1 Calcolo di residui.

Esercizio 1.1

Sviluppare la funzione

$$f(z) = \sin(z)\,,$$

intorno a $z = z_k = \pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$ (i zeri del seno).

Soluzione

Partiamo dalla funzione, e riscriviamo il argomento in termini di $z - z_k$:

$$\sin(z) = \sin((z - z_k) + z_k)$$

$$\Longrightarrow \sin(z) = \sin(z - z_k)\cos(z_k) + \cos(z - z_k)\sin(z_k)\,,$$

dove abbiamo usato la identità trigonometrica $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$. Dato che $z_k = \pi k$, con k intero, abbiamo che $\cos(z_k) = (-1)^k$ e $\sin(z_k) = 0$, quindi

$$\sin(z) = (-1)^k \sin(z - z_k)\,.$$

Data la serie di $\sin(w)$ intorno a $w = 0$

$$\sin(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2\,l+1)!}\, w^{2\,l+1}\,,$$

metendo $w = z - z_k$ troviamo il risultato richiesto

$$\sin(z) = (-1)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2\,l+1)!}\, w^{2\,l+1}\Bigg|_{w=z-z_k}\,.$$

$$\Longrightarrow \sin(z) = (-1)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2\,l+1)!}\, (z - z_k)^{2\,l+1}\,.$$

Si nota che da questa serie si può verificare che tutti i zeri del seno z_k sono zeri semplici, dato che per $z \to z_k$

$$\sin(z) = (-1)^k (z - z_k) + \mathcal{O}(\,(z - z_k)^3\,)\,.$$

Il raggio di convergenza della serie è infinito perché il seno è una funzione intera. In ogni caso si può determinare da Cauchy-Hadamard (con la versione della radice quadrata). Finalmente si nota che la serie è la stessa, a meno del fattore $(-1)^k$, da quella intorno a $z = 0$ **solo perché il punto di sviluppo z_k è sempre uno zero del seno.**

Esercizio 1.2

Studiare la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)} \, ,$$

sia al finito che all'infinito. Calcolare tutti i residui al finito.

Soluzione

- **Studio al finito.** La funzione non ha zeri al finito. Invece, $f(z)$ ha punti singolari quando il seno del denominatore si annulla, per $z = \pi\, k$, con $k \in \mathbb{Z}$, che sono zeri semplici di $\sin(z)$. Quindi $f(z)$ ha poli semplici per $z = \pi\, k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- **Studio all'infinito.** Per studiare il punto $z = \infty$, studiamo $f(1/t)$ per $t = 0$

  $$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\sin(1/t)} \, .$$

  Il limite di $\sin(1/t)$ per $t \to 0$ non esiste, quindi $t = 0$ è un punto singolare. A seguito vediamo che $t = 0$ è una singolarità non isolata di $f(1/t)$.

  Anche se a noi serve studiare solo il punto $t = 0$ (equivalentemente $z = \infty$), tratandosi di una singolarità non isolata, dobbiamo studiare una regione intorno al punto, e verificare che esso sia un punto di accumulazione delle singolarità. Dato che il seno del denominatore ha zeri semplici per

  $$\frac{1}{t} = \pi\, k \, , \qquad \text{con} \qquad k \in \mathbb{Z} \, ,$$

  troviamo che

  $$f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{ha poli semplici per} \quad t_k = \frac{1}{\pi\, k} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

  Un punto t_0 è un punto di singolarià *isolata*, se esiste un intorno in cui non ci sono altri punti singolari, ovvero, se esiste un valore $\rho > 0$ per cui vale

  $$\rho < |t_k - t_0| \, , \quad \text{per tutti i punti singolari } t_k \neq t_0 \, .$$

  Nel nostro caso $t_0 = 0$ e $t_k = 1/(\pi k)$, quindi $t_0 = 0$ sarebbe una singolarità *isolata* se esistesse un ρ positivo

  $$\rho < \frac{1}{\pi |k|} \, , \qquad \forall\, k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \, ,$$

  ovvero

  $$|k| < \frac{1}{\pi \rho} \, , \qquad \forall\, k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \, .$$

Quest'ultimo è impossibile: $|k|$ non può essere contemporaneamente limitato (disugualianza sopra) e non limitato (k prende tutti valori interi tranne zero). Quindi $t = 0$ è una singolarità *non isolata.* Si nota che, seguendo un raggiomento analogo, $t = 0$ è una singolarità non isolata di

$$\frac{1}{\cos(\ 1/t\ )}\,, \quad \frac{1}{\sinh(\ 1/t\ )}\,, \quad \frac{1}{\cosh(\ 1/t\ )}\,.$$

Quindi abbiamo trovato che $f(z)$ ha una singolarità non isolata per $z = \infty$.

- **Residui al finito.** Abbiamo sempre poli semplici al finito, per $z_k = \pi\, k$ ($k \in \mathbb{Z}$), quindi

$$\text{Res}\ \{f(z)\}_{z=z_k} = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{\sin(z)}\,.$$

Vediamo due modi diversi di fare il calcolo.

  - *Metodo 1:* Scriviamo i primi termini della serie del seno intorno a uno zero arbitrario z_k (vedi Esercizio 1.1):

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= (-1)^k \left((z - z_k) - \frac{1}{3!}(z - z_k)^3 + \mathcal{O}((z - z_k)^5) \right) \\
&= (-1)^k (z - z_k) \left(1 - \frac{1}{3!}(z - z_k)^2 + \mathcal{O}((z - z_k)^4) \right) \\
\Longrightarrow \quad \frac{\sin(z)}{z - z_k} &= (-1)^k \left(1 - \frac{1}{3!}(z - z_k)^2 + \mathcal{O}((z - z_k)^4) \right) \\
\Longrightarrow \quad \frac{z - z_k}{\sin(z)} &= \frac{(-1)^k}{1 - \frac{1}{3!}(z - z_k)^2 + \mathcal{O}((z - z_k)^4)}\,,
\end{aligned}$$

  e quindi, facendo il limite per $z \to z_k$ si trova

$$\text{Res}\ \{f(z)\}_{z=z_k} = (-1)^k\,.$$

  - *Metodo 2:* Usando L'Hopital

$$\text{Res}\ \{f(z)\}_{z=z_k} = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{\sin(z)} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{\cos(z_k)} = \frac{1}{\cos(\pi k)}$$

$$\Longrightarrow \ \text{Res}\ \{f(z)\}_{z=z_k} = (-1)^k\,.$$

Esercizio 1.3

Individuare le singolarità, sviluppare in serie di Laurent intorno a $z = 1$ e calcolare il residuo nei punti singolari della funzione:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

Soluzione

Questa è una funzione fratta del tipo

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

dove a numeratore c'è la funzione $f_1(z) = e^{2z}$ e a denominartore la funzione $f_2(z) = (z-1)^3$.

- Studiamo $f_1(z) = e^{2z}$
  - Zeri: $f_1(z) = e^{2z}$ non ha zeri
  - Singolarità: $f_1(z) = e^{2z}$ non ha singolarità
- Studiamo $f_2(z) = (z-1)^3$
  - Zeri: $f_2(z) = (z-1)^3$ ha uno zero di ordine 3 in $z = 1$.
  - Singolarità: $f_2(z) = (z-1)^3$ non ha singolarità

Quindi

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

ha un polo di ordine 3 in $z = 1$ e non ha zeri.

Sviluppiamo ora la funzione $f(z)$ in serie di Laurent attorno a $z_0 = 1$, cioè in potenze di $(z-1)$. Il fattore $\frac{1}{(z-1)^3}$ è già uno sviluppo in potenze di $(z-1)$. Dobbiamo quindi sviluppare l'esponenziale e^{2z} in potenze di $(z-1)$. Noi sappiamo sviluppare l'esponenziale e^{2z} in potenze di z:

$$e^{2z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}\, z^k$$

Parimenti, facendo il cambio di variabile $z \to z' = z - 1$ in ambo i membri,

$$e^{2(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}\,(z-1)^k,$$

otteniamo lo sviluppo dell'esponenziale $e^{2(z-1)}$ in potenze di $(z-1)$. Abbiamo cioè ottenuto sì uno sviluppo intorno a $z_0 = 1$, ma non della funzione e^{2z} che interessa a noi, bensì di

$e^{2(z-1)}$. Se però ora riusciamo a stabilire il legame tra e^{2z} e $e^{2(z-1)}$, possiamo usare lo sviluppo di $e^{2(z-1)}$ in potenze di $(z-1)$. Questo legame è:

$$e^{2(z-1)} = e^{2z-2} = e^{2z}\, e^{-2},$$

da cui segue che

$$e^{2z} = e^2\, e^{2(z-1)}.$$

Inseriamo ora lo sviluppo di $e^{2(z-1)}$ in potenze di $(z-1)$ e otteniamo:

$$e^{2z} = e^2\, e^{2(z-1)} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}\,(z-1)^k.$$

che è lo sviluppo di e^{2z} in potenze di $(z-1)$. Ora che abbiamo lo sviluppo del numeratore intorno a 1, possiamo scrivere lo sviluppo di $f(z)$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^2}{(z-1)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}\,(z-1)^k = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (z-1)^{k-3}}{k!} \\
&= e^2 \left[\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2^2}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{24}(z-1) + \dots \right] \\
&= e^2 \left[\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}(z-1) + \dots \right].
\end{aligned}$$

Lo sviluppo in serie di Laurent conferma il fatto che $z_0 = 1$ è un polo di ordine 3 di $f(z)$: la massima potenza negativa della serie è $(z-1)^{-3}$.

Calcoliamo ora i residui. Avendo $f(z)$ un'unica singolarità isolata in $z = 1$, abbiamo un unico residuo.
Il residuo in $z = 1$ è il coefficiente del termine $(z-1)^{-1}$ dello sviluppo di Laurent. Avendo già calcolato lo sviluppo di Laurent, abbiamo che:

$$\left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \right\}_{z=1} = 2\, e^2.$$

Questo residuo si poteva anche calcolare con la formula per il residuo in un polo di ordine 3:

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathrm{Res}\, \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \right\}_{z=1} &= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-1)^3\, \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \right] \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} e^{2z} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} 4\, e^{2z} = 2\, e^2.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.4

Studiare la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \left(\frac{1}{1 - e^z} \right) ,$$

sia al finito che all'infinito. Calcolare il residuo per $z = 0$.

Soluzione

Studio al finito

La funzione non si annulla mai al finito. Invece, $f(z)$ ha delle singolarità quando il denominatore si annulla:

$$1 - e^z = 0 \implies e^z = 1 \implies e^z = e^{i\,2\pi k} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies z_k = i\,2\pi k\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

I punti z_k sono zeri semplici del denominatore dato che

$$\lim_{z \to z_k} 1 - e^z = 0\,, \qquad \lim_{z \to z_k} \frac{d}{dz}(1 - e^z) = \lim_{z \to z_k} (-e^z) = -e^{z_k} = -1 \neq 0\,.$$

Quindi, z_k sono poli semplici di $f(z)$.

Studio all'infinito

Per $z = \infty$ studiamo $f(1/t)$ per $t = 0$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{1 - e^{1/t}}\,,$$

notiamo che il denominatore su può scrivere in termini del seno iperbolico

$$1 - e^{1/t} = e^{1/(2t)}\left(e^{-1/(2t)} - e^{1/(2t)}\right) = -2\,e^{1/(2t)} \sinh\left(\frac{1}{2t}\right)\,,$$

e quindi

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{e^{-\frac{1}{2t}}}{2} \frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{2t}\right)}\,. \tag{1}$$

Sapendo che il seno iperbolico nel demnominatore ha una singolarità non isolata per $t = 0$, $f(z)$ ha una singolarità non isolata per $z = \infty$.

Residuo per $z = 0$.

Dato che $z = 0$ è un polo semplice di $f(z)$, abbiamo

$$\mathrm{Res}\left\{\frac{1}{1 - e^z}\right\}_{z=0} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{1 - e^z}\,.$$

Vediamo due metodi per trovare il residuo.

- *Metodo 1:*
  Scriviamo i primi termini della serie di potenze di $1 - e^z$

$$1 - e^z = 1 - \big(1 + z + \mathcal{O}(z^2)\big) = -\big(z + \mathcal{O}(z^2)\big) = -z\,(1 + \mathcal{O}(z)) \;.$$

  Per la funzione dentro il limite sopra

$$\frac{z}{1-e^z} = -\frac{z}{z\,(1+\mathcal{O}(z))} = \frac{-1}{1+\mathcal{O}(z)}\,,$$

  e quindi

$$\mathrm{Res}\left\{\frac{1}{1-e^z}\right\}_{z=0} = \lim_{z\to 0}\,\frac{-1}{1+\mathcal{O}(z)} = -1\,.$$

- *Metodo 2:*
  Usando L'Hôpital

$$\mathrm{Res}\left\{\frac{1}{1-e^z}\right\}_{z=0} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{1-e^z} = \lim_{z\to 0}\frac{(z)'}{(1-e^z)'} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{-e^z} = -1\,.$$

Esercizio 1.5

Studiare la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \left(\frac{1}{1-e^z}\right)^2 ,$$

sia al finito che all'infinito. Calcolare il residuo per $z = 0$.

Soluzione

Studio al finito

La funzione non si annulla mai al finito. Invece, $f(z)$ ha delle singolarità quando $1 - e^z$ si annulla:

$$1 - e^z = 0 \implies e^z = 1 \implies e^z = e^{i\,2\pi k} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies z_k = i\,2\pi k\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

I punti z_k sono zeri semplici $1 - e^z$.

$$\lim_{z\to z_k} 1 - e^z = 0\,, \qquad \lim_{z\to z_k} \frac{d}{dz}(1-e^z) = \lim_{z\to z_k}(-e^z) = -e^{z_k} = -1 \neq 0\,.$$

Di conseguenza, z_k sono zeri dopii di $(1-e^z)^2$. Quindi, la funzione $f(z)$ ha dei poli doppi per $z = z_k$.

Studio all'infinito

Per $z = \infty$ studiamo $f(1/t)$ per $t = 0$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{1-e^{1/t}}\right)^2 ,$$

notiamo che $1 - e^{1/t}$ si può scrivere in termini del seno iperbolico

$$1 - e^{1/t} = e^{1/(2t)}\left(e^{-1/(2t)} - e^{1/(2t)}\right) = -2\,e^{1/(2t)}\sinh\left(\frac{1}{2t}\right) ,$$

e quindi

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{4}\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{1}{2t}\right)}\,.$$

Sapendo che il seno iperbolico nel demnominatore ha una singolarità non isolata per $t = 0$, $f(z)$ ha una singolarità non isolata per $z = \infty$.

Residuo per $z = 0$.

Vediamo due metodi per trovare il residuo.

– *Metodo 1:*

Dato che $z = 0$ è un polo doppio di $f(z)$, abbiamo

$$\text{Res}\left\{\left(\frac{1}{1-e^z}\right)^2\right\}_{z=0} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(1-e^z)^2}\,.$$

Invece che utilizzare L'Hôpital, proviamo a scrivere i primi termini dello sviluppo della funzione $z^2/(1-e^z)^2$. Sapendo che $1/(1-e^z)^2$ ha un polo doppio per $z = 0$, $z^2/(1-e^z)^2$ deve essere una funzione regolare non nulla per $z = 0$. Per capire quanti termini ci servono della serie consideriamo lo sviluppo (senza calcolarlo), dentro della espressione del residuo

$$\text{Res}\left\{\left(\frac{1}{1-e^z}\right)^2\right\}_{z=0} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\sum_{l=0}^{\infty} C_l\, z^l\right),$$

dove la serie infinita rappresenta la serie di Taylor di $z^2/(1-e^z)^2$. Calcolando la derivata abbiamo

$$\begin{aligned}
&\text{Res}\left\{\left(\frac{1}{1-e^z}\right)^2\right\}_{z=0} = \lim_{z\to 0}\left(\sum_{l=0}^{\infty} C_l\; l\; z^{l-1}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\sum_{l=0}^{\infty} C_{l+1}\;(l+1)\; z^l\right),\\
\Longrightarrow\; &\text{Res}\left\{\left(\frac{1}{1-e^z}\right)^2\right\}_{z=0} = \lim_{z\to 0}\left(C_1 + \mathcal{O}(z)\right) = C_1,
\end{aligned}$$

cioè, il residuo di $1/(1-e^z)^2$ per $z = 0$ è uguale al coefficiente del termine ordine z della serie di Taylor di $z^2/(1-e^z)^2$. Quindi ci serve trovare la serie di $z^2/(1-e^z)^2$ fino al termine ordine z. Partiamo dalla serie di $(1-e^z)^2$

$$\begin{aligned}
(1-e^z)^2 &= \left[1 - 1 - z - z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)\right]^2\\
&= \left[z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)\right]^2\\
&= \left[z\left(1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right)\right]^2\\
&= z^2\,\left[\left(1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right)\right]^2\,,
\end{aligned}$$

e quindi abbiamo

$$\frac{z^2}{(1-e^z)^2} = \frac{z^2}{z^2\,\left[(1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2))\right]^2} = \frac{1}{\left[1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right]^2}\,.$$

Finalmente, dobbiamo portare la serie al numeratore. Usando la approssimazione

$$(1+\delta)^m = 1 + m\,\delta + \mathcal{O}(\delta^2), \qquad \text{per } \delta \to 0\,,$$

con $m = -2$ e $\delta = z/2 + \mathcal{O}(z^2)$, troviamo

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{(1-e^z)^2} &= 1 - 2\left[z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right] + \mathcal{O}\left[z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right]^2 \\
&= 1 - z + \mathcal{O}(z^2)\,, \implies C_1 = -1
\end{aligned}$$

dove nell'ultima riga abbiamo usato il fatto che il termine dominante di $\mathcal{O}\left[z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right]^2$ è ordine $\mathcal{O}(z^2)$. Come descritto prima, il residuo è uguale a $C_1 = -1$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left\{\left(\frac{1}{1-e^z}\right)^2\right\}_{z=0} &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(1 - z + \mathcal{O}(z^2)\right) \\
&= \lim_{z\to 0}\left(-1 + \mathcal{O}(z)\right) = -1\,.
\end{aligned}$$

– *Metodo 2:*
Possiamo direttamente determinare il coefficiente d_{-1} della serie di Laurent di $f(z)$. Iniziamo dallo sviluppo di (similmente a quanto fatto per il metodo 1)

$$\begin{aligned}
(1-e^z)^2 &= \left[1 - 1 - z - z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)\right]^2 \\
&= \left[z + z^2/2 + \mathcal{O}(z^3)\right]^2 \\
&= \left[z\left(1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right)\right]^2 \\
&= z^2\,\left[\left(1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right)\right]^2\,,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{(1-e^z)^2} = \frac{1}{z^2\,\left[(1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2))\right]^2} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{\left[1 + z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right]^2}\,.$$

Finalmente, dobbiamo portare la serie al numeratore. Usando la approssimazione

$$(1+\delta)^m = 1 + m\,\delta + \mathcal{O}(\delta^2), \qquad \text{per } \delta \to 0\,,$$

con $m = -2$ e $\delta = z/2 + \mathcal{O}(z^2)$, troviamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-e^z)^2} &= \frac{1 - 2\left[z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right] + \mathcal{O}\left[z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right]^2}{z^2} \\
&= \frac{1 - z + \mathcal{O}(z^2)}{z^2} \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \mathcal{O}(1)\,, \implies \operatorname{Res}\left\{\left(\frac{1}{1-e^z}\right)^2\right\}_{z=0} = d_{-1} = -1.
\end{aligned}$$

dove nella seconda riga abbiamo usato il fatto che il termine dominante di $\mathcal{O}\left[z/2 + \mathcal{O}(z^2)\right]^2$ è ordine $\mathcal{O}(z^2)$.