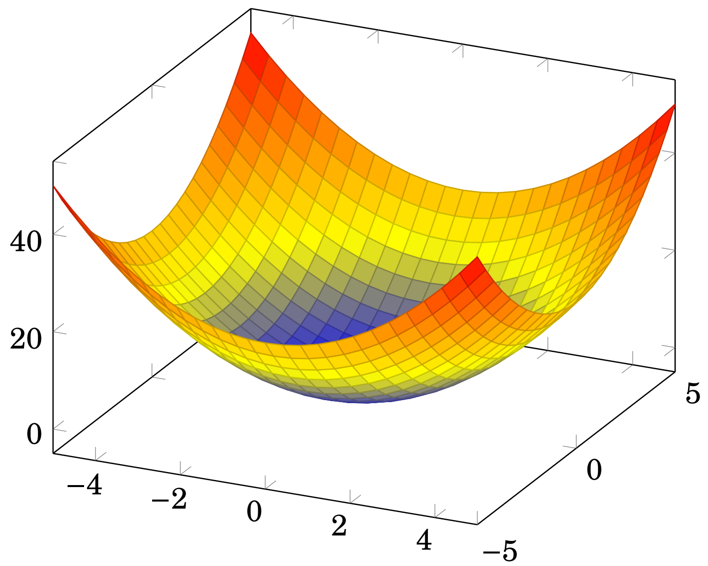
Analisi III

Riassunto da: *"Analisi Matematica 2 - Claudio Canuto, Anita Tabacco"*



Corso di Laurea in Fisica - Corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Settembre 2024

Indice

1 Successioni di funzioni

$$A \subseteq \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}), \; f_n : A \to \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}), \; n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{ccl} N & \to & \{\text{f.ni definite su } A\} \\ n & \mapsto & f_n \end{array}$$

Vogliamo studiare come si comporta $(f_n)_n$ quando $n \to +\infty$.

1.1 Limiti di successioni

Definizione: Convergenza puntuale

Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_n$, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C})$ **converge puntualmente** (o semplicemente) a una funzione f sull'insieme $E \subseteq A$ se

$$\forall x \in E, \; \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Notiamo che quest'ultimo limite è un limite di successione numerica, quindi

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) \text{ t.c. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Definizione: Convergenza uniforme

Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_n$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) **converge uniformemente** su $E \subseteq A$ alla funzione $f : E \to \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ t.c. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ t.c. } \sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

dove l'estremo superiore viene denominato α_n successione positiva (≥ 0):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ t.c. } 0 \leq \alpha_n < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

opure

esempio 1

esempio 2

esempio 3

Teorema 1 - La convergenza unifore preserva la continuità

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tali che

(H1) f_n sono funzioni continue su $E \subseteq A$,

(H2) f_n converge uniformemente a f su E

allora f è continua su E

dimostrazione:

La tesi è

$$\forall x_0 \in E, \ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero che

$$\forall x_0 \in E \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \ \text{ t.c. } \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$$

- Da $(H2)$ convergenza uniforme sappiamo che $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ quindi

$$\exists \hat{n} = \hat{n}(\varepsilon) \ \ : \ \ \alpha_n = \sup|(f_n(x) - f(x))| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall n \geq \hat{n}$$

- Da $(H1)$ abbiamo invece la continuità di $f_{\hat{n}}$ in x_0:

$$\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \ \ : \ \ |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall x \in I_\delta$$

  Ora utilizzando la riscrittura

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{\hat{n}}(x) + f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0) + f_{\hat{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{\hat{n}}(x)| + |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| + |f_{\hat{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 2 - Passa al limite sotto integrale

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

(H1) f_n sono funzioni continue su $[a,b]$,

(H2) f_n converge uniformemente su $[a,b]$

allora

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

dimostrazione:

Dal ***Teorema 1*** sappiamo che f è continua su $[a,b]$ e perciò è integrabile è

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è ben definito.

Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ovvero che

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\tilde{n}=\tilde{n}(\varepsilon)\ :\ |I_n-I|<\varepsilon\ \ \forall n\geq\tilde{n}$$

Utilizziamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned}|I_n-I| = \left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b f_n - f\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n-f| \\ &\leq \int_a^b \alpha_n = \alpha_n(b-a)\end{aligned}$$

e poiché per *(H2)* si ha $\alpha_n\to 0$

$$\exists\tilde{n} : \alpha_n(b-a)<\varepsilon\ \ \forall n\geq\tilde{n}$$

□

esempio 4

Teorema

Sia $(f_n)_n$, $f_n : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tale che

- f_n converga uniformemente a f in $E\subseteq A$,
- f_n siano continue sulla chiusura di E: $\bar{E}$

allora si ha che f_n converge uniformemente a f su $\bar{E}$.

2 Serie di funzioni

Presa $(f_n)_n$ successione di funzioni, $f_n : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), chiamiamo

$$\sum_n f_n(x)$$

serie di funzioni. Definiamo

$$S_N=\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

successione delle ridotte.

Convergenza della serie Diciamo che la serie converge (puntualmente o uniformemente) su un insieme $E\subseteq A$ se lo fa la successione delle ridotte. Si andrà quindi a studiare il limite di S_N che chiamiamo somma della serie.

Teorema 1S

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se

- f_n continue su $E \subseteq A$;
- $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $E \subseteq A$ alla somma $S(x)$

Allora $S(x)$ è continua su E.

Teorema 2S

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $E = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se

- f_n continue su $E \subseteq A$;
- $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $E \subseteq A$ alla somma $S(x)$

Allora

$$\int_a^b \sum f_n(x)dx \quad = \quad \sum \int_a^b f_n(x)dx$$

Definizione:

$$I_s = \{x \quad \text{la serie considerata} \sum f_n(x) \text{converge semplicemente}\}$$

per la serie $\sum x^n$ si ha che $I_s = (-1, 1)$

$$I_a = \{x \quad \text{la serie considerata} \sum |f_n(x)| \text{converge semplicemente}\}$$

Teorema: m-test o criterio di convergenza totale

Date

- $(f_n)_n$ successione di funzioni su $E \subseteq \mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$);
- $(m_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ successione di numeri reali positivi.

tali che

(H1) $|f_n(x)| \leq m_n \ \forall x \in E, \forall n$;

(H2) $\sum m_n(x) < +\infty$.

Allora la serie $\sum f_n(x)$ converge assolutamente in ongi punto di E è uniformemente su E $\Longrightarrow$ la serie converge totalmente.

Teorema 3S

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Se

- $\sum_n f_n$ converge uniformemente su E,
- f_n sono continue su $\bar{E}$

allora $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $\bar{E}$.