CORSO DI LAUREA IN FISICA

Prova d'esame di Metodi Matematici della Meccanica Classica – 19/6/2024

TEMA I (A)

Siano (x, y, z) coordinate ortonormali nello spazio fisico, con y coordinata verticale rivolta verso l'alto. Un sistema olonomo è formato da due punti materiali. Entrambi i punti materiali sono vincolati a muoversi nel piano verticale $z = 0$; il punto A, di massa m_A, è vincolato a muoversi sulla retta di equazione $x = y$, mentre il punto B, di massa m_B, è vincolato a muoversi sulla retta di equazione $x = -y$. Oltre alla forza peso, fra i due punti agisce una forza lineare attrattiva con costante elastica k.

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema e trovare due costanti del moto indipendenti.
(2) Scrivere le equazioni di Lagrange e integrarle.
(3) Ricavare condizioni sui dati iniziali e/o sui parametri del sistema che garantiscono che il moto del sistema sia periodico.

SVOLGIMENTO

Usando come coordinate lagrangiane le coordinate verticali (y_A, y_B) dei due punti (usando le coordinate orizzontali si ottengono gli stessi risultati), da cui la parametrizzazione $x_A = y_A$, $x_B = -y_B$, si ricava subito che il potenziale delle forze attive diventa

$$U = -m_A g y_A - m_B g y_B - \frac{k}{2}\left((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2\right) = -m_A g\, y_A - m_B g\, y_B - k y_A^2 - k y_B^2.$$

La Lagrangiana è quindi

$$L = m_A \dot{y}_A^2 + m_B \dot{y}_B^2 - m_A g\, y_A - m_B g\, y_B - k y_A^2 - k y_B^2.$$

Poiché il sistema è autonomo, si conserva l'energia totale

$$\mathcal{H} = m_A \dot{y}_A^2 + m_B \dot{y}_B^2 + m_A g\, y_A + m_B g\, y_B + k y_A^2 + k y_B^2.$$

Si osserva che l'energia è completamente disaccoppiata: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathcal{A} + \mathcal{H}_\mathcal{B}$, con

$$\mathcal{H}_\mathcal{A} = m_A \dot{y}_A^2 + m_A g\, y_A + k y_A^2, \qquad \mathcal{H}_\mathcal{B} = m_B \dot{y}_B^2 + m_B g\, y_B + k y_B^2.$$

Le due funzioni $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ e $\mathcal{H}_\mathcal{B}$ sono separatamente costanti del moto, in quanto non vi è interazione fra i due gradi di libertà: questo si può verificare usando direttamente le equazioni del moto (vedi più oltre).
Le equazioni di Eulero-Lagrange, messe in forma normale, sono

$$\ddot{y}_A = -\frac{k}{m_A} y_A - \frac{g}{2}, \qquad \ddot{y}_B = -\frac{k}{m_B} y_B - \frac{g}{2}.$$

Si trova quindi

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}_\mathcal{A} = 2 m_A \dot{y}_A \ddot{y}_A + (m_A g + 2k y_A)\dot{y}_A = -2 m_A \dot{y}_A \left(\frac{k}{m_A} y_A + \frac{g}{2}\right) + (m_A g + 2k y_A)\dot{y}_A = 0;$$

Lo stesso vale per $\mathcal{H}_\mathcal{B}$ (e non potrebbe essere altrimenti, dato che $\mathcal{H}_\mathcal{B} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_\mathcal{A}$).
Le equazioni del moto si riducono alle equazioni di due oscillatori armonici traslando l'origine delle coordinate: ponendo

$$y_A = q^1 + \frac{m_A g}{2k}, \qquad y_B = q^2 + \frac{m_B g}{2k}$$

(NB questo corrisponde a porre l'origine nella configurazione di equilibrio, come si fa sistematicamente nello studio delle oscillazioni intorno a una configurazione di equilibrio stabile) le equazioni del moto diventano

$$\ddot{q}^1 = -\frac{k}{m_A} q^1,$$
$$\ddot{q}^2 = -\frac{k}{m_B} q^2.$$

e l'integrale generale del sistema è

$$q^1(t; q_0^1, \dot{q}_0^1) = q_0^1 \cos(\omega_A t) + \frac{\dot{q}_0^1}{\omega_A} \sin(\omega_A t), \qquad \omega_A = \sqrt{\frac{k}{m_A}},$$
$$q^2(t; q_0^2, \dot{q}_0^2) = q_0^2 \cos(\omega_B t) + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega_B} \sin(\omega_B t), \qquad \omega_B = \sqrt{\frac{k}{m_B}}.$$

Se fra le condizioni iniziali del primo oscillatore sono $(q_0^1 = 0, \dot{q}_0^1 = 0)$, allora la coordinata q^1 resta costante, $q^1(t) \equiv 0$, solo la coordinata q^2 oscilla e il moto del sistema è periodico con frequenza $\frac{\omega_B}{2\pi}$; se invece si hanno condizioni iniziali $(q_0^2 = 0, \dot{q}_0^2 = 0)$ si ha analogamente un moto periodico con frequenza $\frac{\omega_A}{2\pi}$. Se il rapporto fra le due frequenze caratteristiche è irrazionale, allora non vi sono altri moti periodici.
Se invece il rapporto fra le due frequenze, ossia $\sqrt{\frac{m_A}{m_B}}$, è razionale, allora anche tutti gli altri moti del sistema sono periodici con periodo uguale al minimo comune multiplo dei due periodi.

TEMA II (A)

In uno spazio delle fasi bidimensionale, con coordinate naturali (q, p), si considerino l'Hamiltoniana $H(q, p)$ e la funzione generatrice di prima specie $S(q, Q)$ date rispettivamente da

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right), \qquad S(q, Q) = \frac{\omega\, q^2}{2\tan(Q)}.$$

Trovare l'espressione dell'Hamiltoniana del sistema nelle nuove variabili canoniche (Q, P) generate da S e scrivere le equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P).

SVOLGIMENTO

Applicando la formula generale per funzioni generatrici di prima specie si ottiene

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\omega\, q}{\tan(Q)} \qquad P = -\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{\omega\, q^2 (1 + \tan(Q)^2)}{2\tan(Q)^2)} = \frac{\omega\, q^2}{2\sin(Q)^2}$$

dalla seconda si ricava direttamente q in funzione di (Q, P), e sostituendo nella prima si ottiene la trasformazione canonica

$$q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \sin(Q), \qquad p = \sqrt{2P\omega} \cos(Q)$$

in cui si riconosce la trasformazione in variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico. Sostituendo in H si trova infatti $H = \omega P$, da cui le equazioni di Hamilton

$$\dot{Q} = \omega, \qquad \dot{P} = 0.$$

TEMA I (B)

Siano (ρ, θ, z) coordinate cilindriche nello spazio fisico, con z coordinata verticale rivolta verso l'alto. Un punto materiale di massa m, soggetto alla forza peso, è vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = \frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^2$.

(1) Scrivere la Lagrangiana del sistema e trovare due costanti del moto indipendenti.

(2) Scrivere l'equazione di Weierstrass del sistema.

(3) Ricavare condizioni sui valori delle costanti del moto che garantiscono che il moto del punto sia periodico.

SVOLGIMENTO

Scelte come coordinate lagrangiane ρ e θ, da cui $\dot z = \rho(\rho-1)\dot\rho$, la Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2}\left((\rho^4 - 2\rho^3 + \rho^2 + 1)\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) - mg\left(\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^2\right).$$

Poiché L non dipende da t né da θ, le leggi di conservazione sono

$$\frac{m}{2}\left((\rho^4 - 2\rho^3 + \rho^2 + 1)\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) + mg\left(\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^2\right) = E,$$

$$m\rho^2\dot\theta = J.$$

Da queste si ottiene l'equazione di Weierstrass

$$\dot\rho^2 = W(\rho; E, J) = \frac{6Em\rho^2 - 3J^2 - m^2 g\rho^4(2\rho - 3)}{3m^2\rho^2\left(\rho^4 - 2\rho^3 + \rho^2 + 1\right)}$$

I moti possibili sono i seguenti:

- Se $J = 0$, allora $\dot\theta \equiv 0$ e la coordinate ρ oscilla fra due zeri semplici della funzione W per tutti i valori di E, tranne per $E = 0$; per $E > 0$, l'oscillazione di ρ attraversa $\rho = 0$. Se invece $E = -\frac{1}{6}mg$, che è il minimo dell'energia per $J = 0$, il punto si trova in quiete in un punto della circonferenza $\rho = 1$, e lì rimane indefinitamente;
- se $J = 0$ e $E = 0$, W ha uno zero doppio in $\rho = 0$ (a rigore questo punto è fuori dal dominio delle coordinate, ma si vede immediatamente che questo punto è un massimo locale dell'energia potenziale, quindi è una configurazione di equilibrio instabile). Per $E = 0$ si ha quindi un moto a meta asintotica (non periodico) se il valore iniziale ρ_0 è diverso da 0.
- Se $J \neq 0$, allora la coordinata ρ oscilla comunque fra due zeri della funzione W, oppure resta costante in uno zero doppio. Nel caso dei due zeri semplici, il moto potrebbe essere periodico se il periodo della coordinata ρ e quello della coordinata θ risultassero in rapporto razionale (calcolare le condizioni su E e J per cui questo avviene sarebbe arduo, ma dobbiamo aspettarci che genericamente questo non si verifichi);
- in corrispondenza di ogni zero doppio di W, per $J \neq 0$, si ha un moto circolare uniforme, quindi il moto è periodico. Le condizioni per avere uno zero doppio, $W(\rho; E, J) = 0$ e $W'(\rho; E, J) = 0$, sono

  $$J^2 = 2Em\rho^2 - m^2 g\rho^4(\frac{2}{3}\rho - 1), \qquad E = mg\rho^2\left(\frac{5}{6}\rho - 1\right);$$

  sostituendo E nella prima condizione si ottiene

  $$J^2 = m^2 g\rho^4(\rho - 1).$$

  Queste condizioni possono essere soddisfatte per qualunque $\rho > 1$ (per $\rho = 1$ si ottiene il caso $J = 0$, già discusso). Quindi esistono moti periodici di qualunque raggio $\rho = R$, con i valori di E e J che si ricavano dalle espressioni date sopra. Non esistono, invece, moti circolari con $\rho \leq 1$.

TEMA II (B)

In uno spazio delle fasi bidimensionale, con coordinate naturali (q, p), si considerino l'Hamiltoniana $H(q, p)$ e la funzione generatrice di seconda specie $S(q, P, t)$ date rispettivamente da

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + k\, q, \qquad\qquad S(q, P, t) = \frac{1}{2} P\, t\, (k\, t - P) + Pq - k\, q\, t.$$

Trovare l'espressione dell'Hamiltoniana del sistema nelle nuove variabili canoniche (Q, P) generate da S e scrivere le equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P).

SVOLGIMENTO

Applicando la formula generale per funzioni generatrici di seconda specie si ottiene

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} = P - kt, \\ Q &= \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{1}{2}kt^2 - Pt + q \quad \Rightarrow \quad q = Q + Pt - \frac{1}{2}kt^2. \end{aligned}$$

La nuova Hamiltoniana sarà

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P)) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(P - kt)^2}{2} + k\, q(Q, P) + Pkt - \frac{1}{2}P^2 - k\, q(Q, P) = \frac{k^2 t^2}{2}.$$

Nella nuova Hamiltoniana K così ottenuta, Q e P sono entrambe coordinate cicliche e le equazioni di Hamilton sono semplicemente

$$\dot{Q} = 0, \qquad \dot{P} = 0.$$

Ponendo $t = 0$ nella trasformazione canonica, in effetti, si vede che Q e P coincidono rispettivamente con i valori iniziali delle coordinate q e p.