Università di Torino – Scuola di Scienze della Natura
Corso di Laurea in Fisica – Anno accademico 2018/19

# ANALISI MATEMATICA III
# PROVA SCRITTA DEL 30/11/18

Cognome ........................................ Nome ................................... n. matricola ...........................

**Esercizio 1** (4 punti). Sia data la serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sin n} z^n. \tag{1}$$

a) Determinare il raggio di convergenza $\rho$ ed il disco aperto di convergenza della (3).
b) Studiare il carattere della (3) sulla frontiera del disco di convergenza.
c) Ci sono sottoinsiemi dell'insieme di convergenza dove la (3) converge uniformemente?

**Esercizio 2** (5 punti). Dopo aver discusso l'applicabilità del teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (yz + e^x, x^2 + y^3, x)$ uscente dal bordo del solido $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \in [-1, 1], y^2 + z^2 \leq 1\}$.

**Esercizio 3** (7 punti). Sia data la forma differenziale

$$\omega_a(x, y) = \frac{ax + (1-a)y}{(x^2+y^2)^a}\, dx + \frac{(1-a)x + ay}{(x^2+y^2)^a}\, dy,$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinare il dominio $D_a$ di $\omega_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.
b) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma $\omega_a$ risulta chiusa sul proprio dominio.
c) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma $\omega_a$ risulta esatta sul proprio dominio e, in tali casi, calcolarne un potenziale.

**Esercizio 4** (8 punti). Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\sin x - \frac{y^3}{3}, \cos y + \frac{x^3}{3}, xyz\right)$, indichiamo con $\Sigma$ la porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$, orientata con normale concorde all'asse $z$.

a) Calcolare il flusso del rotore di $F$ attraverso $\Sigma$ utilizzando la definizione.
b) Calcolare il medesimo flusso tramite il teorema di Stokes.

**Esercizio 5*** (6 punti). Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}. \tag{2}$$

a) Studiare la convergenza puntuale ed assoluta della (4) su $\mathbb{R}$.
b) Studiare la convergenza uniforme della (4) sugli intervalli chiusi e limitati $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
c) Provare che $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}$.

**N.B.** Si ricorda che la somma della serie telescopica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ può essere determinata tramite la definizione.

*Non richiesto agli studenti che devono sostenere l'esame di Analisi vettoriale e serie di funzioni.

**Esercizio 1.** Sia data la serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sin n} z^n. \tag{3}$$

a) Determinare il raggio di convergenza $\rho$ ed il disco aperto di convergenza della (3).

b) Studiare il carattere della (3) sulla frontiera del disco di convergenza.

c) Ci sono sottoinsiemi dell'insieme di convergenza dove la (3) converge uniformemente?

a) La serie in questione è una serie di potenze con centro in 0 e successione dei coefficienti $a_n = e^{\sin n}$. Si ha che
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sin n}{n}} = 1$$
e quindi, per la formula di Hadamard, il raggio di convergenza è $\rho = 1$ ed il disco di convergenza è $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$.

b) Siccome $\sin n \geq -1$ e la funzione esponenziale è crescente, risulta $a_n \geq e^{-1}$ per ogni $n$. Pertanto se $z \in \partial D$, si ha che $|a_n z^n| \geq e^{-1}$ per ogni $n$ ed in particolare la successione $(a_n z^n)_n$ non è infinitesima. Dunque per $z \in \partial D$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ non è convergente.

c) Per il teorema sul disco di convergenza delle serie di potenze, si ha convergenza uniforme in tutti i dischi chiusi $D_r = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq r\}$ per ogni $r \in (0,1)$ ma non in $D$.

**Esercizio 2.** Dopo aver discusso l'applicabilità del teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (yz+e^x, x^2+y^3, x)$ uscente dal bordo del solido $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \in [-1,1], y^2+z^2 \leq 1\}$.

Siccome il campo $F$ è di classe $C^2$ su $\mathbb{R}^3$ e $C$ è un dominio regolare, è possibile applicare il teorema della divergenza per calcolare il flusso di $F$ uscente da $C$ mediante la formula

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz\,.$$

Detta $F_i$ la componente $i$-esima di $F$ $(i = 1,2,3)$, si calcola $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = e^x + 3y^2$. Posto $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2+z^2 \leq 1\} = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \mid \rho \in [0,1]\,, \ \ \theta \in [0,2\pi]\}$, si ha che $C = [-1,1] \times D$ e quindi

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz &= \int_{-1}^{1} e^x \, dx \int_D dy\, dz + 3\int_{-1}^{1} dx \int_D y^2 \, dy\, dz \\ &= (e - e^{-1})\pi + 6\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \left(e - e^{-1} + \frac{3}{2}\right)\pi\,.\end{aligned}$$

Dunque il flusso di $F$ uscente da $C$ vale $\left(e - e^{-1} + \frac{3}{2}\right)\pi$.

**Esercizio 3.** Sia data la forma differenziale

$$\omega_a(x,y) = \frac{ax + (1-a)y}{(x^2+y^2)^a}\, dx + \frac{(1-a)x + ay}{(x^2+y^2)^a}\, dy,$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinare il dominio $D_a$ di $\omega_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

b) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma $\omega_a$ risulta chiusa sul proprio dominio.

c) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma $\omega_a$ risulta esatta sul proprio dominio e, in tali casi, calcolarne un potenziale.

a) Il dominio di $\omega_a$ è $D_a = \mathbb{R}^2$ se $a \leq 0$, mentre $D_a = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se $a > 0$.

b) La forma differenziale $\omega_a$ è chiusa sul proprio dominio se

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{ax+(1-a)y}{(x^2+y^2)^a} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{(1-a)x+ay}{(x^2+y^2)^a} = 2a(1-a)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{a+1}} \quad \forall (x,y) \in D_a$$

e ciò si verifica se e solo se $a = 0$ oppure $a = 1$.

c) Se $a = 0$, dato che il dominio è semplicemente connesso, la forma differenziale è esatta sul proprio dominio ed un potenziale, calcolabile in modo immediato con il metodo di integrazione per componenti, è dato da $\varphi_0(x,y) = xy$. Se $a = 1$, pur non essendo il dominio semplicemente connesso, la forma differenziale è esatta perché associata al campo $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$, che è un campo radiale. Un potenziale $\varphi_1$ si può calcolare applicando la formula per il caso dei campi radiali oppure ancora con il metodo di integrazione per componenti e si ottiene $\varphi_1(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

**Esercizio 4.** Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\sin x - \frac{y^3}{3}, \cos y + \frac{x^3}{3}, xyz\right)$, indichiamo con $\Sigma$ la porzione di paraboloide $z = x^2+y^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$, orientata con normale concorde all'asse $z$.

a) Calcolare il flusso del rotore di $F$ attraverso $\Sigma$ utilizzando la definizione.

b) Calcolare il medesimo flusso tramite il teorema di Stokes.

La superficie $\Sigma$ può essere parametrizzata come superficie cartesiana con parametrizzazione $X(u,v) = (u,v,f(u,v))$, $(u,v) \in D$, dove $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \le 1\}$ e $f(u,v) = u^2+v^2$. Tale parametrizzazione orienta $\Sigma$ concordemente alla direzione dell'asse $z$ perché

$$X_u \wedge X_v = \begin{bmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{bmatrix}$$

ha terza componente positiva.

a) Il rotore di $F$ è dato da

$$\nabla \wedge F = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \sin x - \frac{y^3}{3} \\ \cos y + \frac{x^3}{3} \\ xyz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xz \\ -yz \\ x^2+y^2 \end{bmatrix} = G\,.$$

In base alla definizione, il flusso del rotore di $F$ attraverso $\Sigma$ è dato da

$$\int_\Sigma \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma = \int_\Sigma G(X(u,v)) \cdot X_u(u,v) \wedge X_v(u,v)\, du\, dv = \int_D (u^2+v^2)(-2u^2+2v^2+1)\, du\, dv\,.$$

Osserviamo che, per simmetria, $\int_D u^2(u^2+v^2)\, du\, dv = \int_D v^2(u^2+v^2)\, du\, dv$. Inoltre, passando in coordinate polari, otteniamo

$$\int_\Sigma \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma = \int_D (u^2+v^2)\, du\, dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{2}\,.$$

b) La frontiera di $\Sigma$, orientata positivamente, è il sostegno della curva

$$\gamma(t) = X(\cos t, \sin t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

In base al teorema di Stokes,

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma &= \int_{X(+\partial D)} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin(\cos t)\sin t\, dt + \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 t}{3}\, dt + \int_0^{2\pi} \cos(\sin t)\cos t\, dt + \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 t}{3}\, dt\,.\end{aligned}$$

Osservando che $\sin(\cos t)\sin t = -\frac{d}{dt}(\cos(\cos t))$ e $\cos(\sin t)\cos t = \frac{d}{dt}(\sin(\sin t))$, otteniamo che

$$\int_0^{2\pi} \sin(\cos t)\sin t\,dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \cos(\sin t)\cos t\,dt = 0\,.$$

I restanti integrali si possono calcolare integrando per parti nel modo seguente

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,dt &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t)(1-\cos^2 t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin^3 t}{3}\right)' \cos t\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt - \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,dt\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \sin^4 t\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt\,.$$

Analogamente si trova che

$$\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4 t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt\,.$$

Quindi

$$\int_{X(+\partial D)} F\cdot dS = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^4 t}{3}+\frac{\cos^4 t}{3}\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2 t}{4}+\frac{\cos^2 t}{4}\right)dt = \frac{\pi}{2}.$$

**Esercizio 5.** Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}. \tag{4}$$

a) Studiare la convergenza puntuale ed assoluta della (4) su $\mathbb{R}$.

b) Studiare la convergenza uniforme della (4) sugli intervalli chiusi e limitati $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

c) Provare che $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}$.

**N.B.** Si ricorda che la somma della serie telescopica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ può essere determinata tramite la definizione.

a) La serie in questione è della forma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ dove $f_n(x) = \frac{x}{(n+x^2)^2}$. Tutte le funzioni $f_n$ sono definite su $\mathbb{R}$ e $|f_n(x)| \le \frac{|x|}{n^2}$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e per tutti gli interi $n\ge 1$. Siccome la serie $\sum_{n\ge1}\frac{|x|}{n^2}$ è convergente (perché multiplo di serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1), per il criterio del confronto anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ è tale. Cioè per ogni $x\in\mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

b) Fissato un intervallo chiuso e limitato $[a,b]\subset\mathbb{R}$, per la stima già utilizzata nel punto precedente, posto $C=\max\{|a|,|b|\}$, si ha che $|f_n(x)|\le\frac{C}{n^2}$ per ogni $x\in[a,b]$ e per tutti gli interi $n\ge1$. Dato che la serie $\sum_{n\ge1}\frac{C}{n^2}$ è convergente, possiamo concludere che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è totalmente convergente in $[a,b]$. Quindi per il criterio di Weierstrass, à anche uniformemente convergente in $[a,b]$.

c) Dato che tutte le funzioni $f_n$ sono continue e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente in $[0,1]$, si può applicare il teorema di integrazione per serie di funzioni e calcolare

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(n+x^2)^2}\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x}{(n+x^2)^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2(n+x^2)}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Università di Torino – Scuola di Scienze della Natura
Corso di Laurea in Fisica – Anno accademico 2018/19

# ANALISI III
# PROVA SCRITTA DEL 17/12/18

Cognome ....................................... Nome ................................... n. matricola ...........................

**Esercizio 1** (6 punti). Sia data la serie di potenze in campo reale

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{3^n n^3}}\right)(x+5)^n. \tag{1}$$

a) Calcolare il raggio di convergenza $\rho$ della (2).

b) Determinare l'intervallo aperto di convergenza $I$ della (2).

c) Studiare il carattere della (2) agli estremi dell'intervallo di convergenza e determinarne l'insieme di convergenza $E$.

**Esercizio 2** (5 punti). Sia data la curva piana $\gamma(t) = e^{-at}(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, con $a > 0$ costante fissata.

a) Stabilire, giustificando le risposte:
   1. se la curva $\gamma$ è semplice;
   2. se la curva $\gamma$ è chiusa.

b) Calcolare la lunghezza della curva $\gamma$.

**Esercizio 3** (7 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x,y,z) = \left(-\frac{3}{2\sqrt{ax}} + 5z + y^2, 2axy, \frac{2z}{z^2+1} + bx\right),$$

dipendente dai parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $\bar{F}_{a,b}$. $D_{a,b}$ è un insieme connesso?

b) Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, per i quali il campo è conservativo.

c) Per tali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ determinare il potenziale del campo che si annulla in $(4, 0, 1)$.

**Esercizio 4** (8 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (y, z, x).$$

a) Calcolare (utilizzando la definizione di flusso) il flusso del rotore di $F$ attraverso la superficie cartesiana $\Sigma$ di equazione $z = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{9} - 1}$, $(x, y) \in D$, con il versore normale indotto dalla parametrizzazione e

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 36 \le 9x^2 + y^2 \le 81\right\}.$$

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

**Esercizio 5**[*] (4 punti). Studiare la convergenza puntuale, assoluta ed uniforme sull'intervallo $I = (2, +\infty)$ della serie di funzioni

$$\sum_{n\ge1}(-1)^n\frac{n^3}{x^{3n}}.$$

[*]Non richiesto agli studenti che devono sostenere l'esame di Analisi vettoriale e serie di funzioni.

**Esercizio 1.** Sia data la serie di potenze in campo reale

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{3^n n^3}}\right)(x+5)^n. \tag{2}$$

a) Calcolare il raggio di convergenza $\rho$ della (2).

b) Determinare l'intervallo aperto di convergenza $I$ della (2).

c) Studiare il carattere della (2) agli estremi dell'intervallo di convergenza e determinarne l'insieme di convergenza $E$.

a) La serie in considerazione è una serie di potenze con centro in $x_0 = -5$ e coefficienti $a_n = (-1)^n\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{3^n n^3}}\right)$. Siccome $3^n n^3 \to \infty$ per $n \to \infty$ e $\sqrt{1+\varepsilon} \sim 1+\frac{\varepsilon}{2}$ per $\varepsilon \to 0$, si ha che

$$1-\sqrt{1-\frac{1}{3^n n^3}} \sim \frac{1}{2\cdot 3^n n^3} \quad \text{per } n \to \infty.$$

Inoltre $a_n = (-1)^n|a_n|$ e

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \frac{3^n n^3}{3^{n+1}(n+1)^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \to \frac{1}{3} \quad \text{per } n \to \infty.$$

Perciò, in base alla formula di Hadamard, il raggio di convergenza della serie è $\rho = 3$.

b) L'intervallo aperto di convergenza è $I = (x_0-\rho, x_0+\rho) = (-8,-2)$.

c) Sappiamo che la serie di potenze converge assolutamente in ogni punto $x \in I$ e non converge se $x < -8$ e se $x > -2$. Studiamo la serie di potenze agli estremi dell'intervallo. In $x = -8$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-3)^n$. Si ha che

$$|a_n(-3)^n| = \left(1-\sqrt{1-\frac{1}{3^n n^3}}\right)3^n \sim \frac{1}{2n^3} \quad \text{per } n \to \infty.$$

Siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n^3}$ è convergente (perché, a parte il fattore $\frac{1}{2}$, è una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1), per il criterio del confronto asintotico, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(-3)^n|$ converge, cioè la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-3)^n$ è assolutamente convergente e quindi converge anche semplicemente. In $x = -2$ la serie è $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 3^n$. Dato che $|a_n 3^n| = |a_n(-3)^n|$, con lo stesso ragionamento di prima, troviamo che anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 3^n$ converge assolutamente e semplicemente. In conclusione, l'insieme di convergenza semplice ed assoluta è l'intervallo chiuso $[-8,-2]$.

**Esercizio 2.** Sia data la curva piana $\gamma(t) = e^{-at}(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, con $a > 0$ costante fissata.

a) Stabilire, giustificando le risposte:
   1. se la curva $\gamma$ è semplice;
   2. se la curva $\gamma$ è chiusa.

b) Calcolare la lunghezza della curva $\gamma$.

a) Dato che $|\gamma(t)| = e^{-at}$ e la funzione $t \mapsto e^{-at}$ è strettamente decrescente per $a > 0$, se $0 \le t_1 < t_2 \le 2\pi$ allora $|\gamma(t_1)| > |\gamma(t_2)|$. In particolare $\gamma(t_1) \ne \gamma(t_2)$ cioè la funzione $\gamma$ è iniettiva. Quindi la curva è semplice. Essendo poi $\gamma(0) \ne \gamma(2\pi)$, la curva non è chiusa.

b) Dato che $\gamma$ è di classe $C^1$ in $[0, 2\pi]$, la lunghezza della curva è calcolabile mediante la formula

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi}|\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi}e^{-at}\sqrt{a^2+1}\,dt = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\left(1-e^{-2\pi a}\right),$$

avendo calcolato

$$\gamma'(t) = (-ae^{-at}\cos t - e^{-at}\sin t, -ae^{-at}\sin t + e^{-at}\cos t)$$

da cui

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{e^{-2at}(-a\cos t-\sin t)^2 + e^{-2at}(-a\sin t+\cos t)^2} = e^{-at}\sqrt{a^2+1}.$$

**Esercizio 3.** Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x,y,z) = \left(-\frac{3}{2\sqrt{ax}} + 5z + y^2, 2axy, \frac{2z}{z^2+1} + bx\right),$$

dipendente dai parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $\bar{F}_{a,b}$. $D_{a,b}$ è un insieme connesso?

b) Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, per i quali il campo è conservativo.

c) Per tali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ determinare il potenziale del campo che si annulla in $(4, 0, 1)$.

a) Il dominio di $\bar{F}_{a,b}$ è dato dall'insieme $D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax > 0\}$. Quindi $D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$ se $a > 0$, mentre $D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\}$ se $a < 0$. In ogni caso il dominio di $\bar{F}_{a,b}$ è un insieme connesso (è un semispazio).

b) Affinché il campo vettoriale $\bar{F}_{a,b}$ risulti conservativo sul proprio dominio, deve succedere che $\nabla \wedge \bar{F}_{a,b} = 0$ in $D_{a,b}$. Siccome

$$\nabla \wedge \bar{F}_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(b-5) \\ 2ay - 2y \end{bmatrix}$$

si ha che $\nabla \wedge \bar{F}_{a,b} = 0$ in $D_{a,b}$ se e solo se $a = 1$ e $b = 5$. Per tali valori $\bar{F}_{a,b}$ è conservativo perché il suo dominio è semplicemente connesso (è un semispazio).

c) Determiniamo un potenziale del campo $\bar{F}_{1,5}$ cioè cerchiamo un campo scalare $\varphi$ tale che $\bar{F}_{1,5} = \nabla\varphi$. Deve essere $\varphi_y = 2xy$ e quindi

$$(*) \qquad \varphi(x,y,z) = xy^2 + g(x,z)$$

per una certa funzione $g(x,z)$ da determinare (a meno di costanti additive). Quindi, dovendo essere $\varphi_z = \frac{2z}{z^2+1} + 5x$, otteniamo la condizione

$$g_z(x,z) = \frac{2z}{z^2+1} + 5x$$

integrando la quale, deduciamo che

$$(\#) \qquad g(x,z) = \log(1+z^2) + 5xz + h(x)$$

per una certa funzione $h(x)$ da determinare (a meno di costanti additive). Sostituiamo in $(*)$ e scriviamo la terza equazione $\varphi_x = -\frac{3}{2\sqrt{x}} + 5z$, che diventa

$$h'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}\,.$$

Integrando, troviamo che $h(x) = -3\sqrt{x} + C$ e quindi, sostituendo in $(\#)$ e poi in $(*)$, abbiamo che

$$\varphi(x,y,z) = xy^2 - 3\sqrt{x} + 5xz + \log(1+z^2) + C\,.$$

La costante $C$ va determinata imponendo la condizione $\varphi(4,0,1) = 0$ che dà $-6+20+\log 2+C = 0$, da cui $C = -14 - \log 2$. Quindi il potenziale cercato è

$$\varphi(x,y,z) = xy^2 - 3\sqrt{x} + 5xz + \log(1+z^2) - 14 - \log 2\,.$$

**Esercizio 4.** Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = (y,z,x).$$

a) Calcolare (utilizzando la definizione di flusso) il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie cartesiana $\Sigma$ di equazione $z = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{9} - 1}$, $(x,y) \in D$, con il versore normale indotto dalla parametrizzazione e

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 36 \leq 9x^2 + y^2 \leq 81\right\}.$$

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

a) La superficie $\Sigma$, come superficie cartesiana, può essere parametrizzata mediante la funzione $r(u,v) = (u, v, f(u,v))$ dove $(u,v) \in D$ essendo $D$ il dominio di $\mathbb{R}^2$ definito come nel testo e $f(u,v) = \sqrt{u^2 + \frac{v^2}{9} - 1}$. Si calcola

$$r_u \wedge r_v = \begin{bmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{u}{\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}} \\ -\frac{v}{9\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il rotore di $F$ è dato da

$$\nabla \wedge F = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = G\,.$$

In base alla definizione, il flusso del rotore di $F$ attraverso $\Sigma$ è dato da

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_\Sigma \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma = \int_D G(r(u,v)) \cdot r_u(u,v) \wedge r_v(u,v)\, du\, dv \\ &= \int_D \frac{u}{\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}}\, du\, dv + \frac{1}{9}\int_D \frac{v}{\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}}\, du\, dv - \int_D du\, dv\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che $D$ è la regione del piano compresa tra le ellissi di equazioni $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$ (ellisse di semiassi 2 e 6) e $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$ (ellisse di semiassi 3 e 9). Dato che $D$ è simmetrico rispetto alla prima componente e la funzione $(u,v) \mapsto \frac{u}{\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}}$ è dispari in $u$, si ha che

$$\int_D \frac{u}{\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}}\, du\, dv = 0\,.$$

Analogamente, siccome $D$ è simmetrico anche rispetto alla seconda componente e la funzione $(u,v) \mapsto \frac{v}{\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}}$ è dispari in $v$, si ha che

$$\int_D \frac{v}{\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}}\, du\, dv = 0\,.$$

Quindi, detta $E_1$ la regione racchiusa dall'ellisse di equazione $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$ ed $E_2$ la regione racchiusa dall'ellisse di equazione $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$, abbiamo che

$$\Phi = -\int_D du\, dv = -\text{area}(D) = -[\text{area}(E_1) - \text{area}(E_2)] = -[27\pi - 12\pi] = -15\pi\,.$$

In alternativa, si può calcolare l'integrale parametrizzando il dominio $D$ in coordinate ellittiche

$$D = \{(t\cos\theta, 3t\sin\theta) \mid 2 \le t \le 3\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}\,.$$

La trasformazione $\phi(t,\theta) = (t\cos\theta, 3t\sin\theta)$ ha determinante Jacobiano $|J\phi| = 3t$ e quindi

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_D \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}} + \frac{v}{9\sqrt{u^2+\frac{v^2}{9}-1}} - 1\right) du\, dv = \int_2^3 dt \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{3t\cos\theta + t\sin\theta}{3\sqrt{t^2-1}} - 1\right) 3t \\ &= \int_2^3 \frac{3t^2}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + \int_2^3 \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta - \int_2^3 3t\, dt \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -2\pi \left[\frac{3t^2}{2}\right]_{t=2}^{t=3} = -15\pi\,.\end{aligned}$$

b) La frontiera di $\Sigma$, orientata positivamente, è così costruita: il dominio $D$ ha come frontiera due ellissi: quella di equazione $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$, più esterna, percorsa in senso antiorario, che si può parametrizzare mediante la curva $\gamma_1(t) = (3\cos t, 9\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, e quella più interna, di equazione $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$, ma percorsa in senso orario, parametrizzabile dalla curva opposta di $\gamma_2(t) = (2\cos t, 6\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Quindi la frontiera di $\Sigma$, orientata positivamente, è data da $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$, dove $\Gamma_1$ è la curva orientata, di parametrizzazione $\tilde{\gamma}_1 = r \circ \gamma_1$ e $\Gamma_2$ è la curva orientata, di parametrizzazione $\tilde{\gamma}_2 = r \circ \gamma_2$. Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore di $F$ si può calcolare mediante la formula

$$\Phi = \int_{\Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)} F \cdot dS = \int_{\Gamma_1} F \cdot dS - \int_{\Gamma_2} F \cdot dS\,.$$

Calcoliamo

$$\tilde{\gamma}_1(t) = \begin{bmatrix} 3\cos t \\ 9\sin t \\ \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos t \\ 9\sin t \\ \sqrt{8} \end{bmatrix}, \quad F(\tilde{\gamma}_1(t)) = \begin{bmatrix} 9\sin t \\ \sqrt{8} \\ 3\cos t \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}_1'(t) = \begin{bmatrix} -3\sin t \\ 9\cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} F(\tilde{\gamma}_1(t)) \cdot \tilde{\gamma}_1'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(-27\sin^2 t + 9\sqrt{8}\cos t\right) dt = -27\pi\,.$$

Inoltre

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 6\sin t \\ \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 6\sin t \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad F(\tilde{\gamma}_2(t)) = \begin{bmatrix} 6\sin t \\ \sqrt{3} \\ 2\cos t \end{bmatrix}, \quad \tilde{\gamma}_2'(t) = \begin{bmatrix} -2\sin t \\ 6\cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} F(\tilde{\gamma}_2(t)) \cdot \tilde{\gamma}_2'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(-12\sin^2 t + 6\sqrt{3}\cos t\right) dt = -12\pi\,.$$

In conclusione

$$\Phi = \int_{\Gamma_1} F \cdot dS - \int_{\Gamma_1} F \cdot dS = -27\pi + 12\pi = -15\pi\,.$$

**Esercizio 5.** Studiare la convergenza puntuale, assoluta ed uniforme sull'intervallo $I = (2, +\infty)$ della serie di funzioni

$$(\star) \qquad \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n^3}{x^{3n}}.$$

Fissato $x > 2$, si ha che

$$\left|(-1)^n \frac{n^3}{x^{3n}}\right| \leq \frac{n^3}{8^n} \quad \forall n \geq 1\,.$$

Inoltre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{8^n}$ converge (ad esempio, per il criterio del rapporto). Quindi, per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n^3}{x^{3n}}\right|$ è convergente. Dunque la serie $(\star)$ converge assolutamente e quindi anche semplicemente, per ogni $x > 2$. La stima sopra trovata dice anche che

$$\sup_{x \in (2,\infty)} \left|(-1)^n \frac{n^3}{x^{3n}}\right| \leq \frac{n^3}{8^n} \quad \forall n \geq 1\,.$$

Dato che, come già osservato, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{8^n}$ è convergente, per il criterio di Weierstrass, la serie di funzioni $(\star)$ converge uniformemente nell'intervallo $I = (2, \infty)$.

# ANALISI MATEMATICA III
# PROVA SCRITTA DEL 26/06/19

Cognome ........................................ Nome .................................... n. matricola ...........................

**Esercizio 1** (4 punti). Sia data la serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\cos n} z^n. \tag{1}$$

a) Determinare il raggio di convergenza $\rho$ ed il disco aperto di convergenza della (1).

b) Studiare il carattere della (1) sulla frontiera del disco di convergenza.

c) Ci sono sottoinsiemi dell'insieme di convergenza dove la (1) converge uniformemente?

**Esercizio 2** (5 punti). Dopo aver discusso l'applicabilità del teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (xy + e^z, x^3 + z^2, z)$ uscente dal bordo del solido $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 1\,,\ |z| \le 1\}$.

**Esercizio 3** (7 punti). Sia data la forma differenziale

$$\omega_a(x,y) = (x^2+y^2)^a[y + a(y-x)]\,dx + (x^2+y^2)^a[x + a(x-y)]\,dy,$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinare il dominio $D_a$ di $\omega_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

b) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma $\omega_a$ risulta chiusa sul proprio dominio.

c) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma $\omega_a$ risulta esatta sul proprio dominio e, in tali casi, calcolarne un potenziale.

**Esercizio 4** (8 punti). Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(-\sin x + \dfrac{y^3}{3}, \cos y - \dfrac{x^3}{3}, xyz\right)$, indichiamo con $\Sigma$ la porzione di paraboloide $z = x^2+y^2$ compresa tra i piani $z=0$ e $z=1$, orientata con normale concorde all'asse $z$.

a) Calcolare il flusso del rotore di $F$ attraverso $\Sigma$ utilizzando la definizione.

b) Calcolare il medesimo flusso tramite il teorema di Stokes.

(Può essere utile l'identità: $\sin^4 t + \cos^4 t = \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{3}{4}$.)

**Esercizio 5*** (6 punti). Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{(n+x^4)^2}. \tag{2}$$

a) Studiare la convergenza puntuale ed assoluta della (2) su $\mathbb{R}$.

b) Studiare la convergenza uniforme della (2) sugli intervalli chiusi e limitati $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

c) Provare che $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{(n+x^4)^2}\,dx = \frac{1}{4}$.

**N.B.** Si ricorda che la somma della serie telescopica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ può essere determinata tramite la definizione.

*Non richiesto agli studenti che devono sostenere l'esame di Analisi vettoriale e serie di funzioni.

**Svolgimento degli esercizi**

Lo svolgimento è analogo a quello dello scritto del 30 Novembre 2018. Si riportano solo i risultati ed eventuali osservazioni o passaggi significativi.

1. La serie in questione è una serie di potenze con centro in 0 e successione dei coefficienti $a_n = e^{\cos n}$. Si ha che
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\cos n}{n}} = 1$$
e quindi, per la formula di Hadamerd, il raggio di convergenza è $\rho = 1$ ed il disco aperto di convergenza è $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$. Siccome $\cos n \geq -1$ e la funzione esponenziale è crescente, risulta $a_n \geq e^{-1}$ per ogni $n$. Pertanto se $z \in \partial D$, si ha che $|a_n z^n| \geq e^{-1}$ per ogni $n$ ed in particolare la successione $(a_n z^n)_n$ non è infinitesima. Dunque per $z \in \partial D$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ non è convergente. Per il teorema sul disco di convergenza delle serie di potenze, si ha convergenza uniforme in tutti i dischi chiusi $D_r = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq r\}$ per ogni $r \in (0,1)$ ma non in $D$.

2. Siccome il campo $F$ è di classe $C^2$ su $\mathbb{R}^3$ e $C$ è un dominio regolare, è possibile applicare il teorema della divergenza per calcolare il flusso di $F$ uscente da $C$ mediante la formula
$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C \operatorname{div} F \, dxdydz.$$
Detta $F_i$ la componente $i$-esima di $F$ ($i = 1,2,3$), si calcola $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + 1$. Pertanto
$$\int_C \operatorname{div} F \, dxdydz = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (y+1) \, dydxdz = 2\pi.$$

3. Il dominio di $\omega_a$ è $D_a = \mathbb{R}^2$ se $a \geq 0$, mentre $D_a = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se $a < 0$. La forma differenziale $\omega_a$ è chiusa sul proprio dominio se, per ogni $(x,y) \in D_a$,
$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2)^a[y+a(y-x)]\} - \frac{\partial}{\partial x}\{(x^2+y^2)^a[x+a(x-y)]\} = -2a(1+a)(x^2+y^2)^{(a-1)}(x^2-y^2),$$
e ciò si verifica se e solo se $a = 0$ oppure $a = -1$. Se $a = 0$, dato che il dominio è semplicemente connesso, la forma differenziale è esatta sul proprio dominio ed un potenziale, calcolabile in modo immediato con il metodo di integrazione per componenti, è dato da $\varphi_0(x,y) = xy$. Se $a = -1$, pur non essendo il dominio semplicemente connesso, la forma differenziale è esatta perché associata al campo $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$, che è un campo radiale. Un potenziale $\varphi_{-1}$ si può calcolare applicando la formula per il caso dei campi radiali oppure ancora con il metodo di integrazione per componenti e si ottiene $\varphi_{-1}(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

4. La superficie $\Sigma$ può essere parametrizzata come superficie cartesiana con parametrizzazione
$$r(u,v) = (u, v, f(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$
dove $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq 1\}$ e $f(u,v) = u^2+v^2$. Tale parametrizzazione orienta $\Sigma$ concordemente alla direzione dell'asse $z$ perché
$$(r_u \wedge r_v)(u,v) = \begin{bmatrix} -f_u(u,v) \\ -f_v(u,v) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{bmatrix}$$
ha terza componente positiva. Il rotore di $F$ è dato da
$$(\nabla \wedge F)(x,y,z) = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -\sin x + \frac{y^3}{3} \\ \cos y - \frac{x^3}{3} \\ xyz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xz \\ -yz \\ -x^2-y^2 \end{bmatrix} = G(x,y,z),$$
pertanto
$$\begin{aligned}\int_\Sigma (\nabla \wedge F) \cdot N \, d\sigma = & \int_D G(r(u,v)) \cdot r_u(u,v) \wedge r_v(u,v) \, dudv \\ = & -\int_D (u^2+v^2)(2u^2-2v^2+1) \, dudv = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

La frontiera di $\Sigma$, orientata positivamente, è il sostegno della curva

$$\gamma(t) = r(\cos t, \sin t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

In base al teorema di Stokes,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma (\nabla \wedge F) \cdot N \, d\sigma = \int_{r(+\partial D)} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
= \int_0^{2\pi} \sin(\cos t) \sin t \, dt - \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 t}{3}\, dt \\
+ \int_0^{2\pi} \cos(\sin t) \cos t \, dt - \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 t}{3}\, dt \\
= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\cos(4t)}{4} + \frac{3}{4} \right] dt = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

5. La serie in questione è della forma $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ dove $f_n(x) = \frac{x^3}{(n+x^4)^2}$. Tutte le funzioni $f_n$ sono definite su $\mathbb{R}$ e $|f_n(x)| \leq \frac{|x|^3}{n^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per tutti gli interi $n \geq 1$. Per il criterio del confronto, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge assolutamente e quindi anche semplicemente. Fissato un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset \mathbb{R}$, posto $C = \max\{|a|^3, |b|^3\}$, si ha che $|f_n(x)| \leq \frac{C}{n^2}$ per ogni $x \in [a, b]$ e per tutti gli interi $n \geq 1$. Possiamo concludere che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ è totalmente convergente in $[a, b]$. Quindi per il criterio di Weierstrass, à anche uniformemente convergente in $[a, b]$. Dato che tutte le funzioni $f_n$ sono continue e la serie $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge uniformemente in $[0, 1]$, si può applicare il teorema di integrazione per serie di funzioni e calcolare

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^3}{(n + x^4)^2}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(n + x^4)}{(n + x^4)^2} = \frac{1}{4}\,.$$

**N.B.** Studiando i massimi di $|f_n(x)|$, si dimostra che $|f_n(x)| \leq \dfrac{C}{n^{\frac{5}{4}}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $n \geq 1$, da cui segue, in effetti, la convergenza totale della serie di funzioni su tutto $\mathbb{R}$ (e quindi, a maggior ragione, su ogni intervallo).

# ANALISI III
# PROVA SCRITTA DEL 13/9/19

Cognome ....................................... Nome ................................... n. matricola ...........................

**Esercizio 1** (6 punti). Sia data la serie di potenze in campo reale

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{5^n n^7}}\right)(x-3)^n. \tag{1}$$

a) Calcolare il raggio di convergenza $\rho$ della (1).
b) Determinare l'intervallo aperto di convergenza $I$ della (1).
c) Studiare il carattere della (1) agli estremi dell'intervallo di convergenza e determinarne l'insieme di convergenza $E$.

**Esercizio 2** (5 punti). Sia data la curva piana $\gamma(t) = e^{-2at}(\sin t, \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, con $a > 0$ costante fissata.

a) Stabilire, giustificando le risposte:
   1. se la curva $\gamma$ è semplice;
   2. se la curva $\gamma$ è chiusa.
b) Calcolare la lunghezza della curva $\gamma$.

**Esercizio 3** (7 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x,y,z) = \left(2azx, \frac{2y}{y^2+1}+bz, -\frac{3}{2\sqrt{az}}+5y+x^2\right),$$

dipendente dai parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $\bar{F}_{a,b}$. $D_{a,b}$ è un insieme connesso?
b) Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, per i quali il campo è conservativo.
c) Per tali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ determinare il potenziale del campo che si annulla in $(0, 1, 4)$.

**Esercizio 4** (8 punti). Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (-y, z, -x).$$

a) Calcolare (utilizzando la definizione di flusso) il flusso del rotore di $F$ attraverso la superficie cartesiana $\Sigma$ di equazione $z = \sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2-1}$, $(x,y) \in D$, con il versore normale indotto dalla parametrizzazione e

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 16 \leq x^2+4y^2 \leq 36\right\}.$$

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

**Esercizio 5*** (4 punti). Studiare la convergenza puntuale, assoluta ed uniforme sull'intervallo $I = (2, +\infty)$ della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n^4}{x^{4n}}.$$

*Non richiesto agli studenti che devono sostenere l'esame di Analisi vettoriale e serie di funzioni.

## Svolgimento degli esercizi

Lo svolgimento è analogo a quello dello scritto del 18 Dicembre 2018. Si riportano solo i risultati ed eventuali osservazioni o passaggi significativi.

1. Il raggio di convergenza vale $\rho = 5$. Ciò si ottiene dalla formula $\rho = \frac{1}{L}$ con $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ dove $a_n = (-1)^n \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{5^n n^7}}\right)$ (si usa, in particolare, la relazione asintotica $\sqrt{1+\varepsilon} \sim 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ per $\varepsilon \to 0$). La serie di potenze ha come centro $x_0 = 3$. Quindi l'intervallo aperto di convergenza è $I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho) = (-2, 8)$. In $x = -2$ si ottiene una serie numerica a termini positivi e convergente, per confronto asintotico con quella di termine generale $\frac{1}{2n^7}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, la quale converge per il criterio del rapporto. In $x = 8$ si ottiene una serie numerica a termini di segno alterno, che risulta assolutamente convergente, per confronto asintotico con quella di termine generale $\frac{1}{2n^7}$, la quale converge perché serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1. Dunque l'insieme di convergenza della serie di potenze è $[-2, 8]$. Al di fuori di tale intervallo non si ha convergenza per il teorema di Abel.

2. La curva $\gamma$ è semplice perché la funzione $t \mapsto |\gamma(t)| = e^{-2at}$ è iniettiva, in quanto strettamente decrescente, essendo $a > 0$. La curva $\gamma$ non è chiusa, ad esempio, perché $|\gamma(0)| > |\gamma(2\pi)|$. La lunghezza della curva $\gamma$ vale $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} e^{-2at}\sqrt{4a^2+1}\, dt = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a}\left(1 - e^{-4\pi a}\right)$.

3. Il dominio di $\bar{F}_{a,b}$ è $D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ se $a > 0$, oppure $D_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$ se $a < 0$. In ogni caso il dominio di $\bar{F}_{a,b}$ è un insieme connesso (è un semispazio). Essendo il dominio semplicemente connesso, il campo $\bar{F}_{a,b}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale. Tale condizione si verifica se e solo se $a = 1$ e $b = 5$. Per tali valori, il potenziale del campo che si annulla in $(0,1,4)$ risulta essere $U(x,y,z) = x^2 z + \log(1+y^2) + 5yz - 3\sqrt{z} - \log 2 - 14$.

4. L'insieme $D$ è la regione del piano compresa tra l'ellisse di equazione $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ (di semiassi 4 e 2) e l'ellisse di equazione $\left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ (di semiassi 6 e 3). La superficie $\Sigma$, come superficie cartesiana, può essere parametrizzata mediante la funzione $r(u,v) = (u, v, f(u,v))$ dove $(u,v) \in D$ e $f(u,v) = \sqrt{\frac{u^2}{4} + v^2 - 1}$. Si calcola

$$r_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u}{2\sqrt{u^2+4v^2-4}} \end{bmatrix}, \quad r_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2v}{\sqrt{u^2+4v^2-4}} \end{bmatrix}.$$

Il rotore di $F$ vale

$$\nabla \wedge F = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =: G\,.$$

In base alla definizione, il flusso del rotore di $F$ attraverso $\Sigma$ è dato da

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_\Sigma \nabla \wedge F \cdot N\, d\sigma = \int_D G \cdot r_u \wedge r_v\, du\, dv \\ &= \int_D \frac{u}{2\sqrt{u^2+4v^2-4}}\, du\, dv - \int_D \frac{2v}{\sqrt{u^2+4v^2-4}}\, du\, dv + \int_D du\, dv\,.\end{aligned}$$

I primi due integrali in ultima riga sono nulli per ragioni di simmetria, il terzo integrale è pari all'area di $D$ cioè la differenza tra l'area dell'ellisse più grande, che vale $18\pi$, e l'area dell'ellisse più piccola, che vale $8\pi$. Quindi $\Phi = 10\pi$.

Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore di $F$ si può calcolare mediante la formula

$$\Phi = \int_{r(+\partial D)} F \cdot dS = \int_{\Gamma_1} F \cdot dS + \int_{-\Gamma_2} F \cdot dS$$

dove $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ sono le ellissi di equazioni parametriche rispettivamente

$$\gamma_1(t) = \begin{bmatrix} 6\cos t \\ 3\sin t \\ \sqrt{8} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = \begin{bmatrix} 4\cos t \\ 2\sin t \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

percorse entrambe in senso antiorario (rispetto alla direzione dell'asse $z$). Si calcola

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (18 \sin^2 t + 9 \cos t)\, dt = 18\pi$$
$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dS = \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (8 \sin^2 t + 4 \cos t)\, dt = 8\pi$$

Pertanto, anche mediante il teorema di Stokes si ottiene $\Phi = 10\pi$.

5. La serie di funzioni converge totalmente in $I$ (si usa la stima $\left|(-1)^n \frac{n^4}{x^{4n}}\right| < \frac{n^4}{16^n}$ $\forall n \geq 1\,,\ \forall x \in I$, e il fatto che la serie numerica $\sum_{n\geq 1} n^4/16^n$ converge, cosa che si deduce, ad esempio, dal criterio del rapporto). Pertanto, per il teorema di Weierstrass, la serie di funzioni converge uniformemente in $I$ ed assolutamente, e quindi anche semplicemente, in ogni $x \in I$.