CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

PROVA D'ESAME – 30 GIUGNO 2016

TEMA I

Un'asta rettilinea di massa trascurabile può ruotare in un piano verticale, fisso, attorno a un proprio punto O. Un punto materiale A di massa m_A è fisso sull'asta a distanza ℓ da O; un secondo punto materiale B di massa m_B può scorrere liberamente (senza attrito) sull'asta medesima, ed è soggetto ad una forza elastica attrattiva di costante k centrata in O. Su entrambi i punti agisce la forza peso.

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema;
(2) Individuare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità;
(3) Scrivere l'Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton del sistema;
(4) Determinare se si possono avere moti (diversi dalle soluzioni di equilibrio) in cui la distanza del punto B da O resta costante.

SVOLGIMENTO

Detto θ l'angolo che l'asta forma con la direzione verticale, contato a partire dalla posizione in cui A è al di sotto di O, e detta s la posizione del punto B sulla retta individuata dall'asta a partire dal punto O (contando come semiretta positiva quella in cui si trova A), tenendo conto che $|s|$ è anche l'allungamento della molla fra O e B, abbiamo

$$\begin{cases} x_A &= \ell\sin\theta \\ y_A &= -\ell\cos\theta \\ x_B &= s\sin\theta \\ y_B &= -s\cos\theta \end{cases}$$

da cui, con facili calcoli,

$$(1)\quad \begin{aligned} L &= \frac{m_A}{2}\left(\dot{x}_A^2+\dot{y}_A^2\right)+\frac{m_B}{2}\left(\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2\right)-m_Agy_A-m_Bgy_B-\frac{k}{2}s^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_B\dot{s}^2+(m_A\ell^2+m_Bs^2)\dot{\theta}^2\right)+g(m_A\ell+m_Bs)\cos\theta-\frac{k}{2}s^2 \end{aligned}$$

Denotando con $U(s,\theta) = g(m_A\ell + m_B s)\cos\theta - \frac{k}{2}s^2$ il potenziale delle forze attive, le configurazioni di equilibrio si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial s} &= m_B g\cos\theta - ks = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} &= -g(m_A\ell + m_B s)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è soddisfatta se $\sin\theta = 0$ (l'asta è verticale) oppure se $s = -\frac{m_A}{m_B}\ell$ (il baricentro dei due punti si trova in O).
Nel primo caso, dalla prima equazione otteniamo $s = \pm\frac{m_B g}{k}$; nel secondo caso otteniamo invece $\theta = \arccos\left(-\frac{k\ell m_A}{g m_B^2}\right)$. Quest'ultima equazione ammette soluzioni se e solo se $\frac{k\ell m_A}{g m_B^2} \leq 1$ (si noti che tutte le costanti sono positive). In questo caso, denotiamo con θ^* l'angolo compreso fra 0 e π tale che $\cos\theta^* = -\frac{k\ell m_A}{g m_B^2}$.
Si individuano dunque quattro configurazioni di equilibrio:

$$(2) \qquad P_1 \equiv \left(\frac{m_B g}{k}, 0\right), \qquad P_2 \equiv \left(-\frac{m_B g}{k}, \pi\right),$$
$$P_3 \equiv \left(-\frac{m_A\ell}{m_B}, \theta^*\right), \qquad P_4 \equiv \left(-\frac{m_A\ell}{m_B}, -\theta^*\right).$$

Le due configurazioni P_3 e P_4 esistono solo se $\frac{k\ell m_A}{g m_B^2} < 1$ (se $\frac{k\ell m_A}{g m_B^2} = 1$, $P_3 \equiv P_4 \equiv P_2$). Calcolando la matrice Hessiana del potenziale si ottiene

$$\mathrm{Hess} = \begin{pmatrix} -k & -m_B g\sin\theta \\ -m_B g\sin\theta & -g(m_A\ell + m_B s)\cos\theta \end{pmatrix}$$

Nei punti P_1 e P_2 questa diventa, rispettivamente:

$$\mathrm{Hess}_{P_1} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -g(m_A\ell + \frac{m_B^2 g}{k}) \end{pmatrix}, \mathrm{Hess}_{P_2} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & g(m_A\ell - \frac{m_B^2 g}{k}) \end{pmatrix}$$

da cui si legge subito che P_1 è sempre un punto di equilibrio stabile; P_2, invece, è stabile se $\frac{k\ell m_A}{g m_B^2} < 1$ e instabile se $\frac{k\ell m_A}{g m_B^2} > 1$. Questo ha un'interpretazione fisica immediata: nella configurazione P_1, sia A che B sono al di sotto del punto di sospensione O; invece nella configurazione P_2, A è al di sopra di O e B è al di sotto, e la configurazione è stabile se il baricentro dei due punti cade al di sotto del punto di sospensione, instabile se cade al di sopra. Nel caso in cui il baricentro coincide con O, che corrisponde alla condizione $m_A\ell + m_B s$, con $s = -\frac{m_B g}{k}$, da cui $\frac{k\ell m_A}{g m_B^2} = 1$, qualunque spostamento dell'asta determina una diminuzione della componente tangente all'asta della

forza peso che agisce su B, di conseguenza la molla si accorcia e il punto B si avvicina a O; il baricentro si sposta allora al di sopra di O e l'asta ruota allontanandosi dalla configurazione P_2, quindi se $\frac{k\ell m_A}{g m_B^2} = 1$ la configurazione P_2 è instabile. P_2 risulta stabile, invece, quando esistono le altre due configurazioni di equilibrio P_3 e P_4, che sono instabili. Infatti il determinante della matrice hessiana di U è uguale a $kg(m_A\ell + m_B s)\cos\theta - g^2 m_B^2 \sin^2\theta$, e nei punti P_3 e P_4 vale $g^2 m_B^2 \left(\left(\frac{k\ell m_A}{g m_B^2} \right)^2 - 1 \right)$: sotto la condizione di esistenza di P_3 e P_4 è negativo (punto a sella del potenziale).
Per effettuare la trasformazione di Legendre, troviamo innanzitutto

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{s}} & = \quad m_B \dot{s} \\ p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} & = \quad (m_A \ell^2 + m_B s^2)\dot{\theta} \end{cases}$$

Il modo più rapido per ottenere la funzione di Hamilton, in questo caso (poiché $L = T + U$ e la metrica dell'energia cinetica è diagonale), è quello di usare direttamente l'espressione $H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - U$, dove i coefficienti della metrica $g_{\mu\nu}$ e della metrica inversa $g^{\mu\nu}$ sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} m_B & 0 \\ 0 & (m_A \ell^2 + m_B s^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{m_B} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(m_A \ell^2 + m_B s^2)} \end{pmatrix}$$

quindi abbiamo

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{m_B} + \frac{p_2^2}{(m_A \ell^2 + m_B s^2)} \right) - g(m_A \ell + m_B s)\cos\theta + \frac{k}{2} s^2. \tag{3}$$

Le equazioni di Hamilton sono quindi

$$\begin{cases} \dot{s} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} & = \quad \dfrac{p_1^2}{m_B} \\ \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} & = \quad \dfrac{p_2}{(m_A \ell^2 + m_B s^2)} \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial s} & = \quad \dfrac{p_2^2 m_B s}{(m_A \ell^2 + m_B s^2)^2} - ks + g m_B \cos\theta \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} & = \quad -g(m_A \ell + m_B s)\sin\theta \end{cases}$$

Per rispondere all'ultima domanda, consideriamo un'ipotetica soluzione con s costante, $s(t) = s_0$. Per questa soluzione, la prima equazione di Hamilton impone $p_1(t) = 0$, e quindi anche $\dot{p}_1 \equiv 0$. Dalla terza equazione di Hamilton avremmo dunque

$$\frac{p_2^2 m_B s_0}{(m_A\ell^2 + m_B s_0^2)^2} = ks_0 - gm_B\cos\theta;$$

derivando quest'equazione rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{2p_2 m_B s_0}{(m_A\ell^2 + m_B s_0^2)^2}\dot{p}_2 = gm_B\dot{\theta}\sin\theta;$$

sostituendo $\dot{\theta}$ e $\dot{p}_2$, ricavati dalla seconda e dalla quarta equazione di Hamilton, otteniamo

$$\frac{2p_2 m_B s_0 g(m_A\ell + m_B s_0)}{(m_A\ell^2 + m_B s_0^2)^2}\sin\theta = -\frac{gm_B p_2}{(m_A\ell^2 + m_B s_0^2)}\sin\theta;$$

per una soluzione che non sia di equilibrio si avrà in generale $\sin\theta \neq 0$ e $p_2 \neq 0$, quindi semplificando si trova

$$2s_0(m_A\ell + m_B s_0) = -(m_A\ell^2 + m_B s_0^2) \;\Rightarrow\; 3m_B s_0^2 + 2m_A\ell s_0 + m_A\ell^2 = 0;$$

quest'equazione ha soluzioni s_0 reali se $m_A \geq 3m_B$. Da notare che tali soluzioni dipendono solo da m_A e da m_B, non dalla costante elastica k. Tuttavia, queste soluzioni garantiscono che sia $\ddot{p}_1 = 0$, ma non che sia $\dot{p}_1 = 0$. Per annullare la terza equazione di Hamilton, che contiene un termine (costante) dipendente da k, si dovranno scegliere, oltre a $s(0) = s_0$ e $\dot{s}(0) = 0$, valori iniziali (θ_0, p_2^0) tali che

$$\frac{(p_2^0)^2 m_B s_0}{(m_A\ell^2 + m_B s_0^2)^2} - ks_0 + gm_B\cos\theta_0 = 0.$$

Commento: non si deve risolvere il problema posto dal quarto quesito ponendo $s =$ costante nella Lagrangiana e poi calcolando le equazioni di Lagrange come se il sistema avesse un solo grado di libertà! In questo modo non si otterrebbe nessuna equazione che fissi il valore di s_0, e anche le equazioni restanti sarebbero scorrette: infatti, una cosa è imporre una condizione sulla soluzione, altra cosa è aggiungere un vincolo al sistema.

TEMA II

Usando le definizioni e le proprietà fondamentali di coordinate naturali e coordinate canoniche in un fibrato cotangente, di funzionale di azione ed equazione di Hamilton-Jacobi per un'Hamiltoniana data, dimostrare una o più proposizioni fra le seguenti:

(1) Se una trasf. di coordinate $q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu, P_\mu)$, $\quad p_\lambda = p_\lambda(Q^\mu, P_\mu)$ in un fibrato cotangente lascia invariata la 1-forma di Liouville $\theta = p_\lambda dq^\lambda$, allora è necessariamente una trasformazione di coordinate naturali (=trasformazione canonica puntuale).

(2) Se una trasformazione di coordinate *fibrate* $q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu)$, $p_\lambda = p_\lambda(Q^\mu, P_\mu)$ è canonica (ossia lascia invariata la forma simplettica $\omega = dp_\lambda \wedge dq^\lambda$), allora è necessariamente una trasformazione di coordinate naturali.

(3) Sia $S(q^\mu, Q^\mu, t)$ un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi per una hamiltoniana H; su una qualunque curva di moto (soluzione delle equazioni di Hamilton), il valore di $S(q^\mu, Q^\mu, t)$ lungo la curva di moto coincide (a meno di una costante) con il valore del funzionale di azione.

Svolgimento

(1) In generale la 1-forma di Liouville diventa

$$p_\lambda dq^\lambda = p_\lambda(Q^\mu, P_\mu)\left(\frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\alpha} dQ^\alpha + \frac{\partial q^\lambda}{\partial P_\beta} dP_\beta\right)$$

affinché questo sia uguale a $P_\mu dQ^\mu$ deve essere

$$\frac{\partial q^\lambda}{\partial P_\beta} \equiv 0, \qquad P_\alpha = p_\lambda \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\alpha}$$

che è la forma generale di una trasformazione canonica puntuale.

(2) Se si suppone $q^\lambda = q^\lambda(Q^\mu)$, la forma simplettica diventa

$$dp_\lambda \wedge dq^\lambda = \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial Q^\alpha} dQ^\alpha + \frac{\partial p_\lambda}{\partial P_\alpha} dP_\alpha\right) \wedge \frac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} dQ^\beta$$

poiché $\dfrac{\partial q^\lambda}{\partial P_\beta} \equiv 0$ per ipotesi. Affinché quest'espressione sia uguale a $dP_\alpha \wedge dQ^\alpha$ si deve avere:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_\lambda}{\partial Q^\alpha} \dfrac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} - \dfrac{\partial p_\lambda}{\partial Q^\beta} \dfrac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial p_\lambda}{\partial P_\alpha} \dfrac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta} = \delta^\alpha_\beta. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che la matrice $\dfrac{\partial p_\lambda}{\partial P_\alpha}$ deve essere l'inversa di $\dfrac{\partial q^\lambda}{\partial Q^\beta}$, e poiché quest'ultima non dipende da P_μ, la relazione fra P_μ e p_λ deve essere lineare. Si ricava quindi che deve essere

$$p_\alpha = P_\lambda \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\alpha} + f_\alpha,$$

dove le f_α sono le componenti di una qualche 1-forma su Q (ossia f_α dipende solo dalle coordinate Q^λ, o equivalentemente dalle coordinate q^λ).
Se $f_\alpha \equiv 0$, la trasformazione è canonica puntuale (e la forma simplettica è automaticamente conservata).
Se invece $f_\alpha \neq 0$, allora la forma simplettica diventa $(dp_\alpha + df_\alpha) \wedge dq^\alpha$, e si deve imporre $df_\alpha \wedge dq^\alpha = 0$: significa che la forma $f_\alpha dq^\alpha$ deve essere chiusa, ossia (localmente) $f_\alpha = \dfrac{\partial F}{\partial q^\alpha}$ per una qualche funzione F su Q. In conclusione, una trasformazione fibrata che sia anche canonica deve essere una trasformazione naturale a meno di una "trasformazione di gauge":

$$p_\alpha = P_\lambda \frac{\partial Q^\lambda}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha},$$

(3) Per definizione, se S è una soluzione completa dell'equazione di Hamilton-Jacobi si deve avere

$$P_\mu dQ^\mu + dS = p_\mu dq^\mu - H dt.$$

Integrando il *pull-back* della forma di Poincaré-Cartan, a destra dell'uguale, su una qualsiasi curva in $T^*Q \times \mathbb{R}$ fra due punti dati, si ottiene proprio il valore dell'azione; se però la curva è una soluzione delle equazioni di Hamilton, nelle coordinate (Q^μ, P_μ) la sua equazione è $\dot{Q}^\mu = 0$, $\dot{P}_\mu = 0$. Il *pull-back* della forma $P_\mu dQ^\mu$, ossia $P_\mu \dot{Q}^\mu dt$, è quindi nullo, e l'integrale del membro sinistro dell'equazione si riduce all'integrale di dS. Questo si riduce alla differenza fra i valori della funzione S, valutata sulla curva, negli estremi di integrazione. Quindi il valore di S sulla curva coincide con l'integrale d'azione, calcolato a partire da un punto fissato.