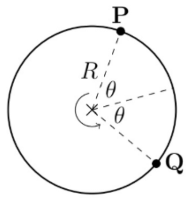
TUTORATO 3

1. Due punti materiali **P** e **Q**, entrambi di massa m, sono fissi sul bordo di un disco di raggio R privo di massa. L'angolo tra le due masse è 2θ, come mostrato in figura. Il disco è posto nel piano verticale ed è libero di ruotare attorno al suo centro.

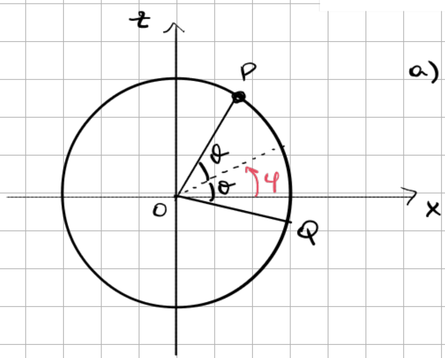


   (a) Scelte opportune coordinate, scrivere la Lagrangiana del sistema.

   (b) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange

   (c) Scrivere un integrale primo del moto e verificare che il suo valore è costante lungo ogni moto.

   (d) Scrivere l'equazione di Weierstrass del sistema e studiare qualitativamente i moti.



a) Scelgo come coordinata φ, l'angolo tra la bisettrice di $P\hat{O}Q$ e l'asse x

$\varphi \in [-\pi, \pi)$

$$\begin{cases} x_P = R\cos(\varphi+\theta) \\ y_P = R\sin(\varphi+\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_Q = R\cos(\varphi-\theta) \\ y_Q = R\sin(\varphi-\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_P = -R\dot{\varphi}\sin(\varphi+\theta) \\ \dot{y}_P = R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_Q = -R\dot{\varphi}\sin(\varphi-\theta) \\ \dot{y}_Q = R\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) \end{cases}$$

$$L = mR^2\dot{\varphi}^2 - mgR\underbrace{(\sin(\varphi+\theta)+\sin(\varphi-\theta))}_{2\sin\left(\frac{\varphi+\theta+\varphi-\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi+\theta-\varphi+\theta}{2}\right) = 2\sin\varphi\cos\theta} = mR^2\dot{\varphi}^2 - 2mgR\sin\varphi\cos\theta$$

b) $$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -2mgR\cos\varphi\cos\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2\ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow 2mR^2\ddot{\varphi} = -2mgR\cos\varphi\cos\theta \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{R}\cos\varphi\cos\theta$$

c) L indipendente dal tempo $\Rightarrow \mathcal{H}$ è integrale primo. T è quadratica nelle $\dot{q}$, U non dipende da $\dot{q}$ $\Rightarrow \mathcal{H} = T - U$

$$\mathcal{H} = mR^2\dot{\varphi}^2 + 2mgR\sin\varphi\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = 2mR^2\dot{\varphi}\underset{\substack{\| \\ -\frac{g}{R}\cos\varphi\cos\theta}}{\ddot{\varphi}} + 2mgR\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta = -2mR^2\dot{\varphi}\frac{g}{R}\cos\varphi\cos\theta - 2mgR\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi \equiv 0$$

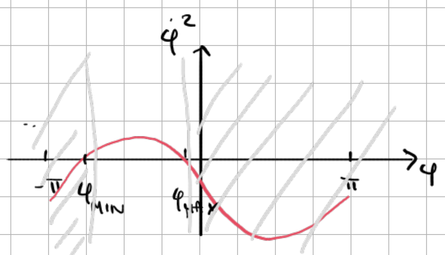
d) $$E = mR^2\dot{\varphi}^2 + 2mgR\sin\varphi\cos\theta \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{mR^2}(E - 2mgR\cos\theta\sin\varphi) \geq 0$$

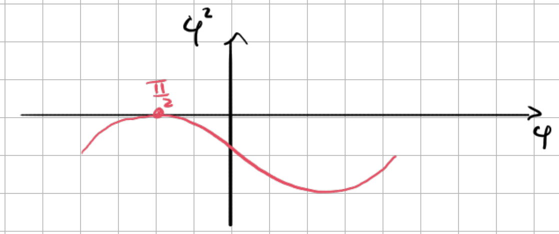
$$\cancel{\frac{2mgR\cos\theta}{mR^2}}\left(\overbrace{\frac{E}{2mgR\cos\theta}}^{\varepsilon} - \sin\varphi\right) \geq 0$$

$|\varepsilon| < 1 \iff -2mgR\cos\theta < E < 2mgR\cos\theta$

MOTO PERIODICO con $\varphi_{MIN} < \varphi < \varphi_{MAX}$ e

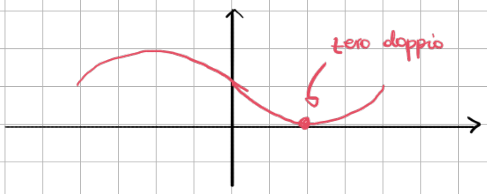
$\varphi_{\substack{MIN \\ MAX}} = -\frac{\pi}{2} \pm \varphi^*$ $\quad\varphi^*$ ampiezza dell'oscillazione





$\varepsilon = -1 \Rightarrow$ QUIETE in $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$E = -2mgR\cos\vartheta$



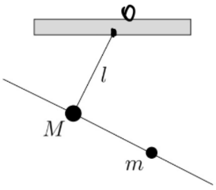
$\varepsilon = 1$ $\rightarrow$ Moto asintotico verso $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$E = 2mgR\cos\vartheta$

$\varepsilon > 1$ $\rightarrow$ Moto illimitato

$E > 2mgR\cos\vartheta$

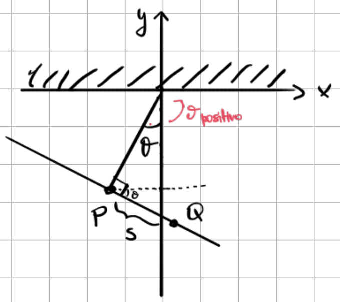
2. Si consideri una retta su cui è fissato una punto materiale **P** di massa M. A **P** è saldato un segmento di lunghezza l che forma con la retta un angolo retto. L'altro estremo del segmento è vincolato a ruotare attorno a un punto O. Sulla retta è libero di scivolare un punto materiale **Q** di massa m, come in figura.



(a) Scelte opportune coordinate, scrivere la Lagrangiana del sistema.

(b) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange

(c) Scrivere un integrale primo del moto e verificare che il suo valore è costante lungo ogni moto.



$$\begin{cases} x_P = l\sin\theta \\ y_P = -l\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_Q = x_P + s\cos\theta = l\sin\theta + s\cos\theta \\ y_Q = y_P - s\sin\theta = -(l\cos\theta + s\sin\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x_P = l\dot\theta\cos\theta \\ \dot y_P = l\dot\theta\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot x_Q = l\dot\theta\cos\theta + \dot s\cos\theta - s\dot\theta\sin\theta = \dot\theta(l\cos\theta - s\sin\theta) + \dot s\cos\theta \\ \dot y_Q = l\dot\theta\sin\theta + \dot s\sin\theta + s\dot\theta\cos\theta = \dot\theta(l\sin\theta + s\cos\theta) + \dot s\sin\theta \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot\theta^2(l^2+s^2) + \dot s^2 + 2\dot s\dot\theta(l\cos^2\theta - \cancel{s\sin\theta\cos\theta} + l\sin^2\theta + \cancel{s\sin\theta\cos\theta})\right] + Mgl\cos\theta + mg(l\cos\theta + s\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left[(l^2+s^2)\dot\theta^2 + \dot s^2 + 2l\dot s\dot\theta\right] + Mgl\cos\theta + mg(l\cos\theta + s\sin\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -Mgl\sin\theta + mg(s\cos\theta - l\sin\theta) \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = Ml^2\dot\theta + m(l^2+s^2)\dot\theta + ml\dot s \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = Ml^2\ddot\theta + 2ms\dot s\dot\theta + m(l^2+s^2)\ddot\theta + ml\ddot s$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = ms\dot\theta^2 + mg\sin\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot s} = m\dot s + ml\dot\theta \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot s} = m\ddot s + ml\ddot\theta$$

$$\begin{cases} -Mgl\sin\theta + mg(s\cos\theta - l\sin\theta) = Ml^2\ddot\theta + 2ms\dot s\dot\theta + m(l^2+s^2)\ddot\theta + ml\ddot s \\ ms\dot\theta^2 + mg\sin\theta = m\ddot s + ml\ddot\theta \end{cases}$$

L non dipende dal tempo t $\to$ $\mathcal{H}$ è un integrale primo. T quadratica nelle $\dot q$, U è indipendente da $\dot q$ $\Rightarrow$ $\mathcal{H} = T - U$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left[(l^2+s^2)\dot\theta^2 + \dot s^2 + 2l\dot s\dot\theta\right] - Mgl\cos\theta - mg(l\cos\theta + s\sin\theta)$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = Ml^2\dot\theta\ddot\theta + \frac{1}{2}m\left[2s\dot s\dot\theta^2 + 2(l^2+s^2)\dot\theta\ddot\theta + 2\dot s\ddot s + 2l\dot s\ddot\theta + 2l\ddot s\dot\theta\right] + Mgl\dot\theta\sin\theta - mg(\dot s\sin\theta + s\dot\theta\cos\theta - l\dot\theta\sin\theta)$$

$$= m\dot s(s\dot\theta^2 + g\sin\theta)$$

$$= \dot\theta\left[-Mgl\sin\theta + mg(s\cos\theta - l\sin\theta)\right] - 2ms\dot s\dot\theta^2$$

$$= \dot\theta\left[-\cancel{Mgl\sin\theta} + mg(\cancel{s\cos\theta} - \cancel{l\sin\theta})\right] - \cancel{ms\dot s\dot\theta^2} + m\dot s(\cancel{s\dot\theta^2} + \cancel{g\sin\theta}) + \cancel{Mgl\dot\theta\sin\theta} - mg(\cancel{\dot s\sin\theta} + \cancel{s\dot\theta\cos\theta} - \cancel{l\dot\theta\sin\theta}) = 0$$