1 Integrali II.

Esercizio 1.1

Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}\,, \qquad 0<\epsilon<1\,.$$

Soluzione

Con il cambio di variabile $z = e^{i\theta}$, possiamo scrivere l'integrale nel piano complesso, su un cammino di raggio unitario e senso positivo:

$$\begin{aligned} I = &-i\oint \frac{dz}{z}\frac{1}{1+\epsilon\left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)} = -i\oint dz\frac{1}{z+\epsilon\left(\dfrac{z^2+1}{2}\right)} \\ = &-2i\oint dz\frac{1}{2z+\epsilon z^2+\epsilon} = -\frac{2i}{\epsilon}\oint dz\frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)}\,, \end{aligned}$$

con

$$z_\pm = \frac{1}{\epsilon}\left(-1\pm\sqrt{1-\epsilon^2}\right)\,.$$

Dobbiamo determinare se le singolarità sono all'interno o meno del cammino unitario, cioè, controlliamo se vale $|z_\pm|<1$:

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\left(-1\pm\sqrt{1-\epsilon^2}\right)\right| < 1 \implies \left|\left(1\mp\sqrt{1-\epsilon^2}\right)\right| < \epsilon$$

$$\implies \left(1\mp\sqrt{1-\epsilon^2}\right) < \epsilon\,, \qquad \text{dato che } \sqrt{1-\epsilon^2}<1$$

$$\implies 1-\epsilon < \pm\sqrt{1-\epsilon^2}\,.$$

Il caso sopra con il segno negativo, non può essere soddisfatto dato che $1-\epsilon>0$, quindi z_- non è nella regione interiore al cammino di integrazione. Invece, per il caso con il segno negativo si ha che

$$1-\epsilon<\sqrt{1-\epsilon^2} \implies (1-\epsilon)^2 < 1-\epsilon^2 \implies 1+\epsilon^2-2\epsilon<1-\epsilon^2$$

$$\implies \epsilon^2<\epsilon\,,$$

condizione soddisfatta dato che $0 < \epsilon < 1$. Quindi solo z_+ contribuisce all'integrale:

$$\begin{aligned}
I =& -\frac{2i}{\epsilon} \oint dz \frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)} \\
=& -\frac{2i}{\epsilon}\, 2\pi i \,\mathrm{Res} \left\{ \frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)} \right\}_{z=z_+} , \\
\Longrightarrow \; I =& -\frac{2i}{\epsilon} 2\pi i \frac{1}{(z_+ - z_-)} = -\frac{2i}{\epsilon} 2\pi i \frac{\epsilon}{2\sqrt{1-\epsilon^2}} \\
\Longrightarrow \; I =& \frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \, .
\end{aligned}$$

Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 20 luglio 2021

1 Esercizio 1

Dato il seguente integrale trigonometrico:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\sin\theta}{a^2 + 1 - 2a\sin\theta} \,, \qquad\qquad a \in \mathbb{R} \,,$$

trasformarlo in un integrale su un cammino chiuso di un funzione $f(z)$ in campo complesso e quindi:

(a) determinare per quali valori di a l'integrale esiste;

(b) calcolare I con il metodo dei residui;

(c) verificare il teorema della somma dei residui con il punto all'infinito per la funzione $f(z)$.

1.1 Soluzione

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{\sin\theta}{a^2 + 1 - 2a\sin\theta}$$

Per trasformarlo in un integrale su un cammino chiuso di un funzione $f(z)$ in campo complesso si effettua il cambio di variabile

$$z = e^{i\theta}, \qquad\qquad dz = i\, e^{i\theta}\, d\theta = i\, z\, d\theta, \qquad\qquad d\theta = -i\, \frac{dz}{z}.$$

e si scrive $\sin\theta$ come:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

I viene riscritto come integrale su una circonferenza C di raggio unitario centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario:

$$I = -\, i \oint_C \frac{dz}{z} \, \frac{z^2 - 1}{2iz} \, \frac{1}{a^2 + 1 - 2a\frac{z^2-1}{2iz}} = i \oint_C \frac{dz}{2z} \, \frac{z^2 - 1}{a(z^2 - 1) - i(a^2 + 1)z} = \oint_C dz \, f(z)$$

con

$$f(z) = \frac{i}{2z}\,\frac{z^2-1}{a\,z^2 - i(a^2+1)z - a}\,.$$

Per determinare dove l'integrale esiste e per calcolarlo con il metodo dei residui, dobbiamo capire quali singolarità sono interne alla circonferenza. Cerchiamo pertanto gli zeri della quadratica a denominatore che sono:

$$z_\pm = \frac{i(a^2+1) \pm \sqrt{-(a^2+1)^2+4a^2}}{2\,a} = \frac{i(a^2+1) \pm i(a^2-1)}{2\,a}\,,$$

cioè

$$z_+ = \frac{i(a^2+1)+i(a^2-1)}{2\,a} = i\,a\,, \qquad\qquad z_- = \frac{i(a^2+1)-i(a^2-1)}{2\,a} = \frac{i}{a}\,.$$

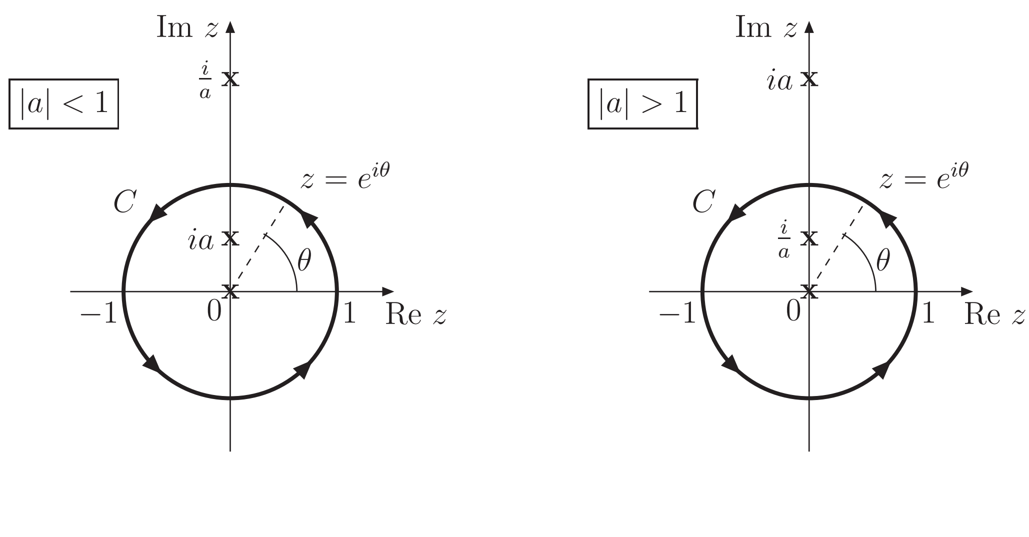
Quindi possiamo riscrivere $f(z)$ come

$$f(z) = \frac{i}{2z}\,\frac{z^2-1}{a\,(z-ia)\left(z-\frac{i}{a}\right)}\,.$$

(a) $f(z)$ ha tre singolarità in $z = 0, ia, i/a$. L'integrale esiste quando nessuna di queste sta sulla circonferenza di raggio unitario. Poiché a è reale, questo succede per

$$a \neq \pm 1\,. \tag{1}$$

(b) Delle tre singolarità di $f(z)$ $(z = 0, ia, i/a)$, sicuramente $z = 0$ è interna alla circonferenza di raggio unitario. Per le altre due abbiamo che, per $|a| < 1$, $z = ia$ è interna mentre $z = i/a$ è esterna; per $|a| > 1$ invece, $z = ia$ è esterna mentre $z = i/a$ è interna.



Quindi per $|a| < 1$ l'integrale è dato da

$$I_{|a|<1} = 2\pi i \left[\{\text{Res}\, f(z)\}_{z=0} + \{\text{Res}\, f(z)\}_{z=ia} \right]$$

Essendo $z = 0$ e $z = ia$ poli semplici di $f(z)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\{\text{Res}\, f(z)\}_{z=0} &= \lim_{z\to 0} z\, f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{i}{2} \frac{z^2-1}{a\,(z-ia)\left(z-\frac{i}{a}\right)} = \frac{i}{2a}, \\
\{\text{Res}\, f(z)\}_{z=ia} &= \lim_{z\to ia} (z-ia)\, f(z) = \lim_{z\to ia} \frac{i}{2z} \frac{z^2-1}{a\,\left(z-\frac{i}{a}\right)} = \frac{i}{2ia} \frac{(ia)^2-1}{a\,\left(ia-\frac{i}{a}\right)} \\
&= \frac{i}{2a} \frac{a^2+1}{a^2-1}
\end{aligned}$$

Quindi per $|a| < 1$ l'integrale è:

$$I_{|a|<1} = 2\pi i \left[\frac{i}{2a} + \frac{i}{2a} \frac{a^2+1}{a^2-1} \right] = 2\pi i \frac{i}{2a} \frac{2a^2}{a^2-1} = \frac{2\pi\, a}{1-a^2}\,.$$

Notiamo che l'integrale è reale come atteso.

Analogamente, per $|a| > 1$ avremo

$$I_{|a|>1} = 2\pi i \left[\{\text{Res}\, f(z)\}_{z=0} + \{\text{Res}\, f(z)\}_{z=\frac{i}{a}} \right]$$

$$\begin{aligned}
\{\text{Res}\, f(z)\}_{z=\frac{i}{a}} &= \lim_{z\to \frac{i}{a}} \left(z-\frac{i}{a}\right) f(z) = \lim_{z\to \frac{i}{a}} \frac{i}{2z} \frac{z^2-1}{a\,(z-ia)} = \frac{i}{2\frac{i}{a}} \frac{\left(\frac{i}{a}\right)^2-1}{a\,\left(\frac{i}{a}-ia\right)} \\
&= -\frac{i}{2a} \frac{a^2+1}{a^2-1}
\end{aligned}$$

Quindi per $|a| > 1$ l'integrale è:

$$I_{|a|>1} = 2\pi i \left[\frac{i}{2a} - \frac{i}{2a} \frac{a^2+1}{a^2-1} \right] = 2\pi i \frac{i}{2a} \frac{-2}{a^2-1} = \frac{2\pi}{a(a^2-1)}\,.$$

Notiamo che anche per $|a| > 1$ l'integrale è reale come atteso e che $I_{|a|>1}$ si può ottenere da $I_{|a|<1}$ con lo scambio $a \to \frac{1}{a}$.

(b) Per verificare il teorema dei residui dobbiamo calcolare i residui in tutte le singolarità al finito e nel punto all'infinito. Per le singolarità in $z = 0, ia, \frac{i}{a}$ abbiamo trovato:

$$\{\text{Res}\, f(z)\}_{z=0} = \frac{i}{2a}\,,$$

$$\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=ia} = \frac{i}{2a}\,\frac{a^2+1}{a^2-1}\,, \qquad\qquad \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\frac{i}{a}} = -\,\frac{i}{2a}\,\frac{a^2+1}{a^2-1}\,.$$

Per calcolare il residuo all'infinito facciamo il cambio variabile $z = 1/t$ e calcoliamo:

$$\{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=\infty} = -\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0}$$

La funzione

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2} = \frac{i}{\frac{2}{t}}\,\frac{\frac{1}{t^2}-1}{a\,\left(\frac{1}{t}-ia\right)\left(\frac{1}{t}-\frac{i}{a}\right)}\frac{1}{t^2} = \frac{i}{2}\,\frac{1-t^2}{a\,(1-iat)\left(1-\frac{i}{a}t\right)}\,\frac{1}{t}$$

ha un polo semplice in $t = 0$. Quindi avremo:

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=\infty} &= -\left\{\mathrm{Res}\, f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right\}_{t=0} = -\left\{\mathrm{Res}\,\frac{i}{2}\,\frac{1-t^2}{a\,(1-iat)\left(1-\frac{i}{a}t\right)}\,\frac{1}{t}\right\}_{t=0} \\
&= -\,\frac{i}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1-t^2}{a\,(1-iat)\left(1-\frac{i}{a}t\right)} = -\,\frac{i}{2a}.
\end{aligned}$$

Pertanto possiamo verificare che la somma dei residui al finito e all'infinito fa zero:

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}}\{\mathrm{Res}\, f(z)\} &= \sum_{z\in\mathbb{C}}\{\mathrm{Res}\, f(z)\} + \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} \\
&= \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=0} + \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=ia} + \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\frac{i}{a}} + \{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} \\
&= \frac{i}{2a} + \frac{i}{2a}\,\frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{i}{2a}\,\frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{i}{2a} = 0.
\end{aligned}$$

Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 13 febbraio 2024

Esercizio 1

Si consideri la funzione $f_n(x)$ di variabile reale x

$$f_n(x) = x\,\frac{\sin(\pi x)}{x^n - 1}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}\,.$$

(1) Determinare per quali valori di n la funzione $f_n(x)$ è sommabile e per quali valori è al quadrato sommabile.

(2) Promuovendo la funzione sul piano complesso, consideriamo la funzione $f_n(z)$ di variabile complessa z

$$f_n(z) = z\,\frac{\sin(\pi z)}{z^n - 1}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}\,.$$

Studiare le singolarità al finito di $f_n(z)$ e il suo comportamento all'infinito.

(3) Calcolare l'integrale sul semiasse reale positivo di $f_4(x)$

$$I = \int_0^{+\infty} dx\, f_4(x) = \int_0^{+\infty} dx\, x\,\frac{\sin(\pi x)}{x^4 - 1}\,.$$

Soluzione

(1) Per vedere se la funzione $f_n(x)$ è sommabile o al quadrato sommabile dobbiamo studiarne le singolarità per x finito (sull'asse reale) e per $x \to \pm\infty$.

- Per x reale finito notiamo che le uniche potenziali singolarità si hanno dove si annulla il denominatore $x^n - 1$ e cioè in $x = 1$ e, se n è pari, in $x = -1$. Entrambi questi punti sono al più zeri semplici del denominatore. Poiché in $x = \pm 1$ anche $\sin(\pi x)$ ha degli zeri semplici, questi compensano sicuramente tutti gli zeri del denominatore sull'asse reale.

  Pertanto concludiamo che al finito $f_n(x)$ non ha singolarità e quindi sia $|f_n(x)|$ sia $|f_n(x)|^2$ per ogni n non hanno problemi al finito per poter essere integrati.

- La funzione $f_n(x)$ (che non ha problemi al finito) risulta sommabile se

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\, f_n(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\, \frac{\sin(\pi x)}{x^n - 1} = 0\,.$$

Poiché $\sin(\pi x)$ è sempre limitato tra -1 e $+1$ per x reali, quel limite sarà zero solo se x^{2-n} va a zero per $x \to \pm\infty$, e questo succede per $n \geq 3$.

Pertanto $f_n(x)$ è sommabile se e solo se $n \geq 3$.

Al contrario la funzione $f_n(x)$ (che non ha problemi al finito) risulta al quadrato sommabile se

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\, [f_n(x)]^2 = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\, \frac{\sin^2(\pi x)}{(x^n - 1)^2} = 0\,.$$

Poiché $\sin^2(\pi x)$ è sempre limitato tra 0 e $+1$ per x reali, quel limite sarà zero solo se x^{3-2n} va a zero per $x \to \pm\infty$, e questo succede per $n > 3/2$, cioè per $n \geq 2$.

Pertanto $f_n(x)$ è al quadrato sommabile se e solo se $n \geq 2$.

(2) Per lo studio delle singolarità al finito della funzione $f_n(z)$ di variabile complessa z

$$f_n(z) = z\,\frac{\sin(\pi z)}{z^n - 1}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}\,,$$

notiamo che le uniche potenziali singolarità si hanno dove si annulla il denominatore $z^n - 1$:

$$z^n - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z^n = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = z_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots n-1\,.$$

Questi sono tutti zeri semplici del denominatore. Tutti questi zeri giacciono sulla circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine.

Gli unici punti della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine per cui si annulla anche il numeratore $\sin(\pi z)$ sono $z = \pm 1$, che sono zeri semplici di $\sin(\pi z)$. In quei punti il numeratore compensa sicuramente il denominatore. Il punto $z = 1$ corrisponde al punto z_k con $k = 0$, mentre $z = -1$ corrisponde al punto z_k con $k = n/2$:

$$\begin{aligned} k = 0: &\qquad z_0 = e^{2\pi i\, 0} = 1\,, \\ k = \frac{n}{2}: &\qquad z_{n/2} = e^{2\pi i \frac{n/2}{n}} = e^{i\pi} = -1\,. \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, dobbiamo escludere i punti z_k con $k = 0, n/2$ dall'elenco dei poli e pertanto concludiamo che la funzione $f_n(z)$ ha poli semplici in

$$z = z_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}} \quad \text{con} \quad k = 1, \ldots n-1 \quad \text{e} \quad k \neq \frac{n}{2}\,.$$

Naturalmente è necessario escludere il valore $k = n/2$ solo per n pari (se n è dispari, k già di suo non è mai uguale a $n/2$).

Per il punto all'infinito, vediamo subito che $z = \infty$ è una singolarità essenziale del seno a numeratore che vince sul resto della funzione.

Pertanto $f_n(z)$ ha singolarità essenziale in $z = \infty$.

(3) Per calcolare

$$I = \int_0^{+\infty} dx\, f_4(x) = \int_0^{+\infty} dx\, x\, \frac{\sin(\pi x)}{x^4 - 1}$$

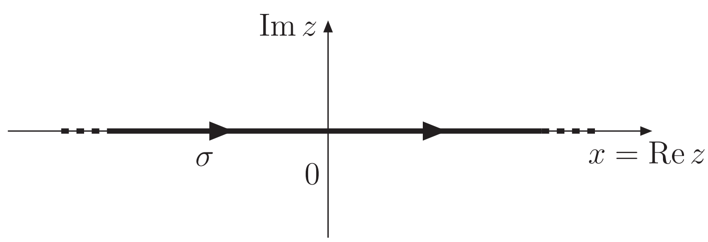
dobbiamo prima di tutto portare l'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$. Possiamo farlo notando che la funzione integranda è pari e quindi

$$I = \int_0^{+\infty} dx\, x\, \frac{\sin(\pi x)}{x^4 - 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\, \frac{\sin(\pi x)}{x^4 - 1}$$

questo integrale equivale al seguente integrale nel piano complesso

$$I = \frac{1}{2} \int_\sigma dz\, z\, \frac{\sin(\pi z)}{z^4 - 1}$$

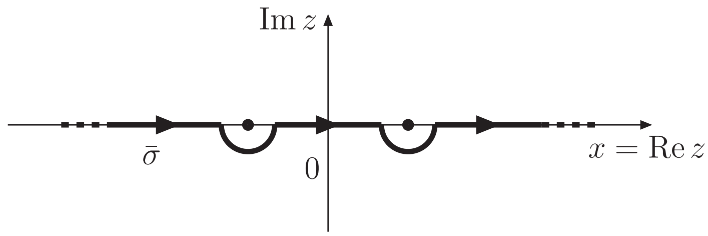
dove σ è un cammino sulla retta:



Per utilizzare il lemma di Jordan, scriviamo il seno in termini di due esponenziali:

$$I = \frac{1}{4i} \int_\sigma dz\, z\, \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{z^4 - 1}\,.$$

Ora dovremmo separare i due esponenziali dell'integrando, prima però dobbiamo deformare il cammino di integrazione, per evitare di passare attraverso i punti $z = \pm 1$ che, separando gli integrali, diventano punti singolari di $z\, e^{\pm i\pi z}/(z^4 - 1)$. Scegliamo di aggirare da sotto i punti $z = \pm 1$ e otteniamo il cammino $\bar{\sigma}$ mostrato nelle figura seguente:

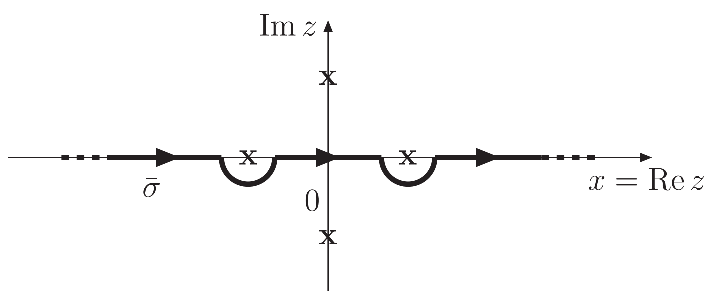


Quindi scriviamo

$$I = \frac{1}{4i}\int_{\bar{\sigma}} dz\, z\, \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{z^4 - 1} = \frac{1}{4i}\left\{ \int_{\bar{\sigma}} dz\, z\, \frac{e^{i\pi z}}{z^4 - 1} - \int_{\bar{\sigma}} dz\, z\, \frac{e^{-i\pi z}}{z^4 - 1} \right\}.$$

In entrambi gli integrali usiamo il lemma di Jordan. Per il primo integrale, visto che l'esponenziale è della forma $e^{iz\alpha}$ con $\alpha > 0$, dobbiamo chiudere sopra, mentre per il secondo integrale, dove l'esponenziale è della forma $e^{iz\alpha}$ con $\alpha < 0$, dobbiamo chiudere sotto.

Le singolarità delle funzioni integrande sono i quattro poli semplici $z = \pm 1, \pm i$. Di queste solo $z = -i$ giace sotto il cammino $\bar{\sigma}$, mentre le altre tre singolarità $z = 1, -1, i$ giacciono sopra $\bar{\sigma}$



Calcolando con i residui gli integrali su questi cammini chiusi, abbiamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4i}\left\{ \int_{\bar{\sigma}} dz\, z\, \frac{e^{i\pi z}}{z^4 - 1} - \int_{\bar{\sigma}} dz\, z\, \frac{e^{-i\pi z}}{z^4 - 1} \right\} \\ &= \frac{2\pi i}{4i}\left\{ \mathrm{Res}\left[z\, \frac{e^{i\pi z}}{z^4 - 1}\right]_{z=1} + \mathrm{Res}\left[z\, \frac{e^{i\pi z}}{z^4 - 1}\right]_{z=-1} + \mathrm{Res}\left[z\, \frac{e^{i\pi z}}{z^4 - 1}\right]_{z=i} \right. \\ &\qquad \left. + \mathrm{Res}\left[z\, \frac{e^{-i\pi z}}{z^4 - 1}\right]_{z=-i} \right\}. \end{aligned}$$

Per il residuo in $z = -i$ abbiamo tenuto conto del segno meno che viene dal fatto che la curva chiusa è percorsa in senso orario quando si chiude sotto. Essendo tutte le singolarità dei poli semplici, otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{4i}\Bigg\{ \lim_{z\to 1}(z-1)\, z\, \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1} + \lim_{z\to -1}(z+1)\, z\, \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1} + \lim_{z\to i}(z-i)\, z\, \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1} \\ &\quad + \lim_{z\to -i}(z+i)\, z\, \frac{e^{-i\pi z}}{z^4-1}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Per fare i limiti riscriviamo il denominatore a seconda dell'occorrenza come

$$z^4-1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z^2+1) = (z^2-1)(z-i)(z+i)\,.$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{4i}\Bigg\{ \lim_{z\to 1}(z-1)\, z\, \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)(z+1)(z^2+1)} \\ &\quad + \lim_{z\to -1}(z+1)\, z\, \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)(z+1)(z^2+1)} \\ &\quad + \lim_{z\to i}(z-i)\, z\, \frac{e^{i\pi z}}{(z^2-1)(z-i)(z+i)} \\ &\quad + \lim_{z\to -i}(z+i)\, z\, \frac{e^{-i\pi z}}{(z^2-1)(z-i)(z+i)}\Bigg\} \\ &= \frac{2\pi i}{4i}\Bigg\{ \lim_{z\to 1} z\, \frac{e^{i\pi z}}{(z+1)(z^2+1)} + \lim_{z\to -1} z\, \frac{e^{i\pi z}}{(z-1)(z^2+1)} \\ &\quad + \lim_{z\to i} z\, \frac{e^{i\pi z}}{(z^2-1)(z+i)} + \lim_{z\to -i} z\, \frac{e^{-i\pi z}}{(z^2-1)(z-i)}\Bigg\} \\ &= \frac{2\pi i}{4i}\Bigg\{ \frac{e^{i\pi}}{(2)(2)} - \frac{e^{-i\pi}}{(-2)(2)} + i\,\frac{e^{i\pi(i)}}{(-2)(2i)} - i\,\frac{e^{-i\pi(-i)}}{(-2)(-2i)}\Bigg\} \\ &= \frac{\pi}{2}\Bigg\{ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{e^{-\pi}}{4} - \frac{e^{-\pi}}{4}\Bigg\} = -\frac{\pi}{4}\Big(1+e^{-\pi}\Big)\,. \end{aligned}$$

Corso di laurea triennale in Fisica

Corso di Metodi Matematici per la Fisica - Intro

Prova scritta del 14 febbraio 2023

Esercizio 1

Si consideri l'integrale

$$I(a,n) = \int_0^a d\theta \, \frac{1}{1+\cos^n\theta}, \qquad n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a \le 2\pi.$$

(a) Determinare i valori di a e n per cui l'integrale esiste.

(b) Scrivere $I(\pi,2)$ come integrale sulla circonferenza unitaria C nel piano complesso

$$I(\pi,2) = \oint_C dz\, f(z)$$

ricavando esplicitamente l'integrando $f(z)$.

(c) Per la funzione $f(z)$ trovata nella parte (b), dimostrare esplicitamente che vale

$$\sum_{z_i\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_i} + \operatorname{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} = 0,$$

dove z_i sono le singolarità di $f(z)$ al finito.

(d) Calcolare $I(\pi,2)$.

Soluzione

(a) Dobbiamo considerare due casi.

- n pari:
  In questo caso $0 \le \cos^n\theta \le 1$, quindi l'integrando è sempre regolare per tutti i valori di a con $0 < a \le 2\pi$.
- n dispari:
  L'unico singolarità dell'integrando per $0 < a \le 2\pi$ è $\theta = \pi$. Per vedere esplicitamente che questo punto è una singolarità non integrabile, possiamo sviluppare in serie di Taylor intorno a $\theta = \pi$

$$\cos^n\theta = -1 + \frac{n}{2}(\theta-\pi)^2 + \mathcal{O}\left((\theta-\pi)^3\right), \qquad \text{con } n \text{ dispari.}$$

Perciò

$$1 + \cos^n \theta = \mathcal{O}\left((\theta - \pi)^2\right), \qquad \text{con } n \text{ dispari.}$$

Pertanto per n dispari l'integrale esiste solo se $a < \pi$.

(b) Per scrivere

$$I(\pi, 2) = \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{1 + \cos^2 \theta}$$

nella forma richiesta, consideriamo due metodi.

– Metodo 1

Possiamo usare la periodicità di $\cos^2 \theta$

$$\cos^2(\theta + k\pi) = \cos^2 \theta, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Visto che il periodo di $\cos^2 \theta$ è π, la funzione $1/(1 + \cos^2 \theta)$ ha lo stesso periodo. Quindi possiamo scrivere

$$I(\pi, 2) = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} + \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \frac{1}{1 + \cos^2 \theta}\right] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{1 + \cos^2 \theta}.$$

Per scrivere quest'ultima espressione come un integrale nel piano complesso sulla circonferenza unitaria, sfruttiamo il fatto che per $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$ e $d\theta = -idz/z$. Usando la formula di Eulero si ha che

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{4z^2}$$

Da cui segue che

$$\frac{1}{1 + \cos^2 \theta} = \frac{4z^2}{z^4 + 6z^2 + 1}.$$

e quindi si ha che

$$I(\pi, 2) = \oint_C dz \, \frac{-2z\, i}{z^4 + 6z^2 + 1}, \tag{1}$$

da cui segue

$$\Big[f(z)\Big]_{\text{metodo1}} = \frac{-2z\, i}{z^4 + 6z^2 + 1}.$$

– Metodo 2

Alternativamente si può procedere mediante il cambio di variabile

$$\phi = 2\theta$$

da cui si ottiene l'integrale

$$I(\pi, 2) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \, \frac{1}{1 + \cos^2(\phi/2)}.$$

Per esprimere l'integrando in termini di $z = e^{i\phi}$, vediamo che

$$\begin{aligned} \cos(\phi/2) &= \frac{1}{2} \left(e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2} \right) , \\ \cos^2(\phi/2) &= \frac{1}{4} \left(e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(e^{i\phi} + e^{-i\phi} + 2 \right) = \frac{1}{4} \left(z + \frac{1}{z} + 2 \right) . \end{aligned}$$

Pertanto otteniamo

$$\frac{1}{1 + \cos^2(\phi/2)} = \frac{4z}{z^2 + 6z + 1}.$$

Tenendo in conto che $d\phi = -i \, dz/z$ abbiamo

$$I(\pi, 2) = \oint_C dz \, \frac{-2\, i}{z^2 + 6z + 1} \tag{2}$$

da cui segue che

$$\Big[f(z) \Big]_{\text{metodo2}} = \frac{-2\, i}{z^2 + 6z + 1} .$$

(c) A seconda del metodo usato per la parte (b), si hanno due soluzioni possibili.

- Metodo 1

  La funzione $[f(z)]_{\text{metodo1}}$ ha quattro singolarità al finito (poli semplici):

$$\begin{aligned} z_1 &= -i\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \qquad & z_2 &= i\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \\ z_3 &= -i\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, \qquad & z_4 &= i\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

  Per i residui al finito si può scrivere una relazione generale

$$\begin{aligned} \text{Res}\Big[f(z) \Big]_{z=z_i} &= \lim_{z \to z_i} (z - z_i) \frac{-2z\, i}{z^4 + 6z^2 + 1} \\ &= -2z_i\, i \lim_{z \to z_i} \frac{(z - z_i)}{z^4 + 6z^2 + 1} \\ &\overset{\text{l'Hôpital}}{=} -2z_i\, i \lim_{z \to z_i} \frac{1}{4z^3 + 12z} = -\frac{i}{2} \frac{1}{3 + z_i^2}. \end{aligned}$$

Quindi al finito

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_1} &= \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_2} = -\frac{i}{4\sqrt{2}}\,,\\
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_3} &= \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_4} = \frac{i}{4\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

All'infinito si ha che

$$\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} = \mathrm{Res}\Big[-\frac{1}{t^2}\;f\left(\frac{1}{t}\right)\Big]_{t=0} = \mathrm{Res}\Big[\frac{2\,i\,t}{t^4+6\,t^2+1}\Big]_{t=0} = 0,$$

e quindi la somma dei residui in $\mathbb{C}\cup\infty$ si annulla:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_1} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_2} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_3}\\
&+ \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_4} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} = 0.
\end{aligned}$$

– <u>Metodo 2</u>

La funzione $[f(z)]_{\mathrm{metodo2}}$ ha solo due singolarità al finito (poli semplici):

$$z_1 = -3+2\sqrt{2}, \qquad z_2 = -3-2\sqrt{2}\,.$$

I residui sia al finito che all'infinito sono

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_1} &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{-2\,i}{z^2+6z+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{-2\,i}{z-z_2} = -\frac{2\,i}{z_1-z_2},\\
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_2} &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{-2\,i}{z^2+6z+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{-2\,i}{z-z_1} = \frac{2\,i}{z_1-z_2},\\
\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} &= \mathrm{Res}\Big[-\frac{f(1/t)}{t^2}\Big]_{t=0} = \mathrm{Res}\Big[\frac{2\,i}{(1-z_1t)(1-z_2t)}\Big]_{t=0} = 0.
\end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$\mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_1} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=z_2} + \mathrm{Res}\Big[f(z)\Big]_{z=\infty} = 0.$$

(d) L'integrale si può calcolare risolvendo l'integrale in Eq. (1) oppure quello in Eq. (2), a secondo del metodo utilizzato nella parte (b).

– <u>Metodo 1</u>

Il valore di

$$I(\pi,2) = \oint_C dz\,\frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1},$$

dipende solo delle singolarità nella regione interna al cammino di integrazione (circonferenza unitaria). Dei quattro poli semplici

$$z_1 = -i\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \qquad z_2 = i\sqrt{3-2\sqrt{2}},$$
$$z_3 = -i\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \qquad z_4 = i\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

abbiamo che $|z_1|, |z_2| < 1$, mentre $|z_3|, |z_4| > 1$. Quindi solo i poli z_1, z_2 contribuiscono all'integrale:

$$\begin{aligned} I(\pi,2) &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}\left[\frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1}\right]_{z=z_1} + \mathrm{Res}\left[\frac{-2z\,i}{z^4+6z^2+1}\right]_{z=z_2} \right) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{i}{4\sqrt{2}} - \frac{i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

– Metodo 2

Il valore di

$$I(\pi,2) = \oint dz\, \frac{-2\,i}{z^2+6z+1},$$

dipende solo delle singolarità nella regione interna al cammino di integrazione (circonferenza unitaria). Dei due poli semplici

$$z_1 = -3+2\sqrt{2}, \qquad z_2 = -3-2\sqrt{2},$$

abbiamo che $|z_1| < 1$, mentre $|z_2| > 1$, e quindi solo il polo z_1 contribuisce all'integrale:

$$\begin{aligned} I(\pi,2) &= 2\pi i\, \mathrm{Res}\left[\frac{-2\,i}{z^2+6z+1}\right]_{z=z_1} = 2\pi i \left(\frac{-2\,i}{z_1-z_2}\right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{-2\,i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$