CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Prova d'esame – 27 giugno 2013

TEMA I

Due punti materiali con masse m_1 e m_2 sono vincolati (senza attrito) a muoversi, rispettivamente, su una circonferenza di raggio 1, centrata nell'origine e posta nel piano xy, e su una circonferenza pure di raggio 1 e centrata nell'origine, ma posta nel piano yz (rispetto a una terna di assi ortogonali). Sul sistema non agisce la forza peso, ma fra i punti agisce una forza elastica lineare di costante k. Scrivere la Lagrangiana del sistema, indicare eventuali integrali primi, determinare tutte le configurazioni di equilibrio e verificarne la stabilità. *Facoltativo:* calcolare le frequenze caratteristiche per le piccole oscillazioni del sistema introno alle configurazioni di equilibrio stabile.

SOLUZIONE

Lo spazio delle configurazioni del sistema è $T^2 \equiv S^1 \times S^1$. Scelta la seguente parametrizzazione:

$$\begin{cases} x_1 &= \sin(\theta_1) \\ y_1 &= \cos(\theta_1) \\ z_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ y_2 &= \cos(\theta_2) \\ z_2 &= \sin(\theta_2) \end{cases}$$

si trova facilmente

$$\begin{aligned} L =& \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \\ &- \frac{k}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right) \\ =& \frac{m_1}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\theta}_2^2 - k\left(1 - \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\right) \end{aligned}$$

Poiché la Lagrangiana è indipendente dal tempo, l'energia totale

$$\mathcal{H} = \frac{m_1}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\theta}_2^2 - k\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)$$

(definita a meno di una costante additiva) è un integrale primo.

I punti di stazionarietà del potenziale sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \theta_1} & = -k \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta_2} & = -k \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

che sono otto:
$(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi), (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$.

Supponiamo che la costante k sia positiva (forza attrattiva). Le configurazioni $(0,0)$ e (π,π) sono quelle in cui i due punti hanno la stessa posizione, e la molla ha lunghezza nulla. Questi sono i due minimi assoluti dell'energia potenziale $V = -U$, e corrispondono quindi a configurazioni di equilibrio stabile. Nelle due configurazioni $(0,\pi)$ e $(\pi,0)$ i punti sono in posizioni diametralmente opposte e la molla ha la lunghezza massima: sono quindi massimi assoluti dell'energia potenziale, e sono di equilibrio instabile. Negli altri quattro punti, la matrice hessiana del potenziale $U(\theta_1,\theta_2) = k\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)$, che è

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_i \theta_j} = k \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \end{pmatrix},$$

risulta avere traccia nulla (entrambi gli elementi diagonali si annullano), quindi gli autovalori hanno segno opposto: si tratta dunque di punti a sella del potenziale, e l'equilibrio è instabile. Nei due punti di equilibrio stabile la matrice hessiana del potenziale è

$$\begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

quindi l'equazione caratteristica è

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{k}{m_1} + \omega^2 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{m_2} + \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

da cui si ricavano le pulsazioni caratteristiche $\omega_{(i)} = \sqrt{\frac{k}{m_i}}$.

(Da notare che erano possibili altre scelte per le coordinate lagrangiane. In tutti i casi, le configurazioni di equilibrio sono otto, e sono stabili solo le due in cui i due punti materiali sono sovrapposti. Tutte le restanti configurazioni di equilibrio sono instabili: quelle in cui i punti sono diametralmente opposti sono minimi del potenziale, le altre quattro sono punti di sella. Nel caso $k < 0$ diventano invece stabili le due configurazioni con i punti opposti e instabili quelle con i punti coincidenti: le restanti quattro sono instabili in tutti i casi)

TEMA II

Un osservatore misura in un dato punto dello spazio-tempo un campo elettrico non nullo con componenti E_x, E_y, E_z, e un campo magnetico nullo. Calcolare le componenti di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$, nello stesso punto, viste da un secondo osservatore connesso al primo da un *boost* nella direzione x con rapidità θ.

SOLUZIONE

Il tensore elettomagnetico, in generale, ha le componenti

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice di Lorentz che rappresenta un *boost* in direzione x^1 ha la forma seguente:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) & 0 & 0 \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le componenti del tensore elettromagnetico nelle coordinate trasformate saranno date da

$$F' = \Lambda^T F \Lambda$$

Nel caso proposto ($\vec{B} = 0$ per il primo osservatore), partendo dalla matrice

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c}E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c}E_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene (ricordando che $\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) \equiv 1$)

$$F' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y\cosh(\theta) & \frac{1}{c}E_z\cosh(\theta) \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & \frac{1}{c}E_y\sinh(\theta) & \frac{1}{c}E_z\sinh(\theta) \\ -\frac{1}{c}E_y\cosh(\theta) & -\frac{1}{c}E_y\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c}E_z\cosh(\theta) & -\frac{1}{c}E_z\sinh(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che, per confronto con la forma generale, fornisce le componenti di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$ per il secondo osservatore.

TEMA III

Si consideri in $T^*\mathbb{R}$ la trasformazione canonica dipendente dal tempo generata dalla funzione $S(q,Q,t) = e^{-t}qQ$. Se l'Hamiltoniana di un sistema nelle coordinate (q,p) è $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$, scrivere l'Hamiltoniana K del sistema trasformato nelle variabili (Q,P).

SOLUZIONE

La condizione sulle forme di Poincaré-Cartan è in questo caso

$$(pdq - Hdt) - (PdQ - Kdt) = dS = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial Q}dQ + \frac{\partial S}{\partial t}dt.$$

da cui:

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = e^{-t}Q \\ P = -\dfrac{\partial S}{\partial Q} = -e^{-t}q \quad \Rightarrow \quad q = -e^{t}P \\ K = H + \dfrac{\partial S}{\partial t} \end{cases}$$

quindi

$$K(Q,P,t) = \frac{1}{2}(e^{-2t}Q^2 + \omega^2 e^{2t}P^2) + QP$$