Analisi II - 2021/22 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 6 luglio 2022

Esercizio 1. Si consideri il campo scalare definito da

$$f(x,y) = 1 + \log(3x + y + 1) + 2x\cos 2y.$$

(i) Determinare e disegnare il dominio di f e dire, giustificando la risposta, se è un insieme aperto, chiuso, compatto, limitato.
(ii) Verificare che f è differenziabile in $(0,0)$ (giustificando la risposta) e, se possibile, scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie cartesiana $z = f(x,y)$ nel punto $(0,0,1)$.
(iii) Calcolare, se possibile e giustificando la risposta, la derivata direzionale di f in $(0,0)$ lungo una generica direzione $v = (v_1, v_2)$.

Soluzione: (i) Il dominio di f è l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y + 1 > 0\}$, la regione sopra la retta $y = -3x - 1$. Non è limitato perché non esiste una sfera che lo contenga, è un insieme aperto in quanto definito da una disuguaglianza stretta. Non essendo chiuso e limitato, non è un insieme compatto.
(ii) Si osserva che $(0,0) \in A$. La funzione f è di classe C^1 su A quindi è differenziabile su A e, in particolare in $(0,0)$, da cui segue che f ammette piano tangente in $(0,0)$ e derivata direzionale.
Le derivate parziali sono

$$f_x(x,y) = \frac{3}{3x + y + 1} + 2\cos 2y, \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{3x + y + 1} - 4x\sin 2y.$$

Il piano tangente è

$$z = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + 1, \quad \text{cioè} \quad 5x + y - z = -1.$$

(iii) La derivata direzionale si ottiene con la formula del gradiente:

$$Dvf(0,0) = f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2 = 5v_1 + v_2.$$

Esercizio 2. Calcolare o dimostrare che non esiste il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(e^x + \frac{1 - \cos(xy^2)}{x^6 + \sin^2 y}\right)$.

Soluzione: Osserviamo che $e^x \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} e^0 = 1$. Scrivendo

$$\frac{1 - \cos(xy^2)}{x^6 + \sin^2 y} = \frac{2(1 - \cos(xy^2))}{x^2y^4} \, \frac{x^2y^4}{2(x^6 + \sin^2 y)}$$

e usando che $1 - \cos t \sim t^2/2$ per $t \to 0$, rimane da studiare il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}\frac{x^2y^4}{x^6 + \sin^2 y}$. Questo è uguale a 0, perché

$$0 \le \frac{x^2y^4}{x^6 + \sin^2 y} \le \frac{x^2y^4}{\sin^2 y} = x^2y^2\left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

Usando la linearità del limite, otteniamo che il limite assegnato esiste ed è uguale a 1.

Esercizio 3. (i) Determinare tutti i punti critici del campo scalare

$$f(x,y,z) = \log(x + 2y) - \frac{x}{2} - \frac{y^3}{3} - z^2$$

e studiare la loro natura.
(ii) Esiste un punto di massimo globale per f? (Giustificare la risposta)
Soluzione: Si verifica che le soluzioni di

$$f_x(x,y,z) = \frac{1}{x + 2y} - \frac{1}{2} = 0, \qquad f_y(x,y,z) = \frac{2}{x + 2y} - y^2 = 0, \qquad f_z(x,y,z) = -2z$$

sono i punti $P_0 = (0, 1, 0)$ e $P_1 = (4, -1, 0)$. Per la matrice Hessiana si ottiene

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -(x+2y)^{-2} & -2(x+2y)^{-2} & 0 \\ -2(x+2y)^{-2} & -4(x+2y)^{-2} - 2y & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$H_f(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(4, -1, 0) = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il test dei minori risulta che P_0 è un punto di massimo relativo mentre P_1 è un punto di sella. Non esiste un punto di massimo globale visto che

$$f\Big(x, -\frac{x}{4}, 0\Big) = \log\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{192} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty.$$

Esercizio 4. Verificare che l'equazione

$$x^3 + 2y^3 + z^4 - xy - 2y = 1$$

definisce localmente in un intorno del punto $(1, 0, 0)$ una superficie cartesiana di equazione $x = g(y, z)$. Si determinino il piano tangente ed il versore normale a tale superficie nel punto $(1, 0, 0)$.
Soluzione: La funzione $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^4 - xy - 2y$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^3$ e $f(1, 0, 0) = 1$. Inoltre, $f_x(1, 0, 0) = 3 \neq 0$. Pertanto, per il teorema della funzione implicita esiste un intorno I di $(y_0, z_0) = (0, 0)$ e un intorno J di $x_0 = 1$ ed una funzione $g : I \to J$ di classe C^∞ tale che

$$f(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x = g(y, z), \qquad (x, y, z) \in J \times I.$$

Poiché $f_y(1, 0, 0) = -3$ e $f_z(1, 0, 0) = 0$, il piano tangente alla superficie $x = g(y, z)$ nel punto $(1, 0, 0)$ ha equazione:

$$(x - 1, y, z) \cdot (3, -3, 0) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0,$$

mentre il versore normale è $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Esercizio 5. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 la cui matrice Jacobiana nel punto $(1, -e)$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che la funzione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $G(x, y, z) = F(\sin(x^2) + yze^{xz}, x - e^{yz})$ è differenziabile in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcoli la matrice Jacobiana nel punto $(0, 1, 1)$.

Soluzione: Detta $h(x, y, z) = (\sin(x^2) + yze^{xz}, x - e^{yz})$, si ha che h è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$, $h(0, 1, 1) = (1, -e)$ e

$$J_h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2) + yz^2e^{xz} & ze^{xz} & ye^{xz} + xyze^{xz} \\ 1 & -ze^{yz} & -ye^{yz} \end{pmatrix},$$

da cui

$$J_h(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -e & -e \end{pmatrix}.$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte, risulta che $G = F \circ h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è di classe C^1, quindi differenziabile su $\mathbb{R}^3$ e

$$J_G(0, 1, 1) = J_F(h(0, 1, 1))J_h(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -e & -e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-2e & -1-2e \\ 0 & 1+e & 1+e \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad A = \Big\{(x,y)\,|\,x\geq 0,\ x^2+y^2\leq 4,\ x\leq y\leq \sqrt{3}x\Big\}.$$

Soluzione: Passando alle coordinate polari, tenuto conto che $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ ed utilizzando le formule di riduzione si ha

$$\int_A \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho}{\sqrt[3]{1+\rho^2}}\, d\rho d\theta = \frac{\pi}{12}\left[\frac{3}{4}(1+\rho^2)^{2/3}\right]_0^2 = \frac{\sqrt[3]{25}-1}{16}\pi$$

Esercizio 7. Calcolare l'integrale triplo

$$\int_A y^2 e^{1-x^3}\,dxdydz, \qquad A = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\Big|\,0\leq x\leq 1, y^2+z^2\leq x\Big\}.$$

Soluzione: Per ogni $x\in[0,1]$ fissato si consideri il dominio $C_x := \Big\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\,\Big|\,y^2+z^2\leq x\Big\}$. Integrando per strati si ha

$$\int_A y^2 e^{1-x^3}\,dxdydz = \int_0^1 e^{1-x^3}\left(\int_{C_x} y^2 dydz\right)dx.$$

Per calcolare l'integrale doppio su C_x, passando alle coordinate polari si ha

$$\int_{C_x} y^2 dydz = \int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{2\pi} \rho^2\cos^2(\theta)\rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\sqrt{x}} \rho^3\,d\rho \int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta = \pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{4}x^2.$$

Quindi

$$\int_A y^2 e^{1-x^3}\,dxdydz = \int_0^1 e^{1-x^3}\left(\int_{C_x} y^2 dydz\right)dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{1-x^3}x^2\,dx = \frac{\pi}{4}\left[-\frac{e^{1-x^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}(e-1).$$

Esercizio 8.
Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{e^{\sin\frac{1}{n}}-1}{n}$$

Soluzione: La successione $\frac{1}{n}$ è decrescente e assume valori nell'intervallo $(0,1)$; la funzione $\sin t$ è crescente su $(0,1)$ per cui la successione $e^{\sin\frac{1}{n}}$ è decrescente su $\mathbb{N}_+$ e verifica $e^{\sin\frac{1}{n}} > 1$, da cui la successione

$$a_n := \frac{e^{\sin\frac{1}{n}}-1}{n}$$

è a termini positivi. La convergenza assoluta coincide con quella semplice. Osserviamo che

$$e^{\sin\frac{1}{n}}-1 \sim \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad n\to\infty$$

quindi,

$$a_n \sim \frac{1}{n^2}, \quad n\to\infty.$$

Il secondo membro è il termine generale della serie armonica generalizzata $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, convergente per $\alpha = 2 > 1$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie numerica è convergente.