Corso di Studi in Fisica

Soluzione della prova scritta di Analisi III del 30 novembre 2017

Esercizio 1 (punti 5). a) Si determinino il raggio ed il cerchio (aperto) di convergenza della serie di potenze complesse

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}(z-2i)^n.$$

b) Si discuta la convergenza uniforme della serie.

c) Si dica se la serie di potenze converge in $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

Soluzione. a) Utilizzando il test della radice per il calcolo del raggio di convergenza si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie di potenze è $\rho=4$. La serie converge quindi assolutamente nel cerchio aperto

$$B_4(2i)=\{z\in\mathbb{C}:|z-2i|<4\}.$$

b) Per il teorema del cerchio di convergenza, la serie converge totalmente e quindi anche uniformemente sul cerchio chiuso

$$\overline{B_r(2i)}=\{z\in\mathbb{C}:|z-2i|\leq r\}$$

per ogni fissato $r\in(0,4)$.
c) Poiché $\left|\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-2i\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<4$, allora la serie converge assolutamente, quindi anche semplicemente, in $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

Esercizio 2 (punti 6). Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y)=(x-2y+2y\log y)\,dx+(1+x\log x-x)\,dy.$$

Utilizzando la formula di Gauss-Green, si calcoli l'integrale curvilineo di ω lungo il bordo positivamente orientato del dominio

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{2}\leq x\leq 1,\frac{1}{x}\leq y\leq 4x\}.$$

Soluzione. La forma differenziale ω è definita e di classe C^1 sull'aperto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,y>0\}.$$

L'insieme D è un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ contenuto in A. La formula di Gauss-Green dà:

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot \bar{ds} &= \iint_D \left[\partial_x(1 + x\log x - x) - \partial_y(x - 2y + 2y\log y)\right]\,dxdy \\
&= \iint_D (\log x - 2\log y)\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{4x} (\log x - 2\log y)\,dy\right) dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[y\log x - 2y\log y + 2y\right]_{\frac{1}{x}}^{4x}\,dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}} \left(4x\log x - 8x\log(4x) + 8x - \frac{1}{x}\log x + \frac{2}{x}\log\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right) dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(4x\log x - 8x\log 4 - 8x\log x + 8x - \frac{1}{x}\log x - \frac{2}{x}\log x - \frac{2}{x}\right) dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-4x\log x - \frac{3}{x}\log x + 8x(1 - \log 4) - \frac{2}{x}\right) dx \\
&\left[-2x^2\log x\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 2x\,dx + \left[-\frac{3}{2}\log^2 x + 4x^2(1 - \log 4) - 2\log x\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\log^2\frac{1}{2} + 4(1 - \log 4) - 1 + \log 4 + 2\log\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\log^2 2 - \frac{17}{2}\log 2 + \frac{15}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punti 7). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_a(x,y,z) = \left(-\frac{\arctan y}{(x+1)^2} + yz^2 + ay,\ \frac{1}{(y^2+1)(x+1)} + xz^2,\ 2xyz + 2ax\right),$$

$a \in \mathbb{R}$.

a) Determinare il dominio D di $\bar{F}_a$, $a \in \mathbb{R}$; D è un insieme connesso?

b) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo $\bar{F}_a$ è irrotazionale;

c) Per i valori di a determinati nel punto precedente, provare che la restrizione di $\bar{F}_a$ al semispazio $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > -1\}$, indicata con $\bar{H}$, è un campo conservativo;

d) Determinare il potenziale di $\bar{H}$ che si annulla in $(0,0,0)$.

Soluzione. a) Il dominio del campo vettoriale è $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq -1\}$. Osserviamo che D è l'unione disgiunta di due semispazi e dunque non è connesso.
b) Risulta

$$\textbf{rot}\ \bar{F}_a(x,y,z) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_y\left(2xyz + 2ax\right) = \partial_z\left(\frac{1}{(y^2+1)(x+1)} + xz^2\right) \\ \partial_z\left(-\frac{\arctan y}{(x+1)^2} + yz^2 + ay\right) = \partial_x\left(2xyz + 2ax\right) \\ \partial_x\left(\frac{1}{(y^2+1)(x+1)} + xz^2\right) = \partial_y\left(-\frac{\arctan y}{(x+1)^2} + yz^2 + ay\right) \end{cases}.$$

La prima condizione è soddisfatta per ogni $a \in \mathbb{R}$ mentre le altre due danno

$$\begin{cases} 2yz = 2yz + 2a \\ -\frac{1}{(y^2+1)(x+1)^2} + z^2 = -\frac{1}{(y^2+1)(x+1)^2} + z^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

Dunque $\bar{F}_a$ è irrotazionale se e solo se $a = 0$.
c) Sia $\bar{H}$ la restrizione di $\bar{F}_0$ al semispazio S. Poichè $\bar{H}$ è irrotazionale ed S è semplicemente

connesso, allora $\bar{H}$ è conservativo. Possiamo calcolarne il potenziale richiesto con il metodo delle poligonali. Risulta:

$$U(x,y,z) = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y \frac{1}{(t^2+1)(x+1)}\,dt + \int_0^z 2xyt\,dt = \frac{\arctan y}{x+1} + xyz^2.$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(y^2, z, xy\right).$$

a) Calcolare (utilizzando la definizione di flusso) il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la porzione di paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$ compresa tra il piano $z=0$ ed il piano $z = 2x+4y$ (Si consideri sul paraboloide la parametrizzazione cartesiana standard).

b) Calcolare il precedente flusso utilizzando il teorema di Stokes.

Soluzione. a) Risulta

$$\mathbf{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & z & xy \end{vmatrix} = (x-1, -y, -2y).$$

La superficie in questione è la superficie cartesiana

$$\bar{r}(x,y) = (x, y, x^2+y^2), \qquad (x,y) \in D,$$

dove D è dato dalla condizione di intersezione tra il piano ed il paraboloide:

$$x^2+y^2 = 2x+4y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Pertanto, D è il cerchio di centro $(1,2)$ e raggio $\sqrt{5}$. Il flusso richiesto è quindi

$$\Phi = \iint_D (x-1, -y, -2y)\cdot(-2x, -2y, 1)\,dxdy = 2\iint_D (y^2 - x^2 + x - y)\,dxdy.$$

Possiamo usare le coordinate polari $x = 1 + r\cos\theta, y = 2 + r\sin\theta$, $(r,\theta) \in [0,\sqrt{5}]\times[0,2\pi]$ per il calcolo dell'integrale ed otteniamo:

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\int_0^{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi} r\left[r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta - r\cos\theta + 3r\sin\theta + 2\right]\,d\theta dr \\ &= 2\int_0^{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}\left[-r^3\cos(2\theta) - r^2\cos\theta + 3r^2\sin\theta + 2r\right]\,d\theta dr = 8\pi\int_0^{\sqrt{5}} r\,dr = 20\pi.\end{aligned}$$

b) Volendo utilizzare il teorema di Stokes osserviamo che la superficie è di classe C^2 su D e che il campo $\bar{F}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Pertanto le ipotesi del teorema sono soddisfatte. Il bordo positivamente orientato di D è la curva

$$\bar{\gamma}(t) = (1+\sqrt{5}\cos t, 2+\sqrt{5}\sin t), \qquad t\in[0,2\pi],$$

pertanto il suo trasformato mediante $\bar{r}$ è la curva

$$\bar{r}\circ\bar{\gamma}(t) = (1+\sqrt{5}\cos t, 2+\sqrt{5}\sin t, 10+2\sqrt{5}\cos t + 4\sqrt{5}\sin t), \qquad t\in[0,2\pi].$$

Per il teorema di Stokes, il flusso richiesto è:

$$\Phi = \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}} \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} \bar{F}((\bar{r}\circ\bar{\gamma})(t))\cdot(\bar{r}\circ\bar{\gamma})'(t)\,dt.$$

Ora:

$$\bar{F}((\bar{r}\circ\bar{\gamma})(t)) = (4+5\sin^2 t+4\sqrt{5}\sin t, 10+2\sqrt{5}\cos t+4\sqrt{5}\sin t, 2+5\sin t\cos t+2\sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\sin t)$$

mentre

$$(\bar{r}\circ\bar{\gamma})'(t) = \cdot(-\sqrt{5}\sin t, \sqrt{5}\cos t, -2\sqrt{5}\sin t + 4\sqrt{5}\cos t).$$

Moltiplicando scalarmente i due vettori si ottiene la funzione:

$$\begin{aligned}\bar{F}((\bar{r}\circ\bar{\gamma})(t))\cdot(\bar{r}\circ\bar{\gamma})'(t) &= 18\sqrt{5}\cos t - 8\sqrt{5}\sin t - 5\sqrt{5}\sin^3 t \\ &+ 20\sqrt{5}\cos^2 t\sin t - 10\sqrt{5}\cos t\sin^2 t + 20\cos t\sin t + 50\cos^2 t - 30\sin^2 t.\end{aligned}$$

È facile verificare che l'integrale tra 0 e 2π di tutti gli addendi esclusi gli ultimi due è nullo. Pertanto, risulta:

$$\Phi = 50\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt - 30\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = 50\pi - 30\pi = 20\pi.$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Studiare la convergenza puntuale (o semplice) e assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^x}}-1\right), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

(Facoltativo: studiare la convergenza totale della serie).

Soluzione. Osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi, quindi la convergenza assoluta e quella semplice sono equivalenti in questo caso. Inoltre, si può osservare anche che per $x \leq 0$ il termine generale della serie tende a $+\infty$ per $n\to\infty$, dunque non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Per $x > 0$, si ha

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^x}}-1\right) \sim n\cdot\frac{1}{2n^x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{x-1}}, \qquad n\to\infty.$$

Poiché la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{x-1}}$ converge se e solo se $x > 2$, allora per il criterio del confronto asintotico l'insieme di convergenza (semplice ed assoluta) della serie è l'intervallo $I = (2,+\infty)$. Per quanto riguarda la convergenza totale, la serie non converge totalmente su I altrimenti convergerebbe totalmente anche su $[2,+\infty)$. Converge tuttavia totalmente su ogni intervallo della forma $I_\delta = [\delta,+\infty)$, con $\delta > 2$. Infatti, vale per ogni $n \geq 1$:

$$\sup_{x\in I_\delta}\left[n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^x}}-1\right)\right] \leq n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^\delta}}-1\right) = M_n.$$

Inoltre, la serie $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge poiché $M_n \sim \frac{1}{2n^{\delta-1}}$ e quest'ultimo è il termine generale di una serie convergente se $\delta > 2$.

Corso di Studi in Fisica

Soluzione della prova scritta di Analisi III del 18 dicembre 2017

Esercizio 1 (punti 5). Sia data la serie di potenze reali

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \right) (x-3)^n \tag{1}$$

a) Determinare il raggio di convergenza ρ di (1);

b) Determinare l'intervallo aperto di convergenza I di (1);

c) Studiare la convergenza di (1) agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Soluzione. a) Utilizzando il test della radice per il calcolo del raggio di convergenza si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6n^3} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

b) Per i noti risultati sulle serie di potenze reali, troviamo che la serie (1) converge (assolutamente) nell'intervallo aperto $I = (2, 4)$.
c) Per $x = 2$ si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \right) = \sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n.$$

Dato che, per ogni $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} > 0$, si tratta di una serie a termini di segno alterno. Applichiamo il criterio di convergenza assoluta, e troviamo

$$|b_n| = a_n = \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6n^3}, \quad n \to +\infty.$$

Dunque,

$$\sum_{n\geq 1} |b_n| = \sum_{n\geq 1} a_n = \frac{1}{6} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} < \infty,$$

dato che si tratta di un multiplo di una serie armonica generalizzata con parametro $\alpha = 3 > 1$. Concludiamo che la (1) converge assolutamente in $x = 2$. Lo stesso vale, ovviamente, per $x = 4$, dato che, in tal caso, si ritrova la serie numerica a termini positivi $\sum_{n\geq 1} a_n$.

N.B. Osserviamo che il teorema di Abel garantisce che, in questo caso, la serie (1) converge uniformemente su $E = [2, 4]$.

Esercizio 2 (punti 6). Utilizzando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{xy}{z^2 + 3z - 1}, -\frac{y^2}{2(z^2 + 3z - 1)}, \frac{z^2}{2(x^2 + y^2 + 1)} \right)$$

uscente dal solido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 2z \leq 0, z \geq -2\}.$$

Soluzione. Dalla definizione,

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}F)(x, y, z) &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \\ &= \frac{y}{z^2 + 3z - 1} - \frac{y}{z^2 + 3z - 1} + \frac{z}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{z}{x^2 + y^2 + 1}.\end{aligned}$$

Inoltre, passando a coordinate cilindriche $(\rho, \theta, z) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, si vede facilmente che

$$S \equiv \left\{ (\rho, \theta, z) \colon \rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], z \in \left[-2, -\frac{\rho^2}{2} \right] \right\}.$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}
\iiint_S (\text{div} F)(x, y, z)\, dxdydz &= \iiint_S \frac{z}{x^2 + y^2 + 1}\, dxdydz \\
&= \iiint_S \frac{z}{\rho^2 + 1} \rho\, d\rho d\theta dz \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{2} \int_{z=-2}^{-\frac{\rho^2}{2}} \frac{\rho}{\rho^2 + 1} z\, d\theta d\rho dz \\
&= 2\pi \int_{\rho=0}^{2} \frac{\rho}{\rho^2 + 1} \int_{z=-2}^{-\frac{\rho^2}{2}} z\, dz d\rho. \\
&= 2\pi \int_0^2 \frac{\rho}{\rho^2 + 1} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=-2}^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \\
&= \pi \int_0^2 \frac{\rho}{\rho^2 + 1} \left(\frac{\rho^4}{4} - 4 \right) d\rho \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^2 \frac{\rho^5 - 16\rho}{\rho^2 + 1}\, d\rho \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^2 \left(\rho^3 - \rho - \frac{15\rho}{\rho^2 + 1} \right) d\rho \\
&= \frac{\pi}{4} \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} - \frac{15}{2} \log(\rho^2 + 1) \right]_0^2 \\
&= \frac{\pi(4 - 15 \log 5)}{8}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punti 7). a) Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_{a,b}(x, y, z) = \left(z^2 - \log y + \frac{y\sqrt{x} - 1}{x}, \frac{1 - x}{y} - \log z + a\sqrt{x}, 2xz + \frac{by}{z} \right),$$

dipendente dai parametri reali a, b.

a) Determinare il dominio $D_{a,b}$ di $\bar{F}_{a,b}$.

b) Determinare, se esistono, i valori di a e b per i quali il campo è conservativo.

c) Per tali valori determinare il potenziale del campo che si annulla in $(1, 1, 1)$.

Soluzione. a) Per ogni valore di $a, b \in \mathbb{R}$, devono essere soddisfatte le condizioni $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Pertanto, $D_{a,b} = D = (0, +\infty) \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

b) Risulta

$$\textbf{rot}\ \bar{F}_{a,b}(x,y,z)=\bar{0}\Leftrightarrow\begin{cases}\partial_y\left(2xz+\dfrac{by}{z}\right)=\partial_z\left(\dfrac{1-x}{y}-\log z+a\sqrt{x}\right)\\ \partial_z\left(z^2-\log y+\dfrac{y\sqrt{x}-1}{x}\right)=\partial_x\left(2xz+\dfrac{by}{z}\right)\\ \partial_x\left(\dfrac{1-x}{y}-\log z+a\sqrt{x}\right)=\partial_y\left(z^2-\log y+\dfrac{y\sqrt{x}-1}{x}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{z}=-\dfrac{1}{z}\\ 2z=2z\\ -\dfrac{1}{y}+\dfrac{a}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{y}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}.\end{cases}$$

La seconda condizione è soddisfatta per ogni $(x,y,z)\in D$, mentre le altre due sono soddisfatte in ogni $(x,y,z)\in D$ se e solo se $a=2$ e $b=-1$. Dato che D è semplicemente connesso, $\bar{F}_{a,b}$ è conservativo su D se e solo se su D è irrotazionale, ovvero, se e solo se $a=2$, $b=-1$.
c) Posto $\bar{H}=\bar{F}_{2,1}$, poichè D è un prodotto cartesiano di intervalli aperti, possiamo calcolare il potenziale richiesto con il metodo delle poligonali. Risulta:

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=\int_1^x H_1(t,1,1)\,dt+\int_1^y H_2(x,t,1)\,dt+\int_1^z H_3(x,y,t)\,dt\\&=\int_1^x\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_1^y\left(\frac{1-x}{t}+2\sqrt{x}\right)dt+\int_1^z\left(2xt-\frac{y}{t}\right)dt\\&=\Big[t+2\sqrt{t}-\log t\Big]_1^x+\big[(1-x)\log t+2t\sqrt{x}\big]_1^y+\big[xt^2-y\log t\big]_1^z\\&=x+2\sqrt{x}-\log x-1-2+(1-x)\log y+2y\sqrt{x}-2\sqrt{x}+xz^2-y\log z-x\\&=(1-x)\log y+2y\sqrt{x}+xz^2-\log x-y\log z-3.\end{aligned}$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y,z)=(z,x,y).$$

a) Calcolare il flusso del rotore di $\bar{F}$ attraverso la porzione di superficie sferica $x^2+y^2+z^2=4$, interna al cilindro $x^2+y^2=3$, contenuta nel semispazio $z>0$ ed orientata secondo la normale esterna.

b) Calcolare il flusso richiesto al punto precedente utilizzando il teorema di Stokes.

Soluzione. a) Risulta

$$\textbf{rot}\bar{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}i&j&k\\ \partial_x&\partial_y&\partial_z\\ z&x&y\end{vmatrix}=(1,1,1).$$

La superficie S in questione è cartesiana, parametrizzata da

$$\bar{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2}),\qquad (x,y)\in D,$$

con

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 3\}.$$

Pertanto, D è il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{3}$. Il flusso richiesto è quindi dato da

$$\begin{aligned}\Phi_S(\bar{F}) &= \iint_D (1,1,1)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, 1\right) dxdy \\ &= \iint_D \left(-\frac{x+y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+1\right) dxdy.\end{aligned}$$

Passando a coordinate polari $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $(r,\theta)\in[0,\sqrt{3}]\times[0,2\pi]$, otteniamo

$$\begin{aligned}\Phi_S(\bar{F}) &= \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}(\cos\theta+\sin\theta)+1\right] r d\theta dr \\ &= \int_0^{\sqrt{3}}\left\{\frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\underbrace{[-\sin\theta+\cos\theta]_0^{2\pi}}_{=0} + r[\theta]_0^{2\pi}\right\} dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} = 3\pi.\end{aligned}$$

b) Volendo utilizzare il teorema di Stokes osserviamo che la superficie è di classe C^2 su D e che il campo $\bar{F}$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^3$. Pertanto le ipotesi del teorema sono soddisfatte. Il bordo positivamente orientato di D è la curva

$$\bar{\gamma}(t) = \sqrt{3}(\cos t, \sin t), \quad t\in[0,2\pi].$$

Pertanto, il suo trasformato mediante $\bar{r}$ è la curva

$$\bar{r}\circ\bar{\gamma}(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, \sqrt{4-3\cos^2 t-3\sin^2 t}) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1),\ t\in[0,2\pi].$$

Per il teorema di Stokes, il flusso richiesto è:

$$\Phi_S(\bar{F}) = \int_{\bar{r}\circ\bar{\gamma}} \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} \bar{F}((\bar{r}\circ\bar{\gamma})(t))\cdot(\bar{r}\circ\bar{\gamma})'(t)\, dt.$$

Si ha subito

$$\bar{F}((\bar{r}\circ\bar{\gamma})(t)) = (1, \sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t) \text{ e } (\bar{r}\circ\bar{\gamma})'(t) = (-\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t, 0).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\Phi_S(\bar{F}) &= \int_0^{2\pi}(-\sqrt{3}\sin t + 3\cos^2 t)\, dt = \sqrt{3}\underbrace{[\cos t]_0^{2\pi}}_{=0} + 3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{3}{2}[t]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\underbrace{[\sin 2t]_0^{2\pi}}_{=0} = 3\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 5 (punti 4) *[solo per gli studenti di Analisi III]*. Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n^2 x)}{\sqrt[4]{x^2+n^{15}}} \tag{2}$$

a) Determinare l'insieme $D\subseteq\mathbb{R}$ di convergenza assoluta di (2).

b) Detta $f(x)$ la funzione somma di (2) per $x\in D$, f risulta continua in D? Giustificare la risposta.

Soluzione. a) Posto $u_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{\sqrt[4]{x^2 + n^{15}}}$, si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $n \geq 1$,

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin(n^2 x)}{\sqrt[4]{x^2 + n^{15}}} \right| = \frac{|\sin(n^2 x)|}{\sqrt[4]{x^2 + n^{15}}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + n^{15}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{15}{4}}} = M_n.$$

Si ha $\sum_{n \geq 1} M_n < \infty$, dato che si tratta di una serie armonica generalizzata con parametro $\alpha = \dfrac{15}{4} > 1$. Il criterio del confronto garantisce quindi la convergenza assoluta delle serie (2) per ogni $x \in \mathbb{R} = D$.

b) Per il punto a), il criterio di Weierstrass garantisce la convergenza totale, cioè assoluta ed uniforme, della serie (1) su tutto $\mathbb{R}$. Dato che, per ogni $n \geq 1$, $u_n \in C(\mathbb{R})$, il noto risultato di continuità della somma di una serie di funzioni continue uniformemente convergente implica che la funzione somma f è continua su tutto $\mathbb{R} = D$.

Corso di Studi in Fisica

Soluzione della prova scritta di Analisi III del 25 giugno 2018

Esercizio 1 (punti 5). Sia data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i2n}(n7^n i + 11^n)}{(3i-1)^{2n}}(z+i)^n. \tag{1}$$

a) Determinare il raggio di convergenza ρ di (1).

b) La serie (1) converge in $z = 0$? Motivare la risposta.

c) La serie (1) converge uniformemente in qualche sottoinsieme di $\mathbb{C}$? Motivare la risposta.

Soluzione. a) Utilizzando il criterio della radice, otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{e^{i2n}(n7^n i + 11^n)}{(3i-1)^{2n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10}(n^2 49^n + 121^n)^{\frac{1}{2n}} \\ &= \frac{1}{10}\lim_{n\to+\infty} 11 \left[\underbrace{n^2\left(\frac{49}{121}\right)^n}_{\to 0} + 1\right]^{\frac{1}{2n}} = \frac{11}{10} \Rightarrow \rho = \frac{10}{11}.\end{aligned}$$

b) La serie è centrata in $z_0 = -i$. Siccome $|z - z_0| = |0 + i| = 1 > \frac{10}{11} = \rho$, la serie non converge in $z = 0$.

c) Per i noti risultati sulle serie di potenze complesse, la serie converge totalmente, e quindi uniformemente, in ogni disco chiuso centrato in $z_0 = -i$ con raggio strettamente minore di ρ, cioé, su ogni $\overline{B_r(-i)} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z+i| \le r\}$ con $0 < r < \rho = \frac{10}{11}$.

Esercizio 2 (punti 6). Sia data la curva $\bar{\gamma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Verificare che $\bar{\gamma}$ è una curva semplice e chiusa.

b) Calcolare la lunghezza della curva.

c) Calcolare l'area della regione piana interna al sostegno della curva.

Soluzione. a) Il fatto che $\bar{\gamma}$ sia chiusa è una conseguenza immediata della periodicità delle funzioni trigonometriche, dato che $\bar{\gamma}(0) = (1, 0) = \bar{\gamma}(2\pi)$. È semplice poichè

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2), t_1, t_2 \in [0, 2\pi) &\Leftrightarrow \begin{cases}\cos^3 t_1 = \cos^3 t_2, \\ \sin^3 t_1 = \sin^3 t_2, \quad t_1, t_2 \in [0, 2\pi)\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\cos t_1 = \cos t_2 \Leftrightarrow t_2 = t_1 \vee t_2 = 2\pi - t_1, \\ \sin t_1 = \sin t_2 \Leftrightarrow t_2 = t_1 \vee t_2 = \pi - t_1, \qquad t_1, t_2 \in [0, 2\pi)\end{cases} \\ &\Leftrightarrow t_1 = t_2 \in [0, 2\pi).\end{aligned}$$

b) La curva $\bar{\gamma}$ è di classe $C^1([0, 2\pi])$, pertanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\bar{\gamma}) &= \int_0^{2\pi} \|\bar{\gamma}'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \|(-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)\| \, dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} \, dt = 3\int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| (\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} \, dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \underbrace{|\sin t \cos t|}_{\text{periodica con periodo } T = \frac{\pi}{2}} \, dt = 3 \cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \, dt = 6[\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.
\end{aligned}$$

c) Ricordando la formula di Gauss-Green,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\bar{\gamma}} x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(\cos^3 t)\, 3\sin^2 t \cos t - (\sin^3 t)\, 3\cos^2 t(-\sin t)\right] dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t \cos^2 t)\,(\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t)\,(1 - \cos^2 t) \, dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1 + \cos 2t}{2} - \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2\right] dt \\
&= \frac{6}{4}\pi + \frac{3}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt}_{=0} - \frac{6}{8}\pi - \frac{3}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt}_{=0} - \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \cos^2 2t \, dt \\
&= \frac{3}{4}\pi - \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt = \frac{3}{4}\pi - \frac{6}{16}\pi - \frac{3}{16}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos 4t \, dt}_{=0} = \frac{3}{8}\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punti 7). Si consideri la forma differenziale ω_a, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$,

$$\omega_a(x, y) = \left[\frac{y - 1}{x^2 + (y - 1)^2} + x\right] dx + \left[\frac{-2ax}{x^2 + (y - 1)^2} + y\right] dy.$$

a) Determinare il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ di ω_a.

b) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma differenziale ω_a è chiusa in D.

c) In corrispondenza dei valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui ω_a è chiusa, calcolare l'integrale di ω_a sulla curva $\bar{\gamma}$, cioé $\displaystyle\int_{\bar{\gamma}} \omega_a$, dove $\bar{\gamma}$ è la circonferenza $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, percorsa in senso antiorario. Stabilire se esistono dei valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali ω_a è esatta in D.

d) In corrispondenza dei valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui ω_a è chiusa, determinare (senza fare troppi calcoli) $\displaystyle\int_{\bar{r}} \omega_a$, dove $\bar{r}(t) = (t^3, t^2 - t)$, $t \in [0, 1]$.

Soluzione. a) Si ha immediatamente

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y - 1)^2 \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0 \vee y \neq 1)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}.$$

b) Posto $F(x, y) = \dfrac{y - 1}{x^2 + (y - 1)^2} + x$, $G(x, y) = \dfrac{-2ax}{x^2 + (y - 1)^2} + y$, si deve avere, per ogni

$(x, y) \in D$,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \Leftrightarrow \frac{x^2+(y-1)^2-2(y-1)^2}{[x^2+(y-1)^2]^2} = -2a\frac{x^2+(y-1)^2-2x^2}{[x^2+(y-1)^2]^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-(y-1)^2 = 2a[x^2-(y-1)^2] \Leftrightarrow (2a-1)[x^2-(y-1)^2] = 0$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

c) Poniamo $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, 1+\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si ha

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega_{\frac{1}{2}} = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t) + \cos t(-\sin t) - \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cos t + (1+\sin t)\cos t\right] dt$$
$$\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t - \sin t\,\cos t - \cos^2 t + \cos t + \sin t\cos t)\,dt = -2\pi.$$

$\bar{\gamma}$ è chiusa ($\bar{\gamma}(0) = (1,1) = \bar{\gamma}(2\pi)$), con sostegno in D, e $\int_{\bar{\gamma}} \omega_{\frac{1}{2}} \neq 0$. Siccome $a = \frac{1}{2}$ è l'unico valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che ω_a è chiusa, non esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che ω_a è esatta in D.
d) Il sostegno di $\bar{r}$ è incluso nel semipiano aperto $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < \frac{1}{2}\right\}$. Infatti, per ogni $t \in [0,1]$, $t^2 - t = t(t-1) \leq 0 < \frac{1}{2}$. Siccome S è semplicemente connesso, e $\omega_{\frac{1}{2}}$ è chiusa, $\omega_{\frac{1}{2}}|_S$ è esatta. Ne segue che $\int_{\bar{r}} \omega_{\frac{1}{2}}$ non dipende d $\bar{r}$, ma solo dagli estremi $\bar{r}(0) = (0,0)$ e $\bar{r}(1) = (1,0)$. Posto $\bar{r}_1(t) = (t,0)$, $t \in [0,1]$, ed osservato che $\bar{r}_1(0) = \bar{r}(0)$ e $\bar{r}_2(1) = \bar{r}(1)$, si ottiene

$$\int_{\bar{r}} \omega_{\frac{1}{2}} = \int_{\bar{r}_1} \omega_{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{t^2+1} + t\right) dt = -[\operatorname{arctg} t]_0^1 + \frac{1}{2}[t^2]_0^1 = \frac{2-\pi}{4}.$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon (x,y,z) \mapsto \bar{F}(x,y,z) = (y, y, yz+1).$$

a) Calcolare il flusso del rotore di $\bar{F}$, attraverso la porzione di superficie cartesiana S di equazione $z = 2y^2 + 1$, con $(x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1\right\}$ (orientata in modo che il versore normale indotto dalla parametrizzazione sia rivolto verso l'alto).

b) Si calcoli il precedente flusso usando il teorema di Stokes.

Soluzione. a) Troviamo

$$\operatorname{rot} \bar{F}(x,y,z) = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & y & yz+1 \end{array} \right\| = (z, 0, -1),$$

da cui segue

$$\Phi_S(\operatorname{rot} \bar{F}) = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{F}) \cdot \bar{\mathbf{n}}\, dS = \iint_D (z, 0, -1) \cdot (1,0,0) \wedge (0,1,4y)\, dxdy$$
$$= \iint_D \left\| \begin{array}{ccc} z & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4y \end{array} \right\| dxdy = -\iint_D dxdy = -\frac{3}{4}\pi.$$

b) Troviamo, innanzitutto, $\partial_+ D = \bar\gamma_1 + \bar\gamma_2 - \bar\gamma_3$, con

$$\bar\gamma_1(t) = (t,0), t \in [0,3], \quad \bar\gamma_1(t) = (3\cos t, \sin t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \bar\gamma_3(t) = (0,t), t \in [0,1].$$

Posto $\bar r(x,y) = (x, y, 2y^2+1)$, si ha

$$\begin{aligned}
&\bar\Gamma_1(t) = (\bar r \circ \bar\gamma_1)(t) = (t,0,1) && \Rightarrow \bar\Gamma_1'(t) = (1,0,0), t \in [0,3],\\
&\bar\Gamma_2(t) = (\bar r \circ \bar\gamma_2)(t) = (3\cos t, \sin t, 2\sin^2 t + 1) && \Rightarrow \bar\Gamma_2'(t) = (-3\sin t, \cos t, 4\sin t\cos t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\\
&\bar\Gamma_3(t) = (\bar r \circ \bar\gamma_3)(t) = (0,t,2t^2+1) && \Rightarrow \bar\Gamma_3'(t) = (0,1,4t), t \in [0,1],
\end{aligned}$$

ed il Teorema di Stokes implica

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\operatorname{rot}\bar F) &= \int_{\bar\Gamma_1 + \bar\Gamma_2 - \bar\Gamma_3} \bar F \cdot d\bar s\\
&= \int_0^3 (0,0,1)\cdot(1,0,0)\,dt\\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t, \sin t, 2\sin^3 t + \sin t + 1)\cdot(-3\sin t, \cos t, 4\sin t\cos t)\,dt\\
&- \int_0^1 (t,t,2t^3+t+1)\cdot(0,1,4t)\,dt\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3\sin^2 t + \sin t\cos t + 8\sin^4 t\cos t + 4\sin^2 t\cos t + 4\sin t\cos t)\,dt\\
&- \int_0^1 (t + 8t^4 + 4t^2 + 4t)\,dt\\
&= -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\\
&+ \frac{8}{5}[\sin^5 t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{3}[\sin^3 t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{2}[\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{5}[t^5]_0^1 - \frac{4}{3}[t^3]_0^1 - \frac{5}{2}[t^2]_0^1\\
&= -\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}[\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (punti 4). *[solo per gli studenti di Analisi III].* Studiare la convergenza puntuale (o semplice) ed assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{|2x-1|^n} - 1\right). \tag{2}$$

(Facoltativo: studiare la convergenza totale della serie (2)).

Soluzione. Dato che $e^t \geq 1$ per $t \geq 0$, la serie è a termini non negativi, e convergenza semplice ed assoluta coincidono. La condizione necessaria di convergenza richiede

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(e^{|2x-1|^n} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{|2x-1|^n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}|2x-1|^n = 0 \Leftrightarrow |2x-1| < 1\\
\Leftrightarrow 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Per $x \in (0,1)$, ricordando che $e^t - 1 \sim t$, $t \to 0$, si trova allora

$$e^{|2x-1|^n} - 1 \sim |2x-1|^n = [q(x)]^n,$$

che è il termine generale di una serie geometrica di ragione $q(x) \in [0,1)$, e pertanto convergente. L'insieme di convergenza è quindi dato da $E = (0,1)$.

La serie (2) converge totalmente in ogni intervallo $[a,b] \subset (0,1)$. Infatti, posto $M = \max_{x\in[a,b]} |2x-1|$, si ha ovviamente $M \in [0,1)$ e, per la monotonia di t^n e e^t,

$$|u_n(x)| = \left| e^{|2x-1|^n} - 1 \right| \leq \exp(M^n) - 1 = M_n \sim M^n, n \to +\infty.$$

La serie $\sum_{n\geq 0} M_n = \sum_{n\geq 0} [\exp(M^n) - 1]$ è convergente (il termine generale è asintotico a quello di una serie geometrica di ragione $M \in [0,1)$). L'affermazione segue quindi dal criterio M di Weierstrass.

Corso di Studi in Fisica

Soluzione della prova scritta di Analisi III del 14 settembre 2018

Esercizio 1 (punti 6). Sia data la funzione:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2}.$$

a) Si determini lo sviluppo in serie di McLaurin di f e se ne determini il raggio di convergenza e l'intervallo aperto di convergenza.

b) Si studi il comportamento della serie trovata negli estremi dell'intervallo di convergenza.

Soluzione. a) Decomponendo f in fratti semplici si ottiene:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Pertanto per $|x| < 1$ si ha:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n.$$

Poiché lo sviluppo trovato è la somma di due serie di potenze centrate in $x_0 = 0$ e di raggi 1 e 2, la serie di McLaurin di f ha raggio di convergenza uguale il minimo tra i due raggi, quindi $\rho = 1$. L'intervallo aperto di convergenza è quindi l'intervallo $I = (-1, 1)$.
b) Per $x = -1$, si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right],$$

che non converge, perché il suo termine generale non tende a 0 per $n \to \infty$. Si ha, infatti

$$\lim_{n \to +\infty} \left[1 - \underbrace{\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}_{\to 0}\right] = 1.$$

Per $x = 1$ si ottiene la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}}\right],$$

che non converge per lo stesso motivo (il limite del termine generale non esiste).

Esercizio 2 (punti 5). Utilizzando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\bar{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y+3}, -\log(y+3), 2z\right)$$

uscente dal solido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y^2 + z^2 \le 4, 0 \le x \le y^2 + z^2\}.$$

Soluzione. Il campo è definito e di classe C^1 sull'aperto $A = \mathbb{R} \times (-3, +\infty) \times \mathbb{R}$. S è un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$ ed è contenuto in A. Possiamo quindi applicare il teorema della divergenza. Osserviamo che

$$\mathrm{div}\bar{F}(x,y,z) = \partial_x\left(\frac{x}{y+3}\right) - \partial_y[\log(y+3)] + \partial_z(2z) = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+3} + 2 = 2.$$

Pertanto, il flusso richiesto è dato da

$$\Phi^e_{\partial S}(\bar{F}) = \iiint_S \mathrm{div}\bar{F}(x,y,z)\, dxdydz = 2\iiint_S dxdydz = 2\mathrm{Vol}(S).$$

Denotando con D_2 il cerchio di centro l'origine e raggio 2 in $\mathbb{R}^2$ ed integrando per fili si ottiene, mediante il passaggio alle coordinate polari:

$$\begin{aligned}\Phi^e_{\partial S}(\bar{F}) &= 2\iint_{D_2} dydz \int_0^{y^2+z^2} dz = 2\iint_{D_2}(y^2+z^2)\, dydz = 4\pi\int_0^2 \rho^3\, d\rho = \pi\left[\rho^4\right]_0^2 \\ &= 16\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punti 7). Sia dato il campo vettoriale

$$\bar{F}_a(x,y,z) = \left(\frac{3x^2(y+1)}{x^3+1} - z^2, \log(x^3+1) + \frac{z}{a\sqrt{y-1}}, \sqrt{y-1} - axz\right)$$

dipendente dal parametro reale $a \neq 0$.

a) Determinare il dominio D di $\bar{F}_a$. D è un insieme connesso?

b) Determinare, se esistono, i valori di a per i quali il campo è conservativo.

c) Per tali valori determinare il potenziale del campo che si annulla in $(0,2,0)$.

Soluzione. a) Per ogni $a \neq 0$ il dominio del campo è l'aperto

$$D = (-1, +\infty) \times (1, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

D è un insieme connesso.
b) Poiché D è anche semplicemente connesso, $\bar{F}_a$ risulta conservativo se e solo se $\mathrm{rot}\bar{F}_a = \bar{0}$, ovvero, se e solo se, per ogni $(x,y,z) \in D$, vale

$$\begin{cases}\partial_y\left(\sqrt{y-1} - axz\right) = \partial_z\left[\log(x^3+1) + \dfrac{z}{a\sqrt{y-1}}\right] \\ \partial_x\left(\sqrt{y-1} - axz\right) = \partial_z\left[\dfrac{3x^2(y+1)}{x^3+1} - z^2\right] \\ \partial_x\left[\log(x^3+1) + \dfrac{z}{a\sqrt{y-1}}\right] = \partial_y\left[\dfrac{3x^2(y+1)}{x^3+1} - z^2\right]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}} = \dfrac{1}{a\sqrt{y-1}} \\ -az = -2z \\ \dfrac{3x^2}{x^3+1} = \dfrac{3x^2}{x^3+1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 2.$$

c) Ponendo

$$\bar{F}(x,y,z) = \bar{F}_2(x,y,z) = \left(\frac{3x^2(y+1)}{x^3+1} - z^2, \log(x^3+1) + \frac{z}{2\sqrt{y-1}}, \sqrt{y-1} - 2xz \right),$$

e usando il metodo delle poligonali, otteniamo che il potenziale richiesto è

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x \frac{9t^2}{t^3+1}\,dt + \int_2^y \log(x^3+1)\,dt + \int_0^z (\sqrt{y-1} - 2xt)\,dt \\ &= (y+1)\log(x^3+1) + z\sqrt{y-1} - xz^2. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (punti 8). Sia dato il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z) = (z, xy, y).$$

a) Si calcoli il flusso del rotore di $\bar{F}$, attraverso la superficie

$$\bar{r}(u,v) = (u, u^2 - v, v), \qquad (u,v) \in T,$$

dove T è il triangolo del piano cartesiano $\mathbb{R}^2_{(u,v)}$ di vertici $(1,0), (-1,0)$ e $(0,1)$.

b) Si calcoli il precedente flusso usando il teorema di Stokes.

Soluzione. a) Si ha

$$\text{rot}\bar{F}(x,y,z) = \begin{Vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & xy & y \end{Vmatrix} = (1, 1, y)$$

e

$$\bar{r}_u \wedge \bar{r}_v(u,v) = \begin{Vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} = (2u, -1, -1).$$

Pertanto, detta Σ la superficie assegnata, con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione $\bar{r}$, il flusso richiesto è dato da

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\text{rot}\bar{F}) &= \iint_T (1, 1, u^2 - v) \cdot (2u, -1, -1)\,dudv = \iint_T (2u - 1 - u^2 + v)\,dudv \\ &= \int_0^1 \left[\int_{v-1}^{1-v} (2u - 1 - u^2 + v)\,du \right] dv \\ &= \int_0^1 \left[u^2 - u - \frac{1}{3}u^3 + uv \right]_{v-1}^{1-v} dv = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(v-1)^3 - 2v^2 + 4v - 2 \right] dv \\ &= \left[\frac{1}{6}(v-1)^4 - \frac{2}{3}v^3 + 2v^2 - 2v \right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 2 - 2 - \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

b) Osserviamo che $\partial_+ T = -\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_3$, dove

$$\bar{\gamma}_1(t) = (t, 1-t),\ t \in [0,1], \quad \bar{\gamma}_2(t) = (t, 1+t),\ t \in [-1,0], \quad \bar{\gamma}_3(t) = (t, 0),\ t \in [-1,1].$$

Pertanto, il trasformato di $\partial_+ T$ è dato da $\bar{r}(\partial_+ T) = -\bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}_2 + \bar{\Gamma}_3$, dove

$$\begin{aligned} &\bar{\Gamma}_1(t) = (\bar{r} \circ \bar{\gamma}_1)(t) = (t, t^2 - 1 + t, 1 - t) && \Rightarrow \bar{\Gamma}_1'(t) = (1, 2t+1, -1), && t \in [0,1], \\ &\bar{\Gamma}_2(t) = (\bar{r} \circ \bar{\gamma}_2)(t) = (t, t^2 - 1 - t, 1 + t) && \Rightarrow \bar{\Gamma}_2'(t) = (1, 2t-1, 1), && t \in [-1,0], \\ &\bar{\Gamma}_3(t) = \bar{r} \circ \bar{\gamma}_3(t) = (t, t^2, 0) && \Rightarrow \bar{\Gamma}_3'(t) = (1, 2t, 0), && t \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di Stokes, il flusso richiesto è

$$
\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\mathrm{rot}\bar{F}) &= -\int_{\bar{\Gamma}_1} \bar{F}\cdot d\bar{s} - \int_{\bar{\Gamma}_2} \bar{F}\cdot d\bar{s} + \int_{\bar{\Gamma}_3} \bar{F}\cdot d\bar{s} \\
&= -\int_0^1 (1-t, t^3-t+t^2, t^2-1+t)\cdot(1, 2t+1, -1)\,dt \\
&\quad -\int_{-1}^0 (1+t, t^3-t-t^2, t^2-1-t)\cdot(1, 2t-1, 1)\,dt + \int_{-1}^1 (0, t^3, t^2)\cdot(1, 2t, 0)\,dt \\
&= -\int_0^1 (2-3t-2t^2+3t^3+2t^4)\,dt - \int_{-1}^0 (t-3t^3+2t^4)\,dt + 2\int_{-1}^1 t^4\,dt \\
&= -\left[2t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2} - \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{5}t^5\right]_{-1}^0 + 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 5 *[solo per gli studenti di Analisi III]* (punti 4). Si studi, al variare del parametro $\alpha > 0$ la convergenza puntuale (o semplice) ed assoluta della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{x+n} \sin\left(\frac{x}{n^\alpha}\right), \qquad x \geq 0.$$

Soluzione. Prima di tutto osserviamo che per $x = 0$ la serie ha tutti i termini nulli, pertanto converge e ha somma nulla. Per ogni $x > 0$ fissato, si può osservare che per n sufficientemente grande vale $0 < \frac{x}{n^\alpha} < \pi/2$. Pertanto, i termini della serie, a partire da un certo indice, sono positivi. Di conseguenza, la serie converge assolutamente se e solo se converge puntualmente. Osserviamo, inoltre, che per $x > 0$ fissato si ha

$$\frac{\sqrt{n}}{x+n} \sin\left(\frac{x}{n^\alpha}\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{x+n}\cdot\frac{x}{n^\alpha} \sim \frac{x}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}, \qquad n \to \infty.$$

Pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie data converge assolutamente e puntualmente per $x > 0$ se e solo se $\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$. In conclusione, per $x = 0$ la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $\alpha > 0$, mentre per $x > 0$ essa converge puntualmente e assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.
