Simulazione 7 - calcoli

Curva

Per ogni $T > 0$ sia γ la curva di equazioni $x(t) = |t| - \sin(t)$, $y(t) = |t| + \sin(t)$, con $t \in [-T, T]$.

1. Per quali T γ chiusa.

γ è chiusa se $\gamma(-T) = \gamma(T)$ ovvero se $\sin(-T) = \sin T$, ovvero se $\sin T = 0$. Per ogni $T = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ la curva quindi chiusa.

2. γ semplice.

In base a quanto osservato aal punto precedente, la curva certamente semplice se $T \in (0, \pi]$; per ogni $T > \pi$ la curva ha invece un'autointersezione, pertanto non semplice.

3. Area della regione del piano racchiusa dal sostegno di γ quando $T = \pi$.

Sia D la regione di piano racchiusa dal sostegno di γ. Consideriamo il campo $\bar{F}(x, y) = (0, x)$. Per la formula di Gauss-Green,

$$\text{area}(D) = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s}\,.$$

Osserviamo che γ parametrizza ∂D. Se γ percorre ∂D in senso antiorario, allora $\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s}$. Se invece γ percorre ∂D in senso orario, allora $\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} &= \int_{-\pi}^{0} \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt + \int_0^\pi \bar{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} (-t - \sin t)(-1 + \cos t)\, dt + \int_0^\pi (t - \sin t)(1 + \cos t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} (t + \sin t - t\cos t - \sin t \cos t)\, dt + \int_0^\pi (t - \sin t + t\cos t - \sin t \cos t)\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (t - \sin t \cos t)\, dt + 2\int_0^\pi (-\sin t + t\cos t)\, dt \\
&= 2\int_0^\pi (-\sin t)\, dt + 2\Big[t \sin t\Big]_{t=0}^{t=\pi} - 2\int_0^\pi \sin t\, dt = 4\cos\pi - 4\cos 0 = -8\,.
\end{aligned}$$

Avendo ottenuto che la circuitazione di $\bar{F}$ lungo γ è negativa e tenendo conto che deve essere $\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} > 0$, deduciamo che γ percorre ∂D in senso orario e quindi

$$\int_{+\partial D} \bar{F} \cdot d\bar{s} = -\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{s}\,.$$

Dunque l'area di D vale 8.

Campo

Si consideri la forma differenziale ω_a, dipendente dal parametro reale a,

$$\omega_a(x, y) = \left[\frac{y - 1}{x^2 + (y-1)^2} + x \right] dx + \left[\frac{-2ax}{x^2 + (y-1)^2} + y \right] dy.$$

1. Dominio, D_a, di ω_a.
La forma è definita su tutto il piano eccetto il punto $(0,1)$. Il dominio non dipende quindi da a ed è un aperto non semplicemente connesso.

2. Chiusura di ω_a
Posto $F(x,y) = \dfrac{y-1}{x^2+(y-1)^2} + x$, $G(x,y) = \dfrac{-2ax}{x^2+(y-1)^2} + y$, si deve avere, per ogni $(x,y) \neq (0,1)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) &\Leftrightarrow \frac{x^2+(y-1)^2-2(y-1)^2}{[x^2+(y-1)^2]^2} = -2a\frac{x^2+(y-1)^2-2x^2}{[x^2+(y-1)^2]^2} \\ &\Leftrightarrow x^2-(y-1)^2 = 2a[x^2-(y-1)^2] \Leftrightarrow (2a-1)[x^2-(y-1)^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

La forma ω_a è quindi chiusa se e solo se $a = \frac{1}{2}$.

3. In corrispondenza dei valori di a per cui ω_a è chiusa, calcolare $\int_{\bar\gamma} \omega_a$, dove $\bar\gamma$ è la circonferenza $x^2+(y-1)^2 = 1$, percorsa in senso antiorario.
Poniamo $\bar\gamma(t) = (\cos t, 1+\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\bar\gamma} \omega_{\frac{1}{2}} &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \cos t(-\sin t) - \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cos t + (1+\sin t)\cos t\right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \sin t\,\cos t - \cos^2 t + \cos t + \sin t \cos t)\, dt = -2\pi.\end{aligned}$$

4. Esattezza di ω_a
Se $a \neq \frac{1}{2}$ la forma non è esatta in quando non è chiusa. Se $a = \frac{1}{2}$, al punto precedente abbiamo calcolato un integrale di ω_a lungo un cammino chiuso e abbiamo trovato un valore diverso da zero. Nemmeno in questo caso quindi la forma può essere esatta.

Flusso
Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $S_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq a\}$ e sia $F(x,y,z) = (xy, y^2-x, z-yz)$.
1. L'insieme S_a.
Essemdo $x^2+y^2+z^2 = 1$ la superficie sferica di raggio 1 con centro nell'origine, la sua intersezione con il semispazio $z \geq a$ è l'intera superficie sferica quando $a \leq -1$, una calotta sferica quando $a \in (-1,1]$ (ridotta ad un punto quando $a = 1$), l'insieme vuoto quando $a > 1$.

2. Flusso di F uscente da S_a quando $a \leq -1$.
Quando $a \leq -1$ la superficie S_a l'intera superficie sferica che chiamiamo S. Utilizziamo quindi il teorema della divergenza per calcolare l'ingrale del flusso di F attraverso S. Indichiamo con $B_1(0)$ la balla di raggio 1 centrata nell'origine e otteniamo

$$\int_S F \cdot N d\sigma = \int_{B_1(0)} \mathrm{div} F\, dxdydz = \int_{B_1(0)} (2y+1)\, dxdydz = 2\int_{B_1(0)} y\, dxdydz + \mathrm{Vol}(B_1(0)).$$

Il primo integrale è nullo (funzione dispari integrata su un dominio pari rispetto alle y), il secondo vale $4\pi/3$.

3. Flusso del rotore di F uscente da S_a, quando $a \in (-1,1)$.
Per calcolare

$$\int_{S_a} \mathrm{rot} F \cdot N d\sigma$$

utilizziamo il Teorema di Stokes. Il bordo ∂S_a è la circonferenza contenuta in $z = a$, centrata in $(0,0,a)$ e raggio $\sqrt{1-a^2}$. Parametrizziamo come segue il bordo ∂S_a in modo che sia orientato in senso positivo

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{1-a^2}\cos t, \sqrt{1-a^2}\sin t, a\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Inoltre essendo $\gamma'(t) = \left(-\sqrt{1-a^2}\sin t, \sqrt{1-a^2}\cos t, 0\right)$, otteniamo

$$\int_{S_a} \mathrm{rot} F \cdot N d\sigma = \int_{\partial S_a} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = -(1-a^2) \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = (a^2-1)\pi.$$

Serie

Si consideri la serie di potenze in campo complesso $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n} (z-i)^n$.

1. Raggio di convergenza.
La serie è una serie di potenze di centro $z_0 = i$ e coefficienti $a_n = \frac{\log n}{2^n}$. Il suo raggio di convergenza si può ottenere calcolando

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{2^{n+1}} \frac{2^n}{\log n} = \frac{1}{2}$$

e quindi $R = \frac{1}{L} = 2$. Il disco aperto di convergenza è $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-i| < 2\}$.

2. Convergenza in $z = 0$
Essendo $|z_0 - 0| = 1 < 2$, la serie converge in $z = 0$.

3. Convergenza in $z = 2$
Essendo $|i - 2| = \sqrt{5} > 2$, la serie non converge in $z = 2$.

4. Convergenza uniformemente in $\overline{D_r} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-i| \le r\}$
Se $z \in \partial D$ allora $|z-i| = 2$ e $|a_n(z-i)^n| = \log n$ che non converge a 0. Quindi in tutti i punti di ∂D la serie non converge. La teoria generale sulle serie di potenze in campo complesso garantisce che la serie converge uniformemente nei dischi chiusi contenuti in D in particolare in $\overline{D_r}$ per ogni $r \in (0,2)$ ma non per $r = 2$..
5. Convergenza uniformemente in $\overline{C_r} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \le r\}$
Si ragiona in modo del tutto analogo al punto precedente e si conclude osservando che $\overline{C_r} \subset D$, per ogni $r \in (0,1)$ ma non per $r = 1$.