Campo magnetico di un condensatore

Si consideri un condensatore carico ad armature circolari parallele di raggio R in condizioni non stazionarie. Assumendo il campo elettrico uniforme per $r \leq R$ e nullo per $r > R$, ricavare l'espressione per il campo magnetico B in funzione della coordinata radiale r e della variazione $\frac{dE}{dt}$ del campo elettrico nel condensatore, sia per $r < R$ che per $r > R$. Qual è la direzione di B ?

Guida alla soluzione

(1) Considerando trascurabili gli effetti di bordo, e tenendo conto dei dati del problema, come è fatto il campo elettrico ?

(2) Tenendo conto della geometria del sistema, in quale sistema di coordinate conviene fare il conto ?
Da quale coordinata dipenderà $\vec{B}$?

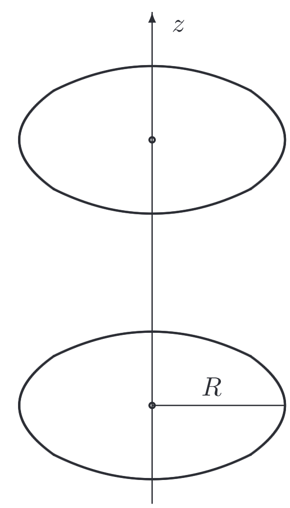
(3) Stabilire la direzione di $\vec{B}$ usando le equazioni di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(la corrente di conduzione è nulla, quindi manca il termine $\mu_0 \vec{j}$)
Può essere utile ragionare sia con le equazioni in forma integrale, sia usando gli operatori divergenza e rotore nel sistema di coordinate scelto.

(4) Una volta stabilita la direzione di $\vec{B}$, utilizzare la quarta equazione di Maxwell (ad esempio in forma integrale), per stabilire $B(r)$ sia per $r < R$ che per $r > R$.



Risposte

(1) $\vec{E} = E(t)\hat{u}_z$ per $r < R$ $\quad \vec{E} = 0$ per $r > R$

(2) Coordinate cilindriche. B dipende solo dalla coordinata radiale r.

(3) Dato che $\vec{E}$ è parallelo a $\hat{u}_z$, la quarta equazione di Maxwell ci dice subito che $\vec{B} \perp \hat{u}_z$ (osservare che il versore $\hat{u}_z$ è costante). Una componente di $\vec{B}$ lungo l'asse z non può quindi essere dovuta al campo elettrico variabile del condensatore, ma dovrebbe essere data da sorgenti esterne, che qui assumiamo essere assenti.

Quindi $\vec{B} = B_r(r)\vec{u}_r + B_\phi(r)\vec{u}_\phi$.

A questo punto usiamo la seconda equazione di Maxwell per mostrare che la componente radiale è nulla.

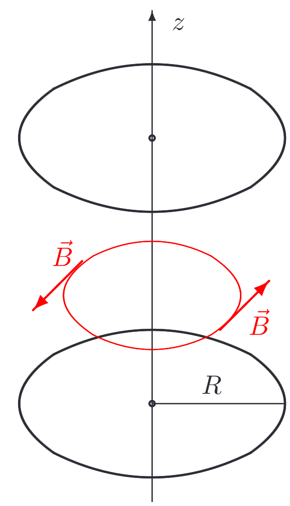
Per farlo usiamo la divergenza di un vettore in coordinate cilindriche

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

che applicata a $\vec{B}$ diventa (dato che le sue componenti dipendono solo da r)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = 0 \qquad \text{cioè} \qquad rB_r = \text{costante} = 0 \quad (\text{valore a } r = 0)$$

Quindi l'unica componente non nulla è B_ϕ, cioè la componente tangenziale.



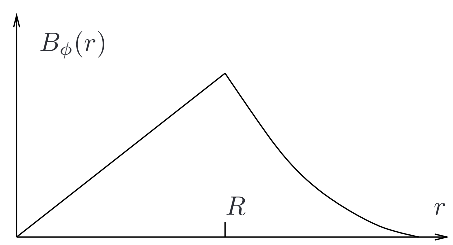
Questo aspetto è molto importante da sottolineare:
$\vec{B}$ ha *dipendenza radiale*, cioè il suo modulo dipende da r, ma **non ha** *direzione radiale*, infatti non è parallelo al versore $\hat{u}_r$ ma a $\hat{u}_\phi$. Quindi ha **direzione tangenziale**.

(4) Qui si può usare il teorema di Stokes per una superficie circolare Σ di raggio r, con il centro sull'asse z e avente normale parallela all'asse z:

$$\oint_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma} = \oint_{C(\Sigma)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \oint_\Sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\Sigma}$$

e si ottiene facilmente B_ϕ.

L' andamento di B_ϕ in funzione di r è illustrato in figura.



Osservazione: il procedimento seguito è del tutto analogo a quanto si fa per il caso del conduttore cilindrico di raggio R percorso da una corrente di densità j, e infatti anche i risultati sono identici (basta sostituire $j \leftrightarrow j_s = \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$. È noto che all'esterno di un conduttore cilindrico il campo magnetico è dato dalla legge di Biot-Savart, come se il conduttore fosse un filo di sezione trascurabile. Qui è la stessa cosa: se nell'espressione di B si scrive la corrente di spostamento nella forma $i_s = \pi R^2 j_s$ si ottiene proprio $B(r) = \mu_0 i_s / 2\pi r$, cioè la legge di Biot-Savart per il campo magnetico generato dalla corrente di spostamento.