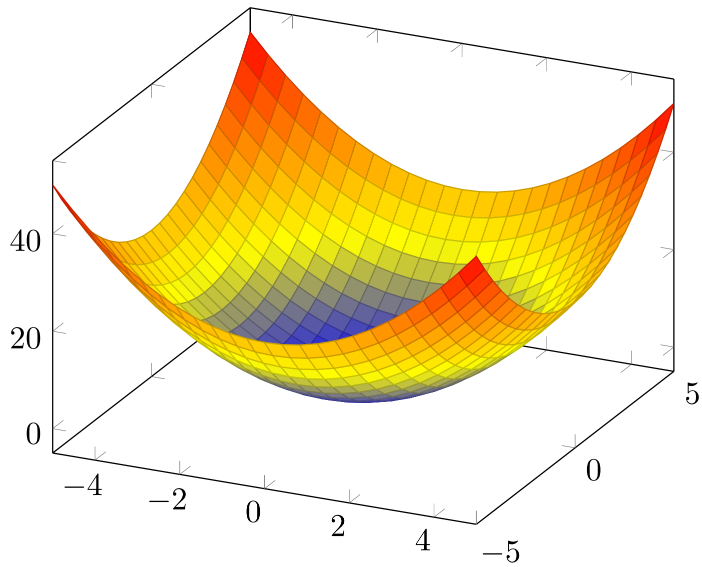
Fisica II

Riassunto da: *" - Mazzoldi, Nigro, Voci"*



Corso di Laurea in Fisica - Corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Settembre 2024

Indice

Elettrostatica

1.1 Campo elettrico

1.1.1 Dipolo elettrico

Definiamo **momento del dipolo**

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

Consideriamo un punto P nel quale misuriamo il potenziale, pari alla somma dei contributi delle due cariche:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

Ipotizziamo che P sia molto distante dal dipolo (rispetto alla distanza a) così che r_1 e r_2 siano sempre più assimilabili a due segmenti paralleli. Andiamo poi a tracciare un segmento perpendicolare a r_1 fino a r_2 evidenziando la distanza $r_2 - r_1 \approx a\cos\vartheta$.

Potenziale del dipolo

Con le seguenti approssimazioni andiamo a riscrivere il potenziale:

$$r_2 - r_1 \approx a\cos\vartheta \qquad\qquad r_1 r_2 \approx r^2$$

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a\cos\vartheta}{r^2}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Vediamo come a grandi distanze il potenziale del punto P dia *informazioni solo sul momento di dipolo* e non sulle due cariche o sulla loro distanza reciproca. A parità di momento si potranno avere due cariche ravvicinate e molto cariche o più distanti e meno cariche.

Campo elettrico del dipolo

Riscrivendo r e $\cos\vartheta$ esprimiamo il potenziale come

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a\cos\vartheta}{r^2}\right)$$

$$V(P) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dalla relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ otteniamo l'espressioni del campo elettrico

$$\vec{E} = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xz}{r^5},\ \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3yz}{r^5},\ \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\right)$$

$$E(P) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta + 1}$$

Concludiamo osservando che il campo elettrico del dipolo varia con r^3 (il monopolo con r^2) e dipende anche dall'angolo ϑ.

1.2 Flusso di campo elettrico

Definiamo flusso di un campo vettoriale $\vec{E}$ l'integrale

$$\Phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma$$

dove $\hat{u}_n$ è il versore normale alla porzione infinitesima di superficie $d\Sigma$. Vediamo che il prodotto scalare fa sì che contribuisca solo la componente di campo vettoriale ortogonale alla superficie.

Mostriamo come il flusso *dipenda solo dall'angolo solido sotto il quale la superficie vede la carica.* Prima di tutto qualche osservazione geometrica:

$$d\vartheta = \frac{ds}{r} \qquad ds'\cos\alpha = ds \;\rightarrow\; d\vartheta = \frac{ds'\cos\alpha}{r}$$

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_0}{r^2} \qquad d\Sigma\cos\alpha = d\Sigma_0 \;\rightarrow\; d\Omega = \frac{d\Sigma\cos\alpha}{r^2}$$

Andiamo ora a calcolare il flusso attraverso $d\Sigma$:

$$\begin{aligned} d\Phi =& \vec{E}\cdot\hat{u}_n d\Sigma \\ =& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma \\ =& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}|\hat{u}_r||\hat{u}_n|\cos\alpha\, d\Sigma \\ =& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}|\hat{u}_r||\hat{u}_n|\; d\Sigma_0 \\ =& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\; d\Sigma_0 \\ =& \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\; d\Omega \quad \rightarrow \quad \Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega \end{aligned}$$

Quindi se consideriamo una superficie chiusa si ha un angolo solido

$$d\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

e di conseguenza

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}} \tag{1.1}$$

Se la carica esterna il flusso è nullo (le cariche esterne contribuiscono solo al campo elettrico). Inoltre se consideriamo più cariche, o addirittura una distribuzione omogenea di cariche si hanno i seguenti valori di flusso:

distribuzione finita di cariche: $\quad \Phi = \oint \vec{E}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma \;=\; \sum_i \frac{q_{i(int)}}{\varepsilon_0}$

distribuzione continua di cariche: $\quad \Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(x,y,z)\, d\tau$

Rotore di un campo vettoriale

Viene definito rotore del campo elettrico $\vec{E}$ il prodotto vettoriale

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

Questo rappresenta la capacità del campo elettrico di *formare vortici*, ovvero di generare linee di forza che si richiudono su loro stesse.

Poiché anche il rotore del campo elettrico è un campo vettoriale, è possibile definirne un suo flusso:

$$\Phi(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \int_{\Sigma} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

Teorema di Stokes

La circuitazione è uguale al flusso del rotore:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma_\gamma} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \right) \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

Qui è espresso nel caso del campo elettrico dove si ha che la circuitazione è nulla qualunque sia la curva γ (a patto che sia chiusa). Allora il flusso del rotore è nullo qualunque sia la superficie ed è possibile solo se il rotore di $\vec{E}$ è nullo:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

Dire che il rotore è nullo equivale a dire che il capo elettrico è **irrotazionale**, ovvero che le sue linee di forza non possono chiudersi su loro stesse; il campo elettrico "non forma vortici".

L'annullarsi del rotore non è un fatto sorprendente. Sappiamo infatti che il rotore di un gradiente è sempre nullo e che il campo elettrostatico conservativo può essere scritto come gradiente della funzione scalare del potenziale elettrostatico V:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \left(-\vec{\nabla} V \right)$$

1.2.1 Discontinuità di carica