Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 27 Novembre 2014

Esercizio 1 (punti 6). Si consideri la seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + i \sin n}{2^{n+1}} z^n.$$

a) Determinare il raggio di convergenza e il cerchio (aperto) di convergenza.
b) Dire se la serie converge assolutamente nel punto $z = 2 + i$.
c) Dire per quali $R > 0$ la serie converge uniformemente nell'insieme $B_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.

Soluzione.

a) Sia $a_n = \frac{n^2+i\sin n}{2^{n+1}}$, e osserviamo che $|a_n| = \frac{\sqrt{n^4+\sin^2 n}}{2^{n+1}}$. Utilizzando il criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^4 + \sin^2 n)^{1/2n}}{2\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2}.$$

Si ha quindi che il raggio di convergenza della serie è $\rho = 2$, e il cerchio (aperto) di convergenza è dato dall'insieme $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$.

b) Sappiamo dalla teoria generale che una serie di potenze non converge nei punti la cui distanza dal centro della serie è strettamente maggiore del raggio di convergenza. Poiché $|2 + i| = \sqrt{5} > 2$, si ha che la serie non converge (né semplicemente né assolutamente) nel punto $z = 2 + i$.

c) Dalla teoria sulle serie di potenze, sappiamo che la serie converge totalmente (e quindi anche uniformemente) in B_R per ogni $0 < R < 2$.

Esercizio 2 (punti 5). Si considerino le curve $\bar{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$ e $\bar{\gamma}_2(t) = (t, 0)$, $t \in [-1, 1]$, e sia D il dominio limitato il cui bordo è formato dai sostegni delle curve $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$. Sia dato inoltre il campo vettoriale

$$\bar{F}(x, y) = \left(x^2 + y^2, x + ye^{\arctan y}\right).$$

(a) Calcolare $\int_{\bar{\gamma}_2} \bar{F} \cdot d\bar{s}$.

(b) Calcolare l'integrale doppio $\iint_D (2y - 1)\, dx\, dy$.

(c) Usando il Teorema di Gauss-Green e i risultati precedenti, calcolare $\int_{\bar{\gamma}_1} \bar{F} \cdot d\bar{s}$.

Soluzione.

(a) Poiché $\bar{\gamma}_2'(t) = (1, 0)$ si ha:

$$\int_{\bar{\gamma}_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{-1}^{1} \bar{F}(\bar{\gamma}_2(t)) \cdot \bar{\gamma}_2'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (t^2, t) \cdot (1, 0)\, dt = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}.$$

(b) L'insieme D è il semicerchio di raggio 1 centrato nell'origine e contenuto nel semipiano delle y positive. Passando in coordinate polari e chiamando $D' = \{(\rho, \theta) : 0 < \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\iint_D (2y - 1)\, dx\, dy &= \iint_{D'} (2\rho \sin\theta - 1)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^1 (-2\rho^2 \cos\theta - \rho\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\rho \\ &= \int_0^1 (4\rho^2 - \pi\rho)\, d\rho = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(c) Indichiamo con $P(x,y) = x^2 + y^2$ e $Q(x,y) = x + ye^{\arctan y}$ le componenti del campo $\bar{F}$. Visto che D è un dominio regolare e $\bar{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, possiamo applicare il Teorema di Gauss-Green, che dice

$$\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy.$$

Essendo $Q_x - P_y = 1 - 2y$ e

$$\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{\bar{\gamma}_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{\bar{\gamma}_2} \bar{F} \cdot d\bar{s},$$

dai risultati dei punti (a) e (b) si ottiene

$$\int_{\bar{\gamma}_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -\iint_D (2y-1)\, dx\, dy - \int_{\bar{\gamma}_2} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - 2.$$

Esercizio 3 (punti 7). Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}$, e si consideri il campo vettoriale

$$\bar{F}_\varphi(x,y) = \left(\frac{y}{(x+y)^2} + 2y\cos x, -\frac{x}{(x+y)^2} + \varphi(x) + ye^{y^2} \right).$$

(a) Determinare il dominio D di $\bar{F}$.

(b) Determinare tutte le φ tali che $\bar{F}_\varphi$ sia irrotazionale in D.

(c) Detta φ_0 la funzione tra quelle determinate al punto precedente tale che $\varphi_0(0) = 0$, dire se $\bar{F}_{\varphi_0}$ è conservativo nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$, e in caso affermativo calcolarne un potenziale.

(d) Calcolare il lavoro compiuto da $\bar{F}_{\varphi_0}$ per spostare un punto materiale lungo la curva

$$\bar{\gamma}(t) = \left(t^2 + 1, \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{4} + 1 \right), \quad t \in [0,1].$$

Soluzione.

(a) Il dominio di $\bar{F}$ è dato da $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$.

(b) Imponiamo che $\bar{F}_\varphi$ sia irrotazionale in D, cioè che

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x+y)^2} + 2y\cos x \right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{x}{(x+y)^2} + \varphi(x) + ye^{y^2} \right];$$

questo è vero se e solo se $\varphi'(x) = 2\cos x$, e dunque si ottiene che il campo $\bar{F}_\varphi$ è irrotazionale se e solo se

$$\varphi(x) = 2\sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Imponendo che $\varphi(0) = 0$ si ottiene che $\varphi_0(x) = 2\sin x$. Il campo $\bar{F}_{\varphi_0}$ è irrotazionale per quanto visto al punto (b). Inoltre, A è contenuto nel dominio di $\bar{F}_{\varphi_0}$, ed è un insieme semplicemente connesso. Poiché negli insiemi semplicemente connessi un campo è conservativo se e solo se è irrotazionale, si ha che la restrizione di $\bar{F}_{\varphi_0}$ ad A è un campo conservativo. Possiamo calcolare un potenziale $U(x,y)$ con il metodo delle integrazioni parziali, imponendo

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2} + 2y\cos x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2} + 2\sin x + ye^{y^2}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, integrando rispetto a x, si ottiene

$$U(x,y) = -\frac{y}{x+y} + 2y\sin x + C_1(y).$$

Derivando rispetto a y quest'ultima espressione e sostituendo nella seconda equazione del sistema si ottiene

$$-\frac{x}{(x+y)^2} + 2\sin x + C_1'(y) = -\frac{x}{(x+y)^2} + 2\sin x + ye^{y^2},$$

che vale se e solo se

$$C_1'(y) = ye^{y^2}, \quad \text{cioé} \quad C_1(y) = \frac{1}{2}e^{y^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Il generico potenziale è quindi dato da

$$U(x,y) = -\frac{y}{x+y} + 2y\sin x + \frac{1}{2}e^{y^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Osserviamo che il sostegno di $\bar{\gamma}$ è tutto contenuto nell'insieme A. Infatti, controlliamo che le componenti di $\bar{\gamma}$ soddisfino la condizione $y > -x$:

$$\frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{4} + 1 > -t^2 - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3}{4}t^4 + \frac{5}{4}t^2 + 2 > 0,$$

che è vera per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dunque, poiché in A il campo è conservativo, il lavoro può essere calcolato come differenza di potenziale. Si ha quindi che il lavoro richiesto W è dato da

$$W = U(\bar{\gamma}(1)) - U(\bar{\gamma}(0)) = U(2,2) - U(1,1) = 4\sin 2 - 2\sin 1 + \frac{e^4}{2} - \frac{e}{2}.$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(x^2, xz, xy\right).$$

(a) Calcolare (direttamente) il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie cartesiana $z = x^2 + y^2$ con $(x,y) \in D$, dove D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,2)$ e $(4,0)$.

(b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il Teorema di Stokes.

(c) Calcolare il versore normale alla superficie S nel punto $(1,1,2)$.

Soluzione.

(a) Si ha che $\mathbf{rot}\,\bar{F} = (0,-y,z)$. Inoltre, indicando con $\bar{r}(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, $(x,y) \in D$, la parametrizzazione standard della superficie cartesiana in questione, si ha $r_x \wedge r_y(x,y) = (-2x,-2y,1)$. Indicando con Σ la superficie, il flusso richiesto è quindi

$$\Phi = \iint_\Sigma \mathbf{rot}\,\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS = \iint_D (0,-y,x^2+y^2)\cdot(-2x,-2y,1)\,dx\,dy = \iint_D (x^2+3y^2)\,dx\,dy.$$

Conviene calcolare questo integrale per orizzontali; si ottiene

$$\Phi = \int_0^2 dy \int_y^{4-y} (x^2+3y^2)\,dx = \frac{80}{3}.$$

(b) Indicando con dal Teorema di Stokes si ha

$$\Phi = \iint_\Sigma \mathbf{rot}\,\bar{F}\cdot\bar{n}\,dS = \int_{\bar{r}(+\partial D)} \bar{F}\cdot d\bar{s}$$

Il bordo di D è costituito dall'unione di tre segmenti, che (orientati positivamente rispetto a D) possono essere parametrizzati come segue:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(t) &= (t,0), \quad t \in [0,4] \\ -\bar{\gamma}_2(t) &= (t,4-t), \quad t \in [2,4] \\ -\bar{\gamma}_3(t) &= (t,t), \quad t \in [0,2]. \end{aligned}$$

Si ha quindi che

$$\begin{aligned} \bar{r}(\bar{\gamma}_1(t)) &= (t, 0, t^2), \quad t \in [0,4] \\ -\bar{r}(\bar{\gamma}_2(t)) &= (t, 4-t, 2t^2 - 8t + 16), \quad t \in [2,4] \\ -\bar{r}(\bar{\gamma}_3(t)) &= (t, t, 2t^2), \quad t \in [0,2], \end{aligned}$$

e il flusso è dato da

$$\begin{aligned} \Phi = &\int_0^4 (t^2, t^3, 0) \cdot (1, 0, 2t)\, dt - \int_2^4 (t^2, 2t^3 - 8t^2 + 16t, 4t - t^2) \cdot (1, -1, 4t - 8)\, dt \\ &- \int_0^2 (t^2, 2t^3, t^2) \cdot (1, 1, 4t)\, dt) = \frac{80}{3}. \end{aligned}$$

(c) Il versore normale nel punto richiesto è dato da

$$\bar{n} = \frac{(-2, -2, 1)}{\|(-2, -2, 1)\|} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\log n} \frac{2^n}{(x-1)^n}, \qquad x \neq 1$$

Facoltativo: discutere la convergenza uniforme della serie.

Soluzione. Effettuando la sostituzione $1/(x-1) = t$, $x \neq 1$, osserviamo che la serie in questione è una serie di potenze

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n 2^n}{\log n} t^n.$$

Indicando con $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{\log n}$, possiamo calcolarne il raggio di convergenza con il criterio della radice:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{(\log n)^{1/n}} = 2.$$

Il raggio di convergenza è quindi $1/2$, e la serie di partenza converge (assolutamente e semplicemente) se

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{x-1} < \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

La serie sicuramente non converge neanche semplicemente se $x \in (-1, 3)$, mentre dobbiamo studiare separatamente il comportamento agli estremi.
- Per $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\log n},$$

che, essendo $1/\log n \geq 1/n$ per ogni $n \geq 2$, diverge per il criterio del confronto.
- Per $x = 3$, la serie diventa

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\log n},$$

che diverge assolutamente per quanto visto per $x = -1$, mentre converge semplicemente per il criterio di Leibniz, visto che $1/\log n$ è decrescente e tende a zero per $n \to +\infty$.
In conclusione, la serie converge semplicemente se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$, e converge assolutamente se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, usando i risultati generali sulle serie si potenze, si ottiene che la serie converge uniformemente in tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, r) \cup [3, +\infty)$ con $r < -1$.

Corso di Studi in Fisica

Prova scritta di Analisi III del 15 dicembre 2014

Esercizio 1 (punti 6). Si consideri la seguente funzione razionale:

$$f(x) = \frac{x-1}{2x^2+5x-3}.$$

a) Si determini lo sviluppo in serie di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di f;

b) Si determinino il raggio di convergenza e l'intervallo (aperto) di convergenza della serie trovata;

c) Si determini il comportamento della serie trovata agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Soluzione. a) Si osserva che $2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ o $x = -3$, pertanto risulta che $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$. Decomponendo f in fratti semplici si ottiene

$$f(x) = -\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2x-1} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-2x} + \frac{4}{21}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)}$$
$$\frac{1}{7}\sum_{n\geq 0}(2x)^n + \frac{4}{21}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{3^n} = \frac{1}{7}\sum_{n\geq 0}\left[2^n + \frac{4(-1)^n}{3^{n+1}}\right]x^n.$$

b) Osserviamo che la serie di potenze $\frac{1}{7}\sum\limits_{n\geq 0}(2x)^n$ ha raggio di convergenza $\frac{1}{2}$ mentre la serie $\frac{4}{21}\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}$ ha raggio di convergenza 3, pertanto la serie di McLaurin di f, che è la somma delle due, ha raggio di convergenza $\frac{1}{2}$. L'intervallo aperto di convergenza è pertanto $I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
c) Per $x = \frac{1}{2}$, si ottiene la serie numerica

$$\frac{1}{7}\sum_{n\geq 0}\left[2^n + \frac{4(-1)^n}{3^{n+1}}\right]\frac{1}{2^n} = \frac{1}{7}\sum_{n\geq 0}\left[1 + \frac{4(-1)^n}{3\cdot 6^n}\right]$$

che non converge perchè il termine generale tende a 1 per $n \to \infty$. In modo simile per $x = -\frac{1}{2}$ si ottiene la serie

$$\frac{1}{7}\sum_{n\geq 0}\left[(-1)^n + \frac{4}{3\cdot 6^n}\right]$$

il cui termine generale non ha limite per $n \to \infty$. Pertanto, la serie non converge negli estremi dell'intervallo di convergenza.

Esercizio 2 (punti 5). Utilizzando il teorema di Gauss-Green, calcolare l'area della regione piana delimitata dalla retta $y = x$ e dalla curva $\bar{\gamma}(t) = (t^2 + \log t, t^2 + \log^2 t)$, $\quad t \in [1, e]$.
Soluzione. Osserviamo che gli estremi $(1,1)$ e $(1+e^2, 1+e^2)$ della curva $\bar{\gamma}$ giacciono sulla retta $y = x$ e il suo sostegno si trova al di sotto di tale retta. Infatti, per ogni $t \in (1, e)$ si ha $t^2 + \log t > t^2 + \log^2 t$. L'insieme D compreso tra la retta $y = x$ e il sostegno di $\bar{\gamma}$ è un dominio regolare del piano. Considerando il campo $\bar{F}(x,y) = (0, x)$, per il teorema di Gauss-Green, si ha:

$$\text{Area}(D) = \int_{\bar{\gamma}} \bar{F}\cdot \bar{d}s - \int_{\bar{\gamma}_1} \bar{F}\cdot \bar{d}s,$$

dove $\bar{\gamma}_1(t) = (t,t)$, $t \in [1, 1+e^2]$. Dunque, si ha:

$$\begin{aligned}
\text{Area}(D) = &\int_1^e (0, t^2+\log t)\cdot\left(2t+\frac{1}{t}, 2t+\frac{2}{t}\log t\right)dt - \int_1^{1+e^2}(0,t)\cdot(1,1)\,dt = \\
&\int_1^e \left(2t^3+4t\log t+\frac{2}{t}\log^2 t\right)dt - \int_1^{1+e^2} t\,dt = \\
&= \left[\frac{1}{2}t^4+2t^2\log t - t^2+\frac{2}{3}\log^3 t\right]_1^e - \frac{(1+e^2)^2}{2}+\frac{1}{2} = \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(\frac{2xy}{x^2+z^2}+2x, \log(x^2+z^2)-4y\sin z, \frac{2yz}{x^2+z^2}-2y^2\cos z\right).$$

a) Determinare il dominio D di $\bar{F}$.

b) Verificare che $\bar{F}$ è irrotazionale.

c) Verificare che il campo $\bar{F}$ è conservativo e calcolarne il potenziale che si annulla in $(0,0,1)$.

d) Calcolare il lavoro compiuto da $\bar{F}$ per spostare un punto materiale lungo la curva

$$\bar{\gamma}(t) = \left(\cos^5 t, t^2, 1+e^t\right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Soluzione. a) Il dominio del campo $\bar{F}$ èl'insieme

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse}\, y\}.$$

b) Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{2x}{x^2+z^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z), \\
\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) &= -\frac{4xyz}{(x^2+z^2)^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z), \\
\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{2z}{x^2+z^2} - 4y\cos z = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z).
\end{aligned}$$

Pertanto, il campo è irrotazionale.
c) Poiché il dominio A non è semplicemente connesso, non si può dedurre che il campo è conservativo dal punto b). Occorre calcolare un potenziale. Utilizzando il metodo delle integrazioni parziali e integrando F_1 rispetto a x si ottiene

$$U(x,y,z) = y\log(x^2+z^2)+x^2+\alpha(y,z).$$

Derivando U rispetto ad y ed eguagliando il risultato ad F_2, si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(y,z) = \log(x^2+z^2)+\frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,z) = \log(x^2+z^2)-4y\sin z,$$

da cui si ottiene $\alpha(y,z) = -2y^2\sin z+\beta(z)$. Infine, derivando U rispetto a z ed eguagliando il risultato ad F_3 si ottiene

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z}(y,z) = \frac{2yz}{x^2+z^2} - 2y^2\cos z+\beta'(z) = \frac{2yz}{x^2+z^2} - 2y^2\cos z,$$

da cui segue che $\beta(z)$ è costante. Il generico potenziale è dunque

$$U(x,y,z) = y\log(x^2+z^2) + x^2 - 2y^2\sin z + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo che $U(0,0,1) = 0$, si ottiene $C = 0$.
d) Poiché il campo $\bar{F}$ è conservativo, il lavoro richiesto è uguale a

$$U(\bar{\gamma}(\pi/2)) - U(\bar{\gamma}(0)) = U(0, \pi^2/4, 1+e^{\frac{\pi}{2}}) - U(1,0,2) = \frac{\pi^2}{2}\log(1+e^{\frac{\pi}{2}}) - \frac{\pi^4}{8}\sin(1+e^{\frac{\pi}{2}}) - 1.$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(z^2, x+z, y\right).$$

a) Calcolare (direttamente) il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie parametrica $\bar{r}(u,v) = (-v, u, uv)$ con $(u,v) \in D$, dove

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u^2+v^2 \le 4, 0 \le -u \le v\}.$$

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

c) La superficie $\bar{r}$ è semplice?

Soluzione. a) Si ha che $\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = (0, 2z, 1)$, mentre il vettore $\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u,v) = (u, -v, 1)$. Pertanto il flusso richiesto è

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_D \mathbf{rot}\bar{F}(\bar{r}(u,v)) \cdot \bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u,v)\, dudv = \iint_D (1-2uv^2)\, dudv = \\
&= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (\rho - 2\rho^4\cos\theta\sin^2\theta)\, d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}\int_1^2 \rho\, d\rho - 2\int_1^2 \rho^4\, d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta\sin^2\theta\, d\theta = \\
&\qquad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{2}{5}[\rho^5]_1^2 \cdot \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{8}\pi + \frac{62}{15} - \frac{31}{30}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

b) Osserviamo che $+\partial D = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3 \cup \bar{\gamma}_4$, dove

$$\bar{\gamma}_1(t) = (0,t),\ t \in [1,2], \qquad \bar{\gamma}_2(t) = (2\cos t, 2\sin t),\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\bar{\gamma}_3(t) = (t, -t),\ t \in \left[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \qquad -\bar{\gamma}_4(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Considerando il trasformato di $+\partial D$ si ha:

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (-t, 0, 0),\ t \in [1,2], \quad \bar{r} \circ \bar{\gamma}_2(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 4\sin t\cos t),\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3(t) = (t, t, -t^2),\ t \in \left[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad -\bar{r} \circ \bar{\gamma}_4(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t\cos t),\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Pertanto, risulta:

$$\Phi = \int_{\bar r(+\partial D)} \bar F\cdot \bar{ds} = \int_1^2 (0,-t,0)\cdot(-1,0,0)\,dt$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (16\sin^2 t\cos^2 t, -2\sin t + 4\sin t\cos t, 2\cos t)\cdot(-2\cos t, -2\sin t, 4\cos(2t))\,dt$$

$$+\int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (t^4, t-t^2, t)\cdot(1,1,-2t)\,dt$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin^2 t\cos^2 t, \sin t\cos t - \sin t, \cos t)\cdot(-\cos t, -\sin t, \cos(2t))\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-32\sin^2\cos^3 t - 8\sin^2 t\cos t + 4\sin^2 t + 8\cos t\cos(2t))\,dt + \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (t^4 - 3t^2 + t)\,dt$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-\sin^2\cos^3 t - \sin^2 t\cos t + \sin^2 t + \cos t\cos(2t))\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (-31\sin^2\cos^3 t - 7\sin^2 t\cos t + 3\sin^2 t + 7\cos t\cos(2t))\,dt + \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (t^4 - 3t^2 + t)\,dt.$$

Utilizzando il fatto che $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}, \cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ e $\cos^3 t = \cos t(1-\sin^2 t)$, otteniamo:

$$\Phi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(-52\cos t\sin^2 t + 31\cos t\sin^4 t + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos(2t) + 7\cos t\right)\,dt$$

$$= \left[-\frac{52}{3}\sin^3 t + \frac{31}{5}\sin^5 t + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\sin(2t) + 7\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} + \left[\frac{t^5}{5} - t^3 + \frac{t^2}{2}\right]_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= -\frac{13}{3}\sqrt{2} + \frac{31}{40}\sqrt{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2} + \frac{9}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4} + \frac{52}{3} - \frac{31}{5} - 7$$

$$-\frac{1}{40}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 1 = \frac{3}{8}\pi + \frac{62}{15} - \frac{31}{30}\sqrt{2}.$$

c) Dati due punti $(u,v),(u',v')\in D$ tali che $\bar r(u,v) = \bar r(u',v')$, risulta:

$$\begin{cases} -v = -v' \\ u = u' \\ uv = u'v' \end{cases}.$$

Dalle prime due relazioni si deduce che deve essere $(u,v) = (u',v')$. Pertanto la superficie $\bar r$ è semplice.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^x} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Soluzione. Sia $a_n = \left(\frac{1}{n^x} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Osserviamo che per $x\leq 0$, a_n non tende a 0 e dunque la serie non converge neanche semplicemente. Sia quindi $x>0$. Osserviamo che per $n\to\infty$ si ha:

$$a_n = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \begin{cases} \frac{1}{n^x} & \text{se } \; 0<x<1 \\ \frac{1}{6n^3} & \text{se } \; x=1 \\ -\frac{1}{n} & \text{se } \; x>1. \end{cases}.$$

In particolare, si ha che per $0 < x \leq 1$, il termine generale a_n è positivo da un certo n in poi, mentre per $x > 1$ il termine generale ènegativo da un certo n in poi. Pertanto, in tutti i casi c'è convergenza semplice se e solo se c'è convergenza assoluta. Possiamo allora applicare il criterio del confronto asintotico. Poiché per $x \in (0, 1)$ la serie $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^x}$ diverge positivamente, allora anche la nostra serie diverge per tali valori. Per $x = 1$, $a_n \sim \frac{1}{6n^3}$, quindi la serie converge assolutamente. Infine, per $x > 1$, vale $a_n \sim -\frac{1}{n}$, e dunque la serie non converge per confronto con la serie armonica. In conclusione, la serie converge assolutamente solo per $x = 1$, mentre per $x \neq 1$ non converge neanche semplicemente.

Corso di Studi in Fisica

Prova scritta di Analisi III del 7 luglio 2015

Esercizio 1 (punti 6). Sia data la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n\sqrt{n}} x^n.$$

a) Calcolare il raggio di convergenza e l'insieme (aperto) di convergenza della serie;

b) Studiare il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza;

c) Dire per quali $R > 0$ la serie converge uniformemente in $[-R, R]$;

d) Giustificare la seguente uguaglianza:

$$\int_0^{1/2} \sum_{n\geq 1} \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n\sqrt{n}} x^n \, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n\sqrt{n}} \int_0^{1/2} x^n \, dx.$$

Soluzione. a) Utilizzando il criterio della radice, e chiamando $a_n = \frac{\left(1-1/n^2\right)^{n^2}}{n\sqrt{n}}$, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}}{\sqrt[n]{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt[n]{n^{3/2}}} = 1,$$

essendo $n\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$. Si ha quindi che il raggio di convergenza della serie è 1, e la serie converge nell'intervallo $(-1, 1)$.

b) Per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n\sqrt{n}}.$$

Poiché

$$0 \leq \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, per il criterio del confronto la serie di partenza converge in $x = 1$. In $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n\sqrt{n}} (-1)^n,$$

che, per quanto appena visto, converge assolutamente e quindi anche semplicemente. In conclusione, la serie converge nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$.

c) Per i risultati generali sulle serie di potenze, abbiamo convergenza uniforme in $[-R, R]$ per ogni $R < 1$. Il Teorema di Abel ci assicura anche la convergenza uniforme in tutto l'intervallo $[-1, 1]$.

d) Poiché nell'intervallo $[0, 1/2]$, dai risultati precedenti, abbiamo convergenza uniforme della serie, l'uguaglianza è garantita dal Teorema di scambio tra serie e integrali.

Esercizio 2 (punti 6). Calcolare

$$\iint_E x \, dx \, dy,$$

dove E è la regione di piano compresa tra il sostegno della curva

$$\bar{\gamma}(t) = \left(\frac{1}{2}t - t^2, t^2\right), \quad t \in [0,1],$$

e la retta $y = -2x$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che il sostegno di $\bar{\gamma}$ è interamente contenuto nel semipiano $y \geq -2x$, infatti per ogni $t \in [0,1]$ vale $t^2 \geq -2\left(\frac{1}{2}t - t^2\right)$. Inoltre $\bar{\gamma}$ è una curva semplice, essendo $\bar{\gamma}(t_1) \neq \bar{\gamma}(t_2)$ per ogni $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 \neq t_2$. Possiamo calcolare l'integrale tramite il Teorema di Gauss-Green, ottenendo

$$\iint_E x\, dx\, dy = \int_{+\partial E} \bar{F} \cdot d\bar{s},$$

per un qualsiasi campo vettoriale $\bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ tale che $Q_x(x,y) - P_y(x,y) = x$. Possiamo per esempio scegliere $\bar{F}(x,y) = (0, x^2/2)$. Abbiamo che $+\partial E$ è l'unione del sostegno della curva $\bar{\gamma}$ (orientato secondo la parametrizzazione data, visto che sta completamente al di sopra della retta $y = -2x$), con il segmento che unisce il punto $(-1/2, 1)$ all'origine; quest'ultima curva si può parametrizzare come $\bar{\gamma}_1(t) = (t, -2t)$, $t \in (-1/2, 0)$. In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned}
\iint_E x\, dx\, dy &= \int_0^1 \left(0, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t - t^2\right)^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2t, 2t\right) dt + \int_{-1/2}^0 \left(0, \frac{t^2}{2}\right) \cdot (1,-2)\, dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}t^3 + t^5 - t^4\right) dt - \int_{-1/2}^0 t^2\, dt = -\frac{1}{80}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punti 7). Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, e

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(y^2 \cos(\alpha x y^2), 2xy\cos(xy^2) + z, y - z^2\right).$$

a) Determinare α in modo che $\bar{F}$ sia irrotazionale in $\mathbb{R}^3$.

b) Per tale α, determinare il generico potenziale di $\bar{F}$.

c) Per la α determinata al punto (a), calcolare il lavoro compiuto dal campo $\bar{F}$ lungo una qualsiasi curva che unisce il punto $(0,2,-1)$ al punto $(-\pi/2, 1, 1)$.

d) Per la α determinata al punto (a), si consideri il campo vettoriale

$$\bar{G}(x,y,z) = \left(y^2\cos(\alpha x y^2), 2xy\cos(xy^2) + z + 3\arctan y, y - z^2\right),$$

e sia $\bar{\gamma}$ una curva chiusa regolare con sostegno contenuto nel piano (x,z). Cosa si può dire del lavoro di $\bar{G}$ lungo la curva $\bar{\gamma}$?

Soluzione. a) Poiché

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z), \\
\frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) &= 1 = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z),
\end{aligned}$$

si tratta di imporre che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z),$$

cioè

$$2y\cos(\alpha x y^2) - 2\alpha x y^3 \sin(\alpha x y^2) = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2),$$

che è verificata per $\alpha = 1$.

b) Si tratta di trovare il generico potenziale del campo

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(y^2\cos(xy^2), 2xy\cos(xy^2) + z, y - z^2\right).$$

Utilizzando il metodo delle integrazioni successive, il potenziale $U(x,y,z)$ deve soddisfare

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2\cos(xy^2),$$

da cui, integrando, di ottiene che $U(x,y,z) = \sin(xy^2) + C_1(y,z)$. Si ha quindi, per derivazione rispetto a y, che

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy\cos(xy^2) + \frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) = 2xy\cos(xy^2) + z,$$

da cui $C_1(y,z) = yz + C_2(z)$, e quindi $U(x,y,z) = \sin(xy^2) + yz + C_2(z)$. Derivando rispetto a z si ha infine che U deve soddisfare

$$\frac{\partial U}{\partial z} = y + C_2'(z) = y - z^2,$$

da cui $C_2(z) = -z^3/3 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Il generico potenziale di $\bar{F}$ risulta quindi

$$U(x,y,z) = \sin(xy^2) + yz - \frac{z^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) Poiché $\bar{F}$, con la α determinata al punto (a), è irrotazionale ed è definito su $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso, si ha che $\bar{F}$ è conservativo, e quindi il lavoro L richiesto è dato dalla differenza di potenziale:

$$L = U(-\pi/2,1,1) - U(0,2,-1) = \frac{4}{3}.$$

d) Osserviamo che $\bar{G}(x,y,z) = \bar{F}(x,y,z) + (0, 3\arctan y, 0)$. Poiché $\bar{\gamma}$ è chiusa e $\bar{F}$ è conservativo, si ha che il lavoro di $\bar{G}$ lungo $\bar{\gamma}$ coincide con il lavoro del campo $\bar{H}(x,y,z) = (0, 3\arctan y, 0)$ lungo $\bar{\gamma}$; poiché il sostegno di $\bar{\gamma}$ è contenuto nel piano (x,z) e $\bar{H}$ ha solamente componente lungo y, si ha che il lavoro di $\bar{H}$ lungo $\bar{\gamma}$ è nullo, e quindi il lavoro di $\bar{G}$ lungo $\bar{\gamma}$ è 0.

Esercizio 4 (punti 7). Sia $\bar{\gamma}$ la curva intersezione tra le superfici $z = x^2 + y^2$ e $z = 1$, orientata in modo che la proiezione di $\bar{\gamma}$ sul piano (x,y) sia percorsa in senso orario, e sia

$$\bar{F}(x,y,z) = (y, 2x, xz).$$

a) Calcolare (direttamente) l'integrale curvilineo di $\bar{F}$ lungo $\bar{\gamma}$.

b) Calcolare il precedente integrale utilizzando il teorema di Stokes.

Soluzione. a) Poiché la proiezione di $\bar{\gamma}$ sul piano (x,y) è la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 1 (percorsa in senso orario), è comodo scrivere una parametrizzazione di $-\bar{\gamma}$ come

$$-\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Si ha quindi che

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s} &= -\int_0^{2\pi} (\sin t, 2\cos t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 2\cos^2 t)\, dt = -\pi.\end{aligned}$$

b) Consideriamo la superficie

$$\bar{s}(u,v) = (u,v,1), \quad \text{con } (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\},$$

e osserviamo che $\bar{s}(+\partial D)$ è il sostegno della curva $-\bar{\gamma}$. Per il Teorema di Stokes, l'integrale richiesto coincide quindi con il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie $-\bar{s}$.
Si ha che $\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = (0,-z,1)$, mentre il vettore $\bar{s}_u \wedge \bar{s}_v(u,v) = (0,0,1)$, e quindi il flusso richiesto è

$$\begin{aligned}\Phi &= -\iint_D \mathbf{rot}\bar{F}(\bar{s}(u,v)) \cdot \bar{s}_u \wedge \bar{s}_v(u,v)\, dudv = -\iint_D (0,-1,1)\cdot(0,0,1)\, du\, dv \\ &= -\iint_D du\, dv = -\text{area}(D) = -\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log(1+x^n)}{n^2}, \quad x \geq 0.$$

Soluzione. Osserviamo che per ogni $x \geq 0$ la serie è a termini positivi, quindi convergenza puntuale e assoluta coincidono. Osserviamo innanzitutto che per ogni $x > 1$ si ha

$$\frac{\log(1+x^n)}{n^2} \geq \frac{\log(x^n)}{n^2} = \frac{\log x}{n},$$

e $\log x > 0$, per cui per il criterio del confronto la serie diverge, visto che $\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge.
D'altra parte, per ogni $x \in [0,1]$ si ha che

$$0 \leq \frac{\log(1+x^n)}{n^2} \leq \frac{\log 2}{n^2},$$

e la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{\log 2}{n^2}$ è una serie numerica convergente. Questo ci dice che la serie di partenza converge puntualmente se e solo se $x \in [0,1]$, e inoltre converge uniformemente nell'intervallo $[0,1]$.

Corso di Studi in Fisica

Correzione della prova scritta di Analisi III del 1 Settembre 2015

Esercizio 1 (punti 6). Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x-3}{2x^2+5x-12}.$$

a) Determinare lo sviluppo in serie di McLaurin di f.

b) Determinare il raggio e l'intervallo (aperto) di convergenza della serie.

c) Discutere il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Soluzione. a) La funzione f è una funzione razionale il cui denominatore si annulla per $x = \frac{3}{2}$ e $x = -4$. Decomponendo f in fratti semplici si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-3}{(2x-3)(x+4)} = -\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{2x-3} + \frac{7}{11}\cdot\frac{1}{x+4} = \\ &= \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}x} + \frac{7}{44}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{1}{11}\left[\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}x\right)^n + \frac{7}{4}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{x}{4}\right)^n\right] = \\ &= \frac{1}{11}\sum_{n\geq 0}\left[\frac{2^n}{3^n} + \frac{7(-1)^n}{4^{n+1}}\right]x^n. \end{aligned}$$

b) La serie ottenuta è data dalla somma di due serie di potenze, una con raggio di convergenza $\rho_1 = \frac{3}{2}$ e l'altra con raggio di convergenza $\rho_2 = 4$, pertanto il raggio di convergenza della serie somma è $\rho = \min\{3/2, 4\} = 3/2$. L'intervallo (aperto) di convergenza della serie è quindi $I = (-3/2, 3/2)$.
c) Per $x = 3/2$ si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n\geq 0}\left[1 + \frac{7(-3)^n}{4\cdot 8^n}\right],$$

che non converge perchè il termine generale non tende a 0 per $n \to \infty$. In modo simile si vede che la serie non converge neanche per $x = -3/2$.

Esercizio 2 (punti 6). Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = (xy - 2z + 1, 3y^2 + x, xyz)$$

uscente dalla superficie del cubo $Q = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ sia utilizzando la definizione di flusso sia usando il teorema della divergenza.

Soluzione. ll flusso Φ_e in questione è la somma dei flussi $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6$ uscenti attraverso le sei facce del cubo $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, che possiamo parametrizzare come segue:

$$\begin{aligned} &\bar{r}_1(x,y) = (x,y,0), && (x,y)\in D = [0,1]\times[0,1], && \text{con} \quad \bar{n}(x,y) = (0,0,1), \\ &\bar{r}_2(x,y) = (x,y,1), && (x,y)\in D = [0,1]\times[0,1], && \text{con} \quad \bar{n}(x,y) = (0,0,1), \\ &\bar{r}_3(x,y) = (0,y,z), && (y,z)\in D = [0,1]\times[0,1], && \text{con} \quad \bar{n}(y,z) = (1,0,0), \\ &\bar{r}_4(x,y) = (1,y,z), && (y,z)\in D = [0,1]\times[0,1], && \text{con} \quad \bar{n}(y,z) = (1,0,0), \\ &\bar{r}_5(x,y) = (x,0,z), && (x,z)\in D = [0,1]\times[0,1], && \text{con} \quad \bar{n}(x,z) = (0,-1,0), \\ &\bar{r}_6(x,y) = (x,1,z), && (x,z)\in D = [0,1]\times[0,1], && \text{con} \quad \bar{n}(x,z) = (0,-1,0). \end{aligned}$$

Si noti che nel caso di $\bar{r}_1, \bar{r}_3, \bar{r}_6$, il versore normale indotto dalla parametrizzazione punta verso l'interno del cubo, dunque nel calcolo del flusso uscente bisogna invertire il segno del versore. Le parametrizzazioni scelte sono tali che i versori normali da esse indotti puntano verso l'esterno del cubo, quindi i corrispondenti flussi sono uscenti. Risulta allora che:

$$\Phi_1 = \iint_D (xy+1, 3y^2+x, 0) \cdot (0,0,-1)\, dxdy = 0,$$

$$\Phi_2 = \iint_D (xy-1, 3y^2+x, xy) \cdot (0,0,1)\, dxdy = \iint_D xy\, dxdy = \frac{1}{4},$$

$$\Phi_3 = \iint_D (-2z+1, 3y^2, 0) \cdot (-1,0,0)\, dydz = \iint_D (2z-1)\, dydz = 0,$$

$$\Phi_4 = \iint_D (-2z+y+1, 3y^2+1, yz) \cdot (1,0,0)\, dydz = \iint_D (-2z+y+1)\, dydz = \frac{1}{2},$$

$$\Phi_5 = \iint_D (-2z+1, x, 0) \cdot (0,-1,0)\, dxdz = -\iint_D x\, dxdz = -\frac{1}{2},$$

$$\Phi_6 = \iint_D (x-2z+1, 3+x, xz) \cdot (0,1,0)\, dxdz = \iint_D (3+x)\, dxdz = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

da cui segue che

$$\Phi_e = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i = \frac{15}{4}.$$

Utilizzando invece il teorema della divergenza, il flusso uscente è dato da

$$\Phi_e = \iiint_Q \operatorname{div}\bar{F}(x,y,z)\, dxdydz.$$

Poiché $\operatorname{div}\bar{F}(x,y,z) = y(7+x)$, segue che

$$\Phi_e = \iiint_Q y(7+x)\, dxdydz = \int_0^1 (7+x)\, dx \cdot \int_0^1 y\, dy = \left[7x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{15}{4}.$$

Esercizio 3 (punti 6). Sia data la seguente forma differenziale:

$$\omega(x,y) = \left(\frac{2}{\sqrt{y-2x}} + 3\right) dx + \left(-\frac{1}{\sqrt{y-2x}} + \frac{1}{y^2+1}\right) dy.$$

(a) Si determini il dominio di ω.

(b) Si verifichi che ω è esatta e se ne determini la primitiva $U_o(x,y)$ che si annulla in $(0,1)$.

(c) Si calcoli

$$\int_\gamma \omega,$$

dove γ è l'arco di parabola di vertice $(0,2)$ con asse parallelo all'asse y che va dal punto $(0,2)$ al punto $(-1,1)$.

Soluzione. a) Il dominio di ω è l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2x\}$.
b) Poiché A è semplicemente connesso, per dimostrare che ω è esatta, è sufficiente verificare che è chiusa. Questo d'altra parte è vero perché

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{y-2x}} + \frac{1}{y^2+1}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{\sqrt{y-2x}} + 3\right) = -\frac{1}{(y-2x)^{3/2}}.$$

Utilizzando il metodo delle integrazioni parziali per il calcolo della primitiva ci si riconduce alla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}U(x,y) = \frac{2}{\sqrt{y-2x}} + 3 \\ \frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{y-2x}} + \frac{1}{y^2+1} \end{cases}.$$

Integrando la seconda equazione si ottiene:

$$U(x,y) = -2\sqrt{y-2x} + \arctan y + h(x).$$

Sostituendo questa funzione nella prima equazione si ottiene $h(x) = 3x + c, c \in \mathbb{R}$. Pertanto la generica primitiva di ω è

$$U(x,y) = -2\sqrt{y-2x} + \arctan y + 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo che essa si annulli in $(0,1)$, si ottiene

$$U_o(x,y) = -2\sqrt{y-2x} + \arctan y + 3x + 2 - \frac{\pi}{4}.$$

c) Poiché ω èesatta, risulta:

$$\int_\gamma \omega = U(-1,1) - U(0,2) = -2\sqrt{3} + \frac{\pi}{4} - 3 + 2\sqrt{2} - \arctan(2).$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(x+y, xz, y^2+z\right).$$

a) Calcolare (direttamente) il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la superficie parametrica $\bar{r}(u,v) = (u, v^2, u^2 v)$, con $(u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1, -u \le v \le 0\}$.

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il Teorema di Stokes.

c) La superficie $\bar{r}$ è semplice?

Soluzione. a) Il flusso richiesto è dato da

$$I = \iint_D \mathrm{rot}\bar{F}(\bar{r}(u,v)) \cdot (r_u \wedge r_v)(u,v)\, dudv.$$

Si ha che $\mathrm{rot}\bar{F}(x,y,z) = (2y-x, 0, z-1)$, da cui segue che $\mathrm{rot}\bar{F}(\bar{r}(u,v)) = (2v^2-u, 0, u^2v-1)$. Inoltre, $r_u \wedge r_v(u,v) = (-4uv^2, -u^2, 2v)$. Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (-8uv^4 + 6u^2v^2 - 2v)\, dudv = \int_0^1 du \int_{-u}^0 (-8uv^4 + 6u^2v^2 - 2v)\, dv \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{8}{5}uv^5 + 2u^2v^3 - v^2\right]_{-u}^0 du = \int_0^1 \left(-\frac{8}{5}u^6 + 2u^5 + u^2\right) du = \frac{46}{105}. \end{aligned}$$

b) Utilizzando il teorema di Stokes, si ha che

$$I = \int_{\bar{r}(+\partial D)} \bar{F} \cdot \bar{ds}.$$

Si ha che $+\partial D = \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3$, dove $\bar{\gamma}_1(t) = (1-t, 0), t \in [0,1], \bar{\gamma}_2(t) = (t, -t), t \in [0,1], \bar{\gamma}_3(t) = (1, t), t \in [-1, 0]$. Pertanto, $\bar{r}(+\partial D) = (\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1) \cup (\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2) \cup (\bar{r} \circ \bar{\gamma}_3)$, dove:

$$\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1(t) = (1-t, 0, 0), \quad t \in [0,1],$$

$$\bar{r}\circ\bar{\gamma}_2(t) = (t, t^2, -t^3), \quad t \in [0,1],$$
$$\bar{r}\circ\bar{\gamma}_3(t) = (1, t^2, t), \quad t \in [-1,0].$$

Risulta allora che

$$I = \sum_{i=1}^{3} \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i} \bar{F}(\bar{r}(\bar{\gamma}_i)) \cdot (\bar{r}\circ\bar{\gamma}_i)'(t)\,dt = \int_0^1 (1-t,0,0)\cdot(-1,0,0)\,dt$$
$$+ \int_0^1 (t+t^2, -t^4, t^4 - t^3)\cdot(1, 2t, -3t^2)\,dt + \int_{-1}^0 (1+t^2, t, t^4+t)\cdot(0,2t,1)\,dt$$
$$= \int_0^1 (t-1)\,dt + \int_0^1 (t+t^2+t^5-3t^6)\,dt + \int_{-1}^0 (2t^2+t^4+t)\,dt = -\frac{1}{2} + \frac{12}{21} + \frac{11}{30} = \frac{46}{105}.$$

c) La superficie $\bar{r}$ è semplice. Infatti, siano$(u,v),(u',v') \in D$ tali che $(u, v^2, u^2 v) = (u', v'^2, u'^2 v')$. Dall'uguaglianza delle prime due componenti e dal fatto che $v \le 0, v' \le 0$, segue che $u = u'$ e $v = v'$.

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n}{n + n^2 x + \arctan(nx)}, \qquad x \ge 0.$$

(Facoltativo: discutere la convergenza totale della serie).

Soluzione. Si tratta di una serie a segni alterni. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, osserviamo che per $x = 0$, si ottiene la serie $\sum_{n\ge1} \frac{(-1)^n}{n}$ che non converge assolutamente. Per $x > 0$, si è ricondotti a studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n + n^2 x + \arctan(nx)}.$$

Poiché

$$\frac{1}{n + n^2 x + \arctan(nx)} \le \frac{1}{n^2 x},$$

la serie converge per confronto con la serie $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2}$. Dunque la serie converge assolutamente per $x > 0$ e non converge assolutamente per $x = 0$. Per quanto riguarda la convergenza semplice, questa è garantita per $x > 0$ dalla convergenza assoluta. In $x = 0$ inoltre la serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. In conclusione, la serie converge semplicemente per ogni $x \ge 0$, mentre converge assolutamente solo per $x > 0$. Per quanto riguarda la convergenza totale, osserviamo che su ogni intervallo della forma $[\delta, +\infty)$, con $\delta > 0$, si ha:

$$\frac{1}{n + n^2 x + \arctan(nx)} \le \frac{1}{n + n^2\delta + \arctan(n\delta)} \le \frac{1}{\delta n^2},$$

dunque la serie converge totalmente su $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$. Non converge invece totalmente su tutto $[0, +\infty)$ in quanto

$$\sup_{x\ge 0} \left(\frac{1}{n + n^2 x + \arctan(nx)} \right) = \frac{1}{n},$$

che è il termine generale di una serie divergente.