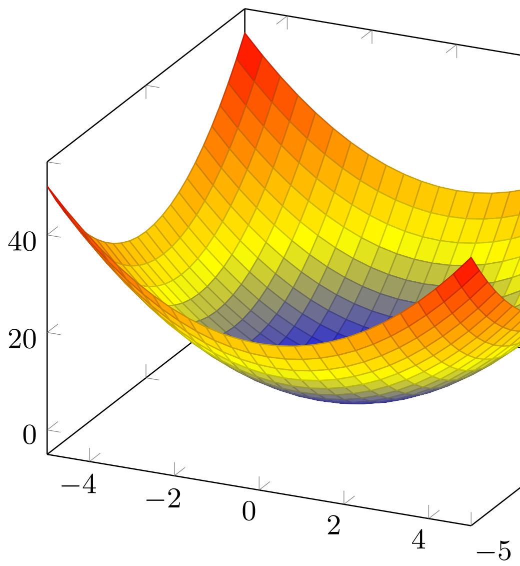
Analisi II

Riassunto da: *"Analisi Matematica 2 - Claudio Canuto, Anita Tabacco"*

Dispensa realizzata da *Federico Cesari* e *Matteo Herz*



Corso di Laurea in Fisica - Corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Settembre 2024

Indice

1 Serie numeriche

Sia $a_n \subset \mathbb{C}$ successione di numeri complessi, chiamiamo **serie numerica** la sommatoria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_n + \ldots$$

Chiamiamo invece **ridotta ennesima** della serie la quantità

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_1 + \cdots + a_N \qquad N \in \mathbb{N}$$

Abbiamo costruito la **successione delle ridotte** S_N con $N \in \mathbb{N}$.

1.1 Successioni di numeri complessi

Definizione: Serie convergente divergente e indeterminata

Se il limite

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S \in \mathbb{C}$$

diciamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

converge ad S e chiamiamo S somma della serie.

Nel caso in cui S_N sia divergente o indeterminata la serie è divergente o indeterminata.

1.2 Carattere di una serie

Si osserva che preso $n_0 \in \mathbb{N}$ e considerando la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \text{questa ha lo stesso carattere di} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Chiaramente la somma sarà diversa, il carattere tuttavia non cambia.

Teorema: Condizione necessaria di convergenza

Sia $a_n \subset \mathbb{C}$. Condizione necessaria affinché la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converga è che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione

Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} S_N = S \in \mathbb{C} \qquad a_n = S_n - S_{n-1}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$$

Teorema: "Linearità delle serie"

Prendiamo due serie di numeri complessi convergenti rispettivamente ad A e a B:

$$sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \qquad sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$$

allora

$$i) \qquad \forall \, \lambda \in \mathbb{C} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lambda A$$

$$ii) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = A + B$$

1.3 Serie geometrica, serie telescopiche e armoniche

Serie geometrica

Fissato $q \in \mathbb{C}$ si dice **serie geometrica** di ragione q la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

il carattere è determinato da q:

$\lvert q \rvert < 1$	la serie converge
$\lvert q \rvert > 1$ o $q = 1$	la serie diverge
$\lvert q \rvert = 1$ e $q \neq 1$	la serie è indeterminata

Dimostrazione

1. $|q| < 1$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Verifichiamo che S_N sia effettivamente uguale a quanto scritto:

$$\begin{aligned} (1-q) \sum_{n=0}^{N} q^n &= \sum_{n=0}^{N} q^n \; - \; q \sum_{n=0}^{N} q^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} q^n \; - \; \sum_{n=0}^{N} q^{n+1} \\ &= 1 \; - \; q^{N+1} \end{aligned}$$

Allora:

$$|q^{N+1}| = |q|^{N+1} \to 0 \;\; \text{per} \;\; N \to +\infty$$

$$\implies \lim_{N \to \infty} q^{N+1} = 0$$

Dunque:

$$\lim_{n\to\infty} S_N \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \;=\; \frac{1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^{N+1}) \;=\; \frac{1}{1-q}$$

2. $|q| > 1$

   Usando la disuguaglianza triangolare inversa si ha:

$$|S_N| = \left|\frac{1-q^{N+1}}{1-q}\right| = \frac{|1-q^{N+1}|}{|1-q|} \geq \frac{|1|-|q^{N+1}|}{|1-q|}$$

   Da cui segue:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{|1|-|q^{N+1}|}{|1-q|} &= \frac{1}{|1-q|}\lim_{N\to\infty}\left|1-|q|^{N+1}\right| \\ &= \frac{1}{|1-q|}\left|1-\lim_{N\to\infty}|q|^{N+1}\right| \\ &= +\infty\end{aligned}$$

3. $q = 1$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 1 = 1+1+...+1 = N+1$$

$$\implies \quad \lim_{N\to\infty} S_N = +\infty \quad \implies \quad \text{La serie è divergente}$$

Serie telescopiche

Chiamiamo **serie telescopiche** le seguenti le serie di forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) \qquad a_n \subset \mathbb{C}$$

alcuni esempi di serie telescopiche

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$ *ii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

Serie armonica

Prende il nome di **serie armonica generalizzata**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$$

Il carattere è terminato da a:

$$\begin{array}{ll} a \leq 1 & \text{la serie diverge} \\ a > 1 & \text{la serie converge}\end{array}$$

Mostriamo perché la serie con $a = 1$ diverge:

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad n\to\infty$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}, \quad n\to\infty$$

$$\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ diverge} \quad \implies \quad \sum\frac{1}{n} \text{ diverge per il criterio del confronto asintotico.}$$

Dimostrazione

1. $a \leq 1$ con $a \in \mathbb{R}$ così che valga $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{serie armonica divergente}$$

   quindi per il criterio del confronto, essendo maggiore di una serie divergente, diverge anche la serie $\sum \frac{1}{n^a}$.

2. $a > 1$

   In generale vale:

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

   Allora:

$$S_n = \sum_{n=2}^{n} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^{\alpha}} \leq \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

   Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx &= \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^{\infty} \\ &= \left[\frac{1}{(-\alpha+1)x^{\alpha-1}} \right]_1^{\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha-1} < \infty \end{aligned}$$

   $\{S_n\}$ è monotona crescente e superiormente limitata $\implies$ la serie converge

1.4 Serie a termini non negativie a segni alterni

$$\text{Termini non negativi} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Segni alterni} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad b_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema: Le serie a termini non negativi o convergono o divergono

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi, questa può o convergere o divergere, non può essere indeterminata.

Dimostrazione

Prendo $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ **monotona crescente**:

$$S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N$$

Se il limite converge a S limite superiore

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S \in [0,+\infty) \qquad S = \sup\ _{N\in\mathbb{N}} S_N$$

$$\implies \text{La serie converge}$$

Se $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata si ha

$$\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$$

$$\implies \text{La serie diverge}$$

Definizione: Convergenza assoluta

Sata una serie di numeri complessi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}$ si dice che la serie è **assolutamente convergente** se è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Teorema: Convergenza assoluta implica convergenza semplice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \subset \mathbb{C}$. Supponiamo che la serie sia assolutamente convergente, allora la serie è anche semplicemente convergente. Inoltre vale

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

1.5 Criteri applicabili alle serie

Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi.
Supponiamo che esiste finito $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_n \leq b_n \quad , \quad \forall n \geq n_0$$

Allora:

1) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è convergente $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente

2) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente $\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è divergente

Dimostrazione

Non è restrittivo supporre $n_0 = 0$.

1) $S_N \quad = \quad \sum_{n=0}^{N} a_n \quad \leq \quad \sum_{n=0}^{N} b_n \quad \leq \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad < \quad \infty$

S_N è una successione monotona crescente superiormente limitata $\Longrightarrow$ è convergente

2) Per **contraddizione**, supponiamo che:

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converga $\Longrightarrow$ per il punto 1) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dovrebbe convergere.
Abbiamo ottenuto una contraddizione.

Dunque:

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ diverge.}$$

Criterio del confronto asintotico

Criterio della radice

Sia $\sum a_n$ serie a termini positivi. Supponiamo che esista

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim a_n^{1/n} = l \in [0, +\infty]$$

allora

$$\begin{array}{ll} l < 1 & \text{la serie converge} \\ l > 1 & \text{la serie diverge} \\ l = 1 & \text{caso dubbio} \end{array}$$

Criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$ serie a termini positivi. Supponiamo $a_n > 0 \forall n$ e che esista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

allora

$$\begin{array}{ll} l < 1 & \text{la serie converge} \\ l > 1 & \text{la serie diverge} \\ l = 1 & \text{caso dubbio} \end{array}$$

Criterio dell'integrale di Mc. Laurin

Criterio di Leibniz

Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n > 0 \forall n$. Supponiamo

$$\begin{array}{llll} 1) & b_{n+1} \leq b_n & \forall n & \text{(la serie è decrescente)} \\ 2) & \lim_{n\to\infty} b_n = 0 & & \end{array}$$

Allora la serie converge a

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$$

e $|S - S_N| \leq b_{N+1} \quad \forall N \in \mathbb{N}$.

1.6 Procedimento per la risoluzione degli esercizi

1. Verificare la condizione necessaria di convergenza
2. Se è a **valori non negativi**:
   (a) Tramite confronto e confronto asintotico verificare se questa converge o diverge.
3. Se è a **segni alterni**:
   (a) Ne studio il modulo;
   (b) Tramite confronto e confronto asintotico verificare se questa converge o diverge assolutamente;
   (c) Se diverge uso il **criterio di Leibniz**;
   (d) Verifico che sia strettamente decrescente;
   (e) Se lo è la serie è semplicemente convergente.

2 Topologia di $\mathbb{R}^n$

Questa sezione contiene solo definizioni, non sto a distinguerle con il riquadro colorato.

Intorno

Si dice **intorno sferico** di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ l'insieme

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad d(x, x_0) = |x - x_0| < r\}$$

La distanza dalle due dimensioni in poi chiaramente è espressa come

$$d(x, x_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \dots}$$

Punto di accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dice **punto di accumulazione** per A se

$$\forall r > 0 \qquad (B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing$$

In sostanza è un punto di accumulazione se ogni suo intorno contiene punti di A diversi da se stesso

Insieme limitato

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se

$$\exists M > 0 \quad | \quad \|x\| \leq M, \quad \forall x \in A$$

$$A \subseteq \overline{B(O, M)} \quad \text{con} \quad B(O, M) = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad \|x\| \leq M\}$$

Insieme aperto

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in A \quad \exists r > 0 \quad | \quad B(x_o, r) \subset A$$

- $\mathbb{R}^n$ è un insieme aperto;
- L'intersezione di qualunque famigia di un chiuso è un aperto,
- L'unione di un numero finito di chiusi è un aperto.

Insieme chiuso

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **chiuso** se il suo complementare $\mathbb{R}^n \backslash C$ è un aperto.

- Sono chiusi gli insiemi $\mathbb{R}^n$ e $\varnothing$;
- l'intersezione di qualunque famigia di un chiuso è un chiuso;
- l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso.

Insieme compatto

Un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^n$ è detto **compatto** se è chiuso e limitato.

Putni interni, esterni e di frontiera

$$\text{Interno:} \qquad \exists r > 0 \quad | \quad B(x_0, r) \subset A$$

$$\text{Interno:} \qquad \exists r > 0 \quad | \quad B(x_0, r) \cap A = \varnothing$$

Se x_0 non è né interno né esterno è un putno di frontiera.

- $Int(A)$ è un aperto ed è il più grande aperto contenuto in A;
- $Int(A) \cap Fr(A)$ è un chiuso ed è il più piccolo chiuso contenente A e viene denotato con $\bar{A}$;
- $Fr(A)$ è un chiuso;
- A è chiuso $\iff A = Int(A)$;

3 Limiti di funzioni in più variabili

Definizione: Limite di funzione a più variabili

Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A.

Diciamo che $l \in \mathbb{R}^m$ è limite di F per $x \to x_0$ e scriviamo $\lim_{x \to x_0} F(x) = l$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \,,\ \exists\, \delta > 0 \ \mid\ \forall\, x \in A \,,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|F(x) - l\| < \epsilon$$

Teorema: Equivalenza tra limite globale e limite componente per componente

Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A ed $F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$.

Allora, preso $l \in \mathbb{R}^m$ si ha:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = l \iff \lim_{x \to x_0} F_j(x) = l_j \quad \forall\, j = 1, ..., m$$

Dimostrazione

- $\Longrightarrow$ Supponiamo $\lim_{x \to x_0} F(x) = l$, allora:

$$\forall\, \epsilon > 0 \,,\ \exists\, \delta > 0 \ \mid\ \forall\, x \in A \,,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|F(x) - l\| < \epsilon$$

Segue che:

$$|F_j(x) - l_j| = \sqrt{(F_j(x) - l_j)^2} \le \sqrt{(F_j(x) - l_j)^2 + ... + (F_m(x) - l_m)^2} = \|F(x) - l\| < \epsilon$$

$$\forall\, j = 1, ..., m$$

$$\Longrightarrow |F_j(x) - l_j| < \epsilon \,, \quad \forall\, x \in A \mid 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

- $\Longleftarrow$ Supponiamo $\lim_{x \to x_0} F_j(x) = l_j$, $\forall\, j = 1, ..., m$

$$\forall\, \epsilon > 0 \,,\ \exists\, \delta > 0 \ \mid\ \forall\, x \in A \,,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|F_j(x) - l_j\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \quad \forall\, j = 1, ..., m$$

Dove abbiamo preso arbitrariamente $\epsilon = \dfrac{\epsilon}{\sqrt{m}}$

$$\|F(x) - l\|^2 = (F_1(x) - l_1)^2 + ... + (F_m(x) - l_m)^2 < \frac{\epsilon^2}{m} + ... + \frac{\epsilon^2}{m} = \epsilon^2$$

$$\forall\, x \in A \ \mid\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \quad \text{dove} \quad \delta = min\{\delta_1, ..., \delta_m\}$$

Quindi:

$$\|F(x) - l\| < \epsilon$$

Punto all'infinito In dimensioni maggiori di 1 non si può più distinguere tra $+\infty$ e $-\infty$, allora si parla solo di **punto all'infinito**

3.1 Utilizzo delle curve

Proprietà

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A. Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = l$$

Allora presa una qualunque curva passante per x_0 e con sostegno in $A \cup \{\boldsymbol{x_0}\}$, ovvero

$$\boldsymbol{\gamma} : I \to A \cup \{\boldsymbol{x_0}\} \text{ t.c. } \exists t_0 \in I, \quad \boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$$

si ha

$$\lim_{t \to t_0} f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = l$$

Corollario Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A.

1. Se esiste una curva

   $$\boldsymbol{\gamma} : I \to A \cup \{\boldsymbol{x_0}\} \text{ t.c. } \exists t_0 \in I, \quad \boldsymbol{\gamma}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$$

   e

   $$\nexists \lim_{t \to t_0} f(\boldsymbol{\gamma}(t))$$

   allora

   $$\nexists \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x})$$

2. Se esistono due curve

   $$\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2 \text{ t.c. } \boldsymbol{\gamma}_1(t_0) = \boldsymbol{\gamma}_2(t_0') = \boldsymbol{x_0}$$

   e

   $$\begin{array}{ll} \lim_{t \to t_0} f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = l_1 \\ \lim_{t \to t_0'} f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = l_2 \end{array} \quad \text{t.c.} l_1 \neq l_2$$

   allora

   $$\nexists \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x})$$

3.2 Punti stazionari per campi scalari e vettoriali

Teorema di Weierstraß

Sia $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $k \neq \varnothing$ e compatto.
Se f è continua su K allora ammette un massimo su K.

Definizione: Continuità

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e sia $\boldsymbol{x_0} \in A$.
f si dice continua in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad \forall \boldsymbol{x_0} \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})\| < \varepsilon$$

Inoltre se $\boldsymbol{x_0} \in A$ è punto di accumulazione per A, allora dalla definizione di limite otteniamo

$$f \text{ continua in } \boldsymbol{x_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0})$$

Definizione: Uniformemente continua

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f si dice uniformemente continua su A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad \forall x, y \in A, \quad \|x - y\| < \delta$$

allora

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Vale

$$f \text{ unif. cont. su } A \Longleftrightarrow f \text{ continua su } A$$

Definizione: Punto stazionario

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n, A$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{C}^1(A)$. Sia $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$. Si dice che $\bar{\boldsymbol{x}}$ è un punto stazionario (o critico) se:

$$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$$

Definizione: Massimi e Minimi

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A sottoinsieme qualunque. Si dice che $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$ è:

1. Punto di minimo locale per f se: $\exists\, r > 0 \mid f(x) \geq f(\bar{\boldsymbol{x}}), \forall\, x \in B(\bar{\boldsymbol{x}}, r) \cap Dom\, f$
2. Punto di minimo locale per f se: $\exists\, r > 0 \mid f(x) \leq f(\bar{\boldsymbol{x}}), \forall\, x \in B(\bar{\boldsymbol{x}}, r) \cap Dom\, f$

In particolare, se la condizione 1) o 2) valgono $\forall\, x \in Dom\, f \implies \bar{\boldsymbol{x}}$ si dice punto di minimo/massimo globale per f.

Definizione: Punti di sella

Sia A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{C}^1(A)$. Se $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$ è un punto stazionario ($\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$) e non è un punto di massimo o di minimo locale, allora si dice punto di sella.

Teorema di Fermat

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^1(A)$.
Se $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$ è un punto di minimo/massimo locale, allora

$$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$$

$\bar{\boldsymbol{x}}$ è un punto stazionario.

Dimostrazione

Ci riconduciamo al teorema di Fermat per funzioni di una variabile.
Sia $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ punto di minimo locale:

$$\exists\, r > 0 \quad | \quad B(\bar{\boldsymbol{x}}, r) \subset A \quad \text{e} \quad f(\boldsymbol{x}) \geq f(\bar{\boldsymbol{x}}), \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in B(\bar{\boldsymbol{x}}, r)$$

quindi si può dire anche che

$$x = \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h} \quad \iff \quad f(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}) \geq f(\bar{\boldsymbol{x}}), \qquad \forall\, \boldsymbol{h} \text{ t.c. } \|\boldsymbol{h}\| < r$$

Definiamo ora una funzione g

$$g(x_1) = f(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

Se $\boxed{n = 2}$

$$g : (\bar{x}_1 - r, \bar{x}_1 + r) \to \mathbb{R}$$

$$g \in \mathcal{C}^1((\bar{x}_1 - r, \bar{x}_1 + r)) \quad \forall\, \boldsymbol{h} = (h_1, 0, 0, \dots, 0) \text{ t.c. } \|\boldsymbol{h}\| < r$$

Vale

$$g(\bar{x}_1 + h_1) = f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \geq f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = g(\bar{x}_1)$$

quindi

$$g(\bar{x}_1 + h_1) \geq g(\bar{x}_1), \qquad \forall\, h_1 \text{ t.c. } |h_1| < r$$

e $\bar{x}_1$ è un punto di minimo locale per g.

$$\implies \text{per il teorema di Fermat in dimensione } n = 1,\ g'(\bar{x}_1) = 0$$

$$g'(\bar{x}_1) = \partial_{x_1} f(\bar{x}_1) \quad \implies \quad \partial_{x_1} f(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$$

In maniera analoga lo si prova per $\partial_{x_i} f(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad \forall\, i = 2, \dots, n$

$$\implies \quad \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$$

ovvero $\bar{\boldsymbol{x}}$ è punto stazionario.

Teorema: Condizione necessaria per essere min/max locale

Sia $A \in \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^2(A)$ e $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$ punto stazionario.

1. Se $\bar{\boldsymbol{x}}$ è un punto di minimo locale allora $Hf(\bar{\boldsymbol{x}})$ è semidefinita positiva;
2. Se $\bar{\boldsymbol{x}}$ è un punto di massimo locale allora $Hf(\bar{\boldsymbol{x}})$ è semidefinita negativa

Dimostrazione

Mostriamo il caso 1), il caso 2) è analogo.
Per ipotesi il punto $\bar{\boldsymbol{x}}$ è un punto di minimo locale, quindi:

$$\exists r > 0 \quad | \quad B(\bar{\boldsymbol{x}}, r) \subset A \quad \text{e} \quad f(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}) \geq f(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad \forall \boldsymbol{h} \quad | \quad \|\boldsymbol{h}\| < r$$

Sia λ un qualunque autovalore di $Hf(\bar{\boldsymbol{x}})$ e sia $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ un suo autovettore.
Scriviamo la formula di Taylor al 2° ordine per $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{v}$. Prima di tutto sappiamo che

$$\|\boldsymbol{h}\| = \|t\boldsymbol{v}\| = |t|\|\boldsymbol{v}\| < r \qquad \text{quindi} \qquad |t| < \frac{r}{\|v\|}$$

la formula di Taylor sarà

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{v}) = f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot (t\boldsymbol{v}) + \frac{1}{2} Hf(\bar{\boldsymbol{x}})(t\boldsymbol{v}) \cdot (t\boldsymbol{v}) + o(\|t\boldsymbol{v}\|^2), \qquad t \to 0$$

Riscriviamo l'o-piccolo come

$$o(\|t\boldsymbol{v}\|^2) = o(t^2\|\boldsymbol{v}\|^2) = o(t^2), \qquad t \to 0$$

e il secondo termine dello sviluppo come

$$\begin{aligned} Hf(\bar{\boldsymbol{x}})(t\boldsymbol{v}) \cdot (t\boldsymbol{v}) =& t^2 Hf(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \\ =& t^2 \lambda \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \\ =& \lambda t^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 \end{aligned}$$

Quindi lo sviluppo di Taylor si può riscrivere come

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{v}) = f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \frac{\lambda}{2} t^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 + o(t^2), \qquad t \to 0$$

portando $f(\bar{\boldsymbol{x}})$ a sinistra e raccogliendo t^2 si ha

$$0 \leq f(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{v}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) = t^2 \left(\frac{\lambda}{2} \|\boldsymbol{v}\|^2 + o(1) \right), \qquad t \to 0$$

da cui troviamo che λ deve essere positivo

$$\Longrightarrow \quad \lambda \geq 0$$

$$\left(\exists t_0 \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall t \quad | \quad |t| < t_0 \quad |o(1)| < \frac{\lambda}{4} \|\boldsymbol{v}\|^2 \right)$$

Teorema: Condizioni Sufficienti

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \subseteq \mathbb{C}^2(A)$.
Sia $x_0 \in A$ un punto stazionario di f ($\nabla f(x_0) = 0$. Allora:

1. Se $Hf(x_0)$ è **definita positiva** $\implies$ x_0 è un punto di **minimo** relativo (stretto).
2. Se $Hf(x_0)$ è **definita negativa** $\implies$ x_0 è un punto di **massimo** relativo (stretto).
3. Se $Hf(x_0)$ è **indefinita** $\implies$ x_0 è un **punto di sella**.

Dimostrazione

1. Sia $x_0 \in A$, siccome $f \in \mathbb{C}^2$ posso usare lo sviluppo di Taylor:

$$f(x_0+h) - f(x_0) \;=\; \nabla f(x_0)\cdot h \;+\; \frac{1}{2}Hf(x_0)h\cdot h \;+\; o(\|h\|^2)$$

Essendo A aperto $\exists\, B(x_0, r) \subset A$ e $\forall\, h \in B(x_0, r)$.

Siccome x_0 è stazionario so che $\nabla f(x_0) = 0$.

Per ipotesi so anche che $Hf(x_0)$ è definita positiva, allora, detto λ_{min} il più piccolo degli autovalori di $Hf(x_0)$, si ha che $\lambda_{min} > 0$ e vale $Hf(x_0)h \cdot h \geq \lambda_{min}\|h\|^2 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$.

Allora

$$f(x_0+h) - f(x_0) \;\geq\; \frac{1}{2}\lambda_{min}\|h\|^2 \;+\; o(\|h\|^2)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) \;\geq\; \frac{1}{2}\|h\|^2\left(\lambda_{min} \;+\; \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}\right)$$

Sia

$$0 < r' \leq r \quad t.c. \quad \left|\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}\right| \leq \frac{\lambda_{min}}{4} \quad \forall\, h \;\; t.c. \;\; \|h\| \;\leq r'$$

Dunque

$$f(x_0+h) - f(x_0) \;\geq\; \frac{1}{2}\|h\|^2\left(\lambda_{min} \;-\; \frac{\lambda_{min}}{4}\right) \geq \frac{3}{8}\|h\|^2\lambda_{min} \quad \forall\, h \;\; t.c. \;\; \|h\| \;\leq r'$$

Se poi $h \neq 0$ e $\|h\| \;\leq r'$

$$\implies f(x_0+h) - f(x_0) > 0$$

2. Analogo al caso (1), ma con segni inversi. Non svolto a lezione.

3. $Hf(x_0)$ indefinita, x_0 punto stazionario.

Se per assurdo x_0 fosse un punto di minimo relativo per f allora $Hf(x_0)$ sarebbe semidefinita positiva, contraddicendo l'ipotesi di partenza.

Se per assurdo x_0 fosse un punto di massimo relativo per f allora $Hf(x_0)$ sarebbe semidefinita negativa, contraddicendo l'ipotesi di partenza.

$$\implies x_0 \text{ è un punto di sella.}$$

4 Calcolo differenziale per funzioni scalari

4.1 Derivate parziali

Definizione: Derivata direzionale

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sia $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$ punto interno.
Si dice derivata parziale di f rispetto ad x_i, con $i = 1, \dots, n$, il limite, se esiste finito

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + h, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{\boldsymbol{x}})}{h}$$

Derivate direzionali

Definizione: Derivata direzionale

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sia $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$ punto interno. Fissato $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ in $\mathbb{R}^n$ si chiama derivata direzionale di f lungo la direzione del vettore $\boldsymbol{v}$ in $\bar{\boldsymbol{x}}$ il limite, se esiste finito,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{\boldsymbol{x}} + h\boldsymbol{v}) - f(\bar{\boldsymbol{x}})}{h}$$

esempio

L'esistenza delle derivate direzionali lungo una qualsiasi direzione [$v \neq (0,0)$] in un punto non implica la differenziabilità della funzione nel punto.

Esempio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Definizione: Gradiente di un campo scalare

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sia $\bar{\boldsymbol{x}} \in A$ punto interno. Si dice gradiente di f in $\bar{\boldsymbol{x}}$ il vettore:

$$\nabla_{\bar{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

Corollario Sia f differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$, allora

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \nabla_{\bar{\boldsymbol{x}}} f \cdot \boldsymbol{v}}$$

Gradiente come vettore di massima crescita Sviluppando il prodotto scalare si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \|\nabla_{\bar{\boldsymbol{x}}} f\| \|\boldsymbol{v}\| \cos\vartheta$$

si vede che la derivata direzionale è massima per $\cos\vartheta = 1$, ovvero quando $\boldsymbol{v}$ ha stessa direzione e verso di $\nabla_{\bar{\boldsymbol{x}}} f$. Quindi se $\nabla_{\bar{\boldsymbol{x}}} f \neq 0$ la direzione di massima crescita è rappresentata dal $\nabla_{\bar{\boldsymbol{x}}} f$.

Ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Supponiamo che

$$\nabla f(x,y) \neq (0,0) \quad \forall\, (x,y) \in A$$

Prendiamo anche un valore c e andiamo a considerare la curva di livello c

$$c \in Inf(A) \qquad \Sigma_c = \{(x,y) \in A \ \text{ t.c. } \ f(x,y) = c\}$$

Se $(x_0, y_0) \in \Sigma_c$ ($f(x_0, y_0) = c$) allora $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale a Σ_c in (x_0, y_0) e punta verso le curve di livello più alte.

4.2 Differenziabilità

Definizione: Differenziabilità

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{\boldsymbol{x}}$ punto interno ad A. Si dice che f è differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$ se esiste una funzione *lineare*:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{t.c.}$$

$$(D) \qquad f(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \varphi(\boldsymbol{h}) + o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$$

- $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0} \iff \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \to 0$
- φ lineare se $\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ t.c.

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{h} = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n$$

φ si dice differenziale di f in $\bar{\boldsymbol{x}}$ e si denota come $d_{\bar{\boldsymbol{x}}} f$.

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \varphi(\boldsymbol{h}) + o(\|\boldsymbol{h}\|) \iff \lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) - \varphi(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0$$

Teorema: differenziabilità implica esistenza della derivata direzionale

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{\boldsymbol{x}}$ punto interso ad A. Sia f differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$ e sia

$$d_{\bar{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{h}) = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n$$

Allora f ammette derivata direzionale in $\bar{\boldsymbol{x}}$ lungo ogni direzione $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{v}$$

in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \alpha_i$$

Dunque

$$d_{\bar{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\boldsymbol{x}}) h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\boldsymbol{x}}) h_n$$

Dimostrazione

Sia $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n) \neq \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{\boldsymbol{x}}+t\boldsymbol{v}) - f(\bar{\boldsymbol{x}})}{t} \\ (D) &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t\boldsymbol{v}) + o(\|t\boldsymbol{v}\|)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\varphi(\boldsymbol{v}) + o(t)}{t} \qquad (\varphi \text{ è lineare})\end{aligned}$$

Sapendo che

$$\|t\boldsymbol{v}\| = |t|\|\boldsymbol{v}\| = |t|c$$

si ha che

$$o(\|t\boldsymbol{v}\|) = o(c|t|) = o(|t|) = o(t)$$

Inoltre ricordando che in generale $\varphi(h) = \alpha \cdot h$ si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\varphi(\boldsymbol{v}) + o(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t(\alpha \cdot \boldsymbol{v})}{t} + \frac{o(t)}{t} = \alpha \cdot \boldsymbol{v}$$

Dunque in generale, prendendo $\{e_1, ..., e_n\}$ base canonica:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i} = \boldsymbol{\alpha_i}\, e_i = \boldsymbol{\alpha_i} \quad \textit{con} \quad e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$$

Allora:

$$d_{\bar{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{h_i} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\boldsymbol{x}})\, \boldsymbol{h_n}$$

Teorema: differenziabilità implica continità

Se f è differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$ punto interno al dominio di f, allora f è continua in $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Dimostrazione

Per provare che f è continua in $\bar{\boldsymbol{x}}$ dobbiamo mostrare che

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} f(\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{h}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \mathbf{0}$$

Dall'equazione di differenziabilità (D) possiamo scrivere

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} f(\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{h}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} [\varphi(\boldsymbol{h}) + o(\|\boldsymbol{h}\|)]$$

dove

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{h} \qquad \text{e} \qquad |h_i| = \sqrt{h_i^2} \leq \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} = \|\boldsymbol{h}\|$$

se $\boldsymbol{h}$ tende a zero tende a zero anche il suo modulo e quindi anche tutte le sue componenti:

$$\boldsymbol{h} \to \mathbf{0} \Longrightarrow |h_i| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h_i \to 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Il limite diventa

$$\begin{aligned}\lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} [\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|] &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} (\alpha_1 h_1 + \dots \alpha_n h_n) + \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} (o(\|\boldsymbol{h}\|) \\ &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} (\alpha_1 h_1 + \dots \alpha_n h_n) + \lim_{\boldsymbol{h}\to\mathbf{0}} \left(\frac{o(\|\boldsymbol{h}\|)}{\|\boldsymbol{h}\|}\|\boldsymbol{h}\|\right) = 0\end{aligned}$$

poiché entrambi i limiti tendono a zero.

Teorema: condizione sufficiente di differenziabilità

Sia f un campo scalare dotato di derivate parziali in un intorno di $\bar{\boldsymbol{x}}$ e tale che le derivate parziali siano continue in $\bar{\boldsymbol{x}}$. Allora f è differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Corollario Sia $f \in \mathcal{C}^1(A)$ con A aperto in $\mathbb{R}^n$. Allora f è differenziabile in ogni punto di A.

4.3 Derivate seconde

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ campo scalare, $\bar{\boldsymbol{x}} \in Int(A)$. Supponiamo che esista

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad \text{per un certo } i \in \{1, \dots, n\}$$

e supponiamo che la derivata parziale esista in un intorno di $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è derivabile rispetto a x_j in $\bar{\boldsymbol{x}}$, dove $j \in \{1, \dots, n\}$, allora diciamo che f ammette derivata seconda rispetto a x_i e x_j:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\bar{\boldsymbol{x}})$$

se $i = j$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{\boldsymbol{x}})$ $\quad$ si dice *"derivata pura"*

se $i \neq j$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{\boldsymbol{x}})$ $\quad$ si dice *"derivata mista"*

Matrice Hessiana

Definite le derivate seconde si costruisce la matrice Hessiana

$$Hf(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1 x_1} f(\bar{\boldsymbol{x}}) & \partial^2_{x_2 x_1} f(\bar{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \partial^2_{x_n x_1} f(\bar{\boldsymbol{x}}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_1 x_n} f(\bar{\boldsymbol{x}}) & \partial^2_{x_2 x_n} f(\bar{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \partial^2_{x_n x_n} f(\bar{\boldsymbol{x}}) \end{pmatrix}$$

Teorema di Schwartz

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $f \in \mathcal{C}^2$. Allora le derivate miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{\boldsymbol{x}})$$

coincidono $\forall\, i, j = 1, \dots, n$

5 Calcolo differenziale per funzioni vettoriali

5.1 Curve parametriche

Definizione: Curva parametrica

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualunque (chiuso, aperto, limitato, illimitato...). Una funzione

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^m$$

si dice curva se è **continua**.

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$$

$$\gamma_j : I \to \mathbb{R} \quad \text{campi scalari} \qquad \boldsymbol{\gamma} \ \textbf{continua} \iff \gamma_j \text{ continua} \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Definizione: Derivabilità di una curva

Sia $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^m$ e sia $t_0 \in I$.
Diciamo che

$$\boldsymbol{\gamma} \text{ è derivabile in } t_0 \iff \gamma_j : I \to \mathbb{R} \text{ è derivabile in } t_0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Se $\boldsymbol{\gamma}$ è derivabile in t_0 si pone

$$\boldsymbol{\gamma}'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_m'(t_0))$$

In cinematica $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ è il vettore velocità all'instante $t = t_0$ del punto materiale che si muove lungo il sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$

Sostegno Si dice sostegno della curva $\boldsymbol{\gamma}$ la sua immagine $\boldsymbol{\gamma}(I)$

Curva semplice Una curva $\boldsymbol{\gamma}$ si dice semplice se è iniettiva:

$$t_1 \neq t_2 \quad \implies \quad \boldsymbol{\gamma}(t_1) \neq \boldsymbol{\gamma}(t_2) \qquad \forall\, t_1, t_2 \in I$$

Arco di curva Se $I = [a, b]$ oppure se $[a, b] \subseteq I$ e considero la restrizione di ***gamma*** su $[a, b]$, allora $\boldsymbol{\gamma}$ si dice arco di curva.

Un arco si dice **chiuso** se $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$.

Estremi Si dicono estremi dell'arco $\boldsymbol{\gamma}$

$$P_0 = \boldsymbol{\gamma}(a) \qquad\qquad P_1 = \boldsymbol{\gamma}(b)$$

.

Curva di Jordan Una curva si dice di Jordan se

$$\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^m \text{ è } \textbf{semplice} \text{ e } \textbf{chiusa} : \quad \boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b)$$

Curva regolare Una curva $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^m$ si dice regolare se

1. $\boldsymbol{\gamma}(t)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su I:

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) \qquad \gamma_j : I \to \mathbb{R}$$

   $\boldsymbol{\gamma}$ è di classe $\mathcal{C}^1 \iff \gamma_j$ di classe $\mathcal{C}^1$ $\forall j = 1, \dots, m$

2. $\boldsymbol{\gamma}'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$

Quindi se $\boldsymbol{\gamma}$ è regolare, $\forall t \in I$ è ben definita la **retta tangente** al sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ in $P_0 = \boldsymbol{\gamma}(t_0)$:

$$\sigma(t) = \boldsymbol{\gamma}(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$$

5.2 Derivate parziali

Derivate direzionali

Definizione: derivata direzionale

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{Int}(A), \qquad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{v} \neq 0$$

Si dice **derivata direzionale** di F lungo $\boldsymbol{v}$ in $\bar{\boldsymbol{x}}$ il limite, se esiste finito,

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{v}) - F(\bar{\boldsymbol{x}})}{t} \tag{1}$$

Sia

$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x)), \qquad F_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

allora per il *Teorema del limite globale*

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad \text{esiste} \quad \iff \quad \text{esistono} \quad \frac{\partial F_j}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}), ..., \frac{\partial F_m}{\partial \boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{x}}) \right)$$

Definizione: Differenziabilità e Matrice Jacobiana

Sia $\bar{\boldsymbol{x}} \in Int(A)$. Diciamo che F è differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$ se esiste una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che

$$F(\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}) - F(\bar{\boldsymbol{x}}) = T(\boldsymbol{h}) + o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare quidi esiste una matrice B $m \times n$ tale che

$$T(\boldsymbol{h}) = B\boldsymbol{h}$$

Usando il *Teorema del limite globale*, $F(\boldsymbol{x}) = (F_1(\boldsymbol{x}), \ldots, F_m(\boldsymbol{x}))$ è differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$ $\iff F_j(\boldsymbol{x})$ è differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\forall j = 1, \ldots, m$.

Definiamo la **Matrice Jacobiana** di F in $\bar{\boldsymbol{x}}$

$$JF(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1(\bar{\boldsymbol{x}}) & \partial_{x_2} F_1(\bar{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \partial_{x_n} F_1(\bar{\boldsymbol{x}}) \\ \partial_{x_1} F_2(\bar{\boldsymbol{x}}) & \partial_{x_2} F_2(\bar{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \partial_{x_n} F_2(\bar{\boldsymbol{x}}) \\ \ldots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} F_m(\bar{\boldsymbol{x}}) & \partial_{x_2} F_m(\bar{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \partial_{x_n} F_m(\bar{\boldsymbol{x}}) \end{pmatrix}$$

Differenziale Definiamo il differenziale di un campo vettoriale come

$$d_x F_j = \nabla F_j(\bar{x}) \cdot \boldsymbol{h}$$

ovvero una riga della jacobiana per un vettore colonna generico $\boldsymbol{h}$.

5.3 Composizione di campi vettoirali

Chain rule

Siano

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$G : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

e definiamo il vettore

$$\bar{\boldsymbol{x}} \in Int(A) \ \text{ t.c. } \ F(\bar{\boldsymbol{x}}) \in Int(B)$$

Supponiamo F differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$ e G in $F(\bar{\boldsymbol{x}})$.
Allora la funzione composta $G \circ F$ è differenziabile in $\bar{\boldsymbol{x}}$ e vale

$$J(G \circ F)(\bar{\boldsymbol{x}}) = JG(F(\bar{\boldsymbol{x}})) \cdot JF(\bar{\boldsymbol{x}})$$

5.4 Teorema di inversione locale

TIL

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $T \in \mathcal{C}^1(A)$.
Sia $x_0 \in A$ e $y_0 = T(x_0)$.
Supponiamo $\det [JT(x_0)] \neq 0$. Allora:

1. Esiste un intorno aperto U di x_0 tale che $T(U)$ sia un intorno aperto di y_0 e la funzione
$$T : U \to T(U)$$
sia biettiva.

2. La funzione inversa locale
$$T^{-1} : T(U) \to U$$
è di classe $\mathcal{C}^1$ su $T(U)$ e $JT^{-1}(y_0) = [JT(x_0)]^{-1}$

5.5 Teoremi della funzione implicita

Dini in 2 dimensioni

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ campo scalare di classe $\mathcal{C}^\infty$ su A: $f \in \mathcal{C}^1(A)$.

Definiamo un punto P_0 appartenente all'insieme di livello $\Sigma_c = \{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$:

$$P_0 = (x_0, y_0) \quad | \quad f(x_0, y_0) = c$$

Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \neq 0$ allora esiste un rettangolo

$$I \times J = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \qquad a, b > 0$$

tale che l'insieme intersezione del rettangolo con l'insieme di livello

$$\{f = c\} \cap (I \times J) = \{(x, y) \in I \times J : f(x, y) = c\}$$

è il grafico di una funzione

$$y = \varphi(x)$$

con

$$\varphi : I \to J \qquad \text{di classe } \mathcal{C}^1 \text{ su } I = (x_0 - a, x_0 + a)$$

2. Se $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \neq 0$ allora esiste un rettangolo

$$I \times J = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b) \qquad a, b > 0$$

tale che l'insieme intersezione del rettangolo con l'insieme di livello

$$\{f = c\} \cap (I \times J) = \{(x, y) \in I \times J : f(x, y) = c\}$$

è il grafico di una funzione

$$y = \psi(x)$$

con

$$\psi : J \to I \qquad \text{di classe } \mathcal{C}^1 \text{ su } J = (y_0 - b, y_0 + b)$$

esempio

Non è sempre possibile esplicitare una variabile rispetto all'altra: se prendiamo come esempio una circonferenza centrata nell'origine di raggio unitario notiamo che:

- In un intorno di $P_1 = (0, 1)$ posso esplicitare $y = \sqrt{1 - x^2}$ ma non posso esplicitare x (in una sola funzione).
- In un intorno di $P_2 = (1, 0)$ è il contrario.

Corollario Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ su A e sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ tale che $f(x_0, y_0) = c$. Allora si ha

1. Se $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ e $y = \varphi(x)$ è la funzione definita implicitamente da $f(x, y) = c$ per $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, risulta:

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\partial_x f(P_0)}{\partial_y f(P_0)}$$

2. Se $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ e $x = \psi(y)$ è la funzione definita implicitamente da $f(x, y) = c$ per $y \in (y_0 - b, y_0 + b)$, risulta:

$$\psi'(y_0) = -\frac{\partial_y f(P_0)}{\partial_x f(P_0)}$$

Dimostrazione

Siamo nel caso in cui

$$y = \varphi(x) \quad \text{è l'unica soluzione di} \quad f(x, \varphi(x)) = c$$

nell'intorno $I = (x_0 - a, x_0 + a)$:

$$\varphi : I \to (y_0 - b, y_0 + b)$$

Per il teorema del Dini sappiamo che $\varphi \in \mathcal{C}^1$, quindi posso derivare $f(x, \varphi(x)) = c \quad \forall x \in I$.
Derivando il primo membro con la chain rule e il secondo ($d/dx(c) = 0$):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) =& \nabla f(x, \varphi(x)) \cdot \nabla(x, \varphi(x)) \\ =& \partial_x f(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \partial_y f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0\end{aligned}$$

e poiché $f(x, \varphi(x))$ ha derivata $\partial_y f(x, \varphi(x))$ continua in I, in particolare $\partial_y f(x, y_0) \neq 0$, per il teorema della permanenza del segno

$$\exists\, 0 < a' \leq a \quad \text{t.c.} \quad \partial_y f(x, \varphi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \subseteq I$$

Possiamo definire la derivata prima di $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))} \qquad \forall x \in (x_0 - a', x_0 + a')$$

6 Superfici in $\mathbb{R}^3$

Definizione: Insieme connesso per archi

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$. A si dice connesso per archi se $\forall x, y \in A$ esiste una curva che li congiunge e il cui sostegno è tutto contenuto in A.

Definizione: Superficie in $\mathbb{R}^3$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto connesso per archi. Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è un'applicazione continua $\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = \sigma_1(u, v) \\ y = \sigma_2(u, v) \\ z = \sigma_3(u, v) \end{cases} \qquad \sigma(u, v) = (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v))$$

L'immagine $\Sigma = \sigma(A)$ è detta **sostegno** della superficie.

Definizione: Superficie regolare

Una superficie $\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con A aperto e connesso per archi, si dice regolare se

1. $\sigma \in \mathcal{C}^1$
2. $rk\,[J\sigma(u, v)]$ è massimo, ovvero se e solo se $\partial_u \sigma$ e $\partial_v \sigma$ sono linearmente indipendenti.

7 Calcolo integrale per funzioni in più variabili

7.1 Insiemi misurabili

Sia Ω un qualunque sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$ e sia $X_\Omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la sua funzione caratteristica definita da

$$X_\Omega(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \boldsymbol{x} \in \Omega \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{x} \notin \Omega \end{cases}$$

Fissato un arbitrario rettangolo B contenente Ω:

Definizione: Insieme misurabile

Un sottoinsieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice misurabile se, fissato arbitrariamente un rettangolo B contenente Ω, la funzione X_Ω risulta integrabile su B. In tal caso il numero non negativo

$$|\Omega| = \int_\Omega X_\Omega$$

viene detto **misura** di Ω.

esempio

Non tutti gli insiemi limitati sono misurabili: i punti del quadrato $[0,1]\times[0,1]$ dove la funzione di Dirichlet è definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \mathbb{Q}, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è integrabile, pertanto l'insieme non è misurabile.

Definizione: Insieme di misura nulla

Si dice che un insieme Ω ha misura nulla se è misurabile e

$$|\Omega| = 0$$

Teorema: Condizione di miusurabilità

Un insieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla.

7.2 Funzioni integrabili

Fissato un insieme misurabile Ω introduciamo il concetto di integrabilità per funzioni limitate e definite in Ω. Presa una funzione limitata

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

consideriamo l'**estensione nulla** (o banale) di f su $\mathbb{R}^2$

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ottenuta ponendo

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) \text{ se} & x \in \Omega \\ 0 \text{ se} & x \notin \Omega \end{cases}$$

Definizione: Funzione integrabile

Si dice che f,funzione limitata, è integrabile in Ω secondo Riemann se $\tilde{f}$ è integrabile su un qualunque rettangolo B contenente Ω. In tal caso, il valore dell'integrale

$$\int_B \tilde{f}$$

non dipende dalla scelta di B e si pone

$$\int_\Omega f = \int_B \tilde{f}$$

Tale valore è detto **integrale doppio** di f su Ω.

Definizione: Funzione generalmente continua

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita e limitata su un insieme misurabile Ω dicesi generalmente continua in Ω se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla.

Definizione: Insiemi y-semplici e x-semplici

Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice semplice rispetto all'asse y se è della forma

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue.
Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice semplice rispetto all'asse x se è della forma

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ funzioni continue.