Simulazione 3 - calcoli

Curva

Fissato $a \geq 0$, sia γ_a la curva planare di equazioni $x = e^{at}\cos(t)$, $y = e^{at}\sin(t)$, con $t \in [0, 4\pi]$.

1. Stabilire per quali valori di a la curva è chiusa.

Siccome $\gamma_a(0) = (0, 1)$ e $\gamma_a(4\pi) = (0, e^{4\pi a})$ la curva è chiusa solo quando $1 = e^{4\pi a}$ cioè per $a = 0$. Quindi la risposta corretta è: la curva è chiusa per qualche $a \geq 0$ ma non per tutti.

2. Stabilire per quali valori di a la curva è semplice.

Se $a = 0$ la curva non è semplice perché $\gamma_0(t) = \gamma_0(t + 2\pi)$ per $t \in [0, 2\pi]$. Se $a > 0$ la curva è semplice perché

$$\begin{cases} \gamma_a(t_1) = \gamma_a(t_2) \\ t_1, t_2 \in [0, 4\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\gamma_a(t_1)| = |\gamma_a(t_2)| \\ t_1, t_2 \in [0, 4\pi] \end{cases} \Rightarrow e^{at_1} = e^{at_2} \Rightarrow at_1 = at_2 \Rightarrow t_1 = t_2 \,.$$

Quindi la risposta corretta è: la curva è semplice per qualche $a \geq 0$ ma non per tutti.

3. Stabilire per quali valori di a la curva è regolare.

La curva è regolare per ogni $a \geq 0$ perché

$$|\gamma'(t)|^2 = (ae^{at}\cos t - e^{at}\sin t)^2 + (ae^{at}\sin t + e^{at}\cos t)^2 = e^{2at}(a^2 + 1) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 4\pi] \,.$$

3. Calcolare la lunghezza della curva per $a > 0$.

La lunghezza della curva è

$$L(\gamma_a) = \int_0^{4\pi} |\gamma_a'(t)|\, dt = \sqrt{a^2 + 1}\int_0^{4\pi} e^{at}\, dt = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}\left(e^{4\pi a} - 1\right) \,.$$

Campo

Fissato $a \in \mathbb{R}$, sia $F_a(x, y, z) = \left(\dfrac{z}{\cos^2(x)}\,,\, a^2 z\,,\, \dfrac{\sin(x) + y\cos(x)}{\cos(x)}\right)$.

1. Dominio di F_a.

Il dominio di F_a è l'insieme $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ed è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ non connesso, essendo costituito da infiniti aperti disgiunti delimitati da piani paralleli di equazioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Trovare i valori del parametro a tali per cui il campo F_a risulti irrotazionale sul proprio dominio.

Il campo F_a risulta irrotazionale in D quando il suo rotore è identicamente nullo in D. Si calcola

$$\nabla \wedge F_a = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{z}{\cos^2(x)} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & a^2 z \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\sin(x) + y\cos(x)}{\cos(x)} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a^2 \\ -\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque F_a è irrotazionale in D se e solo se $a = \pm 1$.

3. Detta B la palla aperta centrata nell'origine e di raggio 1, stabilire se esiste e, in caso affermativo, individuare tra le seguenti funzioni quella che risulta essere un potenziale del campo F_a in B per qualche valore del parametro a.

- $ayz - z\tan(x)$
  No, perché $\frac{\partial}{\partial x}(ayz - z\tan(x)) \neq \frac{z}{\cos^2(x)}$.

- $a^2 z\tan(x) - yz$
  No, perché $\frac{\partial}{\partial y}(a^2 z\tan(x) - yz) \neq a^2 z$.

- $ayz - az\tan(x)$
  No, perché $\frac{\partial}{\partial x}(ayz - az\tan(x)) = \frac{z}{\cos^2(x)}$ per $a = -1$ mentre $\frac{\partial}{\partial y}(ayz - az\tan(x)) = a^2 z$ per $a = 0, 1$.

- *nessuna delle funzioni elencate, seppur il campo ammetta potenziale in B per qualche valore del parametro a*
  Sì, il campo F_a ammette potenziale in B per $a = \pm 1$ perché è conservativo in B, essendo irrotazionale in B ed essendo B semplicemente connesso.

- *nessuna delle funzioni elencate perché il campo non ammette potenziale in B per nessun valore del parametro a*
  No, il campo F_a ammette potenziale in B per $a = \pm 1$.

Flusso
Si consideri il campo $F(x, y, z) = (xy - 1, x^2 yz, x - y)$ e la superficie S parametrizzata da $\varphi(u, v) = (v, 2\cos u, 1 + 2\sin u)$ con $u \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ e $v \in [-2, 1]$.

1. S è una superficie regolare?
Si ha che

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sin u \\ 2\cos u \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos u \\ 2\sin u \end{bmatrix}$$

e in particolare $|\varphi_u \wedge \varphi_v| = 2 \neq 0$ per ogni $(u, v) \in D = \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \times [-2, 1]$. Quindi S è una superficie regolare.

2. S è una superficie cartesiana?
No perché se lo fosse, il versore normale avrebbe la terza componente di segno costante, mentre la terza componente di $\varphi_u \wedge \varphi_v$ assume tutti i valori compresi tra -1 e 1.

3. Area di S.

$$\operatorname{area}(S) = \int_D |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, du \, dv = 2 \operatorname{area}(D) = 9\pi \,.$$

4. Flusso del rotore di F attraverso S.
Il rotore di F è dato da

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & xy - 1 \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x^2 yz \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & x - y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ -1 \\ 2xyz - x \end{bmatrix} .$$

Non calcoliamo la prima componente di $\operatorname{rot} F$ perché dovremo poi moltiplicare scalarmente tale vettore per il vettore $\varphi_u \wedge \varphi_v$ che sappiamo avere prima componente nulla. Quindi

$$\operatorname{rot} F(\varphi(u, v)) \cdot \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) = -2\cos u + [4v(\cos u)(1 + 2\sin u) - v](2\sin u)$$

e il flusso vale

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot N \, d\sigma = \int_{-2}^{1} dv \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} du \left[-2\cos u + 2v(4\cos u \sin u + 8\cos u \sin^2 u - \sin u)\right]$$
$$= -6 \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos u \, du - 24 \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos u \sin^2 u \, du = -6\sqrt{2} - \frac{8}{\sqrt{2}} = -10\sqrt{2}\,.$$

Serie

Si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ dove $f_n(x) = (\sin x)^{2n}$ con $x \in \mathbb{R}$.

1. Insieme di convergenza semplice.
La serie converge in ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sin^2 x < 1$. Quindi l'insieme di convergenza semplice I è l'asse reale esclusi i valori della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

2. Convergenza uniforme.
La serie converge uniformemente su tutti gli intervalli chiusi (e necessariamente limitati) contenuti nell'insieme di convergenza semplice. In particolare sull'intervallo $[2,4]$ che è contenuto in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

3. Somma della serie.
La serie considerata è una serie geometrica di ragione $\sin^2 x$. Quindi la sua somma è $\frac{1}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, per $x \in I$.

4. Per quali $a \in \mathbb{R}$ vale l'identità $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx = \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$?
L'identità vale se la serie converge uniformemente in $[0,a]$. Ciò vale se $a \in [0, \frac{\pi}{2})$. Quindi, in particolare, l'identità è vera per ogni $a \in [0,1]$.

5. Somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$, dove $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$ e $x \in [0,1]$.
Per il teorema di integrazione per le serie di funzioni e per quanto risposto ai punti 3 e 4, vale che per $x \in [0,1]$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan x\,.$$