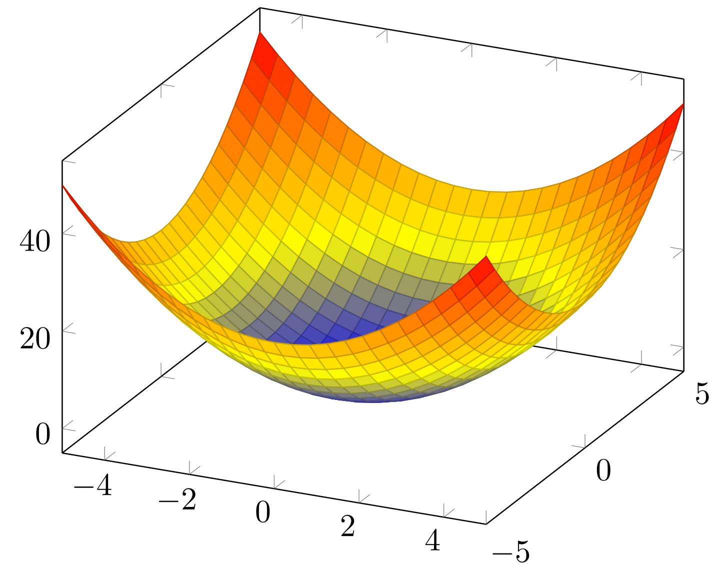
Analisi III

Riassunto da: *"Analisi Matematica 2 - Claudio Canuto, Anita Tabacco"*



Corso di Laurea in Fisica - Corso A
Università degli studi di Torino, Torino
Settembre 2024

Indice

1 Successioni di funzioni

$$A \subseteq \mathbb{R} \ \ (\text{o } \mathbb{C}), \quad f_n : A \to \mathbb{R} \ \ (\text{o } \mathbb{C}), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{ccl} N & \to & \{\text{f.ni definite su } A\} \\ n & \mapsto & f_n \end{array}$$

Vogliamo studiare come si comporta $(f_n)_n$ quando $n \to +\infty$.

1.1 Limiti di successioni

Definizione: Convergenza puntuale

Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_n$, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\text{o } \mathbb{C})$ **converge puntualmente** (o semplicemente) a una funzione f sull'insieme $E \subseteq A$ se

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Notiamo che quest'ultimo limite è un limite di successione numerica, quindi

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) \ \text{ t.c. } \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Definizione: Convergenza uniforme

Diciamo che la successione di funzioni $(f_n)_n$, $f_n : A \to \mathbb{R} \ \ (\text{o } \mathbb{C})$ **converge uniformemente** su $E \subseteq A$ alla funzione $f : E \to \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \ \text{ t.c. } \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \ \text{ t.c. } \ \sup|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

dove l'estremo superiore viene denominato α_n successione positiva (≥ 0):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \ \text{ t.c. } \ 0 \leq \alpha_n < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

opure

esempio 1

esempio 2

esempio 3

Teorema 1 - La convergenza unifore preserva la continuità

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tali che

(H1) f_n sono funzioni continue su $E \subseteq A$,

(H2) f_n converge uniformemente a f su E

allora f è continua su E

dimostrazione

La tesi è

$$\forall x_0 \in E, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero che

$$\forall x_0 \in E \qquad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \;\; \text{t.c.} \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$$

- Da $(H2)$ convergenza uniforme sappiamo che $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ quindi

$$\exists \hat{n} = \hat{n}(\varepsilon) \quad : \quad \alpha_n = \sup |(f_n(x) - f(x))| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq \hat{n}$$

- Da $(H1)$ abbiamo invece la continuità di $f_{\hat{n}}$ in x_0:

$$\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \quad : \quad |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \;\; \forall x \in I_\delta$$

Ora utilizzando la riscrittura

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| =& |f(x) - f_{\hat{n}}(x) + f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0) + f_{\hat{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ \leq& |f(x) - f_{\hat{n}}(x)| + |f_{\hat{n}}(x) - f_{\hat{n}}(x_0)| + |f_{\hat{n}}(x_0) - f(x_0)| \\ =& \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 2 - Passa al limite sotto integrale

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

(H1) f_n sono funzioni continue su $[a, b]$,

(H2) f_n converge uniformemente su $[a, b]$

allora

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \quad = \quad \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \quad = \quad \int_a^b f(x)\, dx$$

dimostrazione

Dal ***Teorema 1*** sappiamo che f è continua su $[a,b]$ e perciò è integrabile è

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è ben definito.
Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ovvero che

$$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists\tilde{n}=\tilde{n}(\varepsilon) \;\; : \;\; |I_n - I| < \varepsilon \;\; \forall n \geq \tilde{n}$$

Utilizziamo la disugualianza

$$\begin{aligned} |I_n - I| = \left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b f_n - f\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n - f| \\ &\leq \int_a^b \alpha_n = \alpha_n(b-a) \end{aligned}$$

e poiché per *(H2)* si ha $\alpha_n \to 0$

$$\exists\tilde{n} : \alpha_n(b-a) < \varepsilon \;\; \forall n \geq \tilde{n}$$

$\square$

esempio 4

Teorema

Sia $(f_n)_n$, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) tale che

- f_n converga uniformemente a f in $E \subseteq A$,
- f_n siano continue sulla chiusura di E: $\bar{E}$

allora si ha che f_n converge uniformemente a f su $\bar{E}$.

2 Serie di funzioni

Presa $(f_n)_n$ successione di funzioni, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), chiamiamo

$$\sum_n f_n(x)$$

serie di funzioni. Definiamo

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

successione delle ridotte.

Convergenza della serie Diciamo che la serie converge (puntualmente o uniformemente) su un insieme $E \subseteq A$ se lo fa la successione delle ridotte. Si andrà quindi a studiare il limite di S_N che chiamiamo somma della serie.

Teorema 1S

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se

- f_n continue su $E \subseteq A$;
- $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $E \subseteq A$ alla somma $S(x)$

Allora $S(x)$ è continua su E.

Teorema 2S

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $E = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se

- f_n continue su $E \subseteq A$;
- $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $E \subseteq A$ alla somma $S(x)$

Allora

$$\int_a^b \sum f_n(x)dx \quad = \quad \sum \int_a^b f_n(x)dx$$

Definizione:

$$I_s = \Big\{x \quad \text{la serie considerata} \sum f_n(x) \text{converge semplicemente}\Big\}$$

per la serie $\sum x^n$ si ha che $I_s = (-1, 1)$

$$I_a = \Big\{x \quad \text{la serie considerata} \sum |f_n(x)| \text{converge semplicemente}\Big\}$$

Teorema: m-test o criterio di convergenza totale

Date

- $(f_n)_n$ successione di funzioni su $E \subseteq \mathbb{R}$ (o in $\mathbb{C}$);
- $(m_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ successione di numeri reali positivi.

tali che

(H1) $|f_n(x)| \leq m_n \ \forall x \in E, \forall n$;

(H2) $\sum m_n(x) < +\infty$.

Allora la serie $\sum f_n(x)$ converge assolutamente in ongi punto di E è uniformemente su E $\implies$ la serie converge totalmente.

Teorema 3S

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Se

- $\sum_n f_n$ converge uniformemente su E,
- f_n sono continue su $\bar{E}$

allora $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $\bar{E}$.

2.1 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

Intendiamo con serie di potenze in $\mathbb{C}$ un espressione del tipo

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

dove $(a_n)_n$ è una successione di numeri complessi, $z_0 \in \mathbb{C}$ è il *centro* e z è la variabile complessa. I concetti di convergenza si estendono sostituendo il modulo al valore assoluto nelle relative definizioni.

In campo complesso l'intervallo di convergenza viene sostituito da un **disco di convergenza**.

La successione delle ridotte $S_N(z)$ è un polinomio di grado N a variabile complessa.

Teorema: disco di convergenza

Data una serie di potenze in $\mathbb{C}$, $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, esiste $R \geq 0$ detto raggio dei convergenze della serie tale che

1. La serie **converge assolutamente** in $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$,
2. la serie **non converge semplicemente** in $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(z_0)}$,

$$D_R(z_0) \subseteq I_a \subseteq I_s \subseteq \overline{D_R(z_0)}$$

3. la serie **converge uniformemente** su ogni $\overline{D_r(z_0)}$ con $r \in (0, R)$.

dimostrazione

Per prima cosa sappiamo che $z_0 \in I_s$ quindi $I_s \neq \varnothing$.
Definiamo

$$R := \sup\{|z - z_0| : z \in I_s\}$$

Ora andiamo a studiare quando R si annulla e quando è maggiore di zero:

- $\boxed{R = 0}$ Se R è nullo il punto z_0 corrisoponde all'insieme I_s:

$$\{z_0\} = I_s$$

La serie converge solo in un punto dove si riduce al primo termine a_0, quindi $I_a = I_s$.

- $\boxed{R > 0}$ e $r \in (0, R)$.
Avendo definito R come il *raggio dell'insieme* I_s di centro z_0, il punto 2 è subito dimostrato.

  - considero $\boxed{z_1 : |z_1 - z_0| \in (r, R)}$. Si ha che $z_1 \in I_s$ ovvero

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z_1 - z_0)^n \quad \text{convergente in } \mathbb{C}$$

$$\implies \lim_{n \to +\infty} a_n (z_1 - z_0)^n = 0$$
$$\implies \exists \tilde{n} \quad : \quad |a_n (z_1 - z_0)^n| < 1 \quad \forall n \geq \tilde{n}$$

  - considero $\boxed{z \in \overline{D_r(z_0)}}$. Vogliamo usare l'm-test per dedurre la convergenza assoluta in ongi $\overline{D_r(z_0)}$ e la convergeza uniforme in $D_r(z_0)$.
Vogliamo maggiorare

$$|a_n (z_1 - z_0)^n|$$

con un numero m_n tale che $\sum m_n < +\infty \quad \forall t \in \overline{D_r(z_0)}$:

$$|a_n||(z_1 - z_0)^n| \quad \leq \quad |a_n| r^n \frac{|(z_1 - z_0)^n|}{|(z_1 - z_0)^n|} \quad \leq \quad \frac{1 \cdot r^n}{|(z_1 - z_0)^n|} \quad = \quad \left(\frac{r}{|z_1 - z_0|} \right)^n$$

$$\text{(se } n \geq \tilde{n}\text{)}$$

ma $z_1 \in D_R(z_0) \setminus \overline{D_r(z_0)}$, $|z - z_0| \in (r, R)$ e

$$m_n := \left(\frac{r}{|z_1 - z_0|} \right)^n$$

è indipendente da z e permette di applicare l'm-test so ogni $\overline{D_r(z_0)}$ con $r \in (0, R)$.
$\implies$ ho convergenza assoluta su ogni $\overline{D_r(z_0)}$ e assoluta in ogni punto di ogni $\overline{D_r(z_0)} \implies$ ho convergenza assoluta in $\overline{D_R(z_0)}$

□

corollario

La somma di una serie di potenze di raggio R è una funzione continua in ogni punto di $\overline{D_R(z_0)}$.

dimostrazione

- $f_n(z_0) = a_n(z-z_0)^n$ sono tutte funzioni continue (in $\mathbb{C}$),
- se $z \in D_R(z_0)$ allora $|z-z_0| = r \in [0,R)$, allora

$$z \in \overline{D_r(z_0)} \text{ su cui abbiamo converg. uniforme} \implies \text{continuità della somma.}$$

□

Teorema del rapporto e della radice

Data la serie $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ se esiste uno tra questi limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e vale $L \geq 0$ allora

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad L = 0 \\ \frac{1}{L} & \text{se} \quad L \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{se} \quad L = +\infty \end{cases}$$

Non è detto che i limiti esistano, ma sappiamo che entrambe le serie ammettono un limite inferiore e uno superiore e si può dimostrare la formula di Hadamard

$$R = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$