Corso di Studio in Fisica

Tutorato di Analisi III

Curve, integrali curvilinei, campi e potenziali, formula di Gauss-Green

Esercizio 1. Si calcoli la lunghezza delle seguenti curve:

1. $\bar{\gamma}_1(t) = (\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
2. $\bar{\gamma}_2(t) = (t, \ln\cos t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$;
3. $\bar{\gamma}_3(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \qquad t \in [0, \pi]$.

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\bar{\gamma}} \sqrt{1 + x^2 + 3y}\; ds,$$

dove $\bar{\gamma}$ è l'arco di parabola di equazione $y = x^2$, con $x \in [0, 3]$.

Esercizio 3. Sia $\bar{\gamma}(t) = (R\cos t, R\sin t, ht)$, $t \in [0, 2\pi]$ ($R > 0$ ed $h \in \mathbb{R}$, parametri assegnati). Si calcolino gli integrali curvilinei

$$M = \int_{\bar{\gamma}} (x^2 + y^2 + z^2) ds \;\text{ e }\; J = \int_{\bar{\gamma}} (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) ds.$$

Esercizio 4. Si calcoli l'integrale curvilineo di $f(x, y) = xy$ lungo la porzione dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ contenuta nel quadrante $x \geq 0, y \geq 0$.

Esercizio 5. Si calcoli la lunghezza della curva cardiode $\bar{\gamma}$, descritta in forma polare da $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$, dove $\theta \in [-\pi, \pi]$ e $a > 0$ è un parametro fissato.

Esercizio 6. Si calcolino la lunghezza L e il baricentro (x_g, y_g) della curva cicloide $\bar{\gamma}(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$ (per il calcolo del baricentro si supponga la curva materiale omogenea con densità uguale a 1).

Esercizio 7. Si calcoli l'area della superficie laterale del cilindroide

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2,\ 0 \leq z \leq 5 - 2x\}.$$

Esercizio 8. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\bar{F}(x, y) = (x^2, xy^2), \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si calcoli l'integrale di linea (di II specie) $\int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s}$, dove $\bar{\gamma}$ è il bordo del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ percorso in senso antiorario.

Esercizio 9. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$\bar{F}(x,y)=(xy^2,x^2+y^2),\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Si calcoli l'integrale di linea (di II specie) $\int_{\bar{\gamma}}\bar{F}\cdot d\bar{s}$, dove $\bar{\gamma}$ è il bordo del dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$ percorso in senso antiorario.

Esercizio 10. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F}:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}^2$,

$$\bar{F}(x,y)=\Big(2x\log y,\frac{x^2}{y}+y\Big),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y>0\}.$$

Si provi che $\bar{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2_+$. Si calcoli un potenziale di $\bar{F}$.

Esercizio 11. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z)=\Big(z+ax+by,x+2y+z,ax+by\Big),\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

dipendente dai parametri $a,b\in\mathbb{R}$. Si determinino i parametri a e b in modo che $\bar{F}$ sia conservativo su $\mathbb{R}^3$. Con la precedente scelta dei parametri, si calcoli un potenziale di $\bar{F}$.

Esercizio 12. Si determini $f\in C^1(\mathbb{R})$, con $f(x)\neq 0$, per ogni $x\in\mathbb{R}$, in modo che il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y)=\Big(xf(x)y^2,-y\log|f(x)|\Big)$$

sia conservativo su $\mathbb{R}^2$. Dopo aver trovato tale f, si calcoli un potenziale di $\bar{F}$.

Esercizio 13. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F}_a$ (dipendente dal parametro $a\in\mathbb{R}$)

$$\bar{F}_a(x,y,z)=\Big(z^2-2y^2+\frac{2y}{1+x},a\log(1+x)-4xy,2xz-2\Big).$$

(i) Si determini il dominio D di $\bar{F}_a$.
(ii) Per quali valori di a, $\bar{F}_a$ è conservativo in D?
(iii) Si calcoli un potenziale di $\bar{F}_a$ (in corrispondenza a quei valori di a per cui è conservativo), usando il metodo dell'integrazione lungo poligonali.
(iv) Si calcoli l'integrale curvilineo di II specie $\int_{\bar{\gamma}}\bar{F}_a\cdot d\bar{s}$, quando $\bar{F}_a$ è conservativo e

$$\bar{\gamma}(t)=(\sin(t\pi),e^t-1,t^2),\ \ t\in[0,1].$$

Esercizio 14. Sia data la forma differenziale

$$\omega=\Big(\log y+\frac{z}{x}\Big)\,dx+\Big(\log z+\frac{x+1}{y}\Big)\,dy+\Big(\log x+\frac{y+2}{z}\Big)\,dz$$

(i) Verificare che ω è esatta sul suo dominio.

(ii) Determinare una primitiva di ω sul suo dominio.

(iii) Calcolare $\displaystyle\int_{\bar\gamma} \omega$ essendo $\bar\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\bar\gamma(t) = (t+2, t+3, t+4)$, $t \in [0,1]$.

Esercizio 15. Si consideri la forma differenziale ω,

$$\omega(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy, \quad (x,y) \in D,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$.
(i) Si provi che ω è chiusa in D.
(ii) Si calcoli l'integrale di ω sulla curva $\bar\gamma$, cioè $\int_{\bar\gamma} \omega$, dove $\bar\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0,\pi]$; è vero che ω è esatta in D?
(iii) Si verifichi (senza fare calcoli) che

$$\int_{\bar r} \omega = 0, \quad \text{dove } \bar r(t) = (1 + \frac{1}{2}\cos t, \sin t + \cos t), \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Esercizio 16. Calcolare l'integrale curvilineo (di II specie) del campo $\bar F(x,y) = (xy, -1-x^2)$ lungo il bordo del triangolo T di vertici $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$ percorso in senso antiorario, direttamente e usando il teorema di Gauss-Green.

Esercizio 17. Si consideri il campo vettoriale $\bar F(x,y) = (xy^2, x^2+y^2)$.
(i) Si calcoli l'integrale di linea (o di II specie) $\int_{\bar\gamma} \bar F \cdot d\bar s$, dove $\bar\gamma$ è il bordo del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, bordo orientato positivamente.
(ii) Applicando la formula di Gauss-Green, si deduca dal punto (i) quanto vale

$$\iint_D (x - xy)\, dx\, dy\,.$$

Esercizio 18. Usando la formula di Gauss-Green, calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_{+\partial D} (-yx^2\, dx + xy^2\, dy)$$

dove $+\partial D$ è il bordo (orientato positivamente) del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

Esercizio 19. Si consideri un arco di cicloide, di equazioni $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ con $t \in [0, 2\pi]$. Sia Γ il sostegno di tale curva, che unisce i punti $A = (0,0)$ e $B = (2\pi, 0)$, e sia D l'insieme delimitato da Γ e dal segmento congiungente A e B. Calcolare l'area di D e l'integrale

$$\iint_D y\, dx\, dy\,.$$

Esercizio 20. Siano $f, g \in C^1(D)$, dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio limitato per cui vale la formula di Gauss-Green. Si verifichino le seguenti formule di integrazione per parti:

$$\iint_D f g_x\, dx\, dy = \int_{+\partial D} fg\, dy - \iint_D f_x g\, dx\, dy\,,$$
$$\iint_D f g_y\, dx\, dy = -\int_{+\partial D} fg\, dx - \iint_D f_y g\, dx\, dy\,.$$