Approssimazione lineare di campi scalari (esempi di interesse fisico)

Ricordiamo che l'*approssimazione lineare* di un campo scalare "regolare" $f(x,y)$ e'

$$\triangle f = f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0),$$

mentre, se abbiamo $f(x,y,z)$,

$$\triangle f = f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) \approx$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,(z-z_0).$$

Esempio 0.1. La pressione P, il volume V e la temperatura T di una mole di gas ideale sono collegati dalla relazione

$$PV = 8.31\;T,$$

dove P è misurata in kilopascal, V in litri e T in kelvin.

Di quanto cambia approssimativamente la pressione se il volume cresce da 10 L a 10.5 L e la temperatura decresce da 200 K a 195 K?

Soluzione. Si considera la pressione P come un campo scalare $P = f(V,T)$, ovvero

$$P = f(V,T) = 8.31\frac{T}{V}.$$

La formula di approssimazione lineare dice che

$$\triangle P \approx \frac{\partial f}{\partial V}(10,200)\triangle V + \frac{\partial f}{\partial T}(10,200)\triangle T$$

Ora le variazioni di volume e di temperatura sono rispettivamente $\triangle V = 0.5$ e $\triangle T = -5$. Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial V} = -8.31\frac{T}{V^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial T} = 8.31\frac{1}{V}.$$

Percio'

$$\frac{\partial f}{\partial V}(10,200) = -8.31\cdot\frac{200}{100} = -16.62, \qquad \frac{\partial f}{\partial T}(10,200) = 8.31\cdot\frac{1}{10} = 0.83.$$

Si ottiene che

$$\triangle P \approx -16.62\;\cdot\;0.5 + 0.83\cdot\;-5 = -12.46.$$

Esempio 0.2. L'attrazione gravitazionale della Terra su una massa m posta ad una distanza r dalla superficie terrestre è data da

$$F = \frac{mgR^2}{(r+R)^2},$$

dove la costante g è l'accelerazione di gravità e R il raggio della Terra.

Stimare la variazione di F in corrispondenza di una diminuzione della massa m da 80 Kg a 70 Kg e di un aumento della distanza r da 3 Km a 4 Km.

Soluzione. Si considera l'intensita' di forza F come un campo scalare $F = f(m, r)$.

La formula di approssimazione lineare dice che

$$\triangle F \approx \frac{\partial f}{\partial m}(80,3)\triangle m + \frac{\partial f}{\partial r}(80,3)\triangle r$$

Sappiamo che $\triangle m = -10$ e $\triangle r = 1$. Risulta poi

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{gR^2}{(r+R)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = -2\frac{mgR^2}{(r+R)^3}.$$

Percio'

$$\frac{\partial f}{\partial m}(80,3) = \frac{gR^2}{(3+R)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(80,3) = -2\frac{80gR^2}{(3+R)^3}.$$

Si ottiene che

$$\triangle F \approx -\frac{10gR^2}{(3+R)^2} - 2\frac{80gR^2}{(3+R)^3}.$$

Esempio 0.3. Le dimensioni di una scatola rettangolare sono 75 cm, 60 cm e 40 cm, con errori inferiori a 0.2 cm. Stimare l'errore massimo che si commette nel calcolare il volume della scatola a partire da queste misure.

Soluzione. Se le dimensioni della scatola sono indicate con x, y e z, il suo volume e'

$$V = f(x, y, z) = xyz$$

Posto $\bar{x} = (75, 60, 40)$, la formula di approssimazione lineare dice che

$$\triangle V \approx \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})\triangle y + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x})\triangle z$$

Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy.$$

Osserviamo che $|\triangle x| \leq 0.2$, $|\triangle y| \leq 0.2$ e $|\triangle z| \leq 0.2$. Pertanto

$$\triangle V \approx (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2) = 1980.$$

Un errore di soli 0.2 cm in ciascuna delle dimensioni puo' portare ad un errore di 1980 cm^3 nel calcolo del volume della scatola (l'errore corrisponde all'uno per cento del volume della scatola).