Complementi di elettromagnetismo

• Richiami sulle equazioni di Maxwell

I fenomeni elettro-magnetici sono governati dalle equazioni di Maxwell:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 && (1)\\
&\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 && (2)\\
&\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} && (3)\\
&\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} && (4)
\end{aligned}}$$

dove

$$\boxed{\begin{aligned}
&\rho(t,\vec{x}) = \text{densità di carica elettrica}\\
&\vec{j}(t,\vec{x}) = \;\;\text{"}\;\; \text{corrente elettrica}
\end{aligned}} \qquad (5)$$

• L'eq. (1) corrisponde alla legge di Gauss. Integrandola su di un volume V delimitato da una superficie chiusa Σ essa diviene

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

|| (Stokes)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_{\vec{E}}(\Sigma) = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \qquad (6)$$

$$\int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{A} = \Phi_{\vec{E}}(\Sigma)$$

↑ flusso del campo elettrico attraverso Σ

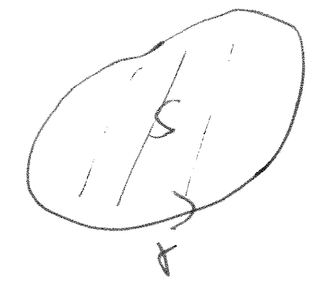
dove Q è la carica totale contenuta in V, cioè all'interno di Σ.

• L'eq. (2) corrisponde all'assenza di monopoli magnetici, cioè cariche magnetiche isolate su cui possano terminare le linee di flusso di $\vec{B}$. Integrandola come per l'eq (1) otteniamo con passaggi analoghi,

$$\boxed{\Phi_B(\Sigma) = 0 \qquad (7)}$$

la "carica magnetica" è sempre nulla

• L'eq. (3) corrisponde alla legge di Faraday e nella sua forma integrale esprime la circuitazione del campo elettrico. Integrandola su una superficie S bordata da una curva γ, si ha



$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_B(S)$$

variazione del flusso magnetico concatenato

|| (Stokes)

$$\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

circuitazione del campo elettrico

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\gamma=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_B(S) \qquad (8)}$$

• L'eq. (4) include la legge di Ampère e la corrente di spostamento, e nella sua forma integrale esprime la circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa γ

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{A} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} + \mu_0\int_S \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

|| Stokes

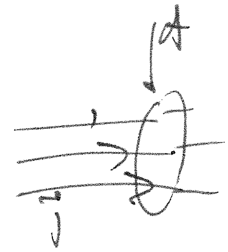
$$\boxed{\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\vec{E}}(S) + \mu_0 \Phi_{\vec{j}}(S)} \qquad (9)$$

flusso elettrico concatenato — flusso di corrente concatenata

- Le equazioni di Maxwell sono lineari (se non si tiene conto della retro-azione dei campi stessi sulle ~~correnti~~ cariche e correnti tramite le forze di Coulomb e Lorentz): i campi elettrici generati da diverse cariche sono sovrapponibili, e così pure i campi magnetici generati da correnti.

- <u>Dimensionalità nel S.I.</u>

- Nel S.I. le grandezze fondamentali sono

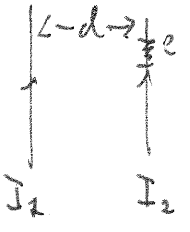


(10) $\quad L,\ t,\ M,\ I,\ T,\ \ldots$

corrente elettrica = flusso di densità di corrente

$I(A) = \Phi_{\vec{j}}(A)$

- La corrente elettrica è definita operativamente tramite la forza di Ampere (per unità di lunghezza) tra due fili ~~di corrente~~ percorsi da corrente:



$$\frac{F}{\ell} = \frac{2\mu_0}{4\pi}\,\frac{I_1 I_2}{d} \qquad (11)$$

l'unità di misura scelta è l'Ampere (A), con

$$\boxed{[\mu_0] = [F\, I^{-2}] \ , \quad \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\, N\, A^{-2}} \qquad (12)$$

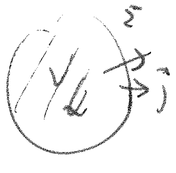
• La densità di corrente $\vec{j}$ ha le dimensioni

$$[\vec{j}\,] = [I/L^2] \qquad (12)$$

e si misura quindi in A/m^2.

• L'equazione di continuità (che richiameremo a breve) in forma integrale ci dice che

$$\frac{dQ}{dt} = \Phi_j(\Sigma) = I(\Sigma)$$



$\Rightarrow$ la carica ha dimensioni

$$[Q] = [I \cdot t] \qquad (13)$$

e si misura in Coulomb (C) $1C = 1A \cdot 1s$.

• la densità di carica ρ ha le dimensioni

$$[\rho] = \left[\frac{Q}{V}\right] = [Q\, L^{-3}] \qquad (14)$$

• la forza di Coulomb, in modulo

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \qquad (15)$$

ci dice che

$$[\varepsilon_0] = \left[\frac{Q^2}{L^2 \cdot \vec{F}}\right] \left(= \left[\frac{I^2 t^2}{L^2\, M L t^{-2}}\right] = \left[\frac{I^2 t^4}{L^3 M}\right] \right) \qquad (16)$$

e il suo valore risulta sperimentalmente essere

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8.85.. \times 10^{-2}\ C^2 N^{-1} m^{-2} \qquad (17)}$$

• Il campo elettrico è una forza per unità di carica, dunque

$$[\vec{E}] = \left[\frac{\vec{F}}{Q}\right] \left(= \left[\frac{M L t^{-2}}{I \cdot t}\right] = [M L t^{-3} I^{-1}] \right) \qquad (18)$$

- Il campo magnetico $\vec{B}$ è collegato al $\vec{E}$ dalla eq. di Maxwell (3), che a livello dimensionale implica

$$[\vec{B}] = \left[\vec{E}\cdot\frac{t}{L}\right] = \left[\frac{\vec{E}}{v}\right] \qquad (19)$$

- Si lascia come esercizio di controllare che le eq. di Maxwell (1)-(4) sono tutte consistenti con le dimensionalità ora descritte.

- Equazione delle onde e.m. nel vuoto, e velocità della luce

nel vuoto ($\rho=0$, $\vec{J}=0$) le eq. di Maxwell si riducono a:

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \end{cases} \qquad (20)}$$

Derivando l'ultima eq. rispetto al tempo, ed usando poi la terza equazione, otteniamo

$$\vec{0} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \qquad (21)$$

Possiamo ora usare l'identità

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\Delta\vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) \qquad (22)$$

(vedi pag. 5 bis per un richiamo sulla dimostrazione)

- Tenendo conto della 1ª equazione, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$, otteniamo

┌ In generale, per qualsiasi tre vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ che non assumiamo commutare fra di loro, si ha

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i \vec{b}\, c^i - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}} \,, \qquad (22\text{-}1)$$

dove abbiamo usato la "convenzione di Einstein": indici ripetuti si intendono sommati. L'eq (22) è il caso $\vec{a} = \vec{b} = \vec{\nabla}$, $\vec{c} = \vec{v}$ (e $\vec{a}, \vec{b}$ commutano).

Possiamo mostrare la (22-1) partendo dall'espressione in componenti del prodotto esterno:

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k} \qquad (22\text{-}2)$$

dove ε^{ijk} è il tensore di Levi-Civita, totalmente antisimmetrico e tale che

$$1 = \varepsilon^{123} = -\varepsilon^{213} = \varepsilon^{231} = -\varepsilon^{132} = -\varepsilon^{321} = \varepsilon^{312} \qquad (22\text{-}3)$$

Usando la (22-2) nel ~~...~~ membro di sinistra della (22-1) abbiamo

$$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]^i = \varepsilon^{ijk} a_j (\vec{b}\times\vec{c})_k = \underbrace{\varepsilon^{ijk}}_{\varepsilon^{kij}} \varepsilon_{k\ell m}\, a_j b^\ell c^m \qquad (22\text{-}4)$$

Per il tensore di Levi-Civita vale la proprietà

$$\boxed{\varepsilon^{kij}\,\varepsilon_{k\ell m} = \delta^i_\ell \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_\ell} \qquad (22\text{-}5)$$

Infatti, ad esempio, scegliendo $ij = 23$, $\Rightarrow$ k può solo essere 1, e

$$\varepsilon^{123}\,\varepsilon_{1\ell m} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \ell = 2,\ m = 3 & \ell = i,\ m = j \to 1 \\ \ell = 3,\ m = 2 & \ell = j,\ m = i \to -1 \end{cases}$$

gli indici ℓm essere 2 o 3

Dunque la (22-4) diventa

$$[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]^i = (\delta^i_\ell \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_\ell)\, a_j b^\ell c^m = a_j b^i c^j - a_j b^j c^i \qquad (22\text{-}6)$$

cioè la (22-1) scritta in componenti. ┘

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \Delta \vec{E} = \vec{0} \qquad (23)$$

Introducendo

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}} \qquad (24)$$

Scriviamo dunque

$$\boxed{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \Delta \vec{E} = \vec{0}} \qquad (25)$$

Questa è un'equazione delle onde (equazione di D'Alembert) con velocità di propagazione dell'onda pari a c.

Notiamo che dalle (12) e (10) abbiamo, consistentemente, (usando la (13))

$$[\mu_0 \varepsilon_0] = [F\, I^{-2} \frac{Q^2}{L^2 F}] = [\frac{t^2}{L^2}] = [v^{-2}] \qquad (26)$$

e dai valori espliciti nella (12) e nella (17) si trova

$$\boxed{c \simeq 2.99 \times 10^8 \ m/s} \qquad (27)$$

che ha esattamente lo stesso valore della velocità della luce nel vuoto. Vediamo che la luce è infatti un'onda elettromagnetica.
[NB. Anche $\vec{B}$ soddisfa l'eq. delle onde]

• Equazione di continuità

In presenza di cariche e correnti ($\rho, \vec{j} \neq 0$) la consistenza delle equazioni di Maxwell (1)–(4) implica che esse soddisfano una equazione di continuità.

Derivando l'eq. (1) rispetto a t otteniamo

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (28)$$

Prendendo la divergenza dell'eq. (4) ~~otte~~ abbiamo

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{=0} - \mu_0\varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \qquad (29)$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \partial_x(\cancel{\partial_y B_z} - \cancel{\partial_z B_y}) + \partial_y(\cancel{\partial_z B_x} - \cancel{\partial_x B_z}) + \partial_z(\cancel{\partial_x B_y} - \cancel{\partial_y B_x}) = 0 \qquad (30)$$

(naturalmente, questa proprietà vale per qualsiasi vettore).

La (29) si può scrivere come

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\,. \qquad (32)$$

Confrontando con la (28) vediamo che

$$\frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad (32)}$$

(equazione di continuità)

Integrando l'eq. di continuità su un volume V bordato da una superficie Σ abbiamo

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\,dV \overset{\text{(Stokes)}}{=} \int_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{A} = \Phi_j(\Sigma) = I(\Sigma)$$

$$\| $$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = \frac{dQ(V)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dQ(V)}{dt} = I(\Sigma) \qquad (33)}$$

Dunque la carica in una regione V varia nel tempo solo a seguito del flusso di corrente attraverso il suo bordo Σ.

• Forza elettromagnetica

Le eq. di Maxwell descrivono come una configurazione di cariche e correnti ~~determinata~~ influenza la forma dei campi e.m.. Non dicono come, in senso inverso, una data configurazione di campi e.m. influenzi cariche e correnti!

• Nel caso in cui la densità carica e la densità di corrente sono associate ad una particella puntiforme di carica q e velocità $\vec{v}$ (~~equazione~~) tale effetto è dato dalla forza di Coulomb e di Lorentz sulla particella:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}} \qquad (34)$$

• Una distribuzione continua di carica con densità ρ e densità di corrente $\vec{J}$ subisce analogamente una densità di forza

$$\boxed{\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}} \qquad (35)$$

• L'espressione della forza di Lorentz non è direttamente ~~scritta~~ derivabile da una Lagrangiana o Hamiltoniana ~~scritt~~ di interazione scritta in termini dei campi $\vec{E}$, $\vec{B}$.

• I potenziali scalare e vettore

Le equazioni di Maxwell omogenee (2) e (3) possono essere risolte in modo semplice esprimendo i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (in totale 6 componenti) in termini di 4 quantità (1 scalare ed ~~un~~ 1 vettore).

L'eq. (2), $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, è automaticamente risolta scrivendo

$$\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (36)$$

dove $\vec{A}(t,\vec{x})$ è detto potenziale vettore. Infatti

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0 \qquad (37)$$

(vedi eq. (30)) e l'eq. (2) è automaticamente risolta. A questo punto, l'eq. (3) diventa

$$0=\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \qquad (38)$$

Questa equazione è automaticamente risolta ~~se~~ ponendo

$$\boxed{\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi}, \qquad (39)$$

dove ϕ è detto potenziale scalare. Il segno è scelto in modo che nel caso statico si ottenga la usuale relazione $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$ tra il campo elettrico e il potenziale elettrostatico. Ricapitolando, possiamo esprimere i campi e.m. in termini dei potenziali come

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}&=\vec{\nabla}\times\vec{A}\\ \vec{E}&=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{aligned}} \qquad (40)$$

- <u>Invarianza di Gauge</u>

I potenziali ϕ ed $\vec{A}$ sono definiti a meno della seguente trasformazione continuata:

$$\boxed{\phi \to \phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad , \quad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi} \quad , \qquad (41)$$

dove $\chi(t,\vec{x})$ è una generica funzione. Infatti i potenziali trasformati ϕ' ed A' danno origine agli stessi campi e.m.:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times(\vec{A} - \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla}\times\vec{A} - \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}}_{=0}\chi = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi - \cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial \chi}{\partial t}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi} = \vec{E} \qquad (42)$$

. Condizioni di gauge

La libertà di ridefinire i potenziali tramite la trasformazione (23) ci dà la possibilità di imporre una condizione sui potenziali stessi. Tali possibili condizioni sono dette "condizioni di gauge" o anche semplicemente "gauge di ...". Ad esempio:

- Gauge di Coulomb: consiste nel fissare

$$\phi = 0 \qquad (43)$$

Questo si può ottenere partendo da un ϕ qualsiasi e scegliendo χ tale che $\frac{d\chi}{dt} = -\phi$, di modo che

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0 \qquad (44)$$

è nel gauge di Coulomb.