CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Prova d'esame – 2 luglio 2014

TEMA I

Due punti materiali di massa m_A e m_B (con $m_A \neq m_B$) si muovono in un piano orizzontale, in assenza di attrito, sotto l'azione di una forza attrattiva il cui potenziale $U(r)$ dipende dalla distanza r fra i due punti. Scrivere la Lagrangiana, individuando un sistema di coordinate in cui tre coordinate sono cicliche. Indicare le costanti del moto e scrivere l'equazione di Weierstrass per l'evoluzione della coordinata restante.

Svolgimento

Il sistema ha quattro gradi di libertà. Siano (x_A, y_A, x_B, y_B) le coordinate cartesiane dei due punti nel piano rispetto a un riferimento supposto inerziale, e sia $r^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$. La Lagragiana del sistema, in queste coordinate, è

$$L = \frac{m_A}{2}\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2\right) + \frac{m_B}{2}\left(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) + U(r)$$

Le ccordinate del baricentro del sistema sono

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} \\ Y &= \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B}; \end{aligned}$$

le distanze di ciascuno dei due punti materiali dal baricentro sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{m_B r}{m_A + m_B} \\ r_B &= \frac{m_A r}{m_A + m_B}. \end{aligned}$$

(NB: $r_A + r_B = r$). Quindi, scegliendo come coordinate lagrangiane:

(1) la coordinata X del baricentro
(2) la coordinata Y del baricentro
(3) la distanza r fra i due punti materiali
(4) l'angolo θ fra la congiungente dei due punti e la direzione dell'asse x del riferimento cartesiano nel piano,

si ottiene la seguente parametrizzazione del sistema:

$$\begin{aligned}
x_A &= \frac{m_B r}{m_A + m_B}\cos(\theta) + X \\
y_A &= \frac{m_B r}{m_A + m_B}\sin(\theta) + Y \\
x_B &= -\frac{m_A r}{m_A + m_B}\cos(\theta) + X \\
y_B &= -\frac{m_A r}{m_A + m_B}\sin(\theta) + Y
\end{aligned}$$

(per controllo, si provi a sostituire queste espressioni nella definizione delle coordinate del baricentro e si verifichi che si ottiene un'identità). Ora si ricava subito

$$\begin{aligned}
\dot{x}_A &= \frac{m_B \dot{r}}{m_A + m_B}\cos(\theta) - \frac{m_B r}{m_A + m_B}\sin(\theta)\dot{\theta} + \dot{X} \\
\dot{y}_A &= \frac{m_B \dot{r}}{m_A + m_B}\sin(\theta) + \frac{m_B r}{m_A + m_B}\cos(\theta)\dot{\theta} + \dot{Y} \\
\dot{x}_B &= -\frac{m_A \dot{r}}{m_A + m_B}\cos(\theta) + \frac{m_A r}{m_A + m_B}\sin(\theta)\dot{\theta} + \dot{X} \\
\dot{y}_B &= -\frac{m_A \dot{r}}{m_A + m_B}\sin(\theta) - \frac{m_A r}{m_A + m_B}\cos(\theta)\dot{\theta} + \dot{Y}
\end{aligned}$$

Sostituendo nella Lagrangiana si ottiene

$$L = \frac{m_A + m_B}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r)$$

in cui l'unica coordinata non ciclica è r.
Si noti che il moto del baricentro è disaccoppiato dall'evoluzione delle coordinate r e θ. Oltre all'energia totale $\mathcal{H}$ (che si conserva in quanto L non dipende dal tempo), si conservano quindi separatamente i termini

$$\mathcal{H}_1 = \frac{M}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right)$$

e

$$\mathcal{H}_2 = \frac{m_r}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r)$$

($\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$), dove abbiamo denotato con $M = m_A + m_B$ la *massa totale* e con $m_r = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ la *massa ridotta*. Le quantità conservate associate alle coordinate cicliche sono le due componenti della quantità di moto totale, $P_1 = M\dot{X}$ e $P_2 = M\dot{Y}$, e il momento angolare relativo al baricentro, $J = m_r r^2 \dot{\theta}$. Sostituendo $\dot{\theta} = \frac{J}{m_r r^2}$ nella legge di conservazione $\mathcal{H}_2 =$ cost. ed esplicitando $\dot{r}^2$ si ottiene un'equazione di Weierstrass del tutto analoga a quella per un moto centrale con potenziale $U(r)$. Si osservi che la massa che compare è però la massa ridotta m_r e la costante di energia che compare nell'equazione è il valore inziale di $\mathcal{H}_2$, ossia l'energia relativa al riferimento del centro di massa.

TEMA II

Scrivere l'espressione (in coordinate cartesiane x^μ) dei dieci generatori infinitesimi dell'azione del gruppo di Poincaré sullo spazio di Minkowski (3 boost, 3 rotazioni proprie, 4 traslazioni). Calcolare il commutatore di due generatori scelti in modo che il commutatore non sia nullo, e indicare due generatori il cui commutatore sia nullo (in entrambi i casi, scegliere generatori di tipo diverso: un boost e una rotazione propria, oppure un boost e una traslazione, oppure una rotazione propria e una traslazione).

TEMA III

Si consideri la Lagrangiana (quadratica) per una particella relativistica carica in un campo elettromagnetico. Eseguire la trasformazione di Legendre, scrivere la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton. Mostrare che una trasformazione di gauge del potenziale elettromagnetico A_μ cambia la mappa di Legendre Φ_L, ma le due mappe di Legendre sono connesse da una trasformazione canonica nello spazio della fasi.

Svolgimento

$$L = \frac{m}{2}\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - eA_\mu(x^\lambda)u^\mu$$

(NOTA: con una diversa scelta delle convenzioni, si può anche avere un "+" davanti al termine di potenziale. In questo caso cambia il segno davanti ad A_μ in tutte le formule che seguono.

La Lagrangiana è regolare, dato che $\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu \partial u^\nu} = \eta_{\mu\nu}$, che è non degenere per definizione. La mappa di Legendre e la sua inversa sono rispettivamente

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = m\eta_{\mu\nu}u^\nu - eA_\mu \\ u^\mu &= \frac{1}{m}\eta^{\mu\nu}(p_\nu + eA_\nu) \end{aligned}$$

Si trova quindi

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \frac{2}{m}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\alpha}(p_\alpha + eA_\alpha)\eta^{\nu\beta}(p_\beta + eA_\beta) - \frac{e}{m}A_\mu(x^\lambda)\eta^{\mu\nu}(p_\nu + eA_\nu),\\ H &= \frac{1}{m}\eta^{\mu\nu}(p_\nu + eA_\nu)p_\mu - \tilde{L} = \frac{1}{2m}\eta^{\mu\nu}(p_\mu + eA_\mu)(p_\nu + eA_\nu).\end{aligned}$$

Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{aligned}\dot{x}^\mu &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \frac{1}{m}\eta^{\mu\nu}(p_\nu + eA_\nu)\\ \dot{p}_\mu &= -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\frac{e}{m}\eta^{\alpha\nu}(p_\nu + eA_\nu)\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}.\end{aligned}$$

(NOTA: non si deve mai supporre che A_μ non dipenda dalle coordinate x^λ: in questo caso, infatti, il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ sarebbe nullo!)
La mappa di Legendre non è invariante rispetto a una trasformazione di gauge del quadripotenziale elettromagnetico, definita da

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu}.$$

per una qualsiasi funzione differenziabile $\lambda(x^\nu)$: a seguito della trasformazione di gauge, infatti, si ha

$$p'_\mu = m\eta_{\mu\nu}u^\nu - eA_\mu - e\frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu}.$$

Si osservi d'altra parte che scrivendo la funzione di Hamilton in funzione delle componenti della quadrivelocità si trova

$$\mathcal{H} = \frac{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}{2m}.$$

Pertanto il valore di $\mathcal{H}$, in funzione della quadrivelocità, non dipende da A_μ e quindi è gauge-invariante (e tuttavia $\mathcal{H}$ non è una grandezza fisica osservabile, in quanto dipende dalla parametrizzazione delle linee di universo). Nello spazio delle fasi, invece, si ha che la trasformazione di gauge induce un diffeomorfismo

$$\phi : (x^\mu, p_\mu) \mapsto (x^\mu, p'_\mu = p_\mu - e\frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu}),$$

ma si ricava subito che

$$\phi^*(p_\mu dx^\mu) = p'_\mu dx^\mu = p_\mu dx^\mu - d\lambda \quad \Rightarrow \quad \phi^*(dp_\mu \wedge dx^\mu) = dp_\mu \wedge dx^\mu$$

il che dimostra che ϕ è una trasformazione canonica. Lo stesso si può anche dimostrare, con calcoli un po' più laboriosi, verificando che le parentesi di Poisson fra le coordinate (x^μ, p'_ν) sono canoniche, o equivalentemente che la matrice jacobiana della trasformazione ϕ appartiene al gruppo simplettico.