CORSO DI LAUREA IN FISICA

METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA – 20 luglio 2018 (A)

TEMA I

Un punto materiale si muove in un piano ed è soggetto solo a un potenziale $U(\rho)$ (in coordinate polari); le possibili traiettorie del punto soddisfano tutte l'equazione $\rho(\theta) = ae^{b(\theta-c)}$, dove le costanti a, b, c dipendono dal dato iniziale del moto.

Applicando all'equazione della traiettoria il teorema della funzione implicita, per cui $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \dfrac{\dot\rho}{\dot\theta}$, e usando le costanti del moto del sistema, trovare che forma deve avere il potenziale $U(\rho)$.

TEMA II

Un punto materiale si muove in un piano sotto l'azione di un potenziale centrale $U(\rho)$ (in coordinate polari). Detti p_1 e p_2 i momenti coniugati alle coordinate ρ e θ, rispettivamente, e data sullo spazio della fasi la funzione

$$F(\rho, \theta, p_1, p_2) = p_1 p_2 \sin(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\rho}(p_2)^2 + \cos(\theta),$$

calcolare la parentesi di Poisson $\{H, F\}$ e trovare per quale potenziale $U(\rho)$ la funzione F è una costante del moto.

CORSO DI LAUREA IN FISICA

METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA – 20 luglio 2018 (B)

TEMA I

Un punto materiale si muove in un piano ed è soggetto solo a un potenziale $U(x)$ (in coordinate cartesiane ortonormali x, y); le possibili traiettorie del punto soddisfano tutte l'equazione $x = c(y-b)^2 + a$, dove le costanti a, b, c dipendono dal dato iniziale del moto.

Applicando all'equazione della traiettoria il teorema della funzione implicita, per cui $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\dot x}{\dot y}$, e usando le costanti del moto del sistema, trovare che forma deve avere il potenziale $U(x)$.

TEMA II

Un punto materiale si muove in un piano sotto l'azione di un potenziale centrale $U = \dfrac{k}{\rho}$ (in coordinate polari). Detti p_1 e p_2 i momenti coniugati alle coordinate ρ e θ, rispettivamente, e data sullo spazio della fasi la funzione

$$F(\rho, \theta, p_1, p_2) = p_1 p_2 \cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\rho}(p_2)^2 + f(\theta),$$

calcolare la parentesi di Poisson $\{H, F\}$ e determinare $f(\theta)$ in modo che la funzione F sia una costante del moto.

SOLUZIONE TEMA I (A)

La Lagrangiana del sistema è $L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) + U(\rho)$.
Poiché L è independente da t e dalla coordinata θ, sono costanti del moto l'energia totale $\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) - U(\rho) = E$ e il momento angolare $m\rho^2\dot\theta = J$.

Questo permette di determinare $\dot\rho$ e $\dot\theta$ in funzione di ρ e delle due costanti del moto: $\dot\theta = \dfrac{J}{m\rho^2}$ e $\dot\rho = \pm\sqrt{\dfrac{2}{m}(E + U(\rho)) - \dfrac{J^2}{m^2\rho^2}}$.

Su ciascuna traiettoria si ha $\dfrac{d\rho}{d\theta} = abe^{b(\theta-c)} = b\rho$. Usando il teorema della funzione implicita $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \dfrac{\dot\rho}{\dot\theta}$ e prendendo il quadrato di entrambi i membri si trova

$$b^2\rho^2 = \left(\frac{2m}{J^2}(E + U(\rho))\rho^2 - 1\right)\rho^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{J^2}{2m\rho^2}\left(b^2+1\right) - E = U(\rho).$$

Di conseguenza il potenziale, definito a meno di una costante additiva, deve avere la forma $U(\rho) = \dfrac{k}{\rho^2}$, con $k > 0$.

SOLUZIONE TEMA I (B)

La Lagrangiana del sistema è $L = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) + U(x)$.
Poiché L è independente da t e dalla coordinata y, sono costanti del moto l'energia totale $\frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) - U(x) = E$ e il momento coniugato a y, $m\dot y = p_2$.
Questo permette di determinare $\dot x$ in funzione di x e delle due costanti del moto: $\dot x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{m}(E + U(x)) - \dfrac{p_2^2}{m^2}}$.

Su ciascuna traiettoria si ha $\dfrac{dx}{dy} = 2c(y-b) = 2\sqrt{c(x-a)}$. Usando il teorema della funzione implicita $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\dot x}{\dot y}$ e prendendo il quadrato di entrambi i membri si trova

$$4c(x-a) = \frac{2m}{p_2^2}(E + U(x)) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p_2^2}{2m}\left(4c(x-a)+1\right) - E = U(x).$$

Di conseguenza il potenziale, definito a meno di una costante additiva, deve avere la forma $U(x) = kx$.

SOLUZIONE TEMA II (A)

L'Hamiltoniana del sistema è $H = \frac{m}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\rho^2}\right) + U(\rho)$. Le derivate parziali di H e di F sono

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \rho} &= -\frac{p_2^2}{m\rho^3} - \frac{dU}{d\rho} & \frac{\partial H}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{\partial H}{\partial p_1} &= \frac{p_1}{m} & \frac{\partial H}{\partial p_2} &= \frac{p_2}{m\rho^2} \\
\frac{\partial F}{\partial \rho} &= -\frac{p_2^2 \cos(\theta)}{\rho^2} & \frac{\partial F}{\partial \theta} &= p_1 p_2 \cos(\theta) - \frac{p_2^2 \sin(\theta)}{\rho} - \sin(\theta) \\
\frac{\partial F}{\partial p_1} &= p_2 \sin(\theta) & \frac{\partial F}{\partial p_2} &= p_1 \sin(\theta) + \frac{2p_2 \cos(\theta)}{\rho}
\end{aligned}
$$

e quindi la parentesi di Poisson di H e F è

$$\{H, F\} = \frac{p_2 \sin(\theta)}{m\rho^2}\left(m\rho^2 \frac{dU}{d\rho} - 1\right).$$

Affinché F sia una costante del moto, ossia $\{H, F\} = 0$, si deve dunque avere

$$\frac{dU}{d\rho} = \frac{1}{m\rho^2} \qquad \Rightarrow \qquad U(\rho) = -\frac{1}{m\rho}$$

SOLUZIONE TEMA II (B)

L'Hamiltoniana del sistema è $H = \frac{m}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\rho^2}\right) - \frac{k}{\rho}$. Le derivate parziali di H e di F sono

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \rho} &= \frac{k}{\rho^2} - \frac{p_2^2}{m\rho^3} & \frac{\partial H}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{\partial H}{\partial p_1} &= \frac{p_1}{m} & \frac{\partial H}{\partial p_2} &= \frac{p_2}{m\rho^2} \\
\frac{\partial F}{\partial \rho} &= \frac{p_2^2 \sin(\theta)}{\rho^2} & \frac{\partial F}{\partial \theta} &= -p_1 p_2 \sin(\theta) - \frac{p_2^2 \cos(\theta)}{\rho} + \frac{df}{d\theta} \\
\frac{\partial F}{\partial p_1} &= p_2 \cos(\theta) & \frac{\partial F}{\partial p_2} &= p_1 \cos(\theta) - \frac{2p_2 \sin(\theta)}{\rho}
\end{aligned}
$$

e quindi la parentesi di Poisson di H e F è

$$\{H, F\} = \frac{p_2}{m\rho^2}\left(\frac{df}{d\theta} - km\cos(\theta)\right).$$

Affinché F sia una costante del moto, ossia $\{H, F\} = 0$, si deve dunque avere

$$\frac{df}{d\theta} = km\cos(\theta) \qquad \Rightarrow \qquad f(\theta) = km\sin(\theta)$$