

Parte 2: Nozioni di Geometria Differenziale

2.0	Richiami di algebra lineare e convenzioni di notazione	1
2.0.1	Tensori su uno spazio lineare	4
2.1	Varietà differenziabili	6
2.2	Funzioni differenziabili fra varietà	10
2.2.1	Curve su una varietà	11
2.2.2	Diffeomorfismi locali e globali, attivi e passivi	12
2.2.3	Immersioni e sottovarietà	13
2.2.4	Il teorema del valore regolare	14
2.3	Vettori tangenti	16
2.4	Il fibrato tangente	19
2.4.1	La mappa tangente	20
2.4.2	Campi vettoriali e curve integrali	21
2.4.3	Ritratto di fase di un campo vettoriale	24
2.4.4	Il flusso di un campo vettoriale	25
2.4.5	Campi vettoriali come operatori di derivazione; integrali primi	26
2.4.6	Commutatore di campi vettoriali	27
2.4.7	Geometria globale dei campi vettoriali	28
2.4.8	Il fibrato tangente come “spazio delle velocità”	29
2.5	Il fibrato cotangente	31
2.6	Campi tensoriali su varietà; varietà riemanniane	34
2.6.1	Legge di trasformazione delle componenti di un tensore	35
2.6.2	Gradiente di una funzione	36
2.6.3	Lunghezza d’arco di una curva	37
2.7	Forme differenziali e algebra esterna	38
2.7.1	Pull-back di forme differenziali	40
2.7.2	Prodotto interno di forme e campi vettoriali; contrazione fra tensori	41
2.7.3	Il differenziale esterno	42
2.7.4	Forme chiuse e forme esatte	43
2.7.5	Derivata di Lie	43
2.7.6	Forme differenziali su varietà riemanniane	44
2.7.7	Integrazione delle forme differenziali	45

2.0 Richiami di algebra lineare e convenzioni di notazione

Nel seguito, utilizzeremo le convenzioni standard del *calcolo tensoriale*. Per introdurle, rivediamo sinteticamente le principali nozioni di algebra lineare e multilineare che ci serviranno.

Sia E uno **spazio lineare** di dimensione n , e sia e_1, \dots, e_n una n -pla di vettori linearmente indipendenti, che quindi formano una **base** di E . Denotiamo con v^1, \dots, v^n le componenti di un generico vettore $v \in E$,

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \quad (2.0.1)$$

Come vedremo, il fatto di aver indicato in alto l'indice delle componenti, e in basso l'indice che individua il vettore della base, non è casuale.

Chiamiamo $\epsilon^i : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione che a un vettore v associa la sua i -esima componente rispetto alla base e_1, \dots, e_n :

$$\epsilon^i(v) = v^i \quad (2.0.2)$$

allora

$$\epsilon^i(e_j) = \delta_j^i, \quad (2.0.3)$$

dove il simbolo δ_j^i (**delta di Kronecker**) vale 1 se $i = j$ e vale 0 se $i \neq j$. Poiché ogni ϵ^i è una **forma lineare** su E , è un elemento dello **spazio duale** E^* . La n -pla $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ forma una base di E^* , e precisamente la **base duale** alla base e_1, \dots, e_n .

Sia F un secondo spazio lineare, di dimensione m , su cui abbiamo scelto una base f_1, \dots, f_m ; denotiamo con w le componenti di un vettore $w \in F$ relative a questa base, $w = \sum_{\lambda=1}^m w^\lambda f_\lambda$, e denotiamo con ϕ^1, \dots, ϕ^m la base duale, $\phi^\lambda(f_\mu) = \delta_\mu^\lambda$. Usiamo lettere greche per gli indici su F , per ricordarci che la dimensione di F è diversa da quella di E .

Sia $M : E \rightarrow F$ un'**applicazione lineare**, e sia $w = Mv$: allora fra le componenti di v e w vale la relazione

$$w^\lambda = \sum_{i=1}^n M_i^\lambda v^i, \quad (2.0.4)$$

dove gli elementi M_i^λ della matrice $n \times m$ che rappresenta l'applicazione lineare M sono dati da

$$M_i^\lambda = \phi^\lambda(Me_i) \quad (2.0.5)$$

Consideriamo ora una **forma bilineare** $A : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$. Dati due vettori v, u si ha

$$A(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} u^i v^j, \quad A_{ij} = A(e_i, e_j). \quad (2.0.6)$$

Spieghiamo con che criterio, in queste formule, gli indici sono posizionati in alto (come apici) o in basso (come pedici). Se in E cambiamo la base, ogni vettore della nuova base sarà una combinazione lineare dei vettori e_1, \dots, e_n . Detta $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ la nuova base, avremo

$$\hat{e}_i = \sum_{j=1}^n \Lambda_i^j e_j; \quad (2.0.7)$$

chiamiamo **matrice del cambiamento di base** Λ la matrice $n \times n$ i cui elementi sono i coefficienti Λ_i^j . Per definire un cambiamento di base, Λ deve essere una matrice invertibile; denotiamo con $(\Lambda^{-1})_i^j$ gli elementi della sua inversa. La relazione fra gli elementi delle due matrici si può scrivere

$$\sum_{j=1}^n (\Lambda^{-1})_j^i \Lambda_k^j = \delta_k^i. \quad (2.0.8)$$

Invertendo il cambiamento di base,

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n (\Lambda^{-1})_i^j \hat{\mathbf{e}}_j, \quad (2.0.9)$$

e sostituendo nella (2.0.1), dette \hat{v}^i le componenti di \mathbf{v} nella nuova base, si trova

$$v^j = \sum_{i=1}^n \Lambda_i^j \hat{v}^i \quad \Rightarrow \quad \hat{v}^i = \sum_{j=1}^n (\Lambda^{-1})_j^i v^j \quad (2.0.10)$$

Osserviamo quindi che la matrice Λ trasforma i vettori della vecchia base in quelli della nuova base, mentre per ricavare le nuove componenti di un vettore da quelle vecchie si deve usare la matrice inversa.

Il criterio per la posizione degli indici, dunque, è questo: cambiando base, gli oggetti (vettori o componenti) con un indice **in basso (indice covariante)** si trasformano con la matrice del cambiamento di base, mentre quelli con indice **in alto (indice controvariante)** sono quelli che si trasformano con la matrice inversa.

È facile verificare, ad esempio, che i covettori (elementi di E^*) si trasformano con la matrice inversa rispetto ai vettori, ed è per questo che abbiamo messo in alto l'indice dei covettori della base duale.

Se ora consideriamo, come caso particolare di applicazione lineare, un **endomorfismo** $M : E \rightarrow E$, possiamo ottenere con pochi passaggi la legge di trasformazione degli elementi di matrice M_j^i : nella nuova base $\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_n$ la relazione $\mathbf{u} = M\mathbf{v}$ diventa

$$\hat{u}^i = \sum_{j=1}^n \hat{M}_j^i \hat{v}^j \quad \Rightarrow \quad \hat{M}_j^i = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\Lambda^{-1})_k^i M_l^k \Lambda_j^l \quad (2.0.11)$$

Se invece consideriamo la trasformazione della matrice di una forma bilineare, troviamo

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n \hat{A}_{ij} \hat{u}^i \hat{v}^j \quad \Rightarrow \quad \hat{A}_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Lambda_i^k A_{kl} \Lambda_j^l \quad (2.0.12)$$

Come si vede, la notazione risulta coerente e permette, in particolare, di garantire che un'espressione rimanga della stessa forma quando si cambia base. Il criterio, infatti, è il seguente:

In corrispondenza di ciascuna sommatoria, l'indice di sommatoria è ripetuto una volta in alto e una in basso. In questo modo, quando si cambia base compare nella sommatoria il prodotto fra Λ e Λ^{-1} , che è la matrice identità.

Quando le espressioni sono coerenti con questa convenzione, la consuetudine introdotta da Einstein è di *omettere il simbolo di sommatoria*.

- La presenza di una sommatoria sottointesa è segnalata dalla presenza di una **coppia di indici** (uno covariante e l'altro controvariante) rappresentati dalla **stessa lettera**. Questi si chiamano **indici muti**.
- Se in un prodotto compaiono più sommatorie, ogni coppia di indici muti deve essere indicata con una lettera diversa, come si farebbe se ci fossero i simboli di sommatoria.
- Gli indici che non sono indici di sommatoria si chiamano **indici liberi**. In un'espressione ben formata (che mantiene la stessa forma per qualunque scelta delle basi) tutti gli indici liberi devono corrispondere (sia come lettera che come posizione) dai due lati del segno di uguaglianza.
- L'intervallo di valori degli indici (e quindi il numero di addendi delle sommatorie) non è indicato, ma è determinato dalle dimensioni degli spazi in cui sono definite le formule. In caso di oggetti appartenenti a spazi di dimensioni diverse, è opportuno usare alfabeti diversi (ad esempio latino e greco) per gli indici corrispondenti (non si devono usare, invece, alfabeti diversi per gli indici di oggetti appartenenti allo stesso spazio).

Le formule viste finora, quindi, d'ora in poi saranno scritte in questo modo:

$$v = v^i e_i, \quad w^\lambda = M_i^\lambda v^i, \quad \hat{A}_{ij} = \Lambda_i^k A_{kl} \Lambda_j^l$$

e così via. Queste espressioni corrispondono a operazioni matriciali: generalmente, gli oggetti con un indice covariante (in basso) possono essere rappresentati con **vettori riga**, quelli con un indice controvariante con **vettori colonna**. Per le matrici delle applicazioni lineari, l'indice in alto è quello di riga e quello in basso è l'indice di colonna. L'identificazione fra formule con indici e formule matriciali, tuttavia, richiede alcune cautele. Quando si considerano forme bilineari, ad esempio, i due vettori a cui la forma è applicata devono essere rappresentati uno come vettore riga e l'altro come vettore colonna, benché abbiano entrambi gli indici in alto. A seconda di quale dei due si rappresenta con vettore riga, la matrice è diversa (le due matrici sono una la trasposta dell'altra), tranne nel caso delle forme bilineari simmetriche.

Diversi concetti connessi alle matrici quadrate si applicano in modo diverso a seconda che le matrici rappresentino endomorfismi o forme bilineari. Ad esempio, per un endomorfismo ha senso ricercare gli **autovalori** e gli **autovettori**, definiti dall'equazione $Mv = \lambda v$. Per una forma bilineare A , invece, la ricerca di autovalori non ha senso¹. Se una forma bilineare è simmetrica, $A(v, u) = A(u, v)$, la matrice che la rappresenta sarà simmetrica in qualunque base; la matrice che rappresenta un endomorfismo M , invece, può risultare simmetrica in una data base e non in un'altra. Questo dipende dal fatto che sotto un cambiamento di base Λ le matrici che rappresentano forme bilineari vengono moltiplicate a destra per Λ e a sinistra per la *trasposta* di Λ , mentre le matrici degli endomorfismi sono moltiplicate a destra per Λ e a sinistra per l'*inversa* di Λ . Le due trasformazioni diventano indistinguibili se Λ è una matrice ortogonale.

¹A una forma bilineare A corrisponde una mappa da E in E^* : $A : v \mapsto A(v, \cdot)$. Poiché $Av \in E^*$, non può essere uguale a $\lambda v \in E$.

2.0.1 Tensori su uno spazio lineare

Le forme lineari su uno spazio lineare E a valori in \mathbb{R} , come abbiamo già ricordato, formano lo spazio duale E^* . A ogni base e_i in E è associata una base duale e^j in E^* .

Nel seguito, risulterà comodo denotare il valore di una generica forma lineare α su un generico vettore v con questa notazione alternativa: $\alpha(v) = \langle \alpha, v \rangle$

Questa notazione enfatizza il fatto che un vettore può anche essere visto come forma lineare sullo spazio E^* , ossia come elemento di E^{**} (spazio bidual, che in dimensione finita è canonicamente isomorfo a E).

Le forme bilineari $A : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ formano anch'esse uno spazio lineare: infatti, è possibile combinare linearmente due forme bilineari, ponendo $(\lambda A + \mu B)(u, v) = \lambda A(u, v) + \mu B(u, v)$. Qual è la base di questo spazio?

Definizione 1. Date due forme lineari $\alpha, \beta \in E^*$, il loro **prodotto tensoriale** $\alpha \otimes \beta$ è la forma bilineare definita da $(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v) = \langle \alpha, u \rangle \langle \beta, v \rangle$.

Il prodotto tensoriale di due covettori è rappresentato dalla matrice dei prodotti delle loro componenti:

$$(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha_i \beta_j u^i v^j$$

Proposizione 1. I prodotti tensoriali di tutte le coppie di covettori della base duale, $e^i \otimes e^j$, formano una base dello spazio delle forme bilineari (quindi lo spazio ha dimensione n^2). Infatti, qualunque forma bilineare A si può scrivere come combinazione lineare di tali prodotti tensoriali:

$$A(u, v) = A_{ij} u^i v^j = A_{ij} (e^i \otimes e^j)(u, v).$$

Si noti che il prodotto tensoriale non è commutativo: $\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha$.

Osserviamo adesso che a un qualunque **endomorfismo** $M : E \rightarrow E$ si può associare una forma bilineare sullo spazio $E \times E^*$, che denoteremo con lo stesso simbolo: per ogni coppia $(v \in E, \alpha \in E^*)$ poniamo

$$M(v, \alpha) = \langle \alpha, Mv \rangle \quad (2.0.13)$$

Si può definire il prodotto tensoriale anche fra un covettore e un vettore: $\alpha \otimes v$, che agisce come forma bilineare su $E \times E^*$:

$$(\alpha \otimes v)(u, \beta) = \langle \alpha, u \rangle \langle \beta, v \rangle;$$

quindi la base dello spazio delle forme bilineari $M : E \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$ è data dagli n^2 prodotti tensoriali $e^i \otimes e_j$. A questo punto dovrebbe risultare chiara la seguente definizione:

Definizione 2. Un **tensore di rango** (p, q) su E è un'applicazione dal prodotto cartesiano di p copie di E e di q copie di E^* , a valori in \mathbb{R} , lineare in tutti i suoi argomenti. Ogni tensore di rango (p, q) è combinazione lineare di tutti i possibili prodotti tensoriali di p elementi della base duale e^i e di q elementi della base e_j .

I covettori su E corrispondono a tensori di rango $(1, 0)$, mentre i vettori di E sono tensori di

rango (0, 1). Le forme bilineari su E sono tensori di rango (2, 0). Abbiamo visto sopra che un endomorfismo di E corrisponde a un tensore di rango (1, 1), che a sua volta corrisponde anche a un endomorfismo di E^* . Le forme bilineari su E^* sono tensori di rango (0, 2).

Per necessità future, estendiamo la definizione di prodotto tensoriale a tensori di rango qualunque: il prodotto tensoriale $\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$ di un tensore \mathbf{T} di rango (p, q) e di un tensore \mathbf{S} di rango (r, s) è un tensore di rango $(p + r, q + s)$ definito da

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{S})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+r}, \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{q+s}) = \\ = \mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_q) \mathbf{S}(\mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_{p+r}, \boldsymbol{\alpha}_{q+1}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{q+s}). \end{aligned} \quad (2.0.14)$$

Un tensore di rango (p, q) è anche detto **tensore p volte covariante e q volte controvariante**, e le sue componenti sono individuate da p indici in basso e q indici in alto. La ragione è che, quando si effettua un cambiamento di base su E (2.0.7) descritto da una matrice Λ ,

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \Lambda_i^j \mathbf{e}_j$$

che induce il cambiamento di base duale su E^* descritto dalla matrice Λ^{-1} , le componenti di un tensore di rango (p, q) si trasformano in questo modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q} \otimes \boldsymbol{\epsilon}^{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\epsilon}^{j_p} = \hat{T}_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} \hat{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{e}}_{i_q} \otimes \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{j_p} \\ \hat{T}_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} = T_{b_1 \dots b_p}^{a_1 \dots a_q} \Lambda_{j_1}^{b_1} \dots \Lambda_{j_p}^{b_p} (\Lambda^{-1})_{i_1}^{a_1} \dots (\Lambda^{-1})_{i_q}^{a_q} \end{aligned} \quad (2.0.15)$$

Fra i tensori di tipo (2,0) hanno un ruolo importante quelli che sono **simmetrici** e **definiti positivi**,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad (2.0.16)$$

(denotiamo con $\mathbf{0}$ il vettore nullo; la seconda condizione implica anche che il tensore sia non degenere, cioè sia rappresentato da una matrice invertibile):

un tensore con le proprietà (2.0.16) può essere usato per definire un **prodotto scalare** su E . In questo caso il tensore è detto **tensore metrico** o **metrica** su E . Quando è definito un singolo prodotto scalare, useremo frequentemente la notazione

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A_{ij} u^i v^j$$

Così come a un endomorfismo su E è univocamente associato un tensore di tipo (1,1), così un tensore \mathbf{A} di tipo (2,0) induce univocamente una mappa lineare $A : E \rightarrow E^*$:

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{u}); \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = (A_{ij} v^i) \boldsymbol{\epsilon}^j$$

Se il tensore \mathbf{A} è non degenere, quest'applicazione è un isomorfismo. L'isomorfismo associato a un tensore metrico è spesso indicato con il simbolo \flat (tratto dalla notazione musicale, in cui il segno “**bemolle**” indica l'abbassamento della nota di un semitono):

$$\langle \mathbf{v}^\flat, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (2.0.17)$$

L'isomorfismo inverso, che trasforma un covettore in vettore, è denotato dal simbolo \sharp (**diesis**).

2.1 Varietà differenziabili

Nei corsi di Analisi Matematica sono state fornite le definizioni e i teoremi fondamentali del calcolo differenziale: dalle definizioni di continuità, di rapporto incrementale e quindi di derivata di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si è passati a definire il concetto di continuità e differenziabilità per funzioni di più variabili reali a valori in \mathbb{R}^n . In alcuni casi, le definizioni usano esplicitamente il concetto di *distanza* fra due elementi di \mathbb{R}^n , che è generalmente ricavata da un prodotto scalare.

Ora, per descrivere i moti sugli spazi delle configurazioni di sistemi vincolati (e anche, in assenza di vincoli, per poter usare sistemi di coordinate non cartesiane) abbiamo la necessità di applicare il calcolo differenziale a spazi più generali degli spazi lineari.

A questo fine, esistono due strategie possibili. La prima è quella di considerare sottoinsiemi di uno spazio affine, $M \subset \mathbb{R}_a^k$, e applicare semplicemente le definizioni del calcolo differenziale in \mathbb{R}^k : una funzione su M è differenziabile, ad esempio, se e solo se è la *restrizione* a M di una funzione differenziabile nello “spazio ambiente” \mathbb{R}_a^k . Questa è la strategia che abbiamo seguito per descrivere il moto di un punto materiale su una superficie immersa nello spazio tridimensionale². In questo caso abbiamo definito le *coordinate sulla superficie* in relazione a una *rappresentazione parametrica* (almeno locale) della superficie stessa come sottoinsieme di \mathbb{R}^k .

La seconda strategia, oggi largamente prevalente in Geometria Differenziale, consiste nel definire (sotto opportune condizioni) una nozione generale di *coordinate* su uno spazio topologico M , senza supporre che M sia immerso in uno spazio ambiente con struttura affine, e usare le coordinate per “trasportare” su M il calcolo differenziale. In questo caso, si tratta di assicurare che le definizioni di “funzione differenziabile”, “derivata” ecc. *non dipendano* dalla scelta del sistema di coordinate, ossia definiscano degli oggetti associati “intrinsecamente” a M .

La struttura su cui baseremo inizialmente la costruzione è quella di **spazio topologico**, di cui diamo per nota la definizione; sugli spazi (lineari o affini) \mathbb{R}^k supporremo sempre di considerare la topologia standard. Useremo la definizione topologica di **funzione continua**: una funzione fra due spazi topologici è continua se e solo se la controimmagine di qualunque aperto del codominio è un aperto del dominio.

In realtà, nella costruzione che presentiamo nella prossima sezione, sarebbe tecnicamente possibile partire da un insieme M non dotato di una propria struttura topologica, e “importare” anche questa attraverso le coordinate; tuttavia questo complicherebbe un po’ le definizioni e non sarebbe vantaggioso per i nostri fini.

La consuetudine, in letteratura, di usare la lettera M per designare genericamente lo spazio che ci accingiamo a definire deriva dal tedesco *Mannigfaltigkeit*, termine usato per la prima volta in questo contesto da B. Riemann nel 1854 e successivamente tradotto in inglese con *manifold*.

Definizione 3. Sia M uno spazio topologico. Una **carta** su M è una coppia (\mathcal{U}, φ) , dove $\mathcal{U} \subseteq M$ è un aperto e $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un’applicazione continua, iniettiva e tale che $\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ è continua.

²Nel seguito, quando ci riferiremo a \mathbb{R}^k come “spazio ambiente”, intenderemo sempre lo *spazio affine* reale k -dimensionale, ma lo denoteremo semplicemente come \mathbb{R}^k quando questo non genera ambiguità. Nei contesti in cui è opportuno distinguere fra spazi lineari e spazi affini useremo, rispettivamente, le notazioni \mathbb{R}_v^k e \mathbb{R}_a^k .

Una carta permette di assegnare a ciascun punto di U una n -pla di numeri reali, che saranno le **coordinate** del punto. La condizione essenziale è che le coordinate identifichino univocamente il punto (la funzione deve essere iniettiva) e che a una variazione continua delle coordinate corrisponda una variazione continua del punto di M , e viceversa: altrimenti detto, φ deve essere un **omeomorfismo** fra U e $\varphi(U)$.

Una carta fornisce un sistema di coordinate *locali*, in quanto è definita solo su un aperto U : se nella definizione imponessimo $U \equiv M$, potremmo applicare questa definizione solo a spazi topologici globalmente omeomorfi a \mathbb{R}^n . Il passo successivo, dunque, è garantire che per ogni punto di M esista almeno un sistema di coordinate locali in cui può essere rappresentato.

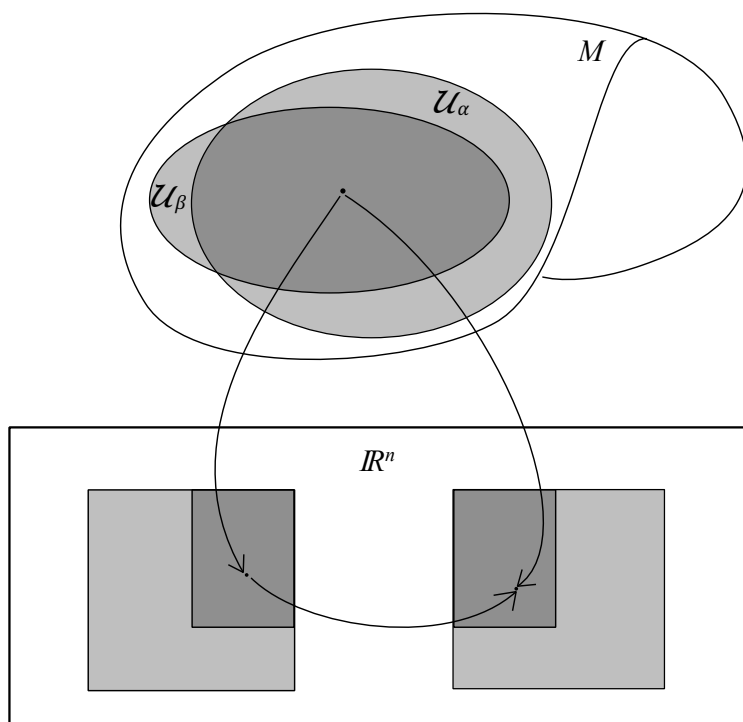
Definizione 4. Una collezione di carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ su M , tale che

- la collezione di aperti U_α è un ricoprimento di M , ossia $\bigcup_\alpha U_\alpha \equiv M$;
- per ogni coppia di aperti (U_α, U_β) non disgiunti, φ_α e φ_β sono **compatibili**, ossia la **funzione di transizione**

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è di classe C^k (di conseguenza dovrà essere di classe C^k anche la funzione di transizione inversa, ossia $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$),

è detta **atlante di classe C^k** .



Carte compatibili. Esercizio: aggiungere in figura i simboli che mancano, e cioè φ_α , φ_β , $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$

A questo punto siamo in grado di definire la struttura che ci interessa:

Definizione 5. *Uno spazio M dotato di un atlante di classe C^0 (ossia con funzioni di transizione bicontinue, ma non necessariamente differenziabili) è detto **varietà topologica**. Se M è dotato di un atlante di classe C^k , con $k \geq 1$, è detto **varietà differenziabile di classe C^k** .*

L'ipotesi di mutua compatibilità implica, tra l'altro, che su ciascuna componente connessa di M la dimensione n del codominio debba essere la stessa per tutte le carte. Nel seguito supporremo che M sia connessa, e diremo che n è la **dimensione** della varietà; più in generale, le proprietà descritte varranno per ciascuna componente connessa di M .³

Due atlanti su uno stesso spazio M sono **compatibili** fra loro se le carte del primo atlante sono compatibili con quelle del secondo atlante. In questo caso, l'unione dei due atlanti è ancora un atlante e i due atlanti (e la loro unione) definiscono la stessa **struttura differenziale** su M . A un dato atlante si possono quindi aggiungere ulteriori carte compatibili con quelle già presenti, senza che questo alteri la struttura differenziale. L'utilità di atlanti "sovrabbondanti" rispetto al numero minimo di carte necessarie a ricoprire M sta nel fatto che diversi problemi matematici (ad esempio, l'integrazione di equazioni differenziali) possono rivelarsi più o meno facilmente risolubili a seconda delle coordinate che si sceglie di usare. La collezione di *tutte* le possibili carte compatibili con un atlante dato definisce un **atlante massimale** su M (si tratta di un concetto utile ma del tutto astratto, poiché un atlante massimale contiene un'infinità non numerabile di carte).

È interessante notare che una stessa varietà topologica può ammettere strutture differenziali diverse, e sono anche stati descritti casi di varietà topologiche (con un atlante di classe C^0) che non ammettono alcun atlante di classe C^1 . Invece, data una varietà con un atlante di classe C^k , con $k \geq 1$, questo è sempre contenuto in un atlante massimale che contiene un atlante di classe C^∞ (H. Whitney, 1936). Per questa ragione, studiare la geometria delle varietà di classe C^∞ non comporta una perdita di generalità: quando si scrive "varietà differenziabile", senza specificare il grado di differenziabilità dell'atlante, si intende una varietà di classe C^∞ .

È facile verificare che ogni spazio lineare (o affine) reale è una varietà differenziabile: ogni sistema di coordinate cartesiane, infatti, definisce una carta estesa all'intero spazio. La dimensione come varietà coincide, in questo caso, con la dimensione già definita in Algebra Lineare. Poiché la funzione di transizione da un sistema di coordinate cartesiane a un altro è una trasformazione lineare (o affine, nel caso di spazi affini), e quindi è sempre di classe C^∞ , tutte le coordinate cartesiane su uno spazio lineare o affine appartengono allo stesso atlante massimale. Tale atlante massimale, tuttavia, contiene anche tutte le coordinate locali che si ricavano da quelle cartesiane mediante una trasformazione (non lineare) differenziabile e invertibile, come avviene per le coordinate polari nel piano, con le coordinate sferiche o cilindriche in \mathbb{R}^3 , ecc. La differenza è che le coordinate cartesiane mantengono traccia della struttura di spazio lineare: l'operazione di combinazione lineare fra elementi di uno spazio lineare corrisponde alla combinazione lineare delle

³Usualmente nella definizione di varietà si richiedono delle ulteriori condizioni topologiche su M : si suppone che M sia uno **spazio di Hausdorff** e sia **paracompatto**. Queste ipotesi giocano un ruolo tecnico in alcune dimostrazioni che qui non riporteremo, e negli esempi che prenderemo in considerazione sono sempre soddisfatte. Alcuni testi, inoltre, restringono la definizione di carta a mappe tali che il dominio U e la sua immagine siano omeomorfi a \mathbb{R}^n (e quindi siano *semplicemente connessi* e *contraibili*); questa richiesta non è comunque restrittiva, dato che l'immagine $\varphi(U)$ può essere sempre ricoperta da aperti omeomorfi a \mathbb{R}^n , e quindi la carta può essere suddivisa in più carte i cui domini hanno la proprietà richiesta, su ciascuno dei quali le coordinate sono definite dalla funzione φ .

corrispondenti coordinate. Questa corrispondenza non sussiste più quando si usano coordinate generalizzate; quando usiamo coordinate polari nel piano, ad esempio, ci “dimentichiamo” della struttura affine e usiamo la sola struttura di varietà differenziabile.

Data una varietà differenziabile M , ogni suo sottoinsieme *aperto* $N \subset M$ è pure una varietà differenziabile (basta restringere l’atlante di M alle sole carte i cui domini intersechino N , prendendo come nuovi domini le intersezioni $\mathcal{U}_\alpha \cap N$).

Date due varietà differenziabili A e B , con $\dim(A) = n$ e $\dim(B) = m$, il loro *prodotto cartesiano* $A \times B$ è una varietà differenziabile di dimensione $n + m$, poiché può essere dotato di un atlante nel modo seguente. Siano $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(\mathcal{V}_\lambda, \phi_\lambda)$, rispettivamente, le carte degli atlanti di A e B ; prendiamo come ricoprimento di $A \times B$ tutti i prodotti cartesiani fra i domini delle carte di A e i domini delle carte di B , e consideriamo le funzioni $(\varphi_\alpha, \phi_\lambda) : \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{V}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$. È facile verificare che la condizione di compatibilità è soddisfatta.

Una varietà è **compatta** se lo è come spazio topologico, ossia se qualunque ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento che contiene un numero finito di aperti.

Concludiamo questa sezione con esempi di insiemi che **non** sono varietà differenziabili:

- La superficie in \mathbb{R}^3 descritta dall’equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ non è una varietà differenziabile, perché il punto $(0, 0, 0)$ non ha alcun intorno omeomorfo a \mathbb{R}^2 . Analogamente, non è una varietà l’insieme descritto nel piano da $x^2 - y^2 = 0$.
- Un segmento *chiuso* di una retta, $[a, b]$, non è una varietà perché i punti estremi, a e b , non hanno intorni omeomorfi a \mathbb{R} . Insiemi di questo tipo, come anche il disco $x^2 + y^2 \leq 1$, sono detti **varietà con bordo**, e richiedono una definizione più generale di quella che abbiamo dato qui.

2.2 Funzioni differenziabili fra varietà

Vi sono innumerevoli casi in cui gli spazi che dobbiamo descrivere sono definiti attraverso un sistema di equazioni in \mathbb{R}^k : ad esempio, le superfici definite in \mathbb{R}^3 da un'equazione della forma $f(x, y, z) = 0$, oppure – in Meccanica Razionale – gli spazi delle configurazioni per sistemi di punti materiali soggetti a vincoli posizionali bilaterali. Quale corrispondenza c'è fra varietà differenziabili astratte, così come le abbiamo definite in questa sezione, e sottoinsiemi di uno spazio affine definiti da equazioni? E in che modo la definizione che abbiamo dato permette di definire su M le operazioni del calcolo differenziale? Per rispondere a queste domande dobbiamo innanzitutto studiare le proprietà delle funzioni fra varietà differenziabili.

Definizione 6. Siano A e B due varietà differenziabili, $\dim(A) = n$ e $\dim(B) = m$. Indichiamo le carte degli atlanti di A e B , rispettivamente, con $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(\mathcal{V}_\lambda, \phi_\lambda)$. Una funzione $F : A \rightarrow B$ è detta **differenziabile** se in ciascun aperto φ_α^{-1} la funzione composta $\phi_\lambda \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ è una funzione differenziabile.

Poiché $\phi_\lambda \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$, la **rappresentazione in coordinate locali** della funzione f , è una funzione su un aperto di \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R}^m , ad essa possiamo applicare la definizione di differenziabilità dell'Analisi: è differenziabile (C^∞) se e solo se esistono e sono continue le sue derivate parziali di ogni ordine. Ciò che dobbiamo verificare, però, è che nell'intersezione del dominio di due carte la differenziabilità della rappresentazione di F in un sistema di coordinate implichi la differenziabilità nell'altro sistema di coordinate. Questo è assicurato dal fatto che per passare da una rappresentazione all'altra dobbiamo semplicemente comporla con la funzione di transizione:

$$\phi_\lambda \circ F \circ \varphi_\beta^{-1} = \phi_\lambda \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$$

e poiché (in \mathbb{R}^n) la composizione di due funzioni differenziabili è ancora una funzione differenziabile, la differenziabilità in un sistema di coordinate implica la differenziabilità in qualunque altra carta compatibile (lo stesso vale, come si vede facilmente, anche per cambiamenti di coordinate sul codominio B). Da questo si ricava anche immediatamente che se $F : A \rightarrow B$ e $G : B \rightarrow C$ sono funzioni differenziabili fra varietà, anche $G \circ F : A \rightarrow C$ lo è.

Questo è un primo esempio del procedimento che applicheremo in generale nel calcolo differenziale su varietà: di ogni funzione useremo sempre una rappresentazione in coordinate, ma dobbiamo tenere concettualmente distinta la funzione sulla varietà (che associa un valore a ciascun punto della varietà, indipendentemente dalle coordinate usate) dalle sue rappresentazioni in coordinate. Ad esempio, se consideriamo nel piano un sistema di coordinate cartesiane (x, y) e applichiamo l'usuale trasformazione in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (2.2.1)$$

la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ rappresentata in coordinate cartesiane da $f(x, y) = x^2 + y^2$ è rappresentata, in coordinate polari, dalla funzione $f(\rho, \theta) = \rho^2$. Le due rappresentazioni in coordinate sono funzioni diverse – la seconda si ottiene dalla prima componendola con la funzione di transizione (2.2.1), ed è definita su un diverso dominio di \mathbb{R}^2 – ma la funzione definita sulla varietà è sempre la stessa.

Non tutte le funzioni delle coordinate locali, d'altra parte, rappresentano funzioni globalmente definite sulla varietà. Ad esempio, se consideriamo la funzione $f(\rho, \theta) = \theta$, definita sul dominio delle coordinate polari nel piano (il piano meno una semiretta), questa *non* è la rappresentazione in coordinate locali di una funzione differenziabile definita su tutto il piano. In altre parole, di ciascun oggetto definito globalmente su una varietà M noi useremo sempre le rappresentazioni locali in coordinate, ma non ogni oggetto definito sul dominio di una carta è la rappresentazione in coordinate di un oggetto definito globalmente su M .

Quando si parla di *funzioni su una varietà* M , senza specificare il codominio, ci si riferisce alle funzioni differenziabili a valori in \mathbb{R} , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. In Fisica, queste funzioni sono anche chiamate *campi scalari* su M . L'insieme di queste funzioni forma un anello commutativo, dove la somma e il prodotto di funzioni sono definite, rispettivamente, dalla somma e dal prodotto dei rispettivi valori in ciascun punto. Come abbiamo visto, oltre alle funzioni globalmente definite su M ci sono funzioni che sono definite localmente su un aperto di M , e in alcuni casi non ammettono un'estensione globale (differenziabile) a tutta la varietà. Ciascuna delle coordinate di una carta può essere vista come una funzione locale.

2.2.1 Curve su una varietà

Fra tutte le funzioni fra varietà, capiterà di usare molto spesso le funzioni da \mathbb{R} in una varietà M ; funzioni di questo tipo sono le *curve di moto* $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, in cui la variabile indipendente $t \in \mathbb{R}$ assume il significato fisico di "tempo".

Dal punto di vista terminologico distingueremo il concetto di **curva**, che per noi è una funzione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, da quello di **traiettoria**, che è l'immagine della curva in M . Le curve sono traiettorie parametrizzate da una ben precisa "legge di percorrenza". Le traiettorie si possono considerare classi di equivalenza di curve, dove due curve sono equivalenti se hanno la stessa immagine e pertanto possono essere ottenute l'una dall'altra per composizione con una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (**riparametrizzazione**).

In molti casi, non è rilevante che la curva a cui ci riferiamo sia definita su tutto \mathbb{R} : è sufficiente che sia definita in un intervallo di valori reali (in genere, in un intorno di 0). Tuttavia, per non complicare la notazione, nel seguito indicheremo genericamente \mathbb{R} come il dominio di una generica curva.

In ciascuna carta, un insieme di curve particolarmente importanti è dato dalle **curve coordinate**. Dato un punto $p \in M$ appartenente al dominio della carta, con coordinate q_0^λ , la μ -esima curva coordinata passante per il punto p è quella descritta dalla seguente rappresentazione in coordinate:

$$\begin{cases} q^\mu(t) = q_0^\mu + t, \\ q^\lambda(t) = q_0^\lambda \quad \forall \lambda \neq \mu. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Ogni curva coordinata è definita sull'intervallo di \mathbb{R} tale che i valori della funzione $q^\mu(t)$ appartengono all'immagine della carta.

2.2.2 Diffeomorfismi locali e globali, attivi e passivi

Definizione 7. Se $\dim(A) = \dim(B)$ e $\Phi : A \rightarrow B$ è una mappa globalmente invertibile con inversa differenziabile, allora Φ è detta **diffeomorfismo** fra A e B ; se esiste un diffeomorfismo fra A e B , le due varietà sono dette **diffeomorfe**. Si può verificare facilmente che l'essere diffeomorfe è una relazione di equivalenza.

Affinché due varietà possano essere diffeomorfe, devono avere la stessa dimensione ed essere topologicamente omeomorfe. Esistono però anche mappe locali fra varietà, definite solo fra aperti: se queste sono differenziabili e invertibili (con inversa differenziabile), allora sono dette **diffeomorfismi locali**. Condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità locale è che la matrice jacobiana della mappa (a cui daremo un'interpretazione geometrica nel prossimo capitolo) sia invertibile:

Proposizione 2 (teorema della funzione inversa). Sia Φ una funzione, localmente definita, fra varietà della stessa dimensione; se (e solo se) la rappresentazione di Φ in un qualsiasi sistema di coordinate ha matrice jacobiana invertibile in un punto p del suo dominio di definizione, allora Φ è un diffeomorfismo locale in un intorno di p . La matrice jacobiana del diffeomorfismo locale inverso Φ^{-1} è, in ciascun punto, l'inversa (in senso matriciale) della jacobiana di Φ .

Come è noto, la matrice jacobiana di una funzione è la matrice delle derivate parziali della rappresentazione in coordinate della funzione. Quando si cambiano coordinate (su A o su B), la matrice jacobiana di Φ viene moltiplicata per la matrice jacobiana delle funzioni di transizione, che è necessariamente invertibile (poiché le funzioni di transizione devono essere invertibili): quindi il rango della matrice jacobiana di Φ in un punto dato è lo stesso in tutti i sistemi di coordinate.

Un esempio di diffeomorfismo locale, ad esempio, è la mappa dalla sfera S^2 (meno un punto) nel piano \mathbb{R}^2 descritta dalle coordinate stereografiche. Di fatto, tutte le carte su una varietà di dimensione n sono diffeomorfismi locali dalla varietà in \mathbb{R}^n . Da qui si può ricavare facilmente che due varietà della stessa dimensione sono sempre localmente diffeomorfe fra loro, in quanto sono entrambe localmente diffeomorfe a \mathbb{R}^n .

Vi sono anche mappe che sono globalmente definite e che sono diffeomorfismi locali, ma non sono globalmente invertibili. Ad esempio, si consideri il cerchio S^1 , con una coordinata angolare θ , e la mappa rappresentata dal raddoppiamento dell'angolo: $\theta \mapsto 2\theta$. Questa mappa può essere estesa a una mappa globale sul cerchio, ovunque differenziabile e con derivata costante uguale a 2. Tuttavia ciascun valore ha due controimmagini, quindi non è globalmente invertibile e non è un diffeomorfismo globale.

Quando consideriamo un diffeomorfismo locale di una varietà M in sé, la sua rappresentazione in un dato sistema di coordinate avrà la forma $q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu)$. Ma anche le funzioni di transizione da una carta all'altra di M hanno la stessa forma. Abbiamo quindi due distinte operazioni che, in coordinate, appaiono rappresentate allo stesso modo: nel primo caso, abbiamo un diffeomorfismo (locale) che a ciascun punto associa un altro punto di M , e che in una singola carta si rappresenta scrivendo le coordinate q^λ del punto immagine come funzioni delle coordinate Q^μ del punto di origine. Quando invece si tratta di una funzione di transizione, il punto di M è sempre lo stesso:

stiamo cambiando carta, e l'espressione associa le “vecchie” coordinate q^λ del punto alle “nuove” coordinate Q^μ . Il fatto che l'espressione risultante sia dello stesso tipo non è accidentale: dobbiamo ricordarci, infatti, che attraverso le coordinate noi stiamo “spostando” tutte le operazioni su \mathbb{R}^n . Una volta rappresentati da mappe di \mathbb{R}^n in sé, i diffeomorfismi locali e i cambiamenti di coordinate sono indistinguibili. È comodo, per fissare le idee, chiamare **diffeomorfismi attivi** i diffeomorfismi (anche locali) di M in sé, che “spostano” effettivamente ciascun punto di M in un altro punto (cambia il punto, non la carta), e chiamare **diffeomorfismi passivi** i cambiamenti di coordinate (cambia la carta, non il punto).

Come vedremo molto più avanti, ci sono situazioni in cui è utile poter interpretare una medesima trasformazione delle coordinate, alternativamente, come diffeomorfismo attivo o passivo.

2.2.3 Immersioni e sottovarietà

Una funzione differenziabile iniettiva $F : A \rightarrow B$, con $\dim(A) < \dim(B)$, è detta **immersione** di A in B .

Se sull'immagine $F(A) \subset B$ la mappa F è invertibile con inversa differenziabile, in altri termini se A e $F(A)$ sono diffeomorfe (assegnando a $F(A)$ la topologia indotta dalla topologia di B : ogni aperto di $F(A)$ è l'intersezione di un aperto di B con $F(A)$), allora la mappa è detta **immersione topologica** (in inglese **embedding**). Un criterio che garantisce che un'immersione sia un'immersione topologica è il seguente:

Proposizione 3. *Se $F : A \rightarrow B$ è un'immersione tale che la controimmagine di ogni compatto in B è compatta in A , allora F è un'immersione topologica (embedding)⁴*

Esistono mappe che sono immersioni ma non immersioni topologiche: per produrre un esempio di questo tipo (che ci servirà anche in altri contesti nel seguito) consideriamo come varietà il prodotto cartesiano di due circonferenze, ossia il toro $T^2 \equiv S^1 \times S^1$. Consideriamo un'elica sul toro, ossia una curva ottenuta come prodotto di due moti circolari uniformi, uno su ciascuna circonferenza S^1 . Se i periodi dei due moti circolari sono commensurabili, ossia il loro rapporto è un numero razionale, allora l'elica è una curva chiusa. Se invece il rapporto fra i due periodi è irrazionale, l'elica riempie densamente la superficie del toro. In quest'ultimo caso, ogni aperto del toro interseca l'elica in un numero infinito di segmenti disgiunti. L'immagine di un intervallo aperto di \mathbb{R} attraverso l'immersione dell'elica, invece, è un singolo segmento dell'elica. Quindi l'inversa dell'immersione non può essere una funzione continua.

L'immagine di un'immersione topologica in una varietà M è detta **sottovarietà (topologicamente immersa)** di M . Le sottovarietà non topologicamente immerse sono invece sottoinsiemi di M che ammettono una struttura di varietà differenziabile, ma con una topologia che non coincide con la topologia indotta da M .

⁴Da questa proprietà segue che ogni immersione di una varietà A compatta è un'immersione topologica. Infatti, poiché la funzione F è continua, la controimmagine di ogni insieme chiuso è un insieme chiuso, ma ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Un concetto già incontrato nello studio delle superfici in \mathbb{R}^3 è quello di **parametrizzazione locale** di una superficie. Un esempio familiare è la parametrizzazione di una sfera di raggio ℓ data da

$$\begin{cases} x = \ell \cos(\theta) \sin(\phi) \\ y = \ell \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \ell \cos(\phi) \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Questa, nel nostro linguaggio, non è altro che la **rappresentazione in coordinate della mappa di immersione**. Una parametrizzazione locale di una sottovarietà immersa è, in questo senso, la composizione di tre mappe: nel nostro caso, una carta su S^2 (che definisce le coordinate θ, ϕ), l'immersione di S^2 in \mathbb{R}^3 , e una carta globale (sistema di coordinate cartesiane x, y, z) in \mathbb{R}^3 .

Per convincersi di questo, basta immaginare l'effetto sulla parametrizzazione (2.2.3) di una modifica di una di queste tre mappe. Ad esempio, potremmo effettuare un cambiamento di coordinate sulla sfera; oppure potremmo modificare l'immersione, ad esempio cambiando il raggio ℓ o il centro della sfera immersa (anziché far coincidere il centro con l'origine delle coordinate); infine, potremmo cambiare il riferimento affine in \mathbb{R}^3 (la scelta dell'origine e/o dei vettori della base).

2.2.4 Il teorema del valore regolare

Veniamo ora a un teorema molto importante che riguarda invece le funzioni $F : A \rightarrow B$ con $\dim(A) > \dim(B)$. Ricordiamo che per ogni valore $b \in B$ che appartiene all'immagine di F , $F^{-1}(b)$ denota la **controimmagine** di b , ossia $F^{-1}(b) = \{x \in A : F(x) = b\}$.

Definizione 8. Un valore $b \in F(A) \subseteq B$ è detto **regolare** se in tutti i punti di $F^{-1}(b)$ la matrice jacobiana di F (in un qualsiasi sistema di coordinate) ha rango $m = \dim(B)$.

Proposizione 4 (teorema del valore regolare). Se b è un valore regolare della funzione $F : A \rightarrow B$, allora la sua controimmagine $F^{-1}(b)$ è una varietà differenziabile topologicamente immersa in A , con $\dim(F^{-1}(b)) = \dim(A) - \dim(B)$.

Questo fornisce un criterio preciso per assicurare che il luogo di punti definito da un sistema di equazioni sia una sottovarietà differenziabile. Un sistema di equazioni $f^k(x^i) = 0$, $k = 1, \dots, \kappa$, infatti, definisce la controimmagine del vettore nullo per una mappa a valori in \mathbb{R}^κ ; si tratta quindi di calcolare il rango della matrice jacobiana $\left[\frac{\partial f^k}{\partial x^i} \right]$ e controllare che esso sia uguale a κ in tutti i punti che soddisfano le equazioni $f^k(x^i) = 0$.

Consideriamo due esempi, per fissare le idee. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la mappa $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. La matrice jacobiana ha le componenti $[2x \ 2y \ 2z]$: il rango è uguale a 1 ovunque tranne che nell'origine. Se consideriamo un valore $c \in \mathbb{R}^+$ maggiore di zero, l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = c$ definisce una superficie sferica, che non interseca l'origine: pertanto c è un valore regolare, e in effetti per ogni $c > 0$ l'equazione descrive una superficie bidimensionale regolare topologicamente immersa in \mathbb{R}^3 . Invece $c = 0$ non è un valore regolare, e in effetti la controimmagine $f(x, y, z) = 0$ si riduce a un punto, che non è una sottovarietà di dimensione $3 - 1 = 2$. Come secondo esempio prendiamo fra gli stessi spazi la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. La matrice jacobiana ha

le componenti $[2x \ 2y \ -2z]$: anche in questo caso, il rango è uguale a 1 ovunque tranne che nell'origine. Ogni $c \neq 0$ è un valore regolare per la funzione: per $c \neq 0$, infatti, il luogo di punti descritto dall'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = c$ è un iperboloide (a una o a due falde, a seconda del segno di c) e non interseca l'origine. Per $c = 0$, invece, l'equazione descrive un cono passante per l'origine, quindi c'è un punto in cui il rango della jacobiana è 0. In effetti, il cono è una superficie bidimensionale topologicamente immersa in \mathbb{R}^3 ovunque tranne che intorno all'origine.

I valori regolari di una funzione differenziabile, in realtà, sono “quasi tutti”:

Proposizione 5 (teorema di Sard). *Data una funzione differenziabile $F : A \rightarrow B$, i valori regolari formano un aperto denso in $F(A)$.*

Il teorema di Sard, in realtà, ha un enunciato più forte: afferma che l'insieme dei valori non regolari ha misura di Lebesgue nulla. Ma in questo contesto non stiamo usato nessuna nozione di teoria della misura, quindi non entreremo nel dettaglio su questo punto.

Poniamoci ora la domanda inversa: data una sottovarietà $M \subset N$, con $\dim(N) > \dim(M)$ questa coincide sempre con il luogo dei punti definito da un sistema di equazioni? Una risposta è data dal seguente teorema:

Proposizione 6 (teorema di immersione locale). *Sia $F : A \rightarrow B$ un'immersione, allora intorno a ciascun punto $x \in A$ e intorno alla sua immagine $F(x) \in B$ esistono delle coordinate tali che la rappresentazione locale di F diventa $F(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1, x^2, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$.*

Quindi *almeno localmente* una sottovarietà immersa può sempre essere identificata come il luogo degli zeri di $m - n$ funzioni mutuamente indipendenti.

Alla domanda finale, se ci sia una corrispondenza biunivoca fra le varietà definite mediante l'assegnazione di un atlante e le varietà topologicamente immerse come sottoinsiemi di uno spazio affine \mathbb{R}^k , rispose Whitney con il seguente teorema:

Proposizione 7 (teorema di immersione di Whitney). *Ogni varietà differenziabile di dimensione n può essere topologicamente immersa in \mathbb{R}^{2n} .*

Naturalmente, molte varietà possono essere topologicamente immerse in uno spazio affine di dimensione minore: ad esempio, ogni sfera n -dimensionale può essere immersa in \mathbb{R}^{n+1} .

2.3 Vettori tangenti

In uno spazio affine \mathbb{R}_a^k , a ciascuna coppia di elementi P e Q è associato un vettore dello spazio lineare \mathbb{R}_v^k , che possiamo denotare con \overrightarrow{PQ} oppure con $Q - P$. Possiamo identificare \overrightarrow{QP} con lo **spostamento** dal punto P al punto Q . L'insieme di tutti i possibili spostamenti a partire da un dato punto P , quindi, è una copia dello spazio vettoriale \mathbb{R}_v^k , con origine nel punto P (giacché al vettore nullo corrisponde lo spostamento nullo). In particolare, scelto arbitrariamente un punto O dello spazio affine (origine), ogni altro punto può essere identificato da un vettore di \mathbb{R}_v^k : $P = O + \overrightarrow{OP}$.

Il limite del rapporto fra lo spostamento lungo una curva di moto e il corrispondente intervallo di tempo, al tendere a zero di quest'ultimo, non è altro che la velocità istantanea del punto:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}. \quad (2.3.1)$$

L'insieme delle velocità istantanee possibili in un punto P dello spazio affine è quindi a sua volta una copia dello spazio lineare su cui lo spazio affine è modellato: ad essa si dà il nome di **spazio tangente** \mathbb{R}_a^k nel punto P .

Poiché in uno spazio affine possiamo **traslare** uno spostamento da un qualsiasi punto P in uno spostamento da un altro punto P' , allo stesso modo un vettore dello spazio tangente in P può essere traslato in un vettore tangente in P' . Fissato un **riferimento cartesiano** in \mathbb{R}_a^k , ossia un'origine O e una base di \mathbb{R}_v^k , possiamo traslare i vettori della base di \mathbb{R}_v^n in qualsiasi punto P e definire in questo modo una base in ciascuno spazio tangente.

Se consideriamo una sottovarietà M di dimensione n topologicamente immersa nello spazio affine (con $n < k$) si può vedere, analogamente al caso delle superfici bidimensionali immerse in \mathbb{R}^3 , che in ciascun punto P della sottovarietà l'insieme delle velocità corrispondenti a curve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ forma un **sottospazio m -dimensionale** dello spazio tangente a \mathbb{R}_a^n , che chiamiamo **spazio tangente alla sottovarietà M** in P , e denotiamo con $T_P M$. Come si vede, questa definizione dei vettori tangenti e dello spazio tangente a M , che è quella che avevamo già usato per le superfici, dipende concettualmente dal fatto che M è vista come sottovarietà di uno spazio affine.

Per costruire una definizione di vettore tangente che sia applicabile alle varietà definite come spazi topologici dotati di un atlante differenziabile, dunque, dobbiamo procedere diversamente.

Consideriamo su una varietà M una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ differenziabile, $\gamma : t \mapsto p(t)$, e una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$; definiamo la **derivata direzionale** di f lungo γ nel punto $P = \gamma(0)$ come il numero reale $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0}$. Si noti che $(f \circ \gamma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, quindi $\frac{d}{dt}$ è la derivata ordinaria di una funzione di una variabile reale.

Il valore della derivata direzionale non dipende dal sistema di coordinate. In un dato sistema di coordinate q^λ una curva di moto sarà rappresentata da funzioni $q^\lambda = q^\lambda(t)$, la funzione f sarà rappresentata da $f(q^\mu)$ e la derivata direzionale sarà data da

$$\left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{dq^\mu}{dt} \right|_{t=0}; \quad (2.3.2)$$

se si cambia il sistema di coordinate, con una funzione di transizione $q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu)$, si trova⁵

$$\frac{\partial f}{\partial q^\lambda} \frac{dq^\lambda}{dt} = \frac{\partial f}{\partial Q^\mu} \frac{\partial Q^\mu}{\partial q^\lambda} \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\nu} \frac{dQ^\nu}{dt} = \frac{\partial f}{\partial Q^\mu} \frac{dQ^\mu}{dt}. \quad (2.3.3)$$

Dalla formula (2.3.2) si vede che, scelto un sistema di coordinate, qualunque derivata direzionale si può scrivere come combinazione lineare delle derivate parziali della funzione, con coefficienti dati dalle derivate delle coordinate lungo la curva. In particolare, la derivata direzionale associata a ciascuna curva coordinata (2.2.2) non è altro che la derivata parziale rispetto alla coordinata corrispondente.

Definizione 9. Sia p un punto qualsiasi di una varietà differenziabile M , e siano $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow M$ e $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow M$ due curve differenziabili. Diciamo che γ_1 e γ_2 sono **tangenti in p** se

- $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$
- per ogni funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, le derivate direzionali lungo le due curve coincidono:

$$\left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2) \right|_{t=0}. \quad (2.3.4)$$

Notiamo che questa condizione di tangenza non è la semplice tangenza geometrica fra le traiettorie: due curve, per essere tangenti, devono attraversare il punto p con “la stessa velocità”, nel senso che è precisato dalla definizione. La tangenza, quindi, non dipende solo dalla traiettoria ma anche da come essa è percorsa.

Scelto un sistema di coordinate, lo sviluppo di Taylor di una curva γ passante per p in $t = 0$ sarà dato da

$$q^\lambda(t) = q^\lambda(0) + \left. \frac{dq^\lambda}{dt} \right|_{t=0} t + o(t^2) \quad (2.3.5)$$

dove le coordinate $q^\lambda(0)$ sono quelle del punto p . Dalla (2.3.2) si vede che due curve sono tangenti fra loro se e solo se, in un sistema di coordinate, i loro sviluppi di Taylor coincidono fino al primo ordine incluso (Esercizio: mostrare che se questa proprietà vale in un sistema di coordinate, vale in qualunque altro).

Proposizione 8. La condizione di tangenza di due curve è una relazione di equivalenza: una curva è tangente a sé stessa (in ciascun punto), la relazione è simmetrica, e se γ_1 è tangente in p a γ_2 e quest'ultima è tangente in p a γ_3 , allora γ_1 e γ_3 sono tangenti in p fra loro.

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per definire il concetto astratto di vettore tangente:

Definizione 10. Un **vettore tangente** a M nel punto p è una classe di equivalenza di curve tangenti fra loro in p .

⁵a partire da questo punto, useremo per le formule le convenzioni sulle sommatorie che abbiamo visto nella parte introduttiva: in attesa di chiarire meglio questo punto più avanti, si noti che un indice controvariante che compare su una variabile di derivazione, all'interno di una derivata parziale, conta come indice covariante (e viceversa).

Pur avendo usato il termine “vettore” nella definizione, da quest’ultima non è affatto evidente che l’insieme dei vettori tangenti, definito come spazio quoziente, abbia una struttura lineare. Su una generica varietà M , infatti, non esiste nessuna struttura lineare o affine che ci permetta di definire una “combinazione lineare di curve”. La struttura lineare, invece, deriva dal fatto che a due curve che rappresentano *lo stesso vettore tangente* corrisponde, per definizione, *la stessa derivata direzionale*. Una derivata direzionale in un punto dato è una *derivazione* sulle funzioni:

Definizione 11. Una **derivazione** sull’anello delle funzioni definite nell’intorno di un punto P di una varietà è un’applicazione D a valori in \mathbb{R} che soddisfi queste proprietà, per ogni coppia di funzioni f e g :

- $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{linearità})$
- $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g) \quad (\text{regola di Leibniz})$

Poiché, per linearità, $D(\lambda f) = \lambda D(f)$, identificando un generico numero reale λ con la funzione costante che ha quel valore, dalla regola di Leibniz si ottiene che ogni derivazione si annulla sulle funzioni costanti.

L’operatore che vale zero su qualunque funzione è anch’esso una derivazione (derivazione nulla). Se D_1 e D_2 sono due derivazioni, la loro combinazione lineare (a coefficienti reali) $\lambda D_1 + \mu D_2$ è definita dalla formula $(\lambda D_1 + \mu D_2)(f) = \lambda D_1(f) + \mu D_2(f)$ ed è, come è immediato verificare, anch’essa una derivazione. Da questo segue che

Proposizione 9. *L’insieme delle derivazioni nel punto P forma uno spazio lineare.*

È immediato verificare che ogni derivata direzionale⁶ è una derivazione. Il passaggio cruciale, a questo punto, è dato dalla proposizione seguente (che si dimostra usando la generalizzazione in \mathbb{R}^n del teorema del valor medio di Lagrange):

Proposizione 10. *Dato un sistema di coordinate q^λ in un intorno del punto p , ogni derivazione nel punto p si può scrivere univocamente come combinazione lineare delle derivate parziali rispetto alle coordinate.*

Data una qualsiasi combinazione lineare delle derivate parziali, ad essa si può far corrispondere uno e un solo vettore tangente nel punto p : data qualunque n -pla di componenti $(X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^n$, alla combinazione lineare $X^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\lambda}$ possiamo far corrispondere la curva

$$q^\lambda(t) = q^\lambda(0) + X^\lambda t, \quad \Rightarrow \quad \frac{dq^\lambda}{dt} = X^\lambda; \quad (2.3.6)$$

pertanto, vettori tangenti e derivazioni sono in corrispondenza biunivoca.

Mettendo insieme tutte le proprietà descritte, otteniamo questa proposizione:

⁶In alcuni testi di Analisi, il termine *derivata direzionale* è usato per indicare la derivata rispetto a un *versore*. Noi qui adottiamo il termine in un senso più generale, come avviene nei testi di Geometria Differenziale e di Meccanica.

Proposizione 11. *L'insieme dei vettori tangenti a una varietà M nel punto p forma uno spazio lineare di dimensione $n = \dim(M)$, detto **spazio tangente** in p e denotato con $T_p M$. Per ciascun sistema di coordinate, i vettori tangenti alle curve coordinate in p formano una base dello spazio dei vettori tangenti, detta **base naturale** associata al sistema di coordinate. I vettori della base naturale coincidono con le derivazioni $\frac{\partial}{\partial q^\lambda}$.*

2.4 Il fibrato tangente

L'insieme di tutti i vettori tangenti per tutti i punti di una varietà M di dimensione n è quindi dato dall'unione di tutti gli spazi tangenti. Denotiamo questo insieme con TM :

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (2.4.1)$$

Dato un atlante $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ su M , denotiamo con $T\mathcal{U}_\alpha \equiv \bigcup_{p \in \mathcal{U}_\alpha} T_p M$ l'insieme dei vettori tangenti ai punti del dominio della carta \mathcal{U}_α , che è un aperto di TM . Un elemento di $T\mathcal{U}_\alpha$ è individuato univocamente da $2n$ numeri: le n coordinate q^λ del punto p a cui è tangente il vettore, e le n componenti del vettore stesso rispetto alla base naturale $\frac{\partial}{\partial q^\lambda}$, che denoteremo con u^λ . È facile vedere che la mappa che associa a tutti gli elementi di $T\mathcal{U}_\alpha$ le coordinate (q^λ, u^λ) è una carta differenziabile a valori in \mathbb{R}^{2n} , definita nell'aperto $T\mathcal{U}_\alpha$. È anche immediato vedere che la collezione di aperti $T\mathcal{U}_\alpha$ ricopre TM .

Vediamo ora se per ogni coppia di aperti $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta$ che si intersecano – il che è equivalente a supporre che si intersechino $T\mathcal{U}_\alpha$ e $T\mathcal{U}_\beta$ – le due carte così definite sono compatibili.

Dette Q^μ le coordinate della seconda carta su M e U^μ le componenti di un vettore rispetto alla corrispondente base naturale $\frac{\partial}{\partial Q^\mu}$, si trova la relazione

$$\begin{cases} q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu) \\ u^\lambda = \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\mu} U^\mu, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

dove $q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu)$ è la funzione di transizione fra le due carte; dato che per ipotesi questa è una funzione di transizione e quindi è differenziabile e invertibile, la sua matrice jacobiana è invertibile. Pertanto, anche la relazione lineare che lega le componenti u^λ alle componenti U^μ è invertibile. Abbiamo quindi dimostrato che

Proposizione 12. *L'insieme TM dei vettori tangenti a una varietà M è a sua volta una varietà differenziabile, con $\dim(TM) = 2 \dim(M)$.*

Sulla varietà TM è definita una mappa, detta **proiezione**, che associa a ciascun vettore tangente il punto di M in cui il vettore è definito. Questa mappa, che denoteremo con $\pi : TM \rightarrow M$, è suriettiva; per ogni $p \in M$ la controimmagine non è altro che lo spazio tangente a p , $\pi^{-1}(p) \equiv T_p M$.

Questo è un caso particolare di varietà in cui è globalmente definita una mappa differenziabile suriettiva, e le controimmagini di ciascun valore sono sottovarietà tutte isomorfe fra loro (nel caso di TM , le controimmagini sono spazi lineari isomorfi fra loro): varietà di questo tipo sono dette **fibrati**; il codominio della mappa suriettiva è detto **base del fibrato** e le controimmagini dei punti della base sono dette **fibre**.

Nel caso di TM , la base è M e le fibre sono gli spazi tangenti $T_p M$. Per questa ragione TM è detto **fibrato tangente** della varietà M .

Su ogni varietà M si può facilmente costruire un fibrato con base M e fibre isomorfe a \mathbb{R}^n , semplicemente facendo il prodotto cartesiano di M con \mathbb{R}^n : abbiamo già visto che il prodotto cartesiano di due varietà è ancora una varietà, e su ogni prodotto cartesiano è ben definita la proiezione su una delle due componenti.

Un fibrato che sia *globalmente diffeomorfo a un prodotto cartesiano* è detto **fibrato banale**⁷. Un esempio di fibrato banale è il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, fibrato sul cerchio S^1 (le fibre sono rette). Un esempio di fibrato non banale è il nastro di Moebius: benchè anche in quel caso si possa definire una proiezione su S^1 le cui fibre sono rette, il nastro di Moebius non è globalmente omeomorfo a un cilindro. Si può dimostrare che ogni fibrato che ha come una base una varietà *contraibile* è necessariamente banale. Poiché ogni varietà ammette un ricoprimento con aperti contraibili, ogni fibrato è **localmente banale**.

Il fibrato tangente TM è un fibrato banale? In generale, no. Per quanto già detto, TM è sicuramente banale se M è una varietà contraibile (quindi, in particolare, se è omeomorfa a \mathbb{R}^n). È sempre possibile costruire un atlante di M in cui i domini delle carte \mathcal{U}_α sono tutti contraibili, e in questo caso possiamo affermare che ciascun $T\mathcal{U}_\alpha$ è un fibrato banale. Enunceremo più avanti un criterio utile per determinare se un fibrato tangente può essere globalmente banale; ad esempio, mentre il fibrato tangente al cerchio, TS^1 , è globalmente banale (quindi è diffeomorfo a un cilindro), il fibrato tangente alla sfera bidimensionale, TS^2 , non è banale, ovvero *non* è diffeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$.

2.4.1 La mappa tangente

Data una mappa differenziabile fra varietà, $F : A \rightarrow B$, per ogni curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow A$ si può ottenere una curva su B , per composizione: $F \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow B$.

Scegliamo su A e su B , rispettivamente, delle coordinate Q^i e q^λ (usiamo due alfabeti distinti – latino e greco – per gli indici dei due sistemi di coordinate, per evidenziare il fatto che le dimensioni di A e B possono essere diverse) e supponiamo che la mappa F sia rappresentata localmente dalle funzioni $q^\lambda = q^\lambda(Q^i)$ e la curva γ sia rappresentata dalle funzioni $Q^i = Q^i(t)$. Il vettore tangente alla curva γ è descritto da $\frac{dQ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial Q^i}$; su B , il vettore tangente alla curva $F \circ \gamma$ è dato da $\frac{dq^\lambda}{dQ^i} \frac{dQ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^\lambda}$, pertanto se due curve su A hanno lo stesso vettore tangente in un punto di A le loro immagini hanno lo stesso vettore tangente in $F(p) \in B$.

Questo significa che possiamo associare a ciascun vettore tangente ad A in p un vettore tangente a B in $F(p)$. La mappa $TA \rightarrow TB$ così costruita è detta **mappa tangente** di F e denotata con TF .

⁷in alcuni testi è anche detto **fibrato triviale**, dall'inglese *trivial bundle*, a dispetto del fatto che “trivial” è usato nel senso dell'italiano “banale”, mentre “triviale” in italiano ha un significato diverso.

Definizione 12. Data la mappa differenziabile $F : A \rightarrow B$ rappresentata localmente da $q^\lambda = q^\lambda(Q^i)$, la **mappa tangente** $TF : TA \rightarrow TB$, che associa a ciascun vettore tangente ad A in p un vettore tangente a $F(p)$ in B , è la mappa rappresentata, nelle coordinate (Q^i, U^i) e (q^λ, u^λ) (su TA e su TB rispettivamente), da:

$$\begin{cases} q^\lambda = q^\lambda(Q^i) \\ u^\lambda = \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^i} U^i. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Nel caso degli spazi lineari \mathbb{R}^k , questa mappa è stata già incontrata nei corsi di Analisi, dove – a seconda dei testi – è denominata “derivata”, “differenziale”, o “jacobiana” della mappa F . Nel nostro contesto, useremo il termine “differenziale” con un significato più specifico e ci riferiremo sempre alla mappa lineare $T_p A \rightarrow T_{F(p)} B$, rappresentata dalla matrice jacobiana, chiamandola “mappa tangente”.

Questo enfatizza anche il fatto che la mappa tangente TF costituisce sì l’*approssimazione lineare* della mappa F intorno a un punto p , ma non è definita fra A e B : è definita, invece, fra gli spazi tangenti nei punti corrispondenti.

Salta all’occhio che l’espressione in coordinate di una generica mappa tangente (2.4.3) sembra una diretta generalizzazione dell’espressione delle funzioni di transizione fra coordinate naturali in uno spazio tangente (2.4.2): l’unica differenza è che l’indice i può avere un campo di variabilità diverso da quello dell’indice λ . Nel caso in cui A e B sono la stessa varietà, le due espressioni (2.4.2) e (2.4.3) diventano perfettamente uguali.

In realtà, la funzione di transizione (2.4.2) non è altro che la *mappa tangente a un diffeomorfismo passivo (locale)* su M (tale mappa tangente è a sua volta un diffeomorfismo passivo locale su TM): come abbiamo già osservato, nel momento in cui usiamo le rappresentazioni in coordinate i diffeomorfismi attivi e passivi diventano indistinguibili.

2.4.2 Campi vettoriali e curve integrali

Dato un fibrato descritto da una proiezione $\pi : A \rightarrow B$, si dice **sezione del fibrato** una mappa dalla base B nel fibrato A che associ ad ogni $p \in B$ un elemento della fibra corrispondente, $\pi^{-1}(p)$. In altri termini, una sezione è una mappa $\sigma : B \rightarrow A$ tale che $\pi \circ \sigma$ è la mappa identità su B .

In un fibrato tangente TM , le sezioni sono assegnazioni in ciascun punto $p \in M$ di un vettore tangente a p . Ogni sezione, quindi, definisce un **campo vettoriale** su M . Un campo vettoriale è quindi definito da una mappa $X : M \rightarrow TM$ descritta, in coordinate, da n funzioni $u^\lambda = X^\lambda(q^\mu)$, le **componenti del campo vettoriale**:

$$X = X^\lambda(q^\mu) \frac{\partial}{\partial q^\lambda}. \quad (2.4.4)$$

Dal punto di vista fisico, esistono molte *grandezze vettoriali*: in Meccanica, la velocità, l’accelerazione, la forza... In questo contesto, però, noi abbiamo associato al concetto di “vettore su una varietà” un significato molto preciso, quello di “velocità lungo una curva di moto”. Quindi un

“campo di vettori” su una varietà ha il significato di “campo di velocità” (più avanti introdurremo una modellizzazione geometrica di un “campo di accelerazioni” o di un “campo di forze” per un sistema meccanico).

Definizione 13. *Dato un campo vettoriale X su M , definiamo **curva integrale** di X una curva γ su M tale che in ciascun punto di essa il vettore tangente a γ coincide con il valore del campo X in quel punto. In coordinate, ogni curva integrale è la soluzione di un problema di Cauchy per un sistema di **equazioni differenziali ordinarie autonome del primo ordine**:*

$$\begin{cases} \frac{dq^\lambda}{dt} = X^\lambda(q^\mu) \\ q^\lambda(0) = q_0^\lambda. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Nel seguito, denoteremo la curva integrale di X basata nel punto iniziale di coordinate q_0^μ in questo modo:

$$q^\lambda = q^\lambda(t; q_0^\mu), \quad (2.4.6)$$

L'evoluzione di ciascuna coordinata dipende, in generale, dal valore iniziale di *tutte* le coordinate. Si noti che l'aggettivo “iniziale” si riferisce convenzionalmente al valore $t = 0$, ma le curve integrali si estendono anche a t negativi. Una curva integrale può benissimo uscire dal dominio di una singola carta, quindi potrà richiedere più rappresentazioni in coordinate, che si trasformano l'una nell'altra per composizione con le solite funzioni di transizione.

Nella definizione qui sopra abbiamo scritto “la soluzione”, in quanto la condizione che la sezione X sia differenziabile implica che siano differenziabili le funzioni $X^\lambda(q^\mu)$; siccome il sistema di equazioni differenziali ordinarie (2.4.5) è in forma normale, possiamo applicare il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, noto dai corsi di Analisi, e ottenere

Proposizione 13 (esistenza e unicità). *Data una sezione X differenziabile del fibrato tangente TM , per ciascun punto p della varietà M esiste una e una sola curva integrale (massimale) tale che $\gamma(0) = p$.*

L'aggettivo “massimale” nell'enunciato si riferisce al fatto che, a stretto rigore, la restrizione di una curva a un sottointervallo del suo intervallo di definizione si dovrebbe considerare una soluzione distinta, avendo un diverso dominio. Non si può, per risolvere quest'ambiguità, affermare che per ogni punto iniziale p esista sempre una curva integrale estesa a tutto \mathbb{R} (ossia definita per ogni $t \in (-\infty, \infty)$), perché è facile trovare dei controesempi.

Ad esempio, sulla retta \mathbb{R} con coordinata x , il campo vettoriale $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ non ammette per nessun dato iniziale $x \neq 0$ una curva integrale differenziabile per ogni $t \in \mathbb{R}$: la generica curva integrale, infatti, ha la forma $x(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$ e quindi si può estendere solo all'intervallo $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ se $x_0 > 0$, oppure $(\frac{1}{x_0}, \infty)$ se $x_0 < 0$ (l'unica curva integrale definita per ogni t reale è quella costante, basata nel punto critico $x_0 = 0$).

Chiamiamo allora **curva massimale** una curva integrale che non è la restrizione di un'altra curva integrale a un sottointervallo proprio: in altri termini, una curva integrale massimale è una curva

integrale estesa al massimo intervallo possibile di valori di t (potrebbe essere anche l'intera retta, ma non necessariamente).

Definizione 14. *Un campo vettoriale si dice **completo** se ogni sua curva integrale massimale è definita su tutto \mathbb{R} .*

Proposizione 14. *Su una varietà compatta ogni campo vettoriale è completo.*

Ai punti in cui il campo vettoriale X si annulla corrispondono curve integrali costanti:

Definizione 15. *Un punto $p^* \in M$ in cui il campo vettoriale X si annulla è detto **punto critico** di X . Ad ogni punto critico p^* corrisponde la curva integrale costante $\gamma : t \mapsto p^*$, la cui traiettoria coincide con il punto critico.*

Due curve integrali distinte possono avere la stessa traiettoria? Sì: se consideriamo un punto iniziale q_0^λ , percorriamo la curva integrale per un tempo fissato T e definiamo $q_1^\lambda = q^\lambda(T; q_0^\lambda)$, possiamo considerare la curva integrale basata in q_1^λ . Come vedremo più approfonditamente nella prossima sezione, per ogni t si ha $q^\lambda(t; q_1^\lambda) = q^\lambda(t + T; q_0^\lambda)$: quindi le due curve hanno la stessa traiettoria, dato che si ottengono l'una dall'altra attraverso la riparametrizzazione $t \mapsto t + T$.

La seguente proprietà discende dall'esistenza e unicità delle soluzioni per il problema di Cauchy:

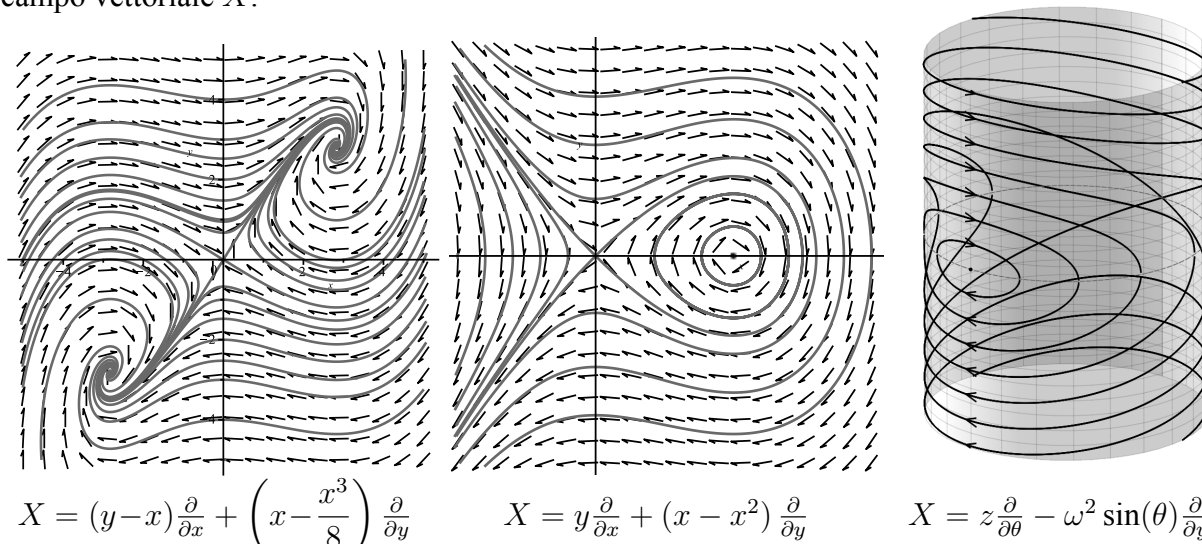
Proposizione 15. *Le traiettorie di due curve integrali di un campo vettoriale, se non sono coincidenti, non possono mai intersecarsi.*

Supponiamo, infatti, che le traiettorie di due curve integrali si intersechino nel punto p . Su una curva integrale, cambiando il parametro t con l'aggiunta di una costante, $t \mapsto t + c$, si ottiene un'altra curva integrale basata in un qualsiasi altro punto della stessa traiettoria. Se un punto p fosse comune a due traiettorie non coincidenti, potremmo quindi trovare due distinte curve di moto basate entrambe nel punto p , in contraddizione con il teorema di unicità. In modo analogo si vede che una singola traiettoria non può avere autointersezioni.

Questa proprietà ha una conseguenza che può risultare sorprendente: il moto di un punto lungo una curva integrale (non costante) di un campo vettoriale X differenziabile *non può mai arrestarsi in un tempo finito!* Infatti, perché il punto si arresti la sua velocità deve annullarsi, ossia la traiettoria deve raggiungere un punto critico di X . Ma il punto critico, come abbiamo visto, è esso stesso la traiettoria di una curva integrale. Quindi dovremmo avere due distinte traiettorie che si intersecano nel punto critico, il che è impedito dal teorema che abbiamo appena dimostrato.

2.4.3 Ritratto di fase di un campo vettoriale

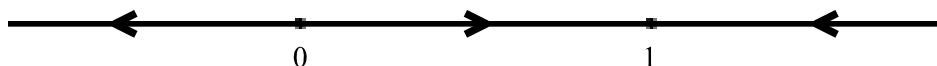
Per quanto detto, l'insieme delle *traiettorie* di un campo vettoriale determina una partizione della varietà M : per ciascun punto passa una e una sola traiettoria. Si può dare una rappresentazione grafica di questo insieme, nel caso bidimensionale, disegnando un certo numero di traiettorie che diano un'idea sufficientemente completa: questa rappresentazione si chiama **ritratto di fase** del campo vettoriale X .



Porzioni dei ritratti di fase di due campi vettoriali nel piano e di un campo vettoriale sul cilindro.

Poiché ogni curva integrale è differenziabile, ogni traiettoria è una sottovarietà immersa (ma non sempre *topologicamente immersa*: si pensi all'esempio, già visto, di un'elica densa sul toro): tolti i punti critici di X (per i quali la traiettoria si riduce a un singolo punto), ogni traiettoria è una varietà di dimensione uno, che può essere diffeomorfa a una retta oppure a un cerchio (si dimostra che ogni varietà differenziabile di dimensione uno è necessariamente diffeomorfa a \mathbb{R} o a S^1). Nel primo caso la traiettoria è aperta, nel secondo caso la traiettoria è chiusa e corrisponde a una **soluzione periodica**.

Nel caso di campi vettoriali su varietà di dimensione uno, disegnare il ritratto di fase è molto semplice. Se $M \equiv \mathbb{R}$, per qualsiasi campo vettoriale X ogni traiettoria è monotona: per $t \rightarrow \pm\infty$ essa può solo estendersi all'infinito (positivo o negativo) oppure tendere asintoticamente a un punto critico (che è una traiettoria distinta!). Quindi non possono esserci soluzioni periodiche; il ritratto di fase consiste solo nell'indicazione degli eventuali punti critici di X , e del verso di percorrenza degli intervalli fra punti critici:



Ritratto di fase di un campo vettoriale sulla retta, $X = (x - x^2)\frac{\partial}{\partial x}$.

Nel caso $M \equiv S^1$, invece, tutte le orbite sono limitate; se c'è almeno un punto critico non possono esserci soluzioni periodiche, altrimenti - in assenza di punti critici - c'è un'unica traiettoria periodica che coincide con l'intero cerchio.

In dimensione maggiore di due, invece, si può sempre parlare di “ritratto di fase” per intendere l’insieme delle traiettorie, ma è difficile pensare di disegnarlo.

2.4.4 Il flusso di un campo vettoriale

Nella sezione precedente abbiamo introdotto l’insieme delle curve integrali associate a un campo vettoriale. Ciascuna curva integrale individua il moto su M di un punto “trascinato” dal campo di velocità X a partire da una data posizione in $t = 0$.

Consideriamo ora, per un valore t fissato, la mappa φ_t che associa a ciascun punto $p \in M$ il punto raggiunto del tempo t dalla curva integrale basata in p : in coordinate locali,

$$\varphi_t : q_0^\lambda \mapsto q^\lambda(t; q_0^\mu) \quad (2.4.7)$$

Al variare di t e per p fissato, $p(t) = \varphi_t(p)$ è precisamente la curva integrale basata in p . Al variare di $p \in M$, per t fissato, φ_t rappresenta invece una mappa da M in sé. Grazie al teorema di dipendenza differenziabile dal dato iniziale della soluzione di un problema di Cauchy, possiamo affermare che

Proposizione 16. *La mappa $\varphi_t : M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo di M in sé, per ogni $t \in \mathbb{R}$ per cui la mappa è definita.*

Se il campo vettoriale X è completo, φ_t è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$; nel seguito, per semplificare gli enunciati, assumeremo di trovarci in questa condizione. Come abbiamo già osservato più sopra, una proprietà delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine autonomo è che $q^\lambda(t; q^\mu(s; q_0^\nu)) = q^\lambda(t + s; q_0^\nu)$. Per definizione, inoltre, $q^\lambda(0; q_0^\nu) = q_0^\lambda$. Queste relazioni, riscritte in termini di φ_t , si leggono

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}, \quad \varphi_0 = \text{Id}_M. \quad (2.4.8)$$

Ci troviamo quindi di fronte a una *famiglia di diffeomorfismi* di M , indicizzati dal parametro reale t , che è chiusa rispetto alla composizione di mappe e contiene la mappa identità Id_M ; ogni mappa della famiglia, inoltre, ha l’inversa appartenente alla stessa famiglia, poiché da (2.4.8) si ottiene subito $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. In altri termini, si tratta di un **gruppo a un parametro di diffeomorfismi** di M in sé. Il gruppo è commutativo, poiché da (2.4.8) segue anche che $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t$. Tale gruppo si chiama **flusso** del campo vettoriale X .⁸

Dato un campo vettoriale X , per ottenere l’espressione generale del flusso φ_t in coordinate dobbiamo trovare l’integrale generale del sistema di equazioni differenziali (2.4.5). Viceversa, se conosciamo un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M in sé, possiamo ricavare il campo X di cui tale gruppo rappresenta il flusso, mediante una semplice operazione di derivazione. Il campo X , infatti, deve coincidere in ciascun punto p di coordinate q_0^μ con il vettore tangente alla curva integrale basata in quel punto, $\gamma : t \mapsto \varphi_t(p)$, ossia

⁸In italiano, il termine “flusso di un campo vettoriale” può riferirsi a due nozioni completamente diverse: una è quella che abbiamo descritto, l’altra è l’integrale del campo vettoriale attraverso una superficie bidimensionale. In inglese si usano due termini diversi: **flow** per il primo significato e **flux** per l’altro. In italiano, si deve ricavare dal contesto a quale dei due significati di “flusso” ci si riferisca. In questo corso considereremo sempre il primo significato.

$$X = X^\lambda(q_0^\mu) \frac{\partial}{\partial q^\lambda} = \frac{d}{dt} q^\lambda(t; q_0^\mu) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \quad (2.4.9)$$

Definizione 16. Il campo X definito da (2.4.9) è detto **generatore infinitesimo del flusso**.

2.4.5 Campi vettoriali come operatori di derivazione; integrali primi

Un vettore tangente, come abbiamo visto, associa a ciascuna funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ un numero: il valore della corrispondente derivata direzionale di f in quel punto. Un campo vettoriale X , pertanto, associa alla funzione f una nuova funzione su M , che denotiamo con $X(f)$.

(Questa notazione può apparire ambigua: se p è un punto di M , $X(p)$ denota il valore del campo X nel punto p . Siccome però non si dà mai il caso in cui non è chiaro se l'oggetto fra parentesi sia un punto o una funzione, non c'è necessità di inventare una notazione alternativa.)

Per quanto già visto, vale l'identità $X(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t) \Big|_{t=0}$.

Le funzioni che hanno ovunque derivata direzionale nulla, $X(f) = 0$, sono tutte e sole le funzioni tali che $f \circ \varphi_t$ è una funzione costante. Queste funzioni sono dette **integrali primi** o **costanti del moto** del campo vettoriale X , o anche **funzioni invarianti** per il flusso φ_t .

Tutte le funzioni identicamente costanti sono ovviamente invarianti sotto qualunque flusso: quando scriviamo “integrali primi” (non banali) intendiamo le funzioni *non costanti* tali che $X(f) = 0$.

Le costanti del moto esistono sempre localmente, ma possono non esistere globalmente.

Proposizione 17 (teorema del flow box). *Sia X un campo vettoriale su M e $p \in M$ un punto non critico, $X(p) \neq 0$. In un intorno di p esiste un sistema di coordinate Q^λ per cui $X = \frac{\partial}{\partial Q^1}$*

In un tale sistema di coordinate, le curve integrali del campo X sono esattamente le curve integrali per la prima coordinata,

$$\begin{cases} Q^1(t) = Q_0^1 + t, \\ Q^\lambda(t) = Q_0^\lambda \quad \lambda = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.4.10)$$

mentre le restanti $n - 1$ coordinate Q^2, \dots, Q^n sono costanti del moto indipendenti fra loro. Ogni altra funzione $f(Q^2, \dots, Q^n)$, che non dipenda da Q^1 , sarà parimenti una costante del moto.

Queste coordinate, e quindi le costanti del moto, in generale non possono essere estese a tutto M . Per capire perché, consideriamo l'esempio in cui $M = T^2$ (toro bidimensionale), le coordinate sono due angoli θ^1, θ^2 , entrambi definiti sull'intervallo $(-\pi, \pi)$, e il campo vettoriale è $X = \frac{\partial}{\partial \theta^1} + a \frac{\partial}{\partial \theta^2}$. Le curve integrali sono eliche sul toro:

$$\begin{cases} \theta^1(t) = t + \theta_0^1, \\ \theta^2(t) = at + \theta_0^2, \end{cases} \quad (2.4.11)$$

se a è un razionale, dopo un tempo finito T la traiettoria si chiude e il moto è periodico. Se invece a è irrazionale, la traiettoria non si chiude mai e riempie densamente la superficie del toro (è l'esempio che abbiamo già incontrato). In questo caso, non possono esistere costanti del moto globali non banali: infatti ogni integrale primo f è necessariamente costante su ciascuna traiettoria. Se una traiettoria riempie densamente M , f deve essere una funzione continua costante su un insieme denso, e pertanto deve essere costante su tutto M .

Il teorema del *flow box* ci dice che intorno ai punti non critici le EDO associate a un campo vettoriale possono sempre essere messe in una forma che è immediatamente integrabile. Tuttavia, dato un campo X generico, per ricavare il cambiamento di coordinate che mette X nella forma indicata dal teorema dobbiamo precisamente conoscere la soluzione generale del sistema di EDO associato a X : quindi il teorema non fornisce un metodo per trovare le curve integrali.

2.4.6 Commutatore di campi vettoriali

In quanto mappe dall'anello delle funzioni su M in sé, due campi vettoriali X e Y possono essere composti fra loro, ma la loro composizione non è più un campo vettoriale. Per un campo vettoriale X , infatti, deve valere la regola di Leibniz $X(fg) = fX(g) + gX(f)$, ed è immediato vedere che questo non avviene per la composizione di due campi vettoriali, $XY(f) = X(Y(f))$, che agisce su una funzione come operatore differenziale di secondo ordine. Se però consideriamo il *commutatore di due campi vettoriali*, possiamo vedere che questo identifica un campo vettoriale:

$$\begin{aligned} X(Y(f)) - Y(X(f)) &= X^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \left(Y^\mu \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \right) - Y^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\lambda} \left(X^\mu \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \right) = \\ &= \left(X^\lambda \frac{\partial Y^\mu}{\partial q^\lambda} - Y^\lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\lambda} \right) \frac{\partial f}{\partial q^\mu} + X^\lambda Y^\mu \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^\lambda \partial q^\mu} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^\mu \partial q^\lambda} \right) \end{aligned}$$

poiché i termini con le derivate seconde di f si cancellano fra loro grazie al teorema di Schwarz, si ottiene

$$[X, Y] = \left(X^\lambda \frac{\partial Y^\mu}{\partial q^\lambda} - Y^\lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial q^\mu}. \quad (2.4.12)$$

Proposizione 18. *Il commutatore di campi vettoriali su M , definito da*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

gode delle seguenti proprietà:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisimmetria)
2. $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ (bilinearità)
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identità di Jacobi)

Proposizione 19. *Due flussi φ_t e ϕ_s , rispettivamente generati dai campi vettoriali X e Y , commutano fra loro (ossia $\varphi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \varphi_t \forall s, t$) se e solo se $[X, Y] = 0$.*

L'ultima proposizione ha un'interessante conseguenza: se $[X, Y] = 0$, allora il flusso φ_t generato da X trasporta ogni curva integrale di Y in un'altra curva integrale di Y , e viceversa. Infatti, si consideri la curva integrale di Y basata in un punto p_0 , $p(t; p_0) = \phi_t(p_0)$. Spostiamo p_0 lungo il flusso di X fino a un certo valore s del parametro: $p_1 = \varphi_s(p_0)$. La curva integrale di Y che parte da p_1 è $p(t; p_1) = \phi_t(p_1) = \phi_t \circ \varphi_s(p_0)$. Se i due flussi commutano, la stessa curva integrale si può scrivere $p(t; p_1) = \varphi_s \circ \phi_t(p_0)$ e quindi coincide con l'immagine della curva integrale $\phi_t(p_0)$ sotto il diffeomorfismo φ_s .

La definizione di commutatore consente anche di formulare la seguente generalizzazione del teorema del *flow box*:

Proposizione 20. *Siano dati k campi vettoriali indipendenti $X_{(1)}, \dots, X_{(k)}$ su M , con $1 < k \leq \dim(M)$; se tali campi commutano tutti fra loro, $[X_{(i)}, X_{(j)}] = 0$, allora esiste un sistema di coordinate locali Q^λ per cui $X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial Q^i}$.*

Il fatto che la commutatività dei campi $X_{(i)}$ sia una condizione necessaria è immediato, perché due operatori di derivata parziale commutano sempre fra loro (il solito teorema di Schwarz); che la condizione di commutatività sia anche sufficiente, invece, deriva da un teorema più generale detto *teorema di Frobenius locale*.

2.4.7 Geometria globale dei campi vettoriali

Abbiamo già incontrato delle proprietà che distinguono il comportamento locale dei campi vettoriali (e dei loro flussi) dal comportamento globale: localmente, in un intorno di ciascun punto che non sia un punto critico, ogni flusso è “rettificabile” (teorema del *flow box*) e ammette $n - 1$ costanti del moto. Come si è visto dall'esempio dell'elica sul toro, un campo vettoriale in generale non è *globalmente* rettificabile e possono non esistere integrali primi globali. L'esistenza globale di integrali primi ha un preciso significato geometrico, che ora discuteremo.

Definizione 17. *Un sottoinsieme $A \subset M$ è **invariante** per un flusso φ_t se $\varphi_t(A) \subseteq A \forall t \in \mathbb{R}$.*

Proposizione 21. *Si supponga che $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione globalmente definita e sia un integrale primo per il campo vettoriale X . Allora per ogni valore $c \in \mathbb{R}$ appartenente all'immagine di f , l'**insieme di livello** $f^{-1}(c)$ è invariante per il flusso generato da X .*

La proposizione discende dal fatto che se il valore di f deve rimanere costante ciascuna curva integrale, allora la traiettoria di ogni curva integrale deve giacere interamente in un insieme di livello di f . Il teorema del valore regolare ci dice che l'insieme di livello corrispondente a un valore regolare è una sottovarietà, topologicamente immersa in M , di dimensione $n - 1$.

Se esistono k integrali primi globali, allora essi definiscono complessivamente una mappa da F in \mathbb{R}^k . Gli insiemi di livello di questa mappa, che sono *intersezioni* di insiemi di livello dei singoli integrali primi, sono sottoinsiemi invarianti sotto il flusso. Per ciascun valore regolare, l'insieme di livello è una sottovarietà topologicamente immersa di dimensione $n - k$. Il teorema di Sard ci dice che per una mappa differenziabile i valori regolari sono “quasi tutti”.

Il fatto che un campo vettoriale ammetta k **integrali primi globali**, quindi, è equivalente al fatto che la varietà M ammetta una partizione in insiemi (di livello) invarianti che sono genericamente di dimensione $n-k$. Se anche solo una delle curve integrali riempie densamente una sottovarietà (topologicamente immersa) di dimensione $s \leq n$, quindi, non possono esistere più di $n-s$ integrali primi globali.

Un altro aspetto globale del comportamento dei campi vettoriali riguarda l'esistenza dei *punti critici*, ossia dei punti $p^* \in M$ in cui il campo vettoriale si annulla, $X(p^*) = 0$.

Su ogni fibrato tangente è sempre possibile costruire il campo vettoriale che è ovunque nullo: questo definisce la **sezione nulla** del fibrato tangente. Si può dimostrare facilmente che l'immagine della sezione nulla è una copia, diffeomorfa, della varietà di base M del fibrato. Più in generale, l'immagine di qualunque sezione del fibrato tangente – ossia di ogni campo vettoriale – è una sottovarietà n -dimensionale del fibrato tangente (omotopa alla sezione nulla). I punti critici di un campo vettoriale X sono tutte e sole le intersezioni fra la sezione definita da X e la sezione nulla. Il fatto che una generica sezione possa non intersecare mai la sezione nulla dipende dalla topologia globale di quello specifico fibrato tangente. Se il fibrato TM è *globalmente banale*, cioè $TM \equiv M \times \mathbb{R}^n$, allora è sempre possibile scegliere un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^k$ e costruire una sezione di TM assegnando a ciascun punto il vettore v . Questa sezione, ovviamente, non interseca mai la sezione nulla: non ci sono punti critici. Viceversa, si può dimostrare che su alcune varietà – ad esempio, sulla sfera bidimensionale S^2 – non possono esistere campi vettoriali che non si annullino in alcun punto. Ne consegue che TS^2 non è globalmente diffeomorfo al prodotto $S^2 \times \mathbb{R}^2$.

2.4.8 Il fibrato tangente come “spazio delle velocità”

Fin qui, abbiamo visto il fibrato tangente TM come l'insieme dei vettori tangenti a M , e le sezioni di TM come campi vettoriali che generano flussi di trasformazioni di M . Ogni campo vettoriale su M corrisponde a un sistema di equazioni differenziali ordinarie (EDO) autonome del primo ordine, le cui soluzioni sono le curve integrali.

Se in \mathbb{R}^n abbiamo su un sistema di EDO del secondo ordine, in forma normale, allora è noto che esso può essere trasformato in un sistema del primo ordine raddoppiando il numero di variabili: il sistema

$$\ddot{x}^i = F^i(x^j, \dot{x}^j) \quad (2.4.13)$$

diventa

$$\begin{cases} \dot{x}^i = u^i \\ \dot{u}^i = F^i(x^j, u^j) \end{cases} \quad (2.4.14)$$

A questo, che a prima vista sembra semplicemente un “trucco” per ricondursi a un sistema del primo ordine, possiamo ora dare un preciso significato geometrico.

Proposizione 22. *Su una varietà M , un'equazione differenziale del secondo ordine, autonoma e in forma normale, rappresentata in coordinate da*

$$\ddot{q}^\lambda = F^\lambda(q^\mu, \dot{q}^\mu), \quad (2.4.15)$$

definisce su TM il campo vettoriale $u^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\lambda} + F^\lambda(x^j, \dot{x}^j) \frac{\partial}{\partial u^\lambda}$, corrispondente alle equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{q}^\lambda = u^\lambda \\ \dot{u}^\lambda = F^\lambda(q^\mu, u^\mu) \end{cases} \quad (2.4.16)$$

In altri termini:

- un sistema di EDO autonome *del primo ordine* (campo di velocità) corrisponde a un campo vettoriale su M , ossia a una sezione di TM ;
- un sistema di EDO autonome *del secondo ordine* (campo di accelerazioni) corrisponde a un campo vettoriale sul fibrato tangente TM , ossia a una una sezione di $T(TM)$.

Non tutti i campi vettoriali su TM corrispondono a equazioni del secondo ordine su M : il sistema (2.4.16), per qualunque F e quali che siano le coordinate usate, contiene sempre n equazioni della forma $\dot{q}^\lambda = u^\lambda$. Queste equazioni hanno un significato geometrico preciso:

Definizione 18. Data una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, ad essa è associata la curva $\dot{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow TM$, detta **rilevamento tangente** di γ , che a ciascun valore di t associa il vettore tangente a γ in $\gamma(t)$. In coordinate, se $\dot{\gamma} : t \mapsto q^\lambda(t)$,

$$\dot{\gamma} : t \mapsto (q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t)) \quad (2.4.17)$$

Una generica curva su TM , in coordinate, è rappresentata da $2n$ funzioni $(q^\lambda(t), u^\lambda(t))$; le curve che sono *rilevamenti tangenti* di curve su M sono caratterizzate dall'equazione $u^\lambda(t) = \dot{q}^\lambda(t)$. I campi vettoriali su TM che corrispondono ad EDO del secondo ordine su M sono tutti e soli quelli per i quali le curve integrali in TM sono tutte rilevamenti tangenti di curve su M .

Poiché c'è una curva integrale per ciascun punto di TM , dato un punto $p \in M$ ci sono infinite curve proiettate in M , soluzioni del sistema (2.4.15), che passano quel punto: una per ciascuna velocità iniziale. In questo caso, a non potersi mai intersecare sono le traiettorie in TM , non quelle in M .

Consideriamo ora il caso particolare di un sistema di EDO del secondo ordine su M che non dipenda dalle velocità:

$$\ddot{q}^\lambda = F^\lambda(q^\mu). \quad (2.4.18)$$

Una tipica situazione (fisica) in cui incontriamo un sistema di questo tipo è quella di un campo di *forze posizionali* in \mathbb{R}^3 che agisce su un punto materiale di massa unitaria: l'equazione, in coordinate cartesiane, è $\ddot{x}^i = F^i(x^j)$. In questo caso, le tre funzioni F^1, F^2, F^3 sono interpretate come componenti della forza, vista come un campo vettoriale assegnato su \mathbb{R}^3 .

Tuttavia, chiediamoci se effettivamente i due membri della (2.4.18) si trasformano come le componenti di un vettore tangente, quando facciamo un generico cambiamento di coordinate $x^i = x^i(q^j)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j \\ \ddot{x}^i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j \right) = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k, \end{aligned}$$

e quindi non è possibile che nelle nuove coordinate la stessa equazione abbia ancora la forma $\ddot{q}^i = G^i(q^j)$, con $F^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} G^j$. Questo avviene solo se il cambiamento di coordinate è lineare, perché in quel caso la matrice delle derivate seconde $\frac{\partial^2 x^i}{\partial q^j \partial q^k}$ è identicamente nulla.

In generale, un campo di accelerazioni dovrà essere rappresentato da equazioni della forma

$$\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = F^\lambda, \quad (2.4.19)$$

in cui le funzioni $F^\lambda(q^\rho)$, per un cambiamento di coordinate $q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu)$, si trasformano come le componenti di un vettore,

$$F^\lambda \mapsto \hat{F}^\lambda = \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\sigma} F^\sigma,$$

e i coefficienti $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(q^\rho)$ si trasformano nel modo seguente:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \mapsto \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial q^\alpha}{\partial Q^\mu} \frac{\partial q^\beta}{\partial Q^\nu} \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial Q^\mu \partial Q^\nu}. \quad (2.4.20)$$

In questo modo, nelle nuove coordinate, l'equazione (2.4.19) diventa

$$\ddot{Q}^\lambda + \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \dot{Q}^\mu \dot{Q}^\nu = \hat{F}^\lambda. \quad (2.4.21)$$

I *simboli di Christoffel*, definiti come funzioni delle derivate della prima forma fondamentale su una superficie immersa nello spazio euclideo, hanno esattamente la legge di trasformazione (2.4.20). L'espressione a primo membro della (2.4.19), lineare nelle derivate seconde \ddot{q}^λ e quadratica nelle derivate prime \dot{q}^λ delle componenti della curva, è detta **accelerazione covariante**.

È possibile che in alcuni sistemi di coordinate i coefficienti $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ risultino tutti nulli, come avviene ad esempio per i simboli di Christoffel per il piano euclideo in coordinate cartesiane; ma – anche in questo caso – se si fa un cambiamento non lineare di coordinate il termine quadratico dell'accelerazione ricompare.

2.5 Il fibrato cotangente

Per ciascuno spazio tangente $T_x M$, $x \in M$,⁹ è possibile costruire lo spazio duale, $(T_x M)^*$, denotato con $T_x^* M$. Questo è detto **spazio cotangente** a M in x . Gli elementi di ciascuno spazio cotangente sono covettori, ossia forme lineari su $T_x M$.

Ancorché il significato geometrico dei covettori, e degli spazi cotangenti, sia meno intuitivamente evidente rispetto ai vettori tangenti, in realtà esso si rivela se si considera la dualità (a livello “infinitesimo”) che esiste fra le curve, ossia le mappe da \mathbb{R} in M , e le funzioni $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Data una curva passante per un punto x , possiamo associare a ciascuna funzione un numero reale: la derivata di f lungo la curva, nel punto x . Come abbiamo visto, il valore della derivata è lo stesso per tutte le curve che appartengono a una data classe di equivalenza, e abbiamo identificato quest'ultima come **vettore tangente**.

⁹In questa sezione useremo la lettera x per denotare un generico punto di M , perché la lettera p ci serve per altro.

Inversamente, data una funzione f possiamo associare ad ogni vettore tangente in x un numero reale: la derivata di f lungo il vettore. Questa applicazione è lineare, e dipende solo dalle derivate parziali di f nel punto x : se due funzioni hanno le medesime derivate parziali in x , allora l'operazione fornisce lo stesso numero per il vettore considerato.

In componenti, dato il vettore tangente $X = X^\lambda \frac{\partial}{\partial q^\lambda}$ e la funzione f , abbiamo

$$X(f) = X^\lambda \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} \Big|_x \in \mathbb{R} \quad (2.5.1)$$

L'idea è di vedere questo numero non come risultato dell'applicazione dell'operatore X alla funzione f , ma come l'applicazione a X di un operatore lineare definito da f .

Anche in questo caso, quindi, per ciascun punto x possiamo individuare una *classe di equivalenza di funzioni*, definita dal fatto che in un dato sistema di coordinate due funzioni sono equivalenti se e solo se hanno le stesse derivate parziali in x (da notare che le due funzioni possono anche non avere lo stesso valore in x). La classe di equivalenza di una funzione è quindi individuata dal suo *differenziale* $df(x)$. Il differenziale in x non è altro che la mappa tangente di f , $Tf : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$: la mappa tangente è una mappa lineare che, in questo caso, associa a ciascun vettore di $T_x M$ un numero reale.¹⁰

Un differenziale, quindi, è allo stesso tempo una classe di equivalenza di funzioni in un punto x e una forma lineare su $T_x M$, ossia un elemento di $T_x^* M$. La relazione di “dualità infinitesima” in x fra curve e funzioni è quindi espressa dalla relazione

$$\langle df, X \rangle_x = X^\lambda \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} \Big|_x \quad (2.5.2)$$

In particolare, consideriamo le funzioni coordinate, q^λ :

poiché si ha $\langle dq^\lambda, \frac{\partial}{\partial q^\mu} \rangle = \frac{\partial q^\lambda}{\partial q^\mu} = \delta_\mu^\lambda$, i differenziali dq^λ delle coordinate formano la base di $T_x^* M$ duale alla base naturale su TM .

Un generico covettore α nel punto x si scriverà quindi come combinazione lineare dei differenziali delle coordinate. Chiamiamo p_λ le componenti relative alla base duale così definita (così come nello spazio tangente abbiamo chiamato u^λ le componenti di un generico elemento):

$$\alpha = p_\lambda dq^\lambda, \quad (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \quad (2.5.3)$$

A questo punto, analogamente a quanto abbiamo fatto per la collezione degli spazi tangenti, definiamo la varietà costituita dall'unione di tutti gli spazi cotangenti:

¹⁰Stiamo usando il fatto che lo spazio tangente a \mathbb{R} in ciascun punto è ancora \mathbb{R} .

$T^*M \equiv \bigcup_{x \in M} T_x^*M$ è una varietà differenziabile di dimensione $2n$, detta **fibrato cotangente**. Su T^*M è definita la **proiezione** $\pi : T^*M \rightarrow M$ che manda ciascun covettore appartenente a T_x^*M nel suo punto di applicazione x .

A ogni carta su M , con dominio \mathcal{U} e coordinate q^μ , è associata una carta su $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ con **coordinate naturali** (q^μ, p_μ) , dove le p_μ sono le coordinate cartesiane in ciascuno spazio cotangente relative alla **base naturale** dq^μ .

Le funzioni di transizione fra le carte così definite sono date da

$$\begin{cases} q^\mu = q^\mu(Q^\lambda) \\ p_\mu = \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\mu} P_\lambda, \end{cases} \quad (2.5.4)$$

dove $\frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\mu}$ sono gli elementi dell'inversa della jacobiana della funzione di transizione su M .

Le funzioni di transizione si ottengono dalla relazione fra i differenziali dei due insiemi di coordinate, data dalla solita regola di derivazione delle funzioni composte,

$$dq^\lambda = \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\mu} dQ^\mu, \quad (2.5.5)$$

ricordando che, per il teorema della funzione inversa, la matrice jacobiana della mappa $q^\mu = q^\mu(Q^\lambda)$ e la jacobiana della mappa inversa $Q^\lambda = Q^\lambda(q^\mu)$ sono l'una l'inversa dell'altra. È facile verificare che queste funzioni di transizione soddisfano i requisiti che rendono le due carte compatibili.

Una **sezione** del fibrato cotangente è detta **campo di covettori** o **1-forma differenziale** su M . L'espressione in coordinate di una 1-forma differenziale sarà quindi

$$\alpha = p_\mu(q^\lambda) dq^\mu.$$

In particolare, data una funzione f il suo **differenziale** è la sezione

$$df = \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} dq^\lambda.$$

Data una 1-forma differenziale α , essa coincide con il differenziale di una funzione f se per le sue componenti vale l'identità $p_\mu = \frac{\partial f}{\partial q^\mu}$. In conseguenza del teorema di Schwarz, condizione

necessaria affinché questo sia possibile è che $\frac{\partial p_\mu}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial p_\lambda}{\partial q^\mu} \quad \forall \lambda, \mu$.

2.6 Campi tensoriali su varietà; varietà riemanniane

Su ciascuno spazio tangente $T_x M$ è possibile assegnare un tensore di rango (r, s) . Se le componenti del tensore relative alle basi naturali sono funzioni differenziabili delle coordinate¹¹, allora si ha un **campo tensoriale** di rango (r, s) su M .

Ad esempio, si può assegnare su M una forma bilineare – cioè un tensore di rango $(2, 0)$ – simmetrica e definita positiva: in questo modo si introduce un **prodotto scalare euclideo** su ciascuno spazio tangente; in genere un tale **tensore metrico** (anche detto **metrica**) è denotato con la lettera \mathbf{g} . In ciascuna carta, le componenti del tensore sono quelle relative alla base naturale $dq^\mu \otimes dq^\nu$:

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu}(q^\lambda) dq^\mu \otimes dq^\nu; \quad \mathbf{g}(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$$

dove X e Y sono due **campi vettoriali** su M , e $\mathbf{g}(X, Y)$ è una **funzione** su M . La matrice delle componenti deve essere simmetrica, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, e definita positiva in tutti i punti di M . In relazione al tensore metrico \mathbf{g} , le coordinate q^λ sono dette **ortonormali** se su tutto il dominio della carta si ha

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu}, \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) = 0 \quad \text{per} \quad \mu \neq \nu$$

e sono dette **ortonormali** se in aggiunta

$$g_{\mu\mu} = 1 \quad \text{per} \quad \mu = \nu$$

Una varietà M dotata di un tensore metrico (euclideo) \mathbf{g} costituisce una **varietà riemanniana** (M, \mathbf{g}) . La struttura riemanniana permette di definire il **modulo** (o **norma**) di un vettore tangente,

$$\|X\| = \sqrt{\mathbf{g}(X, X)} = \sqrt{g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu}, \quad (2.6.1)$$

e l'**angolo** fra due vettori tangenti (nello stesso punto),

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{g}(X, Y)}{\|X\| \|Y\|} \right) \quad (2.6.2)$$

La matrice inversa del tensore metrico si denota con la stessa lettera, ma con gli indici in alto (questa convenzione vale *solo* per un tensore metrico):

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu.$$

La metrica inversa definisce un prodotto scalare fra covettori.

Dal tensore metrico \mathbf{g} si può ottenere la **connessione di Levi-Civita**, le cui componenti sono i **simboli di Christoffel**

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\rho} \right), \quad (2.6.3)$$

che abbiamo già visto comparire nella definizione di accelerazione tangente a una superficie, e che più in generale permette di definire un'**accelerazione covariante** (cfr. 2.4.19) su una varietà riemanniana di dimensione qualsiasi.

¹¹Come al solito, se questa proprietà è vera in una carta allora è vera in tutte le carte compatibili con essa.

Le curve tali che l'accelerazione covariante si annulla sono dette **curve geodetiche** della varietà riemanniana. Esse soddisfano il sistema di equazioni

$$\ddot{q}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu = 0 ; \quad (2.6.4)$$

le corrispondenti traiettorie sono dette **traiettorie geodetiche**.

Una connessione, più in generale, permette di definire la **derivata covariante** di un campo vettoriale X rispetto a un secondo vettore Y :

$$\nabla_Y X = \left(Y^\mu \frac{\partial X^\lambda}{\partial q^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda X^\mu Y^\nu \right) \frac{\partial}{\partial q^\lambda} ;$$

l'accelerazione covariante lungo una curva non è altro che la derivata covariante del vettore velocità lungo la curva stessa.

2.6.1 Legge di trasformazione delle componenti di un tensore

Per qualunque campo tensoriale T di rango (r, s) , la rappresentazione in coordinate ha la forma

$$T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(q^\mu) \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{i_s}} \otimes dq^{j_1} \otimes \dots \otimes dq^{j_r} .$$

Quando si passa da una carta all'altra, il cambiamento delle basi naturali è dato da

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} = \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial Q^\lambda}, \quad dq^\mu = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\lambda} dQ^\lambda$$

(questo spiega perché l'indice μ nell'operatore di derivata parziale $\frac{\partial}{\partial q^\mu}$ è un indice covariante, e come tale l'abbiamo trattato finora. Come dovrebbe essere ormai chiaro, per ogni valore dell'indice μ , $\frac{\partial}{\partial q^\mu}$ è un *vettore tangente*, mentre $\frac{\partial f}{\partial q^\mu}$ è una *componente* di un *covettore*, e precisamente di df).

Da qui si ricava che per ottenere le componenti di T nelle nuove coordinate Q^μ si deve applicare in ciascun punto la legge di trasformazione (2.0.15), con $\Lambda_\nu^\mu = \frac{\partial Q^\mu}{\partial q^\nu}$ e $(\Lambda^{-1})_\nu^\mu = \frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\nu}$.

Il fatto che la legge di trasformazione delle componenti di un tensore sia multilineare implica che

- se un tensore ha *tutte* le componenti nulle in un dato sistema di coordinate, allora esse sono nulle in *tutti* i sistemi di coordinate;
- la connessione di Levi-Civita, le cui componenti si trasformano secondo una legge *affine* (2.4.20) anziché lineare, non è un campo tensoriale. Se un tensore metrico g ammette coordinate ortonormali, in quelle coordinate le sue componenti sono costanti e quindi i simboli di Christoffel sono tutti nulli; ma passando a un sistema di coordinate non ortonormali (ad esempio le coordinate polari nel piano, che sono ortogonali ma non ortonormali) almeno alcuni dei simboli di Christoffel diventano non nulli.

- Poiché è possibile definire un campo tensoriale (il **tensore di curvatura di Riemann**) che dipende dai simboli di Christoffel e dalle loro derivate parziali prime rispetto alle coordinate, si ottiene una *condizione necessaria per l'esistenza di coordinate ortonormali*: il **tensore di Riemann deve essere nullo** (essendo un tensore, se è nullo in un sistema di coordinate lo è in tutti).

Data una mappa differenziabile fra due varietà, $F : A \rightarrow B$, se la varietà B è dotata di una struttura riemanniana g la mappa tangente TF permette di definire una forma bilineare simmetrica su A , detta *pull-back* di g e denotata con F^*g . Essa è definita in questo modo¹²: per ciascun punto $x \in A$ e per ogni coppia di vettori $u, v \in T_x A$,

$$(F^*g)|_x(u, v) = g|_{F(x)}(TF(u), TF(v))$$

Se q^λ sono coordinate su A , Q^i sono coordinate su B e $F : q^\lambda \mapsto Q^i = Q^i(q^\lambda)$, allora si ha

$$(F^*g)_{\mu\nu} = \frac{\partial Q^i}{\partial q^\mu} \frac{\partial Q^j}{\partial q^\nu} g_{ij} . \quad (2.6.5)$$

Se la mappa F è iniettiva, allora anche la forma *pull-back* F^*g è non degenere (e definita positiva), e quindi definisce una struttura riemanniana su A . Il tensore F^*g è detto **metrica indotta** su A dall'immersione in B . La prima forma fondamentale di una superficie immersa nello spazio affine euclideo tridimensionale è un esempio di metrica indotta.

Se (A, g_A) e (B, g_B) sono due varietà riemanniane della stessa dimensione, un diffeomorfismo $\Phi : A \rightarrow B$ tale che $g_A = \Phi^*g_B$ è detto **isometria** .

Due varietà riemanniane della stessa dimensione possono non essere isometriche, neppure localmente: ad esempio, due sfere bidimensionali immerse in \mathbb{R}^3 , dotate della metrica indotta, non ammettono nessuna isometria locale se hanno raggi diversi, mentre sono globalmente isometriche se hanno lo stesso raggio.

2.6.2 Gradiente di una funzione

Un tensore metrico g definisce un isomorfismo fra ciascuno spazio tangente $T_x M$ e il suo duale $T_x^* M$. Grazie ad esso è possibile trasformare un campo di vettori in un campo di covettori, e viceversa. In particolare, se si prende il differenziale di una funzione e si usa l'applicazione diesis \sharp si ottiene un campo vettoriale, detto **gradiente** della funzione f :

$$\nabla f = df^\sharp = g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \quad (2.6.6)$$

In molti testi di Fisica il gradiente di f è definito come il vettore le cui componenti sono le derivate parziali della funzione f . In realtà, come abbiamo visto, l'oggetto che ha come componenti le derivate parziali della funzione è un covettore e non un vettore, ed è precisamente il *differenziale*.

¹²La definizione di *pull-back*, in realtà, si estende immediatamente a tutti i tensori di rango $(r, 0)$, ma questo lo riprenderemo in una sezione successiva.

La ragione per cui la distinzione fra gradiente e differenziale viene sovente sottaciuta è che quando si usano solo coordinate ortonormali la matrice che rappresenta la metrica g è la matrice identità, e i cambiamenti di base sono rappresentati da *matrici ortogonali*: queste ultime hanno la proprietà che la loro inversa coincide con la trasposta. In questo caso, se si rappresentano matricialmente tanto i vettori quanto i covettori con vettori colonna, le componenti di un vettore e quelle di un covettore si trasformano con la stessa matrice.

La distinzione fra oggetti con componenti covarianti e oggetti con componenti controvarianti diventa evidente, nei calcoli, allorché si usano coordinate non ortonormali. In Geometria Differenziale e in Meccanica si deve essere in grado di usare coordinate non ortonormali, perché non tutte le varietà riemanniane che si incontrano hanno curvatura nulla; e anche nelle varietà con curvatura nulla vi sono molti casi di problemi che non sono direttamente risolvibili in coordinate cartesiane ortonormali, ma lo diventano usando opportune coordinate non ortonormali.

Il prodotto scalare fra il gradiente di f e un vettore dato, d'altra parte, non è altro che la derivata direzionale della funzione, e il suo risultato non dipende dalla metrica:

$$\nabla f \cdot X = g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} \frac{\partial f}{\partial q^\lambda} X^\mu = \frac{\partial f}{\partial q^\mu} X^\mu = \langle df, X \rangle .$$

2.6.3 Lunghezza d'arco di una curva

In una varietà riemanniana (M, g) , per ciascuna curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ si può definire l'integrale

$$s(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu} dt \quad (2.6.7)$$

il cui valore è detto **lunghezza d'arco** lungo la curva γ fra i punti $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$. Se si cambia la parametrizzazione delle curva, la lunghezza d'arco fra due punti dati non cambia: pertanto la lunghezza d'arco è una proprietà della traiettoria. La funzione integranda, $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu}$, è il modulo del vettore tangente a γ ed è detta **velocità scalare**.

Dimostreremo più avanti che fra tutte le traiettorie che congiungono due punti fissati a e b di una varietà riemanniana (M, g) , le traiettorie su cui la lunghezza d'arco fra a e b è minima sono traiettorie geodetiche.

Come si vede, tutti questi concetti (prodotto scalare di vettori; modulo di un vettore; gradiente di una funzione; lunghezza d'arco; velocità scalare) richiedono l'introduzione di una struttura riemanniana e dipendono strettamente da essa. In Meccanica troviamo facilmente esempi di strutture riemanniane diverse (non isometriche fra loro) definite su una stessa varietà.

2.7 Forme differenziali e algebra esterna

Il matematico francese Élie Cartan (1869-1951) si pose l'obiettivo di costruire una teoria dei sistemi di equazioni differenziali che fosse indipendente dalle coordinate scelte. Nel calcolo differenziale esterno di Cartan gli operatori del calcolo differenziale in più variabili (gradiente, divergenza, rotore) e le proprietà che li connettono con il calcolo integrale risultano unificati in un singolo concetto, quello di differenziale esterno. Questo linguaggio è anche quello più naturale per la formulazione di molte leggi fisiche, dalla meccanica hamiltoniana alla teoria dell'elettromagnetismo.

Definizione 19. Una *p-forma differenziale* su una varietà M , con $p \in \mathbb{N}$, è un campo tensoriale Ω di rango $(p, 0)$ completamente antisimmetrico, ossia tale che, scambiando due qualsiasi argomenti, il risultato cambia di segno:

$$\Omega(\dots, X, \dots, Y, \dots) = -\Omega(\dots, Y, \dots, X, \dots)$$

l'intero p è detto **grado** della forma differenziale.

Per definizione, in particolare,

- le 0-forme differenziali sono le funzioni $f : M \rightarrow \mathbb{R}$;
- le 1-forme, come abbiamo già visto, sono i campi di covettori, ossia le sezioni di T^*M ;
- le 2-forme sono i campi tensoriali di rango $(2, 0)$ antisimmetrici.

Introduciamo il **prodotto esterno** di due 1-forme come prodotto tensoriale antisimmetrizzato¹³:

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \quad (2.7.1)$$

Una generica 2-forma è, punto per punto, una combinazione lineare degli $\frac{n(n-1)}{2}$ prodotti esterni dei differenziali delle coordinate locali su M :

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} dq^\mu \wedge dq^\nu. \quad (2.7.2)$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ nell'espressione (2.7.2) merita una spiegazione approfondita. Sappiamo che la 2-forma ω , essendo un tensore di rango $(2, 0)$, ha l'espressione in componenti

$$\omega = \omega_{\mu\nu} dq^\mu \otimes dq^\nu :$$

dalla definizione (2.7.1), osservando che ω è per ipotesi antisimmetrica, quindi $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, si ricava direttamente la (2.7.2). Quello che è importante osservare, tuttavia, è che la componente (μ, ν) della forma nel generico sistema di coordinate q^λ è comunque $\omega_{\mu\nu}$, non $\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}$. Questo

¹³Da qui in avanti, poiché non dovrebbero esserci più rischi di confondere un tensore con le sue componenti, per semplicità – e per uniformarci alle notazioni usuali nei testi – denoteremo un tensore e le sue componenti con la stessa lettera, senza più usare il grassetto.

perché gli n^2 prodotti esterni $dq^\mu \wedge dq^\nu$ non formano una base delle 2-forme differenziali: n di questi prodotti, $dq^\mu \wedge dq^\mu$, sono identicamente nulli per antisimmetria, e per gli altri si ha $dq^\mu \wedge dq^\nu = -dq^\nu \wedge dq^\mu$. Quindi la base di elementi indipendenti è formata solo da $\frac{n(n-1)}{2}$ di questi prodotti esterni (ad esempio, da quelli in cui $\mu < \nu$). Il fattore $\frac{1}{2}$ in (2.7.2) deriva dal fatto che la sommatoria, secondo le convenzioni usuali, è estesa a tutti i valori degli indici μ e ν , da 1 a n . Quindi, in quella somma, ogni componente non nulla viene contata due volte.

Per rappresentare le p -forme, con $p > 2$, dobbiamo introdurre una definizione tecnica:

Definizione 20. Sia T un tensore di tipo $(p, 0)$: l'**operatore di antisimmetrizzazione** \mathcal{A} è definito come segue:

$$\mathcal{A}(T) = \frac{1}{p!} \sum_{g \in G_p} \varepsilon_g T \circ \sigma$$

dove G_p è il gruppo delle permutazioni di p elementi e ε_g è la segnatura della permutazione σ ($\varepsilon_g = 1$ se la permutazione è pari e $\varepsilon_g = -1$ se è dispari).

Ad esempio, se T è un tensore di rango $(3, 0)$ allora

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T)(X, Y, Z) = \\ \frac{1}{6} \left(T(X, Y, Z) + T(Y, Z, X) + T(Z, X, Y) - T(Y, X, Z) - T(X, Z, Y) - T(Z, Y, X) \right) \end{aligned}$$

In questo modo, ricordando la definizione generale di prodotto tensoriale (2.0.14), possiamo definire il prodotto esterno di due forme di grado qualsiasi:

Definizione 21. Il **prodotto esterno** fra una r -forma α e una s -forma β , con $r > 0$ e $s > 0$, è definito da

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta); \quad (2.7.3)$$

il prodotto esterno di una r -forma φ con una 0-forma f è il prodotto puntuale

$$f \wedge \varphi = \varphi \wedge f = f\varphi. \quad (2.7.4)$$

Il prodotto così definito è associativo, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \varphi = \alpha \wedge (\beta \wedge \varphi)$, e ha la proprietà

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha \quad (2.7.5)$$

La base naturale per le p -forme è data dall'insieme dei prodotti esterni *ordinati* di p :

Proposizione 23. Nel dominio di ciascuna carta, una p -forma ω è rappresentata da

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dq^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_p}, \quad (2.7.6)$$

dove le componenti $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}$ sono funzioni delle coordinate q^λ . Per il fattore $\frac{1}{p!}$ valgono le stesse considerazioni già fatte per la (2.7.2).

In ciascun punto, la base naturale delle p -forme è quindi data da tutti i prodotti esterni *ordinati* $dq^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dq^{\mu_p}$ (con $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$); gli elementi di tale base sono $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

A causa del requisito di antisimmetria, su una varietà di dimensione n non possono esistere forme differenziali non nulle di grado superiore a n .

2.7.1 Pull-back di forme differenziali

Siano A e B due varietà differenziabili, e sia $\Phi : A \rightarrow B$ una mappa differenziabile (non necessariamente invertibile). Qualsiasi p -forma β definita su B può essere “*trasportata all'indietro*” in una p -forma su A componendola con la mappa tangente $T\Phi$:

Definizione 22. Il *pull-back* $\Phi^*\beta$ è la forma differenziale su A definita, in ciascun punto $x \in A$ e per ogni p -upla di vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \in T_x A$, da

$$\Phi^*\beta|_x(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p) = \beta|_{\Phi(x)}(T\Phi(\mathbf{u}_1), \dots, T\Phi(\mathbf{u}_p)) \quad (2.7.7)$$

Se il grado p di β è maggiore della dimensione di A , il pull-back di β è la forma nulla.

Il pull-back ha le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \Phi^*(c\beta) &= c(\Phi^*\beta), \quad c \in \mathbb{R} \\ \Phi^*(\alpha + \beta) &= \Phi^*\alpha + \Phi^*\beta, \\ \Phi^*(\alpha \wedge \beta) &= \Phi^*\alpha \wedge \Phi^*\beta \end{aligned}$$

In ciascuna carta, se la mappa Φ è rappresentata da $Q^i = Q^i(q^\mu)$ il pull-back dei differenziali che definiscono la base naturale delle 1-forme non è altro che

$$\Phi^*dQ^i = \frac{\partial Q^i}{\partial q^\mu} dq^\mu$$

e per le componenti di una generica p -forma si ha

$$(\Phi^*\beta)_{\mu_1 \dots \mu_p} = \beta_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial Q^{i_1}}{\partial q^{\mu_1}} \dots \frac{\partial Q^{i_p}}{\partial q^{\mu_p}}$$

Ad esempio, se si considera una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, in coordinate $\gamma : t \mapsto q^\lambda = q^\lambda(t)$, si trova un'espressione che ci servirà spesso:

$$\gamma^*dq^\lambda = \frac{dq^\lambda}{dt} dt \quad (2.7.8)$$

Il pull-back di una funzione non è altro che la sua composizione con Φ :

$$\Phi^*f = f \circ \Phi.$$

Se $\Phi : A \rightarrow B$ è **invertibile** (ossia è un diffeomorfismo), allora si può trasportare “in avanti” su B una forma differenziale α definita su A , semplicemente facendo il pull-back con la mappa inversa. Questa operazione è detta **push forward**, ed è denotata con Φ_* :

$$\Phi_*\alpha = (\Phi^{-1})^*\alpha \quad (2.7.9)$$

2.7.2 Prodotto interno di forme e campi vettoriali; contrazione fra tensori

Quella che segue è una semplice notazione, che però risulta utile in molte formule:

Definizione 23. Sia ω una p -forma su M e sia X un campo vettoriale su M . il **prodotto interno** $i_X\omega$ è la $p-1$ forma che agisce nel modo seguente:

$$i_X\omega(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{p-1}). \quad (2.7.10)$$

Le componenti di $i_X\omega$ si ottengono per **contrazione** (sommatoria) sul primo indice con le componenti del campo X :

$$(i_X\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} = X^\lambda \omega_{\lambda \mu_1 \dots \mu_{p-1}}$$

Per una 1-forma θ si ha $i_X\theta = \langle \theta, X \rangle$, e in particolare $i_X df = \langle df, X \rangle = X(f)$.

Per ogni p -forma α e per ogni k -forma β si ha $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_X\beta$.

In molti testi in italiano si usa il termine “prodotto interno” anche per indicare il *prodotto scalare* di due vettori, che è un concetto del tutto diverso da questo. In inglese quest’ambiguità non c’è, perchè l’operazione descritta in questa sezione è detta **interior product**, mentre per il prodotto scalare si usa **inner product**.

Più in generale, la contrazione fra indici covarianti e controvarianti è un’operazione che si può fare per tensori di qualunque rango. Dato un tensore T di rango (r, s) , con $r > 0$, e un campo vettoriale X , si può fissare uno degli argomenti di T (non necessariamente il primo) ponendolo uguale X , e ottenere in questo modo un tensore di rango $(r-1, s)$. Le componenti di quest’ultimo si ottengono, per l’appunto, *contraendo* l’indice controvariante di X con un indice covariante di T : i due indici si pongono uguali, diventano indici muti e si ha una sommatoria sottointesa: ad esempio, $X^\lambda T_{\lambda \mu_2 \dots \mu_r}^{\nu_1 \dots \nu_s}$.

Abbiamo già incontrato un esempio di questo tipo, in cui il tensore, di rango $(2, 0)$, è un tensore metrico g : in quel caso, contraendo g con un campo fissato X si ottiene un tensore di rango $(1, 0)$ che non è altro che la 1-forma $X^\flat = g_{\mu\nu} X^\nu dq^\mu$.

Analogamente, è possibile contrarre un indice controvariante di un tensore con l’indice covariante di una 1-forma, e così via. Il significato algebrico o geometrico dell’operazione dipende dal contesto. Una regola sempre valida, di cui lasciamo al lettore la facile dimostrazione, è la seguente:

la contrazione fra una coppia di indici simmetrici e una coppia di indici antisimmetrici produce un risultato uguale a zero.

Ad esempio, se $g^{\mu\nu}$ sono le componenti di un tensore simmetrico e $\omega_{\mu\nu}$ sono le componenti di una 2-forma, allora $g^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \equiv 0$.

La contrazione può avvenire anche fra un indice covariante e uno controvariante dello stesso tensore: in questo caso si ottiene un tensore di rango $(r - 1, s - 1)$. Nel caso di un tensore di rango $(1, 1)$, $M_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial q^\nu} \otimes dq^\nu$, la contrazione fra gli indici produce (in ciascun punto) il numero reale $M_\nu^\nu = M_1^1 + M_2^2 + \dots + M_n^n$ che non è altro che la **traccia** della matrice che rappresenta M . La traccia, essendo una funzione scalare, ha lo stesso valore in qualunque sistema di coordinate.

2.7.3 Il differenziale esterno

Introduciamo ora l'operatore più importante nell'algebra delle forme differenziali:

Definizione 24. *Il differenziale esterno (o derivata esterna, o semplicemente differenziale è l'operatore lineare che trasforma una p -forma α in una $(p+1)$ -forma $d\alpha$, univocamente definito dalle seguenti proprietà:*

1. *per ogni funzione (ossia 0-forma) f , df coincide con il differenziale già definito nella sezione 2.5;*
2. *per due forme di grado qualsiasi vale la **regola di Leibniz gradata***

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta ,$$

dove p è il grado di α ;

3. $d \circ d \equiv 0$;
4. *il differenziale commuta con la restrizione del dominio: $d(\alpha|_{\mathcal{U}}) = (d\alpha)|_{\mathcal{U}}$*

È possibile fornire un'espressione esplicita generale del differenziale per forme di grado qualunque, ma è piuttosto complicata e non la riporteremo qui. In coordinate, l'espressione del differenziale si ricava facilmente dalle proprietà sopra esposte. In particolare, nel seguito ci basterà sapere che

- se f è una funzione, allora $df = \frac{\partial f}{\partial q^\mu} dq^\mu$;
- se α è una 1-forma, $\alpha = \alpha_\mu dq^\mu$, allora $d\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q^\mu} \right) dq^\nu \wedge dq^\mu$.

Per esercizio, ricaviamo la seconda formula. Siccome $\alpha_\mu dq^\mu$ è una somma di prodotti fra una funzione (la coordinata α_μ) e una 1-forma (il differenziale dq^μ), la regola di Leibniz fornisce

$$d(\alpha_\mu dq^\mu) = d\alpha^\mu \wedge dq^\mu + \alpha^\mu \wedge d(dq^\mu) = \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial q^\nu} dq^\nu \wedge dq^\mu ;$$

ma le componenti della forma risultante *non sono* semplicemente le derivate parziali $\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial q^\nu}$, perché – diversamente da quanto abbiamo assunto in (2.7.2) per le componenti $\omega_{\mu\nu}$ – questi coefficienti,

in generale, non sono antisimmetrici. I coefficienti devono quindi essere antisimmetrizzati. Per convincersene, si possono fare i seguenti passaggi:

$$\frac{\partial \alpha^\mu}{\partial q^\nu} dq^\nu \wedge dq^\mu = \frac{\partial \alpha^\mu}{\partial q^\nu} (dq^\nu \otimes dq^\mu - dq^\mu \otimes dq^\nu) = \left(\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q^\mu} \right) dq^\nu \otimes dq^\mu,$$

da cui si ricava che le componenti della 2-forma $d\alpha$ sono date da $\left(\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial q^\mu} \right)$.

Una proprietà importante del differenziale è che commuta con il pull-back:

Proposizione 24. *Sia $\Phi : A \rightarrow B$ una mappa differenziabile, e sia β una p -forma definita sulla varietà B . Si ha sempre*

$$\Phi^* d\beta = d(\Phi^* \beta)$$

2.7.4 Forme chiuse e forme esatte

Definizione 25. *Una p -forma α si dice **chiusa** se $d\alpha = 0$; si dice **esatta** se $\alpha = d\varphi$, dove φ è una $(p-1)$ -forma.*

Poichè $d \circ d \equiv 0$, ogni forma esatta è chiusa. Quindi, $d\alpha = 0$ è **condizione necessaria** affinché α sia esatta.

Proposizione 25 (lemma di Poincaré). *Ogni p -forma chiusa α è **localmente esatta**: ossia, in un intorno \mathcal{U} di ciascun punto della varietà esiste una $(p-1)$ -forma φ tale che su tale intorno $\alpha = d\varphi$.*

È facile costruire esempi di forme chiuse che *non sono* globalmente esatte: bisogna però che la varietà non sia omeomorfa a \mathbb{R}^n (su \mathbb{R}^n , infatti, ogni forma chiusa è esatta). Ad esempio, si consideri il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, con le coordinate (θ, z) . Il differenziale $d\theta$ si estende a una 1-forma globale sul cilindro, che è ovviamente chiusa ma non è una forma esatta poiché θ non è una funzione globalmente definita.

Una conseguenza immediata di $d \circ d \equiv 0$ è che se $\beta = \alpha + d\phi$, allora $d\alpha = d\beta$. Per le 0-forme, questo corrisponde alla nota proprietà per cui due funzioni f e g hanno lo stesso differenziale se differiscono per una costante.

2.7.5 Derivata di Lie

Consideriamo un flusso di diffeomorfismi φ_t , generato da un campo vettoriale X .

Definizione 26. La *derivata di Lie* di una p -forma α lungo il flusso φ_t è definita da

$$L_X \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi_t^* \alpha - \alpha) \quad (2.7.11)$$

La derivata di Lie di una funzione f non è altro che la derivata direzionale. La derivata di Lie di una p -forma è ancora una p -forma, e valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} L_X \alpha &= d(i_X \alpha) + i_X d\alpha \quad (\text{"formula magica" di Cartan}) \\ L_X d\alpha &= dL_X \alpha \\ L_{[X,Y]} \alpha &= L_X L_Y \alpha - L_Y L_X \alpha \\ i_{[X,Y]} \alpha &= L_X i_Y \alpha - i_Y L_X \alpha \end{aligned}$$

Proposizione 26. Una forma α è *invariante* sotto il flusso φ_t generato dal campo X , ossia $\varphi_t^* \alpha = \alpha$, se e solo se $L_X \alpha = 0$.

Che l'annullarsi della derivata di Lie sia una condizione necessaria per l'invarianza è ovvio: quello che non è ovvio è che la condizione è anche sufficiente. Nel caso delle 0-forme si tratta della nota proprietà per cui una funzione differenziabile con derivata ovunque nulla è costante.

2.7.6 Forme differenziali su varietà riemanniane

Abbiamo già visto che su una varietà riemanniana (M, g) si può trasformare un campo scalare in una 1-forma, o viceversa, con l'isomorfismo $\flat : T_x M \rightarrow T_x^* M$ (di "abbassamento dell'indice") o con l'isomorfismo inverso, \sharp ("innalzamento dell'indice"), descritti alla fine della sezione 2.0.1. In particolare, se si prende il differenziale df di una funzione la sua immagine attraverso l'isomorfismo \sharp è il gradiente di f , $\nabla f = (df)^\sharp$.

A quale operazione sui campi vettoriali corrisponde, allora, il differenziale esterno di 1-forme? Per scoprirlo, dobbiamo introdurre dei nuovi concetti, legati alla struttura metrica g .

Definizione 27. Su una varietà riemanniana n -dimensionale (M, g) la **forma volume** associata alla metrica g è la n -forma ϖ rappresentata, in qualunque sistema di coordinate, da

$$\varpi = \sqrt{\det(g)} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$$

dove $\det(g)$ è il determinante della matrice delle componenti $g_{\mu\nu}$ della metrica nelle coordinate date.

NOTA: una n -forma, con $n = \dim(M)$, ha un unico coefficiente che tuttavia non è una funzione scalare, bensì una **densità scalare**: passando da una carta all'altra si trasforma, infatti, per moltiplicazione con il **determinante jacobiano** della trasformazione di coordinate. Il determinante di un tensore di rango $(2, 0)$, d'altra parte, risulta moltiplicato per il quadrato del determinante jacobiano, e pertanto l'espressione data sopra per ϖ è valida in tutti i sistemi di coordinate. Se esistono coordinate ortonormali, allora in quelle $\det(g) = 1$ e la forma volume ϖ coincide con l'elemento di volume standard $dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$.

Definizione 28. Un insieme v_1, \dots, v_n di n vettori tangenti a un punto $x \in M$ è **ortonormale e positivamente orientato** se $v_\mu \cdot v_\mu = 1$ per ogni μ , $v_\mu \cdot v_\nu = 0$ per ogni $\mu \neq \nu$ e $\varpi|_x(v_1, \dots, v_n) = 1$.

Definizione 29. Data una p -forma α su (M, g) , il suo **duale di Hodge** è la $(n-p)$ -forma $*\alpha$ tale che per ogni punto $x \in M$ e per ogni insieme ortonormale positivamente orientato di n vettori $v_1, \dots, v_n \in T_x M$ si ha

$$*\alpha|_x(v_{p+1}, \dots, v_n) = \alpha|_x(v_1, \dots, v_p).$$

La definizione della dualità di Hodge data qui sopra è un po' criptica, ma è quella più semplice da scrivere. Per fissare le idee, osserviamo che:

1. la dualità di Hodge è un *isomorfismo* fra lo spazio delle p forme e quello delle $(n-p)$ -forme¹⁴;
2. $**\alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha$;
3. $*1 = \varpi$;
4. se consideriamo il caso particolare $M \equiv \mathbb{R}^3$, con coordinate ortonormali x, y, z , allora $\varpi = dx \wedge dy \wedge dz$ e

$$*dx = dy \wedge dz, \quad *dy = dz \wedge dx, \quad *dz = dx \wedge dy.$$

A partire da un campo vettoriale X , si può costruire la 1-forma X^\flat e farne il duale di Hodge, che produce una $(n-1)$ -forma; di questa, fare il differenziale d ottenendo una n -forma, il cui duale di Hodge è una funzione, che non è altro che la **divergenza** del campo vettoriale X .

Se $n = 3$, inoltre, si può prendere direttamente il differenziale $d(X^\flat)$, che è una 2-forma, e fare il duale di Hodge di questa, che è nuovamente una 1-forma che si può ritrasformare in un vettore. Il risultato non è altro che il **rotore** del campo X . Riassumendo:

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\mu} = *d*X^\flat \text{ (in dimensione qualsiasi)} \quad \operatorname{rot} X = (*dX^\flat)^\sharp \text{ (in dimensione tre)}.$$

Si vede dunque che l'isomorfismo fra campi vettoriali e 1-forme, indotto dalla metrica, trasforma gli operatori del calcolo differenziale vettoriale (gradiente, divergenza, rotore) in diverse combinazioni dei due operatori di differenziale esterno e di dualità di Hodge. Da questo, in particolare, si deducono immediatamente le due note identità

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} X = *d**d*X^\flat \equiv 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{rot} \nabla f = *ddf \equiv 0$$

2.7.7 Integrazione delle forme differenziali

Una p -forma differenziale si può integrare su un dominio p -dimensionale. Definire in senso sufficientemente generale il concetto di "dominio di integrazione", però, è un po' laborioso,

Introduciamo alcune definizioni preliminari. Ricordiamo che il **supporto** di una funzione f è la chiusura (in senso topologico) dell'insieme dei punti x in cui $f(x) \neq 0$.

¹⁴in ciascun punto, le basi delle p forme e quelle delle $(n-p)$ forme hanno la stessa cardinalità, dato che $\binom{n}{p} \equiv \binom{n}{n-p}$

Definizione 30. Una *partizione dell'unità* subordinata al ricoprimento \mathcal{U}_α dell'atlante di una varietà M è un insieme di funzioni $f_\alpha : M \rightarrow [0, 1]$ tali che

1. il **supporto** di f_α è compatto e contenuto in \mathcal{U}_α ;
2. in ogni punto $x \in M$, la somma dei valori di tutte le funzioni f_α è sempre uguale a 1:

$$\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1.$$

Definizione 31. Un atlante su una varietà è detto **orientato** se ogni funzione di transizione $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ ha determinante jacobiano positivo. Le varietà che ammettono un atlante orientato sono dette **orientabili**.

Ora possiamo definire l'integrale di una n -forma $\Omega = \omega(q^\mu) dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$ su una varietà n -dimensionale orientabile. Il punto di partenza è che, attraverso una carta φ , si può trasportare l'operazione di integrazione in un dominio di \mathbb{R}^n , dove l'integrale diventa un integrale multiplo (secondo Riemann) della funzione che rappresenta la n -forma rispetto alle coordinate q^μ :

$$\int_{\mathcal{U}} \Omega = \int_{\varphi(\mathcal{U})} \omega(q^\mu) dq^1 \dots dq^n.$$

Domanda: dove sono finiti i prodotti esterni? Il prodotto esterno, per definizione, è antisimmetrico, mentre il teorema di Fubini assicura che il valore dell'integrale non dipende dall'ordine con cui sono successivamente integrate le diverse variabili. La contraddizione è solo apparente: come è noto, il valore di un integrale multiplo dipende anche dall'*orientazione* del dominio di integrazione. Quando si scambia l'ordine di due delle variabili di integrazione, si produce un'inversione dell'orientazione del dominio. Il teorema di Fubini vale precisamente per il fatto che quest'inversione di orientazione è compensata dal cambio di segno della funzione integranda, dovuto allo scambio di due differenziali. Questa è la ragione per cui in buona parte dei testi (non in tutti) gli autori omettono il segno di prodotto esterno fra i differenziali negli integrali multipli.

Cambiando coordinate il valore dell'integrale non cambia, perché il coefficiente ω si trasforma come una densità scalare, e inoltre stiamo supponendo che tutte le carte abbiano la medesima orientazione. Per poter definire l'integrale su tutta la varietà e non solo sul dominio di una singola carta, però, si deve far ricorso a una partizione dell'unità: il valore dell'integrale su M è dato dalla somma degli integrali di tutte le forme che si ottengono moltiplicando Ω per le funzioni f_α della partizione. Poiché ogni f_α ha supporto compatto contenuto nel dominio \mathcal{U}_α , ciascuno di questi integrali esiste e si può calcolare usando solo la carta $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$, poiché al di fuori del dominio di questa la funzione integranda è nulla:

$$\int_M \Omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)} f_\alpha \omega dq^1 \dots dq^n \quad \left(\sum_\alpha f_\alpha \equiv 1 \right).$$

A questo punto, anche definire l'integrale di una p -forma su una sottovarietà p -dimensionale di M non pone alcun problema. Tuttavia, è necessario poter estendere la definizione a domini che *non* sono delle sottovarietà. Capita spesso, infatti, di dover integrare su un dominio definito, ad esempio, da disequazioni anziché da equazioni.

Per ampliare la definizione dei possibili domini si può introdurre il concetto di **varietà differenziabile con bordo**; ma la definizione più generale è quella di **catena singolare**. Per i

nostri scopi descriveremo quest'ultimo concetto in termini intuitivi, senza dare tutte le definizioni formali.

Si introduce innanzitutto la nozione di *p-simplesso standard*, che è l'insieme convesso in \mathbb{R}^{p+1} generato dai $(p + 1)$ punti che hanno una coordinata uguale a 1 e le altre coordinate uguali a 0. Un *p-simplesso* è un insieme omeomorfo a un *p-simplesso standard*. Ad esempio:

- uno 0-simplesso è un singolo punto;
- un 1-simplesso è un segmento chiuso;
- un 2-simplesso è una regione bidimensionale delimitata da un triangolo;
- un 3-simplesso è una regione tridimensionale delimitata da un tetraedro, e così via.

Ogni simplexso contiene n_0 **vertici** (che sono 0-simplessi), n_1 **lati** (1-simplessi), n_2 **facce**, e così via; per un *p-simplesso*, $n_k = \binom{p+1}{k}$. Un *p-simplesso* è completamente rappresentato dall'elenco dei suoi $(p + 1)$ vertici: l'ordine in cui i vertici sono elencati corrisponde all'**orientazione** del simplexso. I lati del simplexso sono tutti i sottoinsiemi di due vertici, nello stesso ordine; le facce del simplexso sono i sottoinsiemi di tre vertici, e così via.

Ogni *p-simplesso* ha un **bordo**, che è la **somma formale** di tutti i $(p - 1)$ -simplessi che lo compongono. La differenza fra l'unione insiemistica e la somma formale è che quest'ultima è una combinazione lineare a coefficienti in \mathbb{Z}_2 , per tenere conto dell'orientamento. Ad esempio, il bordo di un 1-simplesso è la somma formale di due 0-simplessi, i suoi estremi. Nella somma formale, un estremo compare con il coefficiente 1 e l'altro con il coefficiente -1 , a seconda dell'orientamento del simplexso.

Più in generale, una *p-catena simpliciale* è una somma formale, a coefficienti interi, di *p-simplessi* orientati.

Data una *p-catena simpliciale* Θ , il suo bordo è denotato $\partial\Theta$ ed è a sua volta una $(p - 1)$ -catena. Per esempio, sia $A = [p_1, p_2, p_3]$ il triangolo che ha come vertici i punti p_1, p_2 e p_3 , e sia $B = [p_1, p_3, p_4]$. Il lato $[p_1, p_3]$ fa parte di entrambi i 2-simplessi; se si considera la somma formale $A + B$ quel lato compare una volta con il segno $+$ e l'altra volta con il segno $-$, quindi quando si individua il bordo della catena $A + B$ si trova la catena $[p_1, p_2] + [p_2, p_3] + [p_3, p_4] + [p_4, p_1]$. Se invece consideriamo la somma formale $A - B$, allora il bordo sarà dato dalla catena $[p_1, p_2] + [p_2, p_3] + 2[p_3, p_1] - [p_3, p_4] - [p_4, p_1]$.

Proprietà fondamentale dell'operatore di bordo ∂ : se $A = \partial B$, allora $\partial A = \emptyset$.

Nei due casi descritti nel paragrafo precedente, ad esempio, si trova che $\partial(A + B) = -p_1 + p_2 - p_2 + p_3 - p_3 + p_4 - p_4 + p_1 = \emptyset$ e $\partial(A - B) = -p_1 + p_2 - p_2 + p_3 - 2p_3 + 2p_1 + p_3 - p_4 + p_4 - p_1 = \emptyset$.

Ora siamo in grado di definire il più generale dominio di integrazione di una *p-forma*. Una *p-catena singolare* A è un sottoinsieme di una varietà M omeomorfo (non necessariamente diffeomorfo!) a una *p-catena simpliciale* in \mathbb{R}^n . La funzione che associa ad ogni punto di A un punto della catena simpliciale è detta **triangolazione** di A . Il bordo della catena singolare A è la controimmagine del bordo della catena simpliciale attraverso la triangolazione. Un dominio A triangolabile lo è in

infiniti modi diversi (a parte il caso $p = 0$), perché ogni p -simpleso può sempre essere decomposto in una p -catena, omeomorfa ad esso, che contiene più semplici. Ad esempio, un triangolo $[p_1, p_2, p_3]$ può essere decomposto in tre triangoli, aggiungendo un punto p_4 interno al triangolo dato (ad esempio, il baricentro del triangolo): $[p_1, p_2, p_3] \approx [p_1, p_2, p_4] + [p_3, p_2, p_4] + [p_3, p_1, p_4]$. Si verifica facilmente che per entrambe le triangolazioni il bordo resta il medesimo.

Possiamo dunque definire l'integrale di una p -forma su una p -catena singolare immersa in M , supponendo di utilizzare una triangolazione abbastanza fitta da far sì che ogni p -simpleso che la compone sia contenuto nel supporto di una funzione p_α della partizione dell'unità associata all'atlante di M . L'integrale su ciascun simpleso si somma agli altri con il coefficiente che compare nella somma formale che definisce la p -catena.

Da notare che su una 0-catena singolare, che è la somma formale di un certo numero di punti, $\sum_i c_i p_i$, l'integrale di una 0-forma f è semplicemente la somma pesata dei valori della funzione su quei punti, $\sum_i c_i f(p_i)$. Tutto ciò ci serve a enunciare il seguente teorema:

Proposizione 27 (teorema di de Rham). *Se A è una p -catena singolare (ossia un dominio d'integrazione p -dimensionale), e ω è una $(p - 1)$ -forma, allora*

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega .$$

Per $p = 1$, questo non è altro che il **teorema fondamentale del calcolo integrale** (in una variabile): l'integrale di una funzione f su un segmento $[a, b]$ è la differenza fra i valori assunti da una primitiva di f nei due punti b e a . Infatti, stiamo integrando la 1-forma $f dx$; sia F una primitiva, ossia $dF = f dx$. Il bordo di $[a, b]$ è la catena $b - a$, quindi il teorema dice che l'integrale di $f dt = dF$ su $[a, b]$ è uguale a $F(b) - F(a)$.

Per $p = 2$, il teorema di de Rham implica che l'integrale di una 1-forma su una linea chiusa s è uguale all'integrale del differenziale della stessa forma su un qualunque dominio A che abbia quella curva chiusa come bordo, $\partial A = s$. In particolare, se siamo in \mathbb{R}^3 e la forma che stiamo integrando è X^\flat per un campo vettoriale X , allora l'integrale di X lungo una curva chiusa è uguale all'integrale del rotore di X su A (**teorema di Stokes**). Una conseguenza è che se X ammette un potenziale V , ossia $X = (dV)^\sharp$, allora l'integrale di X lungo una curva chiusa che sia il bordo di un dominio A è sempre nullo (la condizione $s = \partial A$ è essenziale, perché ad esempio su un cilindro o su un toro possiamo avere curve chiuse che non sono il bordo di un dominio). Da questo si ricava anche che se un campo vettoriale ammette un potenziale, il suo integrale lungo una curva γ fra due estremi a e b non cambia se γ viene deformata con continuità in una diversa curva γ' con gli stessi estremi: infatti la catena $\gamma - \gamma'$ è una curva chiusa, ed è il bordo della regione attraversata nel deformare con continuità γ in γ' . Queste proprietà, descritte nel linguaggio delle forme differenziali, risultano essenziali nella formulazione variazionale della meccanica lagrangiana e della meccanica hamiltoniana.

Se $p = 3$, infine, il teorema di de Rham riproduce il **teorema di Gauss**: il flusso di un campo vettoriale X attraverso una superficie chiusa Σ è uguale all'integrale della divergenza di X sul volume della regione A che ha come bordo la superficie Σ . Anche qui, l'ipotesi che $\Sigma = \partial A$ è essenziale, perché su una varietà generica possono esistere superfici chiuse che non sono bordi.