• I postulati di Einstein

Einstein, anche per ragioni "estetiche", al di là dei risultati sperimentali, assume l'inesistenza dell'etere e la validità dei seguenti due postulati:

i) principio di relatività: ~~tutte~~ le leggi fisiche fondamentali ~~sono~~ hanno la medesima forma in tutti i S.R. inerziali

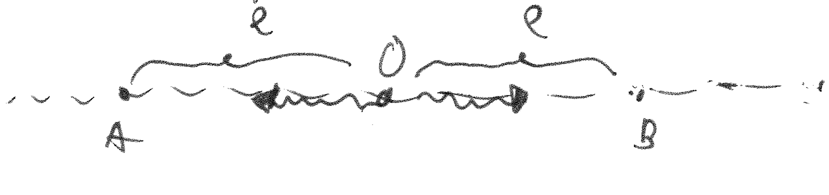
ii) ~~Se~~ le eq. di Maxwell sono leggi fisiche fondamentali $\Rightarrow$ principio di costanza della velocità della luce, che deve risultare la stessa in tutti i SR inerziali

. Ciò è in contraddizione con la legge di composizione galileiana delle velocità. Le trasformazioni che collegano le coordinate di osservatori in moto relativo vanno quindi modificate rispetto alle trasformazioni di Galileo.

. In particolare, nelle trasformazioni di Galileo si assume che $t' = t$, ovvero che il tempo fluisca nello stesso modo per tutti gli osservatori inerziali

. Un semplice esperimento ideale ("gedanken experiment") ci fa capire che, se c è una costante universale, non può essere così perché la stessa simultaneità di due eventi diviene un concetto relativo.

. Supponiamo che un osservatore O mandi un segnale luminoso verso due punti A e B da lui equidistanti e fissi nel suo S.R.

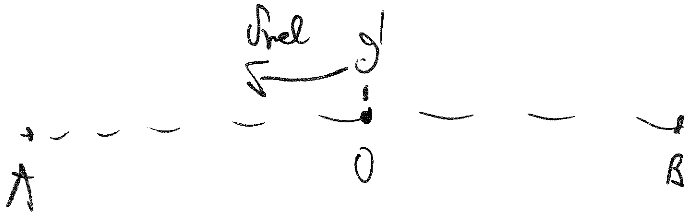


(5.3)r

gli arrivi dei due segnali in A e B sono due eventi fisici, ed avvengono per

$$t_A = t_B = \frac{\ell}{c} \qquad (54)_r$$

Consideriamo ora la descrizione dello stesso processo dato da O' che in moto relativo uniforme rispetto ad O



$(55)_r$

Il raggio che va verso A percorre, secondo O', un tratto

$$\ell'_A = \ell - v_{rel}\, t'_A \qquad (56)_r$$

dato che mentre il raggio viaggia, O' si è spostato; lo percorre alla velocità c per cui si ha anche

$$\ell'_A = c\, t'_A \qquad (57)_r$$

Dal confronto di queste due espressioni segue

$$c\, t'_A = \ell - v_{rel}\, t'_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{t'_A = \frac{\ell}{c + v_{rel}}} \qquad (58)_r$$

Per il raggio verso B si ha, analogamente ma con O' che si sposta in direzione opposta,

$$\begin{cases} \ell'_B = \ell + v_{rel}\, t'_B \\ \ell'_B = c\, t'_B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t'_B = \frac{\ell}{c - v_{rel}}} \qquad (59)_r$$

Dunque per l'osservatore O' i due eventi <u>non</u> sono simultanei:

$$\boxed{t'_A \neq t'_B} \qquad (60)_r$$

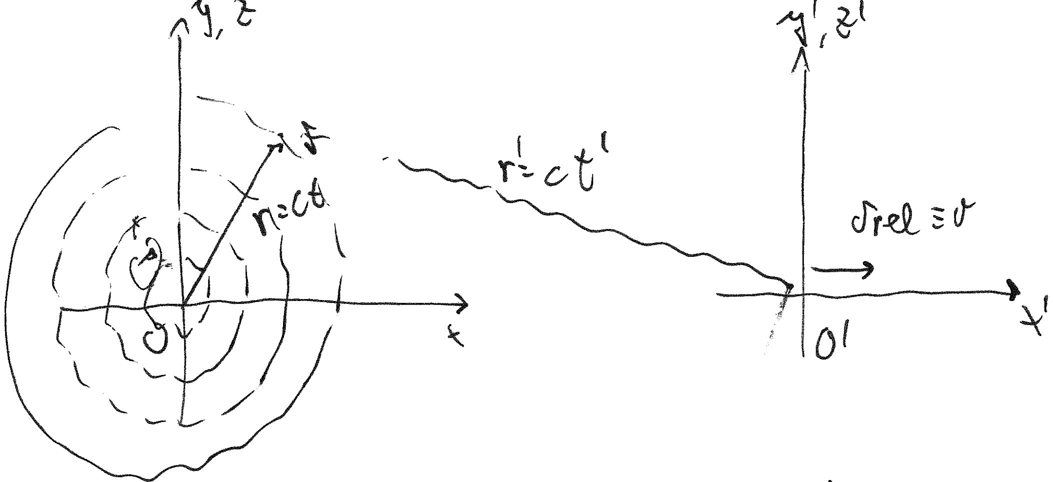
N.B. Secondo Galileo, le velocità dei due raggi per O' cambiano esattamente in modo da compensare e far sì che $t_A' = t_B'$

~~~

• Le trasformazioni di Lorentz

. Consideriamo due osservatori in moto relativo lungo l'asse x le cui origini coincidono al tempo $t = t' = 0$. (Come anche visto prima, non vi è sostanziale perdita di generalità)

. Al tempo $t = t' = 0$ viene emesso dall'origine un impulso luminoso che si propaga isotropicamente con velocità c in entrambi i S.R.



(61)$_r$

Nel sistema O, al tempo t il fronte d'onda è la sfera di equazione

$$c^2 t^2 - r^2 = 0 \qquad (62)_r$$

dove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Nel sistema O', se x', y', z' e t' sono le coordinate, lo stesso fronte d'onda è ~~una~~ la sfera

$$c^2 t'^2 - r'^2 = 0 \qquad (63)_r$$

La relazione tra le nuove e le vecchie coordinate deve essere tale che
~~~

$$\boxed{c^2t^2 - r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^2t'^2 - r'^2 = 0} \qquad (64)_r$$

Notiamo che, siccome $r' \neq r$, si avrà anche $t' \neq t$.

Cerchiamo dunque una trasformazione

$$t' = t'(t, x, y, z), \quad x' = x'(t, x, y, z), \quad y' = y(t, x, y, z), \quad z' = z(t, x, y, z) \qquad (65)_r$$

tale da preservare l'annullarsi della quantità

$$\boxed{\Delta s^2 = -ct^2 + r^2 = -ct^2 + x^2 + y^2 + z^2} \qquad (66)_r$$

- Richiediamo che, per

$$\beta \equiv v/c \ll 1 \qquad (67)_r$$

la trasformazione $(65)_r$ si riduca alla trasformazione di Galileo.

- La trasformazione deve essere lineare per il principio di relatività nel settore meccanico: un corpo che si muove di moto rett. uniforme nel SR assoluto O (perché non ha forze applicate) deve muoversi di moto uniforme anche per O'. (È facile rendersi conto che questo non avviene se la trasformazione non è lineare). Questa richiesta rispetta l'omogeneità di spazio e tempo.

- Nelle direzioni trasverse al moto relativo (le direzioni y e z) si deve avere

$$\boxed{y' = y \quad , \quad z' = z} \qquad (68)_r$$

per isotropia: il piano $y = 0$ deve essere mappato nel piano $y' = 0$, etc.

Per lo stesso ragione, il piano $x = vt$ deve essere mappato nel piano $x' = 0$

Dunque si deve avere

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt)} \qquad (69)_r$$

La trasformazione inversa corrisponde ad una trasformazione con velocità relativa $(-v)$; dunque (con gamma costante da determinare)

$$x = \gamma(x' + vt) \qquad (70)_r$$

. La richiesta fondamentale $(64)_r$, tenendo conto della $(68)_r$, diviene

$$c^2t^2 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2t'^2 - x'^2 = 0, \qquad (71)_r$$

owverossia, per il segnale luminoso deve valere allo stesso tempo

$$x = ct, \quad x' = ct' \qquad (72)_r$$

Sostituendo questo nelle $(69)_r$ - $(70)_r$ troviamo

$$\begin{cases} ct' = \gamma(c-v)t \\ ct = \gamma(c+v)t' \end{cases} \xrightarrow{\text{(moltiplicandole)}} \quad c^2\cancel{tt'} = \gamma^2(c^2 - v^2)\cancel{tt'} \qquad (73)_r$$

da cui segue $(\beta = v/c)$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{1 - \beta^2} \qquad (74)_r$$

e quindi

$$\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (75)_r$$

Nel limite galileiano $\beta = v/c \ll 1$, γ deve ridursi a 1 per ottenere le trasformazioni di Galileo, quindi dobbiamo scegliere

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \qquad (76)_r$$

c = limite superiore

A questo punto riconsideriamo le relazioni diretta ed inversa (69)$_r$ - (70)$_r$:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases} \longrightarrow (\text{eliminando } x') \quad x = \gamma\left[\gamma(x - vt) + vt'\right] \qquad (77)_r$$

Questo ci consente di esprimere t' in termini delle vecchie coordinate:

$$\gamma v t' = \gamma^2 v t + (1-\gamma^2)x \quad \Rightarrow \quad t' = \gamma\left(t + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}\frac{x}{v}\right) \qquad (78)_r$$

Siccome

$$\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2} - 1 = \cancel{1} - \frac{v^2}{c^2} - \cancel{1} = -\frac{v^2}{c^2} \qquad (79)_r$$

~~per cui~~ in definitiva ~~si ha~~

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)} \qquad (80)_r$$

. Riassumendo le TL per un moto relativo lungo l'asse x si possono scrivere nella forma

$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - v/c\, x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma(x - \beta \cdot ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}} \qquad (81)_r$$

Le trasformazioni inverse sono ottenute scambiando $v \to -v$ e quindi $\beta \to -\beta$, $\gamma \to \gamma$:

$$\boxed{\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}} \qquad (82)_r$$

Vedi pag 21 bis (Diagrammi di Minkowski)

• Alcune conseguenze dirette delle T.L.

La forma delle T.L. ha delle conseguenze importanti e controintuitive sulla misura degli intervalli spazio-temporali. In particolare, oltre:

Dilatazione dei tempi

Consideriamo due eventi (x'_A, t'_A) e ~~(x'_B, t'_B)~~ $(x'_B = x'_A, t'_B)$ che, per l'osservatore O' hanno la stessa posizione. L'intervallo di tempo

$$\Delta t' = t'_B - t'_A \equiv \Delta \tau_{AB} \quad \text{(intervallo di tempo proprio)} \qquad (83)_r$$

è dunque quello ~~seg~~ misurato da un orologio "a riposo" ~~O' se co-~~ ~~terminat, il S.R. O' la posizione x il S.R. i quello dell'orologio~~.

Per un osservatore O che vede O' muoversi con velocità v abbiamo, dalla TL inversa $(82)_r$,

$$\begin{cases} t_A = \gamma\left(t'_A + \frac{v}{c^2} x'_A\right) \\ t_B = \gamma\left(t'_B + \frac{v}{c^2} x'_B\right) \end{cases} \Rightarrow \Delta t = \gamma\left(t'_B - t'_A + \frac{v}{c^2}\underbrace{(x'_B - x'_A)}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta \tau} \qquad (84)_r$$

Diagrammi di Minkowski

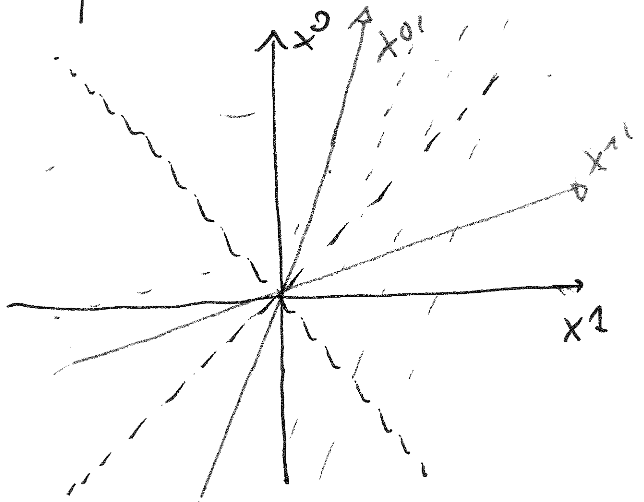
Introduciamo (sarà utile in seguito e semplifica la scrittura)

$$x^0 \equiv ct \quad , \quad x^1 = x \qquad \text{(dm1)}$$

per le due coordinate collegate da TL (81)r - (82)r non banali. Dunque

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \end{cases} \qquad \text{(dm 2)}$$

dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $\beta = v/c \in (0,1)$. La rappresentazione grafica della trasformazione (dm2) è la seguente:



(dm3)

Infatti:

- l'asse $x^{1'}$, d'equazione $x^{0'}=0$ corrisponde alla retta $x^0 = \beta x^1$
- l'asse $x^{0'}$ di equazione $x^{1'}=0$, corrisponde alla retta $x^0 = \frac{1}{\beta} x^1$

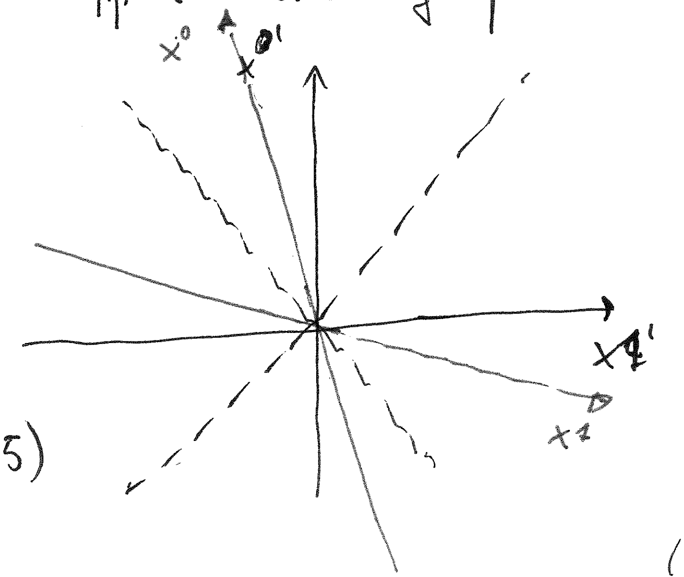
Le due rette sono simmetriche rispetto alla bisettrice ~~del quadrante~~.

Se la velocità v relativa aumenta, $v \to c$, si ha $\beta \to 1$ e i due assi nuovi tendono a schiacciarsi sulla bisettrice.

- La trasformazione inversa è

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x^{1'}) \\ x^1 = \gamma(x^{1'} + \beta x^{0'}) \end{cases} \qquad \text{(dm 4)}$$

con rappresentazione grafica



(dm5)

Infatti

- l'asse $x^{1'}$, di equazione $x^{0'}=0$, corrisponde alla retta $x^0 = -\beta x^1$
- l'asse $x^{0'}$, di equazione $x^{1'}=0$, corrisponde alla retta $x^0 = -\frac{1}{\beta} x^1$

(e x^0 cresce se $x^{0'}$ cresce)

Quando $v \to c$, $\beta \to 1$, i due nuovi assi tendono alla bisettrice II-IV quadrante.

Queste rappresentazioni, dette diagrammi di Minkowski, sono utili per confrontare posizioni ed intervalli nei due sistemi di riferimento. ~~In tale~~ A tale scopo, può essere utile tracciare anche le griglie coordinate (parallele agli assi) dei due sistemi.

[Torneremo su questi diagrammi, per illustrare altre caratteristiche, più avanti. / Fare in seguito!!]

- Per confrontare gli intervalli, bisogna tener conto del "riscalaggio" detto ~~della unità~~ degli intervalli unitari. Ricordiamo infatti che le TL preservano l'invariante relativistico Δs^2:

$$\Delta s^2 = -c^2 t^2 + x^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2$$

(dm6)

$$\| $$

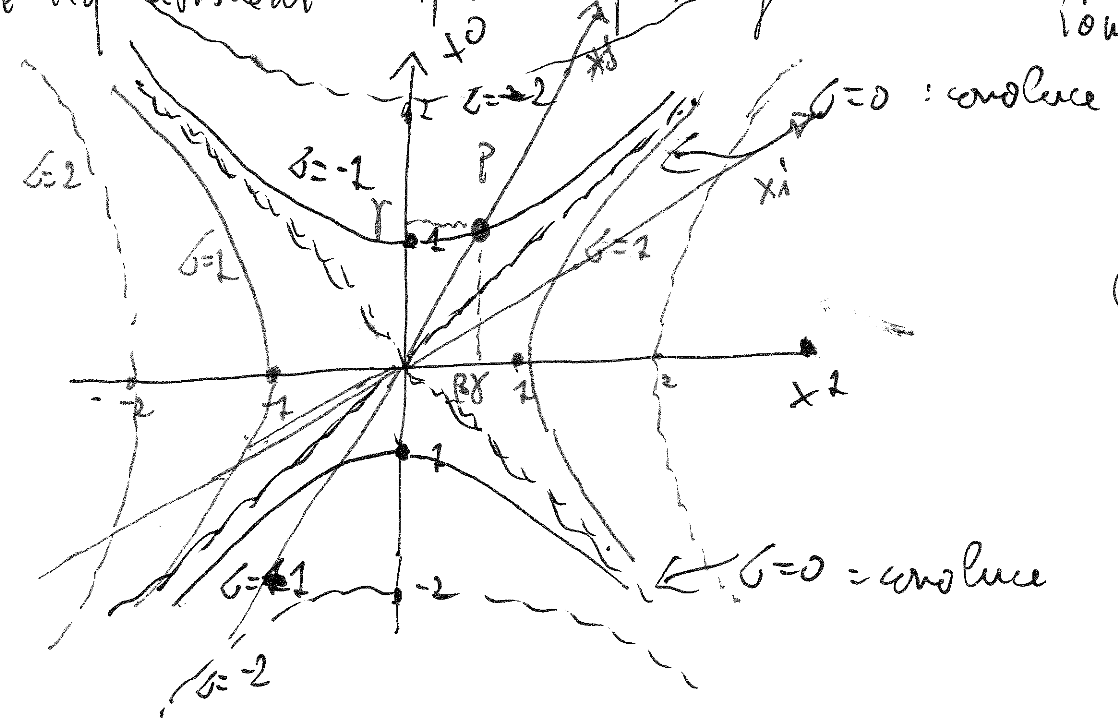
$$\Delta s'^2 = -(x_0')^2 + (x_1')^2$$

Il luogo geometrico dei punti con Δs^2 fissato rimane nel suo complesso invariante sotto TL. Tale luogo è dato da

$$-(X^0)^2+(X^1)^2 = \sigma \quad \Longleftrightarrow \quad (X^1-X^0)(X^1+X^0)=\sigma \qquad \text{(dm7)}$$

↑ fisso — positivo negativo o nullo

che è l'equazione di un'iperbole riferita agli assi:



(dm8)

Nel SRO', queste curve mantengono la stessa equazione: $(x_1'-x_0')(x_1'+x_0')=\sigma$

(Ad esempio: il cono luce $\sigma=0$: $x_1=\pm x_0 \Longleftrightarrow$ al cono luce $x_1'=\pm x_0'$

le bisettrici restano bisettrici anche nel SR O')

- Usando le TL inverse (dm4) vediamo che il punto sull'asse

$P=(x_0'=1,\ x_1'=0)$ [che segna l'intervallo unitario in t_0'] (dm9)

~~corrisponde~~ che ha $\Delta s^2 = -x_0'^2+x_1'^2=-1$ ($\Rightarrow \sigma=-1$)

corrisponde a

$$\begin{cases} x_0=\gamma(x_0'+\beta x_1') = \gamma \\ x_1=\gamma(x_1'+\beta x_0') = \beta\gamma \end{cases} \rightarrow \quad P: (x^0=\gamma,\ x^1=\beta\gamma) \qquad \text{(dm10)}$$

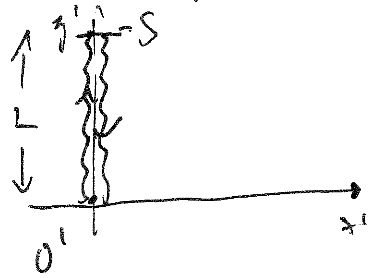
come indicato in figura [in ~~indicato~~ questo mostra la dilatazione dei tempi]

. L'intervallo di tempo Δt misurato da un osservatore O in moto rispetto allo SR O' in cui gli eventi ~~sono~~ si verificano nello stesso punto risulta dunque dilatato di un fattore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 1 \qquad (85)_r$$

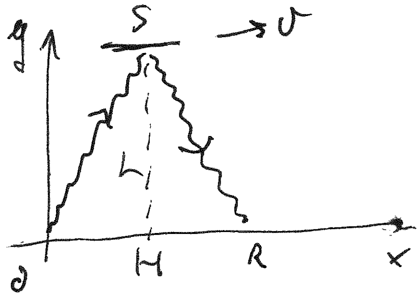
. Questo effetto può essere illustrato da un "gedanken experiment".

Consideriamo un segnale luminoso emesso in direzione y e ricevuto nello stesso punto dopo essere stato riflesso: l'intervallo di tempo proprio tra l'emissione e il rilevamento è



$$\Delta \tau = \frac{2L}{c} \qquad (86)_r$$

nel SR O che vede O' spostarsi verso destra nella direzione x con velocità v, il processo appare come segue:



$$\begin{cases} OH = v\dfrac{\Delta t}{2} \\ OS = c\dfrac{\Delta t}{2} \end{cases} \qquad (87)_r$$

$$OS^2 = OH^2 + HS^2$$

per cui

$$\frac{c^2\Delta t^2}{4} = \frac{v^2\Delta t^2}{4} + L^2 \Rightarrow (c^2-v^2)\Delta t^2 = 4L^2 \qquad (88)_r$$

e quindi

$$\Delta t^2 = \frac{4L^2}{c^2-v^2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\cdot\Delta\tau \qquad (89)_r$$