SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI
ANALISI III - CDL IN FISICA

VIVINA BARUTELLO, PAOLO CALDIROLI

Indice

1. Successioni di funzioni

Fissato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ oppure $S \subseteq \mathbb{C}$ consideriamo una *successione di funzioni*

$$f_n \colon S \to \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad f_n : S \to \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Definizione 1.1. *Diciamo che la successione* $(f_n)_n$ converge alla funzione f puntualmente nell'insieme $E \subseteq S$ *se*

$$\forall x \in E \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R} \text{ oppure } f(x) \in \mathbb{C}$$

ovvero se

$$\forall x \in E \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} = \bar{n}(x, \varepsilon) \text{ tale che } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall n \geq \bar{n}.$$

In tal caso la funzione $f \colon E \to \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{C}$) si chiama funzione limite.

Esempio 1.2. *Consideriamo la successione di funzioni ($S \equiv \mathbb{R}$)*

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n,$$

il cui limite puntuale è

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ \nexists \text{ oppure divergente}, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Deduciamo quindi che la successione converge puntualmente nell'insieme

$$E = (-1, 1]$$

Date: 2 luglio 2025.

alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } |x| < 1 \\ 1, & \textit{se } x = 1. \end{cases}$$

Si osservi questo fatto: le funzioni f_n sono continue su tutto $\mathbb{R}$ (e in particolare su E) per ogni n, la funzione limite puntuale f è definita su un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$ e non è neppure continua su E. Nel passaggio al limite puntuale si è quindi persa la continuità.

Consideriamo ora l'analoga successione in campo complesso, ovvero

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f_n(z) = z^n,$$

il cui limite puntuale è alla funzione limite

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \textit{se } |z| < 1 \\ 1, & \textit{se } z = 1. \end{cases}$$

La funzione limite f risulta in questo caso definita su sottoinsieme proprio di $\mathbb{C}$

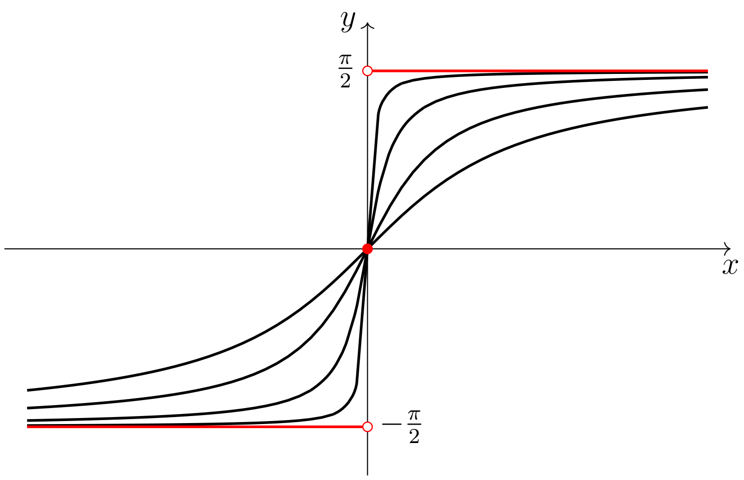
$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{1\}.$$

Esempio 1.3. *Consideriamo la successione di funzioni in campo reale*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \arctan(nx).$$

Calcoliamo il limite puntuale della successione

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \textit{se } x < 0 \\ 0, & \textit{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \textit{se } x > 0. \end{cases}$$



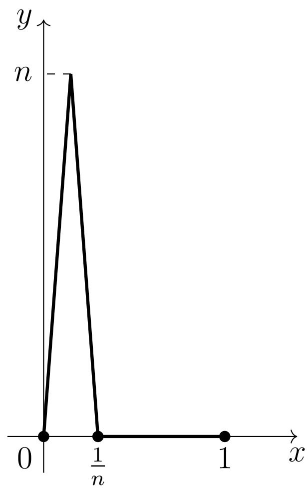
Deduciamo quindi che la successione converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \textit{se } x < 0 \\ 0, & \textit{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \textit{se } x > 0. \end{cases}$$

Anche in questo caso, nel passaggio al limete puntuale, si è persa la continuità.

Esempio 1.4. *Consideriamo la successione di funzioni in campo reale*

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & \textit{se } x \in [0, 1/2n] \\ -2n^2x + 2n, & \textit{se } x \in [1/2n, 1/n] \\ 0, & \textit{se } x \in [1/n, 1] \end{cases}.$$



Il limite puntuale su $[0,1]$ *è la funzione nulla, infatti*

$$\forall x \in [0,1] \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

essendo $f_n(x) = 0$ *per tutti gli* $n \in \mathbb{N}$ *per i quali* $x > 1/n$. *Osserviamo inoltre che*

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$, *quindi*

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

La convergenza puntuale quindi non è sufficiente per far passare il limite sotto il segno di integrale.

Introduciamo una nuova nozione di convergenza che permetta di superare le mancanze viste negli esempi precedenti.

Definizione 1.5. *Diciamo che la successione* $(f_n)_n$ converge alla funzione f uniformemente nell'insieme $E \subseteq S$ *se esiste* $f : E \to \mathbb{R}$ *(o* $\mathbb{C}$*) tale che*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq \bar{n} \ \forall x \in E$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \ : \ \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq \bar{n}$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \text{dove } \alpha_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

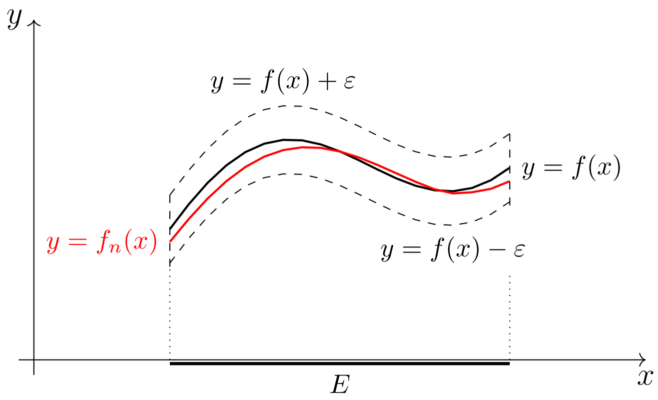
Osservazione 1.6. *Se* $f_n \to f$ *uniformemente in* E, *allora* $f_n \to f$ *puntualmente in* E.

Osservazione 1.7. *Il concetto di convergenza uniforme ha una chiara interpretazione grafica. Consideriamo* $f_n \to f$ *uniformemente in* $E \subset \mathbb{R}$ *e definiamo gli insiemi*

$$S_\varepsilon = \{(x,y) : |y - f(x)| < \varepsilon, x \in E\} \quad e \quad G_n = \{(x,y) : y = f_n(x)|, x \in E\}$$

risulta

$$f_n \to f \text{ uniformemente in } E \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \ : \ G_n \subset S_\varepsilon \forall n \geq \bar{n}.$$



Una strategia per verificare la convergenza uniforme di una successione $(f_n)_n$ è la seguente:

(1) si calcola il limite puntuale, al variare di x in un opportuno insieme E (da determinare),
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x);$$

(2) si calcola o si stima la quantità
$$\alpha_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|;$$

(3) si verifica che
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Esempio 1.8. *Dimostrare che la successione di funzioni*
$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n$$
converge uniformemente a 0 su tutto $\mathbb{R}$. *Vogliamo dimostrare che*
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \textit{con} \quad \alpha_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{1+x^2}\right|^n$$
La funzione $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ *è dispari, ha come asintoto orizzontale bilatero l'asse delle ascisse, ha massimo (risp. minimo) globale in* $x = 1$ *(risp.* $x = -1$*), punto in cui vale* $1/2$ *(risp.* $-1/2$*). Concludiamo quindi che* $\alpha_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ *se* $n \to \infty$. *Il limite richiesto è quindi verificato.*

Vediamo ora alcune proprietà delle successioni convergenti uniformemente.

Teorema 1.9 (La convergenza uniforme preserva la continuità)**.** *Sia* $f_n : S \to \mathbb{R}$ *(o* $\mathbb{C}$*),* $n \in \mathbb{N}$*, una successione di funzioni tale che*

(i) $f_n \to f$ *uniformemente in* $E \subseteq S$*,*
(ii) f_n *è continua in* E*, per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Allora la funzione limite f *è continua in* E.

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso in cui $S \subseteq \mathbb{R}$ ed $E = [a, b]$. Fissato $x_0 \in [a, b]$ vogliamo dunque dimostrare che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$
ovvero che
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b].$$
Fissiamo quindi in modo arbitrario $\varepsilon > 0$ e prendiamo $\hat{n}$ tale che $\alpha_{\hat{n}} < \varepsilon/3$. La funzione $f_{\hat{n}}$ è continua in x_0 per l'ipotesi (ii), quindi
$$\exists\delta > 0 :\ |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b].$$

Allora, per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ abbiamo

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{\hat{n}}(x)| + |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| + |f_{\hat{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \alpha_{\hat{n}} + \frac{\varepsilon}{3} + \alpha_{\hat{n}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

che è la tesi. □

Teorema 1.10 (Integrazione per successioni)**.** *Sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni tale che*

(i) *$f_n \to f$ uniformemente in $[a, b]$,*
(ii) *f_n è continua in E, per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Osservazione 1.11. *Le successioni degli Esempi 1.2, 1.3 e 1.4 non convergono uniformemente sul loro insieme di convergenza puntuale.*

Dim. del Teorema 1.10. Applicando il Teorema 1.9, otteniamo la continuità della funzione f su $[a, b]$ e dunque la sua integrabilità su tale intervallo.

Dalla prima ipotesi sappiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_n \alpha_n = \lim_n \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

e per definizione di α_n abbiamo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \forall x \in [a, b].$$

Otteniamo quindi facilemnte il limite della tesi, infatti

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon\ \exists\bar{n} :\ \left|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx\right| &= \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\, dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \alpha_n(b - a) \\ &< \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n},\end{aligned}$$

ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

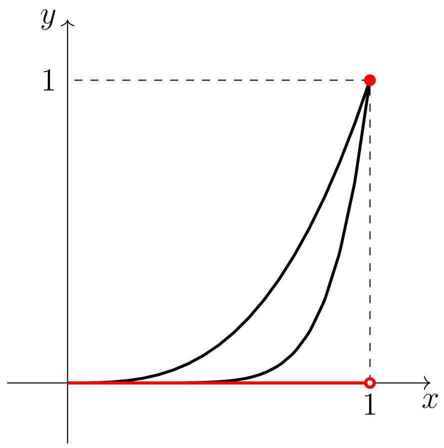
□

Esempio 1.12. *Consideriamo la succession di funzioni*

$$f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$$

il cui limite puntuale su $[0, 1]$ è

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



Dal Teorema 1.9 deduciamo che f non può essere il limite uniforme della successione su $[0,1]$. *Osserviamo però che per ogni $\varepsilon > 0$ la fuccessione f_n converge uniformemente a f su* $[0, 1-\varepsilon]$, *infatti*

$$\sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} |f_n(x) - f(x)| = (1-\varepsilon)^n$$

e $\lim_n (1-\varepsilon)^n = 0$

Osservazione 1.13. *Dall'esempio precedente deduciamo che la convergenza uniforme su* $[a, b-\varepsilon]$, *per ogni $\varepsilon > 0$, non implica la convergenza uniforme su* $[a, b]$.

Concludiamo questa sezione con il seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 1.14. *Sia $f_n \colon S \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che*

(i) *$f_n \to f$ uniformemente in $E \subseteq S$,*
(ii) *f_n è continua su $\overline{E}$ = chiusura di E, per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Allora f si estende su $\overline{E}$ in modo continuo e $f_n \to f$ uniformemente in $\overline{E}$.

Dimostrazione. [1] Supponiamo E limitato. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \;\forall x \in E\,,\; \forall n \geq \overline{n}\,. \tag{1}$$

Siccome $\overline{E}$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e quindi compatto, la funzione $f_{\overline{n}}$, che per ipotesi è continua in $\overline{E}$, è anche uniformemente continua in $\overline{E}$ (teorema di Heine-Cantor). Dunque esiste $\delta > 0$ tale che $|f_{\overline{n}}(x) - f_{\overline{n}}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per ogni $x, y \in \overline{E}$ con $|x-y| < \delta$. Allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{\overline{n}}(x) + f_{\overline{n}}(x) - f_{\overline{n}}(y) + f_{\overline{n}}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{\overline{n}}(x)| + |f_{\overline{n}}(x) - f_{\overline{n}}(y)| + |f_{\overline{n}}(y) - f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

se $x, y \in E$ verificano $|x-y| < \delta$. Dunque f è uniformemente continua in E e pertanto ammette un'unica estensione continua in $\overline{E}$ (questo è un fatto non ovvio che diamo per buono e per il quale serve lavorare con le successioni di Cauchy). Dunque, sapendo ora che le funzioni f_n e f sono continue in $\overline{E}$, la condizione (1) si estende per continuità su $\overline{E}$, scrivendo $\leq$ al posto di $<$. Ma ciò significa che $f_n \to f$ uniformemente in $\overline{E}$. Se E non è limitato, si ripete tutto il ragionamento in un intorno limitato di ogni punto della frontiera di E e si conclude. □

Osservazione 1.15. *Dal Teorema 1.14 deduciamo che la successione dell'Esempio 1.12 non può convergere uniformemente su* $[0, 1)$.

[1] non svolta a lezione

2. Serie di funzioni

Fissato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ oppure $S \subseteq \mathbb{C}$ consideriamo una *successione di funzioni*

$$f_n : S \to \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad f_n : S \to \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definizione 2.1. *Si chiama* serie di funzioni *e si scrive*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{2}$$

la successione di funzioni, detta successione delle somme parziali *o delle* ridotte*,*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad x \in S, \ n \geq 0.$$

Definizione 2.2. *Diciamo che la serie di funzioni* (2) converge puntualmente alla funzione s nell'insieme $E \subseteq S$ *se $s_n \to s$ puntualmente in E. La funzione s si chiamo* somma della serie *e si scrive*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Diciamo che la serie (2) converge uniformemente alla funzione s nell'insieme $E \subseteq S$ *se $s_n \to s$ uniformemente in E.*

Osservazione 2.3. *Quando si fissa $x \in S$, la serie di funzioni si riduce ad una serie numerica.*

Vediamo i risultati sulle serie di funzioni corrispondenti ai Teoremi 1.9 e 1.10. La loro dimostrazione segue immediatamente applicando i due risultati citati.

Teorema 2.4 (Continuità della funzione somma)**.** *Sia $f_n : S \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che*
(i) *$\sum_n f_n$ converge uniformemente in $E \subseteq S$,*
(ii) *ogni f_n è continua in E.*

Allora la funzione somma $s = \sum_n f_n$ è continua in E.

Teorema 2.5 (Integrazione per serie)**.** *Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni tale che*
(i) *$\sum_n f_n$ converge uniformemente in $[a,b]$,*
(ii) *ogni f_n è continua in $[a,b]$.*

Allora la funzione somma $s = \sum_n f_n$ è continua in $[a,b]$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b s(x)\, dx.$$

Data una serie di funzioni $\sum_n f_n$ con $f_n \colon S \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), definiaimo l'*insieme di convergenza semplice*

$$I_s = \left\{ x \in S \colon \text{la serie numerica } \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge} \right\}$$

e l'*insieme di convergenza assoluta*

$$I_a = \left\{ x \in S \colon \ \text{la serie numerica} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \text{ converge} \right\}.$$

In generale

$$I_a \subseteq I_s \subseteq S.$$

Esempio 2.6. *Prendiamo $f_n(z) = x^n$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, e consideriamo la serie geometrica di funzioni in $\mathbb{R}$*
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$
Notiamo che se $|x| = r < 1$ allora la serie converge assolutamente (e semplicemente) in x. Invece se $|x| = r \geq 1$ allora la serie non converge semplicemente perchè il suo termine n-esimo non è infinitesimo quando $n \to \infty$ (non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie). Deduciamo quindi che
$$I_a = I_s = (-1, 1)$$
e su questo insieme
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Mentre lo studio della convergenza semplice o assoluta di una serie di funzioni si riduce allo studio della convergenza di una serie numerica, lo studio della convergenza uniforme si basa sul seguente risultato, una sorta di teorema di confronto per serie di funzioni.

Teorema 2.7 (M-test di Weierstrass o Criterio di convergenza totale)**.** *Siano $f_n : S \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni ed $(M_n)_n \subset [0, +\infty)$ una successione numerica tali che*

(i) *esiste $n_0 \geq \mathbb{N}$ tale che $|f_n| \leq M_n$ per ogni $x \in E \subseteq S$ e per ogni $n \geq n_0$*
(ii) *$\sum_n M_n$è convergente.*

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in ogni punto $x \in E$ e uniformemente nell'insieme E.

Definizione 2.8. *Una serie di funzioni che soddisfi le ipotesi dell'M-test di dice* totalmente convergente*.*

Il Criterio di convergenza totale asserisce quindi che un serie totalmente convergente in E convenge assolutamente (e quindi semplicemente) in ogni punto di E, e converge uniformemente in E.

Per ogni n, una buona scelta per la costante M_n è
$$M_n = \text{ (o anche solo } \geq \text{) } \sup_{x \in E} |f_n(x)|.$$

Esempio 2.9. *Si consideri la serie di funzioni dell'Esempio 2.6; sull'intervallo di convergenza puntuale $(-1, 1)$ non è possibile applicare l'M-test, infatti*
$$\sup_{|x|<1} |x|^n = 1.$$
Consideriamo quindi un qualsiasi $r \in (0, 1)$ e l'intervallo $[-r, r]$, abbiamo in questo caso
$$\sup_{|x|<r} r^n$$
ed essendo $\sum_n r^n$ convergente, possiamo applicare l'M-test su $[-r, r]$ e ottenere che la serie $\sum_n x^n$ converge uniformemente su $[-r, r]$ per ogni $r \in (0, 1)$.

Esempio 2.10. *Si consideri la serie di funzioni*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nx}{1 + n^2x^2} \right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Riprendendo quanto visto nell'Esempio 1.8 a pagina 4 abbiamo
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{nx}{1 + n^2x^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{nx}{1 + n^2x^2} \right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Definendo $M_n = \frac{1}{2^n}$*, possiamo applicare l'M-test e ottenere la convergenza assoluta (e semplice) in ogni* $x \in \mathbb{R}$ *e la convergenza uniforme su* $\mathbb{R}$.

Esempio 2.11 (La serie geometrica come serie di funzioni in $\mathbb{C}$)**.** *Prendiamo* $f_n(z) = z^n$*, per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, e consideriamo la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Notiamo che se $|z| = r < 1$ *allora la serie converge assolutamente (e semplicemente) in* z. *Invece se* $|z| = r \geq 1$ *allora la serie non converge semplicemente perchè il suo termine n-esimo non è infinitesimo quando* $n \to \infty$ *(non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie). Deduciamo quindi che*

$$I_a = I_s = D_1(0) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$$

e su questo insieme

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Analizziamo ora la convergenza uinforme della serie. Se scegliamo $E = D_1(0)$

$$\sup_{|z|<1} |z|^n = 1$$

e non si potrebbe applicare l'M-test. Prendendo invece $E = \overline{D_r(0)}$ *con* $r \in [0, 1)$ *otteniamo*

$$\sup_{|z|\leq r} |z|^n = r^n$$

e possiamo applicare l'M-test con $M_n = r^n$. *La serie data converge quindi totalmente e uniformemente su ogni palla chiusa* $\overline{D_r(0)}$ *con* $r \in [0, 1)$.

Dall'esempio precedente deduciamo che la convergenza uniforme di una serie di funzioni sulla famiglia di intervalli $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, per $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, non implica la convergenza uniforme della successione sull'intervallo aperto (a, b). Per le serie di funzioni vale inoltre il risultato analogo al Teorema 1.14.

Teorema 2.12. *Sia* $f_n\colon S \to \mathbb{R}$ *(o* $\mathbb{C}$*),* $n \in \mathbb{N}$ *una successione di funzioni tale che*

(i) $\sum_n f_n$ *converge uniformemente in* $E \subseteq S$*,*
(ii) *ogni* f_n *è continua in* $\overline{E}$ = *chiusura di* E.

Allora la funzione somma della serie $\sum_n f_n$ *si estende su* $\overline{E}$ *in modo continuo e* $\sum_n f_n$ *converge uniformemente in* $\bar{E}$.

Osservazione 2.13. *La serie geometrica, reale o complessa, non può quindi convergere uniformemente sull'insieme di convergenza semplice, altrimenti la convergenza uniforme dovrebbe estendersi fino al bordo di questo insieme, portando ad una contraddizione con la tesi del Teorema 2.12.*

2.1. **Esercizi sulle serie di funzioni.**

Esercizio 2.1 (Serie riconducibili a serie geometriche)**.** *Data una funzione* $g(x)$ *definita su un certo insieme* $E \subset \mathbb{R}$ *(o* $\mathbb{C}$*), ci proponiamo di studiare la convergenza della serie di funzioni*

$$\sum_n [g(x)]^n.$$

Per quanto visto nell'Esempio 2.11, si ha che

$$I_s = I_a = \{x \in E\colon |g(x)| < 1\}.$$

Inoltre si ha convergenza totale e quindi uniforme su tutti gli insiemi $\{x \in E : |g(x)| \le r\}$ al variare di $r \in (0,1)$. Possiamo oanche scrivere la somma della serie

$$s(x) = \frac{1}{1-g(x)}, \quad x \in I_s.$$

Ad esempio la serie di funzioni

$$\sum_n [\tan x]^n, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ammette come insieme di convergenza semplice e assoluta

$$I_s = I_a = \{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : |\tan x| < 1\} = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),$$

converge uniformemente in tutti gli intervalli $[-L, L]$ per ogni $L \in (0, \pi/4)$. La somma della serie è la funzione

$$s(x) = \frac{1}{1-\tan x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 2.2. *Date le seguenti serie di funzioni*

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{3/2}}$;

(B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$;

(C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^x}}-1\right)$.

determinarne gli insiemi I_s e I_a e studiarne la convergenza uniforme.

(A) Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^{3/2}}$. Tutte le f_n sono definite su $\mathbb{R}$ e abbiamo

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n^{3/2}} \le \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esendo $\sum_n n^{-3/2}$ convergente, possiamo applicare l'M-test con

$$M_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

e dedurre la convergenza assoluta (quindi semplice) e uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

(B) Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$. Tutte le f_n sono definite su $\mathbb{R}$ e la stima naturale

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n}$$

non è utile per applicare l'M-test in quanto $\sum_n \frac{1}{n}$ è divergente. Osserviamo anche che, fissato $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n+x^2} \sim \frac{1}{n}$$

quindi $I_a = \emptyset$. Possiamo provare a vedere se il carattere oscillatorio della serie porta alla convergenza semplice. Fissato $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$f_n(x) = (-1)^n a_n, \qquad a_n = \frac{1}{n+x^2}$$

ed essendo a_n decrescente al crescere di n (banale da verificare) il Criterio di Leibniz implica $I_s = \mathbb{R}$. Sai quindi

$$s(x) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ed $s_n(x)$ la ridotta n-esima della serie. Il Criterio di Leibniz fornisce anche una naturale stima del resto, infatti

$$|s_n(x) - s(x)| \leq a_{n+1} = \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

quindi

$$\alpha_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - s(x)| \leq a_{n+1}$$

e $\alpha_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Abbiamo quindi dimostrato che la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.
Si osservi che in nessun sottoinsieme di $\mathbb{R}$ c'è convergenza totale, infatti questa implicherebbe la convergenza assolta e abbiamo visto che $I_a = \emptyset$.

(C) In questo caso

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} - 1\right) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per studiare la convergenza puntuale e assoluta della serie, conviene scrivere

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} - 1\right)\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^x}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^x}}+1} = n\frac{\frac{1}{n^x}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^x}}+1} = \frac{1}{n^{x-1}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^x}}+1}.$$

Da questa espressione è evidente che $f_n(x) > 0$ per ogni n, quindi $I_s = I_a$.
Iniziamo a studiare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la condizione necessaria alla convergenza semplice è verificata, ovvero quando $f_n(x) \to 0$, per $n \to \infty$.
Osservando che $f_n(x) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^{x-1}}$, per $n \to \infty$ deduciamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Inoltre per confronto con la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \iff \quad \alpha > 1$$

concludiamo la convergenza puntuale della nostra serie per $x \in (2, +\infty)$. Quindi

$$I_s = I_a = (2, +\infty).$$

Studiamo ora la convergenza uniforme: certamente non possiamo averla su $(2, +\infty)$, altrimenti, per il Teorema 2.12 la si otterrebbe su $[2, +\infty)$, in contrasto con quanto appena dimostrato. Preso quindi $\varepsilon > 0$ consideriamo gli insiemi $[2 + \varepsilon, +\infty)$ e stimiamo

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^{x-1}} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \quad \forall x \geq 2 + \varepsilon.$$

Definendo quindi $M_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, ancora sfruttando la convergenza della serie armonica generalizzata, possiamo applicare l'M-test e dedurre la convergenza uniforme sugli intervalli $[2+\varepsilon, +\infty)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Esercizio 2.3. *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

(i) *determinarne gli insiemi I_s e I_a;*
(ii) *provare che la serie converge uniformemente su tutti gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$;*
(iii) *detta $s(x)$ la funzione somma della serie, calcolare*

$$\int_0^1 s(x)\, dx;$$

(iv) *provare che la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$.*

(i) Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \frac{x}{(n+x^2)^2}$. Fissato $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{(n+x^2)^2} \le \frac{|x|}{n^2}$$

quindi, essendo

$$\sum_n \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_n \frac{1}{n^2}$$

per il Criterio del Confronto per serie a termini positivi deduciamo la convergenza assoluta su tutto $\mathbb{R}$, ovvero $I_s = I_a = \mathbb{R}$.

(ii) Fissato $[a,b] \subset \mathbb{R}$, abbiamo la stima

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{(n+x^2)^2} \le \frac{C}{n^2}, \quad \forall x \in [a,b]$$

dove $C = \max\{|a|, |b|\}$. Grazie all'M-test deduciamo la convergenza uniforme su ogni intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

(iii) Sull'intervallo $[0,1]$ la serie converge uniformemente, quindi possiamo applicare il Teorema 2.5 di integrazione per serie e ottenere

$$\int_0^1 s(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{(n+x^2)^2}\, dx.$$

Calcoliamo quindi

$$\int_0^1 \frac{x}{(n+x^2)^2}\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

e otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 s(x)\, dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) &= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(iv) La stima fatta al punto (ii) non è applicabile, in quanto la costante C dipende dall'intervallo $[a,b]$ e non esiste se $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo quindi

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|.$$

Notiamo che f è dispari, di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}$ e ammette l'asse orizzontale come asintoto bilatero; quindi

$$M_n = \max_{x\ge 0} |f_n(x)| = f_n\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Siccome $\sum_n n^{-3/2}$ è convergente, possiamo applicare l'M-test e dedurre che la serie di funzioni converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

3. Serie di potenze in campo complesso

Definizione 3.1. *Una* serie di potenze in $\mathbb{C}$ *è una serie di funzioni della forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

dove sia $z_0, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ sono fissati; z_0 è il centro *della serie di potenze, gli a_n sono i* coefficienti.

Una serie di potenze è una serie di funzioni con $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$, tutte funzioni continue da $\mathbb{C}$ in se stesso. La sua ridotta n-esima è

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k$$

è un polinomio di grado n in $\mathbb{C}$.

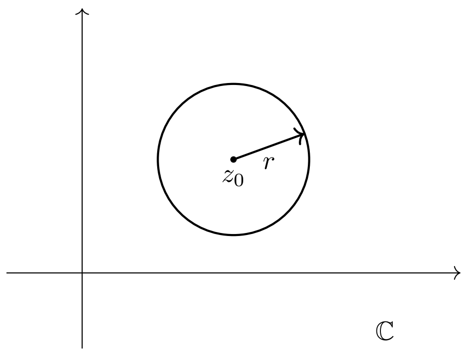
Grazie agli studi di Abel e altri matematici (intorno al 1820) è possibile descrivere in modo piuttosto preciso gli insiemi di convergenza semplice e assoluta di una serie di potenze nonché studiarne la convergenza uniforme.

Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$ poniamo

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$$

$$\overline{D_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le r\}$$

$$\partial D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r\}$$



Teorema 3.2 (Sul disco di convergenza)**.** *Data una serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, allora esiste $R > 0$ tale che*

(i) *la serie converge assolutamente in ogni $z \in D_R(z_0)$;*
(ii) *la serie non converge nell'insieme complementare di $\overline{D_R(z_0)}$;*
(iii) *la serie converge uniformemente in $\overline{D_r(z_0)}$, per ogni $r < R$.*

Il teorema non stabilisce il comportamento della serie nei punti del bordo $\partial D_R(z_0)$ e l'eventuale convergenza uniforme in $\overline{D_R(z_0)}$; queste proprietà sono da studiare caso per caso.

Definizione 3.3. *La quantità R la cui esistenza è stabilita nel Teorema 3.2 si chiama* raggio di convergenza *e $D_R(z_0)$ è il* disco di convergenza *della serie.*

Si osservi che una serie di potenze converge sempre almeno nel suo centro, ovvero $z_0 \in I_s$ per ogni serie di potenze; quando $z = z_0$ la serie si riduce infatti al suo primo termine, a_0. Più in generale si ha che

$$D_R(z_0) \subseteq I_a \subseteq I_S \subseteq \overline{D_R(z_0)}.$$

Quando $R = 0$ (e la serie converge solo in $z = z_0$) si ha che $I_a = I_s = \{z_0\}$. Ad esmpio la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

converge solo in $z = 0$.

Dim. del Teorema 3.2. Abbiamo già osservato che $z_0 \in I_s$ e quindi $I_s \neq \emptyset$. E' quindi ben definita la quantità

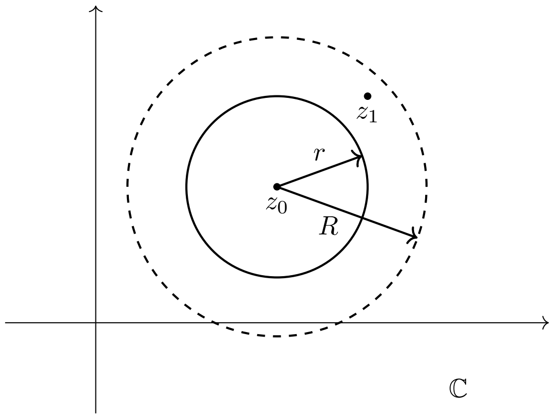
$$R = \sup\{|z - z_0| : z \in I_s\}$$

e risulta $0 \leq R \leq +\infty$.
Se $R = 0$ allora $I_s = I_a = \{z_0\}$ e concludiamo la dimostrazione.
Se invece $R > 0$, allora prendiamo $r \in (0, R)$ e $z_1 \in I_s$ tale che $|z_1 - z_0| \in (r, R)$ (tale z_1 esiste per come è definito R). Poiché la serie converge in z_1 allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_1 - z_0)^n = 0$$

ed in particolare

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \ |a_n(z_1 - z_0)^n| < 1 \ \forall n \geq \bar{n}.$$



Prendiamo ora $z \in \overline{D_r(z_0)}$ e otteniamo

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n|\,|z - z_0|^n \leq |a_n|\,r^n = |a_n(z_1 - z_0)^n| \left|\frac{r}{z_1 - z_0}\right|^n \leq \left|\frac{r}{z_1 - z_0}\right|^n,$$

per ogni $n \geq \bar{n}$. Definendo

$$M_n := \left|\frac{r}{z_1 - z_0}\right|^n$$

si ha che

- $M_n = q^n$ con $q \in (0, 1)$;
- $|a_n(z - z_0)^n| \leq M_n$, per ogni $n \geq \bar{n}$ e per ogni $z \in \overline{D_r(z_0)}$;
- $\sum_n M_n$ è convergente in quanto serie geometrica di ragione $q \in (0, 1)$.

Applicando l'M-test di Weierstrass deduciamo che la serie converge assolutamente e uniformemente in ogni disco chiuso $\overline{D_r(z_0)}$, $r \in (0, R)$. Pertanto converge assolutamente in ogni punto del disco aperto $D_R(z_0)$.
Per come è stato definito R, la serie non converge nei punti del complementare di $\overline{D_R(z_0)}$. $\square$

Corollario 3.4. *La funzione somma di una serie di potenze è continua sul disco aperto di convergenza $D_R(z_0)$.*

Dimostrazione. Siamo nel caso $\sum_n f_n(z)$ con $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$. Le funzioni f_n sono continue su tutto $\mathbb{C}$ e la serie di potenze converge in ogni disco chiuso $\overline{D_r(z_0)}$, $r \in (0, R)$. Deduciamo quindi dal Teorema 2.4, che la somma della serie è continua in ogni $\overline{D_r(z_0)}$, $r \in (0, R)$, e quindi è continua in $D_R(z_0)$. □

Teorema 3.5 (Sul raggio di convergenza)**.** *Data una serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, se esiste uno fra i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e tale limite vale $L \geq 0$, allora il raggio di convergenza della serie è

$$R = \begin{cases} +\infty, & \text{se } L = 0, \\ \frac{1}{L}, & \text{se } L \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{se } L = +\infty. \end{cases}$$

Osservazione 3.6. *I limiti del teorema precendete non è detto che esistano. Tuttavia la* Formula di Hadamard *permette di calcolare il raggio di una serie di potenze nel modo seguente*

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}.$$

Esempio 3.7 (Generalizzazione della serie geometrica $\sum_n z^n$)**.** *Si consideri la serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

quando $\alpha = 0$ la serie si riduce a quella geometrica, studiata nell'Esempio 2.11 a pagina 9. Il centro della derie è $z = 0$ e i suoi coefficienti sono

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{n^\alpha}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Proviamo a calcolare il primo limite presente nelle ipotesi del Teorema 3.5 per determinare il raggio di convergenza. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^\alpha = 1,$$

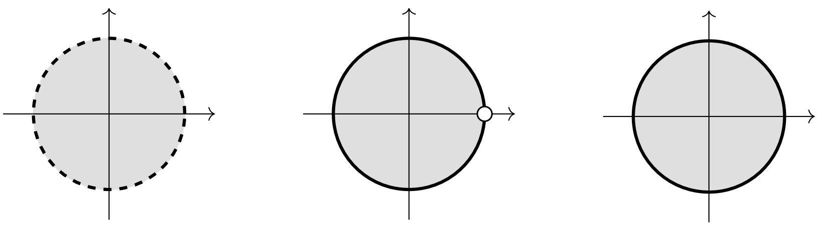
quindi la serie ha $R = 1$ e disco di convergenza $D = D_1(0)$. Studiamo ora il comportamento della serie nei punti $z \in \partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

- $\alpha \leq 0$. *Preso $z \in \partial D$ abbiamo*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial D \cap I_s = \emptyset.$$

  In questo caso quindi $I_s = I_a = D$ e si ha convergenza uniforme nei dischi chiusi $\overline{D_r(0)}$ per ogni $r \in (0, 1)$. La convergenza uniforme non può essere su tutto D perchè questa implicherebbe la convergenza uniforme sulla sua chiusura (Teorema 2.12) e quindi quella puntuale sullo stesso insieme, in contraddizione con quanto dimostrato.

- $\alpha > 1$. *Possiamo applicare l'M-test di Weierstrass sulla chiusura del disco di convergenza, infatti*
$$\left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1, \ \forall z \in D$$
da cui segue che $I_s = I_a = \overline{D}$ *e si ha convergenza uniforme su* $\overline{D}$.
- $\alpha \in (0,1]$. *In questo caso nel punti del bordo* ∂D *non possiamo avere convergenza assoluta, infatti*
$$|z| = 1 \implies \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = \left|\frac{1}{n^\alpha}\right| \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty.$$
La convergenza puntuale in $z \in \partial D$ *necessita invece di considerazioni diverse; se ad esempio ci restringiamo ai due punti reali di* ∂D, ± 1 *sappiamo che* $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge, ma* $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *converge per il Criterio di Leibniz (serie a segno alterno). In tutti i punti* $z \in \partial D$ *con* $z \neq 1$ *possiamo applicare il* Criterio di Abel-Brunacci, *una versione del Criterio di Leibniz per serie in campo complesso, che garantisce che*
$$I_s = \overline{D} \setminus \{1\}.$$
La convergenza uniforme rimane sui dischi chiusi $\overline{D_r(0)}$ *per ogni* $r \in (0,1)$.



caso $\alpha \leq 0$ *caso* $0 < \alpha \leq 1$ *caso* $\alpha > 1$

3.1. Esercizi sulle serie di potenze in $\mathbb{C}$.

Esercizio 3.1. *Per le seguenti serie di potenze in campo complesso*

(A) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n + in^2}{2^{n+1}} z^n$, $\bar{z} = 1 + i$,

(B) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{in}{n+1}\right)^{n^2} (z - i)^n$, $\bar{z} = 2 + 3i$,

determinare il disco di convergenza, gli insiemi I_s *e* I_a *e studiare la convergenza uniforme. Stabilire se convergono nel punto* $\bar{z}$ *indicato.*

(A) Si tratta di una serie di potenze centrata in $z_0 = 0$ e con termine $a_n = \frac{\sin n + in^2}{2^{n+1}}$. Ricordando che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, calcoliamo
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin n + in^2}{2^{n+1}}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2^{1+\frac{1}{n}}} \left|\frac{\sin n}{n^2} + i\right| = \frac{1}{2}|i| = \frac{1}{2}$$
e deduciamo che $R = 2$. Il disco di convergenza quindi è $D = D_2(0)$. Notiamo ora che se prendiamo $z \in \partial D$, ovvero $|z| = 2$, otteniamo una serie numerica in $\mathbb{C}$ il cui termine n-esima ha modulo
$$|a_n 2^n| = \frac{|\sin n + in^2|}{2} = \frac{n^2}{2}\left|\frac{\sin n}{n^2} + i\right|$$
che diverge a $+\infty$ se $n \to \infty$. Concludiamo quindi che $I_s = I_a = D$ e che la serie converge uniformemente su tutti i $\overline{D_r(0)}$, $r \in (0,2)$.

Essendo $|1+i| = \sqrt{2} < 2$, deduciamo che in questo punto la serie converge assolutamente (e semplicemente).

(B)In questo caso abbiamo $z_0 = i$ e $a_n = \left(\frac{in}{n+1}\right)^{n^2}$. Essendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{in}{n+1}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

otteriamo $R = e$ e $D = D_e(i)$. Per studiare la convergenza della serie nei punti del bordo del disco di convergenza, ovvero nei punti z tali che $|z-i| = e$, consideriamo il comportamento in modulo del termine $a_n R^n$, ovvero

$$|a_n R^n| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} e^n = \left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^n.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ in questa espressione otteniamo una forma indeterminata di tipo esponenziale. Riscriviamo quindi

$$|a_n R^n| = \exp\left\{n \log \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right\} = \exp\left\{n\left[\log e - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right\} = \exp\left\{n\left[1 - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

e ricordando che $\log(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2)$ per $ve \to 0$ otteniamo

$$|a_n R^n| = \exp\left\{n\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2} + o(1)\right\} \to e^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

La serie quindi non può convergere semplicemente (e nemmeno assolutamente) in alcun punto del bordo. Concludiamo quindi che $I_s = I_a = D_e(i)$ e che la serie onverge uniformemente su $\overline{D_r(i)}$ per ogni $r \in (0, e)$. Infine essendo $|\bar{z} - i| = |2 + 3i - 1| = 2\sqrt{2} > e$, la serie non converge in $\bar{z}$.

Esercizio 3.2. *Trovare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(z-i)^{3n}}$$

e stabilire se c'è convergenza uniforme in $E = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \geq 3\}$.

Per ricondurci ad una serie di potenze effettuiamo la sostituzione $w = -(z-i)^{-3}$ in modo da ottenere

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 w^n.$$

Questa serie ha centro in $z_0 = 0$, $R = 1$, $I_s = I_a = D_1(0)$ e converge uniformemente su tutti i dischi chiusi $\overline{D_r(0)}$, $r \in (0,1)$.
Tornando alla serie di partenza abbiamo che

$$I_s = I_a = \left\{z : \left|-(z-i)^{-3}\right| < 1\right\} = \left\{z : \left|(z-i)^3\right| > 1\right\} = \{z : |(z-i)| > 1\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D_1(i)};$$

gli insiemi di convergenza uniforme invece sono

$$E_r = \left\{z : \left|-(z-i)^{-3}\right| \leq r\right\} = \left\{z : \left|(z-i)^3\right| \geq \frac{1}{r}\right\} = \left\{z : |(z-i)| \geq \frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right\}$$

al variare di $r \in (0,1)$. Possiamo quindi riscrivere la famiglia di insiemi su cui la serie converge uniformemente ponendo $\rho = \frac{1}{\sqrt[3]{r}}$ nella forma

$$\tilde{E}_\rho = \{z : |(z-i)| \geq \rho\} = \mathbb{C} \setminus D_\rho(i) \quad \forall \rho > 1.$$

L'insieme E è il complementare del disco aperto centrato nell'origine e di raggio 3 ed è contenuto in $\tilde{E}_\rho$ se $\rho < 2$. Scegliendo $\rho \in (1,2)$, garantiamo sia la convergenza uniforme in $\tilde{E}_\rho$ sia che $E \subset \tilde{E}_\rho$. Quindi possiamo concludere che la serie converge uniformemente in E.

3.2. **Funzioni trascendenti in $\mathbb{C}$.** Attraverso le serie di potenze è possibile definire alcune funzioni in campo complesso. Iniziamo considerando la *serie esponenziale*, ovvero la serie di potenze centrata in $z_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(dove ricordiamo che $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$); tale serie converge assolutamente in ogni punto del piano complesso, infatti

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad R = +\infty.$$

La funzione somma della serie è quindi definita su tutto il piano complesso e si chiama *funzione esponenziale in campo complesso*

$$e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

In particolare si ha

$$e^0 = 1,$$

Proprietà 3.8 (Della funzione esponenziale)**.** *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha $e^z e^w = e^{z+w}$.*

Per dimostrare questa proprietà della funzione esponenziale complessa è necessario introdurre una definizione di prodotto tra serie numeriche.

Definizione 3.9. *Date due serie numeriche in $\mathbb{C}$, $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, si chiama* serie prodotto secondo Cauchy *la serie $\sum_n c_n$ dove*

$$c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ \ldots \textit{ ovvero } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questa nozione di prodotto vale della seguente proprietà, fondamentale per la dimostrazione della Proprietà 3.8.

Proprietà 3.10 (Della serie prodotto secondo Cauchy)**.** *Date due serie numeriche in $\mathbb{C}$, $\sum_n a_n$ convergente assolutamente e $\sum_n b_n$ convergente, allora la loro serie prodotto secondo Cauchy $\sum_n c_n$ è convergente al prodotto AB dove $A = \sum_n a_n$ e $B = \sum_n b_n$.Se entrambe le serie di partenza convergono assolutamente allora anche la serie prodotto converge assolitamente.*

Dim. della Proprietà 3.8. Fissati $z, w \in \mathbb{C}$, consideriamo le due serie assolutamente convergenti

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{e} \quad e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!};$$

e definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n := \frac{z^n}{n!} \quad \text{e} \quad b_n := \frac{w^n}{n!}.$$

Allora, grazie alla Proprietà 3.10, abbiamo

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right)$$

dove $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Ricordando lo sviluppo del binomio di Newton

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} z^k w^{n-k}$$

otteniamo

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}.$$

□

A partire dalla funzione esponenziale possiamo definire le funzioni iperboliche e le funzioni trigonometriche in campo complesso:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

tutte definite per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Osservazione 3.11. *Dalle definizioni di* $\cos z$ *e* $\sin z$ *segue la* Formula di Eulero

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Funzioni trigonometriche ed iperboliche sono esprimibili come serie di potenze a partire dalla serie esponenziale; per il coseno iperbolico ad esempio otteniamo

$$\cosh z := \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

e con procedimenti analoghi

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Osservazione 3.12. *Quando* $z \in \mathbb{R}$ *le funzioni definite coincidono con quelle ben note in* $\mathbb{R}$*; in particolare dalla serie esponenziale otteniamo il* Numero di Nepero

$$e := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

4. Serie di potenze in campo reale

In perfetta analogia con quanto visto in campo complesso, una *serie di potenze in* $\mathbb{R}$ è una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove x_0 è il *centro* della serie e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, gli $a_n \in \mathbb{R}$ sono i suoi *coefficienti*. La sua ridotta n-esima è

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

ovvero un polinomio di grado n in $\mathbb{R}$. Il Teorema 3.2 garantisce l'esistenza di $R \in [0, +\infty]$ tale che

- $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I_a \subseteq I_s \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$,
- la serie converge uniformemente in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $r \in (0, R)$.

In particolare se $R = +\infty$ allora la serie converge assolutamente (e puntualmente) in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ e uniformemente in ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Se invece $R < +\infty$ il comportamento nel punti $x_0 \pm R$ deve essere studiato di volta in volta e influenza gli intervalli di convergenza uniforme nel modo seguente.

Criterio di Abel (per la convergenza uniforme di serie di potenze in $\mathbb{R}$). *Data la serie di potenze reale $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ con $R \in (0, +\infty)$ allora*

(i) *se converge (semplicemente) in $x_0 - R$ ma non in $x_0 + R$ allora la serie converge uniformemente in $[x_0 - R, x_0 + r]$ per ogni $r \in [0, R)$;*

(ii) *se converge (semplicemente) in $x_0 + R$ ma non in $x_0 - R$ allora la serie converge uniformemente in $[x_0 - r, x_0 + R]$ per ogni $r \in [0, R)$;*

(iii) *se converge (semplicemente) in $x_0 \pm R$ la serie converge uniformemente in $[x_0 - R, x_0 + R]$.*

Si noti che non è necessaria la convergenza assoluta per arrivare alla convergenza uniforme fino agli estremi; quindi ci si riconduce a studiare la convergenza delle serie numeriche $\sum_n a_n R^n$ e $\sum_n a_n(-R)^n$.

Esempio 4.1. *Riportiamo in campo reale quanto visto nell'Esempio 3.7. La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

è centrata in 0 e ha raggio di convergenza $R = 1$. Inoltre

- $\alpha \le 0$. *$I_s = I_a = (-1, 1)$ e si ha convergenza uniforme in $[-r, r]$ per ogni $r \in (0, 1)$. Sappiamo inoltre che*
$$\text{se } \alpha = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in (-1, 1).$$
- $\alpha \in (0, 1]$. *$I_s = I_a = [-1, 1)$ e si ha convergenza uniforme in $[-1, r]$ per ogni $r \in [0, 1)$. In particolare*
$$\text{se } \alpha = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x), \ \forall x \in [-1, 1).$$
Se $x \in (-1, 1)$, tale uguaglianza è un'applicazione del Teorema 2.5 di integrazione per serie, infatti fissato $[a, b] \subset (-1, 1)$ vale che
$$\int_a^b \frac{dx}{1-x} = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b^n}{n} - \frac{a^n}{n} \right)$$
ed essendo
$$\int_a^b \frac{dx}{1-x} = -\log(1-b) + \log(1-a)$$
otteniamo
$$\log(1-b) + \log(1-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} - \frac{b^n}{n} \right).$$
Scegliendo ora $[a, b] = [0, x]$ se $x \in (0, 1)$ oppure $[a, b] = [x, 0]$ se $x \in (-1, 0)$ otteniamo che l'identità vale per ogni $x \in (-1, 1)$.
Che valga anche in $x = -1$ si può ottenere così: abbiamo già osservato che per il criterio di Abel si ha convergenza uniforme in $[-1, 0]$. Pertanto possiamo applicare il teorema 2.5 di integrazione per serie con $[a, b] = [-1, 0]$ ed otteniamo l'uguaglianza anche in $x = -1$.
- $\alpha > 1$. *$I_s = I_a = [-1, 1]$ e si ha convergenza uniforme in $[-1, 1]$.*

4.1. **Esercizi sulle serie di potenze in $\mathbb{R}$.** Vediamo ora come si determina lo sviluppo in serie di potenze di una funzione razionale che ammette una decomposizione in fratti semplici di grado 1. Consideriamo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{c_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{c_k}{x - x_k}$$

con P, Q, P_0 polinomi, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ e $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ (zeri del polinomio Q). Dalla formula $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ricaviamo che

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n, \quad \forall x \in (-a, a).$$

Applicando quindi quest'ultima formula a ciascuno dei termini $\frac{c_i}{x-x_i}$, $i = 1, \ldots, k$ e sommando termine a termine le serie ottenute, possiamo ottenere lo sviluppo della funzione f.

Esercizio 4.1. *Scrivere lo sviluppo in serie di potenze centrata in $x = 0$ della funzione*

$$f(x) = \frac{x-1}{2x^2 + 3x - 2};$$

determinarne gli insiemi di convergenza semplice, assoluta e uniforme.

Gli zeri del denominatore $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$ sono $\frac{1}{2}$ e -2. Quindi

$$Q(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2)$$

e si trova facilmente la scomposizione in fratti semplici per la funzione f

$$f(x) = -\frac{1}{10}\frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{3}{5}\frac{1}{x+2}.$$

A questo punto abbiamo

$$\frac{1}{x-\frac{1}{2}} = -2\,\frac{1}{1-2x} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = -2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, x^n, \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}, \quad \forall x \in (-2, 2)$$

e quindi

$$f(x) = -\frac{1}{10}\left(-2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, x^n\right) + \frac{3}{5}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}\left(2^n + \frac{3\,(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n, \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Notiamo come l'insieme di convergenza sia l'intersezione tra i due insiemi di convergenza dei fratti semplici. In particolare il raggio è il minimo tra i due raggi, ovvero $R = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.2. *Determinare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, quindi studiare la convergenza uniforme della serie di potenze reale*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n^4 + n} - n^2\right)x^n.$$

Dedurre gli insiemi di convergenza semplice e assoluta e la convergenza uniforme per la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n^4 + n} - n^2\right)2^{nx}.$$

La prima serie è una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$. Chiamiamo $a_n = \sqrt{n^4+n} - n^2$ e notiamo che

$$a_n = \frac{n}{\left(\sqrt{n^4+n}+n^2\right)} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\left(\sqrt{1+1/n^3}+1\right)}.$$

Quindi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}\,\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^3}}+1} \to 1,\ n\to\infty \qquad \Longrightarrow \qquad R=1.$$

Studiamo quindi il comportamento nei punti del bordo del disco di convergenza $(-1,1)$.
In $x = 1$ otteniamo la serie $\sum_n a_n$; essendo $a_n \sim \frac{1}{2n}$ per $n\to\infty$, se serie non converge puntualmente.
In $x = -1$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n;$$

osserviamo che $a_n \geq 0$ e $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n. La prima disuguaglianza segue immediatamente dal fatto che $\sqrt{n^4+n} \geq n^2$ la seconda invece si ottiene studiando il segno della derivata prima della funzione $g(x) = \sqrt{x^4+x} - x^2$ ($g'(x) < 0$ per ogni $x > 1/2$). Possiamo quindi applicare il criterio di Leibniz ed ottenere la convergenza semplice della serie di potenze in $x = -1$. La serie non converge assolutamente in $x = -1$.
Conclusione: $I_s = [-1,1)$, $I_a = (-1,1)$ e si ha convergenza uniforme negli intervalli $[-1,r)$ per ogni $r \in (-1,1)$.
Studiamo ora la seconda serie ponendo $t = 2^x$. Otteniamo immediatamente

$$I_s = \{t\in\mathbb{R}\colon t\in[-1,1)\} = \{x\in\mathbb{R}\colon 2^x\in[-1,1)\} = (-\infty,0),$$
$$I_a = \{t\in\mathbb{R}\colon t\in(-1,1)\} = \{x\in\mathbb{R}\colon 2^x\in(-1,1)\} = (-\infty,0)$$

si ha convergenza uniforme in $(-\infty,r]$, $r<0$.

Esercizio 4.3. *Scrivere lo sviluppo in serie di potenze centrata in $x_0 = -1$ della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x}$$

e determinare l'intervallo di convergenza della serie trovata.

Prima di svolgere l'esercizio osserviamo che la funzione f è singolare nell'origine: non è quindi possibile sviluppare f in serie di potenze centrate in 0. Effettivamente

$$f(x) = -\frac{1}{x}\,\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n = -\sum_{n=0}^{\infty}x^{n-1} = -\sum_{k=-1}^{\infty}x^k.$$

ovvero la funzione f non è scrivibile come serie di potenze in quanto compare il termine $\frac{1}{x}$, corrispondente all'indice $k=-1$.

Scriviamo ora la funzione f come serie di potenze centrata in -1. Per farlo può essere comodo fare un cambiamento di variabili, ovvero porre $t = x+1$ per sviluppare in $t_0 = 0$ la funzione

$$g(t) = f(t-1) = \frac{1}{(t-1)^2-(t-1)}.$$

Riscriviamo quindi g in modo da poter usare $\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n$, per $x\in(-1,1)$; quindi

$$g(t) = \frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{1}{1-t}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n\right)$$

siamo a questo punto di fronte al prodotto di due serie di potenze entrambe centrate in 0, la prima di raggio 1, la seconda di raggio 2. Entrambe le serie quindi convergono assolutamente nell'intervallo comune $(-1,1)$ e possiamo utilizzare la Propriità 3.10 della serie prodotto secondo Cauchy vista a pagina 18 per ottenere

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

con

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} t^k\,\frac{t^{n-k}}{2^{n-k}}=t^n\sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=t^n\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\,t^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Concludiamo quindi che per ogni $t\in(-1,1)$

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)t^n\qquad\Longrightarrow\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x+1)^n,$$

per ogni $x\in(-2,0)$. Si poteva arrivare alla conclusione scomponendo la funzione g in fratti semplici.

Esercizio 4.4. *Sviluppare in serie di potenze centrate in 0 la funzione*

$$f(x)=\frac{1}{(x-a)^2}.$$

Possiamo ancora usare la Proprietà 3.10 della serie prodotto secondo Cauchy, infatti

$$f(x)=\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\,\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n}\right)=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n$$

con

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{a^k}\,\frac{x^{n-k}}{a^{n-k}}=\frac{x^n}{a^n}\sum_{k=0}^{n}1=\frac{x^n}{a^n}(n+1).$$

Quindi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{a^{n+2}}\,x^n,\quad\forall x\in(-|a|,|a|).$$

5. Teoremi di derivazione per successioni e serie di funzioni

Nell'Esercizio 4.4 abbiamo visto che

$$\frac{1}{(x-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\quad\forall x\in(-1,1).$$

Osservando che

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n,$$

viene naturale porsi queste domande:

(1) se $s(x)=\sum_n a_n x^n$ su $(-R,R)$, è vero che s è derivabile e $s'(x)=\sum_n(n+1)a_{n+1}x^n$?
(2) se vale (1), possiamo procedere con le derivate successive, ottenendo ad esempio $s''(x)=\sum_n(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$, $s'''(x)=\sum_n(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}x^n,\ldots$?

Più in generale, ci proponiamo di affrontare il seguente problema:
data una successione di funzioni $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ tale che

- f_n *derivabile su* I *per ogni* n
- *la serie* $\sum_n f_n(x)$ *converge semplicemente in* I *alla funzione somma* $s(x)$

sotto quali condizioni s *risulta derivabile e* $s'(x) = \sum_n f_n'(x)$*?*

Ricordando che le serie di funzioni sono definite come successioni di somme parziali, iniziamo ad esaminare la stessa questione per le successione di funzioni: *quando possiamo scmbiare il limite con la derivazione?*

Teorema 5.1 (di derivazione termine a termine per successioni)**.** *Sia* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo e* $f_n \colon I \to \mathbb{R}$*, di classe* C^1 *in* I *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*. Supponiamo che*

(i) $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in I$*;*
(ii) $f_n' \to g$ *uniformemente in* I*.*

Allora f *è diclasse* C^1 *in* I *e* $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in I$*.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in I$. Per ogni $x \in I$, grazie a (i), vale

$$f(x) - f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)]$$

quindi, grazie alla regolarità delle f_n su I abbiamo

$$f(x) - f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\, ds$$

e, grazie al Teorema 1.10,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(s)\, ds = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds$$

Essendo g continua su I (limite uniforme di funzioni continue, Teorema 1.9), dal Teorema Fondamentale del Calcolo otteniamo la tesi. □

Osservazione 5.2. *Vista la dimostrazione, la condizione (ii) può essere indebolita richiedendo la convergenza uniforme di* f_n' *a* g *solamente sui sottoinsiemi compatti (chiusi e limitati) di* I*.*

Applicando il Teorema precedente alla successione delle ridotte parziali, otteniamo immediatamente il seguente risultato.

Teorema 5.3 (di derivazione termine a termine per serie)**.** *Sia* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo e* $f_n \colon I \to \mathbb{R}$*, di classe* C^1 *in* I *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*. Supponiamo che*

(i) $\sum_n f_n(x) = s(x)$*, semplicemente per ogni* $x \in I$*;*
(ii) $\sum_n f_n'(x)$ *converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di* I*.*

Allora s *è di classe* C^1 *in* I *e* $s'(x) = \sum_n f_n'(x)$, $\forall x \in I$*.*

Corollario 5.4 (Applicazione alle serie di potenze)**.** *Data una serie di potenze in campo reale* $\sum_n a_n(x - x_0)^n$ *con raggio di convergenza* $R > 0$*, sia* $s(x)$ *la sua somma, definita su* $I = (x_0 - R, x_0 + R)$*. Allora* s *è di classe* C^1 *e*

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n.$$

Inoltre s *è di classe* C^k *e*

$$s^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} (x - x_0)^n$$

e in particolare

$$s^{(k)}(x_0) = k! a_k.$$

Dimostrazione. Si applica il Teorema 5.3 alla serie di funzioni con termine n-esimo $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, di classe C^1 in I. La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

ha centro x_0 e coefficienti $\tilde{a}_n = (n+1)a_{n+1}$. Il suo raggio di convergenza è $\tilde{R}$ e supponiamo si possa calcolare attraverso il limite (non è certo che questo limite esista, si deve eventialmente utilizzare la formula di Hadamard)

$$\tilde{R}^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\tilde{a}_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}$$

Essendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)} \right)^{\frac{n+1}{n}} = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} = R^-1$$

deduciamo che $\tilde{R} = R$. Quindi anche la serie delle derivate $\sum_n f'_n(x)$ ha raggio R e converge uniformemente in tutti i compatti di I. Grazie al Teorema concludiamo la prima tesi.
Ripetiamo ora il ragionamento, partendo però dalla serie avente come termine n-esimo la funzione $g_n(x) = \tilde{a}_n(x - x_0)^n$. Deduciamo quindi che $s'(x)$ è a sua volta di classe C^1, quinsdi $s(x)$ è di classe C^2 e che vale lo sviluppo in serie richiesto per la funzione $s''(x)$. Si conclude la dimostrazione procedendo per induzione. Dall'espressione di $s^{(k)}(x)$ si calcola immediatamente $s^{(k)}(x_0)$. □

Esempio 5.5. *Verifichiamo che la funzione somma della serie di potenze reale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

soddisfa il problema di Cauchy

$$s'(x) = s(x), \quad s(0) = 1.$$

Abbiamo $a_n = \frac{1}{n!}$ *e* $x_0 = 0$. *Abbiamo già visto a pagina 18 che la serie converge (assolutamente) su tutta la retta reale e uniformemente su tutti i compatti di* $\mathbb{R}$. *Il Corollario 5.4 ci permette di dire che*

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = s(x)$$

La condizione iniziale è verificata banalmente.

Esempio 5.6. *La serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+3}$$

risulta convergente in $\mathbb{R}$ *ad una funzione somma* $s(x)$. *Calcolare* $s^{(7)}(0)$ *e* $s^{(8)}(0)$.

Il Corollario 5.4 ci dice che

$$s^{(7)}(0) = 7! a_7 \quad e \quad s^{(8)}(0) = 8! a_8$$

Determiniamo quindi a_7 *e* a_8. *Il coefficiente corrispondente a* x^7 *lo otteniamo quando* $n = 2$; *in questo caso* $a_7 = \frac{1}{5!}$ *quindi* $s^{(7)}(0) = \frac{7!}{5!} = 42$. *Nella serie invece non compare* x^8 *(non ci sono potenze pari) quindi deduciamo che* $s^{(8)}(0) = a_8 = 0$.

6. Funzioni analitiche

Ci poniamo il seguente problema: *data una funzione $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e fissato un punto $x_0 \in I$, quando possiamo esprimere f come serie di potenze centrata in x_0?*
La questione è interessante per almeno due motivi: a livello computazionale è certamente utile poter approssimare una funzione con un polinomio di ordine alto a piacere, possibilmente potendo stimare l'errore che si commette nella stima. Secondo, nel tentativo di risolvere alcune equazioni differenziali di cui non si conosce una formula risolutiva, può essere utile poter scrivere la soluzione come serie al fine di poter calcolare una soluzione approssimata.

Definizione 6.1. *Una funzione $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* analitica in $x_0 \in I$ *o* sviluppabile in serie di potenze intorno a x_0 *se*

$$\exists \delta > 0,\, \exists (a_n)_n \subset \mathbb{R} \ :\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ \forall x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I.$$

La serie in cui f è sviluppabile viene detta serie di Taylor di f in x_0*; quando $x_0 = 0$ viene invece chiamata* serie di McLaurin.

Ad esempio le seguenti funzioni sono analitiche nei puntti indicati

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x_0 = 0,\ I_\delta = \mathbb{R},$$

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ x_0 = 0,\ I_\delta = (-1,1),$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,\ x_0 = 0,\ I_\delta = (-1,1).$$

Le funzioni razionali invece sono analitiche in ogni punto del loro dominio.
Supponiamo ora che $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia analitica in $x_0 \in I$ e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ \forall x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

per qualche $\delta > 0$. Il Corollario 5.4 ci garantisce che f è di classe C^∞ in I_δ e che $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = a_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Abbiamo quindi la seguente condizione.

Condizione necessaria per l'analiticità. *Se $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è analitica in $x_0 \in I$ allora f è di classe C^∞ in I_δ e $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, ovvero la serie di potenze in cui f è sviluppabile è*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in I_\delta.$$

L'essere di classe C^∞ non è condizione sufficiente per l'analiticità, come mostra il seguente esempio.

Esempio 6.2. *La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$: lo è infatti quando $x \neq 0$ in quanto composizione di funzioni elementari; in $x = 0$ è possibile calcolare tutte le sue derivate attraverso la definizione ottenendo $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ogni $f^{(n)}$ risulta inoltre continua su tutto $\mathbb{R}$. La funzione f non è però analitica in $x_0 = 0$, infatti se lo fosse dovrebbe verificare*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

per qualche $\delta > 0$*, ovvero, essendo* $f^{(n)}(0) = 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, dovrebbe essere* $f(x) = 0$*,* $\forall x \in (-\delta, \delta)$*. Questo contraddice la definizione della funzione* f*.*

Affinchè una funzione di classe C^∞ sia anche analitica è necessario un controllo su tutte le derivate in un intorno del punto x_0 (e non nel solo punto x_0), come esprime il seguente risultato.

Teorema 6.3 (Condizione sufficiente per l'analiticità)**.** *Siano* $\delta > 0$ *e* $f\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$*. Se*

(i) f *è di classe* C^∞ *su* $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*;*

(ii) *esiste* $C > 0$ *tale che* $\left|\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leq \dfrac{C}{\delta^n}$ *per ogni* $x \in I_\delta$ *e* $n \in \mathbb{N}$

allora f *è analitica in* x_0 *e* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ *per ogni* $x \in I_\delta$*.*

Osservazione 6.4. *La condizione* (ii) *del Teorema 6.3 è soddisfatta se esiste una costante* $C > 0$ *tale che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \quad \forall x \in I_\delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti in questo caso si ha

$$\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leq \frac{C}{n!} = \frac{C}{\delta^n}\frac{\delta^n}{n!} \quad \forall x \in I_\delta \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ed essendo $\frac{\delta^n}{n!} \to 0$ *se* $n \to \infty$*, esiste una seconda costante* $C_1 > 0$ *tale che* $\frac{\delta^n}{n!} \leq C_1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*. Quindi*

$$\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leq \frac{\tilde{C}}{\delta^n} \quad \forall x \in I_\delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $\tilde{C} = C \cdot C_1$ *indipendente da* n *e da* x*.*

Grazie all'osservazione precedente deduciamo che le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ sono analitiche in $x = 0$. Il loro sviluppo è facilmente deducibile applicando il Teorema 6.3, ovvero

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Gli sviluppi di McLaurin che abbiamo ottenuto hanno la stessa successione di coefficienti delle serie di potenze in $\mathbb{C}$ calcolati nell'Osservazione 3.11. Quindi le funzioni in $\mathbb{C}$ ristrette ad $\mathbb{R}$ (fortunatamente) coincidono con le funzioni di variabile reale.

Dimostrazione del Teorema 6.3. Grazie all'ipotesi (i), la funzione f è di classe C^∞, possiamo quindi considerare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il polinomio di Taylor di f di grado n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Vogliamo dimostrare che, grazie all'ipotesi (ii) vale

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I_\delta.$$

Grazie alla stima del resto di Lagrange sappiamo che, fissato $x \in I_\delta$,

$$\exists \xi = \xi(n,x) \in [x_0, x] \text{ (o } [x, x_0] \text{ se } x < x_0) \ : \ f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

quindi, per (ii),

$$|f(x) - p_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \le \frac{C}{\delta^{n+1}}|x-x_0|^{n+1} = C \left| \frac{x-x_0}{\delta} \right|^{n+1}$$

Siccome $|x - x_0| < \delta$, allora $\left|\frac{x-x_0}{\delta}\right| < 1$ e $\left|\frac{x-x_0}{\delta}\right|^{n+1} \to 0$ se $n \to \infty$; concludiamo quindi che

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - p_n(x)| = 0 \quad \forall x \in I_\delta.$$

□

Esempio 6.5 (Sulla risoluzione delle equazioni differenziali attraverso le serie di potenze)**.** *Sono molte le equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee (a coefficienti non costanti) provenienti da problemi di fisica; tra queste citiamo*

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \alpha^2)y(x) = 0 &\qquad \textit{Equazione di Bessel} \\ xy''(x) + (1-x)y'(x) + \alpha y(x) = 0 &\qquad \textit{Equazione di Laguerre} \\ (1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \alpha(\alpha+1)y(x) = 0 &\qquad \textit{Equazione di Legendre} \\ y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 0 &\qquad \textit{Equazione di Hermite} \end{aligned}$$

dove α è un parametro reale. Come è noto, l'insieme delle loro soluzioni è isomorfo allo spazio euclideo bidimensionale e una strategia per determinarle consiste nel Metodo di Frobenius-Fuchs *che propone di cercarle in forma di serie di potenze.*

Vediamo un'esempio di questa procedura per risolvere per serie l'equazione di Bessel con α intero e positivo. Cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}.$$

Abbiamo, almeno formalmente,

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha) a_k x^{k+\alpha-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1) a_k x^{k+\alpha-2},$$

quindi sostituendo nell'equazione

$$\begin{aligned} 0 &= x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2-\alpha^2)y(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)a_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)a_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha+2} - \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}. \end{aligned}$$

Eguagliansdo a zero il coefficiente di ogni potenza otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)a_0 + \alpha a_0 - \alpha^2 a_0 = 0 \\ \alpha(\alpha+1)a_1 + (\alpha+1)a_1 - \alpha^2 a_1 = 0 \\ (k+\alpha+1)(k+\alpha+2)a_{k+2} + (k+\alpha+2)a_{k+2} + a_k - \alpha^2 a_{k+2} = 0, \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

La prima equazione non vincola la scelta di a_0, dalla seconda invece segue che $a_1 = 0$, e dalla terza

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(2\alpha+k+2)}, \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Deduciamo quindi che $a_k = 0$ se k è dispari e

$$a_{2n} = -\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(n+\alpha)!}, \qquad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Scegliendo in particolare $a_0 = 2^{-\alpha}$ troviamo la *funzione di Bessel di ordine* α che è soluzione dell'equazione di Bessel su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$)

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}.$$

7. Esercizi di riepilogo

Esercizio 7.1. *Scrivere lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

precisandone l'intervallo di convergenza.
Dedurre lo sviluppo in serie di McLaurin di $g(x) = \arctan x$. *Verificare che tale serie converge uniformemente in* $[-1, 1]$. *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Possiamo, attraverso il cambiamento di variabili $t = -x^2$, trasformare f nella funzione $h(t) = (1-t)^{-1}$ sviluppabile in serie di potenze in $(-1, 1)$ e convergente uniformemnte negli intervalli $[-r, r]$, per ogni $r \in (0, 1)$. Otteniamo in questo modo

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \ \forall t \in (-1,1) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ \forall x \in (-1,1).$$

Osserviamo che anche la serie di McLaurin di f converge uniformemente negli intervalli $[-r, r]$, per ogni $r \in (0, 1)$; si ha inoltre convergenza in ogni compatto di $(-1, 1)$.
Per determinare lo sviluppo di $g(x) = \arctan x$ sfruttiamo le seguenti uguaglianze valide per ogni $x \in (-1, 1)$

$$g(x) = \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt.$$

Per quanto visto $\sum_n (-1)^n t^{2n}\, dt$ converge uniformemente in $[0, x]$ per ogni $x \in (-1, 1)$; possiamo quindi applicare il Teorema 2.5 ottenendo

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

L'insieme di convergenza di $\sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ può essere più grande di $(-1, 1)$: il raggio di convergenza di questa serie è infatti ancora $R = 1$, e si potrebbe avere convergenza in $x = \pm 1$. Effettivamente se $x = \pm 1$ otteniamo rispettivamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

entrambe convergenti per il Criterio di Leibniz ($a_n = 1/(2n+1)$ è positivo, infinitesimo e decrescente, al crescere di n). Concludiamo quindi che, per il criterio di Abel, la convergenza alla funzione somma

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in [-1,1],$$

è uniforme su tutto $[-1,1]$; s è quindi continua su questo intervallo. Inoltre $s(x) = \arctan x$ per ogni $x \in (-1,1)$, quindi

$$s(1) = \lim_{x\to 1} s(x) = \lim_{x\to 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Possiamo determinare il valore della somma richiesto

$$\frac{\pi}{4} = s(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Questa formula prende il nome di *Formula di Leibniz.*

Esercizio 7.2. *Trovare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, quindi studiare la convergenza uniforme della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}.$$

Trovare la funzione somma.

Proviamo a ricondurre la serie data ad una serie di potenze nota. Il denominatore e la presenza del termine oscillante suggeriscono di ispirarsi a quanto visto nell'Esempio 4.1, ovvero alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\log(1-t) \quad \forall t \in [-1,1);$$

la convergenza è assoluta in $(-1,1)$, inoltre per il Criterio di Abel si ha convergenza uniforme sugli intervalli $[-1,r)$ per ogni $r \in (-1,1)$.

Tornando alla serie di partenza abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n} \text{ per ogni } x \text{ tale che } -x^2 \in [-1,1)$$

ovvero per ogni $x \in [-1,1]$. Abbiamo quindi $I_s = [-1,1]$. La convergenza assoluta invece si ha solamente quando $-x^2 \in (-1,1)$, ovvero per $x \in (-1,1)$; la serie converge uniformemente quando $-x^2 \in [-1,r)$, $r \in (-1,1)$, ovvero per $x \in [-1,1]$.
Da questo esercizio si evinge che la convergenza assoluta non segue da quella uniforme.

Esercizio 7.3. *Scrivere lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione*

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$$

precisandone l'intervallo di convergenza.
Scrivere quindi lo sviluppo di McLaurin di $f'(x)$ e determinarne l'intervallo di convergenza.

Scriviamo la funzione f come somma di funzioni razionali con denominatore di primo grado al fine di sfruttare lo svilupo della serie geometrica visto negli Esempi 3.7 e 4.1 e seguire il procedimento dell'Esercizio 4.1. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{x}{3}+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{x}{2}+1} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n .
\end{aligned}
$$

La prima serie ha raggio di convergenza 3, la seconda invece ha raggio 2 pssiamo quindi asserire che per ogni $x \in (-2, 2)$ abbiamo

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n .
$$

Usiamo ora il Corollario 5.4 per determinare lo sviluppo di f', che avrà come intervallo di convergenza ancora $(-2, 2)$; abbiamo

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left\{(-1)^n \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] n\, x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] n\, x^{n-1};
\end{aligned}
$$

cambiando ora l'indice di somma ($k = n - 1$ e quindi tornando allindice n) otteniamo

$$
f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\left[\frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+2}}\right] x^n .
$$

Esercizio 7.4. *Trovare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, quindi studiare la convergenza uniforme della serie di potenze in campo complesso*

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2i)^n}{n^2+in}(z-1)^n .
$$

Stabilire se la serie converge in $\bar{z} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Iniziamo col determinare il raggio di convergenza per la serie di potenze che risulta essere centrata in $z_0 = 1$ e avere termine $a_n = \frac{(1-2i)^n}{n^2+in}$. Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(1-2i)^n}{n^2+in}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|1-2i|^n}}{\sqrt[n]{|n^2+in|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[n]{|n^2+in|}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt[n]{n})^2|1+\frac{i}{n}|^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{5},
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato il limite $\sqrt[n]{n} \to 1$ per $n \to \infty$. Deduciamo quindi che il disco di convergenza è

$$
D = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.
$$

Studiamo ora il comportamento della serie sul bordo di D. Prendiamo $z \in \partial D$, ovvero z tale che $|z-1| = \frac{1}{\sqrt{5}}$. La condizione necessaria per la convergenza in z, ovvero che la seguente quantità sia infinitesima per $n \to \infty$

$$
\left|\frac{(1-2i)^n}{n^2+in}\right|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n = \frac{1}{|n^2+in|},
$$

è verificata. Deduciamo quidi che la serie converge asslutamente e semplicemente anche su ∂D. Quindi

$$I_s = I_a = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Per valutare la convergenza nel punto $\bar{z} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ricordiamo la Formula di Eulero

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

e calcoliamo

$$|\bar{z}-1| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{i}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Essendo

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(elevando una prima volta al quadrato otteniamo $2-\sqrt{3} > \frac{1}{5}$, ovvero $\frac{9}{5} > \sqrt{3} \dots$) deduciamo che la serie non è convergente in $\bar{z}$.

Esercizio 7.5. *Usando l'M-test di Weierstrass (2.7) provare che la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3n^4}$$

converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \frac{x}{x^4+3n^4}$. Essendo $n \geq 1$ tutte le f_n sono definite e continue su $\mathbb{R}$. Cerchiamo quindi una successione di numei reali M_n tale che $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e $\sum_n M_n$ sia convergente.
Essendo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_n(x) = 0$$

ed essendo, per ogni n, f_n una funzione dispari, il Teorema di Weierstrass garantisce, per ogni n, l'esistenza di $x_n \geq 0$ tale che

$$\max_{x \in [0,+\infty)} |f_n(x)| = |f_n(x_n)|.$$

La scelta ottimale sarà quindi $M_n = |f_n(x_n)|$. Per determinare x_n studiamo la funzione $f_n(x)$ sulla semiretta $[0,+\infty)$; abbiamo

$$f_n'(x) = \frac{3(n^4 - x^4)}{(x^4+3n^4)^2}$$

da cui deduciamo che $x_n = n$ (è l'unico punto in cui la derivata prima si annulla, quindi è necessariamente il punto di estremo che stiamo cercando). Quindi

$$M_n = f_n(n) = \frac{1}{4n^3}$$

ed essendo $\sum_n \frac{1}{4n^3} < +\infty$ possiamo applicare l'M-test e dedurre la convergenza uniforme della serie su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.6. *Determinare gli insiemi di convergenza semplice e assoluta, quindi studiare la convergenza uniforme della serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{|x|^n} - 1 \right).$$

Si tratta di una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ con $f_n(x) = \left(e^{|x|^n} - 1\right)$, definite e continue per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'esercizio non suggerisce una strategia di risoluzione e non si tratta di una serie di potenze. Iniziamo quindi a studiare la convergenza semplice/assoluta controllando in quale insieme è verificata la condizione necessaria per la convergenza. Fissiamo quindi $x \in \mathbb{R}$ e richiediamo che

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(e^{|x|^n} - 1\right)$$

ovvero che $\lim_{n\to\infty} e^{|x|^n} = 1$, ovvero $\lim_{n\to\infty} |x|^n = 0$. Questo limite è nullo se e solo se $x \in (-1, 1)$. Quindi $I_s \subseteq (-1, 1)$.
Osserviamo ora che se $x \in (-1, 1)$ allora $|x|^n \to 0$ se $n \to \infty$ e quindi, sapendo che $(e^t - 1) \sim t$ per $t \to 0$, otteniamo $\left(e^{|x|^n} - 1\right) \sim |x|^n$ se $n \to \infty$. Essendo $\sum_n |x|^n$ convergente per ogni $x \in (-1, 1)$, il Criterio del confronto per serie numeriche a termini positivi garantisce la convergenza semplice e assoluta per tutti e soli i punti dell'intervallo $(-1, 1)$. Quindi

$$I_a = I_s = (-1, 1).$$

Passiamo ora alla convergenza uniforme. Certamente la serie non converge uniformemente su tutto $(-1, 1)$, altrimenti, essendo le f_n continue su $[-1, 1]$, il Teorema 2.12, garantirebbe la convergenza uniforme e quindi semplice su tutto $[-1, 1]$, in contraddizione con quando dimostrato. Prendiamo quindi un qualsiasi $r \in (0, 1)$ e studiamo la convergenza uniforme in $[-r, r]$. Essendo $|x|^n \le r^n$ abbiamo $e^{|x|^n} \le e^{r^n}$ e quindi $f_n(x) \le f_n(r)$ per ogni n e per ogni $x \in [-r, r]$. A questo punto possiamo applicare il test di Weierstrass con $M_n = f_n(r)$, infatti, come sopra $\left(e^{r^n} - 1\right) \sim r^n$ se $n \to \infty$ e $\sum_n r^n$ è convergente.