Corso di Studio in Fisica

Tutorato di Analisi III

Superfici, integrali di superficie, flussi di campi, teoremi di Stokes e della divergenza

Esercizio 1. Sia S la superficie parametrica definita da

$$\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, hu)\,, \qquad (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,R]$$

($R > 0$, $h \in \mathbb{R}$ costanti fissate). Si provi che, per $h \neq 0$, S è una superficie regolare e semplice.

Esercizio 2. Si calcoli l'area della superficie parametrica S con parametrizzazione $\varphi(u,v) = (u-v, uv, u+v)$ e dominio di parametri $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \le 1,\ u \le 0 \le v\}$.

Esercizio 3. Si calcoli l'area della fascia sferica $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ 0 \le 2z \le 1\}$.

Esercizio 4. Si calcoli l'area della superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 = 1\,,\ 0 \le z \le y\}$.

Esercizio 5. Si calcoli l'integrale di superficie del campo scalare f sulla superficie S nei seguenti casi:

(i) $f(x,y,z) = z$, $S = \{(u\cos v, u\sin v, u) \mid (u,v) \in [1,2]\times[0,2\pi]\}$ (tronco di cono).

(ii) $f(x,y,z) = x^2+y^2$, $S =$ porzione di grafico della funzione $z = xy$ che si trova all'interno del cilindro di equazione $x^2+y^2 = 8$.

Esercizio 6. Si calcoli il flusso del rotore del campo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ attraverso la superficie S sia direttamente (cioè calcolando il rotore e usando la definizione di flusso) sia mediante il teorema di Stokes (cioè calcolando un integrale curvilineo) nei casi seguenti:

(i) $F(x,y,z) = \left(z, y, \frac{x^2}{2} + y\right)$,

S superficie cartesiana di equazione $z = x^2$, sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

(ii) $F(x,y,z) = \left(y+y^2, 1, 1\right)$,

S superficie cartesiana di equazione $z = x^2+y^2$ sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1\}$.

(iii) $F(x,y,z) = (xy, 0, 1)$,

S superficie cartesiana di equazione $z = \cos(x+y)$ sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0, x+y \le \pi/2\}$.

(iv) $F(x,y,z) = (yz, -xz, 0)$,

$S =$ porzione di superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ compresa tra i piani $z = 1$ e $z = 2$.

(v) $F(x,y,z) = (y,z,x)$,

$S =$ porzione di superficie cilindrica parametrizzata da $\varphi(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ con dominio di parametri $D = \{(\theta,z) \mid |\theta| \le \pi,\ 0 \le z \le 2+\cos\theta\}$.

Inoltre nei casi (iv) e (v), si chiede di calcolare il flusso uscente rispettivamente dalla superficie conica e cilindrica.

Esercizio 7. Siano S_1 l'emisfero superiore della sfera unitaria centrata nell'origine orientato con normale entrante e S_2 la superficie laterale del cono con base $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$ e vertice $v = (0, 0, 1)$, orientata con normale diretta verso l'interno del cono. Calcolare i flussi del rotore del campo vettoriale $F(x, y, z) = (2xy, yz^2, y^2 z)$ attraverso S_1 e attraverso S_2. Stabilire se e, in caso affermativo, perché è possibile dedurre il valore di un flusso dall'altro senza svolgere alcun conto.

Esercizio 8. Dato il campo vettoriale $\bar{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\bar{F}(x, y, z) = (e^x - y^3, e^y + x^3, e^z)$ si calcoli

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s}, \quad \text{dove } \bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, \sin(2t)),\ t \in [0, 2\pi],$$

osservando che il sostegno di $\bar{\gamma}$ giace sul sostegno della superficie cartesiana di equazione $z = 2xy$ e usando il teorema di Stokes.

Esercizio 9. Per ogni punto $v \in \mathbb{R}^3$ sia S_v la superficie laterale del cono di vertice v e base data dal disco unitario giacente sul piano $z = 0$. Tale superficie si può parametrizzare con

$$\varphi(t, \theta) = tv + (1 - t) \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (t, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Dato un campo vettoriale $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1, dimostrare mediante il teorema di Stokes che il flusso del rotore di F attraverso S_v non dipende da v.

Esercizio 10. Usando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uscente dal bordo del solido C nei seguenti casi:

(i) $F(x, y, z) = \left(0, 1, \frac{3}{2} z^2 + 1\right)$,
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$.

(ii) $F(x, y, z) = (ye^{x+y}, -xe^{x+y}, xy)$,
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq x \leq 2 - |y|,\ 0 \leq z \leq x + y\}$.

(iii) $F(x, y, z) = \left(xz, -\frac{y^2}{2}, -z^2 + zy\right)$,
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 8,\ 1 \leq z \leq 2\}$.

(iv) $F(x, y, z) = \left(xz, e^{x+z}, z^2\right)$,
$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$.

Esercizio 11. Dato un dominio regolare C di $\mathbb{R}^3$ verificare che l'area di ∂C è il flusso attraverso ∂C del campo dei versori normali e il volume di C è il flusso uscente da C del campo $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$.