

Onde Fluidi e Termodinamica

Riassunto da:

"FISICA: Meccanica e Termodinamica - P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci"

corso A

Università degli studi di Torino, Torino

Maggio 2024

Indice

1	Onde	4
1.1	Onde meccaniche	4
1.1.1	Onde in una sbarra solida	5
1.1.2	Onde in una corda tesa	7
1.1.3	Onde nei gas	8
	Densità	8
	Pressione	9
	Forza	9
	Modulo di compressibilità adiabatica	9
1.2	Onde piane armoniche	11
1.2.1	Propagazione dell'energia in una barra solida	12
	Energia per unità di volume	12
	Intensità dell'onda	13
1.2.2	Propagazione dell'energia in una corda tesa	13
	Energia per unità di lunghezza	14
1.3	Onde sonore	14
1.3.1	Pressione	14
1.3.2	Potenza	15
1.3.3	Intensità	15
1.3.4	Fonometria	15
	Livello sonoro	16
1.4	Onde in più dimensioni	16
1.4.1	Onde elastiche in una membrana tesa	17
1.4.2	Onde sferiche	18
	Intensità	18
1.4.3	Onde cilindriche	18
1.4.4	Assorbimento dell'energia	20
1.5	Pacchetti d'onde	21
1.5.1	Velocità di fase e velocità di gruppo	21
1.6	Effetto Doppler	24
1.6.1	Sorgente in moto	24
1.6.2	Rivelatore in moto	25
1.6.3	Espressione generale	25
1.6.4	Onda d'urto	25
1.6.5	Onde sferiche	26
1.7	Interferenza	26
1.7.1	Interferenza con stessa ampiezza	26
1.7.2	Interferenza costruttiva e distruttiva	27
1.7.3	Interferenza con ampiezze diverse	27
1.7.4	Interferenza costruttiva e distruttiva	28
1.7.5	Sorgenti puntiformi	28
1.8	Riflessione e trasmissione	29

1.9	Onde stazionarie	30
1.9.1	Corda tesa con due estremi fissi	31
1.9.2	Corda tesa con un estremo fisso	32
1.9.3	Onde stazionarie in una colonna di gas	32
1.9.4	Timbro	32
2	Fluidodinamica	34
2.1	Pressione	34
2.1.1	Equilibrio statico di un fluido	34
2.1.2	Lavoro della pressione	36
2.1.3	Equilibrio in presenza di forza peso	36
2.2	Principio di Archimede	36
2.3	Liquido in rotazione	37
2.4	Moto di un fluido	38
2.4.1	Descrizioni del moto	39
2.4.2	Tubi di flusso e portata	39
2.4.3	Teorema di Bernoulli	40
2.4.4	Moto laminare	41
2.4.5	Moto turbolento	41
2.4.6	Effetto Magnus e Portanza	42
3	Termodinamica - I principio	44
3.1	Termometria	44
3.1.1	Variabili termodinamiche	44
3.2	Equilibrio termico	45
3.2.1	Termometro a gas	47
3.2.2	Dilatazione termica	47
3.3	Esperimenti di Joule	47
3.3.1	Primo principio della termodinamica	48
3.3.2	Energia interna	48
3.3.3	Trasformazioni termodinamiche	49
3.4	Calorimetria	50
3.4.1	Calore specifico	51
	Misura del calore specifico	51
	Processi isotermi: cambiamenti di fase	52
	Sorgenti di calore	52
3.5	Trasmissione del calore	52
3.5.1	Conduzione	52
3.5.2	Convezione	55
3.5.3	Irraggiamento	55
3.5.4	Calore tra solido e fluido	55
4	Gas ideali e reali	56
4.0.1	Legge isoterma di Boyle	56
4.0.2	Legge isobara di Gay-Lussac	56
4.0.3	Legge isocora di Gay-Lussac	56
4.0.4	Legge di avogadro	57
4.0.5	Equazione di stato dei gas ideali	57
4.1	Trasformazioni di un gas	57
4.1.1	Calore e energia interna del gas ideale	58
4.2	Relazione di Mayer	58
4.3	Trasformazioni adiabatiche	58
4.4	Trasformazioni	58
4.5	Rendimento	58
4.6	Cicli	58

4.7	Gas reali	58
4.8	Teoria cinetica dei gas ideali	58
5	Termodinamica - II principio	59
5.1	Secondo principio della termodinamica	59
5.1.1	Enunciato di Kelvin-Planck	59
5.1.2	Enunciato di Clausius	59
	Ciclo monoterme	60
5.2	Teorema di Carnot - espressione matematica	60
	Studio del rendimento massimo	61
5.2.1	Teorema di Clausius	61
5.2.2	Temperatura termodinamica assoluta	62
5.3	Entropia	64
5.3.1	Principio di aumento dell'entropia	64
5.3.2	Calcoli di variazione di entropia	65
	Scambi di calore con sorgenti	65
	Scambi di calore tra corpi	65
	Cambiamenti di fase	65
5.3.3	Energia inutilizzabile	65

Onde

1.1 Onde meccaniche

Se in casi come il pendolo o un corpo attaccato ad una molla l'oscillazione è **macroscopica** perché tutto il sistema oscilla, in corpi continui elastici possono prodursi moti oscillatori locali, provocati in una zona specifica del corpo. Questa oscillazione indotta localmente si **propaga nel mezzo** con una certa velocità costituendo così un'onda.

Definizione: **Onda**

Un'onda è una perturbazione locale impulsiva e periodica che si propaga in un mezzo (corpo continuo ed elastico) con una certa velocità v . Nel caso unidimensionale parliamo di **onda piana** $\xi(x, t)$ la cui deformazione è costante in tutti i punti con stessa x

Per descrivere l'andamento di un'onda possiamo: **fissare un istante** t e osservare la deformazione su tutto lo spazio x , come se fosse una foto dell'onda; oppure **fissare un punto dello spazio** x e osservare al variare del tempo come varia la forma dell'onda, come se fosse un filmato.

inserire grafici

Vediamo ora come possiamo scrivere l'equazione che descrive la perturbazione in funzione della posizione \mathbf{x} e del tempo \mathbf{t} : per farlo serviamoci di un sistema di riferimento \mathbf{O} solidale con l'istante $t = 0$ e un sistema di riferimento \mathbf{O}' solidale con lo spostamento dell'onda che viaggia a velocità v .

Possiamo quindi descrivere la posizione l'andamento di un'onda piana tramite una funzione del tipo

$$\begin{cases} x' = x \pm vt \\ \xi' = \xi \end{cases} \Rightarrow \xi(x, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} \pm \mathbf{vt})$$

Una funzione del tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x} \pm \mathbf{vt})$ soddisfa l'equazione differenziale detta **equazione delle onde** o **equazione di d'Alembert**:

$$\nabla_{\xi}^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

— dimostrazione —

$$z = x - vt \iff \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 1} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = -v} \iff f = f(z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \frac{\partial f}{\partial z} \right) = -v \frac{\partial}{\partial z} \left(-v \frac{\partial f}{\partial z} \right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

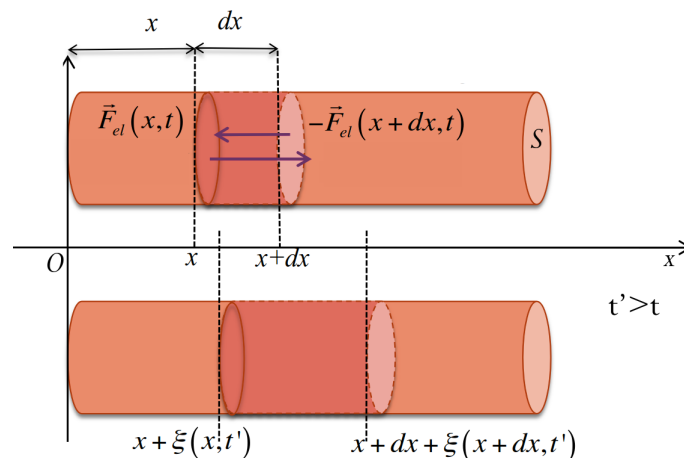
Il passaggio più ambiguo è quello evidenziato in **ciano**, in cui viene cambiata variabile di derivazione da t a z . Trattando una funzione qualsiasi, la derivata di qualsiasi funzione rispetto a t è uguale a $-v$ derivata rispetto a z ($-v$ rappresenta il dz che va a moltiplicare).

Notare che l'equazione delle onde è soddisfatta solo per funzioni che hanno come argomento combinazioni lineari di x e t ($\xi(x \pm vt)$); è perciò **l'argomento che importa e non la funzione in sè**. Una combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione dell'equazione, la soluzione generale ha forma

$$G(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

1.1.1 Onde in una sbarra solida

Prendiamo una sbarra solida e supponiamo di sollecitare il tratto iniziale applicando una **forza impulsiva**. Analizziamo un segmento di lunghezza dx : su di esso agiscono la forza elastica $F(x, t)$ esercitata dagli elementi a sinistra del segmento e la forza elastica $-F(x + dx, t)$ di verso opposto esercitata dagli elementi a destra.



Alla cessazione dello stimolo (t') agiscono le forze elastiche e si ha che la lunghezza dell'elemento passa da dx a

$$(x + dx) + \xi(x + dx, t') - x - \xi(x, t') = dx + d\xi$$

Per quanto riguarda le forze invece vale la legge di Hooke secondo la quale

$$\text{Legge di Hooke} \quad F(x) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Possiamo quindi scrivere la legge del moto con accelerazione $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$:

$$\text{Risultante} \quad dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = d\mathbf{ma} = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

esprimendo la massa come $dm = \rho S dx$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

$$ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.1)$$

Inoltre oltre allo spostamento $\xi(x, t)$ si propaga anche la forza $F(x, t)$. Ciò è verificabile riutilizzando l'espressione della forza nella Legge di Hooke (derivandola prima rispetto a t e poi rispetto a x) e ricordando il Teorema di Schwartz, secondo il quale in una derivata mista non dipende dall'ordine di derivazione:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(ES v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.2)$$

Definizione: onde lognitudinali

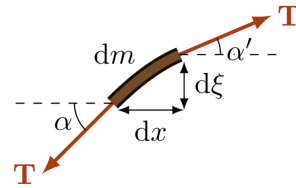
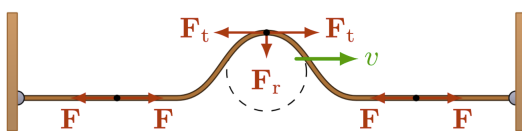
Quando, come in questo caso, sia lo spostamento $\xi(x \pm vt)$ sia la forza $F(x \pm vt)$, campi che descrivono le onde che si propagano lungo l'asse x , sono paralleli alla direzione in cui si propaga la perturbazione, l'onda viene chiamata **onda longitudinale**.

1.1.2 Onde in una corda tesa

Quando si sposta rapidamente in direzione trasversale l'estremo di una corda tesa (con un estremo fisso) vediamo la perturbazione che si propaga lungo la corda da un estremo all'altro. Supponiamo di spostare leggermente la corda dalla sua posizione di equilibrio e andiamo a studiare le tensioni che agiscono su un segmento di corda dl . Per piccoli angoli α e α' possiamo introdurre le seguenti approssimazioni:

$$\cos \alpha = 1 \quad \cos \alpha' = 1 \quad \sin \alpha = \tan \alpha \quad \sin \alpha' = \tan \alpha'$$

$$\tan \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} = S(x, t)$$



$$dF_x = T(\cos \alpha' - \cos \alpha) = 0$$

$$\begin{aligned} dF_y &= T(\sin \alpha' - \sin \alpha) = T(\tan \alpha' - \tan \alpha) \\ &= T[S(x + dx, t) - S(x)] = T dS = T \frac{\partial S}{\partial x} dx \\ &= T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{Risultante} \quad dF = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = d\mathbf{ma} = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

esprimendo la massa come $dm = \mu dx$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

$$T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (1.3)$$

Definizione: onde trasversali

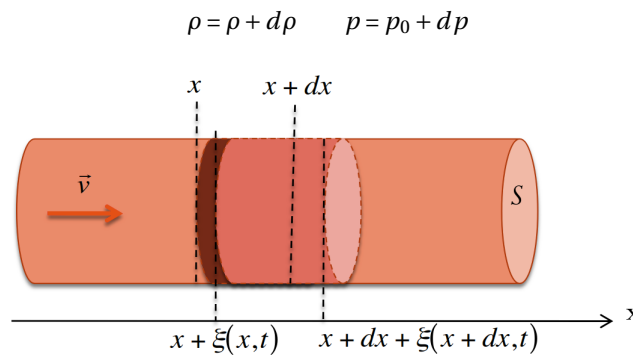
Quando, come in questo caso, le particelle del mezzo attraversato subiscono spostamenti in direzione perpendicolare alla direzione in cui si propaga l'onda l'onda viene chiamata **onda trasversale**.

1.1.3 Onde nei gas

Se per i solidi la deformazione dipende dal modulo di Young secondo la legge $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\sigma$, nel caso dei gas la variazione relativa di volume segue la legge

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta}\Delta p$$

Supponiamo di avere del gas imperturbato (ρ_0, p_0) bloccato da due pistoni. Fornendo un impulso di pressione tramite i pistoni provochiamo una compressione adiacente con una **conseguenti variazione di densità di massa**.



Densità

Considero un elemento di gas di massa $dm = \rho_0 S(dx)$ che a seguito della perturbazione subisce uno spostamento che lo porta a stare tra

$$x + \xi(x, t') \quad \text{e} \quad x + dx + \xi(x + dx, t')$$

Così la sua dimensione diventa

$$x + dx + \xi(x + dx, t') - x - \xi(x, t') = dx + \xi(x + dx, t') - \xi(x, t') = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

A partire da questa nuova espressione della "larghezza" dell'elemento infinitesimo posso scrivere l'espressione della densità dopo la compressione:

$$\rho(x, t) = \frac{dm}{dV} = \frac{\rho_0 S(dx)}{S dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)} = \rho_0 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1}$$

Ora andremo ad applicare una semplificazione bizzarra. Se la deformazione specifica $|\epsilon| = \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \ll 1$, allora si può applicare la formula del binomio:

$$(1 + \epsilon)^{-n} = 1 - n\epsilon + \frac{n(n+1)}{2!}\epsilon^2 \dots$$

Quindi posso scrivere la densità come

$$\rho(x, t) \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

da cui la variazione

$$d\rho(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.4)$$

in cui il segno meno indica che se il volumetto è compresso la densità aumenta, mentre se si espande la densità diminuisce.

Pressione

Ad una variazione di densità corrisponde una variazione di pressione secondo la legge

$$\beta = \rho_0 \frac{dp}{d\rho} \rightarrow dp(x, t) = p(x, t) - p_0 = \beta \frac{d\rho}{\rho_0}$$

da cui derivo che la pressione è

$$p(x, t) = \beta \frac{d\rho}{\rho_0} + p_0$$

Sostituendo l'espressione della densità trovata prima nella 1.4 scrivo

$$p(x, t) = \beta \frac{-\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}}{\rho_0} + p_0 = p_0 - \beta \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.5)$$

Forza

La variazione di pressione causa un movimento del gas e la risultante su dm è

$$\begin{aligned} -dF &= F(x, t') - F(x + dx, t') = S[p(x, t') - p(x + dx, t')] \\ &= S(dp) \\ &= -S \frac{\partial p}{\partial x} dx \\ &= -S \frac{\partial}{\partial x} \left(p_0 - \beta \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx \\ &= S\beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{Risultante} \quad -dF = S\beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \mathbf{d}ma = \rho_0 S(dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad (1.6)$$

Lungo la colonna di gas si propagano anche un'onda di pressione e una perturbazione di densità del gas, tutte con la stessa velocità data da 1.6.

Modulo di compressibilità adiabatica

Nel caso di trasformazioni adiabatiche vale (come dimostreremo più avanti) l'uguaglianza

$$pV^\gamma = \text{costante}$$

dalla quale, sviluppando il differenziale si possono trovare alcune caratteristiche di β in condizioni adiabatiche:

$$\begin{aligned} d(pV^\gamma) &= V^\gamma(dp) + \gamma pV^{\gamma-1}dV = 0 \\ \rightarrow V^\gamma(dp) &= -\gamma pV^{\gamma-1}(dV) \rightarrow \frac{V^\gamma(dp)}{pV^\gamma} = \frac{-\gamma pV^{\gamma-1}(dV)}{pV^\gamma} \end{aligned}$$

Dalla quale otteniamo (confrontata con l'espressione precedente di β)

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{p\gamma} dp \qquad \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta} \Delta p$$

Da cui si ottiene la nuova espressione di β

$$\beta = \gamma p \tag{1.7}$$

calcolo velocità del suono

Se assimiliamo l'aria ad un gas perfetto biatomico ($\gamma = 7/5$) dai risultati ottenuti fin'ora si trova che:

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{(7/5) \cdot 1.01325 \cdot 10^5}{1.29}} = 331.6 \frac{m}{s}$$

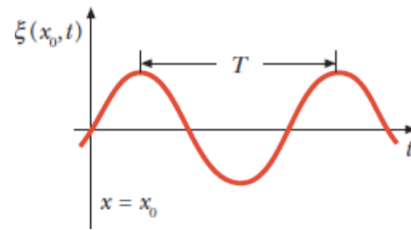
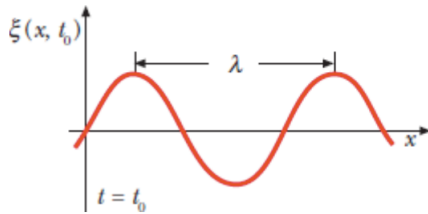
Il risultato ottenuto è in accordo (3%) con quello misurato, possiamo quindi dedurre che l'approssimazione adiabatica è una buona approssimazione.

1.2 Onde piane armoniche

Un tipo molto importante di onda piana è l'**onda armonica** la cui forma si scrive

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \mp \omega t + \delta)$$

dove k è il **numero d'onda**.



Periodo spaziale Fissato un tempo $t = t_0$, definiamo la lunghezza d'onda λ come la periodicità spaziale dell'onda. Essendo λ lo spazio tra due creste d'onda possiamo calcolarla come $\lambda = x_2 - x_1 = 2\pi/k$, da cui si deduce che k è uguale al numero di lunghezze d'onda in un intervallo spaziale pari a 2π metri.

In generale il periodo spaziale può essere espresso tramite λ o k .

Lunghezza d'onda λ —

La lunghezza d'onda è lo spazio percorso dalla perturbazione nell'intervallo di tempo di un periodo T .

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = vT$$

Periodo temporale Fissato un punto nello spazio $x = x_0$, definiamo il periodo $T = t_2 - t_1$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

come l'intervallo temporale tra due istanti nei quali l'onda, essendo armonica, assume lo stesso valore.

Sapendo che la pulsazione è la velocità dell'onda nel percorrere un giro (2π), i due periodi sono legati dalla relazione

$$\lambda = vT$$

Quindi possiamo esprimere il periodo temporale tramite T , f , ω .

Tutte le espressioni della funzione d'onda sono:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx \mp \omega t + \delta) \quad \xi(x, t) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) + \delta\right] \quad \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt) + \delta\right]$$

1.2.1 Propagazione dell'energia in una barra solida

La propagazione di un campo che descrive in'onda è sempre accompagnato da una propagazione di energia. Osserviamo prima il fenomeno del flusso di energia legato alla propagazione di un'onda piana armonica in una barra solida andando a calcolare la potenza media e l'energia per unità di volume ad essa associata.

Per prima cosa mettiamo in evidenza le equazioni che entrano in gioco:

$$\text{Onda: } \xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\text{Forza: } F = -ES \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

L'espressione della potenza è

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= F \cdot \vec{u} \\ &= -ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ &= -ES [k\xi_0 \cos(kx - \omega t)] [-\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)] \\ &= ES k \omega \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

La potenza quindi è una cosinusoide traslata in alto di una sua ampiezza (con avvallamenti tangenti all'asse orizzontale). la potenza media è esprimibile come la retta che interseca la cosinusoide alla quota pari a metà la sua ampiezza; poi ricordandoci che

$$\boxed{v = \sqrt{E/\rho} \quad E = v^2 \rho} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m &= \frac{1}{2} ES k \omega \xi_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (v^2 \rho) S \left(\frac{\omega}{v} \right) \omega \xi_0^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 S v} \quad (1.8)$$

Energia per unità di volume

Considero l'elemento infinitesimo di massa $dm = \rho dV = \rho S dx$ descrive un moto armonico con

$$\text{Posizione: } \xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\text{Velocità } v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Quindi l'energia meccanica risulta pari all'energia cinetica massima assunto dall'elemento dm , che si trova utilizzando la velocità massima $v_{\max} = \omega \xi_0$:

$$dU = \frac{1}{2} (dm) v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \rho S (dx) \omega^2 \xi_0^2 = \frac{1}{2} \rho (dV) \omega^2 \xi_0^2$$

Chiamiamo **densità di energia per unità di volume** il valore

$$\mathcal{W} = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

con la quale possiamo esprimere la potenza media come

$$\boxed{\mathcal{P}_m = \mathcal{W} S v} \quad (1.9)$$

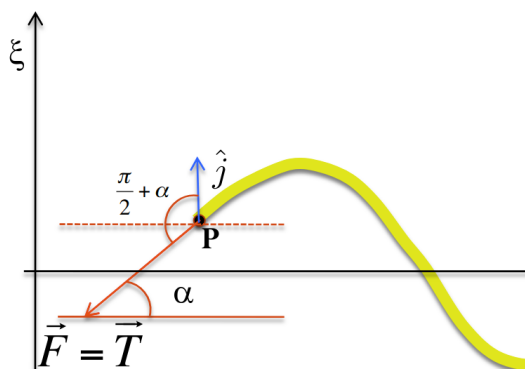
Intensità dell'onda

Definiamo l'intensità di un'onda come **potenza media per unità di superficie**, quindi

$$I = \frac{\mathcal{P}_m}{S} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 v$$

1.2.2 Propagazione dell'energia in una corda tesa

Studiamo ora lo stesso fenomeno ma in una corda tesa. La situazione è simile con la differenza che l'onda ora è trasversale.



Per prima cosa mettiamo in evidenza le equazioni che entrano in gioco:

Onda: $\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$

Forza: $F = T$

L'espressione della potenza è

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= F \cdot \vec{u} \\ &= T \frac{\partial \xi}{\partial t} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= T \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= T k \omega \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Trovo la potenza media come prima esprimendo k e T come

$$\boxed{v = \sqrt{T/\mu} \quad T = v^2 \mu} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \xi_0^2 v$$

(1.10)

Energia per unità di lunghezza

Considero l'elemento infinitesimo di massa $dm = \mu dx$ descrive un moto armonico con

$$\textbf{Posizione: } \xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Velocità } v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Quindi l'energia meccanica risulta pari all'energia cinetica massima assunto dall'elemento dm , che si trova utilizzando la velocità massima $v_{\max} = \omega \xi_0$:

$$dU = \frac{1}{2} (dm) v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \mu (dx) \omega^2 \xi_0^2$$

Chiamiamo **densità di energia per unità di lunghezza** il valore

$$\mathcal{W} = \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \xi_0^2$$

con la quale possiamo esprimere la potenza media come

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{W} v \quad (1.11)$$

1.3 Onde sonore

Consideriamo ora delle onde sonore come onde di spostamento sempre accompagnate da onde di pressione:

$$\textbf{Spostamento: } \xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Pressione: } dp = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

1.3.1 Pressione

L'espressione della pressione era stata ricavata nel capitolo sulle onde nei gas (1.5)

$$p(x, t) = p_0 - \beta \frac{\partial \xi}{\partial x} \rightarrow dp(x, t) = p(x, t) - p_0 = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Sviluppando la derivata parziale, e ricordando alcune equivalenze

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \rightarrow \beta = v^2 \rho_0} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

troviamo

$$\begin{aligned} dp &= -\beta k \xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ &= v^2 \rho_0 \frac{\omega}{v} \cos(kx - \omega t) \\ &= \rho_0 v \omega \xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ &= \Delta p_{\max} \sin(kx - \omega t - \pi/2) \end{aligned}$$

Le onde di pressione sono quindi in ritardo di $\pi/2$.

1.3.2 Potenza

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = (dp)Sv = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial x} S \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \beta k \xi_0 \cos(kx - \omega t) S \omega \xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ &= v^2 \rho_0 \frac{\omega}{v} \xi_0 \cos(kx - \omega t) S \omega \xi_0 \cos(kx - \omega t) \\ &= \rho_0 v \omega^2 S \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)\end{aligned}$$

Si ottiene quindi una potenza media pari a metà la sua ampiezza

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 S \xi_0^2$$

1.3.3 Intensità

Ricordando che l'intensità è la potenza per unità di superficie:

$$I = \frac{\mathcal{P}_m}{S} = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 \xi_0^2$$

Riconosciamo che $\Delta p_{\max} = \rho_0 v \omega \xi_0$ e che quindi possiamo scrivere l'intensità come

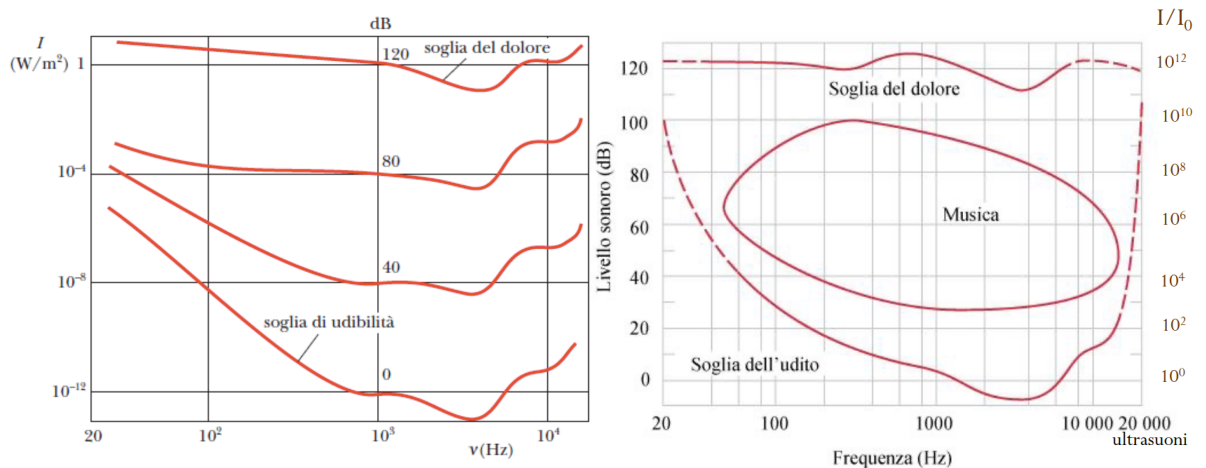
$$I = \frac{(\rho_0 v \omega \xi_0)^2}{2 \rho_0 v} = \frac{\Delta p_{\max}^2}{2 \rho_0 v} \quad (1.12)$$

1.3.4 Fonometria

Per essere messo in movimento il timpano ha bisogno di un'intensità minima che chiamiamo **soglia di udibilità**. Il limite superiore invece è chiamata **soglia del dolore** e rappresenta l'intensità sopra alla quale si percepisce una sensazione dolorosa. Entrambe vengono espresse o in funzione della frequenza o in funzione della lunghezza d'onda ($\lambda = v/f$); si ha quindi che le frequenze all'interno delle due soglie sono

$$20 \text{ Hz} < f < 20000 \text{ Hz}$$

$$17.15 \text{ m} < \lambda < 1.715 \text{ cm}$$



La **soglia minima** convenzionale dell'udibilità è l'intensità $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ alla frequenza $f = 10^3 \text{ Hz}$. A questa si possono associare la corrispondente onda di pressione e ampiezza delle oscillazioni:

$$\Delta p_{\max} = \sqrt{2 \rho_0 v I_0} = 2.97 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

e poiché $\Delta p_{\max} = \rho_0 v \omega \xi_0$

$$\xi_0 = \frac{\Delta p_{\max}}{2\pi f \rho_0 v} = 1.07 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Alla soglia del dolore invece si ottengono

$$\Delta p_{\max} = \sqrt{2\rho_0 v I_0} = 29.7 \text{ Pa}$$

$$\xi_0 = \frac{\Delta p_{\max}}{2\pi f \rho_0 v} = 1.07 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

In sintesi: l'orecchio umano si estende su

- **3 ordini di grandezza in frequenza:** $0 - 10^3 \text{ Hz}$
- **12 ordini di grandezza in intensità:** $1 - 10^{12} \text{ W/m}^2$
- **6 ordini di grandezza in ampiezza di oscillazione:** $10^{-11} - 10^{-5} \text{ m}$

Livello sonoro

Presa una certa intensità I si definisce un **livello sonoro** L rispetto a I_0 . Il livello sonoro è una valutazione logaritmica relativa di intensità e si esprime in decibel (dB).

Al livello sonoro associamo delle curve isofoniche, ovvero il luogo dei punti in cui si percepisce la stessa sensazione uditiva S .

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (1.13)$$

Vediamo come il livello sonoro risulta essere particolarmente pratico poiché $L = 0$ con I_0 per $f = 1000 \text{ Hz}$, quindi vale 0 alla soglia di udibilità; e vale **120** con $I/I_0 = 10^{12}$ alla soglia del dolore.

Attenzione

Il valore d'intensità I_0 **dipende dalla frequenza**. Per questo anche il livello sonoro L non dipende tanto da I_0 quanto più dalla frequenza.

Le curve isofoniche infatti non descrivono eguale intensità I ma eguale rapporto I/I_0 , che dipende dalla frequenza. Possiamo dire che S è una grandezza *fisiologica* e L una grandezza fisica.

Secondo la **legge psicofisica di Fechner e Weber**

$$S = kB = k 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = k' \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

quindi

$$S_2 - S_1 = k' \log_{10} \frac{I_2}{I_1} \quad (1.14)$$

la sensazione sonora è proporzionale al logaritmo del rapporto tra le intensità che hanno prodotto le sensazioni

1.4 Onde in più dimensioni

Prima di tutto definiamo **fronte d'onda** la superficie su cui in un certo istante la fase dell'onda è costante ($\phi = kx - \omega t$).

Per le onde piane il fronte d'onda è un piano che si sposta con velocità v dell'onda. Per caratterizzare la direzione di propagazione dell'onda introduciamo il **vettore di propagazione** \vec{k} con $k = 2\pi/\lambda$ e verso

uguale a quello di \vec{v} e il vettore posizione \vec{r} che individua la posizione di un punto P su un certo fronte d'onda. Con queste informazioni possiamo riscrivere la funzione d'onda come

$$\xi(r, t) = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

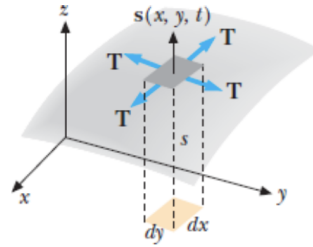
In un sistema di tre coordinate l'equazione generale delle onde ammette altre soluzioni che rappresentano **onde sferiche** e **onde cilindriche**:

$$\nabla^2 \xi(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, y, z, t)}{\partial t^2}$$

1.4.1 Onde elastiche in una membrana tesa

Consideriamo una membrana piana tesa con tensione T . Supponiamo di spostare leggermente la membrana dalla sua posizione di equilibrio e andiamo a studiare le tensioni che agiscono su un'area $dxdy$.

Il ragionamento è uguale a quello fatto per la corda tesa, in questo caso però la tensione si distribuisce su tutto il lato $d*$ e diventa $T(d*)$:



$$dF_x(x, y, z, t) = T(dx) \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial y^2} dy = T \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial y^2} dxdy$$

$$dF_y(x, y, z, t) = T \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial x^2} dx = T(dy) \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial x^2} dxdy$$

Risultante
$$dF = T \left(\frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial x^2} \right) dxdy = (d\mathbf{m})\mathbf{a} = \rho_s(dxdy) \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial t^2}$$

esprimendo la massa come $dm = \rho_s(dxdy)$ si ottiene l'equazione delle onde di d'Alembert dove il coefficiente del termine a destra gioca il ruolo di $1/v^2$, da questo possiamo scrivere la velocità di propagazione dell'onda:

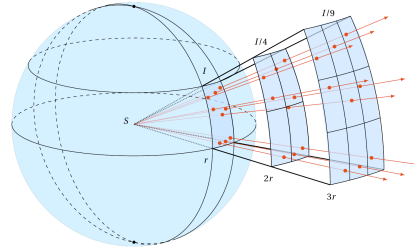
$$T \left(\frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial x^2} \right) dxdy = \rho_s(dxdy) \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho_s}{T} \frac{\partial^2 \xi(x, y, t)}{\partial t^2} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \quad (1.15)$$

1.4.2 Onde sferiche

Se il mezzo è *isotropo* è quindi la velocità di propagazione è uguale in tutte le direzioni, la funzione d'onda **sferica armonica** è $\xi(r, t) = A(r) \sin(kr - \omega t)$ dove r è la distanza dalla sorgente e $A(r)$ è l'ampiezza funzione di r .

Diciamo che la nostra sorgente emetta un'onda di intensità $I(r) = CA^2(r)$ dove C è una costante dipendente dal mezzo. In un'onda sferica la **potenza media** trasmessa attraverso la superficie sferica $S = 4\pi r^2$ deve risultare **costante** ad ogni valore di r :



$$\mathcal{P}_m = IS = \text{cost.}$$

$$\mathcal{P}_m = CA^2 4\pi r^2 = \text{cost.}$$

$$A(r) = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_m}{4\pi r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{4\mathcal{P}_m}{\pi}}$$

Risulta quindi che l'ampiezza è inversamente proporzionale alla distanza r , come la pressione, e quindi può essere scritta come $A = \xi_0 / r$.

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t) \quad (1.16)$$

Intensità

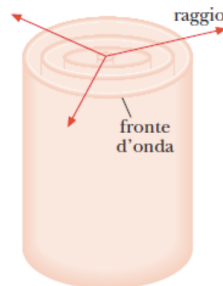
Supponendo che le onde in questione siano onde sonore, andando quindi ad utilizzare le espressioni di pressione della sezione 1.3 e andando a sostituire ogni ξ_0 con ξ_0 / r si ottiene la seguente espressione dell'intensità:

$$I(r) = \frac{\mathcal{P}_m}{S} = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 \frac{\xi_0^2}{r^2}$$

1.4.3 Onde cilindriche

Le onde cilindriche hanno come fronti d'onda gusci cilindrici coassiali. La sorgente potrebbe essere intesa come un gruppo di sorgenti puntiformi poste una dopo l'altra.

Come per le onde sferiche sappiamo che la potenza media trasmessa attraverso la superficie cilindrica deve essere costante per ogni valore di r :



$$\mathcal{P}_m = IS = \text{cost}$$

$$\mathcal{P}_m = CA^2 2\pi r h = \text{cost}$$

$$A(r) = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_m}{2C\pi r h}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{\mathcal{P}_m}{2C\pi h}}$$

L'ampiezza è inversamente proporzionale alla radice del raggio e può essere riscritta come ξ_0/\sqrt{r} .

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}} \sin(kr - \omega t) \quad (1.17)$$

1.4.4 Assorbimento dell'energia

Come abbiamo visto l'intensità di un'onda non rimane costante ma decresce al propagarsi dell'onda (nelle onde sferiche più rapidamente, nelle cilindriche meno...). Questo comportamento viene attribuito ad un **assorbimento di energia** dovuto a fenomeni di attrito interno. Studiando il fenomeno su uno spessore dx si ha un'a attenuazione che può essere considerata proporzionale all'intensità in x e allo spessore dx .

$$dI = -\alpha I(x) dx$$

dove α è il **coefficiente di assorbimento**.

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^x dx$$

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} \quad (1.18)$$

Quindi la decrescita dell'intensità è esponenziale. Definiamo la distanza $x_0 = \frac{1}{\alpha}$ detta **lunghezza di assorbimento** la distanza tra due punti tali che $I(x_1)/I(x_2) = \frac{1}{e}$.

Abbiamo appurato precedentemente che l'ampiezza dell'onda è direttamente proporzionale a \sqrt{I}

$$I = CA^2 \quad \rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{I}{C}} = \sqrt{\frac{I_0 e^{-\alpha x}}{C}}$$

quindi la funzione d'onda in un mezzo che assorbe energia è:

$$\textbf{Onde piane:} \quad \xi = \left(\frac{I_0 e^{-\alpha x}}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(kx - \omega t) = \xi_0 (I_0 e^{-\alpha x/2})^{\frac{1}{2}} \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Onde sferiche:} \quad \xi = \frac{\left(\frac{I_0 e^{-\alpha x}}{C} \right)^{\frac{1}{2}}}{r} \sin(kx - \omega t) = \xi_0 \frac{(I_0 e^{-\alpha x/2})^{\frac{1}{2}}}{r} \sin(kx - \omega t)$$

$$\textbf{Onde cilindriche:} \quad \xi = \frac{\left(\frac{I_0 e^{-\alpha x}}{C} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r}} \sin(kx - \omega t) = \xi_0 \frac{(I_0 e^{-\alpha x/2})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r}} \sin(kx - \omega t)$$

1.5 Pacchetti d'onde

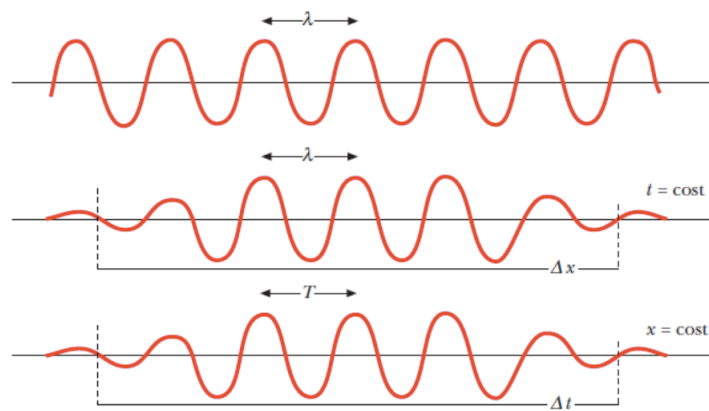
Fino ad ora abbiamo considerato onde armoniche di lunghezza e durata infinita. Tutte le sorgenti emettono onde attraverso processi di durata finita, quindi, nella realtà, un'onda ha una propria durata e estensione spaziale.

Considerato un pacchetto di lunghezza Δx e durata Δt , tali che $\Delta x = v \Delta t$. Il pacchetto è poi caratterizzato da N oscillazioni tali che

$$\Delta x = N\lambda \quad \Delta t = NT$$

ed esprimiamo il numero di onde k e la pulsazione ω come

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi N}{\Delta x} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{\Delta t}$$



Se ammettiamo (come nella figura) che N non sia fisso ma abbia una acerta indeterminazione che esprimiamo come $\Delta N = 1$, possiamo trovare altre espressioni per k e ω :

$$\boxed{\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x}} \quad \boxed{\Delta \omega = \frac{2\pi}{\Delta t}} \quad \boxed{\Delta f = \frac{1}{\Delta t}}$$

$$\Delta k \Delta x = 2\pi \quad \Delta \omega \Delta t = 2\pi \quad \Delta f \Delta t = 1$$

Queste osservazioni mettono in evidenza la sostanziale differenza tra onda e pacchetto d'onda: mentre la prima ha una lunghezza d'onda λ e una frequenza f ben definite che la descrivono completamente, nel secondo è presente una **banda di frequenze** e un **intervallo di numeri d'onda**

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta t} \quad \Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x}$$

Da quest'ultime espressioni notiamo che al crescere di Δx e Δt minori risultano queste bande, infatti la limite per $\Delta x, \Delta t \rightarrow \infty$ troviamo l'onda armonica. Se andiamo a considerare **brevi durate e piccole lunghezze** nel pacchetto sono contenute bande di lunghezze d'onda e frequenze distribuite significativamente nell'intorno di λ e f .

1.5.1 Velocità di fase e velocità di gruppo

Poiché diversi segmenti d'onda contenuti in un pacchetto possono avere frequenze diverse, la velocità del pacchetto non può essere identificata con quella delle componenti. Tuttavia è essenziale identificare la

velocità del pacchetto perché il fenomeno fisico è rappresentato proprio dal pacchetto ed è la sua velocità quella con cui si propaga l'**energia** dell'onda.

Andiamo quindi a distinguere la **velocità di fase**, quella con cui si muovono le singole componenti dell'onda, e **velocità di gruppo**. La velocità dell'onda dipende dalla frequenza quando la propagazione avviene in un **mezzo dispersivo** come può avvenire per onde sulla superficie di un liquido o onde elettromagnetiche in mezzi materiali o in cavità conduttrici.

Mostriamo un esempio di velocità di gruppo nel caso di un pacchetto con solo due onde armoniche:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \xi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\text{prostaferesi: } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 \sin \left(\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2} \right) \cos \left(\frac{(k_1 - k_2)x + (\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right)$$

Definiti k_m, ω_m e $\Delta k, \Delta \omega$

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$\Delta \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t \right) \sin(k_m x - \omega_m t)$$

In sostanza il moto relativo di un'onda rispetto all'altra produce la sovrapposizione mostrata sopra: **l'onda di alta frequenza cambia** durante il moto ma **l'involuppo conserva la stessa forma**.

L'ampiezza dell'onda modulata

$$A = 2\xi_0 \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t \right)$$

non è costante ma presenta una struttura di tipo ondulatorio e descrive l'involuppo dell'onda di alta frequenza.

Abbiamo quindi un'onda di alta frequenza che si propaga con **velocità di fase media** v_f e con ampiezza modulata da un'onda che si propaga con velocità v_g **velocità di gruppo**:

$$v_f = \frac{\omega_m}{k_m} \quad v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

Più in dettaglio la velocità di gruppo, nel limite del continuo, è definita come

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

invece dall'espressione della velocità di fase possiamo esprimere la pulsazione in funzione di v_f e k :

$$\omega(k) = v_f(k)k$$

da cui

$$v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk} \quad (1.19)$$

La velocità di gruppo può quindi essere minore o maggiore della velocità di fase, dipende dal segno della derivata di v_f : se la velocità delle singole componenti decresce, allora la velocità di gruppo sarà minore, se invece è in crescita, la velocità di gruppo sarà maggiore. Il caso di **mezzo non dispersivo**, ovvero quando $v_g = v_f$ si ha quando $dv_f/dk = 0$.

Servendosi delle seguenti uguaglianze

$$\boxed{\frac{dk}{k}} = \boxed{-\frac{d\lambda}{\lambda}} = \boxed{\frac{df}{f}}$$

la 1.19 è riscrivibile come

$$= v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} = v_f + f \frac{dv_f}{df}$$

E' bene capire che la struttura del pacchetto in generale si modifica durante la propagazione e proprio per questo la velocità di fase (delle singole componenti) varia in funzione di k così come la velocità di gruppo

1.6 Effetto Doppler

Se una sorgente di onde S e un rivelatore di onde R sono in moto reciproco la frequenza percepita dal rivelatore è in generale diversa dalla frequenza propria della sorgente. Questo fenomeno prende il nome di effetto Doppler e si osserva per tutti i tipi di onde.

Prendiamo in esame una sorgente che emette un qualsiasi tipo di onde armoniche sferiche di velocità v , chiamiamo **fronte d'onda** la superficie sferica su cui la fase è costante e facciamo coincidere il fronte d'onda con una cresta. La cresta successiva a quella fissata sul fronte d'onda si trova a distanza spaziale λ e temporale T con differenza di fase 2π . In un tempo Δt l'onda avanza di uno spazio $v\Delta t$ e il rivelatore viene attraversato da tanti fronti contenuti nello spazio $v\Delta t$:

$$N = \frac{v\Delta t}{\lambda}$$

quindi il rivelatore percepisce una frequenza

$$f_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{\lambda\Delta t} = \frac{v}{\lambda} = f$$

In questa condizione la frequenza percepita dal rivelatore è la frequenza propria della sorgente.

1.6.1 Sorgente in moto

Supponiamo che la sorgente si stia muovendo con velocità $v_S < v$ verso il rivelatore. Ogni intervallo T_0 la sorgente percorre un tratto $v_S T_0$ sicuramente minore di λ ($v_S < v \rightarrow v_S T_0 < \lambda_0 = vT$). Si ha quindi che la distanza tra due fronti d'onda consecutivi è

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_S T$$

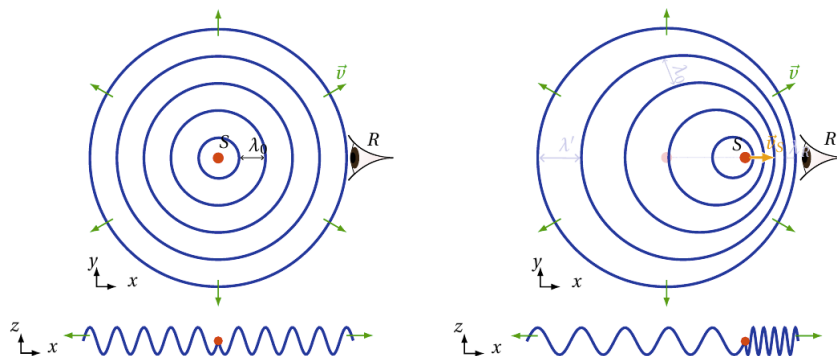
quindi il rivelatore è attraversato da più fronti d'onda del caso precedente poiché è aumentata la loro "densità". Riscrivendo l'espressione di λ_R possiamo trovare una nuova espressione della frequenza percepita da R :

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_S T_0 = vT_0 - v_S T_0 = v \frac{1}{f_0} - v_S \frac{1}{f_0} = \frac{v - v_S}{f_0}$$

quindi essendo la frequenza il numero di creste in un periodo: $f = \frac{N}{T}$, esprimendo N come numero di lunghezze d'onda nello spazio percorso in un periodo: $N = \frac{vT}{\lambda}$, troviamo che un'espressione della frequenza è il rapporto tra la velocità dell'onda e la lunghezza d'onda

$$f_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{\frac{v - v_S}{f_0}} \rightarrow$$

$$f_R = \frac{v}{v - v_S} f_0 \quad (1.20)$$



1.6.2 Rivelatore in moto

Diciamo che il rivelatore si stia muovendo con velocità v_R . In questo caso i fronti d'onda non variano la loro densità, tuttavia il rivelatore ne percepirà comunque di più o di meno (in base se si sta avvicinando o allontanando) a causa del suo moto. I fronti d'onda che investono il rivelatore sono

$$N = \frac{\text{spazio percorso}}{\lambda_0} = \frac{(v - v_R)\Delta t}{\lambda_0}$$

da cui ricaviamo la frequenza percepita dal rivelatore

$$f_R = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v - v_R}{v T_0} = \frac{v - v_R}{v(1/f_0)} \rightarrow$$

$$f_R = \frac{v - v_R}{v} f_0 \quad (1.21)$$

Come possiamo vedere dalle espressioni di f_R ottenute non sono simmetriche: seppur è il **moto relativo** quello che conta, non è lo stesso se la sorgente si muove o è il rivelatore a farlo.

1.6.3 Espressione generale

Le espressioni trovate nei due casi possono essere riassunte in un'unica formula. Diciamo quindi di avere sia una v_S sia una v_R . La distanza tra i fronti d'onda è influenzata solo dalla velocità della sorgente e vale

$$\lambda_R = \lambda_0 - v_S T_0 = v T_0 - v_S T_0 = \frac{v - v_S}{f_0}$$

invece il numero N di fronti d'onda che investono il rivelatore dipende anche da v_R :

$$N = \frac{\text{spazio percorso}}{\lambda_R} = \frac{(v - v_R) T_0}{\frac{v - v_S}{f_0}} = \frac{(v - v_R) \frac{1}{f_0}}{\frac{v - v_S}{f_0}} = \frac{v - v_R}{v - v_S}$$

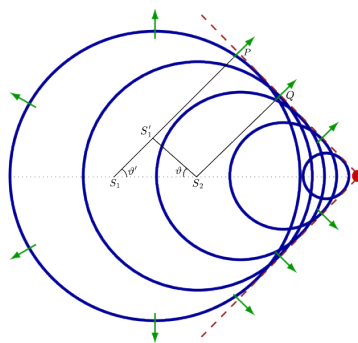
Da queste due otteniamo che la frequenza (il numero di creste in un periodo) percepita vale

$$f_R = \frac{\frac{v - v_R}{v - v_S}}{T_0} \rightarrow$$

$$f_R = \frac{v - v_R}{v - v_S} f_0 \quad (1.22)$$

1.6.4 Onda d'urto

Quando la sorgente si muove a velocità superiori a quella di propagazione dell'onda ($v_S > v$), i fronti d'onda di quest'ultima ammettono un **inviluppo** rappresentato da due rette convergenti. L'inviluppo rappresenta il **luogo di punti di egual fase** e costituisce il **nuovo fronte d'onda** che prende il nome di **onda d'urto**. Possiamo trovare gli angoli che descrivono le due rette tramite semplici calcoli trigonometrici:



Poiché P e Q sono punti di egual fase, il tempo che impiega l'onda a percorrere il tratto $S_1 S'_1$ deve essere uguale al tempo che impiega la sorgente a percorrere il tratto $S_1 S_2$ (**a tempi uguali corrispondono uguali differenze di fase**).

1.6.5 Onde sferiche

$$a = S_1 S_2$$

$$S_1 S'_1 = a \cos(\theta)$$

quindi l'uguaglianza dei tempi diventa

$$\frac{a}{v_s} = \frac{a \cos(\theta)}{v}$$

$$\sin(\theta') = \cos(\theta) = \frac{v}{v_s} \quad (1.23)$$

Da quest'ultima risulta evidente che la superficie conica (o triangolare) di egual fase può esistere solo se la sorgente si muove più velocemente dell'onda (risulterebbero seno e coseno maggiori di uno se no).

1.7 Interferenza

Prima di tutto diamo una definizione di sorgenti coerenti e incoerenti:

Sorgenti coerenti

Se la **differenza di fase** tra due onde in un punto qualsiasi è **costante** nel tempo, le sorgenti si dicono **coerenti**. Se ciò non si verifica (o si verifica in tempi brevi rispetto all'osservazione) le sorgenti sono dette **incoerenti**.

Quando due o più sorgenti coerenti emettono onde con **stessa pulsazione** ω e queste onde si sovrappongono avviene il fenomeno dell'**interferenza**. Si verificano interferenze in ogni tipo di onde, si ha infatti una trattazione analitica indipendente dalla natura di esse.

1.7.1 Interferenza con stessa ampiezza

Studiamo il caso unidimensionale di due onde piane coerenti con **medesima frequenza** f e **ampiezza** ω che si propagano lungo la stessa direzione x . Consideriamo un punto P distante x_1 dalla prima sorgente e x_2 dalla seconda. In P si avranno le seguenti espressioni delle due onde:

$$\xi_1 = A_0 \cos(kx_1 - \omega t + \phi_1) = A_0 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1)$$

$$\xi_2 = A_0 \cos(kx_2 - \omega t + \phi_2) = A_0 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_2)$$

Sappiamo che, essendo le sorgenti coerenti, lo sfasamento tra le due onde è fisso; chiamiamo questo sfasamento δ così da eliminare il termine ϕ_2 :

$$\delta = k(x_2 - x_1) + (\phi_2 - \phi_1)$$

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1)$$

$$\xi_2 = A_0 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_1 - \delta)$$

In P , l'onda risultante sarà la somma $\xi_1 + \xi_2$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

$$= A_0 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) + A_0 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_1 - \delta)$$

$$\text{prostaferesi: } \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \xi &= A_0 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) + A_0 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_1 - \delta) \\ &= 2A_0 \cos(\delta/2) \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1 + \delta/2) \end{aligned}$$

Come abbiamo visto precedentemente l'intensità è sempre proporzionale all'ampiezza al quadrato:

$$I = K A^2$$

(in K sono contenuti altri termini caratteristici e la superficie su cui si sta calcolando I),

$$I = 4K A_0^2 \cos^2(\delta/2)$$

$$K A_0^2 = I_0$$

$$I = 4I_0 \cos^2(\delta/2) \quad (1.24)$$

1.7.2 Interferenza costruttiva e distruttiva

Nel caso di due onde con ampiezze uguali abbiamo l'equazione

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) \quad \xi_2 = A_0 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_1 - \delta)$$

l'interferenza sarà costruttiva se le due onde sono **in fase**, ovvero quando

$$\delta = 2m\pi \rightarrow \delta/2 = m\pi$$

Si avrà un'interferenza distruttiva invece quando le due onde sono **in opposizione di fase**, quindi quando (una è a 1 e l'altra a -1)

$$\delta = 2m\pi + \pi \rightarrow \delta = (2m + 1)\pi$$

condizioni che assumono senso anche nell'espressione dell'intensità: se l'interferenza è costruttiva mi aspetto che l'intensità sia massima, cosa che accade proprio quando $\delta/2 = m\pi$; se invece l'interferenza è distruttiva mi aspetto un'intensità nulla, che si ha quando $\delta = m\pi$:

$$I = 4I_0 \cos^2(2m\pi) = 4I_0 = I_{\max}$$

$$I = 4I_0 \cos^2(m\pi) = 0$$

1.7.3 Interferenza con ampiezze diverse

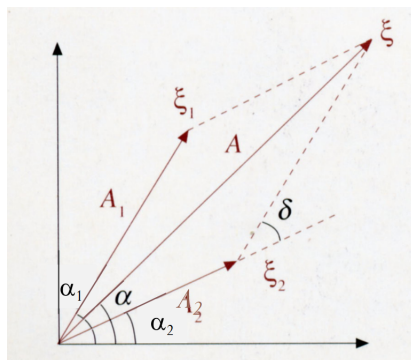
Prendiamo in considerazione due onde ξ_1 e ξ_2 con ampiezze diverse. Ci è comodo rappresentare le onde in "forma vettoriale" così da poter esplicitare alcuni termini più agevolmente.

$$\xi_1 = A_1 \cos(kx_1 - \omega t + \phi_1) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$\xi_2 = A_2 \cos(kx_2 - \omega t + \phi_2) = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Rappresentiamo A_1 , A_2 e A come dei vettori rotanti (per il contributo del coseno) visti all'istante $t = 0$, quindi senza il termine ωt :



Esplicitiamo l'angolo α :

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2$$

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2$$

da cui, elevando al quadrato:

$$\begin{aligned} A^2 \cos^2 \alpha + A^2 \sin^2 \alpha &= (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2 \\ A^2 &= A_1^2 \cos^2 \alpha_1 + 2A_2 A_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + A_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \\ &\quad + A_1^2 \sin^2 \alpha_1 + 2A_2 A_1 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + A_2^2 \sin^2 \alpha_2 \\ &= A_1^2 (\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) + A_2^2 (\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2) + 2A_2 A_1 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) \\ &= A_1^2 (\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) + A_2^2 (\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2) + 2A_2 A_1 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_2 A_1 \cos \delta} \quad (1.25)$$

Come prima, sapendo che l'intensità è proporzionale all'ampiezza al quadrato:

$$\begin{aligned} I &= K A^2 \\ &= K (A_1^2 + A_2^2 + 2A_2 A_1 \cos \delta) \\ &= K A_1^2 + K A_2^2 + 2K A_1 A_2 \cos \delta \end{aligned}$$

$$K A_1^2 = I_1$$

$$K A_2^2 = I_2$$

per esprimere il termine rettangolare in funzione di I_1 e I_2 sviluppo $I_1 I_2 = K^2 A_1^2 A_2^2$ e quindi

$$\sqrt{I_1 I_2} = K A_1 A_2$$

da cui

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (1.26)$$

1.7.4 Interferenza costruttiva e distruttiva

Nel caso di due onde con ampiezze diverse

trova

1.7.5 Sorgenti puntiformi

guarda slides

1.8 Riflessione e trasmissione

Prendiamo in esame una corda divisa in due segmenti uniti ma con densità lineari differenti. La velocità, dipendendo da μ , sarà diversa nei due mezzi:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

da cui, poiché $k = \omega / v$, anche i due k saranno diversi

$$k_1 = \omega \sqrt{\frac{\mu_1}{T}} \quad k_2 = \omega \sqrt{\frac{\mu_2}{T}}$$

Andiamo quindi a distinguere tre tipi di onde che si propagano sulla corda: una incidente, una trasmessa e una riflessa:

$$\xi_i = \xi_{0i} \sin(k_1 x - \omega t)$$

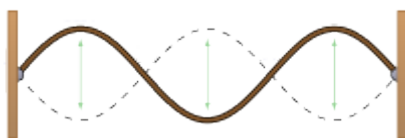
$$\xi_r = \xi_{0r} \sin(k_1 x + \omega t)$$

$$\xi_t = \xi_{0t} \sin(k_2 x - \omega t)$$

Nel punto di contatto tra i due tratti **imponiamo la continuità della funzione d'onda**:

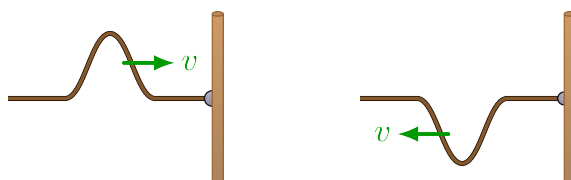
1.9 Onde stazionarie

Un'altro tipo di oscillazioni rilevanti sono le onde stazionarie, onde i cui punti oscillano con ampiezza che varia solo con la posizione. Si osserva che le posizioni di massima ampiezza e dei punti fermi (nodi) non variano nel tempo, per questo possiamo definire questo tipo di oscillazione un'**oscillazione collettiva** del fenomeno **cui non è associato un fenomeno di propagazione**.



Consideriamo una corda fissa ad un solo estremo **O** su cui poniamo lo zero dell'asse x ; sull'estremo libero applichiamo una perturbazione **sinusoidale** regressiva di frequenza f tramite un diapason:

$$\xi_1(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$



L'onda si propaga fino all'estremo fisso **O** che deve rimanere fermo, tuttavia sappiamo che in **O** risulta una perturbazione $\xi_1(0, t)$. Ci deve essere una seconda perturbazione $\xi_2(0, t)$ generata dal vincolo tale che

$$\xi_1(0, t) + \xi_2(0, t) = 0 \rightarrow \xi_2(0, t) = -A \sin(\omega t) = A \sin(-\omega t)$$

quindi la seconda onda si propaga nel verso positivo dell'asse x con equazione

$$\xi_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

L'equazione complessiva dell'onda si ottiene sommando le due

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = A [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)]$$

$$\text{prostaferesi: } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\xi(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (1.27)$$

L'equazione rappresenta un'oscillazione armonica semplice di pulsazione ω e con **ampiezza che dipende dalla posizione**; come ci aspettavamo nell'equazione **non compare il termine $kx \pm \omega t$** proprio perché l'oscillazione non si propaga. Troviamo i massimi e i minimi ponendo

$$\sin(kx) = \pm 1 \rightarrow kx = \frac{1}{2}\pi + m\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi}{2}(1 + 2m) \rightarrow$$

$$\text{Ventri: } x = \frac{\lambda}{4}(1 + 2m) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.28)$$

invece i nodi li troviamo ponendo

$$\sin(kx) = 0 \rightarrow kx = m'\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = m'\pi \rightarrow$$

$$\text{Nodi: } x = \frac{\lambda}{2}m' \quad m' = 0, 1, 2, \dots \quad (1.29)$$

1.9.1 Corda tesa con due estremi fissi

Supponiamo di avere una corda vibrante di lunghezza L con nodi nei punti di coordinate $x = 0$ e $x = L$. Vediamo come fissata una lunghezza L della corda, in questa possono aver luogo soltanto le onde stazionarie di lunghezza d'onda λ_m e frequenza f_m : dalla 1.29 si ha che i nodi, in $x = 0$ e $x = L$, sono descritti da

$$x = \frac{\lambda}{2} m \rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\lambda}{2} m \\ L = \frac{\lambda}{2} m \end{cases}$$

dalla seconda: $\rightarrow \lambda = \lambda_m = \frac{2L}{m}$ (1.30)

Ricaviamo invece la frequenza dalla sua normale espressione utilizzando la 1.3 per la velocità:

$$f_m = \frac{v}{\lambda_m} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2 \frac{L}{m}} \rightarrow f_m = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

In una corda tesa esiste dunque una **serie discreta** di lunghezze d'onda e frequenze detta **serie armonica** in cui la frequenza più bassa f_1 è chiamata **frequenza fondamentale** o **prima armonica**, tutte le altre sono dette **armoniche superiori**

— Modo della corda —

Viene chiamato **modo** della corda una particolare onda stazionaria con *tot* nodi. Una corda ha pertanto ∞^1 modi discreti. Un particolare modo può essere eccitato pizzicando opportunamente la corda oppure per mezzo di un diapason.

Nel caso del diapason: se questo è posto su un estremo della corda così da fungere da nodo, genera un'onda che arrivata all'estremo opposto si andrà a riflettere tornando dal diapason per poi riflettersi nuovamente, tutto questo in un certo tempo t che possiamo trovare: sappiamo che l'onda viaggia a velocità v e deve percorrere un tratto lungo $2L$, quindi

$$t = \frac{2L}{v}$$

dalla 1.30 sappiamo che $2L = \lambda m$

$$t = \frac{\lambda m}{v}$$

e sappiamo che il periodo è il tempo impiegato a percorrere una lunghezza d'onda: $T = \frac{\lambda}{v}$

$$t = mT$$

quindi l'onda viene riflessa in un tempo multiplo del periodo e perciò l'onda sarà **in fase** con la cresta dell'onda che il diapason emette al tempo $t + mT$ creando un fenomeno di **risonanza**. L'oscillazione tende quindi ad aumentare e il limite a questo aumento è solo posto a fenomeni di smorzamento dati da vincoli non ideali e attriti.

Nel caso in cui non fosse soddisfatta la 1.30, e quindi non si possa esprimere $2L = \lambda m$ si stabilisce un'onda risultante di tutte le onde che hanno origine nelle varie riflessioni la cui ampiezza coincide con quella del diapason.

1.9.2 Corda tesa con un estremo fisso

La condizione da soddisfare per avere onde stazionarie stabili in una corda con un estremo libero è imporre che uno dei due estremi rimanga fisso (nodo), e che l'altro sia un ventre:

$$\begin{aligned} \text{Ventre: } x = \frac{\lambda}{4}(1+2m) &\rightarrow L = \frac{\lambda}{4}(1+2m) \rightarrow \\ \lambda = \lambda_m &= \frac{4L}{1+2m} \end{aligned} \quad (1.31)$$

come nel caso a due estremi fissi ricaviamo la frequenza:

$$\begin{aligned} f_m = \frac{v}{\lambda_m} &= \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{\frac{4L}{1+2m}} \rightarrow \\ f_m &= \frac{1+2m}{4L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Come prima se poniamo un diapason sull'estremo fisso si hanno le condizioni di risonanza: l'onda che arriva all'estremo libero viene riflessa senza capovolgersi, arrivata al diapason si capovolge e torna verso l'estremo libero; vediamo quanto impiega l'onda a percorrere la corda:

$$t = \frac{2L}{v}$$

dalla 1.31 sappiamo che $2L = \frac{1+2m}{2} \lambda$

$$t = \frac{1+2m}{2v} \lambda = \frac{1+2m}{2} \frac{\lambda}{v}$$

e poiché il periodo è il tempo impiegato a percorrere una lunghezza d'onda: $T = \frac{\lambda}{v}$

$$t = \frac{1+2m}{2} T$$

Anche in questo caso l'onda impiega un tempo proporzionale al periodo **non ho ben capito. riguarda questa parte sulle slide**

1.9.3 Onde stazionarie in una colonna di gas

Andiamo a considerare, in una canna di un organo per esempio, un'onda di pressione e una di spostamento. Se la canna è aperta in entrambi gli estremi si realizzano le stesse condizioni per la pressione e per lo spostamento, in sostanza la condizione è equivalente alla corda con due estremi fissi.

Se invece un estremo è chiuso, nel punto di chiusura si avrà un ventre di pressione (che sale) e un nodo di spostamento (l'aria si ferma); la situazione è quindi analoga a quella di una corda con un estremo fisso e uno libero.

riporta calcoli

1.9.4 Timbro

Uno strumento fornisce un massimo di potenza quando **la frequenza di eccitazione coincide con una delle frequenze della serie armonica**. Il fenomeno delle riflessioni multiple **esalta le frequenze della serie armonica** e **smorza tutte le altre** che risultano quasi assenti. Perciò comprendiamo come la stessa nota con frequenza fondamentale f_1 abbia una composizione armonica che dipende dallo strumento, proprio perché ogni strumento fornisce frequenze di eccitazioni differenti.

Timbro

La composizione armonica di una nota dipendente dallo strumento e dalla particolare frequenza di eccitazione è chiamata **timbro**

Fluidodinamica

2.1 Pressione

Poiché non possiamo parlare di forza applicata in un punto del fluido andiamo a considerare un elemento infinitesimo di massa dm e volume dV e andiamo a distinguere le forze agenti su di esso. Distinguiamo le **forze di volume**, ovvero tutte quelle forze proporzionali a dV , e **forze di superficie** proporzionali a dS . Nel caso delle forze di superficie è bene caratterizzarle come somma di un termine normal a S e uno parallelo; noi consideriamo il fluido in equilibrio quindi il termine parallelo è nullo.

$$\text{Forze di volume: } dF_V = dm a_z = \rho dV a_z$$

$$\text{Forze di superficie: } dF_{S\perp} = p dS$$

Le forze di superficie si riducono quindi alla sola componente perpendicolare e sono caratterizzate dalla pressione. La pressione che funge da coefficiente alla superficie **non ha caratteristiche direzionali**, è funzione scalare del punto che si considera e **non dipende dall'orientazione della superficie**.

inserire grafici

$$\begin{array}{c} \boxed{CH = AH \cos(\theta)} \quad \boxed{BH = AH \sin(\theta)} \\ p_A = \frac{F_A}{AH} \\ \left\{ \begin{array}{l} F_C = F_A \cos(\theta) \\ F_B = F_A \sin(\theta) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_C = \frac{F_C}{CH} = \frac{F_A \cos(\theta)}{AH \cos(\theta)} = \frac{F_A}{AH} \\ p_B = \frac{F_B}{BH} = \frac{F_A \sin(\theta)}{AH \sin(\theta)} = \frac{F_A}{AH} \end{array} \right. \\ \Rightarrow p_A = p_B = p_C = p \end{array}$$

Quindi la pressione è una **quantità scalare** e il suo valore **dipende** in generale **dalla posizione del punto** ma non dalla direzione.

2.1.1 Equilibrio statico di un fluido

La condizione di equilibrio è che la somma di tutte le forze di volume e di superficie si annulli

$$\vec{F}_{Vtot} + \vec{F}_{Stot} = 0$$

Considero solo le forze dovute ad un'accelerazione lungo l'asse z

Forze di volume: $dF_V = dm a_z = \rho a_z dV$

Forze di superficie: $dF_{S\perp} = p(z)dS - p(z+dz)dS$
 $= p(z)dS - p(z)dS - p(dz)dS$
 $= -\frac{\partial p}{\partial z} dz dxdy$
 $= -\frac{\partial p}{\partial z} dV$

inserire grafici

Quindi per soddisfare la condizione di equilibrio deve valere

$$\rho a_z dV - \frac{\partial p}{\partial z} dV = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho a_z \quad (2.1)$$

che se estendiamo su tutte e tre le dimensioni diventa

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{a} \quad (2.2)$$

Quindi la pressione aumenta lungo il verso positivo della forza (determinata dall'accelerazione a_*). La forza di volume tende infatti a spostare il volumetto determinando una **reazione** del fluido che si manifesta come una variazione di pressione. *Notare l'analogia della pressione con la tensione in un filo massivo.* Si ottiene inoltre che la pressione è uniforme solo quando $\rho a = 0$ che sulla terra sembrerebbe non poter mai essere verificata data l'accelerazione di gravità. Tuttavia per densità molto basse o volumi molto piccoli la pressione può essere considerata uniforme.

Se la forza di volume agente sul fluido è conservativa il lavoro compiuto non dipende dal particolare percorso seguito, ma solo dalle coordinate dal punto iniziale e finale; inoltre vale

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\vec{\nabla} E_p$$

perciò si può esprimere la 2.2 come $-\rho$ per il gradiente dell'**energia potenziale per unità di massa**

$$\vec{\nabla} p = -\rho \frac{\vec{\nabla} E_p}{m}$$

$$\vec{\nabla} p = -\rho \vec{\nabla} E_{p,m} \quad (2.3)$$

Infatti le **superfici isobariche coincidono con quelle equipotenziali**, quindi le variazioni di pressione e di energia potenziale sono le stesse ovunque nel passaggio da una superficie equipotenziale ad un'altra.

Se esplicitiamo i due nabla otteniamo l'espressione della variazione infinitesima di pressione:

$$\left| \vec{\nabla} p \right| = \left| \frac{dp}{ds} \right| \quad \left| \vec{\nabla} E_{p,m} \right| = \left| \frac{dE_{p,m}}{ds} \right|$$

$$|dp| = -\rho |dE_{p,m}|$$

quindi se lungo una superficie isobarica e equipotenziale si hanno pressione ed energia potenziale costanti, anche la densità lo è. Pertanto in un fluido sottoposto a forze conservative la **variazione di densità** segue geometricamente quella di pressione e di energia potenziale.

2.1.2 Lavoro della pressione

Nel caso di equilibrio statico non ci sono spostamenti di conseguenza il lavoro è nullo. Nel caso di non equilibrio invece, considerando una situazione semplice di una forza verticale ortogonale alla superficie:

$$dW = dFdh = pSdh = dpdV$$

$$W = \int p dV \quad (2.4)$$

2.1.3 Equilibrio in presenza di forza peso

Applichiamo i risultati ottenuti precedentemente. In questo caso abbiamo come accelerazione $a_z = -g$, quindi secondo la 2.2 la pressione **varia solo lungo l'asse z**. Esplicitiamo i due gradienti così da esplicitare la 2.3:

$$\boxed{\nabla p_z = \frac{dp}{dz}} \quad \boxed{\nabla E_{p,m,z} = \frac{dE_{p,m}}{dz} = g}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

Quindi se la densità è costante, la pressione in un fluido in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità varia secondo la **legge di Stevino** ($p_2 = p_0$ e $z_2 = 0$ e $z_1 = -h$)

$$p(h) = p_0 - \rho gh \quad (2.5)$$

2.2 Principio di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verticale verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato

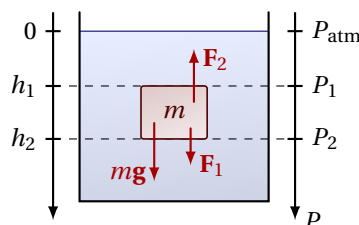
$$\vec{F}_A = -\rho V \vec{g} \quad (2.6)$$

Vediamo come ottenere questa relazione: immaginiamo una porzione di fluido "immerso" di volume V_0 ; essendo in equilibrio la somma delle forze di volume e delle forze di pressione deve essere nulla

$$\vec{F}_V + \vec{F}_P = 0 \rightarrow F_P = mg$$

se andiamo a sostituire il volume di fluido con un altro corpo di densità ρ' , allora le forze di pressione esercitate dal fluido circostante rimane la stessa, mentre varia la forza peso. Pertanto non sussiste più la condizione di equilibrio e vale

$$(m' - m)\vec{g} = (\rho' - \rho)V_0\vec{g}$$



E' importante notare che la forza di Archimede si deve ritenere **applicata al centro di massa**, pertanto oltre alla spinta verso l'alto, nel caso di corpi estesi, si deve pensare anche ad un **momento risultante**.

inserire grafici

2.3 Liquido in rotazione

Andiamo a considerare un elemento dm di liquido e analizziamo le forze in gioco ponendoci nel sistema di riferimento non inerziale del liquido rotante:

1. Chiaramente la forza peso: $d\mathbf{mg}$;
2. Compiendo una traiettoria circolare è soggetto ad una forza centripeta: $dm\omega^2 R = \rho dV\omega^2 R$;
3. Infine una forza di pressione che va ad equilibrare le altre due: $d\mathbf{F}_p$

L'elemento dm è quindi soggetto a due forze di volume (conservative) e a una forza di pressione. Essendo soggetto a forze conservative possiamo scrivere l'espressione della sua energia potenziale come

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} = (dm\vec{g} - dm\omega^2 \vec{r}) \cdot d\vec{s} \\ &= dm g dz - dm\omega^2 (x + y) dx dy \end{aligned}$$

ponendo lo zero di energia potenziale a terra possiamo ottenere l'espressione di quest'ultima:

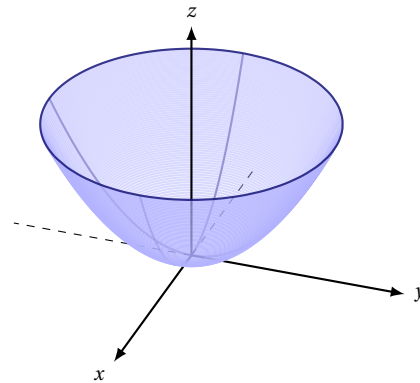
$$E_p = mgz - \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$$

o espressa in unità di massa

$$E_{p,m} = gz - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

da cui possiamo ottenere l'espressione della coordinata z in funzione di x, y :

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) \quad (2.7)$$



equazione di un **paraboloide di rotazione**

Andiamo ora studiare lo stesso caso ma in un sistema di riferimento inerziale. In questo caso l'elemento di liquido non è più in quiete, la risultante delle forze su di esso dovrà dare un termine centripeto. La condizione di equilibrio è soddisfatta solamente lungo la direzione verticale e, come sappiamo dalla 2.2, vale

$$\begin{aligned} \vec{F}_{V,z} + \vec{F}_{p,z} &= 0 \\ dm g + p(z) dS - p(z + dz) dS &= 0 \rightarrow dm g - p(dz) dS = 0 \\ dm g - \frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy &= 0 \\ dm g - \frac{\partial p}{\partial z} dV &= 0 \rightarrow \rho dV g - \frac{\partial p}{\partial z} dV = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho g = \frac{\partial p}{\partial z}}$$

Per le forze radiali invece non sono soddisfatte le condizioni di equilibrio (e ricordando che sono forze

centripete):

$$\begin{aligned}
 dF_r &= p(r)dS - p(r+dr)dS \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial r} dr dS \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial r} dV \\
 -dm\omega^2 r &= -\frac{\partial p}{\partial r} dV \\
 -\rho dV\omega^2 r &= -\frac{\partial p}{\partial r} dV
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho\omega^2 r = \frac{\partial p}{\partial r}}$$

dalle due espressioni si ricava quella della pressione in funzione della distanza radiale e verticale:

$$p(r, z) = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + p(0, 0) \quad (2.8)$$

dove $p(0, 0) = p_0 + \rho g h$ e, ricordando che la superficie libera è isobarica, la pressione atmosferica p_0 deve equilibrare $p(r, z)$

$$p_0 = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + p_0 + \rho g h$$

e quindi ritroviamo l'espressione di z di prima

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$$

2.4 Moto di un fluido

Durante lo scorrimento tra due elementi di fluido compare una **forza di attrito interno** con verso opposto alla velocità relativa tra i due. Sperimentalmente si trova che il modulo della forza di attrito vale

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn} \quad (2.9)$$

Il coefficiente η indica la **viscosità del fluido**; nei liquidi decresce all'aumentare della temperatura, nei gas cresce. Chiamiamo **fluido ideale** o **non viscoso e incompressibile** un fluido con $\eta = 0$ e $\rho = \text{costante}$.

!!!

Il concetto di viscosità assume importanza **solo nei fluidi in movimento**. La condizione di equilibrio statico $dv/dn = 0$ non dipende da η .

La variazione di forma discussa prima è in parte dovuta all'attrito interno. Il contenitore si mette in moto iniziando a trascinare gli elementi di liquido sulle pareti e sul fondo; gli elementi si portano verso l'esterno fino a che non si stabilisce l'equilibrio dinamico.

2.4.1 Descrizioni del moto

Lagrangiana

Prende in esame un elemento di fluido e ne segue il moto dovuto alle varie forze agenti. In sostanza è una descrizione **analogha a quella di un punto materiale**.

Euleriana

Si fissa l'attenzione su un punto della massa fluida $P(x, y, z)$ e si considera la velocità $v(x, y, z, t)$ dell'elemento fluido che passa in P all'istante t .

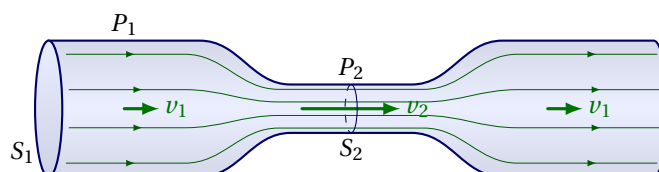
Spesso risulta più comoda la descrizione euleriana soprattutto se consideriamo la **velocità indipendente dal tempo**. In questo caso scompare la dipendenza dal tempo che sarebbe rimasta nella visuale lagrangiana (dove si segue il moto del punto).

Regime stazionario

La situazione fisica in cui tutti gli elementi di fluido che passano in istanti diversi in P hanno in quella posizione sempre stessa velocità, è chiamata **regime stazionario**.

2.4.2 Tubi di flusso e portata

Si tracciano delle linee orientate le cui tangenti servono a descrivere la direzione e la velocità in quel punto. L'insieme di tutte le linee di corrente attraverso una data sezione prende il nome di **tubo di flusso**.



Portata

Viene definita **portata del tubo di flusso** il volume di fluido che è passato attraverso la sezione in un secondo:

$$dq = v dS \quad (2.10)$$

E' importante notare che se **la configurazione delle linee di corrente è immutabile**, quindi se il fluido è ideale e ci troviamo in condizioni di regime stazionario, **la portata deve essere la stessa** attraverso qualsiasi sezione. Il fluido in questione infatti, essendo ideale, al variare della sezione non può variare di densità.

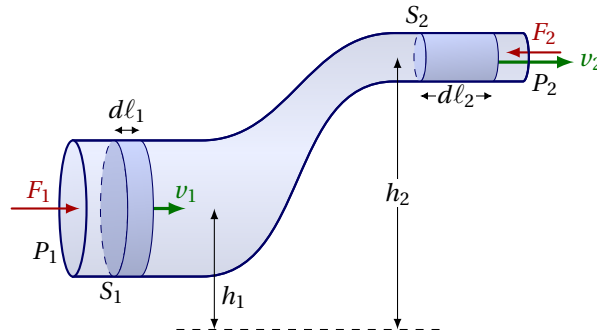
In regime stazionario, se la densità è costante, è costante la portata di un tubo di flusso infinitesimo:

$$v dS = \text{costante}$$

2.4.3 Teorema di Bernoulli

Prendiamo un fluido ideale che scorre in condizioni di regime stazionario. Il volume $dV_1 = S_1 d\ell_1$ che attraversa la sezione S_1 nel tempo dt è uguale a quello $dV_2 = S_2 d\ell_2$ che attraversa nello stesso intervallo la sezione S_2 :

$$dV_1 = dV_2$$



Andiamo ora a studiare il lavoro delle forze di volume e delle forze di pressione sui due volumi in considerazione:

Lavoro forza peso

$$\begin{aligned} dW_G &= -dE_p = \\ &= -dm(h_2 - h_1)g \\ &= -\rho dV(h_2 - h_1)g \end{aligned}$$

Lavoro forze di pressione

$$\begin{aligned} dW_P &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \\ &= p_1 S_1 d\ell_1 - p_2 S_2 d\ell_2 \\ &= (p_1 - p_2) dV \end{aligned}$$

Da cui si ricava una variazione di energia cinetica ($W = \Delta E_K$) pari a

$$dE_K = dW_G + dW_P = (p_1 - p_2) dV - \rho dV(h_2 - h_1)g$$

$$dE_K = dW_G + dW_P$$

$$\frac{1}{2} \rho dV v_2^2 - \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 = (p_1 - p_2) dV - \rho dV(h_2 - h_1)g$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (2.11)$$

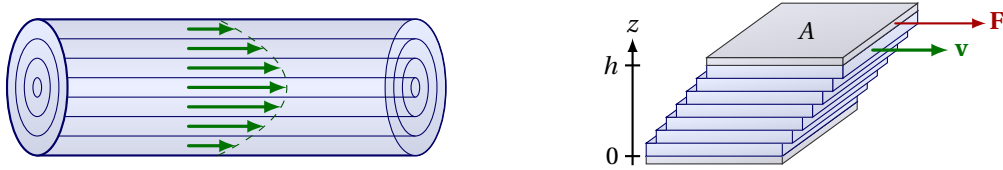
Teorema di Bernoulli

In un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della: **pressione**, **densità di energia cinetica** e della **densità di energia potenziale** è costante lungo il condotto (lungo qualunque tubo di flusso).

Notare che dalla legge della dinamica appena presentata, si ricavano tutte le leggi della statica precedenti: **la statica è sempre un caso particolare della dinamica**. Inoltre si rileva che la pressione misurata in un fluido in movimento è sempre minore di quella misurata in un fluido in quiete.

2.4.4 Moto laminare

Trattiamo ora il moto di **fluidi reali**, ovvero fluidi di cui non si può più approssimare $\eta = 0$ e per cui la densità è approssimabile a un valore costante $\rho \approx \text{costante}$. A velocità *non elevate* il moto è detto **laminare**: il regime è stazionario con le linee di corrente costanti nel tempo



Considerando un condotto lungo l e di raggio R si dimostra che la velocità in base alla distanza radiale vale

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (2.12)$$

In queste condizioni cambia la formula della portata che diventa

$$q = \int_0^R v(r) 2\pi r \, dr$$

da cui si ottiene la **legge di Hagen-Poiseuille** (valida per raggi molto piccoli)

$$q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} \quad (2.13)$$

dalla quale possiamo trovare il valore della velocità media:

$$v_m = \frac{q}{S} = \frac{\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} \quad (2.14)$$

Come nel caso di un punto materiale in presenza di attrito radente, per mantenere il flusso di fluido è necessaria una differenza di pressione, ovvero una forza per vincere la resistenza del moto dovuta all'attrito interno.

!!!

Per i fluidi reali Bernoulli vale solo in misura approssimata $dv/dn = 0$ non dipende da η .

2.4.5 Moto turbolento

Al crescere del raggio del condotto compaiono vortici nel fluido e si parla di **moto turbolento o vorticoso**. I vortici sono causati da forti variazioni di velocità ortogonalmente alle linee di corrente, e quindi, a **notevoli forze di attrito interno** (altre cause sono variazione di forma del condotto...).

Se il condotto è a sezione costante vale la legge sperimentale descritta da Reynolds che ha provato che si ha la transizione da regime laminare a turbolento quando il parametro \mathcal{R} detto numero di Reynolds super un certo valore critico:

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v L}{\eta} \quad v_{\text{crit}} = \mathcal{R}_{\text{crit}} \frac{\eta}{\rho L}$$

dove L è la **lunghezza caratteristica convenzionale** (per tubazioni cilindriche è il diametro).

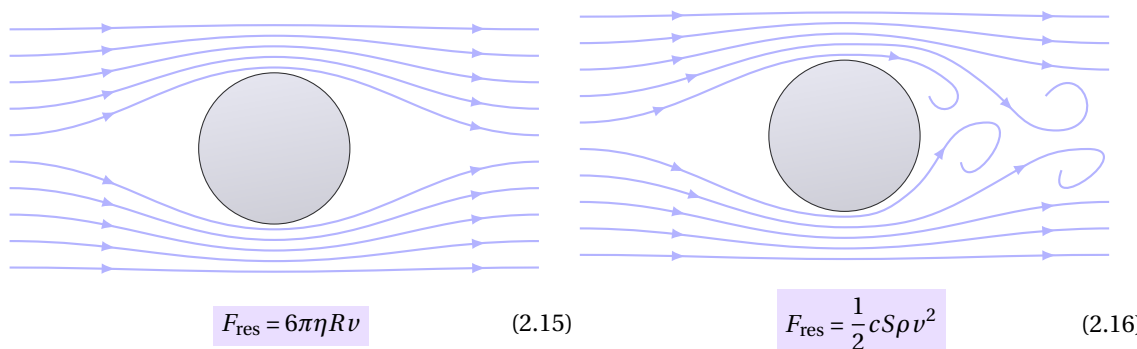
All'aumentare della differenza di pressione si raggiunge un **regime di moto stabile in regime turbolento** e si trova che la velocità media si può esprimere come

$$v_m^2 = 2 \frac{L}{k} \frac{\rho}{2} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

Vediamo quindi come il gradiente di pressione ($p_1 - p_2/l$) sia necessario per mantenere una certa velocità di flusso, più precisamente in regime vorticoso questo è una funzione quadratica della velocità, in regime laminare è una funzione lineare.

Consideriamo una sfera immersa in un fluido in moto. Se il fluido è ideale si avrà **completa simmetria delle linee di corrente**, quindi eguale pressione a monte e a valle della sfera che rimarrà ferma; questo risultato è indicato come **paradosso di D'Alembert**.

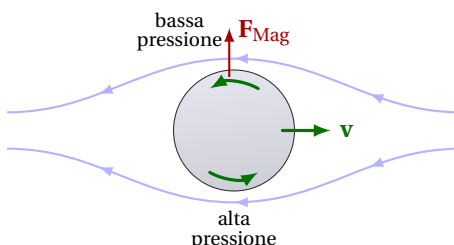
Se invece il fluido è reale si forma una scia vorticoso con pressione a valle maggiore e conseguente applicazione di una forza sulla sfera.



Dove la prima è detta **legge di Stokes** e vale per oggetti di forma sferica, mentre la seconda ha il coefficiente adimensionale c che dipende dalla forma dell'oggetto (soprattutto la parte posteriore).

2.4.6 Effetto Magnus e Portanza

Supponiamo che ora la sfera immersa nel fluido stia anche **ruotando su se stessa**. Ruotando trasporta per attrito una parte di fluido generando una **asimmetria** nelle velocità in alto e in basso. In generale la velocità del fluido sarà più alta dove viene trasportato il fluido dalla rotazione (in basso in figura). La differenza di velocità causa una differenza di pressione e quindi una spinta. Questo fenomeno prende il nome di **effetto Magnus**.



Un altro fenomeno importante è la **portanza**: una spinta verso l'alto dovuta alla differenza di pressioni nelle due parti inferiore e posteriore di un'ala.

Per ricavare un'espressione della forza possiamo passare dall'equazione di Bernoulli. Si hanno i seguenti valori di pressione e velocità:

- **A monte:** p e v ;
- **Sopra:** p_1 e $v + \Delta v$;
- **Sotto:** p_2 e $v - \Delta v$.

Deve valere

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v + \Delta v)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v - \Delta v)^2$$

da cui

$$p_2 - p_1 = 2\rho v \Delta v$$

che, con una superficie alare A , ci dà

$$F = 2A\rho v \Delta v$$

(2.17)

Termodinamica - I principio

1. **Temperatura** come indice di equilibrio termico tra sistemi;
2. **Primo principio** della termodinamica come equazione fondamentale dei bilanci energetici;
3. Il **calore** come scambio energetico.

Inserire piccolo riassunto pagina 426

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum

3.1 Termometria

Chiamiamo **sistema termodinamico** una porzione del mondo costituita da una o più parti assimilabile a un sistema continuo macroscopicamente costituito da un numero di elementi pari a $N_A = 6.0221 \cdot 10^{23}$. L'oggetto di studio saranno le proprietà fisiche macroscopiche e le loro variazioni, **trasformazioni** del sistema e **scambi energetici**.

Quando si parlerà di **ambiente** si intenderà un insieme di una o più parti con cui il sistema termodinamico può interagire. L'ambiente quindi **contribuisce** in generale a **determinare le caratteristiche fisiche macroscopiche del sistema**.

Distinguiamo:

1. **Sistema aperto** se avvengono scambi di energia e materia con l'ambiente;
2. **Sistema chiuso** se avvengono solo scambi di energia con l'ambiente;
3. **Sistema isolato** se non avvengono scambi con l'ambiente.

L'insieme (sistema + ambiente) è detto **universo termodinamico**

3.1.1 Variabili termodinamiche

Al fine di descrivere il nostro sistema termodinamico viene utilizzato un numero ridotto di variabili termodinamiche, ovvero grandezze fisiche **direttamente misurabili**. Le distinguiamo in estensive ed intensive:

Extensive

Variabili *additive* che esprimono proprietà **globali** del sistema che dipendono in particolare dalle dimensioni o dall'estensione di quest'ultimo.

Massa Volume

Intensive

Variabili *non additive* che esprimono proprietà **locali** del sistema che possono variare da punto a punto.

Pressione Temperatura Pressione

In base al sistema termodinamico in esame saranno necessarie certe variabili termodinamiche; per esempio per descrivere lo stato di un gas ideale ne sono necessarie 3 pVT poiché legate dall'equazione di stato $pV = nRT$ in cui due sono variabili e una dipendente dalle 2.

Osservazione La definizione di stato termodinamico è concettualmente diversa da stato meccanico. Uno stato meccanico presuppone la conoscenza di posizione e velocità degli n corpi interessati, lo stato termodinamico invece, data l'elevato numero di elementi n non permette ciò, anzi, ad uno stato termodinamico possono essere associati più stati meccanici.

3.2 Equilibrio termico

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum

Ora precisiamo il concetto di equilibrio termico. Presi due sistemi A e B con rispettive temperature T_A e T_B , i sistemi si dicono in **equilibrio termico** se hanno la stessa temperatura, $T_A = T_B$

Temperatura

La temperatura è l'indice dell'equilibrio termico tra due sistemi.

Per portare due sistemi all'equilibrio termico bisogna porre questi in **contatto termico** tramite una parete. Se questa parete porta i due sistemi in equilibrio termico, allora prende il nome di **parete diatermica**, se no **parete adiabatica**. *Nella pratica la parete adiabatica è un caso ideale limite.*

Sistema adiabatico

Un sistema è definito adiabatico se è circondato da pareti adiabatiche. Un sistema adiabatico non può essere messo in contatto termico con un'altro sistema o con l'ambiente. **Una parete è sempre necessaria** per evitare il contatto termico.

In generale per il contatto termico non per forza deve entrare in gioco una parete; due solidi a contatto o due fluidi immiscibili non ne hanno bisogno; la parete è necessaria in casi come il contenimento di un gas.

Definizione operativa di temperatura

Per prima cosa occorre identificare un fenomeno fisico che dipenda dalla temperatura θ e una grandezza X che lo caratterizzi. X è detta **caratteristica termometrica** e la temperatura funzione di X è detta **funzione termometrica** $\theta(X)$.

Il dispositivo in cui avviene il fenomeno e che fornisce il valore della caratteristica termometrica è indicato come **termometro**.

Termometro	Fenomeno	Caratteristica termometrica X
<i>a liquido</i>	dilatazione termica di un liquido	lunghezza della colonna di liquido
<i>a resistenza</i>	variazione della resistenza elettrica	resistenza elettrica
<i>a gas a volume costante</i>	variazione della pressione	pressione

Nonostante i nostri termometri mostrano una variazione di temperatura lineare, la dipendenza $\theta(X)$ non lo è (talvolta non è neanche monotona). Nella pratica i termometri vengono utilizzati in intervalli di temperatura nei quali la dipendenza può essere **approssimata con un andamento lineare**

$$\theta(X) = aX \quad a \text{ costante}$$

E' essenziale che il sistema di cui noi andiamo a misurare la temperatura sia riproducibile con facilità, per questo si definisce un **punto fisso**, un valore arbitrario associato al sistema in condizioni di equilibrio facilmente riproducibili. Il punto fisso campione scelto è il **punto triplo dell'acqua**: stato in cui ghiaccio e acqua e vapor d'acqua saturo sono in equilibrio; a questo stato è stata assegnata la temperatura arbitraria di

$$T_{pt} = 273.16 \text{ K}$$

Da questa possiamo ricavare la **temperatura empirica** di un termometro:

1. Si tara il termometro mettendolo in contatto termico con una cella al punto triplo dell'acqua; il termometro, raggiunto l'equilibrio, darà il valore X_{pt}

$$\theta(X_{pt}) = aX_{pt} = 273.16$$

2. Si pone poi il termometro a contatto con il sistema a temperatura incognita; all'equilibrio il termometro fornirà il valore X

$$\theta(X) = aX = aX_{pt} \frac{X}{X_{pt}} = \theta(X_{pt}) \frac{X}{X_{pt}} = 273.16 \frac{X}{X_{pt}}$$

$$\theta(X) = T = 273.16 \frac{X}{X_{pt}} [\text{K}] \quad (3.1)$$

Da cui troviamo anche che la costante a vale $a = 273.16 / X_{pt}$.

Termometri diversi forniscono sempre letture diverse quando in equilibrio termico con lo stesso stato di un sistema anche se tarati per costruzione al punto triplo dell'acqua (*mio guess: cambierà il tipo di andamento, forse non più lineare*).

3.2.1 Termometro a gas

inserire grafici

inserire grafici

Si usa come caratteristica termometrica la pressione:
come prima si misurerà la pressione al punto triplo

$$T_{pt} = C p_{pt}$$

dalla quale ricaviamo la temperatura *(non è una definizione accurata)*

$$T = T_{pt} \frac{p}{p_{pt}} = 273.16 \frac{p}{p_{pt}} \text{ K}$$

Come si può vedere dal grafico diminuendo la pressione nel bulbo le temperature dei gas tendono ad assumere valori uguali. Quindi posso dire che la **pressione** è una **buona caratteristica termometrica** solo quando è **bassa**. Quindi il termometro a gas è un buono strumento solo quando il gas è in **condizioni ideali**.

$$T = T_{pt} \frac{p}{p_{pt}} = (273.16 \text{ K}) \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p}{p_{pt}} \right)$$

3.2.2 Dilatazione termica

Il volume di un corpo, a pressione costante, aumenta al crescere della temperatura. Presa una sbarra di lunghezza L a temperatura T dopo una variazione di temperatura ΔT si ha

$$L + \Delta L = L + \alpha L \Delta T$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T$$

con α coefficiente di dilatazione lineare medio della sostanza. Nel caso di un oggetto isotropo, per la dilatazione volumica si ha

$$V + \Delta V = (L_1 L_2 L_3) + (\alpha L_1 \Delta T)(\alpha L_2 \Delta T)(\alpha L_3 \Delta T) = V + V(\alpha \Delta T)^3 \approx V + V(3\alpha \Delta T)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\alpha \Delta T$$

3.3 Esperimenti di Joule

Joule condusse una serie di esperimenti sugli **effetti termici del lavoro meccanico** (attraverso un mulinello, una resistenza, un pistone, dei blocchi strofinati). Nelle varie esperienze il sistema costituito dall'acqua e dal dispositivo meccanico o elettrico è racchiuso entro **pareti adiabatiche**. Il risultato ottenuto è che

il **lavoro** speso a parità di massa d'acqua è sempre **proporzionale alla variazione di temperatura** dell'acqua con la stessa costante di proporzionalità.

$$W_{ad} = C \Delta T$$

In analogia con la definizione di energia potenziale per le forze conservative, introduciamo il concetto di **energia interna**, energia che dipende solo dallo stato del sistema (cioè dalle sue coordinate termodinamiche):

$$W_{ad} = -\Delta U$$

convenzione

Se il sistema **fornisce lavoro all'esterno** il lavoro è assunto **positivo**, se il sistema **riceve lavoro** dall'ambiente allora il lavoro è assunto **negativo**.

Lo stesso incremento di temperatura è ottenibile senza compiere lavoro meccanico mediante uno **scambio di calore**, per esempio immergendo un corpo più caldo. Possiamo ottenere lo stesso cambiamento dello stato termodinamico dell'acqua, segnalato dalla stessa variazione di temperatura per il quale il sistema va ad aumentare la sua energia interna secondo

$$Q = \Delta U$$

dove Q rappresenta il calore scambiato senza lavoro esterno. Da questa otteniamo che

$$Q = \Delta U = -W$$

$$Q = -W_{ad} \quad (3.2)$$

Esiste quindi un particolare scambio di energia che non comporta movimenti macroscopici al quale si dà il nome di **scambio di calore**.

3.3.1 Primo principio della termodinamica

Se il sistema compie una trasformazione da uno stato A ad uno stato B, scambiando **calore** e **lavoro** con l'ambiente, Q e W **dipendono dalla particolare trasformazione** che congiunge i due stati termodinamici mentre **la differenza $Q - W$ risulta indipendente** dalla trasformazione.

Si può quindi scrivere che la differenza di energia interna

$$U_B - U_A = \Delta U$$

è uguale alla differenza $Q - W$:

$$\Delta U = Q - W \quad (3.3)$$

inserire grafici

3.3.2 Energia interna

Esiste quindi una funzione di stato **energia interna** le cui variazioni misurano gli scambi di energia con l'esterno durante una trasformazione. Quando si fornisce energia a un sistema questa resta immagazzinata sotto forma di energia interna e può essere poi riutilizzata.

Da notare che l'energia interna non indica l'energia cinetica del sistema, o la sua energia potenziale, bensì energia legata a **proprietà interne del sistema** come moto molecolare o forze intermolecolari, infatti lo scambio di quest'energia può avvenire non solo tramite lavoro, ma anche sotto forma di **scambio di calore**, riconducibile a fenomeni meccanici microscopici.

Spesso è utile considerare trasformazioni con variazioni infinitesime del tipo

$$dQ = dU + dW$$

dove però dU è un **differenziale esatto** perché come abbiamo detto prima la differenza di energia interna è indipendente dalla trasformazione, e dQ e dW non sono differenziali esatti poiché questi dipendono da *come si è svolta la trasformazione* e quindi non posso essere espressi come differenza dei valori di una funzione di stato.

3.3.3 Trasformazioni termodinamiche

I valori di calore e lavoro Q e W possono essere calcolati direttamente solo in casi specifici se si conoscono le loro espressioni analitiche dal momento che cambiano con la trasformazione. Se conosciamo le espressioni di $\Delta U, Q, W$ in funzione delle coordinate termodinamiche

$$\Delta U = Q - W$$

diventa un'equazione che lega le coordinate termodinamiche durante la trasformazione, quindi diventa **l'equazione della trasformazione**.

Prima di distinguere tre tipi di trasformazioni facciamo qualche osservazione.

1. corpi a contatto

Prendiamo due corpi a temperature T_1 e T_2 i poniamoli in contatto termico in un contenitore adiabatico. Tra di essi avviene uno scambio di calore fino a che raggiungono l'equilibrio termico. Durante il processo c'è sempre una differenza di temperatura finita, quindi durante la trasformazione **non c'è mai equilibrio termico**.

2. attrito

Preso un corpo con velocità iniziale v frenato da una forza d'attrito. L'energia cinetica diminuisce e contemporaneamente la temperatura delle superfici a contatto, del corpo e del piano, aumenta. Anche se assumessimo che questo processo avvenga in un tempo molto breve così da poter essere pensato adiabatico, alla fine i corpi cederebbero calore all'ambiente raggiungendo l'equilibrio termico.

Quindi nella prima fase non c'è equilibrio meccanico: $W = -\Delta U = \Delta K$, l'energia cinetica decresce quindi l'energia interna cresce. Nella seconda fase invece non c'è equilibrio termico: $\Delta U = Q$ dove Q è ceduto all'ambiente quindi U decresce. Durante il processo quindi **tutti gli stati intermedi sono di non equilibrio**.

1. **Trasformazioni adiabatiche:** una qualsiasi trasformazione in cui $Q = 0$ (si ottiene per trasformazioni veloci) e quindi $\Delta U = -W$. Il sistema non scambia calore con l'ambiente, ossia è **isolato termicamente**. Sperimentalmente si ottengono le condizioni adiabatiche chiudendo il sistema in un contenitore con pareti adiabatiche. Proprio per questo isolamento il sistema **non può raggiungere l'equilibrio termico**.
2. **Trasformazioni reversibili:** avvengono attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa. Sono utili perché possono essere arrestate in qualunque stato intermedio e se ne può invertire il verso variando di poco le condizioni esterne.
3. **Trasformazioni irreversibili:** avvengono attraverso stati di non equilibrio e/o in presenza di forze dissipative.

3. equilibrio

Prendiamo una vasca d'acqua con all'interno un contenitore di gas. Le pareti del contenitore sono diatermiche quindi il gas è in equilibrio termico a temperatura costante T . Si può espandere lentamente il contenitore muovendo una parete con una forza che sia sempre uguale e contraria a quella di pressione così da ottenere anche l'equilibrio meccanico.

In questo caso tutti gli stati intermedi si possono considerare di equilibrio. Ciò può avvenire solo se si opera una trasformazione **quasi-statica**, ovvero: prima di procedere a una trasformazione infinitesima di stato si attende il ristabilirsi dell'equilibrio nella nuova condizione.

!!!

La lentezza delle trasformazioni è **condizione solo necessaria** e non sufficiente. Vediamo come nel caso 1 si otterrebbero sempre stati intermedi di non equilibrio.

3.4 Calorimetria

Abbiamo visto dal primo teorema della termodinamica che lo scambio di calore Q comporta una variazione di energia interna ΔU e uno scambio di lavoro W secondo la legge

$$\Delta U = Q - W$$

Per semplicità andremo a studiare scambi di calore tra corpi solidi o liquidi andando a trascurare eventuali dilatazioni e di conseguenza il lavoro meccanico.

In un contenitore adiabatico poniamo due corpi a temperature T_1 e T_2 a contatto in modo che cedano calore Q fino ad arrivare all'equilibrio termico T_e . Ognuno dei due corpi avrà una variazione della temperatura $T_e - T_i$. Il sistema non scambia lavoro o calore con l'ambiente pertanto l'energia interna resta costante. Andando ad analizzare le energie interne ai due corpi, dovendo essere $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$ abbiamo $\Delta U_1 = -\Delta U_2$; inoltre poiché non è stato compiuto un lavoro meccanico varrà $Q_1 = -Q_2$: **il calore ceduto dal corpo è uguale in modulo a quello assorbito dall'acqua.**

Dalle misure si trova che esiste (nel limite di piccole variazioni di temperatura) **proporzionalità** tra il **calore scambiato** da un corpo, la **massa** del corpo stesso e la **variazione di temperatura**:

$$Q = mc(T_f - T_i)$$

dove c è il calore specifico caratteristico del corpo (osserviamo che il calore Q è una grandezza estensiva mentre il calore specifico c intensiva).

Poiché deve valere $Q_1 = -Q_2$ vale

$$m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2)$$

dalla quale note 3 su 4 variabili si può ricavare la quarta. Nel caso in cui non si possa assumere che il calore specifico sia praticamente costante bisogna scrivere

$$Q = \int dQ = m \int_{T_i}^{T_f} c(T) dT \quad (3.4)$$

3.4.1 Calore specifico

Calore specifico

Il calore specifico rappresenta il calore che occorre per scambiare con l'unità di massa di una data sostanza a temperatura T per farne variare la temperatura di 1 K.

Il calore specifico è una grandezza intensiva caratteristica della sostanza.

Capacità termica

La capacità termica rappresenta il **calore da scambiare** per farne variare la temperatura di 1 K.

$$C = mc$$

Per variazioni infinitesime

$$dQ = mcdT \rightarrow c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

Spesso si preferisce far riferimento al calore scambiato da un certo numero di moli di sostanza, pertanto si definisce anche il **calore specifico molare**

$$c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$$

precisazioni

E' però necessaria una precisazione riguardo le definizioni di calore specifico. Quando la trasformazione avviene in assenza di lavoro scambiato con l'ambiente $dW = 0$ e $dQ = dU$ per cui

$$c = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT} \quad c = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad (3.5)$$

equazioni che valgono solo quando il lavoro è nullo. Se però è compiuto lavoro esterno il calore scambiato dipende dalla trasformazione e è possibile definire diversi calori specifici per una stessa sostanza.

Misura del calore specifico

Si può effettuare la misura del calore specifico di un corpo tramite il **calorimetro di Regnault**. In un contenitore adiabatico si ha un recipiente pieno d'acqua a temperatura T_2 con immerso un termometro e un agitatore. Si immerge quindi un corpo a temperatura $T_1 > T_2$ e di calore specifico incognito c_x . Raggiunto l'equilibrio a temperatura T_e il bilancio dei calori scambiati in modulo sarà

$$m_x c_x (T_1 - T_e) = (C_1 + C_2)(T_e - T_2)$$

dove il primo termine è il calore ceduto dal corpo e il secondo il calore assorbito dal calorimetro.

$$c_x = \frac{(C_1 + C_2)(T_e - T_2)}{m_x(T_1 - T_e)}$$

Naturalmente la misura non potrà essere più precisa dell'1% in quanto è impossibile ottenere un perfetto isolamento termico, inoltre la capacità termica del termometro deve essere adeguatamente piccola in modo da minimizzare lo scambio di calore tra corpo e termometro.

temp di Debye e legge di Dulong-Petit

Processi isotermi: cambiamenti di fase

Si osserva che i cambiamenti di fase sono accompagnati da scambi di calore, più precisamente si tratta di quantità di calore λ ben definite dette **calori latenti**. Il calore richiesto per il cambiamento di fase da un corpo di massa m è

$$Q = m\lambda \quad (3.6)$$

La caratteristica importante dei cambiamenti di fase è di essere trasformazioni **praticamente reversibili**.

!!!

Il calore latente **non ha un valore fisso**. Per esempio nel caso dell'evaporazione è funzione della temperatura.

Sorgenti di calore

Sorgente di calore

Si definisce **sorgente di calore** un corpo con capacità termica praticamente infinita e quindi con la proprietà di poter scambiare calore restando a temperatura costante

Grandi masse d'acqua o aria possono essere considerate sorgenti di calore; corpi meno massivi lo possono essere per tempi molto brevi.

Proprio per la loro caratteristica di rimanere a temperatura costante, se un corpo è messo a contatto con una sorgente e la differenza di temperatura è finita, **non può esserci equilibrio termico** durante lo scambio. Può esserci l'equilibrio solo se si mantiene il corpo a contatto con la sorgente abbastanza a lungo (oppure se la differenza di temperatura durante lo scambio è infinitesima).

3.5 Trasmissione del calore

3.5.1 Conduzione

Prendiamo un corpo esteso in cui la temperatura non sia uniforme e tracciamo le **superfici isoterme** dove la funzione $T(x, y, z) = \text{cost}$, diciamo che la superficie S_1 ha temperatura T_1 e così via.

Se dS è un elemento della superficie isoterma, il calore che fluisce attraverso dS nel tempo dt è

$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS dt \quad (3.7)$$

k è la **conduttività termica** del materiale e dipende dal materiale e dalla temperatura (dipendenza marcata nei metalli dove k cresce al decrescere della temperatura). Invece essendo $\frac{dT}{dn}$ il **gradiente di temperatura** ortogonale a dS diretto verso temperature crescenti, il $-$ davanti a tutto indica che il flusso di calore è opposto al verso del gradiente di temperatura:

definiamo J_U il **flusso di calore per unità di superficie**

$$J_U \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = -k \frac{dT}{dn}$$

che in forma vettoriale si può scrivere

$$\vec{J}_U = -k \vec{\nabla} T \quad (3.8)$$

Vediamo come usare in pratica la 3.7: consideriamo una parete piana indefinita **diatermica** di spessore s posta tra due ambienti a temperature T_1 e T_2 . Andiamo ad analizzare una sezione della parete superficie dS in x attraverso la quale viene fornito il calore dQ_1 alla massa dm ; intanto dm attraverso dS in $x + dx$ cede il calore dQ_2 . Gli scambi di calore saranno quindi:

$$dQ_1 = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x dS dt$$

$$dQ_2 = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} dS dt$$

che tramite uno sviluppo di Taylor al primo membro

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} &= \left(\frac{\partial T}{\partial (x+dx)} \right)_{x+dx} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial (x+dx)^2} \right)_{x+dx} (x - x + dx) \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x dx \end{aligned}$$

$$\rightarrow dQ_2 = -k \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x dx \right] dS dt$$

Complessivamente dm assorbe il calore dQ_1 da sinistra e cede dQ_2 a destra, per cui assorbe

$$dQ_1 - dQ_2 = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}_x dS dx dt$$

quindi ricordando che per variazioni infinitesime vale

$$dQ = dm c dT = \rho dS dx c dT$$

troviamo che

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}_x dS dx dt = \rho dS dx c dT$$

ottenendo la legge che regola la variazione di temperatura in funzione del tempo e della posizione della parete (con $T(x=0) = T_1$ e $T(x=s) = T_2$)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho \frac{c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.9)$$

A regime

Arrivati alla temperatura di regime e una volta che la temperatura di ciascun punto ha raggiunto un valore stazionario **costante nel tempo** si annulla la derivata temporale e di conseguenza anche la derivata seconda spaziale:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = \alpha + \beta x$$

imponendo

$$T(0) = T_1 = \alpha$$

$$T(s) = T_2 = \alpha + \beta s = T_1 + \beta s$$

$$\beta = \frac{T_2 - T_1}{s}$$

possiamo riscrivere l'andamento della temperatura come

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} x \quad |\vec{\nabla} T| = \frac{T_1 - T_2}{s}$$

che mostra come la temperatura decresca linearmente partendo dal valore massimo ($x = 0$) T_1 fino al valore minimo ($x = s$) T_2 .

Prima avevamo definito il calore che fluisce attraverso una superficie dS in un tempo dt come

$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS dt$$

dalla quale ricaviamo che, nel nostro caso, attraverso dS fluisce il calore

$$Q = k \frac{T_1 - T_2}{s} S t$$

!!!

In **regime stazionario** il calore che entra nella parete dal lato ad alta temperatura è uguale al calore che esce dal lato a bassa temperatura. **C'è solo flusso di energia** e nessuna cessione alla parete.

Equazione di continuità Presa una superficie orientata Σ in un mezzo non in equilibrio termico di volume V , in assenza di sorgenti di calore in V il calore che esce per unità di tempo da V attraverso Σ è uguale a meno la variazione per unità di tempo del calore contenuto in V :

$$\int_{\Sigma} \vec{J}_U \cdot \hat{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V q dV = - \int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV$$

con q energia termica per unità di volume.

Se andiamo a riscriverla in forma differenziale otteniamo

$$\vec{J}_U \cdot \hat{n} dS = - \frac{\partial q}{\partial t} dV$$

e quindi come per i fluidi ()

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_U = 0 \quad (3.10)$$

inserire grafici

3.5.2 Convezione

La conduzione termica nei fluidi è difficile da osservare perché in essi avviene un altro fenomeno di trasmissione del calore: la convezione.

Riscaldando un fluido la parte più vicina alla sorgente di calore si scalda prima dilatandosi. Le parti di fluido più calde risentono quindi di una spinta di Archimede maggiore e tendono a spostarsi verso l'alto generando correnti ascensionali che fanno avvicinare le parti di fluido più fredde alla sorgente.

3.5.3 Irraggiamento

L'energia emessa sotto forma di onde elettromagnetiche in unità di tempo è descritta dalla **legge di Stefan-Boltzman** come

$$\varepsilon = \sigma e T^4 \quad (3.11)$$

dove $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{J}}{\text{sm}^2 \text{K}^4}$ è una costante universale ed e è l'**emissività** che varia tra 0 e 1: 0 per le pareti riflettenti, 1 per le cosiddette superfici nere. Una superficie nera assorbe tutta l'energia che incide su di essa.

3.5.4 Calore tra solido e fluido

La trasmissione del calore tra un corpo solido a temperatura T e un fluido a temperatura $T_0 < T$ messi a contatto tramite una superficie S è descritta dalla **legge di Newton**

$$Q = h(T - T_0)St \quad (3.12)$$

dove h è la **conducibilità termica esterna**

Gas ideali e reali

1. Equazione di stato dei gas ideali;
2. Trasformazioni di un gas ideale;
3. Cicli termodinamici di un gas ideale;
4. Teoria cinetica dei gas ideali
5. Gas reali;

4.0.1 Legge isoterma di Boyle

Per un gas ideale in equilibrio termodinamico (p_0, V_0, T) il prodotto pV è costante in tutti gli stati di equilibrio collegati da **trasformazioni isoterme e non**.

$$pV = \text{cost}$$

4.0.2 Legge isobara di Gay-Lussac

Per un gas ideale in equilibrio termodinamico (p_0, V_0, T) vale

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

in tutti gli stati di equilibrio collegati da **trasformazioni isobare**.

4.0.3 Legge isocora di Gay-Lussac

Per un gas ideale in equilibrio termodinamico (p_0, V_0, T) vale

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

in tutti gli stati di equilibrio collegati da **trasformazioni isocore**.

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad \text{per un gas ideale}$$

4.0.4 Legge di avogadro

Volumi di gas diversi, aventi stessa temperatura e stessa pressione, contengono lo stesso numero di molecole. Il volume di un gas dipende quindi dal numero di molecole da cui è costituito e non dal tipo di molecole o dalla loro dimensione. *A stessa temperatura e pressione un litro di ossigeno contiene lo stesso numero di molecole di un litro di elio.*

Si chiama mole una quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0.012 kg dell'isotopo ^{12}C del carbonio, ovvero $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ entità elementari.

4.0.5 Equazione di stato dei gas ideali

Consideriamo n moli di gas reale alla pressione atmosferica p_0 , temperatura $T_0 = 274.15\text{ K}$ e volume $V_0 = nV_m$. Mantenendo costante il volume e portando la temperatura al valore T abbiamo da Gay-Lussac che:

$$p_T = p_0 \alpha T \implies p_T V_0 = p_0 (V_0 \alpha T) = p_0 V_T$$

Nel secondo passaggio si è moltiplicato per V_0 ambo i lati dell'equazione.

V_0 e p_T sono le coordinate termodinamiche in un particolare stato di equilibrio alla temperatura T , come lo sono p_0 e V_T sempre alla temperatura T . In base alla legge di Boyle si ha:

$$p_T V_0 = p_0 V_T = pV$$

essendo p e V le generiche coordinate di uno stato di equilibrio alla temperatura T . Otteniamo dunque:

$$pV = p_0 V_0 \alpha T = n p_0 V_m \alpha T = nRT$$

dove il prodotto $p_0 V_m \alpha = R$ è una costante universale per tutti i gas, ovvero $R = 8.314\text{ J/mol K}$. Dunque abbiamo ricavato l'equazione di stato dei gas ideali:

$$pV = nRT \quad (4.1)$$

4.1 Trasformazioni di un gas

Una trasformazione che porti un gas da uno stato A ad uno stato B può svolgersi attraverso stati di equilibrio termodinamico ed è rappresentabile nel piano di Clapeyron da una curva continua. Se invece la trasformazione avviene attraverso stati di non equilibrio si ha una rappresentazione a tratti per indicare che si ignorano i valori delle coordinate termodinamiche durante il processo.

utile però solo se si conosce l'espressione esplicita di $p(V)$, situazione soddisfatta sostanzialmente in due sole situazioni:

- la **trasformazione è reversibile** e pertanto si può calcolare l'integrale in quanto la pressione è determinata in ogni stato intermedio;
- è nota la pressione esterna** che, per esempio, è costante; caso tipico di quando il processo avviene sotto pressione atmosferica; allora, anche se la trasformazione non è reversibile, il lavoro è calcolabile ed è dato da $W = p_{amb} (V_B - V_A)$

In tutti gli altri casi in cui la pressione non è nota la pressione non si può applicare la (??). Ad ogni modo se la trasformazione è **isocora** il lavoro è nullo in quanto $V = \text{costante}$.

Il lavoro, se si può utilizzare (??), in accordo con il significato geometrico dell'operazione di integrazione è pari all'area compresa tra la curva e l'asse dei volumi. In una trasformazione ciclica reversibile il lavoro è dato dall'area racchiusa dal ciclo stesso.

4.1.1 Calore e energia interna del gas ideale

In una trasformazione generica un gas scambia anche calore con l'ambiente e per il calcolo bisogna ricorrere al primo principio. Per una trasformazione infinitesima isocora si ha $dQ = n c_V dT$.

Le quantità:

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V, \quad c_P = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P$$

si chiamano, rispettivamente, calore specifico molare a volume costante e a pressione costante e si misurano in $J/molK$. Se c_V e c_P possono essere ritenuti costanti, il calore scambiato per una variazione ΔT di temperatura risulta:

$$Q_V = n c_V \Delta T, \quad Q_P = n c_P \Delta T \quad (4.2)$$

Altrimenti

$$Q_V = n \int_A^B c_V dT, \quad Q_P = n \int_A^B c_P dT \quad (4.3)$$

Come nel caso dei solidi e dei liquidi il calore scambiato dipende solo dalla variazione di temperatura. In un gas ideale risulta inoltre sempre vero $c_P > c_V$.

4.2 Relazione di Mayer

th

4.3 Trasformazioni adiabatiche

Il gas è racchiuso da pareti adiabatiche e può scambiare lavoro solo con l'ambiente (tramite una parete mobile).

$$Q = 0 \Rightarrow W_{AB} = -\Delta U \\ = -n c_V \Delta T$$

$$pV = nRT \Rightarrow nT = \frac{pV}{R}$$

Presa una trasformazione dal punto A al punto B si avrà quindi

$$W_{AB} = n c_V (T_A - T_B) = c_V \frac{(p_A V_A - p_B V_B)}{R} \\ = \frac{1}{\gamma - 1} (p_A V_A - p_B V_B)$$

con

$$\boxed{c_P - c_V = R}$$

4.4 Trasformazioni

4.5 Rendimento

4.6 Cicli

4.7 Gas reali

4.8 Teoria cinetica dei gas ideali

Termodinamica - II principio

Sperimentalmente si ottiene che è possibile trasformare integralmente il lavoro in calore ceduto ad una sorgente lasciando il sistema nello stato iniziale, ma non è possibile trasformare integralmente il calore prelevato dalla sorgente in lavoro.

5.1 Secondo principio della termodinamica

5.1.1 Enunciato di Kelvin-Plank

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

5.1.2 Enunciato di Clausius

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

Con l'aiuto di una particolare sistema di macchine termiche si può facilmente dimostrare l'equivalenza dei due enunciati:

Prendiamo due macchine termiche che lavorano tra due sorgenti T_1 e T_2 .

1. Supponiamo non valga il principio di Kelvin-Plank e che quindi sia possibile realizzare un processo ciclico che trasformi integralmente calore in lavoro (è nulla la cessione di calore alla sorgente fredda). Il lavoro prodotto è utilizzato per far funzionare una macchina frigorifera che assorbe il calore Q_1 dalla sorgente fredda T_1 e cede calore Q_2 alla sorgente T_2 calda.

Si ha quindi come risultato il trasferimento di calore da una sorgente fredda a una calda violando l'enunciato di Clausius.

2. Immaginiamo una prima macchina termica che viola l'enunciato di Clausius che scambia il calore Q da T_1 a T_2 . Se dimensioniamo una seconda macchina in modo che questa assorba Q_2 da T_2 , compia il lavoro W e ceda Q a T_1 . In questo modo la macchina complessiva non scambia calore con T_1 e compie il lavoro $W = Q_2 + Q$ con Q_2 assorbito da T_2 e Q ceduto a T_2 .

Il risultato è una macchina che trasforma tutto il calore scambiato con la sorgente T_2 (Q e Q_2) in lavoro, violando quindi l'enunciato di Kelvin-Plank.

Ciclo monotermeo

Il primo enunciato evidenzia come non sia possibile effettuare un processo ciclico con una sola sorgente. L'unica situazione possibile è quella con

$$Q \leq 0 \quad W \leq 0$$

dove viene compiuto lavoro sulla macchina che cede calore alla sorgente. Se la macchina è *reversibile* allora il processo può essere percorso al contrario, devono quindi valere le disequazioni contrarie

$$Q \geq 0 \quad W \geq 0$$

Queste ultime due si possono leggere come una macchina che assorbe calore e compie lavoro, chiaramente in contrasto con l'enunciato di Clausius. Quindi l'unica situazione possibile per un *ciclo monotermeo reversibile* è

$$Q = 0 \quad W = 0$$

5.2 Teorema di Carnot - espressione matematica

Il teorema di Carnot precisa una massima percentuale di calore assorbito da una macchina termica trasformabile in lavoro esprimendo una prima valutazione matematica dell'enunciato di Kelvin-Planck.

Prendiamo due macchine termiche con la condizione che compiano lo stesso lavoro e che una delle due sia reversibile. Le due macchine assorbono rispettivamente Q_2 e Q'_2 e cedono Q_1 e Q'_1 .

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2} \quad \eta_R = \frac{W}{Q'_2}$$

Supponiamo che $\eta_X > \eta_R$ e invertiamo il processo di **R** rendendola una macchina frigorifera.

Ora sappiamo che la prima macchina **X** compie il lavoro positivo

$$W = Q_1 + Q_2 > 0$$

mentre la macchina **R** subisce il lavoro negativo

$$-W = -Q'_1 - Q'_2 < 0$$

da cui possiamo scrivere

$$Q_1 + Q_2 = W = Q'_1 + Q'_2 \rightarrow \boxed{Q_1 - Q'_1 > 0} \quad \text{calore assorbito}$$

Dalla supposizione possiamo dire che

$$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q'_2} \rightarrow Q_2 < Q'_2 \rightarrow \boxed{Q_2 - Q'_2 < 0} \quad \text{calore ceduto}$$

La macchina complessiva quindi non compie lavoro: tutto quello compiuto da **X** viene assorbito da **R**; L'unico risultato alla fine di un ciclo è il passaggio di calore dalla sorgente fredda alla sorgente calda, in contrasto con l'enunciato di Clausius. Ne consegue che è sbagliata l'ipotesi di partenza e deve invece essere

$$\eta_X \leq \eta_R$$

Se anche **X** fosse reversibile si potrebbe fare la supposizione contraria $\eta_X > \eta_R$ e arrivare alla conclusione contraria

$$\eta_X \geq \eta_R$$

disuguaglianza compatibile con la precedente solo se

$$\eta_X = \eta_R$$

Teorema di Carnot

Tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse due sorgenti hanno rendimento uguale e massimo. Il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo.

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (5.1)$$

Il teorema è valido anche per macchine termiche che lavorano tra più sorgenti, non si ha tuttavia una formula generale come la (5.1).

Se andiamo a confrontare il rendimento di una macchina qualsiasi con quello di una macchina reversibile si trova

$$\begin{aligned} 1 - \frac{Q_1}{Q_2} &\leq 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Se la macchina è reversibile sarà

$$\begin{aligned} 1 - \frac{Q_1}{Q_2} &= 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} &= 0 \end{aligned}$$

In conclusione: **una macchina reversibile che lavora tra due sorgenti $T_1 > T_2$ sfrutta al meglio l'energia fornita sotto forma di calore, infatti a parità di calore fornito è quella che fornisce il lavoro massimo; oppure a parità di lavoro fornito è quella che assorbe meno calore.**

Studio del rendimento massimo

Si può dimostrare che è **inutile servirsi di sorgenti molto fredde** per ottenere macchine termiche ad alto rendimento; è invece più praticabile utilizzare sorgenti calde.

inserire grafici

La macchina **M** scambia calore tra T_2 e T_1 e, poiché non esistono sorgenti ideali, la sorgente T_1 tende a scaldarsi (viene fornito calore). Per evitare che la sorgente si scaldi si installa una macchina frigorifera che assorba il calore da T_1 compiendo W' e ceda il restante all'ambiente.

Se andiamo a calcolare il rendimento della macchina complessiva:

$$\eta = \frac{W + W'}{Q_2} = \frac{(Q_1 + Q_2) + (-Q_1 - Q'_2)}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q'_2}{Q_2} = 1 - \frac{Q'_2}{Q_2}$$

vediamo come la sorgente T_1 intermedia non sia rilevante nel bilancio energetico complessivo.

raveau

5.2.1 Teorema di Clausius

Si può generalizzare l'espressione $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$ per una macchina termica che lavora tra due sorgenti a una più generale che opera tra n sorgenti.

Teorema di Clausius

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad \oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (5.3)$$

inserire grafici

Per dimostrarlo immaginiamo di mettere n macchine reversibili tra le sorgenti T_i e una nuova sorgente T_0 in modo che queste scambino con le T_i lo stesso calore che queste assorbono e con T_0 un calore arbitrario Q_{0i} .

Se andiamo ad applicare $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ sui calori scambiati dalle macchine reversibili si ha

$$-\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{01}}{T_0} = 0$$

\vdots

$$-\frac{Q_n}{T_n} + \frac{Q_{0n}}{T_0} = 0$$

che si può riscrivere come

$$\frac{1}{T_0} \sum Q_{0i} = \sum \frac{Q_i}{T_i}$$

Poiché le sorgenti T_i hanno bilancio termico nullo si ha che la macchina complessiva composta da M e dalle n ausiliarie reversibili scambia calore solo con la sorgente T_0 , di conseguenza, compiendo un ciclo monoterme, il calore scambiato non può essere positivo.

$$\frac{1}{T_0} \sum Q_{0i} \leq 0 \rightarrow \boxed{\sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0}$$

Come al solito se M è una macchina reversibile possiamo invertire i cicli, cambiare segno agli scambi di calore e ottenere

$$\frac{1}{T_0} \sum (-Q_{0i}) \leq 0 \rightarrow \boxed{\sum \frac{Q_i}{T_i} \geq 0} \rightarrow \sum \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

5.2.2 Temperatura termodinamica assoluta

Dal teorema di Carnot abbiamo dedotto che, per una macchina reversibile, il rendimento è funzione delle sole temperature delle sorgenti; per questo possiamo dire che anche il rapporto tra i calori scambiati lo è.

Andiamo quindi a definire

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2) \quad \frac{Q_2}{Q_0} = f(t_2, t_0)$$

Se combiniamo una macchina reversibile del tipo

inserire grafici

che non scambia calore con t_0 , possiamo scrivere i rapporti come

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_0} \frac{Q_0}{Q_1} \quad f(t_1, t_2) = \frac{f(t_0, t_2)}{f(t_1, t_0)}$$

Tuttavia il rapporto non dipende da t_0 e le due funzioni dell'ultima frazione possono essere riscritte come delle altre funzioni g :

$$f(t_1, t_2) = \frac{g(t_2)}{g(t_1)}$$

definiamo la funzione g temperatura termodinamica assoluta.

Costruiamo un termometro costituito da una macchina reversibile che lavora tra la temperatura da misurare e la temperatura del *punto triplo dell'acqua*, che è il nostro punto di riferimento, pari a 273.16 K, assorbendo il calore Q e cedendo il calore Q_{pt} .

$$\frac{Q}{Q_{pt}} = \frac{g(t)}{g(t_{pt})} \rightarrow g(t) = \frac{Q}{Q_{pt}} g(t_{pt}) \rightarrow g(t) = \frac{Q}{Q_{pt}} 273.16 \text{ K}$$

misurata tramite un termometro a gas dove la *caratteristica termometrica* è il calore scambiato alla temperatura $g(t)$. Per convincersi che le scale di temperatura $g(t)$ (misurata tramite il nostro termometro di Carnot) e T (misurata tramite un termometro a gas) coincidano basta sapere:

- Il rapporto Q/Q_{pt} non dipende dalla sostanza che descrive il ciclo (per il teorema di Carnot);
- Il rapporto dei calori scambiati è proporzionale al rapporto delle temperature (misurate con il termometro a gas ideale);
- Le due scale coincidono al punto triplo dell'acqua.

Viene definita quindi la temperatura

$$g(t) = \frac{Q}{Q_{pt}} 273.16 \text{ K}$$

Zero assoluto

Viene detto **zero assoluto** la temperatura $g(t)$ con Q che tende a zero, ovvero la temperatura a cui una **trasformazione isoterma reversibile si svolge senza scambio di calore**.

Q , nel ciclo di Carnot, è quello scambiato nell'isoterma a temperatura T . Di conseguenza se la temperatura dell'isoterma è nulla, anche lo scambio di calore è nullo e l'isoterma reversibile coincide con un'adiabatica reversibile (fatto possibile solo se la temperatura è nulla in caso di trasformazioni reversibili; si è visto in precedenza il caso dell'espansione libera irreversibile).

5.3 Entropia

Presi due stati termodinamici A e B collegati da due trasformazioni reversibili differenti

inserire grafici

si **mostra che il valore dell'integrale** $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ **esteso a una qualsiasi trasformazione reversibile è sempre lo stesso**: l'entropia è una funzione di stato dipendente solo dalle coordinate termodinamiche del sistema. Dal teorema di Clausius sappiamo che per trasformazioni reversibili vale

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

riscrivendo l'integrale ciclico

$$\begin{aligned} \oint \frac{dQ}{T} &= \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = 0 \\ \Rightarrow \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 &= \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 \\ \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} &= S_A - S_B = \Delta S \end{aligned} \quad (5.4)$$

Così come l'energia interna totale è la somma delle energie interne del sistema (come per il calore e per il lavoro), anche l'entropia è una grandezza estensiva.

5.3.1 Principio di aumento dell'entropia

Imponiamo che la prima trasformazione sia irreversibile e la seconda reversibile così che la trasformazione ciclica sia irreversibile. Per il teorema di Clausius si ha

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0$$

riscrivendo l'integrale ciclico

$$\begin{aligned} \oint \frac{dQ}{T} &= \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 < 0 \\ \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} &< 0 \\ \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} &> \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} \end{aligned}$$

C'è da specificare che l'integrale sulla trasformazione irreversibile non ha nessun particolare significato fisico e **dipende dalla trasformazione**. Invece l'integrale sulla trasformazione reversibile rappresenta la variazione di entropia dallo stato A allo stato B.

In generale quindi il risultato di $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ su una generica trasformazione non è uguale alla variazione di entropia ma minore.

La variazione di entropia **non può essere negativa**:

$$\begin{aligned} \text{rev} \quad dS &= \frac{dQ}{T} = 0 \\ \text{irr} \quad dS &= \frac{dQ}{T} > 0 \end{aligned}$$

5.3.2 Calcoli di variazione di entropia

Scambi di calore con sorgenti

Sorgente - Sorgente Consideriamo lo scambio di calore tra due sorgenti T_2 e T_1 senza alcuna macchina termica che lavori tra le due. T_2 cede il calore $-Q$ e T_1 assorbe il calore Q .

Il processo descritto è *irreversibile*, inoltre per definizione lo scambio di calore di una sorgente è *isotermo*. Per il calcolo dell'entropia utilizziamo una trasformazione isoterma reversibile tra gli stessi stati iniziali e finali.

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T_1} = \frac{Q}{T_1} \qquad \Delta S_2 = \int_A^B \left(-\frac{dQ}{T_2} \right) = -\frac{Q}{T_2}$$

$$\Delta S_u = \Delta S_2 + \Delta S_1 = Q \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

Si ha quindi un aumento dell'entropia ($T_2 > T_1$) in accordo con il principio esposto prima.

Sorgente - macchina - Sorgente Se invece consideriamo una macchina termica che lavora tra le due sorgenti si avrà:

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{dQ_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \qquad \Delta S_2 = \int_A^B \frac{dQ_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$$

La variazione di entropia del sistema macchina è nulla in un ciclo. Calcoliamo quindi la variazione di entropia dell'ambiente prendendo i calori con i segni opposti

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{amb}} = - \left(\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \right)$$

Dal teorema di Clausius sappiamo che la parentesi è negativa e si ha quindi un aumento dell'entropia. Notare che se la macchina fosse reversibile la variazione di entropia sarebbe nulla.

Sorgente - Corpo Se poniamo a contatto un corpo a temperatura T_1 con una sorgente (immaginiamo la sorgente più calda del corpo). La trasformazione è irreversibile, quindi, immaginiamo infiniti scambi di calore tra il corpo e infinite sorgenti a temperatura $T_1 + dT$, $T_1 + 2dT$, ... T_2 . Con ciascuna di queste trasformazioni reversibili viene scambiato il calore

$$dQ = mcdT$$

Quindi si ha che il corpo assorbe il calore

$$Q = mc(T_2 - T_1)$$

e la sorgente cede il calore $-Q$.

Per calcolare la variazione di entropia del corpo "sommiamo" le infinite variazioni dovute agli scambi di calore con le infinite sorgenti:

$$\Delta S_{\text{sis}} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{mcdT}{T} \right) = \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Scambi di calore tra corpi

Cambiamenti di fase

5.3.3 Energia inutilizzabile

Processi naturali irreversibili sono accompagnati da una **degradazione dell'energia**, ovvero la perdita di disponibilità di lavoro.

Quando avviene un processo irreversibile in cui l'entropia dell'universo aumenta di ΔS_u , la grandezza

$$E_{IN} = T \Delta S_u$$

viene detta **energia inutilizzabile** ed è pari alla differenza tra il lavoro ottenibile se il processo fosse reversibile e il lavoro effettivamente ottenuto.

Prendiamo come esempio una **espansione libera di un gas**: durante l'espansione libera non c'è equilibrio meccanico, il gas non produce lavoro e non scambia calore

$$W = Q = 0$$

quindi La temperatura resta costante e il suo volume aumenta. La variazione dell'entropia, vista l'adiabaticità del processo, coincide con quella dell'universo

$$\Delta S_u = nR \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

La variazione di entropia può anche essere calcolata attraverso una trasformazione reversibile che collega gli stati A e B . Pensiamo allora ad una trasformazione isoterma reversibile che assorbe il calore Q alla temperatura T producendo lavoro:

$$dW_R = p dV = \frac{nRT}{V} dv$$

$$W_R = nRT \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = T \Delta S_u$$

$$W_R - W = T \Delta S_u$$