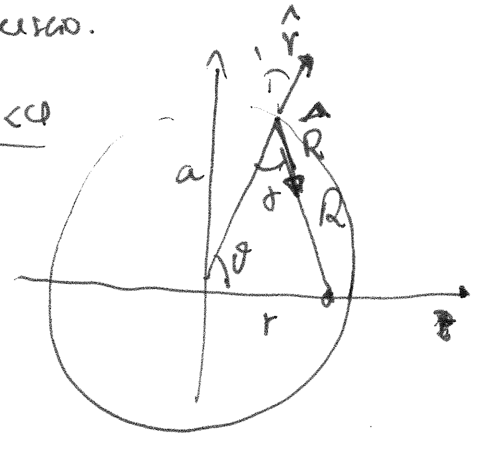
Dunque, $$\phi(\vec{x}) = \frac{D}{4\pi\varepsilon_0}\int dS' \, \frac{\hat{r}\cdot\hat{R}}{R^2} \qquad (163)$$

~~Consideriamo~~ Consideriamo separatamente la regione interna e quella esterna al guscio.

1) $r<a$



• Dal teorema del coseno,
$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta \qquad (164)$$

• Inoltre,
$$\hat{r}\cdot\hat{R} = -\cos\gamma \qquad (165)$$

• Dal teorema dei seni,
$$\frac{r}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{r}{R}\sin\theta \qquad (166)$$

da cui
$$\cos^2\gamma = 1-\sin^2\gamma = 1-\frac{r^2}{R^2}\sin^2\theta = \frac{R^2 - r^2(1-\cos^2\theta)}{R^2}$$
$$= \frac{a^2+\cancel{r^2}-2ar\cos\theta-\cancel{r^2}+r^2\cos\theta}{R^2} = \frac{(a-r\cos\theta)^2}{R^2} \qquad (167)$$

e quindi
$$\cos\gamma = \frac{a-r\cos\theta}{R} \qquad (\text{N.B.: } a>r\cos\theta) \qquad (168)$$

Inoltre, $dS' = a^2\, d\varphi\, d\cos\theta$, con $\cos\theta \in [-1,+1]$. (169)

e dunque in definitiva
$$\phi(\vec{x}) = \frac{D}{4\pi\varepsilon_0}(-)\,a^2\, 2\pi\int_{-1}^{1} d\cos\theta\, \frac{(a-r\cos\theta)}{R^3} \qquad (170)$$

Abbiamo

(esercizio)

$$\int d\cos\vartheta \, \frac{a - r\cos\vartheta}{\underbrace{(a^2+r^2-2ar\cos\vartheta)}_{R}{}^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\,\frac{a\cos\vartheta - r}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\vartheta}} \qquad (171)$$

per cui

$$\int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \, \frac{a - r\cos\vartheta}{R^3} = \frac{1}{a^2}\left\{ \frac{a-r}{\sqrt{(a-r)^2}} - \frac{-a-r}{\sqrt{(a+r)^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{ \underbrace{\frac{a-r}{a-r}}_{(a>r)} + \frac{a+r}{a+r} \right\} = \frac{2}{a^2} \qquad (172)$$

Sostituendo nella (170) troviamo quindi

$$\phi(r) = \frac{D}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}(-)\cancel{a^2}\cdot\cancel{2\pi}\cdot\frac{2}{\cancel{a^2}} = -\frac{D}{\varepsilon_0} \qquad (r<a) \qquad (173)$$

ii) $r>a$

Tutte le considerazioni geometriche restano uguali e si arriva alla ~~all'analogo~~ della ~~(171)~~ eq (170). Tuttavia ora l'analogo della (172) diventa

$$\int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \, \frac{a - r\cos\vartheta}{R^3} = \frac{1}{a^2}\left\{ \frac{a-r}{\underbrace{\sqrt{(r-a)^2}}_{r>a}} - \frac{-a-r}{\sqrt{(r+a)^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{ \frac{a-r}{r-a} + \frac{a+r}{a+r} \right\} = \frac{1}{a^2}\{-1+1\} = 0 \qquad (174)$$

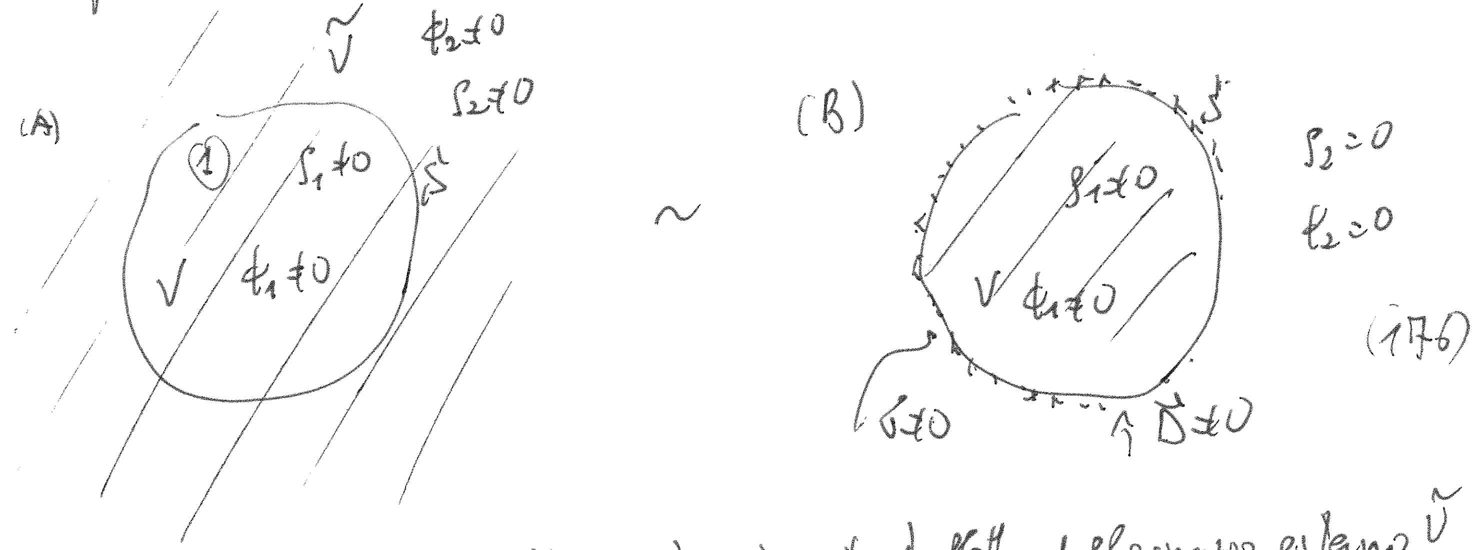
Dunque

$$\phi(r) = 0 \qquad (r>a) \qquad (175)$$

In accordo con la (160).

- Descrizione del potenziale elettrostatico all'interno di una regione chiusa

~~È possibile~~ Data una distribuzione di carica ed una superficie chiusa (immaginaria) S' che divide lo spazio in due regioni, è possibile descrivere il potenziale nella regione interna in due modi equivalenti



(176)

- Nella rappresentazione (B) abbiamo rimpiazzato l'effetto dello spazio esterno $\tilde{V}$ e della distribuzione di carica ρ_2 con la presenza di una densità di carica σ e di dipolo $\vec{D}$ sulla superficie S'. ~~Le~~
- Le relazioni di discontinuità (138) e (134)* ci dicono poiché

$$\sigma = \varepsilon_0 \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi \Big|_{S'} \qquad , \qquad D = -\varepsilon_0 \phi \Big|_{S} \tag{177}$$

(ovviamente, dalla parte interna).

- La connessione esplicita tra la distribuzione di carica "esterna" ρ_2 e le densità superficiali σ e D è ottenuta a partire dal Teorema di Green.

- Consideriamo due funzioni qualsiasi ϕ e ψ. Vale l'identità

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \phi) = \psi \Delta \phi + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \phi \tag{178}$$

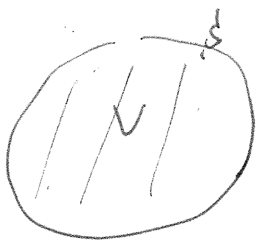
e ovviamente anche

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) = \phi\Delta\psi + \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi \qquad (179)$$

Prendendo la differenza di tra

$$\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\psi) = \psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi \qquad (180)$$

Integriamo questa relazione su un volume V bordato dalla superficie S:



$$\int_V (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi)\, dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\psi)\, dV$$

$$\parallel \quad \text{(teor. divergenza)}$$

$$\int_S (\psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{S} \qquad (181)$$

Questa è l'enunciato del Teorema di Green:

$$\boxed{\int_V (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi)\, dV = \int_S (\psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{S}} \qquad (182)$$

- Supponiamo che ϕ sia il potenziale elettrostatico, che soddisfa l'eq. di Poisson:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (183)$$

associato ad una distribuzione di carica ρ (localizzata). Assumiamo le condizioni al bordo

$$\phi(\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \qquad (184)$$

- Scegliamo inoltre

$$\psi(\vec{x}') = G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \qquad (185)$$

$\vec{x}$ arbitrario ma $\in V$

cioè la fd di Green con condizioni banali all'∞. Essa soddisfa

$$\Delta' \psi(\vec{x}') = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (186)$$

Sostituendo la (183) e la (186) nel teorema di Green (182) otteniamo

$$\int_V \left\{ G(\vec{x}-\vec{x}') (-) \frac{\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0} - \phi(\vec{x}') \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \right\} dV' =$$

$$= \int_S \left\{ \underset{\uparrow\, \in S'}{G(\vec{x}-\vec{x}')} \, \vec{n}\cdot\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}') - \phi(\vec{x}') \, \vec{n}\cdot\vec{\nabla}' G(\vec{x}-\vec{x}') \right\} dS \qquad (187)$$

Usando la δ-functions troviamo

$$\boxed{\underset{(\vec{x}\in V)}{\phi(\vec{x})} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_V G(\vec{x}-\vec{x}')\rho(\vec{x}')dV'}_{(1)} - \underbrace{\int_S dS'\, G(\vec{x}-\vec{x}')\, \vec{n}\cdot\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}')}_{(2)} + \underbrace{\int_S dS'\, \phi(\vec{x}')\, \vec{n}\cdot\vec{\nabla}' G(\vec{x}-\vec{x}')}_{(3)}} \qquad (188)$$

Dunque il potenziale $\phi(\vec{x})$ all'interno del volume V è determinato da

(1) distribuzione di carica in V

(2) valore della derivata normale di ϕ sul bordo S' (189)

(3) valore del potenziale ϕ sul bordo S'

~~I due I due valori (2) e (3) non sono in realtà indipendenti, sono collegati dall'equazione di Poisson. Quindi se conosciamo il valore su S' di~~

~~• ϕ~~

~~• o della sua derivata normale~~ ~~(190)~~

I termini (2)+(3) rimpiazzano l'effetto della distribuzione di carica esterna. Infatti possiamo anche scrivere

$$\phi(\vec x) = \underbrace{-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(\vec x,\vec x')\,\rho(\vec x')\,d^3x'}_{(1)} \underbrace{- \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\tilde V} G(\vec x,\vec x')\,\rho(\vec x')\,d^3x'}_{=(2)+(3)} \qquad (190)$$

dal confronto con la (188)

(191)

ove però abbiamo una delle discontinuità su S le (177):

$\cancel{\vec n\cdot\vec\nabla\phi|_s = -\sigma/\varepsilon_0}$

$$\begin{cases} \sigma = \varepsilon_0\, \vec n\cdot\vec\nabla\phi|_s \\ D = -\varepsilon_0\,\phi|_s \end{cases} \qquad (192)$$

Dunque possiamo scrivere la (188) come (usando l'espressione di G)

$$\boxed{\underset{\vec x\in V}{\phi(\vec x)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}\,d^3x' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S dS'\,\frac{\sigma(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S dS'\,D(\vec x')\,\vec n\cdot\vec\nabla'\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)} \qquad (193)$$

Dal confronto con la (137) e la (133)* vediamo che è come se sulla superficie S ci fosse un foglio di carica e un foglio di dipoli. La loro presenza mimica la distribuzione di carica esterna.

. Note σ e D (cioè noti i valori del ~~campo~~ potenziale e della sua derivata normale sul bordo, secondo le (192)) ~~posso~~ (più la distribuzione di carica interna) possiamo ricostruire ϕ in tutto V.

• In realtà $\phi|_S$ e $\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi|_S$ (cioè D e σ) non sono indipendenti, sono collegati dall'eq. di Poisson. Quindi, conoscendo

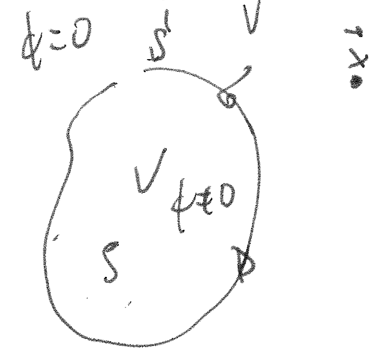
- il valore del potenziale su S (condizioni al bordo di Dirichlet)

oppure

- il valore della sua derivata normale su S (condizioni al bordo di Neumann)

possiamo ricostruire ϕ in tutto V.

• Interpretazione "dall'esterno" della superficie S



Ripartiamo dall'equazione (187) ma scegliamo ora $\vec{x}\in\tilde{V}$:

$$\int_V \left\{ G(\vec{x}-\vec{x}')(-)\frac{\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0} - \phi(\vec{x}')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \right\} \qquad \vec{x}\notin V \Rightarrow \text{otteniamo zero!}$$

$$= \int_S \left\{ G(\vec{x}-\vec{x}')\,\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'\phi(\vec{x}') - \phi(\vec{x}')\,\vec{n}\cdot\vec{\nabla}'G(\vec{x}-\vec{x}') \right\} \qquad (194)$$

densità di sup. di carica — densità sup di dipolo

per cui

$$\boxed{\underset{=\phi(\vec{x})\ \vec{x}\in\tilde{V}}{0} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}dV'}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dS'\,\frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dS'\,D(\vec{x}')\,\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{(3)}}$$

$\vec{x}\in\tilde{V}$

(195)

questo è del tutto analogo alla (193) ma ora

altri termini (2)+(3) cancellano (1) rendendo la configurazione all'esterno (cioè in $\tilde V$) del tutto diversa ($\Phi=0$) da quella originale.

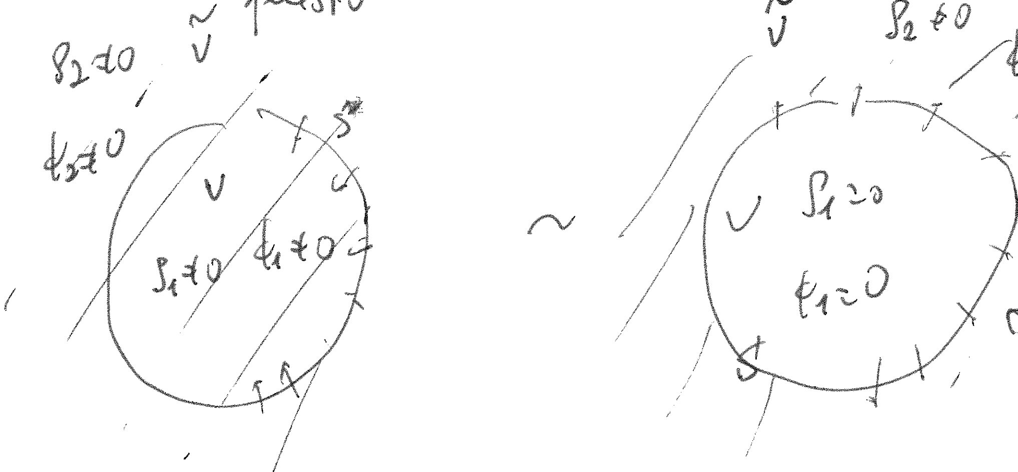
Per l'interno, invece, come abbiamo visto, è equivalente.

È ovviamente possibile scambiare il ruolo di V e $\tilde V$ (interno ed esterno).

Partiamo dall'espressione generale (190) della situazione "originale":

$$\Phi(\vec x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}\,dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tilde V} \frac{\rho(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|}\,dV' \qquad (196)$$

questa volta rimpiazziamo questo



Orientazione della normale è opposta al caso precedente

(197)

⇒ Analogamente alla (193) troveremo

$$\boxed{\Phi(\vec x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tilde V} \frac{\rho(\vec x')\,dV'}{|\vec x-\vec x'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint dS'\,\frac{\tilde\sigma(\vec x')}{|\vec x-\vec x'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint dS'\,\tilde D(\vec x')\,\vec n'\cdot\vec\nabla'\left(\frac{1}{|\vec x-\vec x'|}\right)}$$

$\vec x\in\tilde V$

(198)

Rispetto alla (193), qui compare

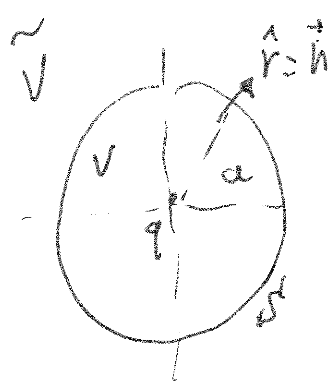
$$\begin{cases}\tilde\sigma = -\sigma\\ \tilde D = D\end{cases} \qquad (199)$$

Infatti $\tilde\sigma = \varepsilon_0\,\vec n'\cdot\vec\nabla'\Phi$ con $\vec n'$ verso l'esterno $\Rightarrow \vec n' = -\vec n$.

Esempio

• Consideriamo una carica puntiforme: $\rho(\vec{x}) = q\,\delta^3(\vec{x})$ (200)

e scegliamo come superficie S una sfera di raggio a centrata nella carica.



In questo caso sappiamo che

$$\begin{cases} \phi(\vec{x}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} \\[2ex] \vec{E}(\vec{x}) = E(r)\,\hat{r} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} \end{cases} \qquad (201)$$

$\forall\, \vec{x}$, sia in V che in $\tilde{V}$.

• La (197) ci dice che deve valere la relazione, per $\vec{x} \in V$,

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dS'\,\frac{\sigma(\vec{x}')}{\underbrace{|\vec{x}-\vec{x}'|}_{R}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dS'\,D(\vec{x}')\,\hat{r}'\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) \qquad (202)$$

dove

$$\begin{cases} \sigma = \varepsilon_0\,\hat{r}\cdot\vec{\nabla}\phi\big|_S = -\varepsilon_0\,\hat{r}\cdot\vec{E}\big|_S = -\dfrac{\varepsilon_0\,q}{4\pi\varepsilon_0\,a^2} = \dfrac{-q}{4\pi a^2} \\[2ex] D = -\varepsilon_0\,\phi\big|_S = -\varepsilon_0\cdot\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a} = \dfrac{-q}{4\pi a} \end{cases} \qquad (203)$$

Notiamo che σ e D sono uniformi, e che

$$D = \sigma a \qquad (204)$$

La (202) diventa dunque

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dS'}{R}}_{(2)} + \underbrace{\frac{D}{4\pi\varepsilon_0}\int dS'\,\frac{\hat{R}\cdot\hat{R}}{R^2}}_{(3)}} \qquad (205)$$

$(\vec{x} \in V)$

A questo punto possiamo utilizzare la (155) e la (108)-(173) che ci dicono che

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dS'}{R} = 4\pi a & \text{per } r<a \\ \displaystyle\int dS' \, \frac{\hat{r}\cdot\hat{R}}{R^2} = -4\pi \end{cases} \qquad (206)$$

così che la (205) diventa

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi a + \frac{D}{4\pi\varepsilon_0}(-4\pi)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{\varepsilon_0}(\underbrace{\sigma a}_{(2)} - \underbrace{D}_{(3)})$$

qs si cancellano per via della (204)

riproducono l'effetto della carica esterna, che è nulla!

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

• La (193) ci dice che, per $\vec{x} \in \tilde{V}$ (cioè fuori dalla sfera: $r>a$) deve ~~scrivere~~ valere

$$0 = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{q\,\delta^3(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,dV'}_{(1)} + \underbrace{\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dS'}{R}}_{(2)} + \underbrace{\frac{D}{4\pi\varepsilon_0}\int dS' \, \frac{\hat{r}\cdot\hat{R}}{R^2}}_{(3)} \qquad (206)$$

$\vec{x} \in \tilde{V}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dS'}{R}}_{(2)} + \underbrace{\frac{D}{4\pi\varepsilon_0}\int dS' \, \frac{\hat{r}\cdot\hat{R}}{R^2}}_{(3)} \qquad (207)$$

Dalle (156) e (163)-(175) abbiamo

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dS}{R} = \frac{4\pi a^2}{r} & , \; r > a \\ \displaystyle\int dS \, \frac{\hat{r}\cdot\hat{R}}{R^2} = 0 \end{cases} \qquad (208)$$

Sostituendo nella (207), e usando le (203) ~~(204)~~ per σ

$$0 = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(-)\frac{q}{\cancel{4\pi a^2}} \cdot \frac{\cancel{4\pi a^2}}{r}}_{(2)} + \underbrace{0}_{(3)} \qquad (209)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \checkmark$$

- Infine, la 198 determina il potenziale all'esterno:

$$\underset{\substack{\vec{x} \notin V \\ \text{i.e. } r > a}}{\phi(\vec{x})} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tilde{V}} q\, \frac{\delta^3(\vec{x}')\,dV'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\tilde{\sigma}}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dS'}{R}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\tilde{D}}{4\pi\varepsilon_0}\int dS' \, \frac{\hat{r}\cdot\hat{R}}{R^2}}_{(3)} \qquad (210)$$

$= 0$ non c'è carica all'esterno!

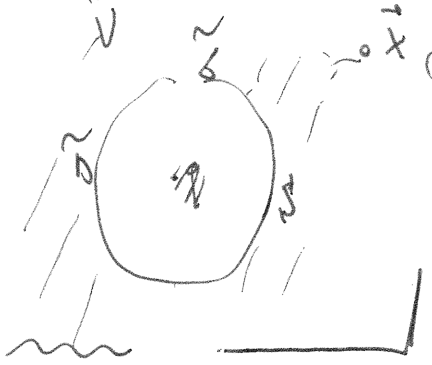
Usando la (199) (203) cioè

$$\tilde{\sigma} = -\sigma = \frac{q}{4\pi a^2} \qquad (211)$$

e le (208) otteniamo

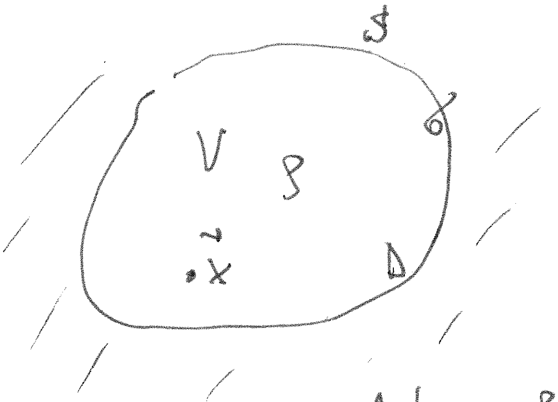
$$\underset{r > a}{\phi(\vec{x})} = 0 + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\cancel{4\pi a^2}} \cdot \frac{\cancel{4\pi a^2}}{r}}_{(2)} + 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (212)$$

che è il ~~[illegible]~~ potenziale originale (212).



ora però il suo valore è attribuito all'effetto della distribuzione di carica $\tilde{\sigma}$ sul bordo S'

- <u>Problema con condizioni al contorno generiche</u>



- Siamo interessati solo all'interno di questa "cavità".
- Vogliamo determinare il potenziale ϕ tale che:

(213)
$$\begin{cases} \Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0 \quad \text{per } \vec{x} \in V \\ \text{Ma le } \underline{\text{condizioni al bordo specificate}}\text{, cioè ha valori specificati} \end{cases}$$

di $\phi|_S$ e $\partial_n \phi|_S$, ovvero sono note D e σ sulla sup S!

("derivata normale" $= \vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi$)

- Posso affrontare il problema utilizzando una <u>funzione di Green</u> <u>adattata alle condizioni al bordo</u>:

$$\boxed{\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}')} \qquad (214)$$

- Il primo termine è la f. di Green $G(\vec{x}-\vec{x}')$ che utilizzavamo usualmente, che è l'<u>unica</u> soluz. di

$$\cancel{\Delta G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})} \quad \Delta' G(\vec{x}-\vec{x}') = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (215)$$