Esperimentazioni 2

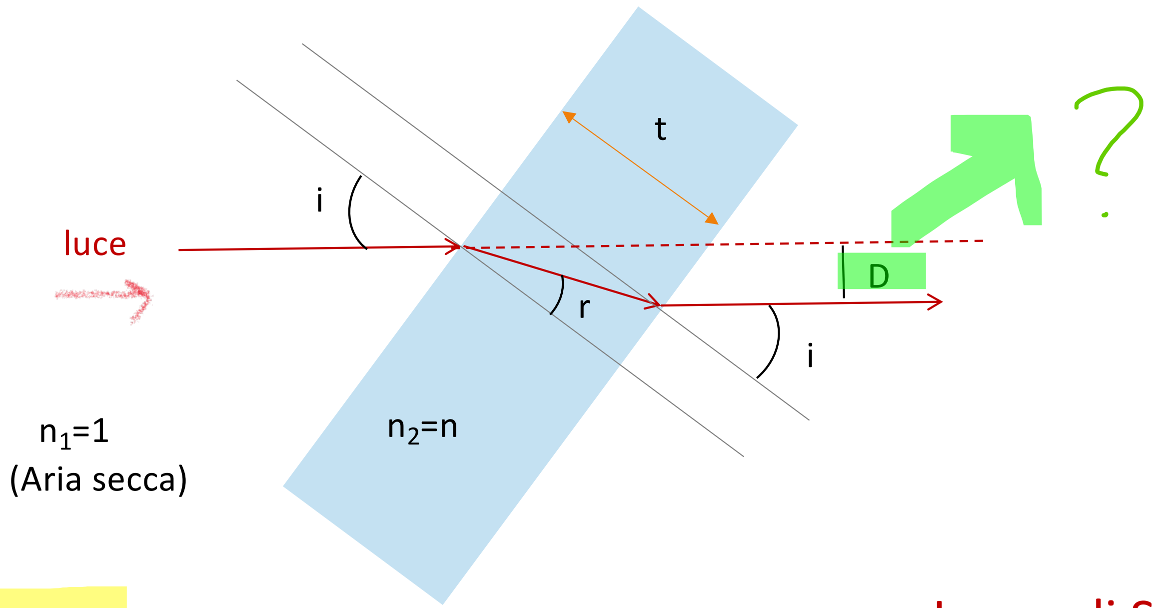
Modulo di Ottica e Fisica Moderna

Elisa Palazzi - Exp 2 - Lezione 6

Utilizzo di dispositivi che permettono di deviare un fascio di luce
Lamine e prismi *(componenti di strumenti ottici come telescopi o macchine fotografiche)*

La deviazione della luce: lamine e prismi

Lamina – parallelepipedo di materiale trasparente



IPOTESI:

- conosco lo spessore della lamina t
- conosco n (indice di rifrazione della lamina)

TESI:

- determinare lo spostamento del raggio incidente (D)

METODO:

- applico la legge di Snell

Legge di Snell

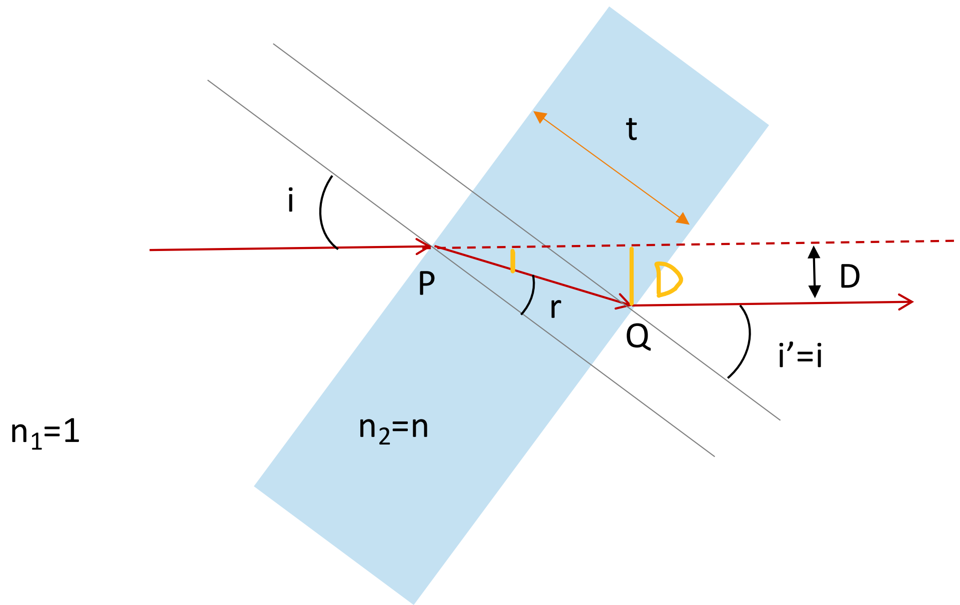
1) sin (i)= n sin (r)

2) n sin (r)= sin (i)

Lamina

Applicando la legge di Snell in successione sulla prima e la seconda faccia della lamina posso dimostrare che i’=I

(invertibilità del cammino ottico)



Se t è lo spessore della lamina si avrà:

$$D = PQ\sin(i-r) = \frac{t}{\cos r}\sin(i-r) = \frac{t}{\cos r}(\sin i\, cos r - \cos i \sin r) = t(\sin i - \cos i \tan r)$$

applicando la legge di Snell ricavo:

$$\boxed{D = t\ \sin i\left(1 - \sqrt{\frac{1-sin^2\ i}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - sin^2\ i}}\right)}$$

$D = f(t, i)$

Conti

$$D = t\ \sin i\left(1 - \sqrt{\frac{1-sin^2\ i}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - sin^2\ i}}\right)$$

$$D = PQ\sin(i-r) = \frac{t}{\cos r}\sin(i-r) = \frac{t}{\cos r}(\sin i\, cosr - \cos i \sin r) = t(\sin i - \cos i \tan r)$$

$$\boxed{D = tsini(1 - \frac{cosi}{sini}tgr)}$$

Snell

$$sinr = \frac{sini}{n} \qquad r = arcsin(\frac{sini}{n})$$

$$tg(r) = tg(arcsin(\frac{sini}{n})) = \frac{\frac{sini}{n}}{\sqrt{1 - \frac{sin^2 i}{n^2}}}$$

$$\boxed{D = tsini(1 - \frac{cosi}{sini}tgr)} \rightarrow \boxed{D = tsini(1 - \sqrt{\frac{1 - sin^2 i}{n^2 - sin^2 i}})}$$

Conti

- Formule matematiche da ricordare/usare

$$tg(arcsinx) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$cosx = \sqrt{1-sin^2x}$$

Lamina

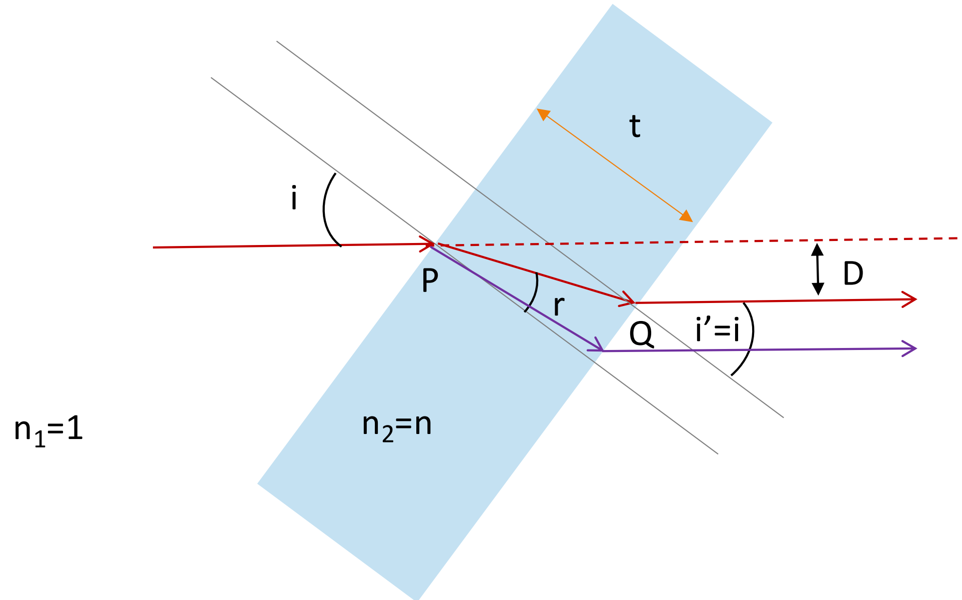
$$D = t\ \sin i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - sin^2 i}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - sin^2 i}} \right)$$

poichè l'angolo di rifrazione dipende dalla λ della luce incidente, colori diversi subiranno spostamenti diversi. Considerando ad esempio luce viola o rossa la differenza tra gli spostamenti sarà:

$$D_v - D_r = t\ \cos i\,(\tan r_r - \tan r_v)$$

$$\boxed{D_v = t\ \ sin\, i - t \cos i \tan r_v}$$

$$\boxed{D_r = t\ \ sin\, i - t \cos i \tan r_r}$$

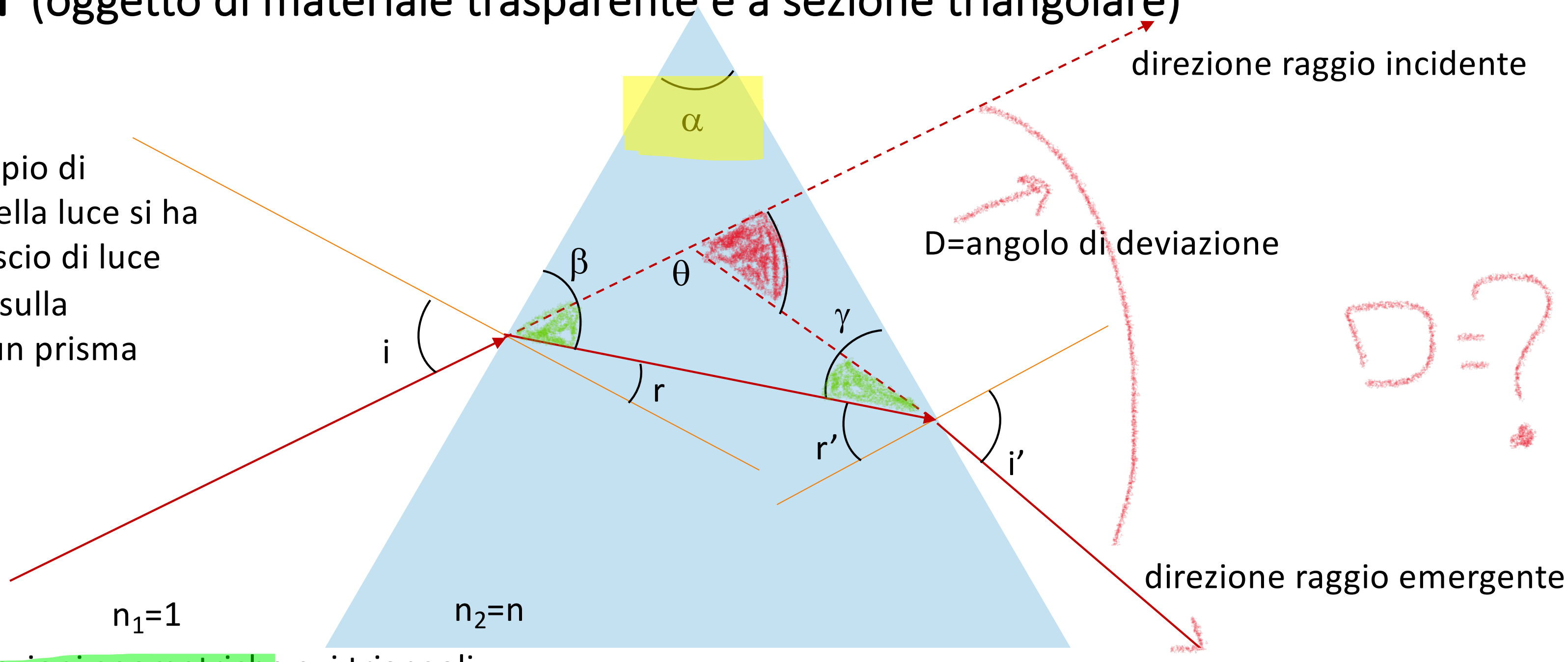


Dispersione della luce → *separazione delle componenti dello spettro della luce visibile (fenomeno importante per studiare lo spettro*

→ È importante che tutti gli elementi (es le finestre di entrata e uscita di uno strumento ottico) siano perpendicolari rispetto al fascio incidente per diminuire l'effetto di deviazione e dispersione (aberrazioni di tipo cromatico)

Prisma (oggetto di materiale trasparente e a sezione triangolare)

un altro esempio di dispersione della luce si ha quando un fascio di luce bianca incide sulla superficie di un prisma



Da considerazioni geometriche sui triangoli:

$$\theta = \pi - (i - r) - (i' - r')$$

$$D = \pi - \theta = (i - r) + (i' - r')$$

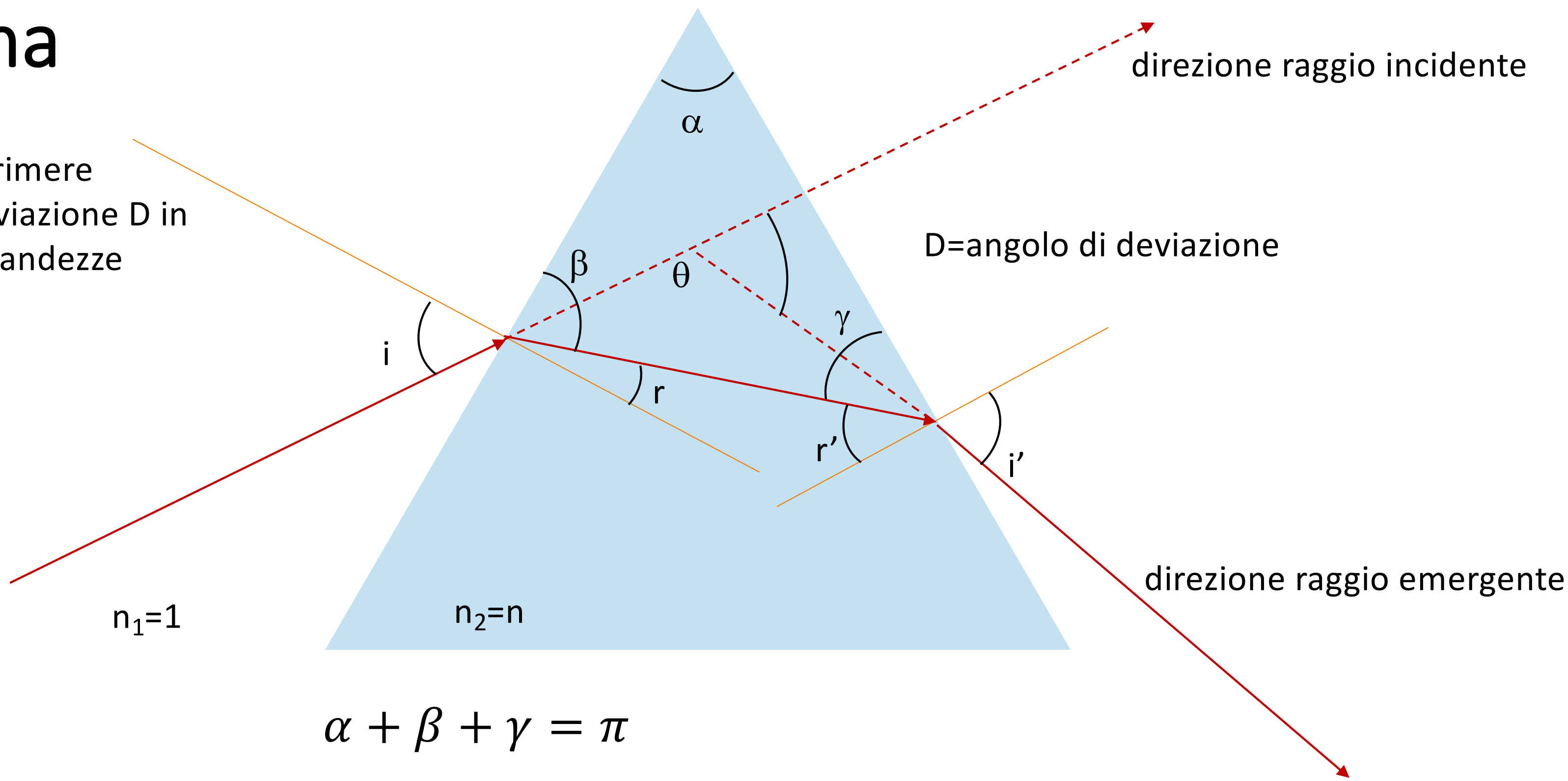
inoltre sappiamo che

$$\beta + r = \frac{\pi}{2} \qquad \gamma + r' = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \text{da cui} \quad \alpha = r + r'$$

Prisma

vogliamo esprimere l'angolo di deviazione D in funzione di grandezze misurabili



Risulta:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

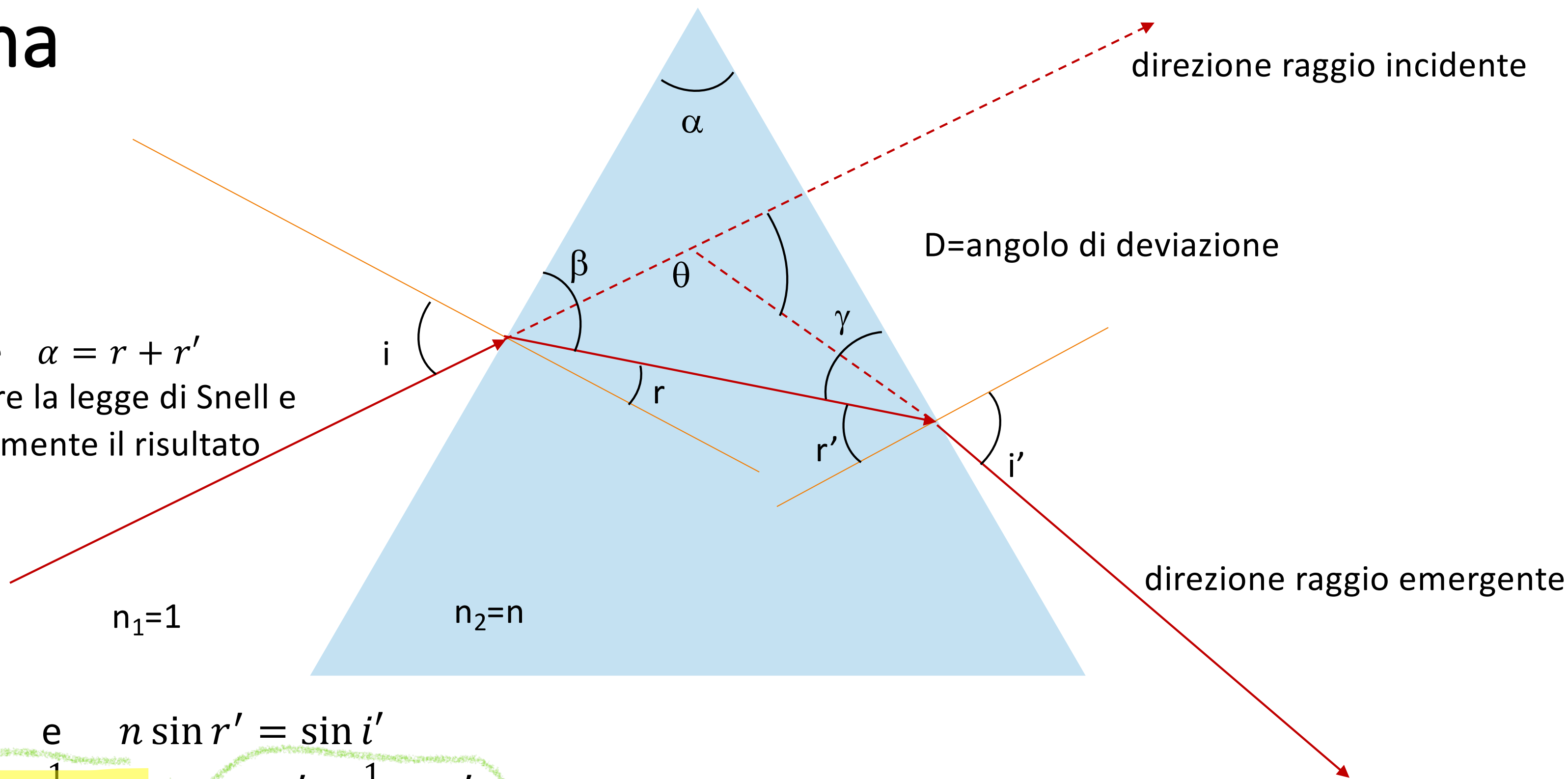
$$\alpha = \pi - \beta - \gamma = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - r\right) - \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = r + r'$$

e perciò:

$$D = i + i' - \alpha$$

Prisma

Partendo da
$D = i + i' - \alpha$ e $\alpha = r + r'$
possiamo applicare la legge di Snell e elaborare ulteriormente il risultato



Risulta:

$\sin i = n \sin r$ e $n \sin r' = \sin i'$

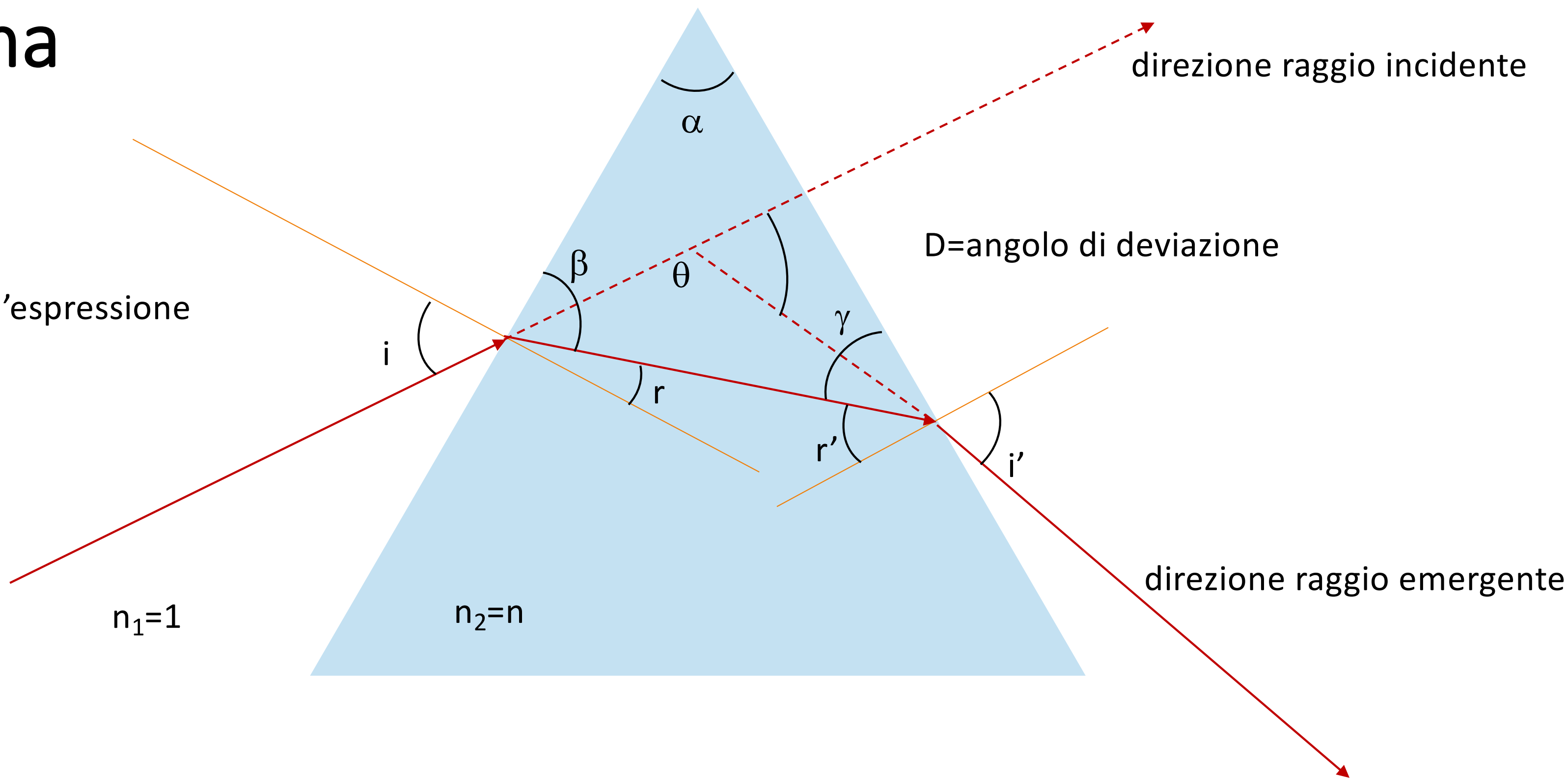
da cui $\sin r = \frac{1}{n} \sin i$ e $\sin r' = \frac{1}{n} \sin i'$

Partendo da $\sin i' = n \sin r' = n sin(\alpha - r) = n(\sin\alpha \cos r - \cos\alpha \sin r)$

e sostituendo il valore di cosr e sinr si ottiene:

$\sin i' = n\left(\sin\alpha \sqrt{1 - \frac{sin^2 i}{n^2}} - \cos\alpha \frac{\sin i}{n}\right)$ e semplificando n: $\sin i' = \sin\alpha \sqrt{n^2 - sin^2 i} - \cos\alpha \sin i$

Prisma



e sostituendo nell’espressione
$D = i + i' - \alpha$

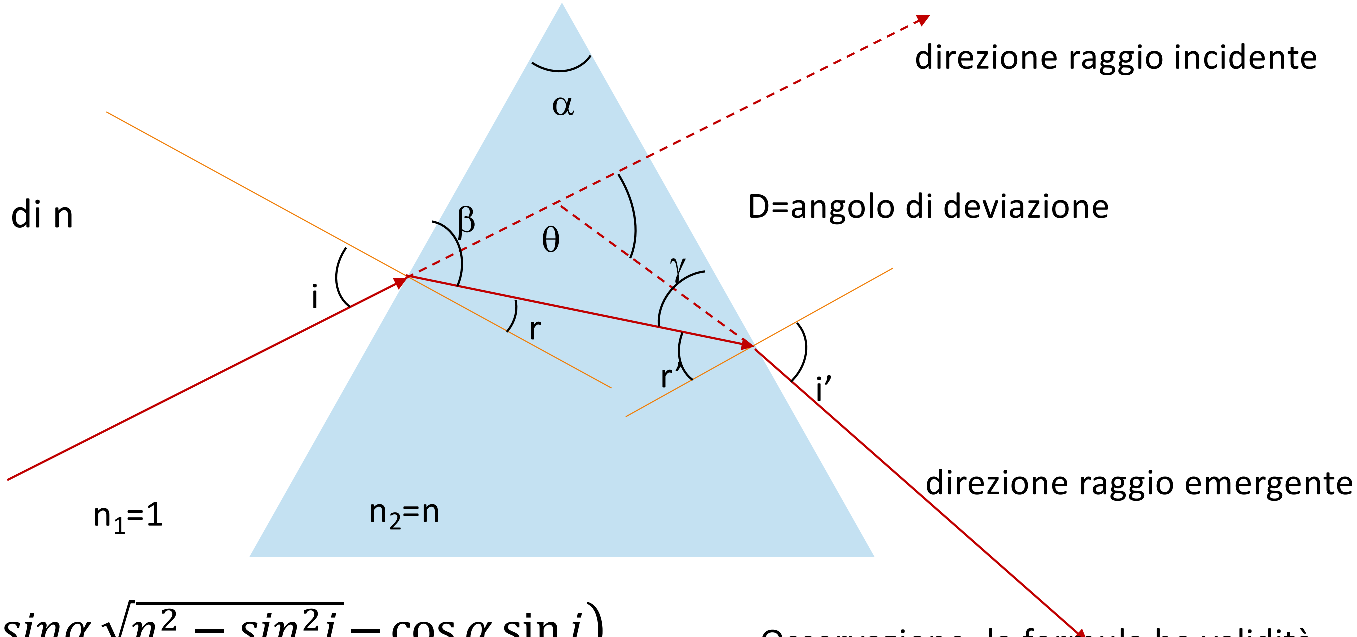
si ottiene:

$$D = i - \alpha + arcsin\left(sin\alpha\sqrt{n^2 - sin^2 i} - \cos\alpha \sin i\right)$$

equazione in cui l’unica grandezza da misurare è l’angolo di incidenza i

Uso del prisma per la misura di n

Dall’equazione ricavata nella slide precedente di puo’ estrarre il valore di n



parto da

$$D = i - \alpha + arcsin\left(sin\alpha\sqrt{n^2 - sin^2 i} - \cos\alpha \sin i\right)$$

ricavo:

$$n = \sqrt{(\sin(D + \alpha - i) + \sin i \cos\alpha)^2 \frac{1}{sin^2\alpha} + sin^2 i}$$

Osservazione: la formula ha validità generale

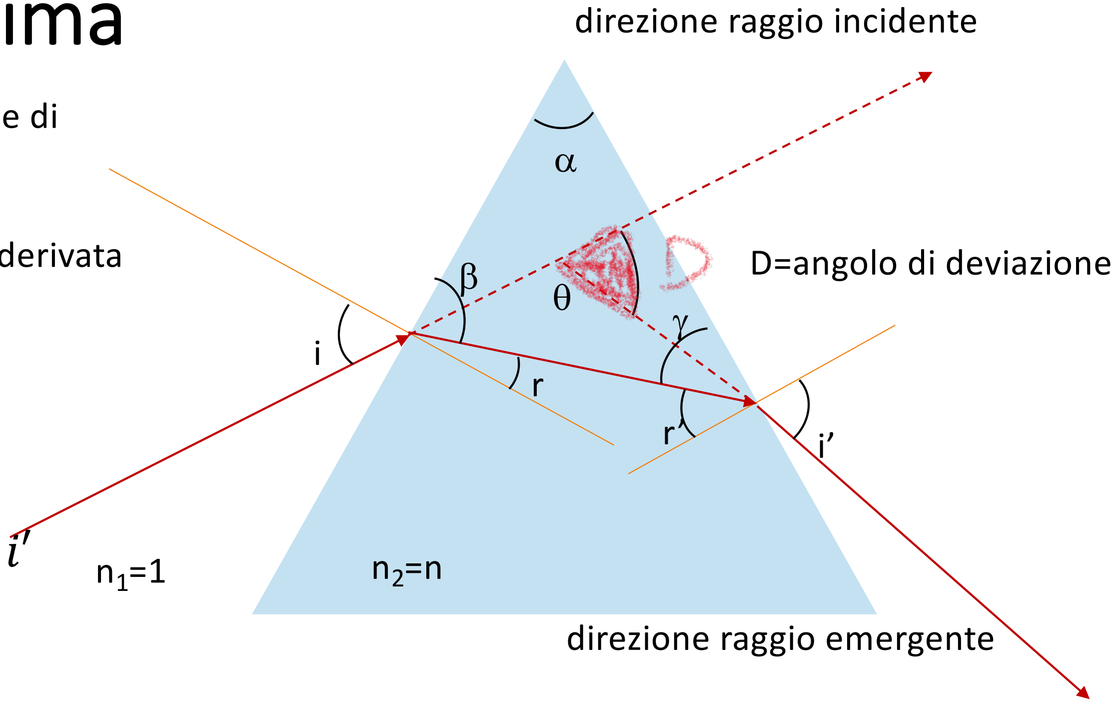
Esiste una condizione particolare per cui l’espressione possa essere semplificata?

Prisma in deviazione minima

Ipotesi: supponiamo di poter determinare la condizione di incidenza per cui l'angolo D è minimo

Ovvero valutiamo D in funzione di i e minimizziamo la derivata

$$\frac{dD}{di} = 0$$



parto da

$$D = i + i' - \alpha$$

$$\sin i = n \sin r \quad \text{e} \quad n \sin r' = \sin i'$$

differenziando ottengo

$$\cos i \, di = n \cos r \ dr$$
$$\mathrm{n} \cos r' \, dr' = \cos i' \ di'$$

da cui

$$di' = n \frac{\cos r'}{\cos i'} dr' \qquad dr = \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\cos r} di$$

ma ho anche:

$$\alpha = r + r'$$

ovvero

$$r' = \alpha - r$$

e differenziando

$$dr' = -dr$$

Prisma in deviazione minima

partendo da $dr' = -dr$ e ricordando che $dr = \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}di$

ottengo $dr' = -\frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}di$

sostituendo dr' in

$$di' = n\frac{\cos r'}{\cos i'}dr'$$

ottengo

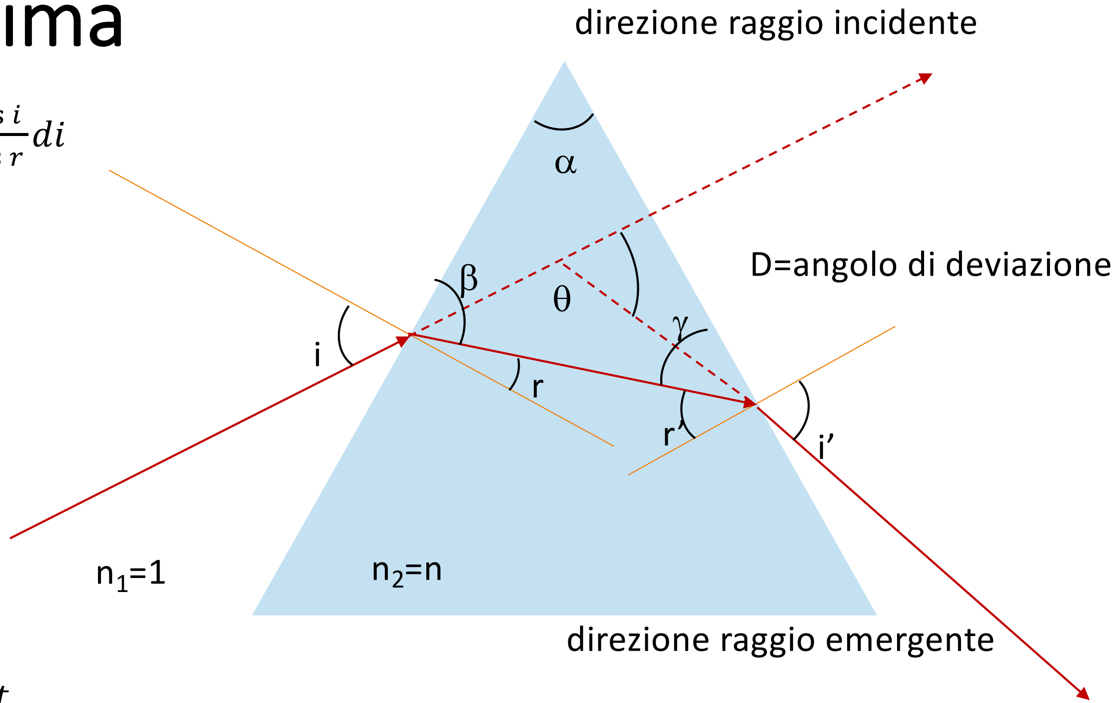
$$di' = -n\frac{\cos r'}{\cos i'}\frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}di$$

e differenziando $D = i + i' - \alpha$ $\alpha = cost$

$$dD = di + di'$$

sostituendo $di\ e\ \ di'$ e mettendo di' a fattor comune ottengo

$$dD = di\left(1 - \frac{\cos i}{\cos r}\frac{\cos r'}{\cos i'}\right)$$



Prisma in deviazione minima

partendo da

$$dD = di\left(1 - \frac{\cos i}{\cos r}\frac{\cos r'}{\cos i'}\right)$$

e minimizzando D rispetto a i otteniamo

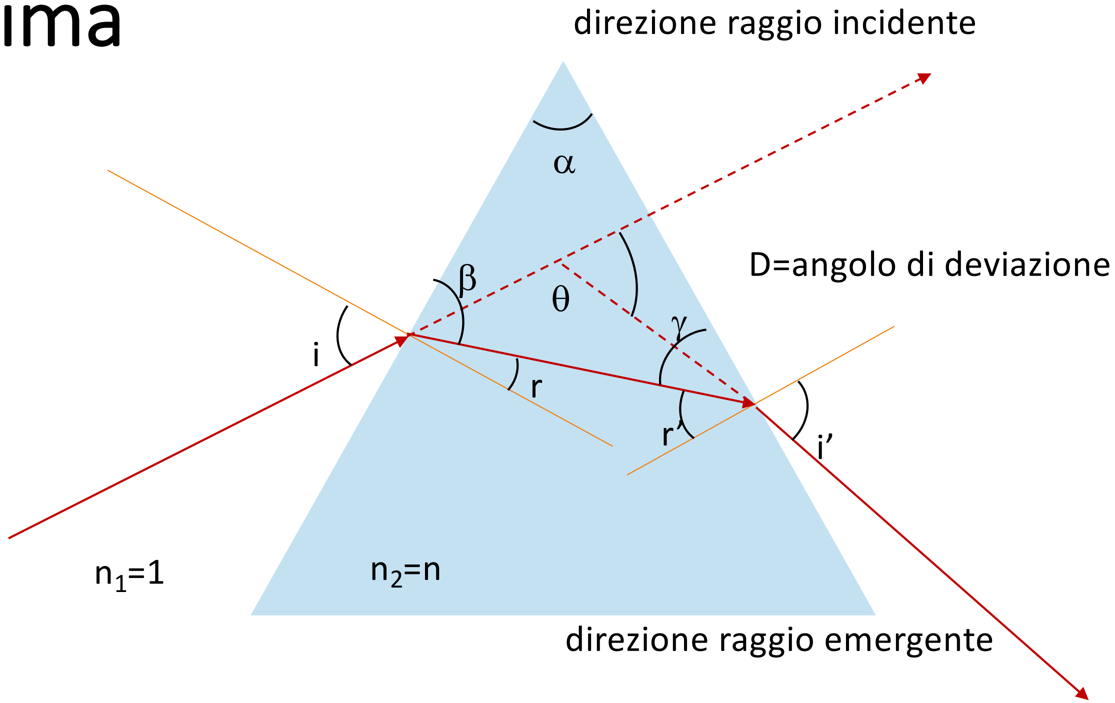
$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i}{\cos r}\frac{\cos r'}{\cos i'} = 0$$

ovvero

$$\cos i \cos r' = \cos r \cos i'$$

che risulta soddisfatta quando i=i' e r=r'

Ovvero il raggio viaggia parallelo alla base in un prisma equilatero



Misura di n in deviazione minima

partendo dalla condizione dD/di=0
soddisfatta quando i=i’ e r=r’ ricaviamo:

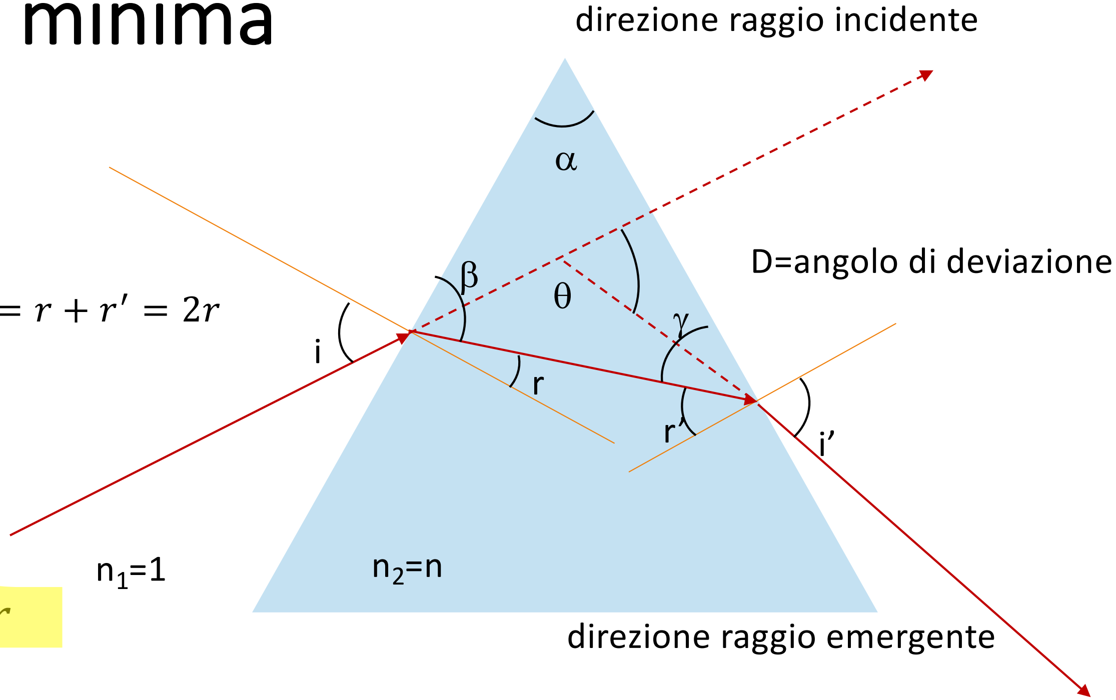
$$D_m = 2i - \alpha = 2i - 2r \qquad \alpha = r + r' = 2r$$

da cui

$$i = \frac{D_m + \alpha}{2} \quad \text{e} \quad r = \frac{\alpha}{2}$$

sostituendo nell’equazione $\sin i = n \sin r$
e risolvendo per n si ottiene

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + \alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$



osservazione: ovviamente n=n(λ) poichè la deviazione dipenderà dalla lunghezza d’onda del raggio incidente (DISPERSIONE)

Conclusioni

- Lamine e prismi possono essere usati in strumenti ottici per deviare opportunamente i raggi di luce
- Il prisma in particolare viene usato come strumento per separare le diverse componenti spettrali di un fascio di luce policromatico
- Il prisma può essere usato per la misura di n in funzione di λ
- E' uno degli elementi che costituiscono lo strumento denominato spettroscopio