

CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA
ESEMPI DI TEMI D'ESAME

(1) Due punti materiali sono vincolati a muoversi su una guida posta in un piano verticale, di equazione $y = x^2$ (essendo x e y rispettivamente la coordinata orizzontale e quella verticale, orientata verso l'alto). Su ciascuno dei punti agisce solo la forza peso; si assume che nel loro moto i punti possano sovrapporsi senza collidere. Scrivere la funzione di Hamilton del sistema e le equazioni di Hamilton, e mostrare che esistono due costanti del moto indipendenti e in involuzione fra loro.

(2) Un punto materiale è vincolato a muoversi lungo una guida curvilinea priva di attrito, posta in un piano verticale, descritta dall'equazione $y = f(x)$, essendo x e y rispettivamente la coordinata orizzontale e quella verticale. Scrivere l'espressione integrale che fornisce il tempo T che il punto materiale, sotto l'azione della forza peso, impiega per raggiungere un punto fissato (x_1, y_1) partendo (con velocità iniziale nulla) da un altro punto fissato (x_0, y_0) , entrambi sulla guida (si suppone che il punto di arrivo sia più in basso, ossia $y_1 < y_0$). Scrivere l'equazione differenziale (per la funzione incognita $f(x)$ che descrive la guida) che rende minimo il tempo di percorrenza T , fra tutte le guide (lisce, nel piano dato) che connettono i punti fissati (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

(3) Si consideri un gas ideale monoatomico contenuto in un contenitore cubico di lato L . Mostrare che nel macrostato di equilibrio di Maxwell-Boltzmann (a qualsiasi temperatura) il baricentro del gas è nel centro del contenitore. Spiegare cosa cambia se si tiene conto della forza peso agente sulle molecole.

Problema 1: due punti materiali di uguale massa m si muovono senza attrito in un piano orizzontale. Fra i due punti agisce una forza repulsiva proporzionale all'inverso del quadrato della loro distanza.

- 1) Si scriva la lagrangiana del sistema, usando coordinate cartesiane;
- 2) Si descrivano le simmetrie del sistema, i loro generatori infinitesimi e le leggi di conservazione associate.

Problema 2: un punto materiale A, di massa m_A , è vincolato a muoversi (senza attrito) su una guida rettilinea. Un secondo punto materiale B (di massa m_B) è invece vincolato a muoversi (senza attrito) su una guida circolare. Le due guide sono contenute in uno stesso piano orizzontale, e sono tangenti fra loro. Fra i due punti materiali agisce una forza elastica attrattiva.

- 1) Scrivere la hamiltoniana del sistema;
- 2) Trovare le configurazioni di equilibrio e studiare la loro stabilità;
- 3) Scrivere la hamiltoniana del sistema linearizzato intorno alla configurazione di equilibrio stabile, e diagonalizzarla con una trasformazione lineare di coordinate.

Problema 3: un sistema fisico è costituito da N molecole, ognuna delle quali può trovarsi solo in due stati, a cui corrispondono rispettivamente i valori di energia 0 (stato fondamentale) ed ε (stato eccitato). Supponendo che per tale sistema l'equilibrio termodinamico sia rappresentato dal macrostato di Maxwell-Boltzmann, calcolare (all'equilibrio) il numero di molecole che si trova nello stato eccitato, in funzione della temperatura del sistema.

Problema 1: si consideri un punto materiale vincolato a muoversi su un paraboloide di rotazione di equazione $z = x^2 + y^2$ rispetto a un sistema di coordinate cartesiane con l'asse z verticale diretto verso l'alto.

- 1) Si scriva la lagrangiana del sistema;
- 2) Si scrivano le equazioni del moto;
- 3) Si studi qualitativamente il moto del sistema (equazione di Weierstrass);

Problema 2: si consideri un punto materiale vincolato a muoversi senza attrito lungo una guida rettilinea in un piano verticale, inclinata di un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale.

- 1) Si scriva la hamiltoniana del sistema;
- 2) Si determini un integrale completo della corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi;
- 3) Si scriva la trasformazione canonica (dipendente dal tempo) generata da tale integrale completo e si indichi il significato di tale trasformazione.

Problema 3: un sistema fisico costituito da N_1 molecole identiche si trova in equilibrio termodinamico alla temperatura T_1 ; un secondo sistema, costituito da N_2 molecole uguali alle precedenti, si trova in equilibrio alla temperatura T_2 .

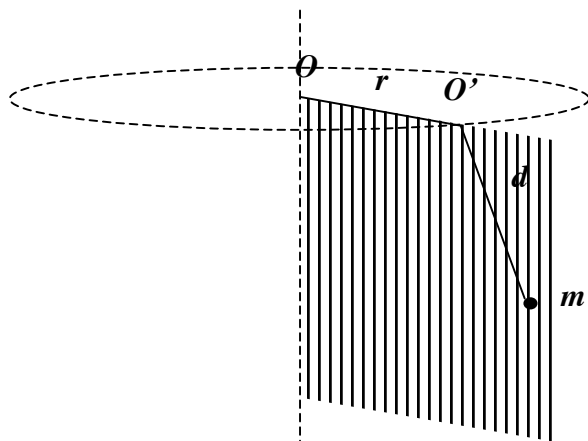
Si supponga che i due sistemi vengano ora posti a contatto termico.

Assumendo che per le molecole in questione si abbia $Z(\beta) \propto \beta^\alpha$, dove $Z(\beta)$ è la funzione di partizione di Maxwell-Boltzmann e α è un numero reale qualsiasi, si mostri che per all'equilibrio i due sistemi (in contatto termico) raggiungono entrambi la temperatura $T_3 = \frac{N_1 T_1 + N_2 T_2}{N_1 + N_2}$.

Si spieghi inoltre cosa cambierebbe se le molecole del primo sistema e quelle del secondo sistema fossero diverse.

1 – Si immagini di realizzare un pendolo piano, posto in un piano verticale (immateriale) che può ruotare liberamente attorno ad un asse verticale NON passante per il punto di sospensione del pendolo. In altri termini, si abbia un punto materiale di massa m vincolato a mantenersi a distanza costante d da un punto (immateriale) O' , che a sua volta può muoversi su una circonferenza orizzontale di raggio r ; il punto materiale deve inoltre trovarsi in ogni istante sul piano verticale passante per O' e per il centro O della circonferenza orizzontale. Si supponga per semplicità $r > d$.

Determinare lo spazio delle configurazioni e scegliere un sistema di coordinate lagrangiane; scrivere la Lagrangiana del sistema; trovare le costanti del moto e ricondurre la soluzione delle equazioni del moto all'integrazione di un'equazione di Weierstrass.



2 – Si consideri un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$ e un secondo riferimento $O'x'y'z'$ che ruota rispetto al precedente intorno all'asse z ($O \equiv O'$ e $z \equiv z'$) di un angolo variabile nel tempo con legge assegnata $\theta = \theta(t)$. Supponendo l'asse z verticale, scrivere l'Hamiltoniana di un punto materiale non vincolato e soggetto alla forza peso, usando le coordinate (non inerziali) $x'y'z'$ e i corrispondenti momenti coniugati. Nelle stesse coordinate, scrivere le costanti del moto.