Analisi II - 2019/20 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 16 giugno 2020

Esercizio 1. Sia dato il campo scalare

$$f(x,y) = \frac{y - x^2}{\sqrt{y - x^2 - 3}}.$$

a) Determinare e disegnare il dominio D di f. Stabilire se D è un insieme aperto; stabilire se D è un insieme compatto (giustificando la risposta).

b) Giustificare la differenziabilità di f in $(1,8)$ e determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,8,f(1,8))$.

Soluzione: a) Il denominatore è definito e non uguale a zero se, e solo se, $y - x^2 - 3 > 0$. Quindi

$$D := \mathrm{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 + 3\right\}.$$

L'insieme D è aperto visto che il bordo $\partial D = \{(x,y) \mid y = x^2 + 3\}$ non appartiene a D. Quindi D non è compatto.

b) f è di classe C^1 nel suo dominio e quindi è differenziabile per la condizione sufficiente di differenziabilità. Osserviamo che il punto $(1,8)$ appartiene al dominio D. Si calcola

$$f_x(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2-3}(-2x) - \frac{1}{\sqrt{y-x^2-3}}(-x)(y-x^2)}{y-x^2-3} = \frac{x(6+x^2-y)}{(y-x^2-3)^{3/2}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2-3} - \frac{1}{2\sqrt{y-x^2-3}}(y-x^2)}{y-x^2-3} = \frac{y-x^2-6}{2(y-x^2-3)^{3/2}}.$$

Allora $f(1,8) = 7/2$, $f_x(1,8) = -1/8$, $f_y(1,8) = 1/16$ e l'equazione del piano tangente è

$$z = \frac{1}{16}y - \frac{1}{8}x + \frac{25}{8}.$$

Esercizio 2. Calcolare o dimostrare che non esiste il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{x^2}-1)(x^3+\sin y)}{x^4 + |\sin y|}$.

Soluzione: Possiamo scrivere

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{x^2}-1)}{x^2} \frac{x^2\,(x^3+\sin y)}{x^4+|\sin y|}$$

Essendo $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ per $x \to 0$ possiamo considerare

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,(x^3+\sin y)}{x^4+|\sin y|}$$

Osserviamo che

$$\left|\frac{x^2(x^3+\sin y)}{x^4+|\sin y|}\right| \le \frac{|x|^5}{x^4+|\sin y|} + \frac{x^2|\sin y|}{x^4+|\sin y|} \le \frac{|x|^5}{x^4} + \frac{x^2|\sin y|}{|\sin y|} = |x| + x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$$

Quindi per il criterio del confronto il limite esiste ed è uguale a 0.

Esercizio 3. Sia $F = g \circ \gamma$ dove $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è definita da

$$g(x,y) = \arctan(xy) + y^2x^3,$$

e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è una curva di classe C^1 con $\gamma(0) = (2,1)$ e $\gamma'(0) = (10,-5)$. Calcolare $F'(0)$.
Soluzione: Per la regola di derivazione della funzione composta abbiamo che la derivata del campo scalare lungo la curva è $F'(0) = \nabla g(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0)$. Essendo noti i vettori $\gamma(0)$ e $\gamma'(0)$, rimane soltanto da calcolare $\nabla g(2,1)$. Calcoliamo

$$\nabla g(2,1) = \Big(\frac{y}{1+(xy)^2} + 3y^2x^2, \frac{x}{1+(xy)^2} + 2yx^3\Big)\Big|_{(2,1)} = \Big(\frac{1}{5} + 12, \frac{2}{5} + 16\Big).$$

Otteniamo quindi

$$F'(0) = \Big(\frac{1}{5} + 12, \frac{2}{5} + 16\Big) \cdot (10,-5) = 122 - 82 = 40.$$

Esercizio 4. Dato il campo scalare

$$f(x,y) = xy(4+x+y),$$

determinare i suoi punti critici e studiarne la natura.
Esiste un punto di massimo globale (o assoluto) per f in $\mathbb{R}^2$? Giustificare la risposta.
Soluzione: I punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$y(4+2x+y) = 0, \qquad x(4+2y+x) = 0.$$

Si ottengono i punti

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (0,-4), \quad P_3 = (-4,0), \quad P_4 = (-4/3,-4/3).$$

L'hessiana di f in un generico punto risulta essere

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 4+2x+2y \\ 4+2x+2y & 2x \end{pmatrix}$$

dunque

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(P_2) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}, \quad Hf(P_4) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

il determinante delle prime tre matrici è strettamente negativo, quindi P_1, P_2, P_3 sono punti di sella. Il determinante di $Hf(P_4)$ è invece strettamente positivo; poichè l'elemento in alto a sinistra è negativo possiamo concludere che P_4 è un punto di massimo.
Non ci sono punti di massimo assoluto; basta restringere il campo scalare alla retta $y = x$. Si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty.$$

Esercizio 5. Calcolare $\displaystyle\int_A \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz$, dove

$$A = \big\{(x,y,z) \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \leq z \leq 4\big\}.$$

Suggerimento: Si consiglia di integrare per fili.
Soluzione: Integrando per fili verticali otteniamo

$$\int_A \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz = \int_S \Big(\int_{x^2+y^2}^4 \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,dz\Big)\,dxdy = \int_S \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}(4-x^2-y^2)\,dxdy,$$

dove $S = \big\{(x,y) : y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\big\}$. Risolviamo ora l'integrale doppio utilizzando le coordinate polari:

$$\int_A \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz = \int_0^\pi \Big(\int_1^2 \cos^2\theta\sin\theta(4-\rho^2)\,d\rho\Big)d\theta = \Big(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big)\Big|_0^\pi \Big(4\rho - \frac{1}{3}\rho^3\Big)\Big|_1^2 = \frac{10}{9}.$$