Relazione di laboratorio - Pendolo semplice

Misura del periodo di un pendolo semplice

Federico Cesari
1096759

corso A
Università degli studi di Torino, Torino
4 aprile 2024

Indice

1 Scopo dell'esperienza

L'esperienza di laboratorio ha lo scopo di studiare il periodo di un pendolo semplice del quale conosciamo le espressioni del periodo teorico (in condizioni ideali e prive di attrito) al variare della sua lunghezza e dell'angolo di partenza. Verrà quindi misurato il periodo e se ne osserverà la variazione in funzione dell'angolo, della lunghezza e della massa appesa ad esso.

Aspettative Dall'equazione teorica del periodo del pendolo

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4}\sin(\vartheta/2)^2\right] \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

si vede che per angoli maggiori di 10° il periodo dipenda dalla lunghezza l del pendolo e dall'angolo di oscillazione ϑ, mentre per angoli piccoli l'angolo di partenza diventi sempre più trascurabile. Non dipende invece dalla massa.

2 Strumentazione

La strumentazione utilizzata durante l'esperienza è:

Strumento	**Sensibilità**
Cr. Analogico	0.2s
Cr. Digitale	0.01s
Fotocellula	0.001s
Goniometro	1°
Asta graduata	0.1cm
Calibro	0.01mm
Bilancia digitale	1g

In più sono servite alcune sfere di diversi materiali e naturalmente un pendolo semplice di lunghezza variabile.

3 Scelta strumento di misura

Al fine di stabilire il migliore strumento di misura per le succesive misurazioni, registro 8 misure del periodo del pendolo prima con un angolo di partenza $\vartheta = 5° \pm 1°$ e poi con $\vartheta = 30° \pm 1°$, utilizzando un cronometro analogico, uno digitale e una fotocellula. Lo strumento che mostrerà discrepanze significative tra il periodo calcolato con $\vartheta = 5° \pm 1°$ e $\vartheta = 30° \pm 1°$ sarà quello utilizzato per i testi successivi. Procedo quindi con le misurazioni dei periodi del pendolo a cui è stata agganciata una sfera di massa $m = (110 \pm 1)g$ evidenziando il periodo medio $\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{s})$ e la deviazione standard σ_{T_5} delle 8 misure.

capire se aggiungere errori per T medi.

	C.Analogico	C. Digitale	Fotocellula
	$T(s) \pm 0.2s$	$T(s) \pm 0.01s$	$T(s) \pm 0.001s$
	1.6	1.63	1.702
$\vartheta = 5°$	1.8	1.65	1.703
$\pm 1°$	1.5	1.60	1.703
	1.8	1.71	1.703
	1.7	1.71	1.703
	1.5	1.65	1.702
	1.6	1.70	1.703
	1.5	1.70	1.703
$\bar{\mathbf{T}}_5(\mathbf{s})$	**1.6**	**1.67**	**1.703**
σ_{T_5}	0.05	0.02	0.000

	C.Analogico	C. Digitale	Fotocellula
	$T(s) \pm 0.2s$	$T(s) \pm 0.01s$	$T(s) \pm 0.001s$
	1.8	1.65	1.733
$\vartheta = 30°$	1.7	1.67	1.733
$\pm 1°$	1.6	1.70	1.733
	1.7	1.62	1.733
	1.7	1.70	1.731
	1.8	1.72	1.733
	1.7	1.80	1.733
	1.6	1.69	1.732
$\bar{\mathbf{T}}_{30}(\mathbf{s})$	**1.7**	**1.69**	**1.715**
$\sigma_{T_{30}}$	0.08	0.03	0.0005

Da questi primi set di dati noto subito che la deviazione standard dei periodi misurati dal cronometro digitale è più grande della sensibilità dello strumento, decido quindi scegliere la deviazione standard come errore sulla singola misura.

Per i test successivi mi servirà utilizzare uno strumento di misura del periodo che distingua periodi differenti per angoli di oscillazioni differenti, quindi per evidenziare quale dei tre strumenti fornisca periodi significativamente distinguibili per i due angoli di partenza sottopongo le coppie di periodi medi a due test Z (utilizzando in uno $\sigma_{\bar{T}_5}$ e nell'altro $\sigma_{\bar{T}_30}$):

Z	$\sigma_{\bar{T}_5}$	$\sigma_{\bar{T}_{30}}$
$z_{\text{an.}}$	***0.234***	***0.234***
$z_{\text{dig.}}$	***0.170***	***0.132***
$z_{\text{fot.}}$	***22.8***	***14.2***

Il test mostra che i periodi misurati con i cronometri analogico e digitale con angoli di partenza $\vartheta = 5°$ e $\vartheta = 30°$ forniscono un valore di z osservato minore di 0.2, perciò risultano essere compatibili con livelli di significatività maggiori dell'80%. Per quanto riguarda i periodi registrati con la fotocellula invece, risultano essere totalmente incompatibili con valori di z osservato maggiori di 14; posso quindi affermare che lo strumento che fornisce periodi significativamente differenti per i due angoli di partenza sia proprio la fotocellula.

4 Dipendenza dall'angolo

La prima parte dell'esperienza consiste nel verificare la dipendenza di T, periodo del pendolo a cui è stata attaccata una sferetta di legno di massa $m = (10 \pm 1)g$, da ϑ, angolo di oscillazione. Per prima cosa si procede alla misurazione della lunghezza del pendolo: con l'asta graduata misuro prima la distanza da terra alla cima del pendolo (L_C) e poi la distanza da terra al centro della sfera appesa (L_F)[1].

$$l = L_C - L_F \tag{2}$$

misuro $L_C = (89.0 \pm 0.1)$cm e $L_F = (16.8 \pm 0.1)$cm. Ricavo quindi la lunghezza del pendolo:

$$l = L_C - L_F = (72.2 \pm 0.2)\text{cm.}^{2}$$

4.1 Acquisizione dati

A questo punto prendo tre misurazioni del periodo del pendolo per 6 angoli di partenza differenti. Con l'ausilio di un goniometro con sensibilità di 1°, partendo da un angolo di oscillazione di 5°, registro tre misure. Faccio lo stesso con $\vartheta = 10°$, $\vartheta = 15°$ continuando con un passo di 5° fino ad arrivare a un angolo di 30°. Finita la presa dati ottengo i seguenti periodi con i relativi periodi medi:

	5°	**10°**	**15°**	**20°**	**25°**	**30°**
	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$
	1.703	1.706	1.710	1.715	1.723	1.730
	1.702	1.706	1.710	1.715	1.723	1.731
	1.701	1.706	1.710	1.715	1.723	1.731
$\bar{T}$(s) [a]	**1.702**	**1.706**	**1.710**	**1.715**	**1.723**	**1.731**

[a] L'errore su $\bar{T}$ sarebbe minore della sensibilita (0.001s) quindi associo quest'ultima come incertezza sui valori calcolati

Dall'espressione del periodo del pendolo sappiamo che il periodo è direttamente proporzionale a $\sin(\vartheta/2)^2$, più precisamente:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin(\vartheta/2)^2 \right]$$

Se dovessi riportare su un grafico i periodi sperimentali $T(y)$ in funzione di $y = \sin(\vartheta/2)^2$ mi aspetto quindi un andamento lineare e più precisamente una retta del tipo

$$T = T_0 + \frac{T_0}{4} y$$

4.2 Retta di best-fit

Appurato che T e $\sin(\vartheta/2)^2$ siano *teoricamente* linearmente correlati, è di mio interesse trovare quale retta della forma $T = a + by$ meglio interpola i dati sperimentali così da appurare se i valori misurati soddisfano la attesa teorica che y sia lineare in x.

Posso fare questo avvalendomi del metodo dei minimi quadrati che ha proprio lo scopo di determinare i parametri che legano due variabili legate da essi, nel mio caso due variabili x e y legati da due parametri A e B. Questo metodo necessita di alcune assunzioni importanti:

[1] Avrei potuto misurare il diametro della sfera con il calibro e aggiungere il raggio della sfera successivamente invece che includerlo nelle misura di cima e fondo, tuttavia la sensibilità dell'asta e il fatto che questa non fosse perfettamente perpendicolare ha reso gli errori di L_C e L_F troppo grossolani rendendo così inutile la maggiore cura nella misura del raggio.

[2] Propago l'errore linearmente ((0.1 + 0.1) cm = 0.2cm perché essendo solo due misure (per di più effettuate con un asta graduata imperfetta) rischio di sottostimare l'errore sommandolo in quadratura

1. Le misure devono essere statisticamente indipendenti;
2. Una delle due variabili (sceglierò la x) deve avere errori trascurabili rispetto all'altra [3].
3. Gli errori della variabile y devono essere distribuiti normalmente.

Per rispettare la seconda assunzione confronto gli errori relativi delle mie due variabili (δ_x è l'errore assoluto, δ_x / x è l'errore relativo).

T		
$T(s)$	$\delta_T(s)$	δ_T / T
1.702	0.001	**0.000339**
1.706	0.001	**0.000338**
1.710	0.001	**0.000337**
1.715	0.001	**0.000336**
1.723	0.001	**0.000335**
1.731	0.001	**0.000333**

$\bar{y} = \mathbf{sin}(\vartheta/\mathbf{2})^{\mathbf{2}}$		
$\bar{y}$	$\delta_{\bar{y}}$	$\delta_{\bar{y}} / \bar{y}$
0.0019	0.0008	**0.398**
0.0076	0.0015	**0.198**
0.017	0.0023	**0.132**
0.030	0.0030	**0.099**
0.047	0.0037	**0.078**
0.067	0.0044	**0.065**

[4]

Come si può leggere nelle tabelle l'errore associato alle misure dei periodi è perfettamente trascurabile rispetto a quello associato al seno, quindi scelgo di portare le misure del periodo sull'asse x e quelle del seno sull'asse y.

La funzione da linearizzare non è più

$$T = a + b\bar{y}$$

ma bensì

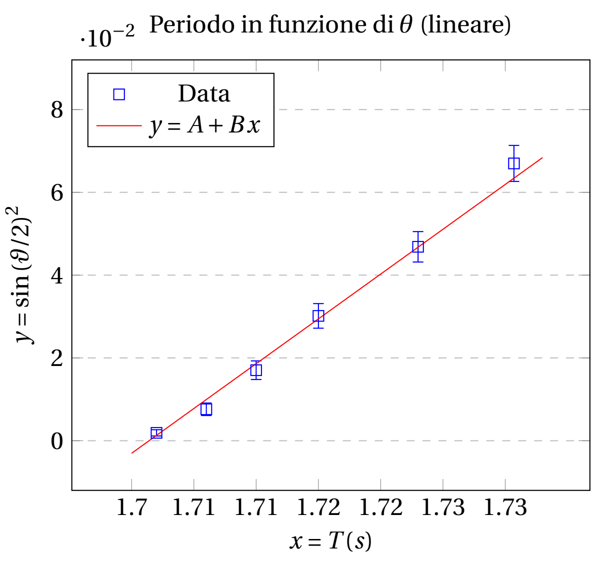
$$\bar{y} = \mathbf{A} + \mathbf{B}T$$

l'errore sulla x è da scrivere?

$T(s) \pm \delta_T$	$\sin(\vartheta/2)^2 \pm \delta_y$
1.702	0.0019
1.706	0.0076
1.710	0.0170
1.715	0.0302
1.723	0.0468
1.731	0.0669

$\mathbf{A} = -3.68 \qquad \sigma_{\mathbf{A}} = 0.18$

$\mathbf{B} = 2.16 \qquad \sigma_{\mathbf{B}} = 0.10$



[3] Giudico un errore come trascurabile rispetto all'altro quando si trovano in rapporto 1 a 3,4,5.
[4] Lascio 3 cifre significative negli errori relativi del periodo per evidenziarne le piccole discrepanze.

La retta di "best-fit" può fornire altre importanti informazioni: per esempio nella retta

$$T = T_0 + \frac{T_0}{4} \sin(\vartheta/2)^2$$

il termine noto della retta è T_0 che rappresenta il periodo delle piccole oscillazioni. Nel mio caso invece (ho il seno in funzione di T) la retta è espressa come

$$\sin(\vartheta/2)^2 = 4\frac{T}{T_0} - 4$$

nella quale T_0 compare a denominatore del coefficiente angolare della retta. Posso allora ricavarlo imponendo

$$B = 4\frac{1}{T_0} \qquad T_0 = \frac{4}{B}$$

Ho quindi trovato anche il valore sperimentale del periodo delle piccole oscillazioni del mio pendolo:

$$\mathbf{T_0} = (1.85 \pm 0.09)\mathrm{s}$$

5

4.2.1 Test del chi quadro

Visti i risultati ottenuti assumo che la retta trovata di parametri **A** e **B** si adatti bene all'andamento dei miei dati. Per assicurarmene effettuo un test del χ^2

Ipotesi nulla La retta $y = A + Bx$ descrive bene l'andamento dei dati osservati sperimentalmente.

Livello di significatività α	0.05
Valore di χ^2	4.29
Numero di gradi di libertà	$(6-2) = 4$
Valore di χ^2 critico	9.49

Conclusione test Il valore del χ^2 ottenuto risulta essere minore del valore critico, posso quindi accettare l'ipotesi nulla e affermare che nei livelli di significatività scelti la retta $y = A + Bx$ descrive in modo accettabile l'andamento dei miei dati.

4.2.2 Test Z

Infine, appurato che la retta $y = A + Bx$ è una buona rappresentazione dell'andamento dei miei dati, mi interessa capire se l'andamento teorico lo è. Voglio quindi capire se l'equazione

$$\sin(\vartheta/2)^2 = 4\frac{T}{T_0} - 4$$

che ha come parametri teorici

$$A_{\mathrm{teo}} = -4 \qquad B_{\mathrm{teo}} = \frac{4}{T_0}$$

si adatta bene ai miei dati. Scelgo quindi un livello di significa $\alpha = 0.05$ con $z_{\mathrm{critico}} = 1.96$ ed eseguo il test.

[5] L'errore di T_0 è $\sigma_{T_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_0}{\partial B}\sigma_B\right)^2} = \left|\frac{\partial T_0}{\partial B}\sigma_B\right| = \frac{4}{B^2}\sigma_B$

Ipotesi nulla I valori A_{teo}, **A** e B_{teo}, **B** sono a due a due compatibili.

Livello di significatività α	0.05
B sperimentale	2.16 ± 0.10
B teorico	$4/T_0$
z_B osservato	1.78
Valore di Z critico	1.96

Livello di significatività α	0.05
A sperimentale	-3.68 ± 0.18
A teorico	-4
z_A osservato	1.79
Valore di Z critico	1.96

Conclusione test Poiché sia per **A** sia per **B** risulta che $z_{\text{oss}} < z_{\text{critico}}$ posso affermare che entrambi sono compatibili con i rispettivi valori teorici nei livelli di significaticità scelti e che quindi l'equazione teorica della retta è una buona rappresentazione dell'andamento dei miei dati.

4.3 Determinazione dell'accelerazione di gravità g

Pocihé l'accelerazione di gravità compare nell'equazione che descrive il periodo del pendolo, posso cimentarmi nella determinazione di questa a partire dai dati sperimentali; posso poi confrontare il valore di g ricavato dalla mia esperienza con il valore vero G. Dalla (1) so che le piccole oscillazioni del pendolo hanno periodo descritto da

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove l è la distanza dalla cima del pendolo al centro di massa della sfera appesa ad esso, nel mio caso $l =$ (72.2±0.2)cm. Dall'equazione precedente (e ricordando che $T_0 = 4/B$) troviamo l'espressione dell'accelerazione di gravità:

$$g = \frac{\pi^2 b^2 l}{4}$$

con errore associato

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2} \quad = \quad \sqrt{\left(\frac{B^2\pi^2}{4}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{lB\pi^2}{2}\right)^2 \sigma_B^2}$$

Posso quindi conlcudere e scrivere il valore sperimentale di **g** determinato dalle mie misurazioni:

$$\mathbf{g} = (830 \pm 81)\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

Sapendo che il valore dell'accelerazione di gravità terrestre vale circa $9.81 ms^{-2}$ si nota subito la differenza con il g determinato sperimentalmente che risulta essere sottostimato del 15%. Tale sottostima è da imputare alla misura della lunghezza del pendolo l e al valore di B. Per capire chi influenza maggiormente la bontà del risultato ottenuto calcolo l'errore associato a g "più grossolanamente" così da evidenziare in modo più facile il "colpevole":

$$\frac{\sigma_g}{g} = \frac{\sigma_l}{l} + 2\frac{\sigma_B}{B}$$
$$\approx \quad 0.28\% + 9.72\% \quad \approx \quad 10\%$$

trovando quindi che l'errore su B è quello che più influisce sull'accuratezza del valore di g calcolato.

4.3.1 Test Z

Infine è bene verificare l'accordo tra g da me calcolato e $G = 9.81 ms^{-2}$. In linea teorica infatti mi aspetto che i due siano uguali e che eventuali discrepanze siano dovute unicamente al caso. Applico allora un Test Z:

Ipotesi nulla Il valore g da me calcolato è compatibile con il valore vero G accelerazione di gravità terrestre.

Livello di significatività α	0.05
Valore di z_{oss}	1.86
Valore di z_{critico}	1.96

Poiché $z_{\text{oss}} < z_{\text{critico}}$ posso concludere che con un livello di significatività del 5% g risulta essere compatibile con G.

4.4 Parabola di best-fit

Poiché nel processo di determinazione della retta di best-fit è risultato opportuno studiare la funzione $T(\bar{y})$ con $\bar{y} = \sin(\vartheta/2)^2$ per poter studiare la funzione in forma parabolica basta prendere $\bar{y} = \sin(\vartheta/2)$.

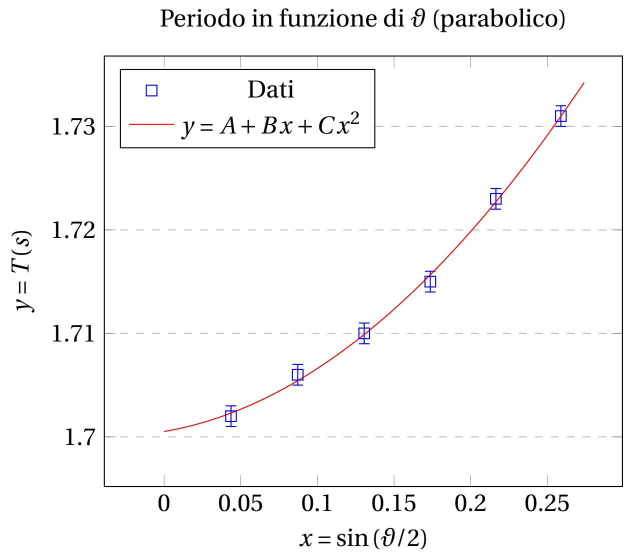
Come ho fatto per il fit lineare, controllo quale delle due variabili, T e $\sin(\vartheta/2)$, ha errore relativo trascurabile rispetto a quello dell'altra.

T		
$T(s)$	$\delta_T(s)$	δ_T/T
1.702	0.001	**0.000339**
1.706	0.001	**0.000338**
1.710	0.001	**0.000337**
1.715	0.001	**0.000336**
1.723	0.001	**0.000335**
1.731	0.001	**0.000333**

$\bar{y} = \mathbf{sin}(\vartheta/\mathbf{2})$		
$\bar{y}$	$\delta_{\bar{y}}$	$\delta_{\bar{y}}/\bar{y}$
0.044	0.00869	**0.199**
0.087	0.00867	**0.099**
0.131	0.00863	**0.066**
0.174	0.00857	**0.049**
0.216	0.00849	**0.039**
0.259	0.00840	**0.032**

Se per il fit lineare ho potuto invertire le variabili con l'intento di mettere sull'asse x la variabile con errore trascurabile, per il fit parabolico non posso farlo; andrei infatti a graficare l'equazione di una radice quadrata perdendo di fatto le informazioni che mi interessa trovare: i parametri **A**, **B** e **C** della parabola che meglio interpola i dati sperimentali. propagare?

Riporto quindi il grafico di $T(\bar{y})$:



$T(s) \pm \delta_T$	$\sin(\vartheta/2) \pm \delta_y$
1.702	0.044
1.706	0.087
1.710	0.130
1.715	0.174
1.723	0.216
1.731	0.259

$\mathbf{A} = 1.70 \qquad \sigma_{\mathbf{A}} = 0.0018$

$\mathbf{B} = 0.0252 \qquad \sigma_{\mathbf{B}} = 0.0273$

$\mathbf{C} = 0.357 \qquad \sigma_{\mathbf{C}} = 0.088$

4.4.1 Test del chi quadro

Assumendo che la parabola trovata $y = A + Bx + Cx^2$ si adatti bene all'andamento dei dati scelgo un livello di significatività $\alpha = 0.05$ ed eseguo il test.

Ipotesi nulla La parabola con parametri **A**,**B** e **C** si adatta bene all'andamento dei miei dati.

Livello di significatività α	0.05
Valore di χ^2	0.96
Numero di gradi di libertà	$(6-3) = 3$
Valore di χ^2 sospetto	0.35
Valore di χ^2 critico	7.8

Conclusione test Il valore del chi quadro calcolato risulta essere compreso tra il valore sospetto e quello critico: $\chi^2_{\text{sospetto}} < \chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$ posso quindi affermare che, con livello di significatività del 5%, la parabola descritta dai parametri **A**,**B** e **C** si adatta bene all'andamento dei miei dati.

4.4.2 Test Z

Constatato che la parabola descrive bene l'andamento dei miei dati vado a confrontare i parametri ottenuti con quelli teorici per capire se l'andamento teorico si adatto alla parabola. La parabola

$$T = T_0 + \frac{T_0}{4}\sin(\vartheta/2)^2$$

ha come parametri

$$A_{\text{teo}} = T_0 \qquad B_{\text{teo}} = 0 \qquad C_{\text{teo}} = \frac{T_0}{4}$$

Procedo quindi con un Test Z per verificare la compatibilità tra i valori:

Ipotesi nulla I parametri della parabola sperimentale sono compatibili con i parametri della parabola teorica.

Livello di significatività α	0.05
A sperimentale	1.700 ± 0.0018
A teorico	1.704
z_A osservato	1.78
Valore di Z critico	1.96

Livello di significatività α	0.05
B sperimentale	0.0252 ± 0.0273
B teorico	0
z_B osservato	1.78
Valore di Z critico	1.96

Livello di significatività α	0.05
C sperimentale	0.357 ± 0.088
C teorico	0.426
z_C osservato	1.79
Valore di Z critico	1.96

Conclusione test Poiché ogni z_{oss} risulta minore dello z_{critico}, concludo che con un livello di significatività del 5%, tutti i parametri risultano essere compatibili con le aspettative teoriche.

5 Dipendenza dalla lunghezza

La seconda parte dell'esperienza consiste nel verificare la dipendenza del periodo del pendolo dalla sua lunghezza. Nell'equazione che descrive il periodo l compare sotto radice quindi, per studiarne la relazione lineare si eleva tutto al quadrato così da avere T^2 in funzione di l:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin(\vartheta/2)^2\right) \qquad T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}\left(1+\frac{1}{4}\sin(\vartheta/2)^2\right)^2$$

$$T^2 = C_3 l$$

con $C_3 = \frac{4\pi^2}{g}\left(1+\frac{1}{4}\sin(\vartheta/2)^2\right)^2$

5.1 Acquisizione dati

Per prima cosa procedo con le misurazioni di 5 pendoli di 5 diverse lunghezze. Con l'ausilio dell'asta graduata, come fatto in precedenza, misuro prima la distanza da terra alla cima del pendolo (L_C) e poi la distanza da terra al centro della sfera appesa (L_F). Come errore su l associo 2 volte la sensibilità dell'asta.

$$l_i = (L_C - L_{F_i} \pm 0.2)\text{cm} \qquad i = 1,\ldots,5$$

l_1	**l_2**	**l_3**	**l_4**	**l_5**
l_1(cm) ± 0.2cm	l_2(cm) ± 0.2cm	l_3(cm) ± 0.2cm	l_4(cm) ± 0.2cm	l_5(cm) ± 0.2cm
60.2	26.7	14.5	63.0	54.8

Come per lo studio del periodo in funzione dell'angolo di oscillazione, anche in questo caso registro tre misure del periodo per ogni sua lunghezza con un angolo fisso $\vartheta = 20° \pm 1°$.

	l_1	**l_2**	**l_3**	**l_4**	**l_5**
	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$
$\vartheta = 20° \pm 1°$	1.504	0.964	0.663	1.556	1.437
	1.504	0.962	0.662	1.558	1.437
	1.502	0.962	0.663	1.555	1.436
$\bar{T}$(s)	**1.503**	**0.9627**	**0.6627**	**1.556**	**1.437**

5.2 Retta di best-fit

Per applicare al meglio il metodo dei minimi quadrati controllo quale delle due variabili ha errore relativo più piccolo.

	T^2	
$T^2(s)$	$\delta_{T^2}(s)$	δ_{T^2}/T^2
2.26	0.00301	**0.00133**
0.926	0.00193	**0.00208**
0.439	0.00133	**0.00302**
2.422	0.00311	**0.00129**
2.064	0.00287	**0.00139**

	l	
l	δ_l	δ_l/l
60.20	0.2	**0.00332**
26.70	0.2	**0.00749**
14.50	0.2	**0.0138**
63.00	0.2	**0.00317**
54.80	0.2	**0.00364**

L'errore associato a l risulta essere significativamente più grande di quello su T^2 quindi decido di invertire la relazione per poter mettere sull'asse x il periodo al quadrato:

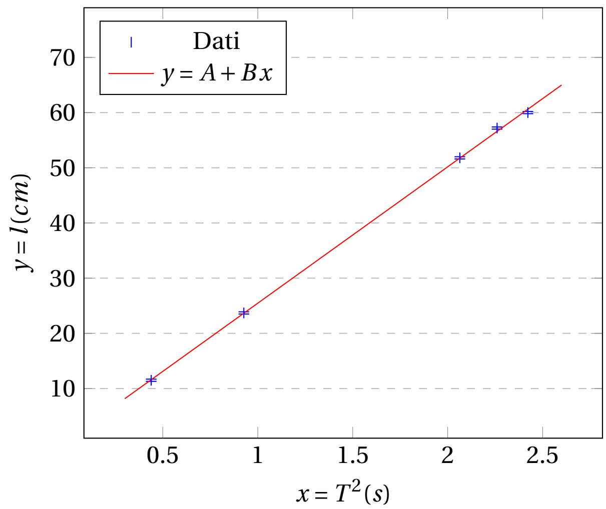
$$l = \frac{1}{C_3} T^2$$

$T^2(s) \pm \delta_{T^2}$	$l \pm \delta_l$
2.260	57.2
0.927	23.7
0.439	11.4
2.422	60.0
2.064	51.8

$\mathbf{A} = 0.7451$ $\sigma_{\mathbf{A}} = 0.204$

$\mathbf{B} = 24.713$ $\sigma_{\mathbf{B}} = 0.113$

Lunghezza in funzione del periodo (lineare)



5.2.1 Test del chi quadro

Visti i risultati ottenuti assumo che la retta trovata di parametri **A** e **B** si adatti bene all'andamento dei miei dati. Per assicurarmene effettuo un test del χ^2

Ipotesi nulla La retta $y = A + Bx$ descrive bene l'andamento dei dati osservati sperimentalmente.

Livello di significatività α	0.05
Valore di χ^2	18.58
Numero di gradi di libertà	$(5-2) = 3$
Valore di χ^2 critico	7.81

Conclusione test Il valore del χ^2 ottenuto risulta essere maggiore del valore critico, rifiuto quindi l'ipotesi nulla. Un valore di chi quadro così elevato mi porta a credere che la dispersione dei miei dati attorno alla retta sia troppo elevata (causa?) e probabilmente di aver sottostimato l'errore su l.

Poiché il coefficiente di correlazione lineare $r = 0.9998 \approx 1$ evidenzia (e conferma) la relazione di linearità tra l e T^2, decido di calcolare l'errore σ'_y a posteriori così da determinare l'incertezza corretta delle y.

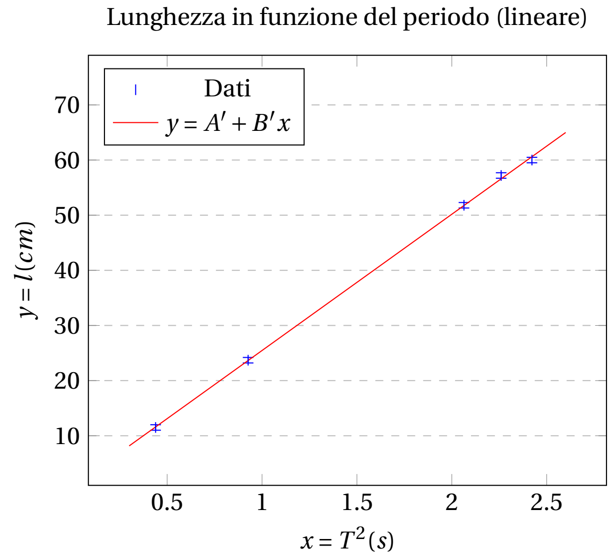
$$\text{errore a posteriori: } \sigma'_y = 0.4978$$

Con il nuovo valore dell'incertezza delle y posso ricalcolare i parametri della retta con una maggiore affidabilità e rigraficare il tutto:

$T^2(s) \pm \delta_{T^2}$	$l \pm \delta_l$
2.260	57.2
0.927	23.7
0.439	11.4
2.422	60.0
2.064	51.8

$\mathbf{A}' = 0.7451$ $\sigma_{\mathbf{A}'} = 0.5082$

$\mathbf{B}' = 24.713$ $\sigma_{\mathbf{B}'} = 0.28158$



5.2.2 Test Z

Dal test del chi quadro ho appurato che la retta $y = A + Bx$ non è una buona rappresentazione dell'andamento dei miei dati, mi interessa allora capire se l'andamento teorico si adatta bene alla retta $y = A' + B'x$. Voglio quindi capire se l'equazione

$$l = \frac{1}{C_3} T^2 \qquad \text{con } C_3 = \frac{4\pi^2}{g} \left(1 + \frac{1}{4} \sin(\vartheta/2)^2\right)^2$$

che ha come parametri teorici

$$A_{\text{teo}} = 0 \qquad B_{\text{teo}} = \frac{1}{C_3}$$

si adatta bene alla retta.

Ipotesi nulla I valori A_{teo}, **A** e B_{teo}, **B** sono a due a due compatibili.

Livello di significatività α	0.05
A' sperimentale	0.7451 ± 0.5082
A' teorico	0
z_A osservato	1.466
Valore di Z critico	1.96

Livello di significatività α	0.05
B' sperimentale	24.713 ± 0.28158
B' teorico	24.4786
z_B osservato	0.835
Valore di Z critico	1.96

Conclusione test Poiché sia per **A** sia per **B** risulta che $z_{oss} < z_{critico}$ posso affermare che ognuno dei parametri è compatibile con il rispettivo valore teorico nei livelli di significatività scelti e che quindi l'equazione teorica della retta è una buona rappresentazione della retta $y = A' + B'x$.

6 Dipendenza dalla massa

Come si può osservare dall'equazione del periodo, questo non è teoricamente influenzato dalla massa appesa ad esso. Tuttavia, sperimentalmente, la massa potrebbe portare a delle più o meno lievi variazioni. A seconda della massa in esame infatti, potrebbe variare la lunghezza del filo che viene allungato dal peso del corpo, oppure per masse estremente piccole non sarebbe più ragionevole pensare che la massa del filo sia trascurabile.

6.1 Acquisizione dati

Prese 3 sfere (una vuota, una piena d'acqua e una piena di piombo con uguale volume, ne registro la massa pesandole con una bilancia. Agganciate al pendolo misuro l'allungamento di quest'ultimo dovuto al peso delle sfere. La lunghezza del pendolo è stata misurata con l'asta graduata mentre l'allungamento, essendo nell'ordine dei millimetri, con un calibro.

A seguito delle misure ottengo le seguenti masse con i rispettivi allungamenti del filo:

	$m(\mathrm{g}) \pm 1\mathrm{g}$	$L(\mathrm{cm}) \pm 0.2\mathrm{cm}$
m_1 (vuota)	9	63.90
m_2 (acqua)	108	64.00
m_3 (piombo)	647	64.60

Con un angolo di oscillazione fisso di 20° prendo 3 misure del periodo per ogni massa ottenendo i seguenti dati:

	$\mathbf{m_1}$ **(vuota)**	$\mathbf{m_2}$ **(acqua)**	$\mathbf{m_3}$ **(piombo)**
	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$	$T(s) \pm 0.001s$
$\vartheta = 20° \pm 1°$	1.675	1.689	1.694
	1.671	1.689	1.694
	1.670	1.689	1.695
$\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{s})$	**1.672**	**1.689**	**1.694**

6.2 Test Z

Per capire se i periodi ottenuti con le tre sfere sono compatibili confronto le loro differenze con zero. Eseguo quindi tre test Z.

Ipotesi nulla I periodi di oscillazione del pendolo con massa m_1, m_2 e m_3 sono a due a due compatibili.

Livello di significatività α	0.05
$z_{T_{1,2}}$ osservato	6.15
Valore di Z critico	1.96

Livello di significatività α	0.05
$z_{T_{2,3}}$ osservato	8.20
Valore di Z critico	1.96

Livello di significatività α	0.05
$z_{T_{1,3}}$ osservato	2.05
Valore di Z critico	1.96

Conclusione test Poiché ogni z osservato risulta maggiore dello z critico rigetto l'ipotesi nulla e concludo affermando che nessun periodo misrato è compatibile con una massa differente. Nonostante questo sembra contraddire la teoria, ritengo che l'esito dei test sia concorde con le aspettative sperimentali; si sono infatti osservati cambiamenti nella lunghezza del pendolo per ogni massa appesa ad esso, il che rende coerenti le discrepanze tra i periodi misurati.

7 Conclusioni

Introduzione

T(0) Dipendenza dall'angolo

T(l) Dipendenza dalla lunghezza

T(m) Dipendenza dalla massa