Il momento di dipolo corrispondente è definito come

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}} \qquad (121)$$

. Il potenziale ϕ creato dal dipolo che va a zero all'infinito è (eq(119)):

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\underbrace{|\vec{x}-\vec{x}'|}_{\vec{R}}} - \frac{1}{|\vec{x}-(\vec{x}'-\vec{d})|}\right)} \qquad (122)$$

. Consideriamone l'andamento a grandi distanze, cioè per $|\vec{x}-\vec{x}'| \gg d$.

Abbiamo

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'+\vec{d}|} = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \ldots \qquad (123)$$

Ricordiamo che per $|\vec{x}| = r$ abbiamo, eq. (79-2),

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \ \ldots \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla}|\vec{x}| = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \qquad (124)$$

e quindi

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{1}{|\vec{x}|^2}\vec{\nabla}|\vec{x}| = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \qquad (125)$$

Questo si generalizza (invarianza traslazionale!) a

$$\vec{\nabla}_x\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \qquad (126)$$

per cui la (123) diviene $(\vec{R} = \vec{x}-\vec{x}')$:

$$\frac{1}{|\vec{R}+\vec{d}|} = \frac{1}{R} - \frac{\vec{d}\cdot\vec{R}}{R^3} + \ldots \qquad (127)$$

e dunque, sostituendo nella (122), il potenziale assume la forma

$$\phi(\vec x) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q\,\frac{\vec d\cdot\vec R}{R^3}+\dots = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec p\cdot\vec R}{R^3}+\dots \quad (128)$$

$$\left(= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec p\cdot\hat R}{R^2}\right)$$

Dalla (126) possiamo riscrivere come

$$\boxed{\phi(\vec x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\vec p\cdot\vec\nabla\left(\frac{1}{R}\right)+\dots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\vec p\cdot\vec\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)+\dots} \quad (129)$$

dove ricordiamo che $R=|\vec x'-\vec x|$ e con $\vec\nabla'$ intendiamo il gradiente formato con le derivate rispetto a $\vec x'$. ~~Dalla~~ (128)

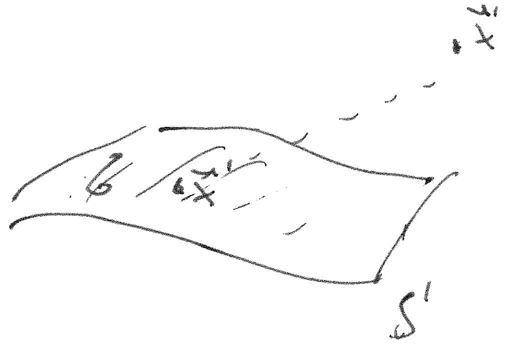
- Siccome per il potenziale elettrico vale il principio di sovrapposizione, se abbiamo una densità di dipoli (detta "polarizzazione elettrica") $\vec P(\vec x')$ dalla (129) otteniamo

$$\boxed{\phi(\vec x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \vec P(\vec x')\cdot\vec\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) dV'} \quad (130)$$

(dove $R=|\vec x-\vec x'|$)

- "Foglio di carica"

Consideriamo la situazione in cui la carica è distribuita su di una superficie S', con densità superficiale di carica $\sigma(\vec x')$.

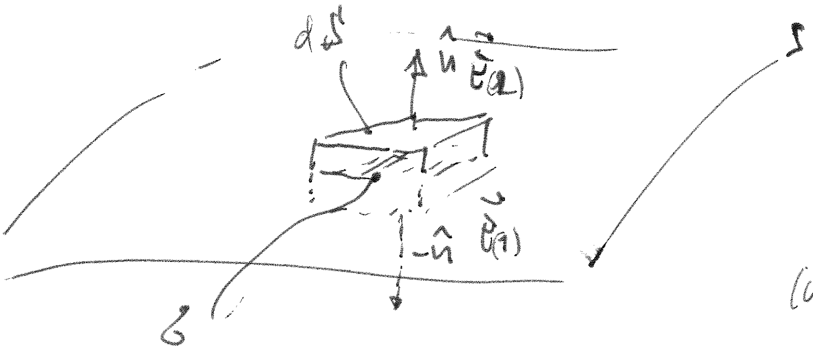


L'espressione generale (107) diviene

$$\boxed{\phi(\vec x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma(\vec x')}{R}\, dS'} \quad (131)$$

• Applicando il teorema di Gauss a una "pill box" infinitesima S' ~~alla superficie~~ attorno a una porzione della superficie carica abbiamo:

(se $\vec{E}_{(1)}$ sono i due campi immediatamente sopra e sotto la sup.)



• Per simmetria

$$E_{(2)\perp} = -E_{(1)\perp} \qquad (132)$$

(dove $E_{(i)\perp} = \vec{E}_{(i)}\cdot\hat{n}$)

• Inoltre (essendo σ costante in questa porzione) le componenti $\parallel$ di $\vec{E}_{(i)}$ sono uguali sulle pareti laterali. Dunque

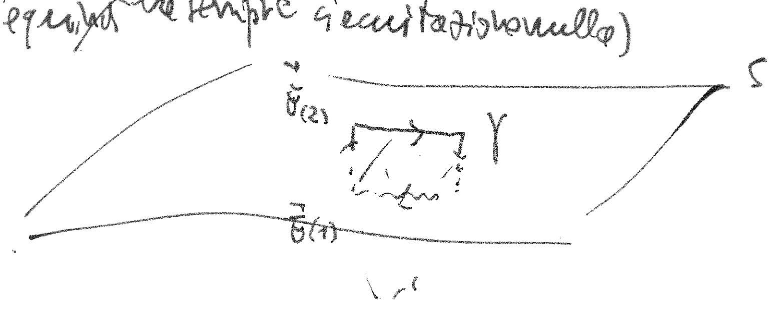
$$\begin{cases} \Phi_{\vec{E}}(S) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = (\vec{E}_{(2)}\cdot\hat{n} - \vec{E}_{(1)}\cdot\hat{n})\,dS = 2E_{(2)\perp}\,dS \\ \Phi_{\vec{E}}(S') = \dfrac{dQ}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0} \end{cases} \qquad (134)$$

Gauss

da cui segue

$$\boxed{E_{(2)\perp} = -E_{(1)\perp} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \qquad (133)$$

• Nel caso elettrostatico l'eq. di Maxwell (3) ci dice che il campo elettrico è irrotazionale: $\vec{\nabla}\times\vec{E}$. Considerando un circuito chiuso inf.mo γ che attraversa il foglio di cariche come in figura abbiamo (essendo ~~la~~ sempre circuitazione nulla)



$$\left(0 = \int_{S'} (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}' = \oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \right. \qquad (136)$$

che (135) ci dice che i contributi "verticali" si annullano per cui

$$0 = E_{(2)\parallel}\, dl - E_{(1)\parallel}\, dl \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{(2)\parallel} = E_{(1)\parallel}} \qquad (137)$$

- Dunque, la componente tangente del campo elettrico è continua alla superficie carica S, mentre la componente trasversa è discontinua e la discontinuità si può scrivere come

$$\boxed{\left(\vec E^{(2)} - \vec E^{(1)}\right)\cdot \hat n \Big|_S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \qquad (138)$$

- Questa discontinuità si può capire direttamente a partire dall'espressione per il potenziale generato dal foglio di carica, eq (131). Ne esce da qui

$$\vec E\cdot\hat n = -\hat n\cdot\vec\nabla\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \sigma(\vec x')\,\hat n\cdot\vec\nabla\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)ds'$$

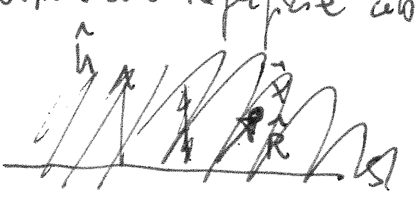
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \sigma(\vec x')\,\hat n\cdot\vec\nabla'\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)ds' \qquad (139)$$

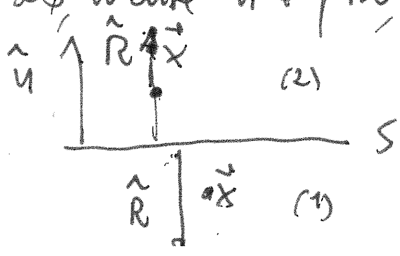
Ricordiamo (eq. (125)) che

$$\vec\nabla\frac{1}{|\vec x|} = -\frac{\hat x}{|\vec x|^2} \quad \Rightarrow$$ ~~porta ad una discontinuità~~ da cui

$$\vec E\cdot\hat n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \sigma(\vec x')\,\frac{\hat n\cdot\widehat{(\vec x-\vec x')}}{|\vec x-\vec x'|^2}\,ds' \qquad (140)$$

per $\vec x$ prossimo alla superficie abbiamo che mentre $\hat n$ è fisso $\widehat{\vec x-\vec x'} = \hat R$ cambia direzione:

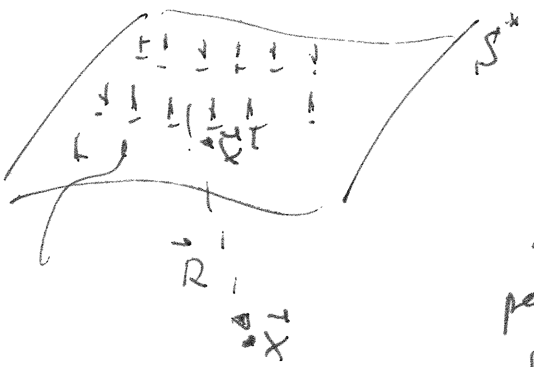




e questo è l'origine della discontinuità.

Foglio di Dipoli

Consideriamo ora una distribuzione superficiale di momenti di dipolo.



Partiamo dalla (130) e rimpiazziamo

$$\vec{P}\, dV' \longrightarrow \vec{D}\, dS' \qquad (132)^*$$

densità di dipolo per unità di volume — densità di dipolo per unità di superficie

Così abbiamo

$$\boxed{\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \vec{D}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) dS'} \qquad (133)^*$$

. Assumiamo che la densità di dipolo $\vec{D}$ sia diretta in direzione $\perp$ alla superficie $\vec{D}(\vec{x}') = D(\vec{x}')\,\hat{n}(\vec{x}')$. In tal caso la (133) è formalmente analoga alla (139) con $\sigma(\vec{x}') \to -D(\vec{x}')$ e $\vec{E}\cdot\hat{n} \to \Phi$. Dunque vale l'analogo della relazione di discontinuità (138), cioè:

$$\boxed{\Phi_{(2)} - \Phi_{(1)}\Big|_S = \frac{D}{\varepsilon_0}} \qquad (134)^*$$

Dunque, disporre un foglio di dipoli induce una discontinuità del potenziale!

- Per quanto riguarda il campo elettrico si ha invece

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \vec{D}(\vec{x}')\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,dS' \qquad (135)^*$$

Si ha

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right) \qquad (136)^*$$

D'altronde si ha identicamente (poiché shiftare l'argomento da $\vec{x} \to \vec{x}'$ non modifica il calcolo seguente) ($r = |\vec{x}|$)

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right) = \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{x}}{r^3} + \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z}{r^3} \cancel{+ \ldots \frac{\vec{x}}{r^3}} - 3\frac{\vec{x}}{r^4}\cdot\vec{\nabla}r \qquad (137)^*$$

Utilizzando le (124)-(126) questo vale

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\,\vec{x}\cdot\frac{\vec{x}}{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}\,r^2 = 0 \qquad (138)^*$$

e così si annulla anche la (136). Pertanto il campo elettrico generato dal foglio di dipoli è nullo !

- Passiamo ora a considerare alcuni esempi vari di applicazioni delle formule generali che abbiamo visto.

- Le configurazioni di fogli di carica e di dipolo sono importanti perché si vengono a creare in conduttori carichi o immersi in un campo ~~ext~~ esterno.
- Inoltre possono essere utilizzate per descrivere il potenziale in una regione finita, delimitata da una superficie S, utilizzando il teorema di Green, come vedremo in seguito

$\to$ (*)

• Cominciamo da un ~~esercizio~~ sulla ~~formula~~ ~~espressione (107)~~ equazione di Poisson che determina del potenziale in termini della distribuzione di carica

• (Esercizio) Il potenziale, mediato nel tempo, di un atomo di idrogeno (nello stato fondamentale) è dato da

$$\phi(\vec{x}) = \phi(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) \qquad (139)$$

dove e è la carica del protone, e $\alpha^{-1} = a_0/2$ è il raggio di Bohr ($a_0 = ?$)

Trovare la distribuzione di carica che dà origine a questo potenziale e interpretarla fisicamente

Soluzione La densità di carica è determinata dalla eq. di Poisson (93).

Bisogna però tener conto che il potenziale (139) è singolare nell'origine.

Possiamo isolare la singolarità scrivendo

$$\phi = \underbrace{\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{} + \underbrace{\bar{\Phi}}_{\text{parte regolare}} \qquad \left(= -\frac{e}{\varepsilon_0} G(r) + \bar{\Phi}\right) \qquad (140)$$

con

$$\bar{\Phi} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r}\right) + \frac{e\alpha\, e^{-\alpha r}}{8\pi\varepsilon_0} \qquad (141)$$

Abbiamo dunque, dalla (76)-(77),

$$-\Delta\phi = \frac{e}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x}) - \Delta\bar{\Phi} \qquad (142)$$

Dalla (79), siccome $\bar{\Phi}$ è solo funzione di r, abbiamo

$$\Delta\bar{\Phi}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\bar{\Phi} \underset{(79\text{-}6)}{=} \frac{2}{r}\frac{d\bar{\Phi}}{dr} + \frac{d^2\bar{\Phi}}{dr^2} \qquad (143)$$

Qs. si può scrivere anche come

$$\Delta\bar{\Phi}(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\bar{\Phi}) \qquad (144)$$

Infatti

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\bar{\Phi}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\bar{\Phi} + r\frac{d\bar{\Phi}}{dr}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{d\bar{\Phi}}{dr} + \frac{d\bar{\Phi}}{dr} + r\frac{d^2\bar{\Phi}}{dr^2}\right)$$

$$= \frac{2}{r}\frac{d\bar{\Phi}}{dr} + \frac{d^2\bar{\Phi}}{dr^2} \qquad (145)$$

Dalla (141) segue che

$$r\bar{\bar{\Phi}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}(e^{-\alpha r} - 1) + \frac{e\alpha\, e^{-\alpha r}}{8\pi\varepsilon_0}\cdot r$$

e quindi

$$\frac{d}{dr}(r\bar{\bar{\Phi}}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}(-)\alpha e^{-\alpha r} + \frac{e\alpha e^{-\alpha r}}{8\pi\varepsilon_0} + \frac{e\alpha}{8\pi\varepsilon_0}(-\alpha)e^{-\alpha r}$$

$$= -\frac{e\alpha}{8\pi\varepsilon_0}e^{-\alpha r} - \frac{e\alpha^2}{8\pi\varepsilon_0}r e^{-\alpha r},$$

da cui

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\bar{\Phi}) = \cancel{\frac{e\alpha^2 e^{-\alpha r}}{8\pi\varepsilon_0}} - \cancel{\frac{e\alpha^2}{8\pi\varepsilon_0}e^{-\alpha r}} + \frac{e\alpha^3}{8\pi\varepsilon_0}r e^{-\alpha r}$$

Inserendo questi risultati nella (145) troviamo

$$\Delta\bar{\Phi} = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\bar{\Phi}) = \frac{e\alpha^3}{8\pi\varepsilon_0}e^{-\alpha r} \qquad (146)$$

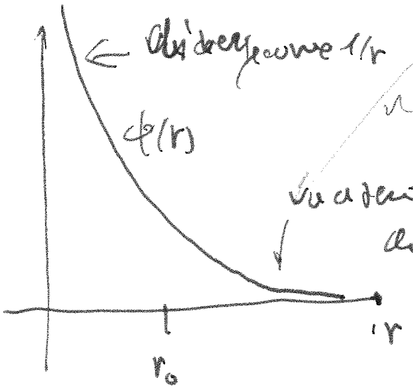
Dalla (142) abbiamo quindi

$$\begin{cases} -\Delta\Phi = \dfrac{e}{\varepsilon_0}\delta^3(\vec{x}) - \dfrac{e\alpha^3}{8\pi\varepsilon_0}e^{-\alpha r} \\ -\Delta\Phi = \rho/\varepsilon_0 \quad \text{(Poisson)} \end{cases} \qquad (147)$$

e quindi
$$\rho = e\,\delta^3(\vec{x}) - \frac{e\alpha^3}{8\pi}\, e^{-\alpha r} \qquad (148)$$

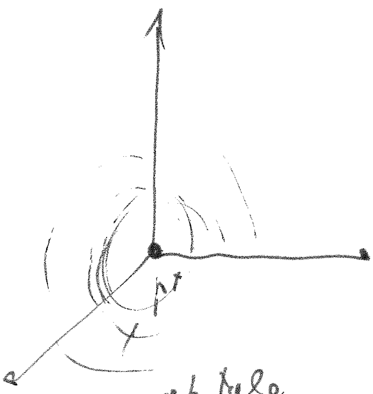
carica positiva puntiforme del nucleo

densità di carica dovuta all'elettrone orbitante



(raggio di Bohr)

- La densità di carica contenuta in una sfera di raggio R intorno al nucleo è data da



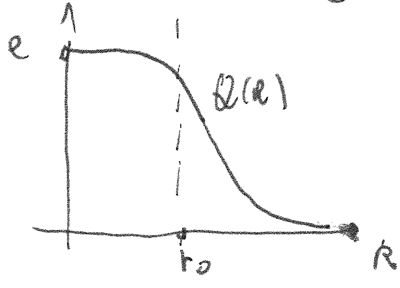
$$Q(R) = \int_{V(R)} \rho\, d^3x = e - \frac{e\alpha^3}{8\pi}\int_0^R r^2 dr \underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi} e^{-\alpha r}$$

$$= e - \frac{e}{2}\alpha^3 \int_0^R dr\, r^2 e^{-\alpha r} \qquad (\to z = \alpha r)$$

$$= e - \frac{e}{2}\frac{\alpha^3}{\alpha^3}\underbrace{\int_0^{\alpha R} dz\, z^2 e^{-z}}_{} = \cancel{e(1-}$$

(check it) $= 2 - \left((\alpha R)^2 + 2\alpha R + 2\right) e^{-\alpha R}$

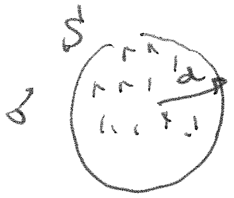
$$= e\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2}\left((\alpha R)^2 + 2\alpha R + 2\right) e^{-\alpha R}\right) \qquad (149)$$



va a zero per $R \to \infty$ ⇒ che globalmente l'atomo è neutro

• Esempio: guscio sferico carico

S = sfera di raggio a, uniformemente carica (densità superficiale σ)



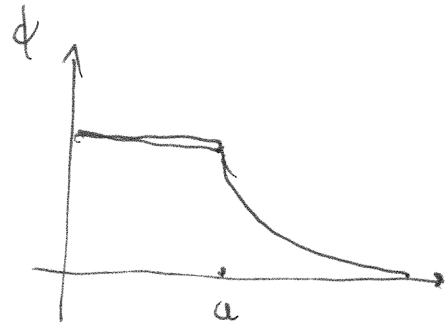
• Come ben noto, il campo elettrico fuori e dentro si può calcolare dal teorema di Gauss

col risultato $\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\,\hat{r}$, con

$$\begin{cases} E(r) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{a^2}{r^2} & r > a \\ E(r) = 0 & r < a \end{cases} \qquad (150)$$

Il corrispondente potenziale, che è continuo su S, la soluzione che va a zero all'infinito è $\phi(\vec{x}) = \phi(r)$, con

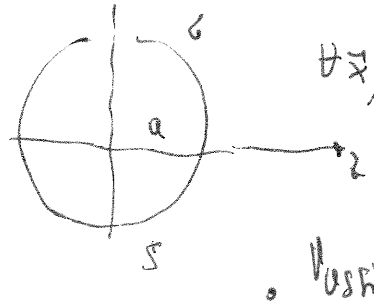
$$\begin{cases} \phi(r) = \dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{a}{r} & r > a \\ \phi(r) = \dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0} = \text{const} & r < a \end{cases} \qquad (151)$$



(infatti

$$E(r) = -\frac{d}{dr}\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

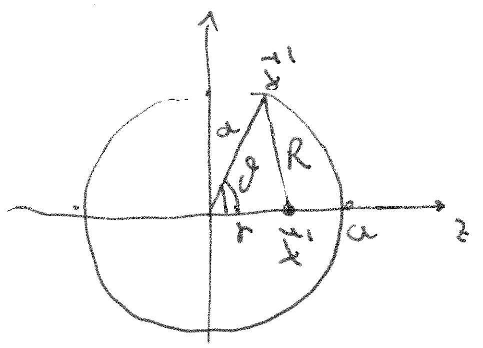
• Possiamo riottenere questo risultato dall'espressione generale (131) ricavata dalla funzione di Green



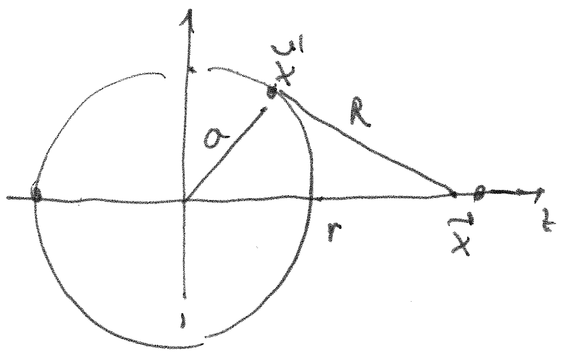
$$\forall \vec{x}, \quad \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dS' \frac{\sigma}{\underbrace{|\vec{x}-\vec{x}'|}_{R}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dS'}{R} \qquad (152)$$

• Possiamo scegliere gli assi in modo che $\vec{x}$ si trovi sull'asse z. Vi è simmetria cilindrica rispetto a tale asse

Ci sono due casi: $r=|\vec{x}|<a$, $r>a$



(i)



(ii)

• Dal teorema del coseno,

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2\cos\vartheta\, ar \qquad (153)$$

in entrambi i casi.

• Per la misura di integrazione si ha

$$dS' \to a^2\, d\varphi\, d\vartheta \sin\vartheta = a^2\, d\varphi\, d\cos\vartheta$$

Dunque l'integrale da calcolare in (152) è

$$\int_{S'} \frac{dS}{R} = a^2 \cdot 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{d\cos\vartheta}{\underbrace{\sqrt{r^2+a^2-2\cos\vartheta\, ar}}_{\equiv R(\cos\vartheta) \text{ scegliendo la radice positiva}}} = 2\pi a^2 \left(-\frac{1}{ar}\right) R(\cos\vartheta)\Big|_{-1}^{1} \qquad (154)$$

Abbiamo

i) $r<a$
$$\int \frac{dS}{R} = -\frac{2\pi a}{r}\left(\underbrace{\sqrt{r^2+a^2-2ar}}_{a-r} - \underbrace{\sqrt{r^2+a^2+2ar}}_{a+r}\right) = -\frac{4\pi a}{r}\cdot(-2r)$$
$$= 4\pi a \qquad (155)$$

ii) $r>a$
$$\int \frac{dS}{R} = -\frac{2\pi a}{r}\left((r-a)-(r+a)\right) = -\frac{2\pi a}{r}(-2a) = \frac{4\pi a^2}{r} \qquad (156)$$

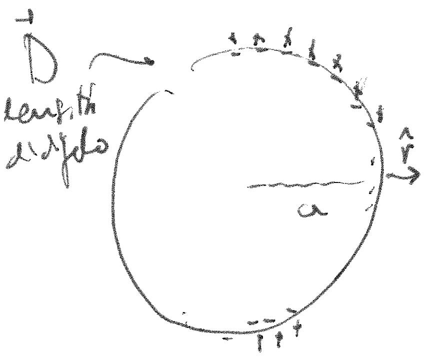
Inserendo questo risultato nella (152) otteniamo

i) $r<a$: $$\phi(r) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi a = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \qquad (157)$$

ii) $r>a$ $$\phi(r) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi a^2}{r} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r} \qquad (158)$$

in accordo con la (151).

. <u>Guscio sferico di dipolo</u> (uniforme)



. Assumiamo $\vec D(\vec x') = D\hat n = D\hat r$ (159)

con D costante
(densità di momento di dipolo)

. Dal teorema di Gauss, si trova subito $\vec E = \vec 0$ sia dentro che fuori

$\Rightarrow$ il potenziale ϕ dev'essere costante

• Tenendo conto della discontinuità (134), se scegliamo la condizione

$\phi(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ avremo

$$\phi = \begin{cases} 0 & r>a \\ -D/\varepsilon_0 & r<a \end{cases} \qquad (160)$$

. Di nuovo, come esercizio, ricaviamo questo risultato dalla formula generale (133) che, tenuto conto della (159), diviene lasciamo come esercizio

$$\phi(\vec x) = \frac{D}{4\pi\varepsilon_0}\int dS'\, \hat r\cdot\vec\nabla'\Big(\frac{1}{\underbrace{|\vec x-\vec x'|}_{\vec R = \vec x-\vec x'}}\Big) \qquad (161)$$

Ricordiamo che (vedi eq. (125))

$$\vec\nabla'\frac{1}{|\vec x-\vec x'|} = \frac{\vec x-\vec x'}{|\vec x-\vec x'|^3} = \frac{\hat R}{R^2} \qquad (162)$$