Serie di Fourier

1. Trovare la serie di Fourier che rappresenta la funzione, di periodo uguale a 3, definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } \; 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{per } \; 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{per } \; 2 \leq x < 3. \end{cases}$$

Soluzione
Lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione di periodo L è

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right],$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Nel nostro caso $L = 3$ e quindi, usando la forma esplicita di $f(x)$, si ha

$$A_0 = \frac{2}{3} \left\{ \int_0^1 dx\, 2 + \int_1^2 dx \right\} = 2.$$

Si calcolano A_n e B_n:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{3}\left\{\int_0^1 dx\, 2\cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right) + \int_1^2 dx\, \cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{3}\left\{\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_0^1 + \frac{3}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_1^2\right\} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sin\left(2\pi n - \frac{2n\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)\right] \\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

perché $\sin(2\pi n + \alpha) = \sin\alpha$ e $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{3}\left\{\int_0^1 dx\, 2\sin\left(\frac{2n\pi x}{3}\right) + \int_1^2 dx\, \sin\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)\right\} \\
&= -\frac{2}{3}\left\{\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_0^1 + \frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_1^2\right\} \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4n\pi}{3}\right) - 2\right] \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \cos\left(2\pi n - \frac{2n\pi}{3}\right) - 2\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] = \begin{cases} 0 & \text{per } n/3 \in \mathbb{N}\,, \\ \frac{3}{n\pi} & \text{per } n/3 \notin \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

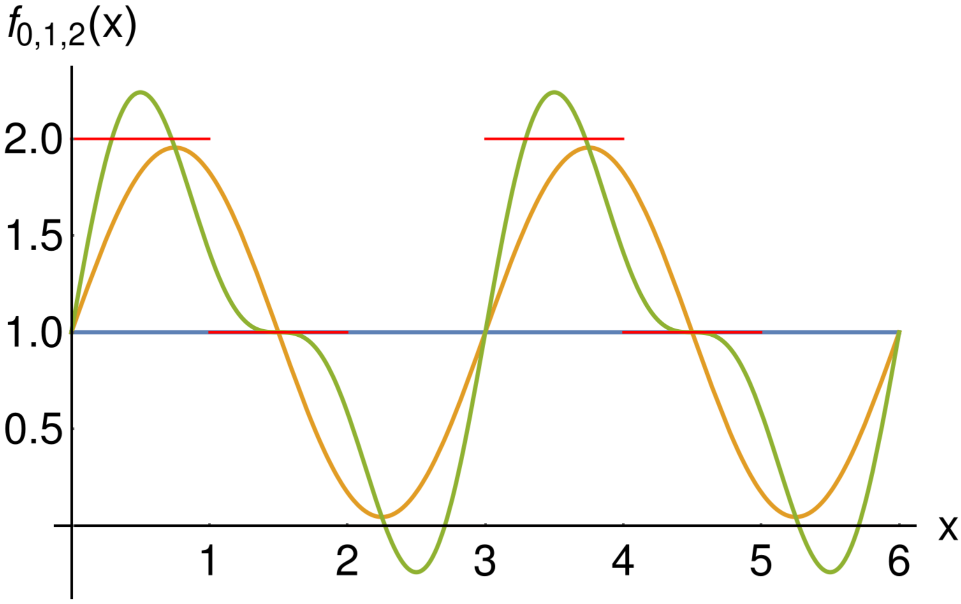
Quindi

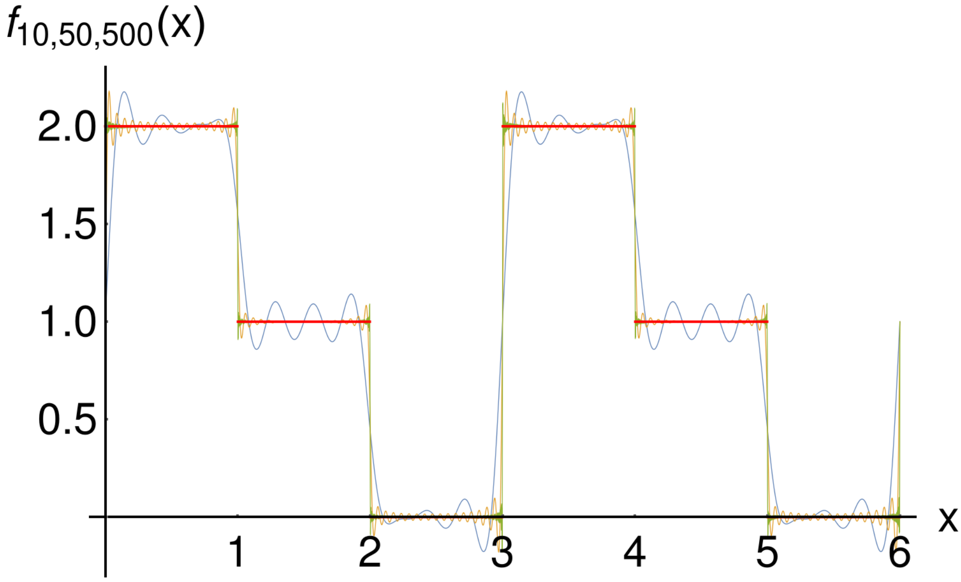
$$
f(x) = 1 + \sum_{\substack{n=1 \\ n/3 \notin \mathbb{N}}}^{\infty} \frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi x}{3}\right).
$$

Possiamo definire l'approssimazione d'ordine N della funzione $f(x)$ come

$$
f_0(x) = \frac{A_0}{2}\,, f_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[A_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]\ (N \geq 1)\,.
$$

L'approssimazione di $f(z)$ migliora con N crescente:





La funzione di partenza ha discontinuità di prima specie in $x = 0, 1, 2$, pertanto la serie di Fourier che è stata trovata converge puntualmente solo per tutti gli altri $x \in [0, 3)$ (si vedono anche le figure). Discontinuità risultano sempre in difficoltà per la descrizione tramite una serie di Fourier, che per definizione è continua. Nei punti di discontinuità possiamo verificare la validità del teorema di Dirichlet:

$$\begin{aligned}
\frac{f(0_+)+f(0_-)}{2} &= 1 &&= 1+\sum_{\substack{n=1\\ n/3\notin\mathbb{N}}}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\sin(0)\,,\\
\frac{f(1_+)+f(1_-)}{2} &= \frac{3}{2} &&= 1+\sum_{\substack{n=1\\ n/3\notin\mathbb{N}}}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\,,\\
\frac{f(2_+)+f(2_-)}{2} &= \frac{1}{2} &&= 1+\sum_{\substack{n=1\\ n/3\notin\mathbb{N}}}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)\,.
\end{aligned}$$

Per risommare la serie in $x=1$ si è dapprima usata l'identità

$$\sum_{\substack{n=1\\ n/3\notin\mathbb{N}}}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \quad = \quad \frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}\,,$$

che si può facilmente verificare scrivendo esplicitamente i primi termini, e utilizzando ad esempio Mathematica per sommare la serie in k, ottenendo

$$\frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)} \quad = \quad \frac{3}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

La serie in $x=2$ non necessita di ulteriori calcoli, in quanto per $n\in\mathbb{Z}$

$$\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)=-\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)=-\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}+2n\pi\right)=-\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right)\,,$$

e quindi

$$\sum_{\substack{n=1\\ n/3\notin\mathbb{N}}}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{4n\pi}{3}\right) \quad = \quad -\sum_{\substack{n=1\\ n/3\notin\mathbb{N}}}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\,,$$

da cui segue immediatamente il risultato.
Per scrupolo, possiamo verificare la correttezza della serie in k convertendola in un integrale. Dal momento che

$$\frac{1}{(3k+1)(3k+2)} \quad = \quad \int_0^1 da\int_0^a db\, b^{3k}\,,$$

allora la somma vale

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} &= \int_0^1 da \int_0^a db \sum_{k=0}^{\infty} b^{3k} = \int_0^1 da \int_0^a \frac{db}{1-b^3} \\
&= \int_0^1 da \left[-\frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \arctan\left(\frac{1+2a}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln(1-a) + \frac{1}{6}\ln(1+a+a^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \, .
\end{aligned}
$$

2. Trovare la serie di Fourier che rappresenta la funzione di periodo $2L$ definita come segue:

$$
f(x) = \begin{cases} x & -L/2 < x < L/2, \\ L - x & \quad L/2 < x < 3L/2. \end{cases}
$$

Soluzione

$$
f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]
$$

con

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{L} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} dx \, x + \int_{L/2}^{3L/2} dx \, (L-x) \right\} = 0, \\
A_n &= \frac{1}{L} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} dx \, x \, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \int_{L/2}^{3L/2} dx \, (L-x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} = 0, \\
B_n &= \frac{1}{L} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} dx \, x \, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \int_{L/2}^{3L/2} dx \, (L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}.
\end{aligned}
$$

Il fatto che $A_n = 0$ discende direttamente dalla disparità della funzione. Ciò può in ogni caso essere rapidamente verificato: i due integrandi in A_0 sono funzioni dispari su intervalli simmetrici (nel secondo integrale, ciò si può vedere effettuando il cambio di variabile $w = L - x$, che sposta l'integrale nell'intervallo $[-L/2, L/2]$) e analogamente, $A_n = 0 \; \forall \, n$.

Per i coefficienti B_n si può integrare per parti dopo aver effettuato la sostituzione $y = n\pi x/L$:

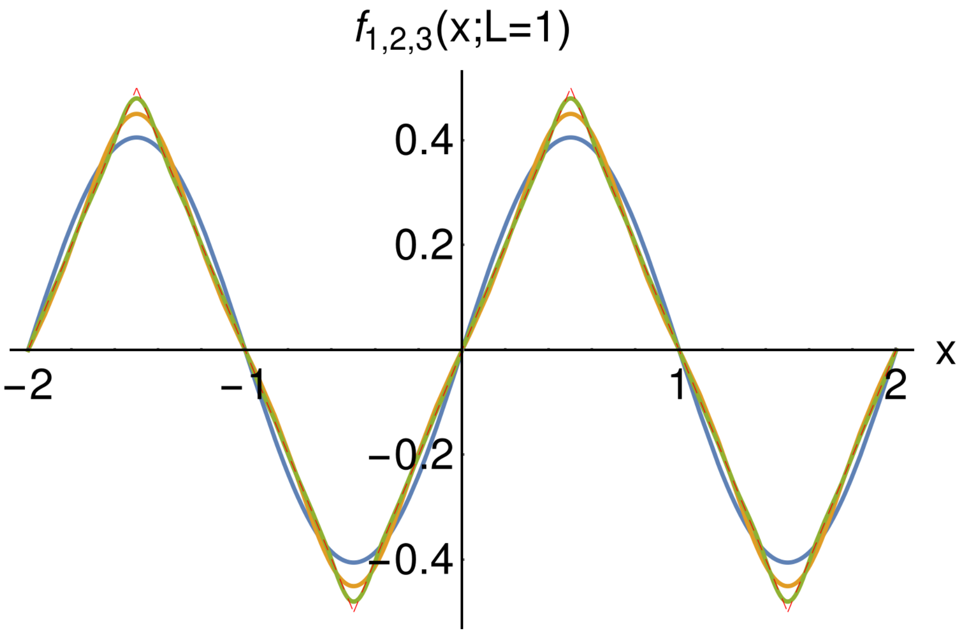
$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left\{ \int_{-n\pi/2}^{n\pi/2} dy\, y \sin y + \int_{n\pi/2}^{3n\pi/2} dy\, (n\pi - y) \sin y \right\} \\
&= \frac{L}{(n\pi)^2} \left\{ -y \cos y \Big|_{-n\pi/2}^{n\pi/2} + \int_{-n\pi/2}^{n\pi/2} dy \cos y - n\pi \cos y \Big|_{n\pi/2}^{3n\pi/2} \right. \\
&\quad \left. + y \cos y \Big|_{n\pi/2}^{3n\pi/2} - \int_{n\pi/2}^{3n\pi/2} dy \cos y \right\} \\
&= \frac{L}{(n\pi)^2} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right\} \\
&= \frac{L}{(n\pi)^2} \left\{ 3 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right\} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{4L}{(n\pi)^2} & n = 1,\ 5,\ 9, ... \\ -\frac{4L}{(n\pi)^2} & n = 3,\ 7,\ 11, ... \end{cases}
\end{aligned}$$

Possiamo quindi scriverli in forma compatta come

$$B_m = \frac{4L}{\pi^2} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2},$$

da cui lo sviluppo di Fourier risulta

$$f(x) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right).$$



Si vede che l'approssimazione converge rapidamente, al contrario del caso d'esercizio 1.

3. Trovare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2, \ -\pi < x < \pi$.

   Soluzione
   La funzione è pari nell'intervallo $-\pi < x < \pi$, quindi $B_n = 0$ per ogni n.

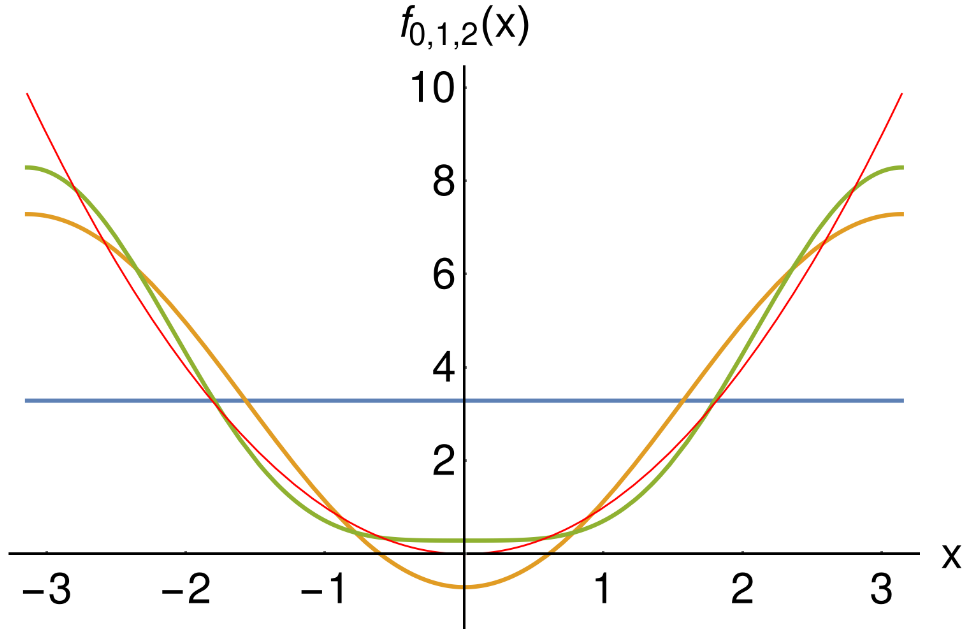
$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx).$$

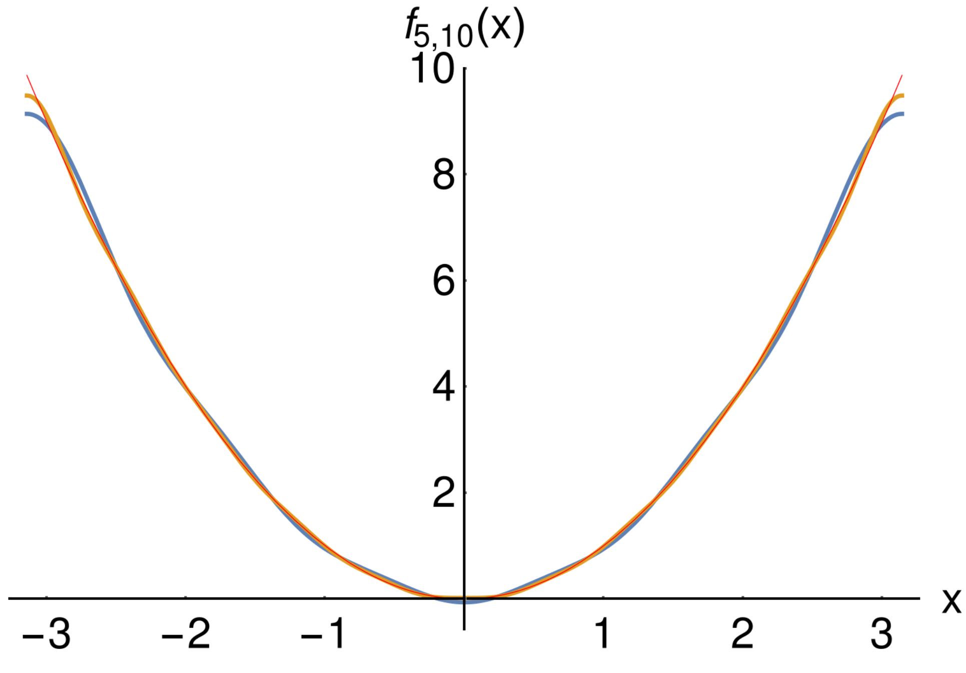
   Si calcolano esplicitamente i coefficienti:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}, \\
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, x^2\cos(nx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx\, x^2 \cos(nx) = \frac{2}{\pi n^3}\int_0^{n\pi} dy\, y^2\cos y \\
&= \frac{2}{\pi n^3}\left(y^2 \sin y\Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} dy\, 2y\sin y\right) = -\frac{4}{\pi n^3}\left(-y\cos y\Big|_0^{n\pi} + \int_0^{n\pi} dy\, \cos y\right) \\
&= -\frac{4}{\pi n^3}\left[-(n\pi)(-1)^n + \sin y\Big|_0^{n\pi}\right] = \frac{4}{n^2}(-1)^n.
\end{aligned}$$

   Pertanto

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$





Anche in questo caso la convergenza è meglio che quella in esercizio 1, ma in particolare i punti $x = \pm\pi$ sono difficili da approssimare, perché la funzione (periodica) non è differenziabile in questi punti.

4. Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -L < x < -L/2, \\ \sin\frac{\pi x}{L} & -L/2 < x < L/2, \\ 1 & L/2 < x < L, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-L, L]$.

Soluzione
La funzione è dispari, quindi tutti gli A_n sono nulli.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

con

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx\, f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} dx\, f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{2}{L}\left\{\int_0^{L/2} dx\, \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \int_{L/2}^{L} dx\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{L}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{L/2} dx\, \left[\cos\left(\frac{\pi x(1-n)}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi x(1+n)}{L}\right)\right] - \frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{L/2}^{L}\right\} \\
&= \frac{2}{L}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{L}{\pi(1-n)}\sin\left(\frac{\pi x(1-n)}{L}\right) - \frac{L}{\pi(1+n)}\sin\left(\frac{\pi x(1+n)}{L}\right)\right]_0^{L/2}\right. \\
&\left. - \frac{L}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Si è utilizzata la formula $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$. Questa soluzione vale per $n \neq 1$ (infatti vi è un denominatore che si annulla per $n = 1$). Il coefficiente B_1 va calcolato a parte.

$$\begin{aligned}
B_{n>1} &= \frac{1}{\pi(1-n)}\sin\left(\frac{\pi(1-n)}{2}\right) - \frac{1}{\pi(1+n)}\sin\left(\frac{\pi(1+n)}{2}\right) \\
&\quad -\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

In generale $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos\alpha$, pertanto

$$B_{n>1} = \frac{1}{\pi(1-n^2)}\left[2n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2(1-n^2)}{n}\left(\cos n\pi - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right].$$

Dal momento che $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ per n dispari e ± 1 per n pari, si può scrivere $n \longrightarrow 2m$ e $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^m$. Quindi:

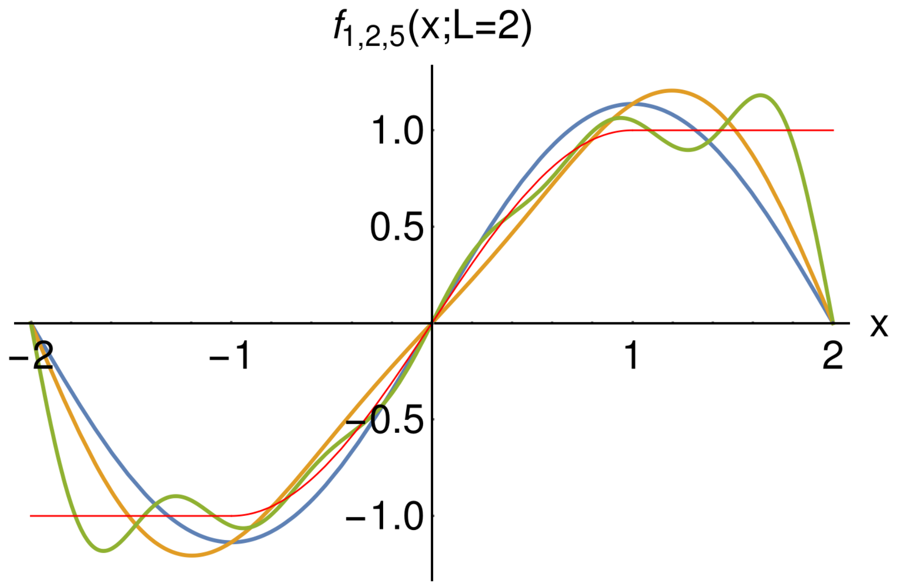
$$\begin{aligned}
B_{n>1} &= \frac{1}{\pi(1-n^2)}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{2n^2+2(1-n^2)}{n} - \frac{2(1-n^2)}{n}(-1)^n\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{(1-n^2)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^{n+1}\right].
\end{aligned}$$

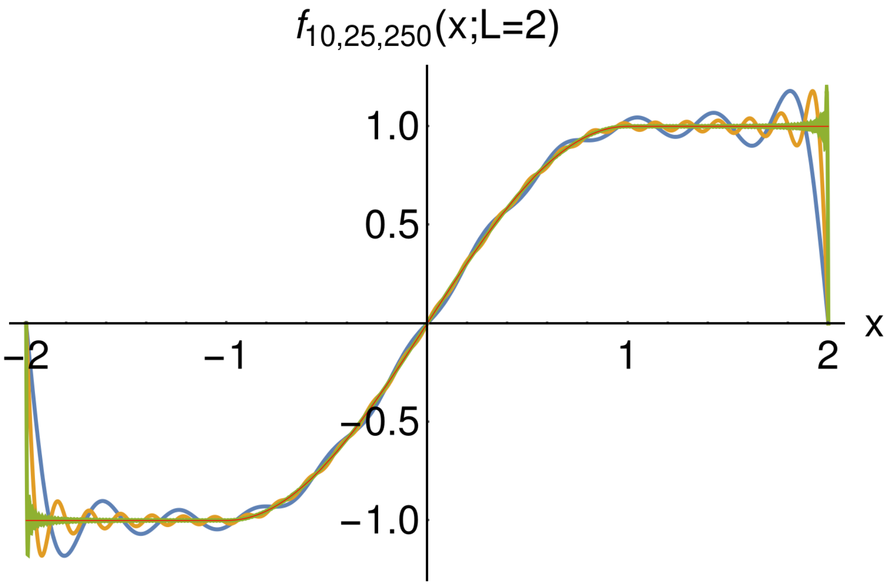
Calcoliamo ora il coefficiente B_1:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{2}{L}\left\{\int_0^{L/2} dx\, \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \int_{L/2}^{L} dx\, \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{L}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{L/2} dx\left(1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) - \frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big|_{L/2}^{L}\right\} \\
&= \frac{2}{L}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{L}{2} - \frac{L}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\Big|_0^{L/2}\right] + \frac{L}{\pi}\right\} = \frac{\pi+4}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Lo sviluppo in serie di $f(x)$ si può scrivere:

$$f(x) = \frac{\pi+4}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n(1-n^2)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$





Come prima, la discontinuità causa dei problemi, ma anche le parti costanti non sono facili da descrivere. Quindi questa funzione non è molto adatta ad essere descritta da una serie di Fourier.

5. Trovare lo sviluppo di Fourier della seguente funzione periodica di periodo 2π:

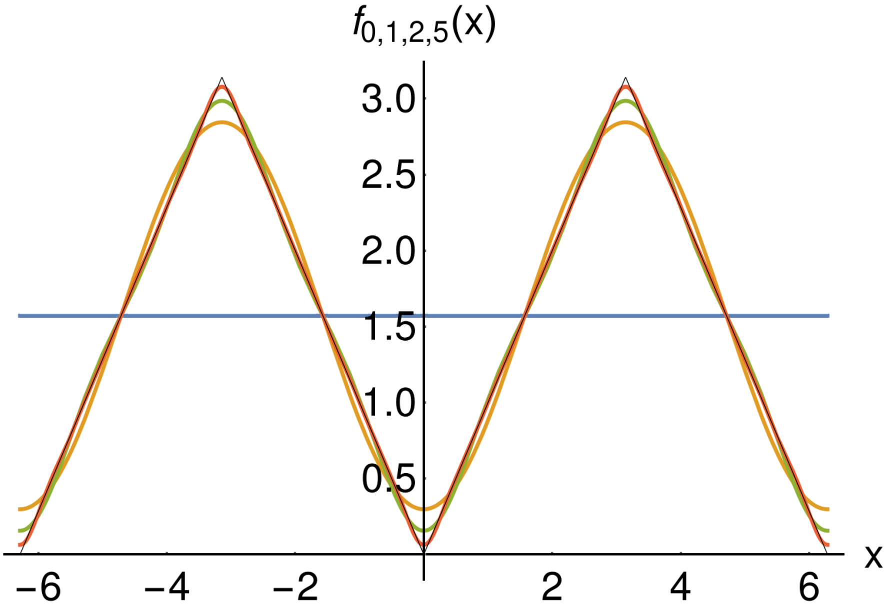
$$f(x) = |x|, \qquad\qquad -\pi < x < \pi.$$

Soluzione
Il calcolo dei coefficienti di Fourier procede dalla loro definizione.

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\, x = \pi, \\
A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dx\, x \cos nx = \frac{2}{n\pi}\left(x \sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi dx\, \sin nx \right) = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1], \\
B_n &= 0,
\end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$



Si vede che il problema è molto simile a quello dell'esercizio 2, e quindi gli stessi commenti si applicano. Infatti, con $L = \pi$ e spostamenti in x e y, la soluzione può essere ricavata dalla soluzione dell'esercizio 2.

6. Trovare lo sviluppo di Fourier della seguente funzione periodica di periodo 2π:

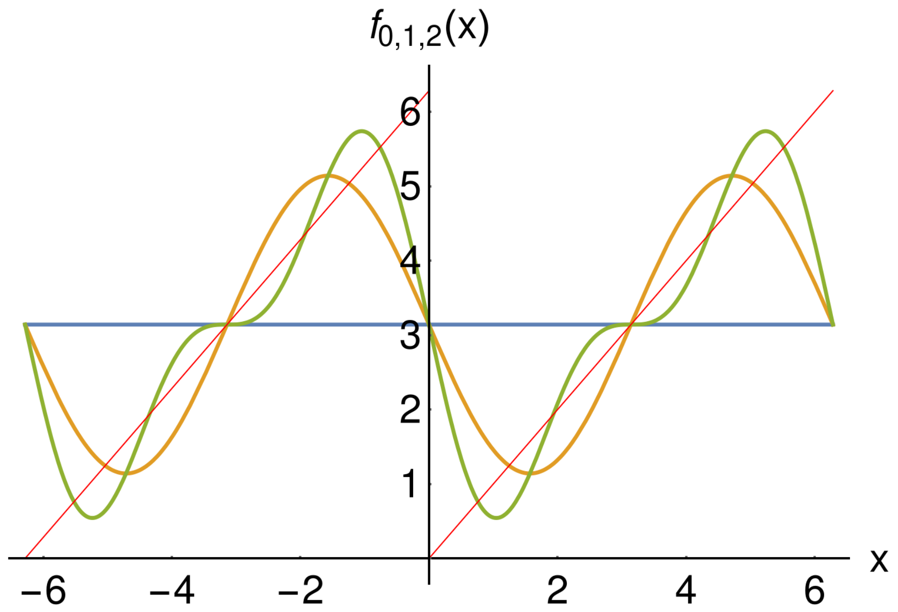
$$f(x) = x, \qquad\qquad 0 < x < 2\pi.$$

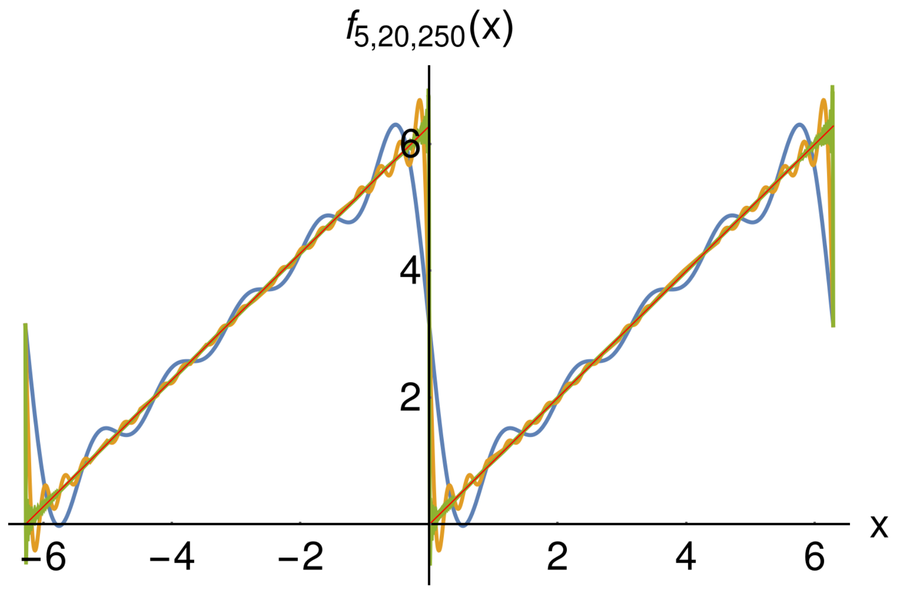
Soluzione
Il calcolo dei coefficienti di Fourier procede dalla loro definizione.

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\, x = 2\pi, \\
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\, x \cos nx = \frac{1}{n\pi}\left(x \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} dx\, \sin nx \right) = 0, \\
B_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\, x \sin nx = \frac{1}{n\pi}\left(-x \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} dx\, \cos nx \right) = -\frac{2}{n},
\end{aligned}$$

da cui

$$f(x) \;=\; \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$





Un'altra volta la discontinuità causa dei problemi, ma il teorema di Dirichlet rimane soddisfatto.

7. Trovare lo sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione periodica con periodo 2π:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ +1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Qual è il valore di $f(x)$ dato dallo sviluppo in serie in $x = 0$?

Soluzione
Scriviamo il generico sviluppo in serie:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)]$$

con

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \cos(mx), \\ B_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) \sin(mx). \end{aligned}$$

Poichè la funzione $f(x)$ è dispari, $A_n = 0 \;\; \forall\, n$. Solo i coefficienti B_n sono non nulli:

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{1}{\pi} dx \int_{-\pi}^{0} dx \sin(nx) + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx \sin(nx) = \frac{1}{n\pi} \left[\cos(nx) \Big|_{-\pi}^{0} - \cos(nx) \Big|_{0}^{\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{n\pi} [1 - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + 1] = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]\,; \end{aligned}$$

quindi

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari}, \\ \frac{4}{n\pi} & \text{per } n \text{ dispari}. \end{cases}$$

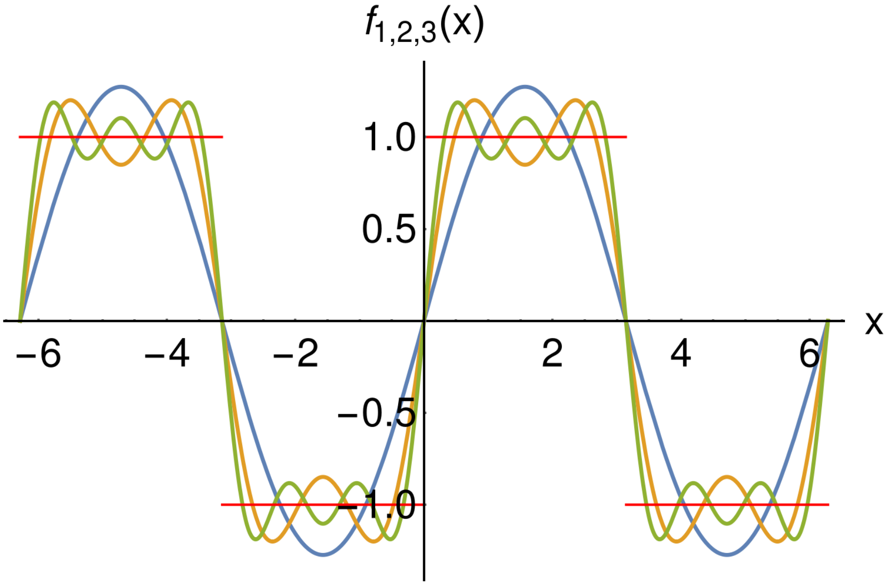
Poiché solo i coefficienti dispari sono non nulli, possiamo porre $n = 2m - 1$, da cui

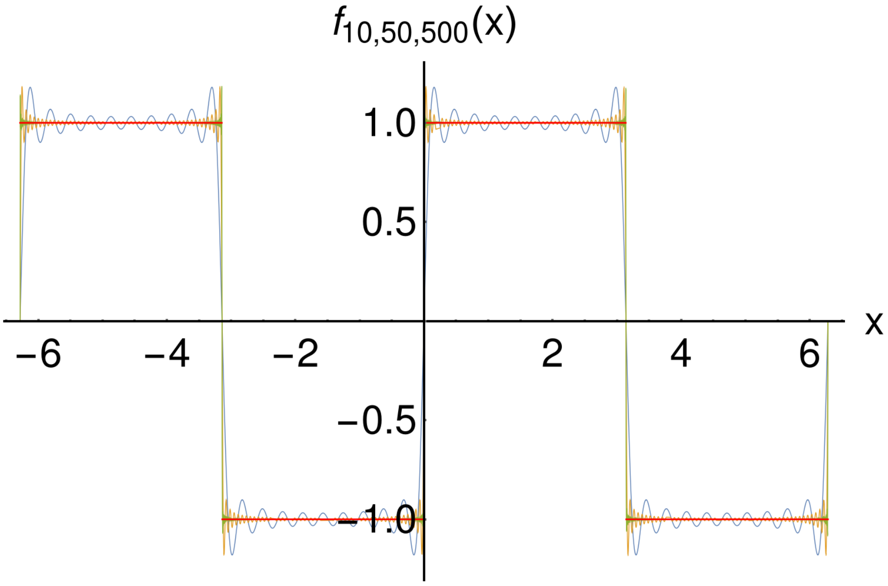
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi} \sin((2m-1)x).$$

Questo sviluppo vale per ogni $x \neq 0$. In $x = 0$ la funzione $f(x)$ ha una discontinuità di prima specie, mentre la serie nell'equzione precedente è di classe C^1 (derivabile con derivata prima continua). La sua somma in $x = 0$ vale

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin(0) \;=\; 0 \;=\; \frac{f(0_+) + f(0_-)}{2},$$

in accordo con il teorema di Dirichlet per cui, in un punto di discontinuità di prima specie x_0, lo sviluppo in serie ha come somma la media dei limiti destro e sinistro della funzione $f(x)$ in x_0.





Si vede che il problema è simile a quello dell'esercizio 1. Né la discontinuità né i pezzi costanti sono facilmente descritti dalla serie di Fourier.