Analisi II - 2020/21 - Corso di Studi in Fisica
Prova scritta - 14 giugno 2021

Esercizio 1. Si consideri il campo scalare definito da

$$f(x,y) = \log(x^2 + e^y) + \sqrt{y^2 - \cos x}.$$

(i) Determinare il dominio di f e stabilire se è aperto o chiuso oppure nessuno dei due casi. Il dominio è compatto?
(ii) Verificare che f è differenziabile in $(\pi, 0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto $(\pi, 0, \log(\pi^2 + 1) + 1)$.
(iii) Giustificare l'esistenza della derivata direzionale in $(\pi, 0)$ lungo una generica direzione $v = (v_1, v_2)$ e calcolarla.
Soluzione: (i) Il dominio di f è l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq \cos x\}$. La disugualianza $y^2 \geq \cos x$ vale sicuramente per gli x con $\cos x \leq 0$, cioè per

$$x \in [(1/2 + 2k)\pi, (3/2 + 2k)\pi], \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tutti gli altri x, la disugualianza è equivalente a $|y| \geq \sqrt{\cos x}$. Il dominio è chiuso. Osserviamo che non è limitato, quindi non è compatto. Le derivate parziali sono

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2 + e^y} + \frac{1}{2}\sin x \frac{1}{\sqrt{y^2 - \cos x}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{e^y}{x^2 + e^y} + y\frac{1}{\sqrt{y^2 - \cos x}}.$$

(ii) Essendo f_x e f_y funzioni continue nell'aperto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > \cos x\}$ (che contiene il punto $(\pi, 0)$), f è di classe C^1 in A. Quindi il piano tangente è

$$z = f_x(\pi,0)(x-\pi) + f_y(\pi,0)y + f(\pi,0), \quad \text{cioè} \quad z = \frac{2\pi}{1+\pi^2}(x-\pi) + \frac{1}{1+\pi^2}y + \log(\pi^2+1) + 1.$$

(iii) f è differenziabile in $(\pi, 0)$ e quindi derivabile lungo ogni direzione $v = (v_1, v_2)$ e vale la formula del gradiente:

$$\partial_v f(\pi,0) = \nabla f(\pi,0) \cdot v = \frac{2\pi}{1+\pi^2}v_1 + \frac{1}{1+\pi^2}v_2.$$

Esercizio 2. Considerare la funzione $f(x,y) = \dfrac{|x|^a (y-1)^2 \sin^2(3x)}{x^2 + y^2}$, dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$.

a) Verificare che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ nel caso $a > 0$.

b) Studiare $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ in caso $a = 0$.

Soluzione: Visto che $(y-1)^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 1$ e $\sin t \sim t$ per $t \to 0$, basta studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a (3x)^2}{x^2+y^2} = 9 \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{2+a}}{x^2+y^2}.$$

a) Il risultato segue dal teorema del confronto, osservando che vale la stima

$$0 \leq \frac{|x|^{2+a}}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^{2+a}}{x^2} = |x|^a,$$

e che $|x|^a \to 0$ per $x \to 0$ nel caso $a > 0$.

b) Nel caso $a = 0$, considerando $y = mx$ per $x \to 0$ si vede che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

che dipende da m, quindi il limite non esiste.

Esercizio 3. Determinare tutti i punti critici del campo scalare

$$f(x,y,z) = (x-y)(x^2+y^2-1) + 2(z-1)^2$$

e studiare la loro natura. Esistono punti di massimo o minimo locale per f? Esiste un punto di minimo globale per f? (Giustificare la risposta)

Soluzione: f è un polinomio quindi in particolare è di classe C^2 su $\mathbb{R}^3$. Si verifica che le soluzioni di

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= x^2+y^2-1+2x(x-y) = 0, \\ f_y(x,y,z) &= -x^2-y^2+1+2y(x-y) = 0, \\ f_z(x,y,z) &= 4(z-1) = 0 \end{aligned}$$

sono i punti

$$P_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1), \quad P_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1), \quad P_3 = (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1), \quad P_4 = (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1).$$

Per la matrice Hessiana si ottiene

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x-2y & 2y-2x & 0 \\ 2y-2x & 2x-6y & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Hf(P_2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

e P_1, P_2 sono punti di sella. Inoltre

$$Hf(P_3) = \begin{pmatrix} 8/\sqrt{6} & -4/\sqrt{6} & 0 \\ -4/\sqrt{6} & 8/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Hf(P_4) = \begin{pmatrix} -8/\sqrt{6} & 4/\sqrt{6} & 0 \\ 4/\sqrt{6} & -8/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

Utilizzando il test dei minori risulta che P_3 è uno punto di minimo locale, mentre P_4 è uno punto di sella. Quindi non esistono punti di massimo locale.
Non esiste un minimo globale visto che $f(0,y,1) = -y(y^2-1) \xrightarrow{y\to+\infty} -\infty$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 ed $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia definita da

$$F(x,y) = f(e^x \cos(y-1), e^{xy}+1).$$

Dimostrare che F è invertibile in un intorno del punto $(1,1)$, sapendo che $Jf(e, 1+e) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Soluzione: Sia $g(x,y) = (e^x \cos(y-1), e^{xy}+1)$. Si calcola che $g(1,1) = (e, 1+e)$ e

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y-1) & -e^x \sin(y-1) \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}, \qquad Jg(1,1) = e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, visto che f e g sono di classe C^1, anche lo è F e la chain rule implica

$$JF(1,1) = Jf(g(1,1))Jg(1,1) = e\,Jf(e,1+e)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Risulta che $\det JF(1,1) = -18e^2 \neq 0$ e l'affermazione segue dal teorema di inversione locale (TIL).

Esercizio 5. Si consideri l'equazione

$$2(1-y)^2x^3 + 2t(y-x)e^{ty-1} - t^2y^2 = -t^2 \qquad \text{(con parametro } t \in \mathbb{R}).$$

a) Giustificare che per $t = 2$ l'equazione data definisce implicitamente in un intorno di $x = 1$ un'unica funzione $y = \phi(x)$ tale che $\phi(1) = 1$.

b) [Facoltativo] Esistono dei valori di t per i quali il punto $x = 1$ è un punto stazionario della funzione $g(x) = \phi(x) - 4x$?

Soluzione: Ponendo $f(x, y) := 2(1 - y)^2 x^3 + 2t(y - x)e^{ty-1} - t^2 y^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ l'equazione è $f(x, y) = -t^2$.

a) Si verifica che $f(1, 1) = -t^2$, cioè $x = 1$, $y = 1$ è una soluzione. Si calcola

$$f_y(1, 1) = 2te^{t-1} - 2t^2 = 2t(e^{t-1} - t).$$

Quindi $f_y(1, 1) \neq 0$ per $t = 2$ e il teorema di Dini assicura l'esistenza di ϕ.

b) Si verifica che $f_x(1, 1) = -2te^{t-1}$ e quindi

$$g'(1) = \phi'(1) - 4 = -\frac{f_x(1, 1)}{f_y(1, 1)} - 4 = \frac{e^{t-1}}{e^{t-1} - t} - 4 = \frac{4t - 3e^{t-1}}{e^{t-1} - t}$$

Posto $h(t) = 4t - 3e^{t-1}$, risulta che $g'(1) = 0$ se e solo se $h(t) = 0$. Si osserva che $h(t)$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}$ e $\lim_{t\to\pm\infty} h(t) = -\infty$, inoltre $h'(t) = 0$ per $t = t_0 := 1 + \log(4/3)$, $h(t_0) = 4 \log(4/3) > 0$ e $h'(t) \geq 0$ per $t \leq t_0$, quindi esistono un $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_0 < t_2$ tali che $h(t_1) = h(t_2) = 0$.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale doppio $\displaystyle\int_A x\, dxdy$, dove $A = \Big\{(x, y) \,\big|\, y \geq 1,\ \frac{x^2}{8} \leq y \leq \sqrt{x}\Big\}$.

Soluzione: Si osserva che $A\big\{(x, y) \,\big|\, 1 \leq y \leq 2,\ y^2 \leq x \leq \sqrt{8y}\big\}$ e quindi l'integrale è uguale a

$$\int_1^2 \Big(\int_{y^2}^{\sqrt{8y}} x\, dx\Big) dy = \frac{1}{4}\int_1^2 (16y - y^4)\, dy = 29/10$$

Esercizio 7. Calcolare l'integrale

$$\int_A (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz, \qquad A = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x, y \geq 0\Big\}.$$

Soluzione: Utilizzando coordinate sferiche, si trova che l'integrale è uguale a

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 d\rho \int_0^\pi \rho^2 \sin^2\theta \rho^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{\rho^5}{5}\Big|_{\rho=1}^{\rho=2} \Big(\frac{1}{12}(\cos 3\theta - 9\cos\theta)\Big)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{62}{15}\pi.$$

Esercizio 8. (solo per gli studenti immatricolati a partire dal 2019/20). Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 1)\log(n + 1)}.$$

Soluzione: La serie non è assolutamente convergente; infatti, per il criterio di McLaurin, considerando la funzione positiva e decrescente

$$f(x) = \frac{1}{(x + 1)\log(x + 1)}$$

si ha che la serie ha lo stesso carattere dell'integrale improprio:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x + 1)\log(x + 1)}\, dx = \lim_{c\to\infty} [\log(\log(x + 1))]_2^c = +\infty.$$

La serie converge semplicemente per il criterio di Leibniz. Infatti,

$$b(n) = \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} > 0, n \geq 2$$

$b(n) \to 0$ per $n \to \infty$, e la funzione $b(x) = \frac{1}{(x+1)\log(x+1)}$ è decrescente per $x \geq 2$, come si verifica osservando che

$$\frac{db(x)}{dx} = \frac{\log(x+1) - 1}{[(x+1)\log(x+1)]^2} > 0 \quad x \geq 2.$$