Analisi I

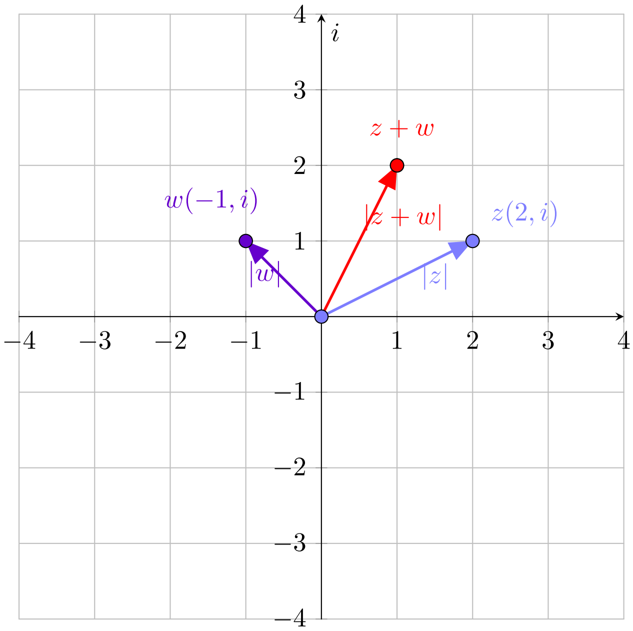
Riassunto da: *"Analisi Matematica 1 - Claudio Canuto, Anita Tabacco"*

Corso di Laurea in Fisica - Corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Settembre 2023

Indice

1 Numeri Complessi

L'insieme dei numeri reali può essere esteso con le proprietà delle operazioni di somma e prodotto valide in esso. L'estensione dà vita all'insieme dei numeri complessi che chiamiamo $\mathbb{C}$.



Questo ampliamento permette la risoluzione di qualsiasi equazione algebrica. Il Teorema Fondamentale dell'algebra afferma che qualsiasi polinomio a coefficienti reali o complessi di grado $n, n \in \mathbb{N}$ ammette almeno una radice complessa, da cui segue che un qualsiasi polinomio a coefficienti reali o complessi di grado n ammette sempre n radici complesse contate con le relative molteplicità.

I numeri complessi possono essere indicati con tre differenti notazioni:

1. Cartesiana: $z = (x + iy)$
2. Trigonometrica: $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$
3. Esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$

Ogni notazione ha i suoi vantaggi grafici o di calcolo, per questo preferiremo una notazione ad un'altra in casi specifici. In generale un numero complesso è formato dal una *parte reale* $x = Re(z)$ e da una *parte immaginaria* $y = Im(z)$, dal punto di vista algebrico $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ hanno le stesse proprietà anche se nel caso dei numeri complessi non è possibile definire un "ordine" compatibile con le operazioni.

1.1 Operazioni algebriche

Le operazioni di somma e differenza sono definite dalla semplice somma o differenza tra parti reali e parti immaginarie. Il prodotto tra due numeri complessi si comporta in modo simile al comportamento di seno e coseno nelle operazioni di somma:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Il reciproco di un numero complesso espresso come $\frac{1}{z}$ si può riscrivere moltiplicando sopra e sotto per il complesso coniugato di $z = x - iy$:

$$\frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

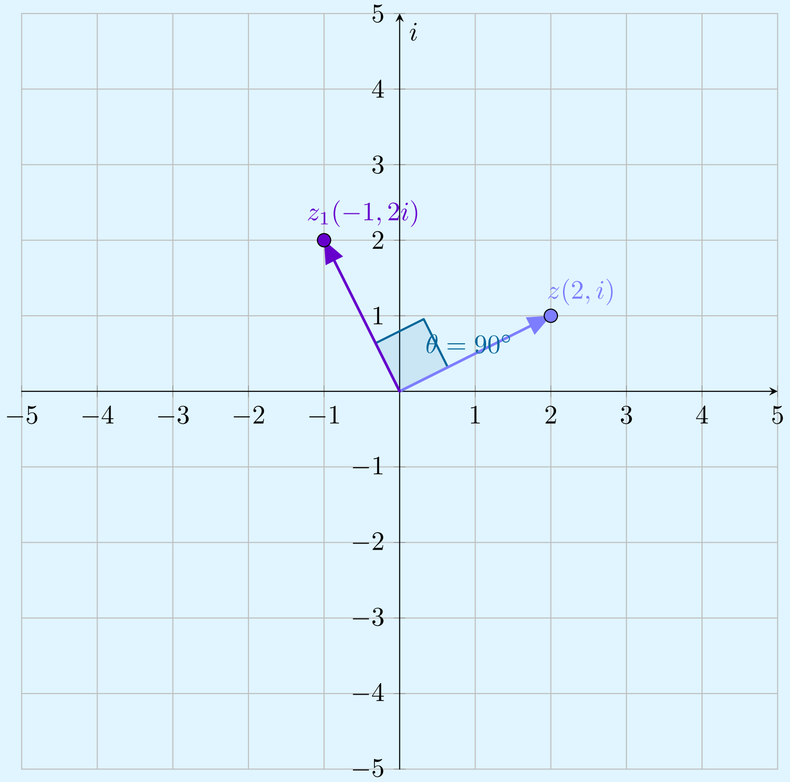
Nel caso di potenze di un numero complesso la notazione esponenziale è particolarmente funzionale. In generale z^n eleva alla n il modulo ρ e l'argomento:

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Un fatto interessante che spiega perché la parte immaginaria dei numeri complessi è situata a 90° in senso antiorario rispetto alla parte reale è che se moltiplichiamo un qualsiasi numero complesso per i, questo subirà una rotazione di 90° in senso antiorario.

es

Prendiamo $z = 2 + i$ e $w = i$: ora $z \cdot w = (2 + i)(i)$ sappiamo essere uguale a $-1 + 2i$.



Sappiamo anche che moltiplicare per i è equivalente a moltiplicare per un certo numero complesso $\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$; da ciò notiamo che l'argomento θ è anche l'angolo di rotazione di un qualsiasi altro numero complesso l moltiplicato per w, ovvero per i.

Quindi possiamo decidere di che angolo traslare qualsiasi numero complesso scegliendo opportunamente l'argomento θ di un altro numero complesso da moltiplicare.

2 Logica

2.1 Proposizioni

Definiamo una *proposizione logica* è un enunciato del quale si può inequivocabilmente dire se è vero o falso. Attraverso le proposizioni logiche possiamo ottenere operazioni logiche espresse da simboli specifici detti *connettivi logici*:

$$\text{negazione logica} \qquad \neg p (\text{"non p"})$$
$$\text{congiunzione logica} \qquad p \wedge q (\text{"p e q"})$$
$$\text{disgiunzione logica} \qquad p \vee q (\text{"p o q"})$$

In matematica molti enunciati sono del tipo "se p è vera, è vera anche q" in cui p è condizione sufficiente affinché q sia vera; in questo caso che q sia vera è condizione necessaria affinchè lo sia anche p. Questi tipi di enunciati sono detti implicazioni logiche:

$$\text{implicazione logica} \qquad p \Rightarrow q (\text{"p implica q"})$$

$$\text{biimplicazione logica} \qquad p \Longleftrightarrow q (\text{"p equivale a q"})$$

Vengono poi definite delle regole per *negare* le implicazioni o per scriverle in modo logicamente equivalente (nella loro forma *contronominale*):

$$\text{contronominale} \qquad (p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

2.2 Predicati

Un predicato logico è un enunciato dipendente da uno o più argomenti ed è indicato nella forma $p(x, \dots)$. Gli argomenti $x, \dots$ da cui dipende il predicato rendono quest'ultimo una *proposizione logica* e assume valori di verità Vero o Falso a seconda dei valori assegnati agli argomenti.

es

Dato il predicato "$p(x)$ è un numero dispari" con $x \in \mathbb{N}$:
$p(7)$ è Vero, $p(4)$ è Falso.

Dato un predicato $p(x)$ con $x \in \mathbb{A}$ è naturale chiedersi se l'enunciato $p(x)$ sia vero *per ogni* elemento di A. A questo fine introduciamo dei *quantificatori*:

$$\forall x, p(x) \qquad (\text{"per ogni x, è vero p(x)"})$$
$$\exists x, p(x) \qquad (\text{"esiste almeno un x, per cui è vero p(x)"})$$
$$\exists! x, p(x) \qquad (\text{"esiste, ed è unico, almeno un x, per cui è vero p(x)"})$$

Anche con in quantificatori sono definite le forme di negazione:

$$\neg(\forall x, p(x)) \Longleftrightarrow \exists x, \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x, p(x)) \Longleftrightarrow \forall x, \neg p(x)$$

2.3 Principio di induzione

Sia $P(n)$ una proprietà che dipende da $n \geq n_0 \geq 0 \quad n, n_0 \in \mathbb{N}$. Ora supponiamo che siano verificate:

- $P(n_0)$ è Vero;
- $\forall n \geq n_0$, se $P(n)$ è vero, allora $P(n+1)$ è vero.

Allora $P(n)$ è vero per ogni $n \geq n_0$.

es

Sappiamo che $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dimostriamo che se e vero per n lo è anche per $n + 1$ ($P(n) \Rightarrow P(n + 1)$):

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 &= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2n + 2}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \end{aligned}$$

Quindi in generale il Principio di induzione si usa in questo modo: prima si controlla che $P(n_0)$ sia vero, poi si assume che sia vero anche per un generico n e, usando tale informazione, si dimostra che anche $P(n + 1)$ è vero.

3 Numeri reali

L'insieme $\mathbb{R}$ è l'ambiente naturale dell'analisi I, nonostante questo non ne conosciamo la definizione rigorosa(!). Possiamo però riflettere sulle sue proprietà:

- Si dice che $\mathbb{R}$ sia un **campo ordinato**. Ovvero sono definite le due *operazioni di somma e prototto* ed è definita una *relazione d'ordine* $x \leq y$ compatibile con le operazioni (cosa non possibile nell'insieme $\mathbb{C}$).
- $\mathbb{R}$ è un insieme **completo**, al suo interno sono inclusi anche i numeri irrazionali.

3.1 Completezza di $\mathbb{R}$

Possiamo dire colloquialmente che $\mathbb{R}$ riempe la retta. Tramite una formulazione più rigorosa notiamo che, dato un certo intervallo, ogni valore successivo è maggiore di un valore nell'intervallo:

Maggioranti e minoranti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice che A è:

- *superiormente limitato se* $\exists b \in \mathbb{R} | x \leq b, \forall x \in A;$ $\longrightarrow$ esiste un **maggiorante** di A.
- inferiormente limitato se $\exists a \in \mathbb{R} | a \leq x, \forall x \in A;$$\longrightarrow$ esiste un **minorante** di A.
- limitato se $\exists a, b \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b, \forall x \in A;$

Maggiorante e minorante se esistono sicuramente non sono unici: a, b sono infatti ricercati in tutto $\mathbb{R}$; qualunque numero maggiore di un elemento in A è maggiorante e stessa cosa per il minorante.

Intervalli, massimi e minimi

- Gli intervalli $(-\infty, b)$ e $(-\infty, b]$ sono limitati superiormente;
- Gli intervalli $(b, +\infty)$ e $[b, +\infty)$ sono limitati inferiormente;
- Gli intervalli (a, b) , $[ab)$ (a, b) , $[ab]$ sono limitati.

Definizione: massimio e minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente (o inferiormente) limitato. Si dice che A ammette **massimo** se

$$\exists x_M \in A \quad \text{t.c.} \quad x \leq x_M, \quad \forall x \in A$$

$$(\exists x_M \in A \quad \text{t.c.} \quad x_M \leq x, \quad \forall x \in A)$$

L'elemento, necessariamente unico, si dice **massimo** (o minimo) di A e si pone

$$x_M = \max A$$

$$(x_M = \min A)$$

La differenza con un maggiorante sta proprio nel fatto che il massimo è contenuto nell'intervallo; la stessa cosa si può dire per i minimi.

dimostrazione uncità del massimo (o minimo)

Se $x_M = x'_M$ sono entrambi massimo allora si ha

$$x \leq x_M \quad \text{e} \quad x \leq x'_M \quad \forall x \in A$$

e quindi

$$x_M \leq x'_M \quad \text{e} \quad x'_M \leq x_M$$

da cui $x_M = x'_M$.

Esistono casi che però non ammettono massimi o minimi, per esempio l'insieme $\tilde{A} = \{\frac{1}{n}|n = 1, 2, \dots\}$. Quest'ultimo ha come intervallo $[1, +\infty)$, ha quindi un massimo ma non ammette minimi. In questi casi quando $\nexists$ minimo o massimo sarebbe utile poter definire un minorante o maggiorante *ottimale* che vengono definiti rispettivamente come *il più grande dei minoranti e il più piccolo dei maggioranti.* Definiamo allora i concetti di ***estremo superiore*** ed ***estremo inferiore***.

Teorema di completezza di $\mathbb{R}$

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente (inferiormente) limitato, **il massimo** (minimo) dell'insieme dei maggioranti (minoranti) **esiste sempre**.

Definizione: estremo superiore e inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente (inferiormente) limitato.
Si dice estremo superiore (inferiore) di A, e si scrive **supA** (infA), il più piccolo (grande) dei maggioranti (minoranti) di A = **estremo superiore** (inferiore).

3.2 Intorni

Un'altra "struttura" fondamentale di $\mathbb{R}$ è quealla che si basa sul concetto di **intorno**.

Definizione: estremo superiore e inferiore

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.
Si dice **intorno** do centro x_0 e raggio r l'intervallo

$$\mathrm{I}_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Notare che:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{I}_r(x_0) \Longleftrightarrow & x_0 - r < x < x_0 + r \\ & -r < x - x_0 < r \\ & |x - x_0| < r \end{aligned}$$

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si dice intorno di centro x_0 e raggio r l'intervallo $In(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

In questo contesto è utile definire anche un *sistema esteso dei numeri reali* che includa anche $-\infty$ e $+\infty$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

4 Integrali secondo Riemann

Il nostro obiettivo è quello di definire un numero reale che rappresenti, quando $f \geq 0$, l'area della regione compresa tra il grafico di f e l'asse x.
Per fare ciò definiremo:

1. $\int_a^b f$ per funzioni a scala;
2. $\int_a^b f$ per funzioni qualsiasi.

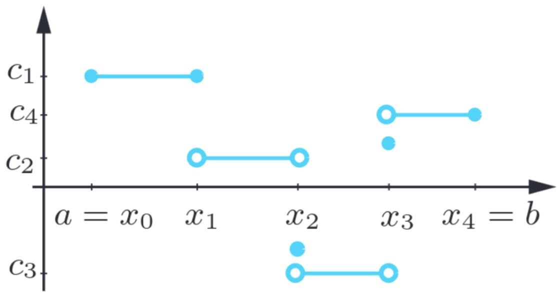
4.1 Funzioni a scala

Definizione: funzione a scala

Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice a scala se:

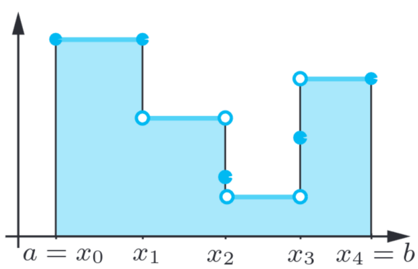
1. esistono $n + 1$ punti $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_n$ tali che
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$
2. n costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

per cui
$$f(x) = c_k \quad \forall x \in (x_{k-1}, x_k) \quad k = 1, \ldots, n$$



Definizione: Integrale di funzioni a scala

Sia $f \in \mathcal{S}([a, b])$ (insieme delle funzioni a scala) e sia $x_0, x_1, \ldots, x_n$ una suddivisione adattata di f (f continua in ogni sottointervallo). Detto c_k il valore di f su (x_{k-1}, x_k) $k = 1, \ldots, n$:
si dica integrale di f su $[a, b]$ il numero
$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{denotato con} \quad \int_a^b f$$



Osserviamo che se f è positiva nell'intervallo il numero $\int_I f$ rappresenta l'area del trapezoide di f.

Lemma 1: monotonia dell'integrale di funzione a scala

Siano $g, h \in \mathcal{S}([a,b])$ t.c. $g(x) \leq h(x)\ \forall x \in [a,b]$, allora:

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h$$

dimostrazione

Sia $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ adattata sia a g sia ad h e siano c_k e d_k i valori di g e h su (x_{k-1}, x_k) con $k = 1, \ldots, n$. Allora:

$$\int_a^b g = \sum_{k=1}^{n} c_k\,(x_k, x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} d_k\,(x_k, x_{k-1}) = \int_a^b h$$

4.2 Integrale superiore e inferiore

Definizione: integrale superiore e inferiore

Siano

$$\mathcal{S}^- f = \{g \in \mathcal{S}([a,b])\,|g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]\}$$

$$\mathcal{S}^+ f = \{h \in \mathcal{S}([a,b])\,|f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [a,b]\}$$

gli insiemi delle funzioni a scala formati dalle funzioni che **maggiorano** e **minorano** f.

Nota: $\mathcal{S}f^- \neq \varnothing$ e $\mathcal{S}f^+ \neq \varnothing$ perché $f([a,b])$ **è limitata** ($\exists k > 0$ t.c. $|f(x) \leq k \quad \forall x \in [a,b]|$).

$$\underline{\int_a^b} f = \text{integrale inferiore } = \sup\left\{\int_a^b g \quad \text{t.c.} \quad g \in \mathcal{S}^- f\right\}$$

$$\overline{\int_a^b} f = \text{integrale superiore } = \inf\left\{\int_a^b h \quad \text{t.c.} \quad h \in \mathcal{S}^+ f\right\}$$

Lemma 2: integrale inferiore $\leq$ integrale superiore

Per ogni funzione f limitata su $[a,b]$ si ha che l'integrale inferiore è minore o uguale all'integrale superiore:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

dimostrazione

Prendo:

$$g \in \mathcal{S}^- f, \quad h \in \mathcal{S}^+ f$$

Si ha $g(x) \le f(x) \le h(x) \quad \forall x \in [a,b]$. In particolare $g(x) \le h(x) \quad \forall x \in [a,b]$ e quindi per il **lemma 1**:

$$\int_a^b g \le \int_a^b h$$

Ora *fisso* g e faccio variare h:

$$\int_a^b g \quad \le \quad \inf\left\{\int_a^b h \quad \text{t.c.} \quad h \in \mathcal{S}^+ f\right\} \quad = \quad \overline{\int_a^b} f$$

Ora facendo variare g e ricordando la definizione di integrale inferiore si ottiene la tesi:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\int_a^b g \quad \text{t.c.} \quad g \in \mathcal{S}^- f\right\} \le \overline{\int_a^b} f$$

Poiché si ha che

$$\int_a^b g \le \int_a^b h$$

allora

$$\implies \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

!attenzione

Sembrerebbe logico pensare che la disuguaglianza sopra sia in realtà un'uguaglianza per tutte le funzioni limitate. Se prendiamo per esempio la funzione di Dirichlet ci accorgiamo che non è così: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ e prendiamo $[a,b] = [0,1]$ abbiamo:

$$\text{se } g \in \mathcal{S}^- f, \text{ allora} \quad g(x) \le 0$$

$$\text{se } h \in \mathcal{S}^+ f, \text{ allora} \quad h(x) \ge 0$$

Quindi

$$\underline{\int_0^1} f \le 0 \quad \text{e} \quad \overline{\int_0^1} f \ge 1.$$

A questo proposito diamo la definizione di **funzione integrabile** secondo **Riemann**:

Definizione: Funzione integrabile secondo Riemann

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **limitata** (condizione necessaria). Si dice che f sia integrabile su $[a,b]$ se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

In tal caso si scrive che

$$f \in \mathcal{R}\left([a,b]\right)$$

e si pone $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ che si dice **integrale di** f **su** $[a,b]$.

5 Limiti e continuità

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il concetto di *intorno*, ora vediamo come questo sia essenziale nella comprensione dei **limiti**.

Definizione: Limite

Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e solo se:

$$\forall \text{ intorno di } l, \mathrm{I}(l) \quad \exists \text{intorno di } x_0, \mathrm{I}(x_0) \text{ tale che}$$

$$x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I(l)$$

**vedere anche tutte le altre definizioni*

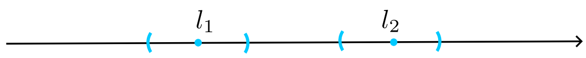
Adesso dobbiamo stabilire alcune proprietà del limite: intanto se esiste il limite *è unico*, possiamo dire infatti "il limite di f" e non "uno dei limiti di f".

Teorema di unicità del limite

Supponiamo che f ammetta limite l finito o infinito per x tendente a x_0. Allora f non ha altri limiti tendenti a x_0.

dimostrazione: unicità del limite

Supponiamo che esistano due limiti differenti di una funzione f tendente allo stesso valore x_0 e li chiamiamo l_1 e l_2 tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$ $(l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}})$. Inoltre prendiamo gli intorni di l_1 e di l_2 in modo che $l_1 \cap l_2 = \varnothing$.



Ora dalla definizione di limite data prima, possiamo scrivere:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathrm{I}(x_0) \,|\, x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \mathrm{I}(l_1)$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathrm{I}'(x_0) \,|\, x \in \mathrm{I}'(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \mathrm{I}(l_2)$

Dunque possiamo dire che x è sia in $\mathrm{I}(x_0)$ sia in $\mathrm{I}'(x_0)$:

$$x \in \big(\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{I}'(x_0)\big) \ \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{I}(l_1) \cap \mathrm{I}(l_2)$$

Assurdo poiché

$$\mathrm{I}(l_1) \cap \mathrm{I}(l_2) = \varnothing$$

Teorema di permanenza del segno

Supponiamo che

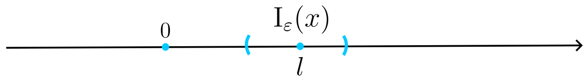
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \text{con } l > 0 \text{ o } l = +\infty.$$

Allora esiste un intorno di x_0

$$\mathrm{I}(x_0) \quad \text{t.c.} \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

dimostrazione

1) $\quad l \in \mathbb{R}, l > 0$



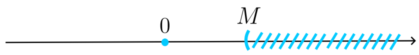
Prendo un intorno di raggio ε con $\varepsilon = \frac{l}{2}$: $\mathrm{I}_\varepsilon(l)$. Per definizione di limite

$$\exists \mathrm{I}(x_0) \quad \text{t.c.} \quad x \in \mathrm{I}(x_0) \backslash x_0 \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{I}_\varepsilon(l)$$

Quindi in particolare

$$x \in \mathrm{I}(x_0) \backslash \{x_0\} \Longrightarrow f(x) > \frac{l}{2} > 0$$

2) $\quad l = +\infty$



$$\forall M > 0 \quad \exists \mathrm{I}x_0 \qquad \text{t.c} \qquad x \in \mathrm{I}x_0 \backslash \{x_0\} \Longrightarrow f(x) > M > 0$$

Corollario del teorema di permanenza del segno Se esiste un intorno di x_0 $\mathrm{I}(x_0)$ in cui $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \backslash \{x_0\}$ allora (se esiste), il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$$

dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$, allora per il **teorema di permanenza del segno**

$$\exists \mathrm{I}'(x_0) \quad \text{t.c.} \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \backslash \{x_0\}$$

Allora

$$x \in \big(\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{I}'(x_0)\big) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

che è assurdo.

Toerema di esistenza del limite per funzioni monotone

ricorda: funzioni monotone

Una funzione f si dice **monotona crescente** se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I} \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

e **strettamente monotona crescente** se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I} \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Data la funzione

$$f : I \to \mathbb{R}$$

Prendiamo l'intorno $\mathrm{I} = (a, +\infty), a \in \mathbb{R}$.
Se f è **monotona** su I, allora esiste il limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e

$$\lim_{x \to +\infty} = \begin{cases} \sup f(I) \text{ se f è crescente} \\ \inf f(I) \text{ se f è decrescente} \end{cases}$$

(la monotonia è **condizione sufficiente** per l'esistenza del limite)

dimostrazione

Supponiamo che f sia crescente con $l = \sup f(I)$.

$l = +\infty$) Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l = +\infty$$

cioè

$$\forall M > 0 \quad \exists k > 0 \qquad \text{t.c.} \quad x > k \quad \implies \quad f(x) > M$$

Poiché la funzione è crescente, vale:

$$x > k \quad \implies \quad f(x) \geq f(k) > M$$

$l \in \mathbb{R}$) Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad x > k \quad \implies \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Prendiamo un ε arbitrario maggiore di zero. Poiché $l - \varepsilon$ non è maggiorante di $f(x)$ esiste sicuramente un k tale che $f(k) > l - \varepsilon$. Poichè la funzione è crescente:

$$x > k \quad \implies \quad f(x) \geq f(k) > l - \varepsilon$$

D'altro canto, poiché l è maggiorante di $f(I)$ sappiamo che la funzione sarà sempre minore di l: $f(x) \leq l \quad \forall x \in I$ e quindi possiamo affermare che

$$x > k \quad \implies \quad l - \varepsilon < f(x) \leq l < l + \varepsilon$$

Teorema del confronto 1

Date due funzioni f e g siano i limiti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = m \qquad\qquad x_0, l, m \in \mathbb{R}$$

Se esiste un intorno in cui f è minore di g:

$$\mathrm{I}(x_0) \text{ t.c.} \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

allora sappiamo che il valore a cui tende f è minore di quello a cui tende g:

$$l \leq m$$

dimostrazione

Prendiamo una terza funzione sicuramente non negativa:

$$h(x) = g(x) - f(x) \qquad \to h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Allora sappiamo per il **teorema di permanenza del segno** che il limite di $h(x)$ è sicuramente ≥ 0 e per il **teorema fondamentale dell'algebra** che:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = m - l$$

quindi:

$$0 \leq \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = m - l$$

Teorema del confronto 2

Date due funzioni con stesso limite l :

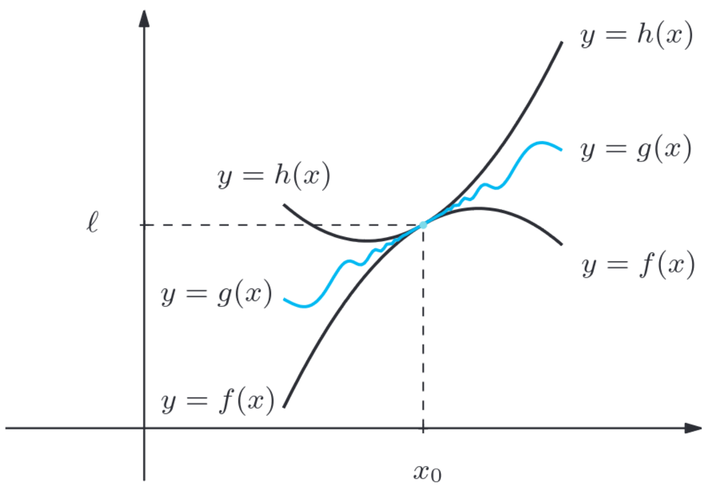
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

Se esiste un intorno $\mathrm{I}(x_0)$ per il quale

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \backslash \{x_0\}$$

allora possiamo affermare che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$



dimostrazione

Nel caso in cui $l = \pm\infty$ basta sapere che

$$f(x) \leq g(x) \to +\infty$$

$$g(x) \leq h(x) \to -\infty$$

Se invece $l \in \mathbb{R}$ cerchiamo altri intorni di x_0 per f e per h; per fare ciò prendiamo $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Longrightarrow \quad \exists \mathrm{I}'(x_0) \quad \text{t.c.} \quad \forall \mathrm{I}'(x_0) \backslash \{x_0\} \qquad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \quad \Longrightarrow \quad \exists \mathrm{I}''(x_0) \quad \text{t.c.} \quad \forall \mathrm{I}''(x_0) \backslash \{x_0\} \qquad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

Ora definiamo un terzo intorno che verifica le condizioni precedenti:

$$x \in (\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{I}'(x_0) \cap \mathrm{I}''(x_0)) \quad \Longrightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

Corollario Sia $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e sia f una funzione limitata in un intorno di x_0, cioè

$$\exists M > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \backslash \{x_0\}$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$$

dimostrazione

Si ha

$$0^{\to 0} \leq \quad |f(x)g(x)| \quad = \quad |f(x)||g(x)| \quad \leq M|g(x)|^{\to 0}$$

Quindi per confronto $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

5.1 Continuità

Definizione: Funzione continua

Una funzione f si dice continua in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quindi

$$f \text{ continua in } x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Inoltre diciamo che

- f è continua da **sinistra** in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- f è continua da **destra** in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Classificazione dei punti di discontinuità

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è una **discontinuità eliminabile** se

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases} \quad \text{è continua in } x_0$$

2. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ma f non è definita in x_0.

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = 1$$

   In questi casi si dice che f si può **prolungare per continuità** in x_0, cioè:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

3. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ con $l_1 \neq l_2$, si dice che f ha una **discontinuità di salto** in x_0.

   Esempi di funzioni con discontinuità di salto sono la funzione $\text{sgn}(x)$, $f(x) = [x]$ parte intera, $f(x) = x - [x]$ mantissa.

Definizione: Continuità in un intervallo

Dato I $\subseteq \mathbb{R}$ intervallo e f : I$\to \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in I se è continua in ogni $x_0 \in$ I. (Se $I = [a, b]$ in a e b per continuità si intenda continuità da destra e da sinistra).

Indichiamo l'insieme delle funzioni continue su I con $\mathcal{C}(I)$ (anche $\mathcal{C}^0(I)$).

Proposizione: continuità della funzione integrale

Dato I $\subseteq \mathbb{R}$ intervallo e f : I$\to \mathbb{R}$ funzione integrabile su ogni sottointervallo chiuso e limitato di I. Preso $x_0 \in$ I la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

è continua su I.

???*dimostrazione*

Per semplicità prendiamo una funzione f limitata su I: $\exists k > 0$ t.c $|f(x)| \leq k \quad \forall x \in$ I.
Ora fissiamo un'ascissa arbitraria che chiameremo $\bar{x} \in$ I e proviamo che $F(x)$ è continua in $\bar{x}$.

Dimostriamo che

$$\lim_{x \to \bar{x}} F(x) = F(\bar{x})$$

che per definizione di limite possiamo riscrivere come

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$|x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow |F(x) - F(\bar{x})| < \varepsilon$$

Utilizziamo ora la proprietà di additività dell'integrale:

$$F(x) - F(\bar{x}) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt \quad = \quad \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt$$

dunque sempre per la proprietà dell'integrale:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\bar{x})| = \left| \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt \right| &\leq \left| \int_{\bar{x}}^{x} |f(t)|\,dt \right| \\ &\leq k \left| \int_{\bar{x}}^{x} dt \right| = k|x - \bar{x}| \end{aligned}$$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$

$$|x - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{k} =: \delta \Longrightarrow |F(x) - F(\bar{x})| \leq k|x - \bar{x}| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

6 Successioni

Possiamo dire in formalmente che una successione è un'elencazione infinita di numeri reali. Formalmente invece:

> **Definizione: Successione**
>
> Si chiama successione una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Non si scrive $a(n)$ ma $\mathbf{a_n}$, che sta a indicare il termine n-simo:
>
> $$\{a_n\}_{n \geq n_0}$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice.

- **Limitata** se $\exists M > 0 \quad \text{t.c.} \quad |a_n| \leq M \quad \forall n$;
- **Monotona crescente** se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n$.

Se cerchiamo il limite della successione ci accorgiamo che non ha senso cercare il limite

$$\lim_{x \to x_0} a_n$$

perché non esiste un intorno I(x_0)

Allora definiamo il limite della successione come

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \quad \text{se per ogni reale } \varepsilon > 0 \text{ esiste un intero } n_\varepsilon \quad \text{t.c.}$$

$$\forall n \geq n_0, \quad n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

> **Teorema di limitatezza**
>
> Se $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è **convergente**, allora è **limitata**.

dimostrazione

Prendo un $\varepsilon = 1$. Per definizione di limite

$$\exists \bar{n} \geq n_0 \quad \text{t.c.} \quad n > \bar{n} \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon = 1$$

Quindi

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - l + l| \\ &\leq |a_n - l| + |l| \\ &< 1 + |l| \qquad \forall n > \bar{n} \end{aligned}$$

Ponendo

$$M = \max\{|a_{n_0}|, |a_{n_0+1}|, \ldots, |a_{\bar{n}}|, 1 + |l|\}$$

si ha che $|a_n| \leq M \qquad \forall n \geq n_0$

Alcune **osservazioni**:

1. Non vale il viceversa: una successione limitata non è necessariamente convergente (es. $a_n = (-1)^n$).
2. Per le funzioni il teorema è falso: per esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $(0, +\infty)$ si ha:

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

   ma f non è limitata in $(0, +\infty)$.

però: teorema di limitatezza locale

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists k > 0 \quad \text{t.c.} \quad f \text{ è limitata su } [k, +\infty)$$

Teorema di relazione (o teorema ponte)

Sia f definita in un intorno di $c \in \mathbb{R}$ tranne eventualmente in c. Allora:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \{x_n\} \quad \text{t.c.} \quad x_n \neq c, \text{ e } \lim_n x_n = c$$

$$\text{risulta}$$

$$\lim_n f(x_n) = l$$

A parole: la funzione ha limite l per $x \to c$ *se e solo se* le immagini tramite f di ogni successione che tendono a c sono tali da **convergere** a l.

Con il teorema ponte possiamo dimostrare che non esiste il limite del seno per $x \to +\infty$:

$$\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin(x)$$

- $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \to +\infty \qquad f(x_n) = 1$
- $x'_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \to +\infty \qquad f(x'_n) = -1$

Vediamo che entrambe le successioni soddisfano le condizioni $x_n \neq +\infty$ e $\lim_n x_n = +\infty$. Purtroppo però la terza non è soddisfatta poiché le due successioni non convergono nello stesso valore:

$$\lim_n f(x_n) = +1 \quad \text{e} \quad \lim_n f(x'_n) = -1$$

7 Proprietà globali delle funzioni continue

Nei capitoli precedenti ci siamo occupati, mediante il concetto di limite, delle varie proprietà locali di una funzione, ossia proprietà che valgono in un intorno di un punto della retta reale. Ora è necessario parlare di alcune proprietà globali delle funzioni, valide su tutto l'intervallo.

Definizione: Zero di una funzione

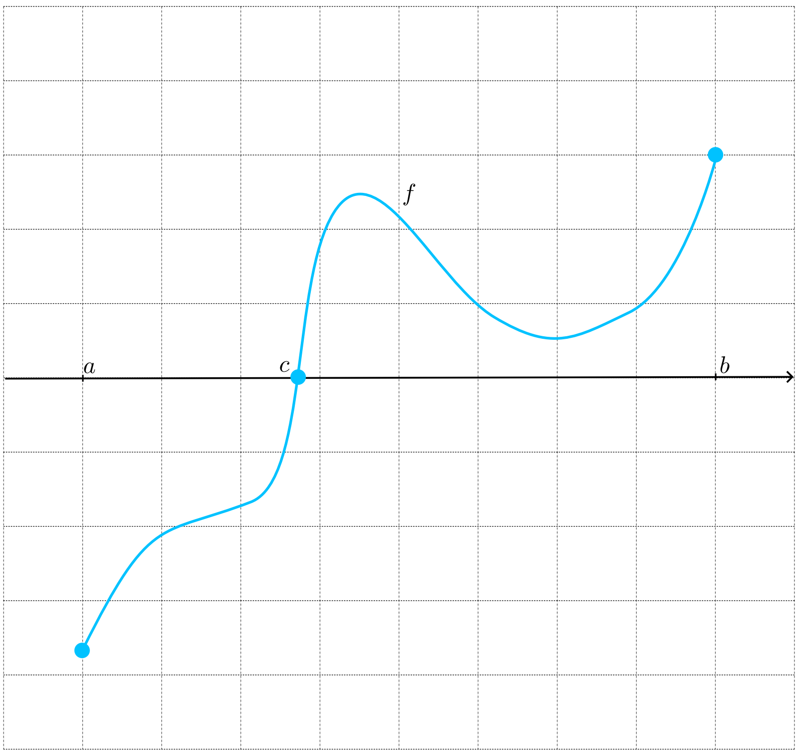
Data una funzione reale f chiamiamo **zero** di f ogni punto $x_0 \in \mathrm{dom} f$ in cui la funzione si annulla.

Teorema di esistenza degli zeri

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua* nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se la funzione f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo, allora esiste uno zero di f nell'intervallo aperto (a, b); in formule:

$$f(a) f(b) < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Inoltre se f è strettamente monotona in $[a, b]$, allora lo zero è unico nell'intervallo.

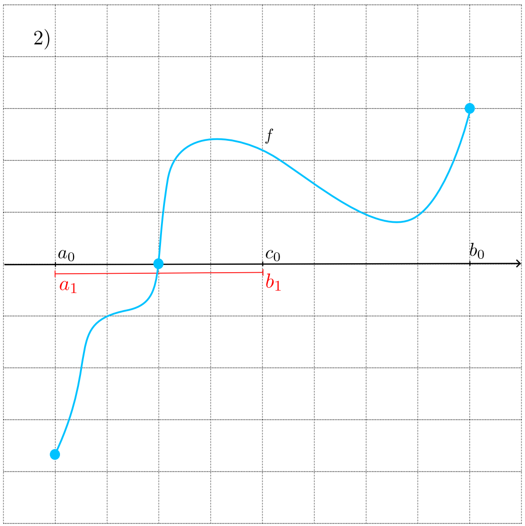


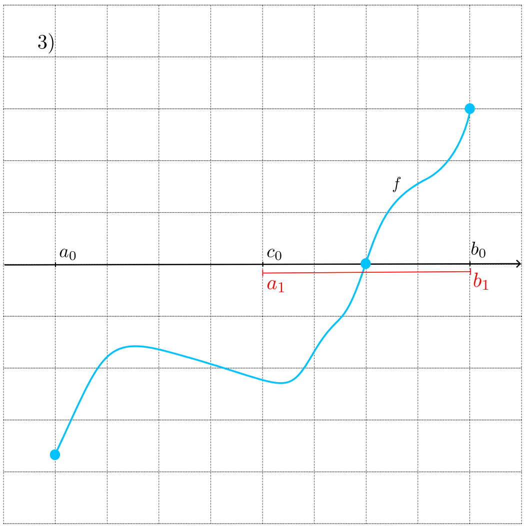
dimostrazione: teorema esistenza degli zeri

Supponiamo $f(a)$ negativo e $f(b)$ positivo: $f(a) < 0 < f(b)$.

Definiamo poi il punto medio c_0 e rinominiamo a e b : $a = a_0$, $b = b_0$, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
Una volta calcolato il punto medio abbiamo tre possibilità:

1. Se $f(c_0) = 0$ il teorema è dimostrato;
2. Se $f(c_0) > 0$ allora dovremo cercare lo zero *a sinistra* del punto medio; in questo caso poniamo quindi $a_0 = a_1$ e $c_0 = b_1$;
3. Se $f(c_0) < 0$ allora dovremo cercare lo zero *a destra* del punto medio; in questo caso poniamo $c_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$.





Nei casi 2) e 3) abbiamo costruito un intervallo $[a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0]$ t.c.

$$f(a_1) < 0 < f(b_1) \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Ora iteriamo il procedimento:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \text{e consideriamo} \quad f(c_1) = 0, > 0, < 0.$$

Iterando in questo modo possono verificarsi due casi:

1. In un numero finito di passi troviamo lo zero di f;
2. o troviamo una *successione* di intervalli $[a_n, b_n]$ t.c.

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n b_n].$$

$$\text{con} \quad f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

$$\text{e con} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Osservando come varia la posizione di a_n e di b_n notiamo che a_n o rimane dov'è o si sposta a destra (aumenta), invece b_n o rimane dov'è o si sposta a sinistra (diminuisce). Possiamo allora dire che le succesioni a_n e b_n sono rispettivamente monotona crescente e monotona decrescente, limitate rispettivamente in $(a \leq a_n \leq b)$ e in $(a \leq b_n \leq b)$.

Proprio perché le due successioni sono *monotone*, secondo il teorema di esistenza del limite per successioni monotone:

$$\exists \lim_{n \to \infty} a_n = c^- \in [a, b] \qquad \text{e} \qquad \exists \lim_{n \to \infty} b_n = c^+ \in [a, b].$$

Da ciò segue che:

$$c^+ - c^- = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

$$c^+ = c^- =: c \in [a,b]$$

c è il **limite unico** a cui tendono le funzioni.
Poiché f è *continua* e si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Infine ricordando che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e ricordando il corollario del teorema di permanenza del segno:

corollario teo. perm. segno

Se esiste un intorno di x_0 $\mathrm{I}(x_0)$ in cui $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \setminus \{x_0\}$ allora (se esiste), il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$$

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \quad \Rightarrow \quad f(c) \leq 0 \leq f(c).$$

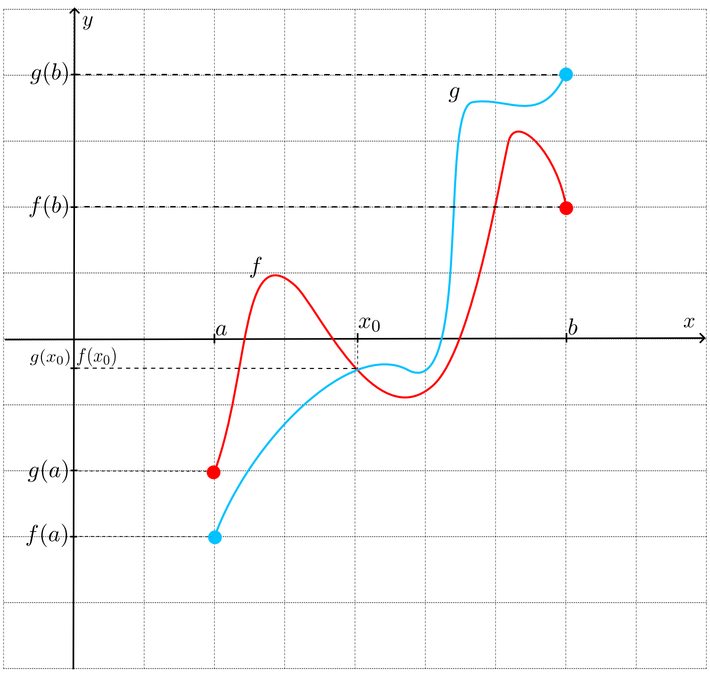
Dunque $f(c) = 0$**,** $c \in (a,b)$

Corollario 7.1 Definiamo un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esistono (finiti o infiniti) i limiti sinistro e destro di f agli estremi di I, e se tali limiti hanno segno discorde, allore esiste uno zero di f in I ; tale zero è unico se f è strettamente monotona in I. *In soldoni: se a sinistra la curva se ne va in basso verso $-\infty$ e a destra se ne va in alto verso $+\infty$ chiaramente dovrà intersecare l'asse x a un certo punto.*

Corollario 7.2 Siano f e g due funzioni continue in $[a,b]$. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$ allora esiste almeno un punto in (a,b) tale che:

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Inoltre se f è strettamente crescente e g strettamente decrescente in $[a,b]$ il punto x_0 è unico. *In soldoni: presi due punti a e b sull'asse x e ricavati gli intervalli $(f(a), f(b))$ e $(g(a), g(b))$ sull'asse y se l'intervallo di g contiene quello di f, allora esiste sicuramente un punto x_0 in f contenente $f(x_0)$*

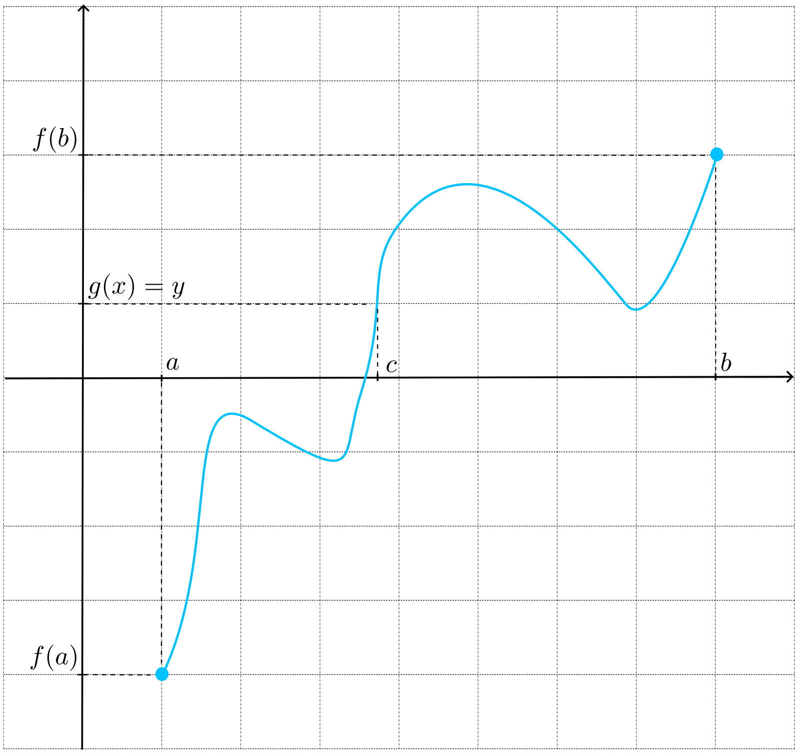


Teorema dei valori intermedi

Il teorema si concentra sullo studio dell'immagine di una funzione continua definita su un intervallo della retta reale.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.
Ovvero:

$$\forall y \in (f(a), f(b)) \quad \exists c \in [a, b] : f(c) = y.$$



dimostrazione: teorema valori intermedi

Se $f(a) = f(b)$ non c'è niente da dimostrare.

Se invece supponiamo $f(a) < f(b)$ e definiamo la funzione costante $g(z) = y$ prendendo come y un qualsiasi punto compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, otteniamo subito le seguenti disuguaglianze:

$$f(a) < y < f(b).$$

$$f(a) < g(a) \qquad f(b) > g(b).$$

Notiamo la somiglianza al corollario 7.2. Secondo il corollario otteniamo in $[a, b]$ l'esistenza di un punto c tale che:

$$f(c) = g(c) = y.$$

Il teorema garantisce che l'immagine di $[a, b]$ contiene almeno l'intervallo chiuso di estremi $f(a)$ e $f(b)$:

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b]) \qquad \text{se} \quad f(a) \leq f(b).$$

La formula equivalente con $f(b) \leq f(a)$ è ovvia.

Corollario 7.3 Il teorema ha come conseguenza importante il fatto che una funzione continua "trasforma intervalli in intervalli": l'immagina di tale funzione $f(I)$ attraverso l'intervallo è ancora un intervallo.

dimostrazione: corollario 7.3

Presi $y_1 < y_2$ due punti di $f(I)$; allora esistono in I due punti x_1 e x_2 tali che:

$$f(x_1) = y_1 \qquad f(x_2) = y_2.$$

Supponiamo che $x_1 < x_2$ e consideriamo $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$; per il teorema dei valori intermedi **sappiamo che** f assume tutti i valori tra y_1 e y_2.

Teorema di Weierstrass

Se I è chiuso e limitato (cioè $I = [a, b]$ vale il teorema di Weierstrass.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. ALlora $f([a, b])$ è un intervallo chiuso e limitato, cioè:

$$f([a, b]) = [m, M].$$

in cui m e M sono massimo e minimo. Quindi f assume valore massimo, valore minimo e tutti i valori intermedi.

8 Derivabilità

Definizione: Funzione derivabile

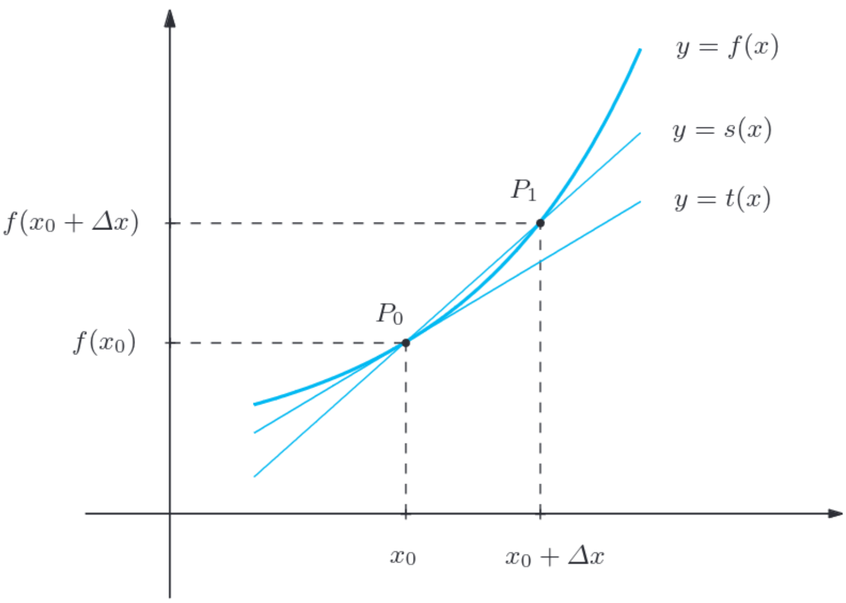
sia $x \in \mathbb{R}$ e sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste finito. In tal caso il numero

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si dice **derivata** (prima) di f in x_0.



Proposizione Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

dimostrazione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Per $x \neq x_0$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = 0$$

che è la tesi.

Teorema di dubbia derivabilità

Data una funzione continua nell'intervallo I e derivabile in $I \backslash \{x_0\}$

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad I \subset \mathbb{R}$$

- Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = l$ allora $\exists f'(x_0) = l$;
- Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \{\pm\infty\}$ allora f non è derivabile in x_0;

8.1 Teoremi del calcolo differenziale

Definizione: Punti di estremo

Sia I$\in \mathbb{R}$ intervallo e $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Si dice che un punto $x_o \in I$ è un punto di **max locale** se esiste un intorno di x_0 I t.c.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{I}$$

Si dice invece che $x_0 \in \mathrm{I}$ è punto di **max globale** se

$$f(x) \leq f(x_0) \forall x \in \mathrm{I}$$

Teorema di Fermat

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0 interno ad I,

$$\text{Se } x_0 \text{ punto di estremo per } f \implies f'(x_0) = 0$$

Nota: non vale il veceversa poiché la derivata può annullarsi anche in flessi orizzontali.

dimostrazione

Supponiamo di avere x_0 punto di massimo locale, allora per definizione

$$\exists \mathrm{I}(x_0) \quad \text{t.c.} \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{I}$$

Poiché x_0 è interno ad I esiste un intorno J(x_0) t.c. J$(x_0) \subseteq$ I. Allora I$(x_0) \cap$ J(x_0) è un intorno di x_0 e

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{J}(x_0)) \subseteq \mathrm{I}$$

Ne segue che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & x > x_0, \quad x \in (\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{J}(x_0)) \\ \geq 0 & x < x_0, \quad x \in (\mathrm{I}(x_0) \cap \mathrm{J}(x_0)) \end{cases}$$

Per il corollario del teorema di permanenza del segno (o per il teorema del confronto) si ha:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Ma **poiché** f è derivabile in x_0:

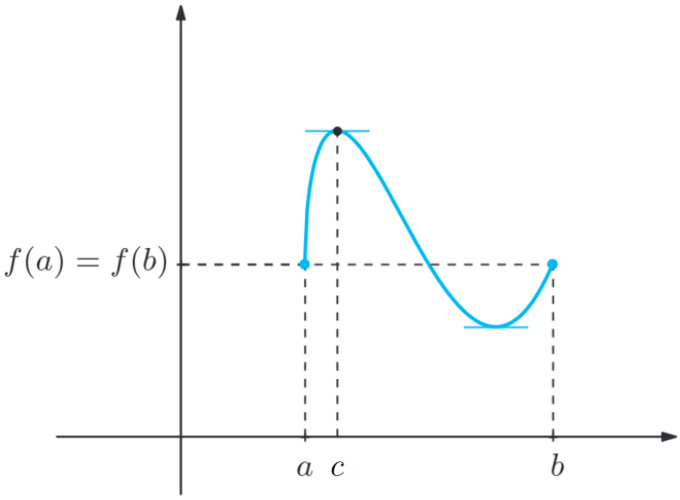
$$f(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$$

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su tutto l'intervallo $[a.b]$ e derivabile su (a, b). Se

$$f(a) = f(b) \quad \implies \quad \exists c \in (a, b) \quad \text{t.c.} \quad f'(c) = 0$$

Vedremo come in realtà Rolle sia semplicemente un caso particolare del teoreme di Lagrange.



dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass sappiamo che l'immagine di una funzione in un intervallo chiuso e limitato è un intervallo chiuso e limitato:

$$f([a, b]) = [m, M]$$

Quindi esistono x_m e $x_M \in [a.b]$ t.c.

$$f(x_m) = m \quad \text{e} \quad f(x_M) = M$$

cioè x_m e x_M sono punti di minimo e massimo globale.

- Se x_m e x_M sono interni a $[a, b]$, allora per il teorema di Fermat $f' = 0$ in uno almeno uno dei due punti.
- Se x_m e x_M sono esterni, allora la funzione è costante e quindi vale $f' = 0 \forall c \in [a, b]$.

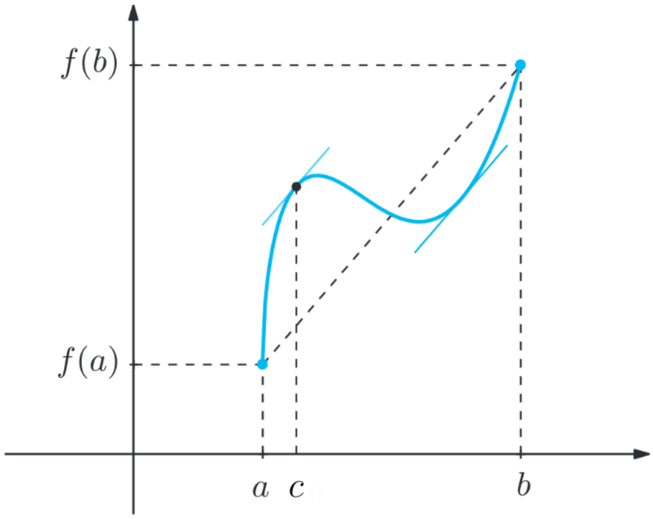
Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su tutto l'intervallo $[a.b]$ e derivabile su (a, b). Allora esiste una c che soddisfa

$$f'(c) = \frac{f'(b) - f(a)}{b - a}$$

Ovvero esiste un punto in cui la retta tangente alla curva è parallela alla retta passante per a e b. Infatti:

- $\frac{f'(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.
- $f'(c)$ è il coefficiente angolare della retta tangente a f in c.



dimostrazione

Definiamo una funzione ausiliaria sicuramente continua su $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo (a, b) poiché differenza della funzione f che ha per ipotesi tali proprietà:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Tramite la funzione ausiliaria si verifica facilmente che

$$h(a) = f(a) \qquad h(b) = f(a)$$

Quindi per il teorema di Rolle sappiamo che esiste una $c \in (a, b)$ che soddisfa $h'(c) = 0$. Ma

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad = 0$$

Quindi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Proposizione (caratterizzazione dele funzioni a derivata nulla) Sia I$\subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{I} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è costante su I}$$

dimostrazione

$\Longleftarrow$ Ovvia perché il rapporto incrementale è sempre zero quindi anche il limite.
$\Longrightarrow$ Proviamo che $\forall x_1, x_2 \in$I$(x_1 < x_2)$ si ha $f(x_1) = f(x_2)$. Usiamo il **teoreme di Lagrange**:
esiste $c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Teorema di Cauchy

Siano f e g continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b). Si supponga che $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, allora esiste sicuramente una

$$c \in (a, b) \quad \text{t.c.} \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

8.2 Monotonia e convessità

Test di monotonia

Sia $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$$f \text{ è crescente su I} \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

dimostrazione

$\implies$ Suppongo $x_0 \in \mathrm{I}$ non sia l'estremo destro di I.
Poiché f è crescente su I, se $x > x_0$ si ha anche $f(x) \geq f(x_0)$ e di conseguenza anche

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Dunque per il corollario del **teorema di permanenza del segno** abbiamo che

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Poiché f è derivabile in x_0

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) \quad \rightarrow \quad f'(x_0) \geq 0$$

Se invece x_0 è l'estremo destro di I, si ragiona in modo simile per $x \to x_0$ e calcolando $f'_-(x_0)$.

$\impliedby$ Siano $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ con $x_1 < x_2$. Per il **teorema di Lagrange**

$$\exists c \in (x_1, x_2) \quad \text{t.c.} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = f'(c) \quad \rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$$

$$(\text{poiché} f'(x) \geq 0 \text{ e } (x_2 - x_1) > 0)$$

Quindi

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definizione: Convessità

Sia $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Allora f si dice **convessa** su I se

$$\forall x_1, x_2, x \in \mathrm{I} \quad \text{con} \quad x_1 < x < x_2$$

allora

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Una funzione si dice convessa se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico si trova al di sopra del grafico stesso.

9 Taylor

Lo sviluppo di Taylor di una funzione nell'intorno di un punto x_0 dell'asse reale, è la rappresentazioe come somma di un polinomio e di un infinitesimo di ordine superiore al grado dol polinomio. Con esso è possibile approssimare una funzione complessa (in un intorno abbastanza piccolo di x_0) a un polinomio, di cui è facile stabilire le proprietà qualitative.

Iniziamo supponendo una funzione continua in x_0 e costante (di grado 0), sappiamo che per $x \to x_0$:

$$f(x) = f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In altri termini possiamo approssimare la funzione f mediante un polinomio di grado 0 in modo che la differenza tra $f(x)$ e $T_{f_0,x_0}(x)$ sia un infinitesimo di x_0.

Supponiamo che la funzione sia anche derivabile:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

In generale posso trovare il polinomio $T_{n,x_0}(x)$ di grado $\leq n$ tale che:

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

che è riscrivibile come:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Teorema: formula di Taylor con resto di Peano

Sia f :I$\to \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0, allora posto

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

risulta

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

Il polinomio $T_{n,x_0}(x)$ è **unico** e si chiamo **polinomio di Taylor di ordine n** (per $x_0 = 0$ si chiamo polinomio di Mac-Lawri)

dimostrazione

Per $n = 0$ e $n = 1$ già lo sappiamo. Dimostriamo che per

$$n = 2 \quad \to \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_{2,x_0}(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

dove

$$T_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Per il **teorema di De L'Hopital** è vero se:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)} = 0$$

cioè

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0) \right) = 0$$

che è vero per la definizione di derivata seconda.

10 Primitivazione

Dato $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, l'obiettivo è trovare (se eiste)

$$F : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

Definizione: Primitiva

Se tale F esiste, F si dice **primitiva** di f e f si dice *primitivabile.*

Il processo consiste nel risolvere un'equazione differenziale del prim'ordine in cui f è il termine noto e F è la funzione incognita.

Definizione: Integrale indefinito

Se f è primitivabile l'insieme delle primitive di f si indica con

$$\int f \quad \text{oppure} \quad \int f(x)\,dx$$

e si chiama **integrale indefinito di** f. Quindi se F è primitiva di f

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\} = F(x) + c$$

Proprietà: caratterizzazione delle primitive Se f primitivabile ha F come sua primitiva, allora G è primitiva di $f \iff G(x) = F(x) + c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$.

dimostrazione

$$\begin{aligned} G \text{ è primitiva di } f \iff & G'(x) = f(x) \\ \iff & G'(x) = F'(x) \quad \forall x \\ \iff & G'(x) - F'(x) = 0 \quad \forall x \\ \iff & (G - F)'(x) = 0 \quad \forall x \\ \iff & G(x) - F(x) = c \quad \forall x \end{aligned}$$

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, quando questa è integrabile su $[a, b]$? Se vale almeno una delle seguenti condizioni:

1. f è **continua** in (a, b) tranne i un numero finito di punti;
2. f è monotona su (a, b).

Allora f è integrabile su $[a, b]$. (Si ricordi che un esempio di funzione non integrabile è la funzione di Dirichlet che è sempre discontinua (il limite non esiste mai)).

10.1 Media integrale

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile definiamo

$$m(f; a, b) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f$$

che chiamiamo valor medio o **media integrale** di f su $[a, b]$

Teorema della media integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq m(f;a,b) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

ha senso perché la f.ne è integrabile quindi limitata

Inoltre se f è continua su $[a,b]$, allora esiste uno $z \in [a,b]$ t.c. $f(z) = m(f;a,b)$.

dimostrazione

Sappiamo che

$$\inf f \leq f(x) \leq \sup f \qquad \forall x \in [a,b]$$

quindi anche che

$$\inf f \cdot (b-a) = \int_a^b \inf f \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sup f = \sup f \cdot (b-a)$$

Ovvero che l'area del rettangolo di area $min(f) \cdot (b-a)$ è minore dell'area sottesa dalla curva che è minore dell'area del rettangolo di area $max(f) \cdot (b-a)$.
E allora si ha che

$$\inf f \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f \leq \sup f$$

10.2 Legame tra integrali di Riemann e integrali indefiniti

Perché utilizziamo stessi simboli per indicare due concetti così differenti (area con segno e antiderivata)? La risposta sta nel **Teorema fondamentale del calcolo integrale**, che ci permette di ”costruire primitive” mediante integrazione.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è definita e continua su I, allora chiamiamo **funzione integrale** di f su I ogni funzine della forma

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x \in \mathrm{I}$$

Allora $F(x)$ è derivabile in ogni punto di I e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

$$\int f(x)\,dx \quad = \quad \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$$

Nota: f continua $\Longrightarrow f$ primitivabile.

dimostrazione

Preso $x \in \mathrm{I}$, dobbiamo dimostrare che

$$F'(x) = f(x) \quad \rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \qquad \text{per } h \neq 0 \text{ e t.c. } x + h \in \mathrm{I}$$

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt \; - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt \; + \int_{x}^{x_0} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = \begin{cases} m(f; x, x+h) & h > 0 \\ m(f; x+h, x) & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Per il **teorema della media integrale** (f è **continua**) esiste un punto z_h compresa tra x e $x + h$ tale che

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(y)\,dt = f(z_h)$$

e quindi

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(z_h)$$

Poiché z_h è compreso tra x e $x + h$, il limite $\lim_{h\to 0} z_h = x$, e quindi, poiché f è **continua**

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} f(z_h) = f(x)$$

Come abbiamo visto la condizione di **continuità** è fondamentale:

$$f \text{ continua} \xRightarrow{\text{TFCI}} F \text{ derivabile} \xRightarrow{F'=f} F = \mathcal{C}'$$

e quindi

$$f \in \mathcal{C}^k \Longrightarrow F = \mathcal{C}^{k+1}$$

Corollario 1 Siano $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continua e $x_0 \in \mathrm{I}$. Allora **l'unica primitiva** F di f t.c. $F(x_0) = y_0$ è data da

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

Corollazio 2 Siano $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}'$ e $x_0 \in \mathrm{I}$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

10.3 Calcolo di integrali mediante primitivazione

Teorema di Torricelli-Barrow

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e sia F una sua primitiva, allora

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dimostrazione

Definiamo

$$G(x) = \int_a^b f(t)\, dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Per il **TFCI**, G è una primitiva di f; inoltre

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

Poiché F è una primitiva di f, esiste $c \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x) + c$ e quindi

$$F(b) - F(a) 0\, (G(b) - c) - (G(b) - c) - (G(a) - c) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$