(1)

1) $$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in (a,b) \\ 0, & x_0 \notin (a,b) \end{cases}$$

2) $$\int_a^b f(x)\,\delta(g(x))\,dx = \sum_i \int_a^b dx\, f(x)\, \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$

con x_i i zeri di $g(x)$ dentro l'intervallo (a,b)

3) $$\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x)$$

da (2): $$\delta[a(x-x_0)] = \frac{1}{|a|}\,\delta(x-x_0)$$

---

es 1 $$\mathcal{F}_k\{\delta(x-x_0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \delta(x-x_0)$$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$x_0 \in (-\infty,\infty) \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}_k\{\delta(x-x_0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx_0}}$$

es 2 trasformata di Fourier di:

$$f = e^{ixa}$$

$f \notin L^1$ $\Rightarrow$ non si può integrare in senso ordinario. Per definire la T. F. scriviamo:

$$* \quad \boxed{(f, g) = (F, G)} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} F = \mathcal{F}_k\{f\} \\ G = \mathcal{F}_k\{g\} \end{array}$$

e con $\displaystyle (f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^* g$

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, F^* G$$

e troviamo $F(k)$ che soddisfa $*$ per g arbitraria con $f = e^{ixa}$.

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ixa} g(x) = G(k=a)\sqrt{2\pi}$$

$$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, F^*(k)\, G(k)$$

$$\Rightarrow \quad G(k=a) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, G(k)\, \frac{F^*(k)}{\sqrt{2\pi}}$$

i.e. $\frac{F^*(k)}{\sqrt{2\pi}}$ fissa $k=a$ per qualsiasi funzione $G(k)$ ($g(x)$ e' arbitraria e $G(k)$ è la sua trasformata di Fourier)

$$\Rightarrow \frac{F^*(k)}{\sqrt{2\pi}} = \delta(k-a)$$

$$\Rightarrow F^*(k) = \sqrt{2\pi}\,\delta(k-a)$$

funzione reale $\Rightarrow$

$$\boxed{F(k) = \sqrt{2\pi}\,\delta(k-a)}$$

Es 3

calcolare $\displaystyle I = \int_{-1}^{1} f(x)\, \delta(ax)\, dx$

Sol usiamo $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{|a|} \int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, \delta(x)$$

abbiamo $\delta(x - x_0)$ con $x_0 = 0$ e

$x_0 \in (-1, 1)$

intervallo di integrazione

$$\Rightarrow I = \frac{1}{|a|} f(x_0) = \boxed{\frac{1}{|a|} f(0)}$$

Es 4 calcolare $\displaystyle I(a) = \int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, \delta(ax - 1)$

con $a \in \mathbb{R}$

Sol scriviamo $\delta(ax-1) = \delta\left[a\left(x - \frac{1}{a}\right)\right]$

$$= \frac{1}{|a|} \delta\left(x - \frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow I(a) = \frac{1}{|a|} \int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, \delta\left(x - \frac{1}{a}\right)$$

abbiamo due casi:

(i) $\frac{1}{a} \in (-1, 1) \Rightarrow \frac{1}{|a|} < 1 \Rightarrow |a| > 1$

(ii) $\frac{1}{a} \notin (-1, 1) \Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow |a| < 1$

nel primo caso $\left(\frac{1}{a} \in (-1,1) \right)$

$$I(a) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{1}{a}\right)$$

nel secondo $\left(\frac{1}{a} \notin (-1,1) \right)$

$$I(a) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I(a) = \begin{cases} \frac{1}{|a|} f\left(\frac{1}{a}\right), & |a| > 1 \\ 0, & |a| < 1 \end{cases}}$$

$\boxed{\text{es 5}}$ calcolare

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^x}{x^2+1} \, \delta(x^2-a^2)$$

con $a \in \mathbb{R}^+$

Sol usiamo $\delta(g(x)) \to \sum_{\substack{x_i \\ \text{zeri di } g}} \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$

con $x_i \in (-\infty, \infty)$

$g = x^2 - a^2$ ha zeri per $x = \{a, -a\}$

quindi $\delta(x^2-a^2) = \frac{\delta(x-a)}{|2a|} + \frac{\delta(x+a)}{|-2a|}$

$$= \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2|a|}$$

$$\Rightarrow I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{e^x}{x^2+1} \left(\frac{\delta(x-a)}{2|a|} + \frac{\delta(x+a)}{2|a|} \right)$$

$$= \frac{e^a}{a^2+1} \cdot \frac{1}{2|a|} + \frac{e^{-a}}{a^2+1} \frac{1}{2|a|}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(a) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{1+a^2} \cosh(a)}$$

$\boxed{\text{es } 6}$ calcolare

$$I(a) = \int_0^\infty dx \, \frac{e^x}{x^2+1} \, \delta(x^2-a^2) \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+$$

(similarmente al es 5 però con intervallo di integrazione $(0,\infty)$)

Sol abbiamo $g(x) = x^2 - a^2$

con zeri per $x = \{a, -a\}$. Solo i zeri dentro l'intervallo di integrazione $(0,\infty)$ contribuiscono:

cambiamo $\delta(x^2-a^2) \to \dfrac{\delta(x-a)}{2|a|}$

$$\Rightarrow I(a) = \int_0^\infty dx \, \frac{e^x}{x^2+1} \, \frac{\delta(x-a)}{2|a|} = \frac{e^a}{a^2+1} \cdot \frac{1}{2a}$$

$\boxed{\text{N.B.}}$ potevamo anche scrivere esplicitamente

$$I(a) = \int_0^\infty dx \, \frac{e^x}{x^2+1} \, \frac{\delta(x-a)}{2|a|} + \underbrace{\int_0^\infty dx \, \frac{e^x}{x^2+1} \, \frac{\delta(x+a)}{2|a|}}_{=0}$$

Es 7 calcolare l'integrale:

$$I = \int_0^1 dy \int_a^1 dx \, \frac{x}{(1-y)^2} \, \delta(1-x-y) \quad , \text{con } a \in \mathbb{R}^+ \; a<1$$

<u>Sol</u> facciamo il calcolo di: $\int dx$, usando la delta (teniamo y come una costante)

$$\int_a^1 dx \, \frac{x}{(1-y)^2} \, \delta(1-x-y) = \frac{1}{(1-y)^2} \int_a^1 dx \, x \, \delta[x-(1-y)]$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\delta(g(x)) = \delta(-g(x))$$

l'integrale $\int_a^1 dx \, x \, \delta[x-(1-y)]$ dipende del valore di y:

(i) abbiamo $\delta(x-x_0)$ con $x_0 = 1-y$

se $x_0 \in (a,1) \Rightarrow \int_a^1 dx \, x \, \delta(x-x_0) = x_0 = 1-y$

(ii) se $x_0 \notin (a,1) \Rightarrow \int_a^1 dx \, x \, \delta(x-x_0) = 0$

quindi

$$\int_a^1 dx \, x \, \delta[x-(1-y)] = \begin{cases} 1-y, & 0<y<1-a \\ 0, & \text{altri valori di } y \end{cases}$$

Questo risultato implica che i limiti di integrazione per $\int dy$ cambiano da $(0,1)$ a $(0, 1-a)$. Si può vedere meglio scrivendo:

$$\int_0^1 dx\, x\, \delta(x-(1-y)) = \theta(y)\,\theta(1-a-y)\,(1-y)$$

che vale $1-y$ per $0<y<1-a$

e zero per altri valori di y.

$$\Rightarrow \int_a^1 dy \int_a^1 dx \frac{x}{(1-y)^2}\,\delta(1-x-y)$$

$$= \int_0^1 dy \frac{1-y}{(1-y)^2}\,\theta(y)\,\theta(1-a-y)$$

$$I = \int_0^{1-a} dy \frac{1}{1-y} = -\ln(1-y)\Big|_0^{1-a} = \boxed{-\ln(a)}$$

Si nota che la delta $\delta(1-x-y)$ ha un effetto su la regione di integrazione.

Esercizio 8: esame del 17/Luglio/2023

Esercizio 2

Un sistema fisico viene rappresentato da una funzione del tempo $y(t)$ che soddisfa l'equazione

$$y''(t) + 2\,\eta\, y'(t) + \omega^2 y(t) = v\,\delta(t - t_0) \qquad \eta, \omega, v \in \mathbb{R}\,, \qquad \eta, \omega, v > 0$$

con condizioni iniziali

$$y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0,$$

con $\delta(t - t_0)$ la delta di Dirac e $t_0 > 0$.

(a) Trovare un'espressione per la trasformata di Laplace $Y(s) = \mathcal{L}_s\{y(t)\}$, in termini di η, ω, v, t_0.

(b) Trovare l'ascissa di convergenza α_0 di $Y(s)$ per tutti i valori permessi di η, ω.

(c) Calcolando l'antitrasformata di Laplace di $Y(s)$, dimostrare che per $\eta < \omega$ il sistema segue un moto armonico smorzato per $t > t_0$.

Soluzione

(a) Definendo $Y(s) \equiv \mathcal{L}_s\{y(t)\}$, abbiamo che

$$\mathcal{L}_s\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

$$\mathcal{L}_s\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s)\,,$$

dove in ogni caso abbiamo usato le condizioni iniziale $y(0) = y'(0) = 0$.

La trasformata di Laplace di $\delta(t - t_0)$ viene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s\{\delta(t - t_0)\} &= \int_0^\infty dt\, e^{-s\,t}\, \delta(t - t_0) \\ &= e^{-s\,t_0}.\end{aligned}$$

Nella seconda equazione sopra abbiamo usato il fatto che $t_0 > 0$ (altrimente l'integrale è nulla). Quindi possiamo scrivere

$$y''(t) + 2\,\eta\, y'(t) + \omega^2 y(t) = v\,\delta(t - t_0)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}_s\{y''(t)\} + 2\,\eta\,\mathcal{L}_s\{y'(t)\} + \omega^2 \mathcal{L}_s\{y(t)\} = v\,\mathcal{L}_s\{\delta(t - t_0)\}$$

$$\Longrightarrow s^2\, Y(s) + 2\,\eta\, s\, Y(s) + \omega^2\, Y(s) = v\, e^{-s\,t_0}\,,$$

da cui si trova

$$Y(s) = \frac{v\, e^{-s\, t_0}}{s^2 + 2\, \eta\, s + \omega^2}\,.$$

(b) La ascissa di convergenza α_0 viene definita come la parte reale della singularità più a destra, nell piano complesso di s, di $Y(s)$. Al finito, le singolarità di $Y(s)$ sono date dai zeri del denominatore:

$$s^2 + 2\, \eta\, s + \omega^2 = 0 \implies s_\pm = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\,.$$

Ci sono tre casi:

- $\eta > \omega$
  In questo caso $s_\pm \in \mathbb{R}$ con $s_+ > s_-$, quindi $\alpha_0 = s_+$.
- $\eta < \omega$
  Visto che $\sqrt{\eta^2 - \omega^2}$ è un numero imaginario,
  $\mathrm{Re}\{s_+\} = \mathrm{Re}\{s_-\} = -\eta$, quindi $\alpha_0 = -\eta$.
- $\eta = \omega$
  Dato che $\sqrt{\eta^2 - \omega^2} = 0$, si tiene che $s_+ = s_- = -\eta$. Quindi, anche in questo caso $\alpha_0 = -\eta$. Si nota che per $\eta \neq \omega$, $Y(s)$ ha due poli semplici mentre che per $\eta = \omega$ ha solo un polo doppio per $s = -\eta$.

Per $\eta < \omega$, la anti-trasformata di Laplace di $Y(s)$ è

$$\theta(t) y(t) = \frac{1}{2\, \pi\, i} \int_{\alpha - i\, \infty}^{\alpha + i\, \infty} ds\, e^{s\, t}\, Y(s)\,, \qquad \alpha > -\eta.$$

Con la espressione per $Y(s)$ trovata nella parte (a), abbiamo

$$\begin{aligned} \theta(t) y(t) &= \frac{v}{2\, \pi\, i} \int_{\alpha - i\, \infty}^{\alpha + i\, \infty} dt\, \frac{e^{s\, (t - t_0)}}{s^2 + 2\, \eta\, s + \omega^2} \\ \implies & \frac{v}{2\, \pi\, i} \int_{\alpha - i\, \infty}^{\alpha + i\, \infty} dt\, \frac{e^{s\, (t - t_0)}}{(s - s_+)(s - s_-)}\,, \end{aligned}$$

con $s_\pm \equiv -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega^2} = -\eta \pm i\, \sqrt{\omega^2 - \eta^2}$ (visto che $\eta < \omega$). Possiamo risolvere l'integrale usando il lemma di Jordan. Per $t < t_0$, dobbiamo chiudere a destra, non avendo delle singularità dentro il cammino di integrazione

$$t < t_0\,, \qquad \theta(t) y(t) = 0.$$

Per $t > t_0$, il camino di integrazione si chiude a sinistra. Entrambe singularità s_+, s_- (poli semplici) sono dentro il camino chiuso, quindi

$$\begin{aligned}
\theta(t)y(t) =& \frac{v}{2\,\pi\, i}\int_{\alpha-i\,\infty}^{\alpha+i\,\infty} ds\, \frac{e^{s\,(t-t_0)}}{(s-s_+)(s-s_-)} \\
=& \,v\,\left(\operatorname*{Res}_{s=s_+}\left\{\frac{e^{s\,(t-t_0)}}{(s-s_+)(s-s_-)}\right\} + \operatorname*{Res}_{s=s_-}\left\{\frac{e^{s\,(t-t_0)}}{(s-s_+)(s-s_-)}\right\}\right) \\
=& \,v\,\left(\frac{e^{s_+\,(t-t_0)}}{s_+ - s_-} + \frac{e^{s_-\,(t-t_0)}}{s_- - s_+}\right) \\
=& \,v\,\left(\frac{e^{\left(-\eta+i\sqrt{\omega^2-\eta^2}\right)\,(t-t_0)}}{2i\sqrt{\omega^2-\eta^2}} + \frac{e^{\left(-\eta-i\sqrt{\omega^2-\eta^2}\right)\,(t-t_0)}}{-2i\sqrt{\omega^2-\eta^2}}\right) \\
=& \,v\,\frac{e^{-\eta(t-t_0)}}{2i\sqrt{\omega^2-\eta^2}}\left(e^{+i\sqrt{\omega^2-\eta^2}(t-t_0)} - e^{-i\sqrt{\omega^2-\eta^2}(t-t_0)}\right)\,,
\end{aligned}$$

finalmente abbiamo

$$t > t_0\,, \qquad \theta(t)y(t) = v\,\frac{e^{-\eta(t-t_0)}}{\sqrt{\omega^2-\eta^2}}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\eta^2}(t-t_0)\right)\,,$$

che corrisponde a un sistema armonico smorzato con frequenza $\omega' = \sqrt{\omega^2-\eta^2}$ e costante di tempo $\tau = 1/\eta$. Si nota che per $\omega < \eta$, la stessa soluzione vale però in quel caso, avendo il seno argomento immaginario, il sistema non esegue moto oscillatorio.

Esercizio 9: esame del 22/Giugno/2022

Esercizio 3

La funzione di Bessel di primo tipo e ordine zero, $J_0(x)$, ha la rappresentazione integrale

$$J_0(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{ix\sin(t)}\,.$$

(a) Supponendo che la trasformata di Fourier (anche nel senso delle distribuzioni) dalla variabile x alla variabile k soddisfi la relazione

$$\mathcal{F}_k\left\{\int dt\, f(x,t)\right\} = \int dt\, \mathcal{F}_k\left\{f(x,t)\right\}\,,$$

dimostrare che

$$\mathcal{J}_0(k) \equiv \mathcal{F}_k\left\{J_0(x)\right\} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}} & \text{per} \quad |k| \le 1, \\ 0 & \text{per} \quad |k| > 1. \end{cases}$$

Suggerimento: $\sin(t) = k$ ha due soluzioni per $-\pi \le t \le \pi$:

$$t_1 = \arcsin(k), \qquad t_2 = \pi - \arcsin(k)\,.$$

(b) Sappendo che

$$\mathcal{F}_x^{-1}\left\{\mathcal{J}_0(k)\right\} = J_0(x)\,,$$

determinare le proprietà di differenziabilità e l'andamento asintotico di $J_0(x)$ per $x \to \pm\infty$ a partire dalle proprietà di $\mathcal{J}_0(k)$.

(c) Dal teorema di Parseval, determinare se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \big(J_0(x)\big)^2$$

esiste.

Soluzione

(a) Sappiamo che

$$\mathcal{F}_k\left\{e^{ixa}\right\} = \sqrt{2\,\pi}\;\delta(k-a)\,,$$

quindi

$$\mathcal{F}_k\left\{J_0(x)\right\} = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\;\mathcal{F}_k\left\{e^{ix\sin(t)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} dt\;\delta\left(k-\sin(t)\right)\,.$$

Si noti che questo integrale è nullo per valori di k per cui non esista una soluzione all'equazione $k = \sin(t)$, cioè

$$\mathcal{F}_k \{J_0(x)\} = 0 \qquad \text{per} \qquad |k| > 1\,,$$

visto che $\sin(t)$ non prende mai valori fuori dal intervalo $[-1, 1]$. Per calcolare l'integrale per $|k| \leq 1$, dobbiamo scrivere la delta di Dirac usando la proprietà

$$\delta\,(f(t)) = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{|f'(t)|}\,,$$

dove la somma viene fatta su tutte le soluzioni t_i all'equazione $f(t) = 0$. Nel nostro caso abbiamo

$$\delta\,(k - \sin(t)) = \frac{\delta(t - t_1) + \delta(t - t_2)}{|\cos(t)|}\,,$$

con

$$t_1 = \arcsin(k), \qquad\qquad t_2 = \pi - \arcsin(k)\,.$$

Da questo si ricava che

$$\mathcal{F}_k \{J_0(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \left\{ \frac{1}{|\cos(t_1)|} + \frac{1}{|\cos(t_2)|} \right\}, \qquad \text{per} \qquad |k| \leq 1\,.$$

Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned}
|\cos(t_1)| &= \left|\sqrt{(1 - \sin^2(t_1))}\right| = \sqrt{(1 - \sin^2(\arcsin(k)))} = \sqrt{1 - k^2}\,, \\
|\cos(t_2)| &= |\cos(\pi - \arcsin(k))| = |\cos(\arcsin(k))| = \sqrt{1 - k^2}\,.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\mathcal{J}_0(k) \equiv \mathcal{F}_k \{J_0(x)\} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{1 - k^2}} & \text{per} \quad |k| \leq 1, \\[2ex] 0 & \text{per} \quad |k| > 1. \end{cases}$$

(b) *Derivabilità.* Dal nostro risultato per $\mathcal{J}_0(k)$, sappiamo che la funzione $k^n \mathcal{J}_0(k)$ è sempre nulla nel limite $k \to \pm\infty$ per qualsiasi potenza n. Inoltre $k^n \mathcal{J}_0(k)$ ha solo delle singolarità integrabili (per $k \to \pm 1$), quindi è sommabile per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la sua antitrasformata di Fourier deve essere infinitamente derivabile, che è infatti una proprietà della funzione di Bessel $J_0(x)$.

Andamento asintotico. La funzione $\mathcal{J}_0(k)$ è sommabile, quindi la funzione di Bessel $J_0(x)$ deve andare a zero per $x \to \pm\infty$. Non possiamo dire niente di più sul andamento asintotico. Si noti che l'antitrasformata di Fourier $g(x)$ di una funzione $\tilde{g}(k)$, va a zero più velocemente di $1/x$ se $\tilde{g}(k)$ è sommabile e continua e $\tilde{g}'(k)$ è sommabile. Nel nostro caso, visto che $\mathcal{J}_0(k)$ diverge per $|k| \to 1$, la funzione non è continua. Infatti, si può dimostrare che per $x \to \pm\infty$, $J_0(x) = O(1/\sqrt{x})$.

(c) Dal teorema di Parseval abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(J_0(x)\right)^2 = \int_{-1}^{1} dk \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right)^2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} dk \left(\frac{1}{1-k^2}\right) .$$

Visto che $1/(1-k^2)$ ha delle singolarità non integrabili per $k \to \pm 1$, l'integrale non esiste.