

• Sorgenti oscillanti ed equazioni di Helmholtz

Torniamo ora all'equazione generale di non omogenee per i potenziali, che sono della forma (vedi eq. (27))

$$\boxed{\nabla^2 u(t, \vec{x}) = \sigma(t, \vec{x})} \quad (300)$$

e supponiamo che la sorgente σ (ad esempio la densità di carica o di corrente) ~~sia~~ non sia più statica ma oscillante con una frequenza ω :

$$\boxed{\sigma(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \hat{\sigma}(\omega, \vec{x})} \quad (301)$$

\uparrow nota

N.B. Questa espressione non è reale, ma possiamo scegliere l'equazione e poi restringere solamente la parte reale o immaginaria della soluzione alla fine.

Abbiamo dunque risolvere l'equazione

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(t, \vec{x}) = u e^{-i\omega t} \hat{\sigma}(\omega, \vec{x}) \quad (302)$$

È naturale fare l'assunzione che u sia oscillante con la stessa frequenza:

$$u(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \hat{u}(\omega, \vec{x}) \quad (303)$$

Inserendo questo ansatz nella (302), otteniamo

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 \right) e^{-i\omega t} \hat{u}(\omega, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \hat{\sigma}(\omega, \vec{x}) \quad (304)$$

cioè

$$\boxed{\left(\Delta + k_0^2 \right) \hat{u}(\omega, \vec{x}) = \hat{\sigma}(\omega, \vec{x})} \quad (305)$$

con $\hat{k}_0^2 = \omega^2 / c^2$

Questa è detta equazione di Helmholtz. Per $k_0 = 0$ si riduce all'equazione di Poisson. 66

Per risolverla possiamo cercare la funzione di Green dell'operatore di Helmholtz $(\Delta + k_0^2)$, che sfruttando l'invarianza traslazionale, possiamo scegliere che dipenda solo dalla differenza dei punti: $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x} - \vec{x}')$
Esso deve soddisfare

$$\boxed{(\Delta + k_0^2) G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})} \quad (306)$$

Per come sta l'operatore $\Delta + k_0^2$ che la δ di Dirac hanno simmetria sferica, ci aspettiamo che $G(\vec{x})$ dipenda solo da $r = |\vec{x}|$.

In effetti, le seguenti due funzioni:

$$\boxed{G_{\pm}(r) = - \frac{e^{\pm i k_0 r}}{4\pi r}} \quad (307)$$

risolvono l'equazione 306, (e tendono a zero all' ∞). Possiamo decomporle in una parte regolare ed una singolare:

$$G_{\pm}(r) = - \underbrace{\frac{1}{4\pi r}}_{\substack{\uparrow \\ \text{singolare} \\ \text{per } r \rightarrow 0}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi r} (1 - e^{\pm i k_0 r})}_{\substack{\uparrow \\ \text{regolare}}} \quad (308)$$

Sappiamo già che la parte singolare è la f.t. di Green del Laplaciano:

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) = \delta^3(\vec{x}) \quad (309)$$

Per la parte regolare, usando l'espressione della parte radiale ⁶⁷ del Laplaciano data in eq. (144), cioè $\Delta_{rad} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r$, troviamo

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \frac{1}{4\pi r} \frac{(1 - e^{\pm i k_0 r})}{r} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \cdot \frac{(1 - e^{\pm i k_0 r})}{r} = \\ &= \frac{1}{4\pi r} \frac{d}{dr} \left(\mp i k_0 e^{\pm i k_0 r} \right) = \frac{1}{4\pi r} (\mp i k_0)(\pm i k_0) e^{\pm i k_0 r} \\ &= k_0^2 \frac{e^{\pm i k_0 r}}{4\pi r} = -k_0^2 G_{\pm}(r) \end{aligned} \quad (310)$$

Applicando

l'eq. (309) e la (310) nella ~~equazione (308)~~ abbiamo

~~Δ G_±(r)~~ nelle funzioni G_{\pm} date in (308) abbiamo così

$$\Delta G_{\pm}(r) = \delta^3(\vec{r}) - k_0^2 G_{\pm}(r) \Rightarrow (\Delta + k_0^2) G_{\pm}(r) = \delta^3(\vec{r}) \quad (311)$$

✓
Vediamo che la combinazione $G_+ - G_-$ è una soluzione dell'eq. omogenea associata:

$$\begin{aligned} \Delta(G_+ - G_-) &= \delta^3(\vec{r}) - k_0^2 G_+ - (\delta^3(\vec{r}) - k_0^2 G_-) \\ &= -k_0^2 (G_+ - G_-) \end{aligned} \quad (312)$$

e quindi può essere sommata alla funzione di Green senza cambiare le proprietà. Pertanto la generica funzione di Green è

$$G(r) = G_-(r) + A(G_+(r) - G_-(r))$$

$$\Rightarrow \boxed{G(r) = A G_+(r) + (1-A) G_-(r)} \quad (313)$$

dove A è una costante, per ora arbitraria.

68

- L'espressione della f.d. di Green $G_{\pm}(\vec{r})$ dell'operatore di Helmholtz può essere anche trovata tramite il metodo della trasformata di Fourier, vedi note aperte (forse non in programma).

- Con la funzione di Green (313), (307) possiamo ottenere la soluzione dell'equazione di Helmholtz (305) nella forma

$$\hat{u}(\omega, \vec{x}) = \int d^3\vec{x}' G(\vec{x} - \vec{x}') \hat{v}(\omega, \vec{x}') \quad (306)$$

$$\text{con } G(\vec{x} - \vec{x}') = G(R) = - \frac{A e^{ik_0 R} + (1-A) e^{-ik_0 R}}{4\pi R} \quad (307)$$

$$(R = |\vec{x} - \vec{x}'|) \text{ con } k_0^2 = \omega^2/c^2.$$

- La soluzione della corrispondente equazione di D'Alembert inhomogeneous (302) è data dalla (303):

$$u(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \hat{u}(\omega, \vec{x}) \quad (308)$$

con $\hat{u}(\omega, \vec{x})$ come nella (306).

- Sorgente puntiforme oscillante

$$\text{Se } v(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \vec{v}(\omega, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \delta^3(\vec{x}) \quad (309)$$

otteniamo

$$u(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \hat{u}(\omega, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \int d^3\vec{x}' G(\vec{x} - \vec{x}') \delta^3(\vec{x}') = e^{-i\omega t} G(\vec{x}) \quad (310)$$

$$u(t, \vec{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{u}(\omega, \vec{x}) \quad (315)$$

70

L'equazione di D'Alembert omogenea (300) ~~diventa~~ è

$$\Delta u(t, \vec{x}) = 0(t, \vec{x}) \Rightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(t, \vec{x}) = 0(t, \vec{x})$$

e inserendo le (314) - (315) diviene

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{-i\omega t} \tilde{u}(\omega, \vec{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{v}(\omega, \vec{x})$$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{-i\omega t} \tilde{u}(\omega, \vec{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{v}(\omega, \vec{x}) \quad (316)$$

$\omega^2 = k^2$

Per $\tilde{u}(\omega, \vec{x})$ deve dunque soddisfare l'eq. di Helmholtz:

$$(\Delta + k^2) \tilde{u}(\omega, \vec{x}) = \tilde{v}(\omega, \vec{x}) \quad (317)$$

che abbiamo appena studiato e che ha la soluzione (306) - (307):

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{u}(\omega, \vec{x}) &= \int d^3\vec{x}' G(\vec{x} - \vec{x}') \tilde{v}(\omega, \vec{x}') \\ \text{con } G(\vec{R}) &= - \frac{A e^{ik_0 R} + (1-A) e^{-ik_0 R}}{4\pi R} \end{aligned} \right. \quad (318)$$

$(\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}')$

Assumendo che A sia indipendente da ω (vedremo dopo che deve essere così)

e sostituendo questo nella (315) otteniamo

$$u(t, \vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{A e^{-i\omega t + i \frac{\omega}{c} R} + (1-A) e^{-i\omega t - i \frac{\omega}{c} R}}{4\pi R} \tilde{v}(\omega, \vec{x}') \quad (319)$$

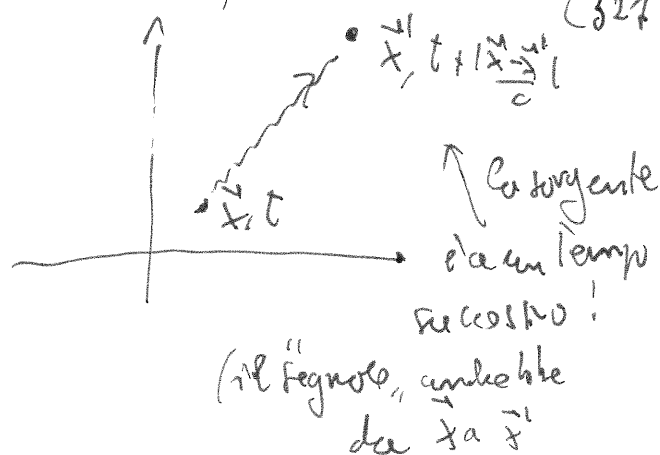
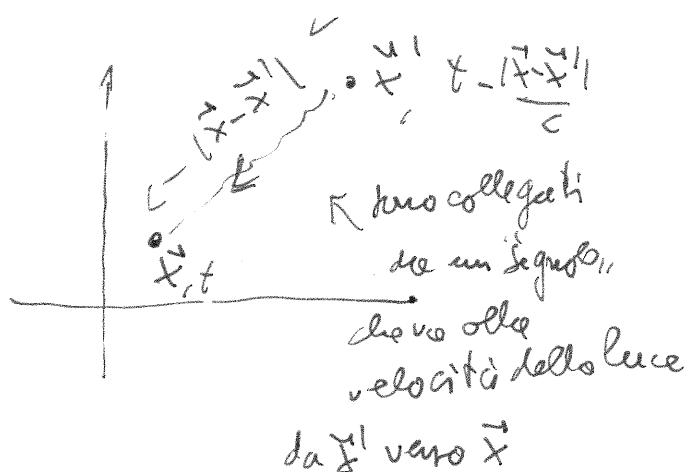
Quindi

$$u(t, \vec{x}) = \frac{A}{4\pi} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{R} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t - \frac{R}{c})} \tilde{v}(\omega, \vec{x}')$$

$$+ \frac{1-A}{4\pi} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{R} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t + \frac{R}{c})} \tilde{v}(\omega, \vec{x}') \quad (320)$$

Ricordando la definizione (314), riconosciamo qui la sorgente \tilde{v} in $t \pm R/c$:

$$u(t, \vec{x}) = A \int d^3 \vec{x}' \frac{v(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} + (1-A) \int d^3 \vec{x}' \frac{v(t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (321)$$



- L'espressione (321) ci dice anche quale è la forma dell'op. dello Green di Green per l'operatore di D'Alembert, vedi eq. (68). Infatti avremmo potuto esprimere la soluzione $u(t, \vec{x})$ tramite la (69):

$$u(t, \vec{x}) = \int dt' d^3 \vec{x}' G(t-t', \vec{x}-\vec{x}') v(t', \vec{x}') \quad (322)$$

Dal confronto con la (321) vediamo che la f.t.d. Green di D'Alembert contiene delle δ -funzioni che fissano esattamente t' ad un valore particolare:

$$G_{\pm}(t, \vec{x}) = A G_+(t, \vec{x}) + (1-A) G_-(t, \vec{x}) \quad (323)$$


con

$$G_{\pm}(t, \vec{x}) = - \frac{\delta(t \mp t_c)}{4\pi r} \quad (324)$$

- Si può verificare direttamente che le funzioni soddisfanno

$$\square G_{\pm}(t, \vec{x}) = \delta(t) \delta^3(\vec{x}) \quad (325)$$

- Dove è il significato fisico delle fz di green $G_{\pm}(t, \vec{x})$ dell'equazione di D'Alembert? L'eq. (325) ci dice che esse sono soluzioni dell'eq. delle onde sorgente completamente localizzate, sia nello spazio che nel tempo
- la funzione di green $G_+(t, \vec{x})$ è detta funzione di green ritardata. Descrive un fronte d'onda sferico (con ampiezza dell'onda) generato da una sorgente che compare per un istante a $t=0$ nel punto $\vec{x}=\vec{0}$ che si espande nel tempo alla velocità della luce



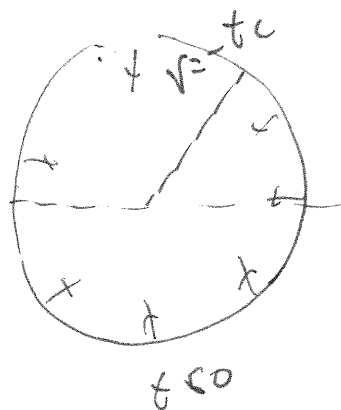
$$G_+(t, \vec{x}) = - \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r} \quad (326)$$

la funzione di Green $G_-(t, \vec{x})$ è detta funzione di Green 73

ritardata anticipata

$$G_-(t, \vec{x}) = - \frac{\delta(t + r/c)}{4\pi r} \quad \leftarrow \quad t = -r/c < 0$$

(327)



$t=0$

$t \geq 0$

descrive il collasso di un fronte sferico nel punto $\vec{x}=0$ al tempo $t=0$ dopo che come una saggente agisce un anarbitore.

- Abbiamo ottenuto due funzioni di Green indipendenti G_{\pm} per cui l'equazione

$$\square G(t, \vec{x}) = \delta(t) \delta^3(\vec{x}) \quad (328)$$

è del second'ordine ed è invariante per inversione temporale, dato che dipende solo da $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ che sotto $t \rightarrow -t$ resta uguale.

- La soluzione "avanzata", G_+ , però, non si accorda con la nozione di causalità: la causa (cioè la saggente) dovrebbe precedere l'effetto, cioè il fronte d'onda.

- Per questa ragione, per l'applicazione alle eq. di Maxwell selezioniamo la soluzione ritardata, cioè nella (323) scegliamo $\boxed{A=1}$ (329)

(mostrando così anche la consistenza dell'assunzione, fatta dopo l'eq. 318, che A fosse indipendente da ω)

• Dunque la soluzione generale dell'eq. d'Alembert inhomogenea compatibile con la causalità agente \rightarrow l'equazione è data dalla (323) con $t \rightarrow t_r$:

$$u(t, \vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{v(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \equiv \int d^3\vec{x}' \frac{[v(\vec{x}')] }{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (323)$$

Nell'espressione di $u(t, \vec{x})$ è detta "potenziale ritardato". Con Abbiamo introdotto la notazione

$$[v(\vec{x}')] \equiv v(t_r, \vec{x}') = v\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}'\right) \quad (324)$$

implica una dipendenza da \vec{x} "tempo ritardato"

$$u(t, \vec{x}) \leftarrow [v(\vec{x}')] \quad (325)$$

La soluzione in t, \vec{x} è influenzata dal valore che la sorgente in \vec{x}' aveva al tempo precedente $t_r = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$

dove $\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$ è esattamente il tempo impiegato dalla luce per collegare i due punti

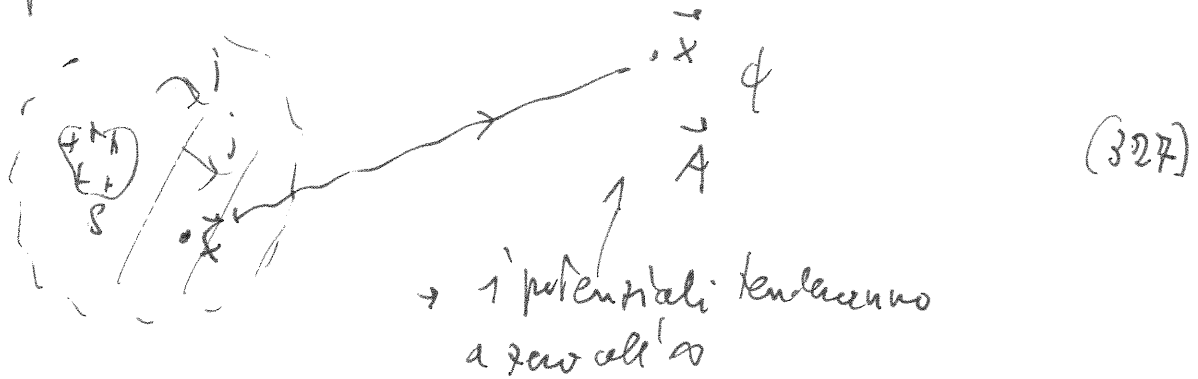
Potenziali ritardati

75

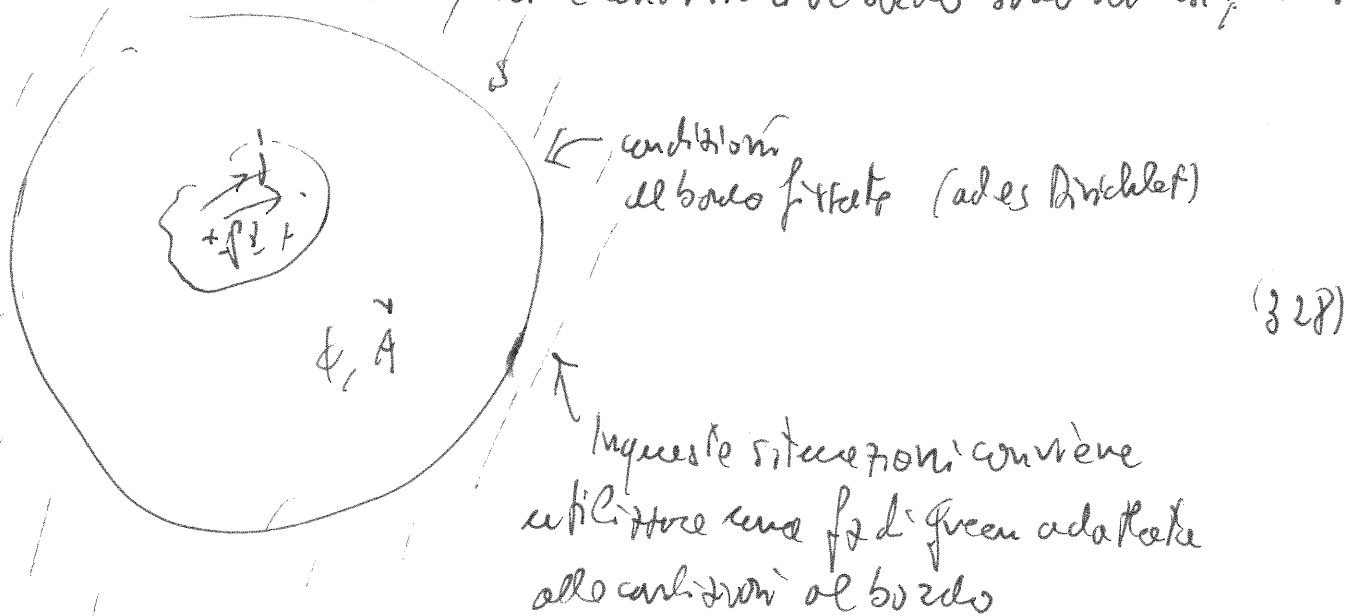
- Possiamo applicare la tecnica appena discussa alla soluzione delle eq. di Maxwell inhomogenee nel campo di Liénard :

$$\left| \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad , \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \end{array} \right| \quad (326)$$

Essendo basata sull'utilizzo della fz di Green ritardata, che tende a zero per $|\vec{x} - \vec{x}'| \rightarrow \infty$, questa tecnica è conveniente quando le distribuzioni di carica e corrente sono localizzate in una regione finita



- Esistono situazioni in cui le condizioni al bordo sono diverse, ad esempio



• Tornando alla (326), e rispondendo di essere nella situazione 7b della (324), in analogia allo (323) abbiamo

$$\left\{ \begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{[\rho(\vec{x}')] }{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{[\vec{J}(\vec{x}')] }{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \right. \quad (329)$$

dove abbiamo utilizzato la ~~solita~~ notazione (324), con ad esempio

$$[\rho(\vec{x}')] = \rho(t_r, \vec{x}') = \rho(t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c, \vec{x}') \quad (330)$$

• I potenziali espressi come nella (329) sono detti "potenziali ritardati",

• Equazione di continuità e gauge di Lorentz

Le eq. (326) ^{per i} ottenuti dai potenziali sono state ottenute nel gauge di Lorentz. Come già visto, esse sono consistenti date anche e coerenti soddisfano l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (331)$$

Deve essere dunque verosimile, se vale l'eq. di continuità (331), i potenziali ritardati (329) soddisfano il gauge di Lorentz.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (332)$$