Simulazione 1 - calcoli

Curva
Si consideri la curva piana parametrizzata da $\gamma(t) = (t - 2\sin t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$.

1. Stabilire se la curva è chiusa.
La curva non è chiusa perché $\gamma(0) = (0, 0) \neq (\pi, 0) = \gamma(\pi)$.

2. Stabilire se la curva è semplice.
La curva è semplice perché

$$\begin{cases} \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \\ t_1, t_2 \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - 2\sin t_1 = t_2 - 2\sin t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases} \Rightarrow t_1 = t_2 \,.$$

3. Calcolare l'area del dominio piano delimitato dall'asse delle ascisse e dal sostegno di γ.
Tenuto conto che il sostegno di γ sta nel semipiano superiore (perché $\sin t > 0$ per $t \in (0, \pi)$) e tocca l'asse delle ascisse solo nel punto iniziale $A = \gamma(0) = (0, 0)$ e nel punto finale $B = \gamma(\pi) = (\pi, 0)$, il dominio planare delimitato dall'asse delle ascisse e dal sostegno di γ è un insieme D con $+\partial D = [A, B] \cup (-\gamma)$ e quindi

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= -\int_{+\partial D} y\,dx = -\int_{[A,B]} y\,dx + \int_{\gamma} y\,dx \\ &= \int_0^{\pi} 0\,dt + \int_0^{\pi} (\sin t)(1 - 2\cos t)\,dt = \big[-\cos t + \cos^2 t\big]_0^{\pi} = 2\,. \end{aligned}$$

Campo
Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri il campo vettoriale

$$F_{a,b}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 - 1} + ay, \frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx, ax + \frac{2}{1 + (z-1)^2} + 2yz \right).$$

1. Per quali valori dei parametri a e b, il dominio di $F_{a,b}$ non è un insieme connesso.
Il dominio di $F_{a,b}$ è il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^3$ costituito dai punti di coordinate (x, y, z) con $x \neq \pm 1$. Tale insieme è unione di tre aperti disgiunti (due semispazi aperti e la striscia aperta compresa tra i piani di equazione $x = -1$ e $x = 1$). Pertanto il dominio di $F_{a,b}$ non è connesso.

2. Per quali valori dei parametri a e b il campo $F_{a,b}$ è irrotazionale sul suo dominio.
Il campo $F_{a,b}$ è irrotazionale in D quando

$$\nabla \wedge F_{a,b} = 0 \text{ in } D \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2-1} + ay\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(ax + \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{x^2-1} + ay\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(ax + \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y} + 1 + z^2 + bx\right) \end{cases} \forall (x, y, z) \in D$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ a = 0 \\ 2z = 2z \end{cases} \forall (x, y, z) \in D \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0\,.$$

3. Sia F la restrizione del campo $F_{a,b}$ all'aperto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 1,\ y > 0\}$ per i valori $a, b \in \mathbb{R}$ determinati al punto precedente; sia γ la curva di equazioni parametriche $\gamma(t) = (\sqrt{2} + t^2 \cos t, 1 + \sin t, 1 + \cos(3t))$ con $t \in [0, \pi/2]$. Calcolare il valore dell'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma F \cdot ds$.

La curva γ ha sostegno contenuto in A perché $\sqrt{2} + t^2 \cos t \geq \sqrt{2} > 1$ e $1 + \sin t \geq 1 > 0$ per ogni $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. L'aperto A è contenuto in D ed è semplicemente connesso (in quanto intersezione di semispazi). Quindi, quando $a = b = 0$, il campo $F = F_{a,b}|_A$ è conservativo in A per il lemma di Poincaré. Allora vale che

$$\int_\gamma F \cdot ds = U\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - U(\gamma(0))$$

dove U è un potenziale di F in A. Si calcola

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2-1}, \frac{1}{y} + 1 + z^2, \frac{2}{1+(z-1)^2} + 2yz\right)$$

e

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\sqrt{2}, 2, 1)\,, \quad \gamma(0) = (\sqrt{2}, 1, 2)\,.$$

Con il metodo delle integrazioni parziali si trova che un potenziale è dato da

$$U(x,y,z) = \log(x^2-1) + \log y + y + yz^2 + 2\arctan(z-1)$$

e quindi

$$\int_\gamma F \cdot ds = \log 2 + 2 + 2 - (1 + 4 + 2\arctan 1) = \log 2 - 1 - \frac{\pi}{2}\,.$$

Flusso

Si considerino la fascia sferica $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ 0 \leq 2z \leq 1\}$ ed il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(2ze^{2x}\,,\, x + \log(z+3)\,,\, e^{2x} + \dfrac{y}{z+3}\right)$.

1. Area di S.

La fascia sferica S può essere parametrizzata come superficie cartesiana nella forma $S = \varphi(D)$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{3}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ e

$$\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{bmatrix}.$$

Allora

$$\varphi_x(x,y) \wedge \varphi_y(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(S) &= \int_D |\varphi_x(x,y) \wedge \varphi_y(x,y)|\, dx\, dy = \int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy \\ &= 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho = -2\pi \left[\sqrt{1-\rho^2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} = \pi\,.\end{aligned}$$

2. Calcolo del flusso del rotore di F attraverso S orientata con normale diretta verso l'esterno dalla sfera.
Il rotore di F è dato da

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & 2ze^{2x} \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x + \log(z+3) \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & e^{2x} + \frac{y}{z+3} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\operatorname{rot} F(\varphi(x,y)) \cdot \varphi_x(x,y) \wedge \varphi_y(x,y) = 1\,.$$

Osservando che la parametrizzazione cartesiana induce su S l'orientazione con normale diretta verso l'esterno della sfera, il flusso richiesto vale

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot}(F) \cdot N\, d\sigma &= \int_D \operatorname{rot} F(\varphi(x,y) \cdot \varphi_x(x,y) \wedge \varphi_y(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_D 1\, dx\, dy = \operatorname{area}(D) = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Serie

Si consideri la serie di potenze in campo reale $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{\log n}(x-1)^n$.

1. Intervallo aperto di convergenza.
La serie in questione è una serie di potenze in campo reale con centro $x_0 = 1$ e successione dei coefficienti $a_n = \frac{2^n}{\log n}$. Ha raggio di convergenza $R = \frac{1}{2}$ perché $R = \frac{1}{L}$ con

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\log n}{\log(n+1)} = 2\,.$$

Quindi l'intervallo aperto di convergenza è $(a,b) = (x_0 - R, x_0 + R) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

2. Insieme di convergenza semplice.
Nel punto $a = \frac{1}{2}$ la serie diventa $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\log n}$ che è una serie a termini di segno alterno, convergente per il criterio di Leibniz. Nel punto $b = \frac{3}{2}$ la serie diventa $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n}$ che è una serie divergente, ad esempio per confronto con la serie armonica. Quindi l'insieme di convergenza semplice è $[a,b)$.

3. Insieme di convergenza assoluta.
La serie non converge assolutamente in a, perché se no convergerebbe in b. Quindi, per

risultati generali sulle serie di potenze in campo reale, l'insieme di convergenza assoluta è (a, b).

4. Convergenza uniforme.
La serie converge uniformemente in $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ per ogni $\varepsilon > 0$ ma non in $[a, b]$ (perché altrimenti convergerebbe anche in b), e neppure in (a, b) (perché altrimenti convergerebbe anche in $[a, b]$).