1 Studio di Funzioni al finito.

Exercise 1.1

Studiare la funzione:

$$f(z) = e^z$$

Soluzione

- **Zeri**

  L'esponenziale non si annulla mai, quindi la funzione non ha zeri.

- **Singolarità**

  Poiché lo svipullo di Taylor dell'esponenziale intorno all'origine

  $$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

  converge su tutto $\mathbb{C}$, si deduce che e^z è una funzione intera, cioè non ha singolarità al finito.

Exercise 1.2

Studiare la funzione:

$$f(z) = \sin z$$

Soluzione

- **Zeri**

  Per il seno abbiamo che, per $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = 0$ per $x = \pi\, m$, con $m \in \mathbb{Z}$. Prima, dimostriamo che per variabile complessa z, abbiamo solo quelli zeri sulla retta reale. Scriviamo

  $$\sin(z) = 0 \implies \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \implies e^{iz} = e^{-iz} \implies e^{2iz} = 1\,,$$

  da cui possiamo dire che

  $$e^{2iz} = e^{i2\pi m},\ m \in \mathbb{Z} \implies z = \pi\, m,\ m \in \mathbb{Z}\,.$$

  Quindi la funzione seno (nel campo complesso) si annulla quando l'argomento del seno è un multiplo intero di π:

  $$\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \quad \Leftrightarrow \quad z = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

  Per capire l'ordine degli zeri, procediamo considerando la sequenza delle derivate:

  1. Abbiamo già visto che:

     $$\lim_{z \to m\pi} \sin z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = m\pi \text{ è zero di ordine } n \geq 1 \text{ e si passa al punto 2.}$$

  2. Ora studiamo $f'(z)$:

     $$f'(z) = \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

     Il limite per $z \to m\pi$ di $f'(z)$ è quindi dato da:

     $$\lim_{z \to m\pi} \frac{d}{dz} \sin z = \lim_{z \to m\pi} \cos z = \cos(m\pi) = (-1)^m \neq 0$$

     Perciò i punti $z = m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) sono zeri di ordine $n = 1$ (zeri semplici) di $\sin z$.

- **Singolarità**

  Poiché lo svipullo di Taylor del seno intorno all'origine

  $$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

  converge su tutto $\mathbb{C}$, si deduce che $\sin z$ è una funzione intera, cioè non ha singolarità al finito.

Exercise 1.3

Studiare la funzione:

$$f(z) = \cos z$$

Soluzione

- **Zeri**

  Per il coseno abbiamo che, per $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 0$ per $x = \pi(1/2 + m)$, con $m \in \mathbb{Z}$. Prima, dimostriamo che per variabile complessa z, abbiamo solo quelli zeri sulla retta reale. Scriviamo

  $$\cos(z) = 0 \implies \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \implies e^{iz} = -e^{-iz} \implies e^{2iz} = -1\,,$$

  da cui possiamo dire che

  $$e^{2iz} = e^{i(\pi+2\pi m)},\ m \in \mathbb{Z} \implies z = \pi(1/2 +\ m),\ m \in \mathbb{Z}\,.$$

  Quindi la funzione coseno (nel campo complesso) si annulla quando:

  $$\cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \left(\frac{1}{2} + m\right)\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

  Per capire l'ordine degli zeri, procediamo considerando la sequenza delle derivate:

  1. Abbiamo già visto che:

     $$\lim_{z\to(1/2+m)\pi} \cos z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = (1/2 + m)\pi \text{ è zero di ordine } n \geq 1 \text{ e si passa al punto 2.}$$

  2. Ora studiamo $f'(z)$:

     $$f'(z) = \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

     Il limite per $z \to (1/2 + m)\pi$ di $f'(z)$ è quindi dato da:

     $$\lim_{z\to(1/2+m)\pi} \frac{d}{dz}\cos z = \lim_{z\to(1/2+m)\pi} (-\sin z) = -\sin((1/2+m)\pi) = (-1)^(m+1) \neq 0$$

     Perciò i punti $z = (1/2 + m)\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) sono zeri di ordine $n = 1$ (zeri semplici) di $\cos z$.

- **Singolarità**

  Poiché lo svipullo di Taylor del coseno intorno all'origine

  $$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

  converge su tutto $\mathbb{C}$, si deduce che $\cos z$ è una funzione intera, cioè non ha singolarità al finito.

Exercise 1.4

Studiare la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

e scriverne lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$.

Soluzione

- **Studio della funzione**

  Questa è una funzione fratta del tipo

  $$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

  dove a numeratore c'è la funzione $f_1(z) = \sin z$ e a denominartore la funzione $f_2(z) = z$.

  - Studiamo $f_1(z) = \sin z$
    - Zeri:

      $$f_1(z) = \sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \quad \Leftrightarrow \quad z = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

      che, come abbiamo visto dall'esercizio 2, sono tutti zeri semplici.
    - Singolarità: La funzione $f_1(z) = \sin z$ non ha singolarità.
  - Studiamo $f_2(z) = z$
    - Zeri: $f_2(z) = z$ ha uno zero semplice in $z = 0$.
    - Singolarità: $f_2(z) = z$ non ha singolarità.

  Quindi per la funzione

  $$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\sin z}{z}$$

  dobbiamo trattare separatamente il punto $z = 0$ dagli altri zeri del numeratore e abbiamo:

  - $z = 0$:

    $$\begin{array}{c} f_1(z) \text{ ha uno zero di ordine} \\ n_1 = 1 \text{ (semplice) in } z = 0 \\ \text{e} \\ f_2(z) \text{ ha uno zero di ordine} \\ n_2 = 1 \text{ (semplice) in } z = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(z) \text{ è regolare e non nulla in } z = 0$$

  - $z = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$:

    $$\begin{array}{c} f_1(z) \text{ ha zeri semplici} \\ \text{e} \\ f_2(z) \text{ è regolare e non nulla} \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(z) \text{ ha zeri semplici}$$

Riassumendo,
$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$
ha zeri semplici in $z = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ e non ha singolarità.

- **Sviluppo in serie intorno a $z = 0$**

  Poiché $z = 0$ è un punto regolare di $f(z)$, ci aspettiamo che lo sviluppo in serie intorno a questo punto sia uno sviluppo di Taylor. Procediamo usando lo sviluppo in serie del seno:
$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \dots$$
  Questa serie, come quella del seno converge su tutto $\mathbb{C}$.

Exercise 1.5

Studiare la funzione:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

e scriverne lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$.

Soluzione

- **Zeri**

  Essendo un'esponenziale, la funzione non ha zeri (l'esponenziale non si annulla mai).

- **Singolarità**

  Per quanto riguarda le singolarità, l'esponenziale tende a infinito, quando l'esponente va ad infinito. In questo caso quindi l'esponente va ad infinito se

  $$\frac{1}{z} \to \infty$$

  cioè se

  $$z \to 0$$

  Quindi l'unica singolarità è in $z_0 = 0$ che è quindi una singolarità isolata.

  Per capire di che singolarità si tratta, sfruttiamo il fatto di conoscere lo sviluppo in serie dell'esponenziale:

  $$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

  Sostituendo in entrambi i membri $z \to 1/z$, otteniamo[1]:

  $$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/z)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

  Per capire se si tratta di una singolarità essenziale o di un polo, dobbiamo capire se la serie ha infinite potenze negative o se si ferma ad un valore negativo finito. Questo si può vedere in vari modi.

  Per esempio si possono scrivere esplicitamente i termini della serie:

  $$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} \quad &= \quad 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-3}}{6} + \frac{z^{-4}}{24} + \dots \\ &= \quad 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

[1] Questa sostituzione in entrambi i membri è lecita solo perché il raggio di convergenza dello sviluppo in serie dell'esponenziale è infinito. In generale lo sviluppo di $f(z)$ intorno a $z = 0$ può essere usato per ricavare lo sviluppo di $f(1/z)$ con la sostituzione $z \to 1/z$ solo se il raggio di convergenza della serie è infinito.

Come si vede le potenze di z acquistano valori sempre più negativi al crescere di k. Quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale di $e^{\frac{1}{z}}$.

Un altro modo per vederlo è quello di cercare di portare la serie nella forma:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k z^k$$

e vedere se i coefficienti d_k si annullano per k inferiori ad un certo valore n. Per portare la serie nella forma voluta, partiamo da

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!}$$

In questa formula vogliamo trasformare $z^{-k} \to z^k$, cioè $-k \to k$. Per fare questo, basta fare la sostituzione $-k = k'$ (cioè $k = -k'$):

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{k'=0}^{-\infty} \frac{z^{k'}}{(-k')!}$$

Per determinare gli estremi di variabilità della serie in k', abbiamo usato il fatto che:

$$\text{Se } k = 0, \text{ allora } k' = -k = 0; \qquad \text{Se } k = +\infty, \text{ allora } k' = -k = -\infty$$

A questo punto riordiniamo in senso crescente la somma su k'

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k'=0}^{-\infty} \frac{z^{k'}}{(-k')!} = \sum_{k'=-\infty}^{0} \frac{z^{k'}}{(-k')!}$$

e rinominiamo $k' \to k$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{z^{k}}{(-k)!}$$

per ottenere la serie nella forma voluta. Come si vede le potenze positive si fermano a $k = 0$, mentre quelle negative proseguono fino a $-\infty$, da cui deduciamo nuovamente che in $z = 0$ la funzione ha una singolarità essenziale.

- **Sviluppo in serie intorno a $z = 0$**

  Dal punto precedente abbiamo che lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$ è:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{z^{k}}{(-k)!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^4} + \dots$$

Exercise 1.6

Studiare la funzione:

$$f(z) = \cos\frac{1}{z}$$

e scriverne lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$.

Soluzione

- **Zeri**

  La funzione coseno si annulla quando l'argomento del coseno è un multiplo dispari di $\pi/2$:

  $$\cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2m+1}{2}\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

  Nel nostro caso avremo quindi:

  $$\cos\frac{1}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{2m+1}{2}\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2}{2m+1}\frac{1}{\pi}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

  Per capire l'ordine degli zeri, procediamo considerando la sequenza delle derivate:

  1. Abbiamo già visto che:

     $$\lim_{z \to \frac{2}{2m+1}\frac{1}{\pi}} \cos\frac{1}{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{2}{2m+1}\tfrac{1}{\pi} \text{ è zero di ordine } n \geq 1 \text{ e si passa al punto 2.}$$

  2. Ora studiamo $f'(z)$:

     $$f'(z) = \frac{d}{dz}\cos\frac{1}{z} = -\sin\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = \sin\frac{1}{z}\frac{1}{z^2}$$

     Il limite per $z \to \frac{2}{2m+1}\frac{1}{\pi}$ di $f'(z)$ è quindi dato da:

     $$\begin{aligned} \lim_{z \to \frac{2}{2m+1}\frac{1}{\pi}} \frac{d}{dz}\cos\frac{1}{z} &= \lim_{z \to \frac{2}{2m+1}\frac{1}{\pi}} \sin\frac{1}{z}\frac{1}{z^2} = \sin\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)\left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)^2 \\ &= (-1)^m \left(\frac{2m+1}{2}\pi\right)^2 \neq 0 \end{aligned}$$

     Perciò i punti $z = \frac{2}{2m+1}\frac{1}{\pi}$ ($m \in \mathbb{Z}$) sono zeri di ordine $n = 1$ (zeri semplici) di $\cos\frac{1}{z}$.

- **Singolarità**

  I punti singolari del coseno, si hanno quando l'argomento del coseno tende ad infinito. In questo caso quindi l'argomento del coseno va ad infinito se

  $$\frac{1}{z} \to \infty$$

cioè se

$$z \to 0$$

Quindi l'unica singolarità è in $z_0 = 0$ che è quindi una singolarità isolata.

Per capire di che singolarità si tratta, sfruttiamo il fatto di conoscere lo sviluppo in serie del coseno:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Sostituendo in entrambi i membri $z \to 1/z$, otteniamo[2]:

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k}.$$

Per capire se si tratta di una singolarità essenziale o di un polo, dobbiamo capire se la serie ha infinite potenze negative o se si ferma ad un valore negativo finito. Questo si può vedere in vari modi.

Per esempio si possono scrivere esplicitamente i termini della serie:

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k} = 1 - \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-4}}{24} + \cdots = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^4} + \ldots$$

Come si vede le potenze di z acquistano valori sempre più negativi al crescere di k. Quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale di $\cos \frac{1}{z}$.

Un altro modo per vederlo è quello di cercare di portare la serie nella forma:

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k z^{2k}$$

e vedere se i coefficienti d_k si annullano per k inferiori ad un certo valore n. Notiamo che abbiamo scritto z^{2k} (cioè esponenti pari di z) invece della forma generale z^k, perchè si vede dalla formula

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k}.$$

che la serie ha solo potenze pari. Per arrivare alla formula voluta dobbiamo quindi trasformare z^{-2k} in z^{2k}, cioè $-2k$ in $2k$. Per fare questo, facciamo la sostituzione

$$-2k = 2k', \quad \Leftrightarrow \quad k' = -k \quad \Leftrightarrow \quad k = -k'.$$

[2] Questa sostituzione in entrambi i membri è lecita solo perché il raggio di convergenza dello sviluppo in serie dell'esponenziale è infinito. In generale lo sviluppo di $f(z)$ intorno a $z = 0$ può essere usato per ricavare lo sviluppo di $f(1/z)$ con la sostituzione $z \to 1/z$ solo se il raggio di convergenza della serie è infinito.

Ottenendo perciò:

$$\cos\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k} = \sum_{k'=0}^{-\infty} \frac{(-1)^{-k'}}{(-2k')!} z^{2k'}$$

Per determinare gli estremi di variabilità della serie in k', abbiamo usato il fatto che:

$$\text{Se } k = 0, \text{ allora } k' = -k = 0; \qquad \text{Se } k = +\infty, \text{ allora } k' = -k = -\infty$$

A questo punto riordiniamo in senso crescente la somma su k'

$$\cos\frac{1}{z} = \sum_{k'=0}^{-\infty} \frac{(-1)^{-k'}}{(-2k')!} z^{2k'} = \sum_{k'=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-k'}}{(-2k')!} z^{2k'}$$

e rinominiamo $k' \to k$

$$\cos\frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-k}}{(-2k)!} z^{2k}$$

per ottenere la serie nella forma voluta. Come si vede le potenze positive si fermano a $k = 0$, mentre quelle negative proseguono fino a $-\infty$, da cui deduciamo nuovamente che in $z = 0$ la funzione ha una singolarità essenziale.

- **Sviluppo in serie intorno a $z = 0$**

  Dal punto precedente abbiamo che lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$ è:

$$\cos\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{-2k} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-k}}{(-2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^4} + \dots$$

Exercise 1.7

Studiare la funzione:

$$f(z) = \sin\frac{1}{z}$$

e scriverne lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z = 0$.

Soluzione

- **Zeri**

  La funzione seno si annulla quando l'argomento del seno è un multiplo intero di π:

  $$\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \quad \Leftrightarrow \quad z = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

  Nel nostro caso avremo quindi:

  $$\sin\frac{1}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

  Qui abbiamo eliminato il valore

  $$\frac{1}{z} = 0,$$

  perché non può mai essere raggiunto per valori finiti di z. Quindi gli zeri di $\sin(1/z)$ sono dati da:

  $$\sin\frac{1}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0, \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{m\pi}, \quad m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0.$$

  Per capire l'ordine degli zeri, procediamo considerando la sequenza delle derivate:

  1. Abbiamo già visto che:

     $$\lim_{z\to\frac{1}{m\pi}} \sin\frac{1}{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \tfrac{1}{m\pi} \text{ è zero di ordine } n \geq 1 \text{ e si passa al punto 2.}$$

  2. Ora studiamo $f'(z)$:

     $$f'(z) = \frac{d}{dz}\sin\frac{1}{z} = \cos\frac{1}{z}\,\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\,\cos\frac{1}{z}\,\frac{1}{z^2}$$

     Il limite per $z \to \frac{1}{m\pi}$ di $f'(z)$ è quindi dato da:

     $$\begin{aligned}\lim_{z\to\frac{1}{m\pi}} \frac{d}{dz}\sin\frac{1}{z} &= -\lim_{z\to\frac{1}{m\pi}} \cos\frac{1}{z}\,\frac{1}{z^2} \\ &= -\cos(m\pi)\,(m\pi)^2 = -\,(-1)^m\,(m\pi)^2 \neq 0\end{aligned}$$

     Perciò i punti $z = \frac{1}{m\pi}$ $(m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0)$ sono zeri di ordine $n = 1$ (zeri semplici) di $\sin\frac{1}{z}$.

- **Singolarità**

  I punti singolari del seno, si hanno quando l'argomento del seno tende ad infinito. In questo caso quindi l'argomento del seno va ad infinito se

  $$\frac{1}{z} \to \infty$$

  cioè se

  $$z \to 0$$

  Quindi l'unica singolarità è in $z_0 = 0$ che è quindi una singolarità isolata.

  Per capire di che singolarità si tratta, sfruttiamo il fatto di conoscere lo sviluppo in serie del seno:

  $$\sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

  Sostituendo in entrambi i membri $z \to 1/z$, otteniamo[3]:

  $$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1}.$$

  Per capire se si tratta di una singolarità essenziale o di un polo, dobbiamo capire se la serie ha infinite potenze negative o se si ferma ad un valore negativo finito. Questo si può vedere in vari modi.

  Per esempio si possono scrivere esplicitamente i termini della serie:

  $$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1} = z^{-1} - \frac{z^{-3}}{6} + \dots = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \dots$$

  Come si vede le potenze di z acquistano valori sempre più negativi al crescere di k. Quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale di $\sin\frac{1}{z}$.

  Un altro modo per vederlo è quello di cercare di portare la serie nella forma:

  $$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k z^{2k+1}$$

  e vedere se i coefficienti d_k si annullano per k inferiori ad un certo valore n. Notiamo che abbiamo scritto z^{2k+1} (cioè esponenti dispari di z) invece della forma generale z^k, perchè si vede dalla formula

  $$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1}$$

[3] Questa sostituzione in entrambi i membri è lecita solo perché il raggio di convergenza dello sviluppo in serie dell'esponenziale è infinito. In generale lo sviluppo di $f(z)$ intorno a $z = 0$ può essere usato per ricavare lo sviluppo di $f(1/z)$ con la sostituzione $z \to 1/z$ solo se il raggio di convergenza della serie è infinito.

che la serie ha solo potenze dispari. Per arrivare alla formula voluta dobbiamo quindi trasformare z^{-2k-1} in z^{2k+1}, cioè $-2k-1$ in $2k+1$. Per fare questo, facciamo la sostituzione

$$-2k-1 = 2k'+1, \quad \Leftrightarrow \quad k' = -k-1 \quad \Leftrightarrow \quad k = -k'-1.$$

Ottenendo perciò:

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1} = \sum_{k'=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{-k'-1}}{[2(-k'-1)+1]!} z^{2k'+1} = \sum_{k'=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{-k'-1}}{(-2k'-1)!} z^{2k'+1}$$

Per determinare gli estremi di variabilità della serie in k', abbiamo usato il fatto che:

Se $k=0$, allora $k' = -k-1 = -1$; Se $k=+\infty$, allora $k' = -k-1 = -\infty$

A questo punto riordiniamo in senso crescente la somma su k'

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k'=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{-k'-1}}{(-2k'-1)!} z^{2k'+1} = \sum_{k'=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{-k'-1}}{(-2k'-1)!} z^{2k'+1}$$

e rinominiamo $k' \to k$

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{-k-1}}{(-2k-1)!} z^{2k+1}$$

per ottenere la serie nella forma voluta. Come si vede le potenze positive non ci sono (la serie si ferma a $k=-1$), mentre quelle negative proseguono fino a $-\infty$, da cui deduciamo nuovamente che in $z=0$ la funzione ha una singolarità essenziale.

- **Sviluppo in serie intorno a $z=0$**

  Dal punto precedente abbiamo che lo sviluppo in serie di potenze intorno a $z=0$ è:

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-2k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{-k-1}}{(-2k-1)!} z^{2k+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \ldots$$