CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Prova d'esame – 22 giugno 2018 (A)

TEMA I

Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove in un piano sotto l'azione di una forza centrale con potenziale $U(\rho) = \dfrac{a}{\rho}$ (in coordinate polari ρ, θ).

(1) Scritta la lagrangiana, trovare per quali condizioni sul parametro a possono esistere moti circolari uniformi, e determinare per questi moti le relazioni fra energia E, momento angolare J e raggio R dell'orbita.

(2) Per gli stessi moti circolari trovare la relazione fra energia E e periodo T dell'orbita.

TEMA II

Si consideri su $T^*\mathbb{R}^2$, con coordinate (x, y, p_1, p_2), il seguente campo vettoriale:

$$2\left(x^2 + \frac{k}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2\left(y^2 + \frac{k}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y} - 4p_1 x\frac{\partial}{\partial p_1} - 4p_2 y\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

(1) Verificare che il campo è hamiltoniano e scrivere un'hamiltoniana H.

(2) Trovare come diventa l'hamiltoniana H a seguito della trasformazione canonica $(x, y, p_1, p_2) \mapsto (X, Y, P_1, P_2)$ generata dalla funzione $S = X^2 y + Y^2 x$.

Prova d'esame – 22 giugno 2018 (B)

TEMA I

Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove in un piano sotto l'azione di una forza centrale con potenziale $U(\rho) = a(\rho - 1)$ (in coordinate polari ρ, θ).

(1) Scritta la lagrangiana, trovare per quali condizioni sul parametro a possono esistere moti circolari uniformi, e determinare per questi moti le relazioni fra energia E, momento angolare J e raggio R dell'orbita.

(2) Per gli stessi moti circolari trovare la relazione fra energia E e periodo T dell'orbita.

TEMA II

Si consideri su $T^*\mathbb{R}^2$, con coordinate (x, y, p_1, p_2), il seguente campo vettoriale:

$$2\frac{\partial}{\partial x} + 2y^2\frac{\partial}{\partial y} - kx\frac{\partial}{\partial p_1} - 4p_2 y\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

(1) Verificare che il campo è hamiltoniano e scrivere un'hamiltoniana H.

(2) Trovare come diventa l'hamiltoniana H a seguito della trasformazione canonica $(x, y, p_1, p_2) \mapsto (X, Y, P_1, P_2)$ generata dalla funzione $S = X^2 y + Y^2 x$.

Prova d’esame – 22 giugno 2018 (C)

TEMA I

Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove in un piano sotto l’azione di una forza centrale con potenziale $U(\rho) = a\rho$ (in coordinate polari ρ, θ).

(1) Scritta la lagrangiana, trovare per quali condizioni sul parametro a possono esistere moti circolari uniformi, e determinare per questi moti le relazioni fra energia E, momento angolare J e raggio R dell’orbita.

(2) Per gli stessi moti circolari trovare la relazione fra energia E e periodo T dell’orbita.

TEMA II

Si consideri su $T^*\mathbb{R}^2$, con coordinate (x, y, p_1, p_2), il seguente campo vettoriale:

$$p_1\left(y^2p_2^4 + 2x^2p_1^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2y^2p_1^2p_2^3\frac{\partial}{\partial y} - xp_1^4\frac{\partial}{\partial p_1} - yp_1^2p_2^4\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

(1) Verificare che il campo è hamiltoniano e scrivere un’hamiltoniana H.

(2) Trovare come diventa l’hamiltoniana H a seguito della trasformazione canonica $(x, y, p_1, p_2) \mapsto (X, Y, P_1, P_2)$ generata dalla funzione $S = \dfrac{x}{X} + \dfrac{y}{Y}$.

Prova d’esame – 22 giugno 2018 (D)

TEMA I

Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove in un piano sotto l’azione di una forza centrale con potenziale $U(\rho) = a\rho^2$ (in coordinate polari ρ, θ).

(1) Scritta la lagrangiana, trovare per quali condizioni sul parametro a possono esistere moti circolari uniformi, e determinare per questi moti le relazioni fra energia E, momento angolare J e raggio R dell’orbita.

(2) Per gli stessi moti circolari trovare la relazione fra energia E e periodo T dell’orbita.

TEMA II

Si consideri su $T^*\mathbb{R}^2$, con coordinate (x, y, p_1, p_2), il seguente campo vettoriale:

$$\left(2x^2p_1^3 - \frac{k}{p_1^3}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(2y^2p_2^3 - \frac{k}{p_2^3}\right)\frac{\partial}{\partial y} - p_1^4x\frac{\partial}{\partial p_1} - p_2^4y\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

(1) Verificare che il campo è hamiltoniano e scrivere un’hamiltoniana H.

(2) Trovare come diventa l’hamiltoniana H a seguito della trasformazione canonica $(x, y, p_1, p_2) \mapsto (X, Y, P_1, P_2)$ generata dalla funzione $S = \dfrac{x}{Y} + \dfrac{y}{X}$.

SOLUZIONI TEMA I

La lagrangiana del sistema è $L = \frac{1}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) + U(\rho)$, θ è coordinata ciclica e quindi si hanno le leggi di conservazione

$$\frac{1}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) + U(\rho) = E, \qquad \rho^2\dot\theta = J$$

sostituendo si ottiene l'equazione di Weierstrass

$$\dot\rho^2 = \Phi(\rho) = \frac{2(E + U(\rho))\rho^2 - J^2}{\rho^2}.$$

Conviene scriverla in questo modo, perché per trovare i moti circolari uniformi dobbiamo individuare gli zeri doppi della funzione $\Phi(\rho)$, ossia risolvere il sistema $\{\Phi(\rho) = 0, \Phi'(\rho) = 0\}$. Se $\Phi(\rho)$ è data dal rapporto fra due funzioni, $\Phi(\rho) = \frac{F(\rho)}{G(\rho)}$, allora si vede facilmente che il sistema $\{\Phi(\rho) = 0, \Phi'(\rho) = 0\}$ è equivalente a $\{F(\rho) = 0, F'(\rho) = 0\}$. Quindi il sistema da risolvere per trovare il raggio di un'orbita circolare $\rho = R$ è

$$\begin{cases} 2(E + U(\rho))\rho^2 - J^2 = 0 \\ -U'(\rho)\rho + 2E - 2U(\rho) = 0. \end{cases}$$

In alternativa, lasciando la funzione di Weierstrass nella forma $\Phi(\rho) = 2(E + U(\rho)) - \frac{J^2}{\rho^2}$ e derivando, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2(E + U(\rho))\rho^2 - J^2 = 0 \\ 2U'(\rho) + 2\frac{J^2}{\rho^3} = 0. \end{cases}$$

In entrambi i modi si ottengono le stesse relazioni $J^2 = -R^3U'(R)$ e $E = -\frac{1}{2}\rho U'(R) - U(R)$: la seconda deve poi essere invertita per ottenere $R = R(E)$ e conseguentemente (sostituendo nell'altra) $J = J(E)$.

Per rispondere al quesito (2), si deve considerare che per un moto circolare uniforme di raggio R con momento angolare J si ha $\theta(t) = \frac{J}{R^2}t + \theta(0)$, quindi il periodo T tale che $\theta(T) - \theta(0) = 2\pi$ è $T = \frac{2\pi R^2}{J}$. Sostituendo i valori $R(E)$ e $J(E)$ trovati si ottiene $T(E)$.

TEMA I (A): $U(\rho) = \frac{a}{\rho}$

$$\Phi(\rho) = \frac{2E\rho^2 + 2a\rho - J^2}{\rho^2}$$

$$\begin{cases} 2E\rho^2 + 2a\rho = J^2 \\ 4E\rho + 2a = 0 \end{cases}$$

dalla seconda si ricava subito $R = -\dfrac{a}{2E}$; inoltre $J^2 = aR$, da cui si vede subito che si hanno soluzioni solo se $a > 0$, dato che R è necessariamente positivo. Da qui si ricava che $J^2 = -\dfrac{a^2}{2E}$. Sostituendo i valori così ottenuti di R e J in funzione di E, si ottiene $T = \dfrac{\pi a}{\sqrt{2}}(-E)^{-3/2}$.

TEMA I (B): $U(\rho) = a(\rho - 1)$

$$\Phi(\rho) = \frac{2E\rho^2 - 2a(\rho-1)\rho^2 - J^2}{\rho^2}$$

$$\begin{cases} 2E\rho^2 + 2a(\rho-1)\rho^2 = J^2 \\ 4E\rho + 2a\rho^2 + 4a(\rho-1) = 0 \end{cases}$$

dalla seconda, considerando che deve essere $\rho > 0$, si ricava $\rho = -\dfrac{2(E-a)}{3a} = R$; sostituendo nella prima si trova $J^2 = \dfrac{8(E-a)^3}{27a^2}$. Si trova anche direttamente $J^2 = -aR^3$ Questo significa che si possono avere moti circolari solo se $a < 0$ (il potenziale dev'essere attrattivo). Sostituendo i valori così ottenuti di R e J in funzione di E, si ottiene $T = -\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3a}\sqrt{E-a}$.
Da notare che il potenziale considerato differisce dal potenziale $U(\rho) = a\rho$ del tema I (C) solo per una costante (uguale ad a), quindi le formule trovate per questo caso corrispondono a quelle del caso (C) ponendo semplicemente $E \mapsto (E - a)$.

TEMA I (C): $U(\rho) = a\rho$

$$\Phi(\rho) = \frac{2E\rho^2 + 2a\rho^3 - J^2}{\rho^2}$$

$$\begin{cases} 2E\rho^2 + 2a\rho^3 = J^2 \\ 4E\rho + 6a\rho^2 = 0 \end{cases}$$

dalla seconda, considerando che deve essere $\rho > 0$, si ricava $\rho = -\dfrac{2E}{3a} = R$; sostituendo nella prima si trova $J^2 = \dfrac{8E^3}{27a^2}$. Si trova anche direttamente $J^2 = -aR^3$. Questo significa che si possono avere moti circolari solo se $a < 0$ (il potenziale dev'essere attrattivo). Sostituendo i valori così ottenuti di R e J in funzione di E, si ottiene $T = -\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3a}\sqrt{E}$.

TEMA I (D): $U(\rho) = a\rho^2$

$$\Phi(\rho) = \frac{2E\rho^2 + 2a\rho^4 - J^2}{\rho^2}$$

$$\begin{cases} 2E\rho^2 + 2a\rho^4 = J^2 \\ 4E\rho + 8a\rho^3 = 0 \end{cases}$$

dalla seconda, considerando che deve essere $\rho > 0$, si ricava $\rho = \sqrt{-\frac{E}{2a}} = R$; sostituendo nella prima si trova $J^2 = -\frac{3E^2}{2a}$. Si trova anche direttamente $J^2 = -2aR^4$. Questo significa che si possono avere moti circolari solo se $a < 0$ (il potenziale dev'essere attrattivo). Sostituendo i valori così ottenuti di R e J, si ottiene $T = 4\pi\sqrt{-\frac{2}{a}}$. Il periodo, dunque, non dipende da E ma è lo stesso per tutti i moti: questo non è sorprendente, dato che il potenziale è quello di un oscillatore armonico isotropo!

SOLUZIONI TEMA II

Dato un generico campo vettoriale

$$\mathbf{X} = A^1\frac{\partial}{\partial x} + A^2\frac{\partial}{\partial y} + B_1\frac{\partial}{\partial p_1} + B_2\frac{\partial}{\partial p_2},$$

se esiste H tale che

$$\begin{cases} A^1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ A^2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \\ B_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ B_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \end{cases}$$

ossia $i_{\mathbf{X}}\omega = dH$, con $\omega = dp_1 \wedge dx + dp_2 \wedge dy$, si deve avere $d(i_{\mathbf{X}}\omega) \equiv 0$: quindi affinché esista H devono essere soddisfatte le sei condizioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_1}{\partial y} - \dfrac{\partial B_2}{\partial x} = 0 \quad \text{poiché deve essere} \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial B_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial A_1}{\partial x} = 0 \quad \text{poiché deve essere} \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_1} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial x} \\ \dfrac{\partial B_1}{\partial p_2} + \dfrac{\partial A_2}{\partial x} = 0 \quad \text{poiché deve essere} \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial p_2} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial x} \\ \dfrac{\partial B_2}{\partial p_1} + \dfrac{\partial A_1}{\partial y} = 0 \quad \text{poiché deve essere} \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_1} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial y} \\ \dfrac{\partial B_2}{\partial p_2} + \dfrac{\partial A_2}{\partial y} = 0 \quad \text{poiché deve essere} \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial y \partial p_2} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial y} \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial p_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial p_1} = 0 \quad \text{poiché deve essere} \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1}. \end{cases}$$

Verificate queste condizioni, si trova H integrando opportunamente le componenti del campo vettoriale:

$$\begin{cases} A^1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \quad \Rightarrow \quad H = \displaystyle\int A^1 dp_1 + f_1(x, y, p_2) \\ A^2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \quad \Rightarrow \quad H = \displaystyle\int A^2 dp_2 + f_2(x, y, p_1) \\ B_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad H = -\displaystyle\int B_1 dx + g_1(y, p_1, p_2) \\ B_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad H = -\displaystyle\int B_2 dy + g_2(x, p_1, p_2) \end{cases}$$

e confrontando le espressioni ottenute si ricava la forma dell'hamiltoniana H (a meno di una costante additiva). Trovata l'hamiltoniana, si procede alla trasformazione canonica. Si scrive

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial S}{\partial x} \\ p_2 = \dfrac{\partial S}{\partial y} \\ P_1 = -\dfrac{\partial S}{\partial X} \\ P_2 = -\dfrac{\partial S}{\partial Y} \end{cases}$$

e si invertono le ultime due equazioni in modo da esplicitare x e y. A questo punto si sostituiscono le ccordinate (x, y, p_1, p_2) in funzione delle (X, Y, P_1, P_2) nell'espressione di H.

TEMA II (A): Con il procedimento descritto si trova:

$$H = 2\,y^2 p_2 + 2\,x^2 p_1 + \frac{1}{2}\,k\,(p_2 + p_1)$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{P_2}{Y} \\ y = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{P_1}{X} \\ p_1 = Y^2 \\ p_2 = X^2 \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}\,{P_1}^2 + \frac{1}{2}\,{P_2}^2 + \frac{1}{2}\,k\left(X^2 + Y^2\right)$$

TEMA II (B): Con il procedimento descritto si trova:

$$H = 2\,y^2 p_2 + 2\,p_1 + \frac{1}{2}\,kx^2$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{P_2}{Y} \\ y = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{P_1}{X} \\ p_1 = Y^2 \\ p_2 = X^2 \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}\,{P_1}^2 + 2\,Y^2 + \frac{1}{8}\,\frac{k{P_2}^2}{Y^2}$$

TEMA II (C): Con il procedimento descritto si trova:

$$H = \frac{1}{2}\,x^2 p_1^4 + \frac{1}{2}\,y^2 p_2^4 p_1^2$$

$$\begin{cases} x = P_1 X^2 \\ y = P_2 Y^2 \\ p_1 = \dfrac{1}{X} \\ p_2 = \dfrac{1}{Y} \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}\left({P_1}^2 + \frac{{P_2}^2}{X^2}\right).$$

TEMA II (D): Con il procedimento descritto si trova:

$$H = \frac{1}{2}\,y^2 p_2^4 + \frac{1}{2}\,x^2 p_1^4 + \frac{1}{2}\,k\left({p_2}^{-2} + {p_1}^{-2}\right)$$

$$\begin{cases} x = P_2 Y^2 \\ y = P_1 X^2 \\ p_1 = \dfrac{1}{Y} \\ p_2 = \dfrac{1}{X} \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}\left({P_1}^2 + {P_2}^2\right) + \frac{k}{2}\left(X^2 + Y^2\right).$$