Simulazione 10 - calcoli

Serie
Si consideri la serie di potenze in campo complesso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{3^n+1}\left(\frac{z-3}{2}\right)^n .$$

1. Raggio di convergenza
Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{i^{n+1}}{3^{n+1}+1}\,\frac{3^n+1}{i^n}\right| = \frac{1}{3} = L.$$

Quindi $R = \frac{1}{L} = 3$. Il centro della serie $z = 3$, qindi il disco di convergenza è

$$D_3(3) = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 3\}.$$

2. Convergenza in $z = 4$ e in $z = 3 + 3i$.
In $z = 4$ la serie converge assolutamente e quindi semplicemente in quanto $4 \in D_3(3)$. Il punto $z = 3+3i$ si trova sul bordo del disco di convergenza, quindi studiamo la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{3^n+1}\left(\frac{3i}{2}\right)^n . \tag{1}$$

Essendo $\left|\frac{(2i)^n}{3^n+1}\left(\frac{3i}{2}\right)^n\right| = \frac{3^n}{3^n+1} \to 1, \quad n \to +\infty$, la serie in $z = 3+3i$ non converge.

3. Convergenza semplice e assoluta.
Il teorema del disco di convergenza asserisce che gli insiemi di convergenza semplice, I_s, e assoluta, I_a, soddisfano le inclusioni

$$D_3(3) \subseteq I_a \subseteq I_s \subseteq \overline{D_3(3)}.$$

Studiamo il comportamento della serie nei punti del bordo $\partial D_3(3)$, ovvero in $z_\vartheta = 3 + 3e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{3^n+1}\left(\frac{z_\vartheta-3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{3^n+1}\left(\frac{3e^{i\vartheta}}{2}\right)^n .$$

Come al punto precedente, essendo $\left|\frac{(2i)^n}{3^n+1}\left(\frac{3e^{i\vartheta}}{2}\right)^n\right| = \frac{3^n}{3^n+1} \to 1, \quad n \to +\infty$, la serie in z_ϑ non converge, per ogni valore di $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Concludiamo quindi che $D_3(3) = I_a = I_s$.

Campo
Si consideri la forma differenziale

$$dF_a(x,y) = \frac{ax^2y}{x^6+y^2}\,dx - \frac{x^3}{x^6+y^2}\,dy$$

dove a un parametro reale.

1. Dominio della forma.
La forma è definita su tutto il piano tranne l'origine. Il dominio è quindi connesso, ma non semplicemente connesso. L'insieme non è nemmeno compatto, né stellato.

2. Per quali valori di a la forma è chiusa.
La forma è chiusa se è verificata la seguente condizione

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{ax^2y}{x^6+y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^3}{x^6+y^2}\right)$$

ovvero se e solo se

$$ax^2(x^6+y^2) - 2ax^2y^2 = -3x^2(x^6+y^2) + 6x^8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 3.$$

3. Detta γ la curva parametrica di equazioni $\gamma(t) = \left(\sqrt[3]{\cos t}, \sin t\right)$ con $t \in [0, 2\pi]$, per quali valori di a l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma dF_a$ si annulla.
Essendo

$$\gamma'(t) = \left(\frac{-\sin t}{3\cos^{2/3} t}, \cos t\right)$$

abbiamo che

$$\int_\gamma dF_a = \int_0^{2\pi} dF_a(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a}{3}\sin^2 t - \cos^2 t\right) dt = \left(1 - \frac{a}{3}\right)\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt$$

quindi

$$\int_\gamma dF_a = -\left(1 + \frac{a}{3}\right)\pi.$$

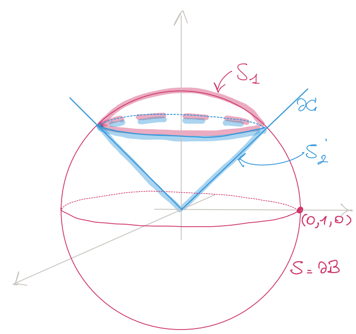
L'integrale è quindi nullo se e solo se $a = -3$.

4. Per quali valori di a la forma è esatta.
Condizione necessaria per essere esatta è che la forma si achiusa, quindi la forma sarà esatta al più quando $a = 3$. D'altra parte in questo caso la circuitazione lungo γ non è nulla. Non esistono quindi valori del parametro per i quali la forma esatta.

5. Esattezza della forma sul semipiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$
Il semipiano è un dominio semplicemente connesso pertanto in questo caso la forma è esatta se e solo se è chiusa, ovvero se e solo se $a = 3$.

Flusso
Siano:

- $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ la palla unitaria chiusa 3-dimensionale e $S = \partial B$ la sfera unitaria,
- $C = \{(x,y,z) \in B | z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$,
- S_1 la calotta sferica data dall'intersezione di C con S, orientata con normale esterna alla sfera,
- S_2 la porzione della frontiera di C contenuta in B e orientata con normale uscente da C,
- $F(x,y,z) = (3xz^2, xz+y^3, 3x^2z)$.



1. Area di S_1.
Parametrizziamo S_1 in coordinate sferiche ($r=1$)

$$\Phi(\vartheta,\varphi) = \begin{cases} x = \sin\vartheta\cos\varphi \\ y = \sin\vartheta\sin\varphi \\ z = \cos\vartheta \end{cases} \qquad \text{con } \vartheta \in [0,\pi/4],\ \varphi \in [0,2\pi].$$

Si ha quindi, essendo $|\Phi_\vartheta \wedge \Phi_\varphi| = |\sin\vartheta| = \sin\vartheta$,

$$\text{Area}(S_1) = \int_0^{\pi/4} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi - \pi\sqrt{2}.$$

2. Area di S_2.
Parametrizziamo S_2 come superficie cartesiana, ovvero

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} x \\ y \\ \varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \text{con } (x,y) \in D = \left\{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Calcoliamo quindi

$$|\Phi_x \wedge \Phi_y| = \left|\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)\right| = \sqrt{2}$$

da cui

$$\text{Area}(S_2) = \int_D |\Phi_x \wedge \Phi_y|\, dxdy = \sqrt{2}\frac{\pi}{2}.$$

3. Flusso del rotore di F attraverso S_1
Usiamo il teorema di Stokes:

$$\int_{S_1} (\mathrm{rot} F) \cdot N \, d\sigma = \int_\Gamma F \cdot ds$$

dove Γ è la circonferenza di parametrizzazione

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{3}{4} \sin t \cos t + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos^2 t + \frac{1}{4} \sin^3 t \cos t \right] dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4. Flusso del rotore di F attraverso S_2
Poiché il bordo di $S-1$ ed S_2 è lo stesso, ma orientato in verso opposto, il teorema di Stokes garantisce che il flusso è opposto al flusso calcolato al punto precedente, ovvero vale $-\pi/2$.

5. Flusso di F uscente da C
Il flusso da calcolare vale

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = \int_C (\mathrm{div} F) \, dxdydz = 3 \int_C (x^2 + y^2 + z^2) \, dxdydz;$$

utilizzando le coordinate sferiche otteniamo

$$\int_{\partial C} F \cdot N \, d\sigma = 3 \int_0^1 r^4 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{6\pi}{5} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Curva
Si considerino le curve piane

$$\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2) \cup (-\gamma_3) \cup \gamma_4 \quad e \quad \tilde{\gamma} = \gamma_3 \cup \gamma_2 \cup (-\gamma_1)$$

dove

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = \left(t, -t^2 + 1\right), \quad t \in [-1, 1], \\ \gamma_2(t) = \left(\sqrt{1 - t^2}, t\right), \quad t \in [-1, 0], \\ \gamma_3(t) = (t, -t - 1), \quad t \in [-1, 0], \\ \gamma_4(t) = (t, 0), \quad t \in [-1, 1]. \end{cases}$$

1. Caratteristiche della curva γ.
γ non è una curva chiusa, infatti $\gamma_1(-1) = (-1, 0) \neq (1, 0) = \gamma_4(1)$. γ non è nemmeno una curva semplice, infatti $\gamma_1(-1) = (-1, 0) = -\gamma_3(-1)$. Inoltre γ passa per l'origine.

2. Caratteristiche della curva $\tilde{\gamma}$.
Banalmente si verifica che la curva è sia chiusa che semplice.

3. Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} (-y\,dx + x^2\,dy)$
Usando la proprietà additiva dell'integrale abbiamo

$$\int_{\tilde{\gamma}} (-y\,dx + x^2\,dy) = \int_{\gamma_3} \ldots + \int_{\gamma_2} \ldots - \int_{\gamma_1} \ldots .$$

Inoltre, al fine del calcolo è utile riparametrizzare γ_2 (arco di circonferenza unitaria) nel modo seguente

$$\gamma_2(\vartheta) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta), \quad \vartheta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

Essendo

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) = (1, -2t), \quad t \in [-1, 1] \\ \gamma_2'(t) = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta), \quad \vartheta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ \gamma_3'(t) = (1, -1), \quad t \in [-1, 1], \end{cases}$$

otteniamo

$$\int_{\gamma_1} \ldots = \int_{-1}^{1} \left[(t^2 - 1) \cdot 1 + t^2 \cdot (-2t)\right]\,dt = -\frac{4}{3},$$

$$\int_{\gamma_2} \ldots = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \left[-\sin\vartheta(-\sin\vartheta) + \cos^3\vartheta\right]\,d\vartheta = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \left[\sin^2\vartheta + \cos\vartheta(1 - \sin^2\vartheta)\right]\,d\vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3},$$

$$\int_{\gamma_3} \ldots = \int_{-1}^{0} \left(t + 1 - t^2\right)\,dt = \frac{1}{6},$$

concludendo che l'integrale richiesto vale $\frac{\pi}{4} + \frac{13}{6}$.