CORSO DI LAUREA IN FISICA
METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA

Prova d'esame – 18 settembre 2017

TEMA I

Un punto materiale di massa $m$ si muove senza attrito su una superficie di rotazione con asse verticale. In coordinate cilindriche $(r, \theta, z)$, con $z$ coordinata verticale orientata verso l'alto, la superficie ha equazione $z = f(r)$. L'unica forza attiva agente sul punto è la forza peso.

(i) Scrivere la Lagrangiana del sistema e individuare le costanti del moto.

(ii) Utilizzare le costanti del moto per scrivere l'equazione di Weierstrass per la coordinata radiale $r$.

(iii) Trovare la relazione che lega momento angolare, raggio dell'orbita e periodo $T$ per un'orbita circolare.

(iv) Supponendo che la superficie sia un paraboloide, $f(r) \equiv ar^2$, determinare il periodo $T$ per un'orbita circolare di raggio dato $r = R$.

(v) Supponendo invece che il periodo dell'orbita circolare dipenda dal raggio secondo la legge $T^2 = \kappa R^3$, trovare di quale superficie di rotazione si tratta.

SVOLGIMENTO

La Lagrangiana del sistema è

$$L = \frac{m}{2}\left(\left[1 + f'(r)^2\right]\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgf(r)$$

(dove $f'(r) = \frac{df}{dr}$). Dato che il sistema è autonomo e $\theta$ è una coordinata ciclica, le quantità conservate sono

$$E = \frac{m}{2}\left(\left[1 + f'(r)^2\right]\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgf(r), \qquad J = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

Sostituendo $\dot{\theta}$ nella conservazione dell'energia totale ed esplicitando $\dot{r}^2$ si ottiene l'equazione di Weierstrass

$$\dot{r}^2 = \Phi(r) = \frac{2}{1 + f'(r)^2}\left(\frac{E}{m} - gf(r) - \frac{J^2}{2m^2r^2}\right)$$

Per un'orbita circolare di raggio R si deve avere $\Phi(R) = 0$ e $\Phi'(R) = 0$. Dalla prima condizione si ottiene

$$\frac{E}{m} - gf(R) - \frac{J^2}{2m^2R^2} = 0; \tag{1}$$

La seconda condizione è

$$2\left(\frac{E}{m} - gf(R) - \frac{J^2}{2m^2R^2}\right)\frac{d}{dr}\left(1 + f'(R)^2\right)^{-1} + \tag{2}$$
$$+2\left(1 + f'(R)^2\right)^{-1}\left(-gf'(R) + \frac{J^2}{m^2r^3}\right) = 0$$

Non serve calcolare la derivata $\frac{d}{dr}(\ldots)$ nel primo termine, perché l'espressione per cui è moltiplicata si annulla per la condizione (1). Quindi la (2) si riduce a

$$f'(R) = \frac{J^2}{m^2 g R^3} : \tag{3}$$

questo implica che in presenza della forza peso (diretta lungo l'asse $z$ in verso negativo) può esserci un'orbita circolare di raggio $R$ se e solo se $f'(R) > 0$.

Punto (iii): per un moto circolare uniforme, con raggio costante $r = R$, l'equazione $\dot{\theta} = \dfrac{J}{mR^2}$ si integra immediatamente: $\theta(t) = \dfrac{J}{mR^2}t + \theta(0)$.

Il periodo $T$ è il valore per cui $\theta(T) - \theta(0) = 2\pi$, quindi la relazione fra $J$ e $T$ è

$$J = \frac{2\pi m R^2}{T}.$$

Sostituendo nella (3) otteniamo

$$f'(R) = \frac{4\pi^2 R}{gT^2};$$

Nella domanda (iv) si suppone $f(r) \equiv ar^2$, quindi in quel caso $f'(R) = 2aR$. Sostituendo, si trova che il periodo è indipendente dal raggio:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2}{ag}}.$$

Nella domanda (v), invece, si suppone che sia $T^2 = \kappa R^3$: sostituendo si ha $f'(R) = \dfrac{4\pi^2}{\kappa g R^2}$, quindi

$$f(r) = -\frac{4\pi^2}{\kappa g r} + \text{cost.}$$

e la superficie è la falda inferiore della superficie che si ottiene per rotazione di un'iperbole intorno all'asintoto verticale. Questa superficie (che non è un'iperboloide!) si chiama *tromba di Torricelli*.