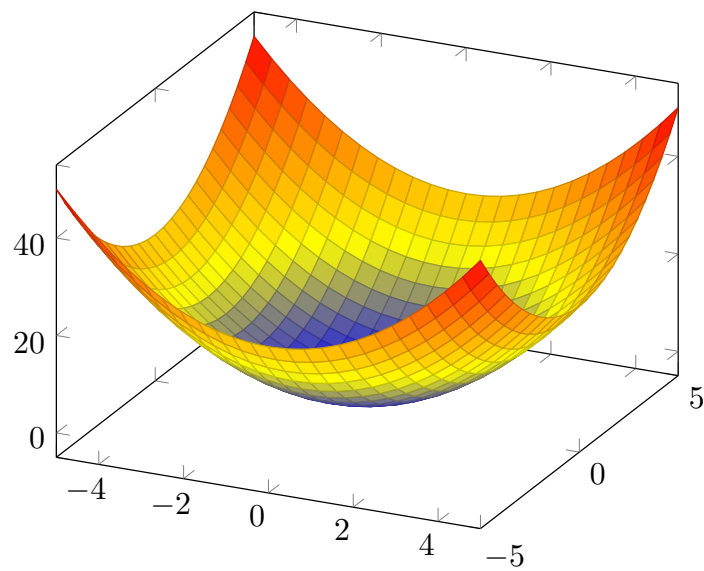


# Fisica II

Riassunto da: " - *Mazzoldi, Nigro, Voci* "



Corso di Laurea in Fisica - Corso A  
Università degli studi di Torino, Torino  
Settembre 2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Elettrostatica</b>	<b>2</b>
1.1	Campo elettrostatico . . . . .	2
1.1.1	Dipolo elettrico . . . . .	2
	Potenziale del dipolo . . . . .	2
	Campo elettrico del dipolo . . . . .	3
1.2	Lavoro elettrico . . . . .	3
1.2.1	Tensione elettrica e forza elettromotrice . . . . .	3
1.2.2	Potenziale elettrostatico ed energia potenziale . . . . .	4
1.3	Flusso di campo elettrico . . . . .	4
	Teorema di Stokes . . . . .	6
1.3.1	Discontinuità di carica . . . . .	6
1.4	Conduttori . . . . .	6

# Elettrostatica

## 1.1 Campo elettrostatico

### *Definizione: Campo elettrostatico*

Il campo elettrostatico prodotto in un punto  $P$  da un sistema di cariche ferme è definito come forza elettrostatica risultante  $F$  che agisce su una carica di prova  $q_0$  posta in  $P$  divisa per la carica stessa.

In realtà la carica di prova può perturbare la distribuzione di cariche originale, per questo la definizione diventerebbe più precisa se si facesse tendere a zero il valore di  $q_0$ . In pratica è sufficiente che  $q_0$  sia molto piccola rispetto alle altre cariche.

### 1.1.1 Dipolo elettrico

Definiamo **momento del dipolo**

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

Consideriamo un punto  $P$  nel quale misuriamo il potenziale, pari alla somma dei contributi delle due cariche:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

Ipotizziamo che  $P$  sia molto distante dal dipolo (rispetto alla distanza  $a$ ) così che  $r_1$  e  $r_2$  siano sempre più assimilabili a due segmenti paralleli. Andiamo poi a tracciare un segmento perpendicolare a  $r_1$  fino a  $r_2$  evidenziando la distanza  $r_2 - r_1 \approx a \cos \vartheta$ .

### Potenziale del dipolo

Con le seguenti approssimazioni andiamo a riscrivere il potenziale:

$$r_2 - r_1 \approx a \cos \vartheta \qquad r_1 r_2 \approx r^2$$

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{a \cos \vartheta}{r^2} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Vediamo come a grandi distanze il potenziale del punto  $P$  dia *informazioni solo sul momento di dipolo* e non sulle due cariche o sulla loro distanza reciproca. A parità di momento si potranno avere due cariche ravvicinate e molto cariche o più distanti e meno cariche.

## Campo elettrico del dipolo

Riscrivendo  $r$  e  $\cos \vartheta$  esprimiamo il potenziale come

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{a \cos \vartheta}{r^2} \right)$$

$$V(P) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dalla relazione  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  otteniamo l'espressioni del campo elettrico

$$\vec{E} = \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5}, \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \right)$$

$$E(P) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1}$$

Concludiamo osservando che il campo elettrico del dipolo varia con  $r^3$  (il monopolio con  $r^2$ ) e dipende anche dall'angolo  $\vartheta$ .

## 1.2 Lavoro elettrico

Quando su una carica  $q_0$  agisce una forza  $\vec{F}$  di qualsiasi natura, possiamo definire sempre un campo elettrico  $\vec{E}$  che chiamiamo **campo elettromotore**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \rightarrow \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

di cui non conosciamo necessariamente la natura; nel caso di un insieme di cariche ferme questo coinciderà con il campo elettrostatico, ma in questo caso studiamo il caso più generale.

Suddividendo il percorso da  $A$  a  $B$  in segmenti infinitesimi  $d\vec{s}$  calcoliamo il lavoro come integrale di linea del campo  $E$  lungo  $C_1$

$$dW_1 = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$W_1 = q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

### 1.2.1 Tensione elettrica e forza elettromotrice

#### **Definizione: Tensione elettrica**

Il rapporto tra il lavoro compiuto dalla forza  $\vec{F}$  nello spostamento da  $A$  a  $B$  lungo il percorso  $C_1$  e la carica

$$T(A \rightarrow B, C_1) = \frac{W_1}{q_0} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

viene definito **tensione elettrica**.

Se si considera un secondo percorso  $C_2$  si trova in generale un lavoro diverso e quindi un diverso valore della tensione elettrica pur essendo i punti  $A$  e  $B$  gli stessi.

Se studiamo il lavoro lungo un percorso chiuso invece troviamo

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

**Definizione: Forza elettromotrice**

Il rapporto tra lavoro compiuto sulla carica e la carica stessa per il percorso chiuso, ovvero l'integrale di linea circuitazione di campo elettrico

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

viene definito **forza elettromotrice** relativa al percorso chiuso  $C$ .

Sviluppando l'integrale

$$\begin{aligned} \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= W_1 - W_2 \end{aligned}$$

vediamo che in generale per un percorso chiuso il lavoro è diverso da zero. Tuttavia andremo a studiare il comportamento del *campo elettrostatico* che è conservativo e di conseguenza ha circuitazione nulla.

### 1.2.2 Potenziale elettrostatico ed energia potenziale

Se il campo è conservativo, non dipendendo dal percorso seguito l'espressione della tensione elettrica può essere riscritta semplicemente come l'integrale tra  $A$  e  $B$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A)$$

dove  $f$  è una particolare funzione definita a meno di una costante arbitraria e che rinominiamo  $V$  **potenziale elettrostatico**.

**Definizione: Differenza di potenziale**

Possiamo definire una **differenza di potenziale** pari a

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

## 1.3 Flusso di campo elettrico

Definiamo flusso di un campo vettoriale  $\vec{E}$  l'integrale

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

dove  $\hat{u}_n$  è il versore normale alla porzione infinitesima di superficie  $d\Sigma$ . Vediamo che il prodotto scalare fa sì che contribuisca solo la componente di campo vettoriale ortogonale alla superficie.

Mostriamo come il flusso *dipenda solo dall'angolo solido sotto il quale la superficie vede la carica*. Prima di tutto qualche osservazione geometrica:

$$\begin{aligned}
d\vartheta &= \frac{ds}{r} & ds' \cos \alpha &= ds \rightarrow d\vartheta = \frac{ds' \cos \alpha}{r} \\
d\Omega &= \frac{d\Sigma_0}{r^2} & d\Sigma \cos \alpha &= d\Sigma_0 \rightarrow d\Omega = \frac{d\Sigma \cos \alpha}{r^2}
\end{aligned}$$

Andiamo ora a calcolare il flusso attraverso  $d\Sigma$ :

$$\begin{aligned}
d\Phi &= \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n d\Sigma \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} |\hat{u}_r| |\hat{u}_n| \cos \alpha d\Sigma \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} |\hat{u}_r| |\hat{u}_n| d\Sigma_0 \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\Sigma_0 \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega
\end{aligned}$$

Quindi se consideriamo una superficie chiusa si ha un angolo solido

$$d\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

e di conseguenza

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

Se la carica esterna il flusso è nullo (le cariche esterne contribuiscono solo al campo elettrico). Inoltre se consideriamo più cariche, o addirittura una distribuzione omogenea di cariche si hanno i seguenti valori di flusso:

$$\text{distribuzione finita di cariche:} \quad \Phi = \oint \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \sum_i \frac{q_{i(int)}}{\epsilon_0}$$

$$\text{distribuzione continua di cariche:} \quad \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(x, y, z) d\tau$$

### Rotore di un campo vettoriale

Viene definito rotore del campo elettrico  $\vec{E}$  il prodotto vettoriale

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

Questo rappresenta la capacità del campo elettrico di *formare vortici*, ovvero di generare linee di forza che si richiudono su loro stesse.

Poiché anche il rotore del campo elettrico è un campo vettoriale, è possibile definirne un suo flusso:

$$\Phi(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

### Teorema di Stokes

La circuitazione è uguale al flusso del rotore:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma_{\gamma}} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

Qui è espresso nel caso del campo elettrico dove si ha che la circuitazione è nulla qualunque sia la curva  $\gamma$  (a patto che sia chiusa). Allora il flusso del rotore è nullo qualunque sia la superficie ed è possibile solo se il rotore di  $\vec{E}$  è nullo:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

Dire che il rotore è nullo equivale a dire che il campo elettrico è **irrotazionale**, ovvero che le sue linee di forza non possono chiudersi su loro stesse; il campo elettrico "non forma vortici".

L'annullarsi del rotore non è un fatto sorprendente. Sappiamo infatti che il rotore di un gradiente è sempre nullo e che il campo elettrostatico conservativo può essere scritto come gradiente della funzione scalare del potenziale elettrostatico  $V$ :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge (-\vec{\nabla} V)$$

#### 1.3.1 Discontinuità di carica

### 1.4 Conduttori