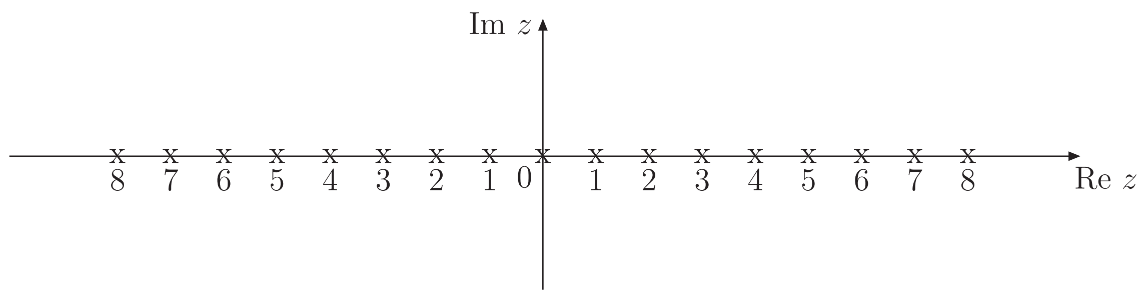
(a) Perchè una funzione $F(s)$ sia una trasformata di Laplace deve esistere un $\alpha_0$ tale che $F(s)$ non abbia singolarità nel semipiano $\text{Re}(s) > \alpha_0$ e deve esistere $\alpha > \alpha_0$ tale che

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \;\; \text{per} \;\; \text{Re}(s) \geq \alpha,$$

La prima condizione implica che deve esistere una singolarità $s_0$ di $F(s)$ a destra della quale $F(s)$ è regolare. Nel nostro caso le singolarità al finito di $F(s)$ sono:

- il polo doppio $s = 3b$;
- i poli semplici $s = k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

I poli semplici $s = k$ sono un'infinità numerabile e si accumulano nei punti $s = \pm\infty$:




Quindi il termine con il seno impedisce che ci sia una singolarità $s_0$ a destra della quale non ci siano altre singolarità. Quindi il termine con il seno non può esserci, cioè dobbiamo porre:

$$c = 0.$$

La seconda condizione impone che $F(s)$ vada a zero per $s \to \infty$ nel semipiano destro. Ciò che può impedire questo è l'esponenziale $e^{as}$. Infatti per $a$ positivi tale esponenziale diverge per $s \to \infty$ con $\mathrm{Re}(s) > 0$. Quindi dobbiamo imporre la condizione:

$$a \leq 0.$$

A questo punto otteniamo la funzione:

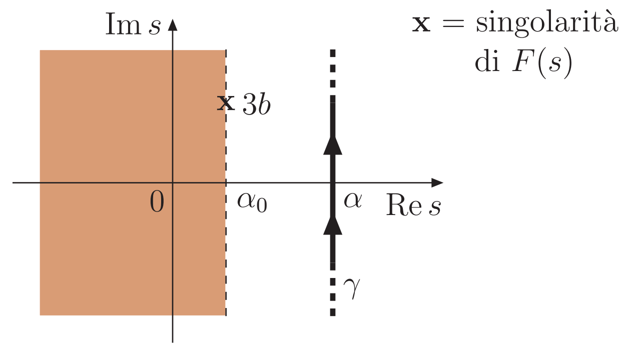
$$F(s) = \frac{e^{as}}{(s-3b)^2} \qquad \text{con} \qquad a \in \mathbb{R}, \quad a \leq 0 \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{C}.$$

(b) La funzione trovata ha quindi una sola singolarità, il polo doppio $s = 3b$. Quindi l'ascissa di convergenza $\alpha_0$ è:

$$\alpha_0 = 3\mathrm{Re}(b).$$

L'ascissa $\alpha$ con cui calcolare l'antitrasformata deve soddisfare:

$$\alpha > \alpha_0 = 3\mathrm{Re}(b).$$




Per calcolare l'antitrasformata, notiamo che $F(s)$ è del tipo

$$F(s) = e^{-As}G(s), \quad \text{con} \qquad A = -a \geq 0, \qquad G(s) = \frac{1}{(s-3b)^2},$$
$$\lim_{s\to\infty} G(s) = 0 \;\text{ per }\; \mathrm{Re}(s) \leq \alpha.$$

Quindi la chiusura del cammino $\gamma$ produce:

$$f(t)\theta(t) = \theta(t-A) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\omega^-} G(s)\, e^{(t-A)s}\, ds = \theta(t+a) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\omega^-} \frac{e^{(t+a)s}}{(s-3b)^2}\, ds$$

Calcoliamo ora l'integrale su $\gamma_\omega^-$ grazie al teorema dei residui:

$$\begin{aligned} f(t)\theta(t) &= \theta(t+a) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\omega^-} \frac{e^{(t+a)s}}{(s-3b)^2}\, ds = \theta(t+a) \left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{(t+a)s}}{(s-3b)^2} \right\}_{s=3b} \\ &= \theta(t+a) \lim_{s\to 3b} \frac{d}{ds}\left[ (s-3b)^2 \frac{e^{(t+a)s}}{(s-3b)^2} \right] = (t+a)e^{3b(t+a)}\theta(t+a). \end{aligned}$$

Perciò $f(t)$ per $t > 0$ vale:

$$\text{Per } \; t > 0, \qquad f(t) = (t+a)e^{3b(t+a)}\theta(t+a) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 < t \leq -a \\ (t+a)e^{3b(t+a)} & \text{per} \quad t > -a \end{cases}$$

(c) Dalle sole proprietà della trasformata si ricava:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_s[1] &= \frac{1}{s}, \\
\mathcal{L}_s[tg(t)] &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}_s[g(t)] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_s[t] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}_s[1] = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \\
\mathcal{L}_s[e^{\beta t}g(t)] &= \mathcal{L}_{s-\beta}[g(t)] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_s[e^{3bt}t] = \mathcal{L}_{s-3b}[t] = \frac{1}{(s-3b)^2}, \\
\mathcal{L}_s[\theta(t+\alpha)g(t+\alpha)] &\overset{\alpha\leq 0}{=} e^{s\alpha}\mathcal{L}_s[g(t)] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_s[\theta(t+a)e^{3b(t+a)}(t+a)] \overset{a\leq 0}{=} \frac{e^{sa}}{(s-3b)^2},
\end{aligned}
$$

che è la funzione di partenza.

## 1.2

Risolvere la seguente equazione differenziale per mezzo delle trasformate di Laplace:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \theta(t-2),$$

con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = Y_1$.

### Soluzione

Si pone

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_s[y(t)] &= Y(s), \\
\mathcal{L}_s[y'(t)] &= sY(s) - y(0) = sY(s), \\
\mathcal{L}_s[y''(t)] &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - Y_1, \\
\mathcal{L}_s[\theta(t-2)] &= F(s).
\end{aligned}$$

Si sostituisce quindi nell'equazione:

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = F(s) + Y_1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s) + Y_1}{(s+1)^2}.$$

Si calcola ora $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^\infty \theta(t-2)e^{-st}dt = \int_2^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_2^\infty = \frac{e^{-2s}}{s},$$

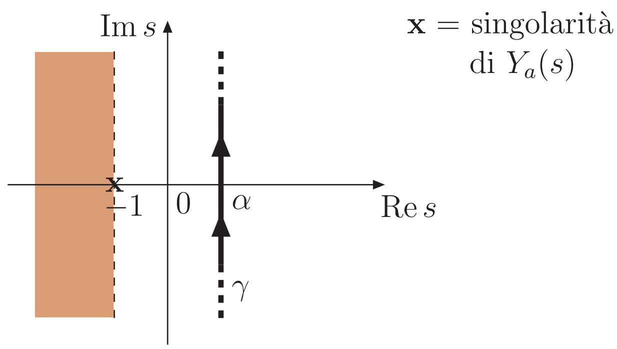
e quindi

$$Y(s) = Y_a(s) + Y_b(s), \qquad \text{con} \qquad Y_a(s) = \frac{Y_1}{(s+1)^2}, \qquad Y_b(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}.$$

Calcoliamo ora l'antitrasformata di $Y_a(s)$ e $Y_b(s)$.

- Antitrasformata di $Y_a(s) = \dfrac{Y_1}{(s+1)^2}$.

  $Y_a(s)$ ha una sola singolarità in $s = -1$, quindi l'ascissa di convergenza è $\alpha_0 = -1$ e possiamo scegliere per $\alpha$ un qualunque valore $\alpha > -1$:



Notiamo che

$$\lim_{s\to\infty} Y_a(s) = 0 \qquad \text{per ogni } s,$$

quindi in particolare vale

$$\lim_{s\to\infty} Y_a(s) = 0 \ \text{ per } \ \mathrm{Re}(s) \geq \alpha.$$

Pertanto l'antitrasformata è definita.

Per calcolare l'antitrasformata, notiamo che $Y_a(s)$ è del tipo

$$Y_a(s) = e^{-as}G(s), \quad \text{con} \qquad a = 0, \qquad G(s) = \frac{Y_1}{(s+1)^2},$$
$$\lim_{s\to\infty} G(s) = 0 \ \text{ per } \ \mathrm{Re}(s) \leq \alpha.$$

e possiamo calcolare l'antitrasformata chiudendo il cammino $\gamma$ nel semipiano sinistro nel seguente modo:

$$y_a(t)\theta(t) = \theta(t) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} Y_a(s)\, e^{st}\, ds = \theta(t) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} \frac{Y_1 e^{st}}{(s+1)^2}\, ds.$$

Calcoliamo ora l'integrale su $\gamma_\omega^-$ grazie al teorema dei residui:

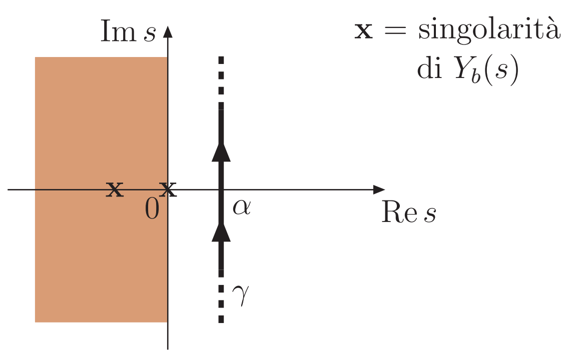
$$\begin{aligned} y_a(t)\theta(t) &= \theta(t) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} \frac{Y_1 e^{st}}{(s+1)^2}\, ds = \theta(t) \left\{ \mathrm{Res}\, \frac{Y_1 e^{st}}{(s+1)^2} \right\}_{s=-1} \\ &= \theta(t) \lim_{s\to-1} \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^2 \frac{Y_1 e^{st}}{(s+1)^2} \right] = \theta(t)\, Y_1\, t\, e^{-t}. \end{aligned}$$

Perciò $y_a(t)$ per $t > 0$ vale:

$$y_a(t) = Y_1\, t\, e^{-t}, \qquad \text{per} \qquad t > 0.$$

- Antitrasformata di $Y_b(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s(s+1)^2}$.

  $Y_a(s)$ ha una singolarità in $s = -1$ e una in $s = 0$. Quella più a destra è $s = 0$, quindi l'ascissa di convergenza è $\alpha_0 = 0$ e possiamo scegliere per $\alpha$ un qualunque valore $\alpha > 0$:



Poi notiamo che

$$\lim_{s\to\infty} Y_b(s) = 0 \ \text{ per } \ \mathrm{Re}(s) \geq \alpha,$$

e l'antitrasformata è definita.

Per calcolare l'antitrasformata, notiamo che $Y_b(s)$ è del tipo

$$Y_b(s) = e^{-as} G(s), \quad \text{con} \qquad a = 2, \qquad G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2},$$
$$\lim_{s\to\infty} G(s) = 0 \ \text{ per } \ \mathrm{Re}(s) \leq \alpha.$$

Quindi la chiusura del cammino $\gamma$ produce:

$$y_b(t)\theta(t) = \theta(t-a) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} G(s)\, e^{(t-a)s}\, ds = \theta(t-2) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} \frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)^2}\, ds$$

Calcoliamo ora l'integrale su $\gamma_\omega^-$ grazie al teorema dei residui:

$$\begin{aligned}
y_b(t)\theta(t) &= \theta(t-2) \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\omega^-} \frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)^2}\, ds \\
&= \theta(t-2) \left[ \left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)^2} \right\}_{s=0} + \left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)^2} \right\}_{s=-1} \right] \\
&= \theta(t-2) \left\{ \lim_{s\to 0} s\, \frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)^2} + \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^2\, \frac{e^{(t-2)s}}{s(s+1)^2} \right] \right\} \\
&= \theta(t-2) \left[ 1 - (t-2) e^{-(t-2)} - e^{-(t-2)} \right] \\
&= \theta(t-2) \left[ 1 - (t-1) e^{-(t-2)} \right]
\end{aligned}$$

Perciò $y_b(t)$ per $t > 0$ vale:

$$\text{Per } \ t > 0, \qquad \begin{aligned} y_b(t) &= \theta(t-2) \left[ 1 - (t-1) e^{-(t-2)} \right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 < t < 2 \\ 1 - (t-1) e^{-(t-2)} & \text{per} \quad t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Mettendo insieme i risultati per $y_a(t)$ e $y_b(t)$, otteniamo:

$$\text{Per } \ t > 0, \qquad \begin{aligned} y(t) &= y_a(t) + y_b(t) \\ &= Y_1\, t\, e^{-t} + \theta(t-2) \left[ 1 - (t-1) e^{-(t-2)} \right] \\ &= \begin{cases} Y_1\, t\, e^{-t} & \text{per} \quad 0 < t < 2 \\ Y_1\, t\, e^{-t} + 1 - (t-1) e^{-(t-2)} & \text{per} \quad t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$