$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A}}_{= -\Box\vec{A}} + \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)}_{=0 \text{ nel gauge di Lorentz}} = \mu_0\vec{J} \qquad (54)$$

Nel gauge di Lorentz, quindi, l'equazione si riduce a

$$\boxed{\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{J}} \qquad (55)$$

Le equazioni (51) e (55) hanno la medesima struttura:

$$\Box\, u(t,\vec{x}) = + v(t,\vec{x}) \qquad (56)$$

operatore

funzione da determinare

funzione nota (sorgente)

Conviene sviluppare una metodologia per risolvere questo tipo di equazioni.

• Il metodo delle funzioni di Green

Consideriamo un'equazione matriciale della forma

$$M\cdot u = v \qquad (57)$$

operatore lineare = matrice

vettore da incognito

termine noto (sorgente)

Essa si risolve sfruttando la matrice inversa M^{-1}, tale che

$$M^{-1}\cdot M = M\cdot M^{-1} = \mathbb{1} \qquad (58)$$

← matrice identità

↑ prodotto matriciale

Infatti si ha

$$u = M^{-1} v \qquad (59)$$

che, scritta in componenti, è

$$u^i = \sum_j (M^{-1})^i{}_j \, v^j \qquad (60)$$

con $i, j = 1 \ldots n$ (dimensione dello spazio vettoriale).

Consideriamo ora un'equazione differenziale lineare (dapprima in 1 dimensione) della forma

$$\boxed{O_x \; u(x) = v(x)} \qquad (61)$$

operatore differenziale nella variabile x — funzione da determinare — funzione nota (sorgente)

Per risolverla in analogia al caso precedente ci serve l'inverso dell'operatore O_x, che soddisfi l'analogo della (58). Ora abbiamo

$$i \longrightarrow x \quad , \quad v^i \to v(x) \quad , \quad u^i \to u(x) \qquad (62)$$

indice discreto — indice continuo

Cosa rimpiazza la matrice identità $\mathbb{1}$, con componenti $(\mathbb{1})^i{}_j = \delta^i{}_j$ tali che

$$(\mathbb{1}) \qquad \sum_j \delta^i{}_j \, v^j = v^i \; ? \qquad (63)$$

L'analogo della δ di Kronecker $\delta^i{}_j$ è la "distribuzione di Dirac" $\delta(x-y)$ che gode della proprietà

$$\boxed{\int dy \; \delta(x-y) \, v(y) = v(x)} \qquad (64)$$

L'inverso dell'operatore O_x, che è usualmente denotato come $G = O^{-1}$, è descritto dai suoi "elementi di matrice" $G(x,y)$ che soddisfano l'analogo della (58):

$$\boxed{O_x\, G(x-y) = \delta(x-y)} \qquad (65)$$

$G(x,y)$ è detta "funzione di Green" dell'operatore O_x. Corrisponde alla soluzione dell'eq. (64) nel caso di una sorgente localizzata nel punto y: se $\sigma(x) = \delta(x-y) \Rightarrow u(x) = G(x,y)$. Una volta determinata la funzione di Green la soluzione dell'eq. (64) si può scrivere nella forma

$$\boxed{u(x) = \int dy\; G(x,y)\, \sigma(y)} \qquad (66)$$

che rappresenta l'analogo della (60). Un modo di descrivere questa espressione è che, nota l'effetto di una sorgente puntiforme, sfruttiamo il principio di sovrapposizione (l'eq. è lineare) e "sommiamo" i contributi di tutte ~~le comp~~ i valori puntuali della sorgente.

. Questa tecnica si estende al caso di funzioni di più variabili. In particolare per le eq. non omogenee di Maxwell per i potenziali, che sono del tipo (vedi la (56))

$$\boxed{\Box_x\, u(t,\vec{x}) = +\sigma(t,\vec{x})} \qquad (67)$$

bisogna determinare la funzione di Green dell'operatore di D'Alembert:

$$\boxed{\Box\, G(t,\vec{x};\, t',\vec{x}') = \delta(t-t')\, \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')} \qquad (68)$$

così da ottenere

$$\boxed{u(t,\vec{x}) = \int dt' d^3\vec{x}'\ G(t,\vec{x};t',\vec{x}')\ v(t',\vec{x}')} \tag{69}$$

Costruiremo questa funzione di Green per passi successivi.

- Notiamo che ~~una~~ la funzione di Green non è univocamente determinata dalla (65) [o dall'espressione analoga per più variabili]. Infatti possiamo sempre aggiungere una soluzione qls. dell'equazione omogenea associata

$$O_x f(x) = 0 \tag{70}$$

$G'(x,y) = G(x,y) + f(x)$ soddisfa anch'essa la (65).

- Un ingrediente cruciale è la distribuzione δ di Dirac, che avete studiato in MMF. Ricordiamo solo che una rappresentazione utile della δ di Dirac è tramite la sua "TF":

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx} \tag{71}$$

Analogamente per la δ in 3 dimensioni ~~scriviamo~~ abbiamo

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\ e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \tag{72}$$

Notiamo che $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ è $\neq 0$ solo se $\vec{x}=\vec{x}'$, per cui si ha

$$\boxed{\int_V dV'\ \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\ f(\vec{x}') = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{x}\notin V \\ f(\vec{x}) & \text{se } \vec{x}\in V \end{cases}} \tag{73}$$

Useremo queste proprietà svariate volte in seguito.

• La funzione di Green dell'operatore di Laplace

L'operatore di Laplace (o "Laplaciano") è, in coordinate cartesiane,

$$\boxed{\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \qquad (74)$$

Siccome dipende solo dalle derivate, la sua forma è invariante per traslazioni: se $x' = x + a$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}$.

Pertanto la sua funzione di Green può venir scelta invariante per traslazioni, cioè funzione solo della differenza $\vec{x} - \vec{y}$: avremo

$$\boxed{G(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{x}-\vec{y})} \qquad (75)$$

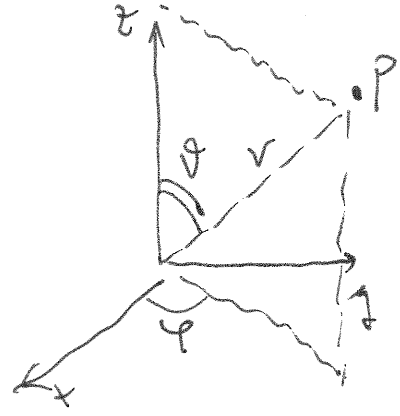
e la forma della funzione G è determinata dall'equazione

$$\boxed{\Delta G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})} \qquad (76)$$

• Una soluzione di quest'equazione è

$$\boxed{G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} = -\frac{1}{4\pi r}} \qquad (77)$$

Per dimostrarlo, conviene passare a coordinate polari nello spazio:



$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \vartheta \le \pi \end{array} \qquad (78)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\vec{x}|$$

In queste coordinate sferiche si ha (vedi pag 18 bis)

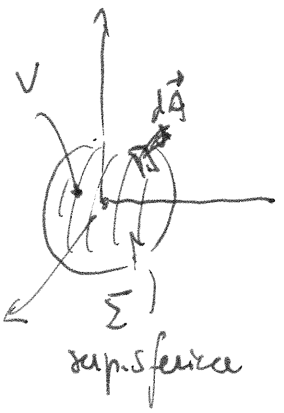
$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\, r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda \qquad (79)$$

dove la parte angolare Λ (che contiene solo derivate rispetto a θ e φ) è irrilevante nel presente calcolo. Infatti la forma proposta di G, eq. (77) dipende solo da r. Si ha dunque

$$\Delta G(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\cdot\frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left((-)\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}}\right) = 0 \qquad (80)$$

per $r > 0$

L'espressione è però indeterminata per $r=0$. Se la integriamo su di un volumetto sferico centrato nell'origine abbiamo

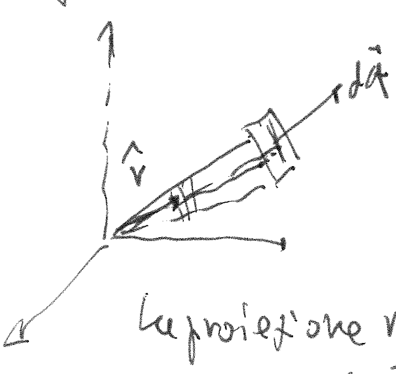


$$\int_V \Delta G \, dV = -\frac{1}{4\pi}\int_V \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dV = -\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) dV$$

|| (teor. divergenza)

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{A} \qquad (81)$$

Ogni elementino ~~della~~ di superficie sferica $d\vec{A}$ è diretto radialmente e vale



$$d\vec{A} = r^2 d\Omega \, \hat{r} \qquad (82)$$

↑ versore radiale

La proiezione radiale del gradiente è semplicemente (vedi la 18 bis)

$$\hat{r}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \qquad (83)$$

(78 bis)

In coordinate sferiche, (78) vediamo che

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r} \qquad (79\text{-}1)$$

$\frac{\partial}{\partial r}$ significa: tenendo fissi φ e ϑ. Inoltre, siccome $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, abbiamo anche

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \qquad (79\text{-}2)$$

Consideriamo allora il laplaciano agente su una funzione di r: (su cui $\Lambda = 0$)

$$\Delta f(r) = \Delta_{rad} f(r)$$

$$\| $$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(r) \qquad (79\text{-}3)$$

Consideriamo ~~ad es~~ ad esempio,

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{df}{dr}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{df}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{df}{dr}$$

$$+ \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\frac{df}{dr} + \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2} \qquad (79\text{-}4)$$

Otteniamo un'espressione analoga per $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. In totale dunque

$$\Delta_{rad} f = \frac{1}{r}\Big(3 - \underbrace{\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}}_{=1}\Big)\frac{df}{dr} + \underbrace{\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}}_{=1}\frac{d^2 f}{dr^2} \qquad (79\text{-}5)$$

cioè

$$\Delta_{rad} f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} \Rightarrow \boxed{\Delta_{rad} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}} \qquad (79\text{-}6)$$

che si può anche scrivere come (79-7)

$$\boxed{\Delta_{rad} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}} \rightarrow = \cancel{\frac{1}{r^2}}\cancel{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}(2r)\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \quad ✓$$

(18 tris)

Mostriamo Eq(83):

$$\hat{r} \cdot \vec{\nabla} = \frac{x}{r}\partial_x + \frac{y}{r}\partial_y + \frac{z}{r}\partial_z = \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial r}\partial_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \qquad \checkmark$$

Inserendo la (82) e la (83) nella (81) otteniamo

$$\int_V \Delta G \, dV = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot r^2 \, d\Omega = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left(\frac{-1}{r^2}\right) r^2 \, d\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_{int}} d\Omega = \frac{1}{4\pi}\cdot 4\pi = 1 \qquad (84)$$

angolo solido

Abbiamo dunque mostrato che per la f.ne di green ipotizzata nella (77),

$$\begin{cases} \Delta G(\vec{x}) = 0 & \text{se } \vec{x} \neq 0 \\ \int_V \Delta G \, dV = 1 & \text{se } \vec{0} \in V \end{cases} \qquad (85)$$

Possiamo dunque concludere che

$$\Delta G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}) \qquad (86)$$

- Elettromagnetismo in situazione stazionaria e operatore di Laplace

~~Supponiamo che~~ Se la densità di corrente e la densità di carica sono indipendenti dal tempo,

$$\rho = \rho(\vec{x}), \qquad \vec{J} = \vec{J}(\vec{x}) \qquad (87)$$

possiamo cercare delle soluzioni statiche delle equazioni (51) e (53) per i potenziali $\phi(\vec{x})$ e $\vec{A}(\vec{x})$

$$\cancel{\begin{cases} \Box \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \\ \Box \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \\ \Delta \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{x}) \end{cases} \qquad (88)}$$

In questo caso l'operatore di D'Alembert si riduce al Laplaciano:
ades

$$\Box \phi(\vec{x}) = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\phi(\vec{x}) = \Delta\phi(\vec{x}) \qquad (88)$$

- Le equazioni per i potenziali si riducono dunque a

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{x}) &= -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \\ \Delta\vec{A}(\vec{x}) &= -\mu_0\vec{j}(\vec{x}) \end{aligned}} \qquad (89)$$

- Questa posizione è compatibile con il gauge di Lorentz se

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad (90)$$

il che è a sua volta compatibile con l'eq. (89) perché

$$\Delta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\mu_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad (91)$$

dato che l'eq. di continuità è semplicemente $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\right)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad (91)$$

- L'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico

- Consideriamo il caso in cui $\vec{j}=0$ e $\rho=\rho(\vec{x})$. ~~[illegible]~~ È consistente col gauge di Lorentz porre $\vec{A}=\vec{0}$:

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{=0} = 0 \qquad (92)$$

- L'unica equazione è l'equazione di Poisson per il potenziale ϕ:

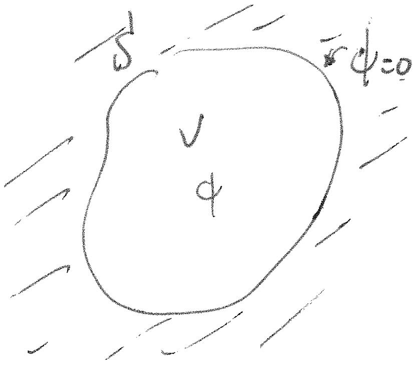
$$\boxed{\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0} \qquad (93)$$

• Nel caso omogeneo, $\rho=0$, abbiamo l'eq. di Laplace omogenea

$$\boxed{\Delta\phi(\vec{x})=0} \qquad (94)$$

• Supponiamo di doverla risolvere in un volume finito V, delimitato da una superficie chiusa S, con la condizione di annullamento al bordo:

$$\boxed{\phi(\vec{x})=0 \quad \text{per } \vec{x}\in S} \qquad (95)$$



. Partiamo dall'identità

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\phi)=\phi\Delta\phi+\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi \qquad (96)$$

Integrandola sul volume V otteniamo

$$\int_V dV\,(\underbrace{\phi\Delta\phi}_{\substack{\text{eq (94)}\\ =0}}+\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi)=\int_V\vec{\nabla}\cdot(\phi\Delta\phi)=\underbrace{\int_S(\phi\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{S}}_{\substack{\text{cond al bordo (95)}\\ =0}}$$

cioè

$$\int_V dV\,|\vec{\nabla}\phi|^2=0 \qquad (97)$$

che richiede

$$\vec{\nabla}\phi=0 \quad\Rightarrow\quad \phi=\text{costante su } V \qquad (98)$$

Siccome $\phi=0$ sul bordo, questo implica

$$\boxed{\phi=0 \quad \text{su tutto } V} \qquad (99)$$

• N.B. Se il volume V diviene infinito, $S\to S_\infty$, e l'unica soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta\phi = 0$ (la sola "funzione armonica") tale che $\phi(\vec{x}) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ è $\phi = 0$ dappertutto.

- Consideriamo ora la situazione in cui la condizione al bordo è generica:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \underbrace{\phi_s}_{\text{specificata}}(\vec{x}) \quad \text{per } \vec{x} \in S} \tag{100}$$

- La soluzione di

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{in } V \\ \phi\big|_S = \phi_s \end{cases} \tag{101}$$

è <u>unica</u>.

- Infatti per assurdo, supponiamo che $\exists$ due soluzioni $\phi_1(\vec{x})$, $\phi_2(\vec{x})$ /

$$\begin{cases} \Delta\phi_i = 0 \\ \phi_i\big|_S = \phi_s \end{cases} \tag{102}$$

Consideriamo ~~l'esistenza~~ la loro differenza

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 \Rightarrow \text{esso soddisfa} \begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \phi\big|_S = 0 \end{cases} \underset{(\text{eq } 99)}{\Longrightarrow} \phi = 0 \text{ su tutto } V \tag{103}$$

da cui segue che

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{su tutto } V. \tag{103 bis}$$

. Passiamo ora al caso in cui $\rho(\vec{x}) \neq 0$ (localizzato), cioè all'equazione di Poisson (93):

$$\boxed{\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0} \qquad (104)$$

. La risolviamo dapprima nello spazio infinito, con le condizioni al contorno

$$\boxed{\phi(\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0} \qquad (105)$$

. Utilizzando la funzione di Green del Laplaciano, eq. (74) e (75), abbiamo una soluzione particolare della (104) nella forma analoga alla (66):

$$\phi(\vec{x}) = \int dV' \, G(\vec{x}-\vec{x}\,') \, (-) \frac{\rho(\vec{x}\,')}{\varepsilon_0} \qquad (106)$$

cioè, esplicitamente,

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}} \qquad (107)$$

~~l'eq (74)~~ La funzione di Green (74),

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi r} \qquad (108)$$

soddisfa l'equazione

$$\Delta G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}) \qquad (109)$$

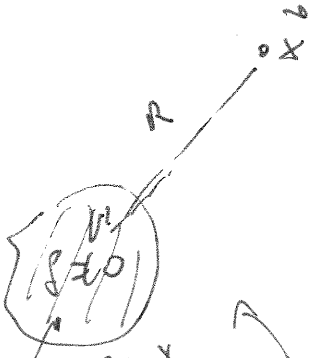
ed è l'unica soluzione tale che

$$G(\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \qquad (110)$$

Infatti, ~~potremmo~~ possiamo sempre ridefinire G aggiungendole una soluzione dell'omogenea associata. Tuttavia, se supponessimo che esistano due funzioni G_1 e G_2 con le proprietà (109)-(110), la loro differenza soddisferebbe

$$\begin{cases}\Delta(G_1-G_2)=0\\ (G_1-G_2)(\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad \text{(eq 103 bis)}\end{cases} \Rightarrow \quad G_1-G_2=0 \text{ dappertutto}. \qquad (111)$$

Pertanto l'espressione (107) è l'unica che soddisfa l'eq di Poisson (109) con le condizioni al bordo (103). In effetti



zona localizzata in cui ci sono le sorgenti

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} dV' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{\underbrace{|\vec{x}-\vec{x}'|}_{\equiv R}} \qquad (112)$$

l'integrale riceve contributo solo dal volume limitato V'

e $\quad R = |\vec{x}-\vec{x}'| \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$

$$(113)$$

dunque $\quad \phi(\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

. Consideriamo ora alcune particolari ~~densità~~ distribuzioni di carica

. Carica puntiforme: il caso

$$\boxed{\rho(\vec{x}) = q\,\delta^3(\vec{x})} \qquad (114)$$

In tal caso la formula generale (107) è banale:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \, \frac{q\,\delta^3(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (115)$$

cioè il potenziale Coulombiano. D'altronde, ϕ deve soddisfare l'eq. di Poisson

$$\begin{cases} \Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0 = -\dfrac{q}{\varepsilon_0}\,\delta^3(\vec{x}) \\ \phi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \end{cases} \qquad (116)$$

e quindi dalla (108)-(109) abbiamo

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\,G(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (117)$$

- In altre parole, la funzione di Green del Laplaciano è essenzialmente il potenziale Coulombiano di una ~~particella~~ carica puntiforme, e l'espressione generale (106)-(107) del potenziale non esprime altro che la sovrapposizione degli effetti dei vari elementini di carica.

- <u>Collezione di cariche puntiformi</u> $\{q_i\}$ nei punti $\{\vec{x}_{(i)}\}$

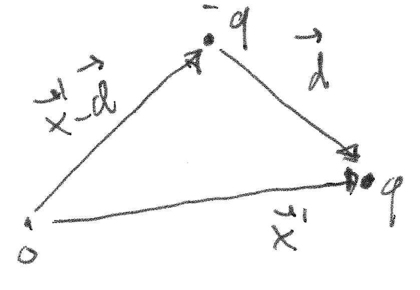
$$\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i\,\delta^3(\vec{x}_{(i)}) \qquad (118)$$

In questo caso, la (107) ci dà

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} d^3x' \, \frac{\sum_i q_i\,\delta^3(\vec{x}'-\vec{x}_{(i)})}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{x}-\vec{x}_{(i)}|} \qquad (119)$$

- <u>Dipolo elettrico</u>

un sotto caso molto importante è il dipolo elettrico:



- Consideriamo il limite

$$\begin{cases} \vec{d} \to \vec{0} \\ |q\,\vec{d}| = qd \text{ finito} \end{cases} \qquad (120)$$

Il momento di dipolo corrispondente è definito come

$$\boxed{\vec{p} = q\,\vec{d}} \qquad (121)$$

· Il potenziale ϕ creato dal dipolo che va a zero all'infinito è (eq (119)):

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\underbrace{|\vec{x}-\vec{x}'|}_{\vec{R}}} - \frac{1}{|\vec{x}-(\vec{x}'-\vec{d})|}\right)} \qquad (122)$$

· Consideriamone l'andamento a grandi distanze, cioè per $|\vec{x}-\vec{x}'| \gg d$.

Abbiamo

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'+\vec{d}|} = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \vec{d}\cdot\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \dots \qquad (123)$$

Ricordiamo che per $|\vec{x}| = r$ abbiamo, eq. (79-2),

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \ \dots \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}|\vec{x}| = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \qquad (124)$$

e quindi

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{1}{|\vec{x}|^2}\vec{\nabla}|\vec{x}| = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \qquad (125)$$

Questo si generalizza (invarianza traslazionale!) a

$$\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \qquad (126)$$

per cui la (123) diviene ($\vec{R} = \vec{x}-\vec{x}'$):

$$\frac{1}{|\vec{R}+\vec{d}|} = \frac{1}{R} - \frac{\vec{d}\cdot\vec{R}}{R^3} + \dots \qquad (127)$$

e dunque, sostituendo nella (122), il potenziale assume la forma