CORSO DI LAUREA IN FISICA
Prova d'esame di Metodi Matematici della Meccanica Classica – 17 settembre 2019

TEMA I

Si consideri un piano verticale fisso, con un riferimento cartesiano (O, x, y) in cui y è la coordinata verticale. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla retta di equazione $y = x$. Un secondo punto materiale, di uguale massa m, è vincolato a muoversi sulla retta di equazione $y = -x$ (nell'origine O i due punti possono sovrapporsi senza urtarsi). Oltre alla forza peso, fra i due punti agisce una molla elastica con costante $k > 0$ e lunghezza a riposo $R \geq 0$.

(1) Scrivere la Lagrangiana;
(2) determinare esistenza e stabilità (in funzione dei parametri k e R) di tutte le configurazioni di equilibrio.
(3) scrivere le equazioni di Lagrange linearizzate intorno a una configurazione di equilibrio stabile (a scelta).

SVOLGIMENTO

La Lagrangiana del sistema, considerando come vincolo solo il piano verticale, è

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) - mg(y_A + y_B) - \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} - R\right)^2,$$

Come coordinate lagrangiane per parametrizzare il vincolo possiamo scegliere y_A e y_B (sarebbe stato altrettanto sensato scegliere x_A e x_B): poniamo quindi

$$\begin{cases} x_A = q_1 \\ y_A = q_1 \\ x_B = -q_2 \\ y_B = q_2 \end{cases}$$

ed eliminando un termine additivo costante otteniamo la Lagrangiana

$$L = m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + U, \quad \text{con} \quad U = -k\left(q_1^2 + q_2^2 - R\sqrt{2(q_1^2 + q_2^2)}\right) - mgR\left(q_1 + q_2\right).$$

La condizione di equilibrio è data dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = -mg - 2kq_1\left(1 - \frac{R}{\sqrt{2(q_1^2+q_2^2)}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = -mg - 2kq_2\left(1 - \frac{R}{\sqrt{2(q_1^2+q_2^2)}}\right) = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si trova la condizione

$$2k(q_1 - q_2)\left(1 - \frac{R}{\sqrt{2(q_1^2 + q_2^2)}}\right) = 0$$

questa ammette come soluzioni $(q_1 = q_2)$ oppure (per $R > 0$) $\sqrt{2(q_1^2 + q_2^2)} = R$. La seconda condizione, sostituita nel sistema, implicherebbe $mg = 0$ e quindi non può valere per le soluzioni del sistema. Se dunque si pone $(q_1 = q_2 = q_*)$, le due equazioni del sistema si riducono alla condizione

$$(mg + 2kq_*)\sqrt{q_*^2} - kRq_* = 0.$$

A questo punto si devono distinguere due casi, $q_* > 0$ o $q_* < 0$. Per le soluzioni $q_* > 0$ si ha $\sqrt{q_*^2} = q_*$ e l'equazione diventa

$$mg + 2kq_* = kR \quad \Rightarrow \quad q_* = \frac{kR - mg}{2k}, \qquad q_* > 0$$

Questa soluzione può esistere solo se $R > \frac{mg}{k}$.
Se invece si assume $q_* < 0$ si ha $\sqrt{q_*^2} = -q_*$ e quindi

$$mg + 2kq_* = -kR \quad \Rightarrow \quad q_* = -\frac{kR + mg}{2k}, \qquad q_* < 0$$

soluzione che esiste sempre poiché le quantità k, R, m e g sono sempre positive.
In conclusione, il sistema ammette sempre la configurazione di equilibrio $Q_1^* = \left(-\frac{kR+mg}{2k}, -\frac{kR+mg}{2k}\right)$, e ammette una seconda configurazione di equilibrio $Q_2^* = \left(\frac{kR-mg}{2k}, \frac{kR-mg}{2k}\right)$ solo se $R > \frac{mg}{k}$.
Quando $R = 0$, si ricava facilmente che la configurazione di equilibrio $Q_1^* = \left(-\frac{mg}{2k}, -\frac{mg}{2k}\right)$ è stabile: infatti in questo caso la traccia della matrice Hessiana è $-4k$ e il determinante è $4k^2$, quindi gli autovalori sono entrambi negativi e la configurazione è un punto di massimo del potenziale U.
Per esaminare il caso generale, con calcoli un po' laboriosi si trova che la matrice hessiana di U, valutata nella configurazione Q_1^*, ha determinante uguale a $\frac{4mgk^2}{Rk+mg} > 0$ e traccia uguale a $-2k\frac{Rk+2mg}{Rk+mg} < 0$, quindi la configurazione Q_1^* è sempre stabile, per qualunque valore di $R \geq 0$.
Nella configurazione Q_2^* si trova invece che il determinante della matrice hessiana di U, sotto la condizione $Rk - 2mg > 0$ che assicura l'esistenza dell'equilibrio, è uguale a $-\frac{4mgk^2}{Rk-mg} < 0$: quindi la configurazione Q_2^*, quando esiste, è instabile.

Scegliamo ora di linearizzare il sistema nel caso $R = 0$ intorno alla configurazione $\left(-\frac{mg}{2k}, -\frac{mg}{2k}\right)$. Sviluppando L fino al secondo ordine, si trova

$$L \approx \frac{m^2g^2}{2k} + m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - k\left(q_1 + \frac{mg}{2k}\right)^2 - k\left(q_2 + \frac{mg}{2k}\right)^2$$

ovvero, spostando l'origine del sistema di coordinate nel punto di equilibrio, $y_1 = q_1 + \frac{mg}{2k}$, $y_2 = q_2 + \frac{mg}{2k}$,

$$L \approx \frac{m^2g^2}{2k} + m\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\right) - k\left(y_1^2 + y_2^2\right)$$

da cui si ricava subito che le equazioni linearizzate sono quelle di un oscillatore armonico bidimensionale isotropo:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\dfrac{k}{m} q_1 \\ \ddot{q}_2 = -\dfrac{k}{m} q_2 \end{cases}$$

TEMA II

Due punti materiali di uguale massa m sono vincolati a muoversi su due piani orizzontali fissi posti a distanza ℓ l'uno dall'altro. Fra i due punti agisce la forza gravitazionale newtoniana (proporzionale all'inverso del quadrato della distanza).

(1) Scelto un sistema di coordinate lagrangiane e scritta la Lagrangiana del sistema, trovare tre campi vettoriali indipendenti sullo spazio delle configurazioni che siano simmetrie del sistema;
(2) scrivere le corrispondenti quantità conservate;
(3) esprimere tutti gli integrali primi del sistema come funzioni sullo spazio delle fasi e calcolare le loro parentesi di Poisson.

SVOLGIMENTO

il sistema è autonomo e ha quattro gradi di libertà. La Lagrangiana è

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2\right) - \frac{K}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + \ell^2}},$$

avendo fissato in ciascuno dei due piani coordinate cartesiane ortonormali (x, y), con le origini O e O' allineate verticalmente e gli assi corrispondenti paralleli. Ogni traslazione o rotazione simultanea dei due piani su se stessi lascia invariati l'energia cinetica e il potenziale del sistema. Si possono quindi considerare il generatore delle traslazioni lungo x, quello delle traslazioni lungo y e quello delle rotazioni intorno all'asse passante per O e O':

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_A} + \frac{\partial}{\partial x_B}$$

$$\boldsymbol{X}_2 = \frac{\partial}{\partial y_A} + \frac{\partial}{\partial y_B}$$

$$\boldsymbol{X}_3 = y_A\frac{\partial}{\partial x_A} - x_A\frac{\partial}{\partial y_A} + y_B\frac{\partial}{\partial x_B} - x_B\frac{\partial}{\partial y_B};$$

per garantire che i tre campi siano indipendenti, osserviamo che la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ y_A & y_B & -x_A & -x_B \end{pmatrix},$$

come si vede facilmente, ha rango 3 in qualunque punto diverso da $(0, 0, 0, 0)$.
I corrispondenti rilevamenti tangenti sono

$$\hat{\boldsymbol{X}}_1 = \frac{\partial}{\partial x_A} + \frac{\partial}{\partial x_B}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_2 = \frac{\partial}{\partial y_A} + \frac{\partial}{\partial y_B}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_3 = y_A\frac{\partial}{\partial x_A} - x_A\frac{\partial}{\partial y_A} + y_B\frac{\partial}{\partial x_B} - x_B\frac{\partial}{\partial y_B} + \dot{y}_A\frac{\partial}{\partial \dot{x}_A} - \dot{x}_A\frac{\partial}{\partial \dot{y}_A} + \dot{y}_B\frac{\partial}{\partial \dot{x}_B} - \dot{x}_B\frac{\partial}{\partial \dot{y}_B}$$

e si può verificare facilmente che $\hat{\boldsymbol{X}}_1(L) = \hat{\boldsymbol{X}}_2(L) = \hat{\boldsymbol{X}}_3(L) = 0$.

Le quantità conservate in conseguenza del teorema di Noether sono

$$f_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} = m(\dot{x}_A + \dot{x}_B)$$

$$f_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A} = m(\dot{y}_A + \dot{y}_B)$$

$$f_3 = y_A \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} - x_A \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A} + y_B \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_B} - x_B \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_B} = m(y_A \dot{x}_A + y_B \dot{x}_B - x_A \dot{y}_A - x_B \dot{y}_B).$$

Le prime due sono le due componenti della quantità di moto totale del sistema, mentre $|f_3|$ è il modulo del momento angolare totale.

Le corrispondenti costanti del moto nello spazio delle fasi, ottenute con la mappa di Legendre

$$\begin{cases} p_1^A = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} = m\dot{x}_A \\ p_2^A = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A} = m\dot{y}_A \\ p_1^B = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_B} = m\dot{x}_B \\ p_2^B = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_B} = m\dot{y}_B \end{cases}$$

sono

$$\pi_1 = p_1^A + p_1^B, \quad \pi_2 = p_2^A + p_2^B, \quad \pi_3 = y_A p_1^A - x_A p_2^A + y_B p_1^B - x_B p_2^B.$$

Oltre a questi tre integrali primi si conserva anche l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \left((p_1^A)^2 + (p_2^A)^2 + (p_1^B)^2 + (p_2^B)^2 \right) + \frac{K}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + \ell^2}}.$$

Poiché π_1, π_2 e π_3 sono integrali primi, sappiamo già che $\{H, \pi_1\} = \{H, \pi_2\} = \{H, \pi_3\} = 0$; Per le altre parentesi di Poisson conviene osservare che in qualunque spazio delle fasi, e per qualunque funzione $F(q^\mu, p_\mu)$, la parentesi di Poisson fra un momento coniugato p_μ e F è sempre uguale alla derivata parziale di F rispetto alla coordinata corrispondente q^μ:

$$\{p_\mu, F\} = \frac{\partial p_\mu}{\partial p_\lambda} \frac{\partial F}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q^\lambda} \frac{\partial F}{\partial p_\lambda} = \frac{\partial F}{\partial q^\mu}.$$

In questo modo si verifica facilmente che

$$\{\pi_1, \pi_2\} = 0,$$

$$\{\pi_1, \pi_3\} = \{p_1^A + p_1^B, \pi_3\} = \frac{\partial \pi_3}{\partial x_A} + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_B} = -p_2^A - p_2^B = -\pi_2$$

e analogamente

$$\{\pi_2, \pi_3\} = \frac{\partial \pi_3}{\partial y_A} + \frac{\partial \pi_3}{\partial y_B} = p_1^A + p_1^B = \pi_1.$$

Queste parentesi di Poisson riflettono le proprietà di commutazione dei campi di simmetria. Infatti, come si può verificare anche direttamente,

$$[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2] = 0, \quad [\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_3] = -\boldsymbol{X}_2, \quad [\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3] = \boldsymbol{X}_1.$$