Corso di Studio in Fisica

Tutorato di Analisi III

Curve, integrali curvilinei, campi e potenziali, formula di Gauss-Green

Esercizio 1. Si calcoli la lunghezza delle seguenti curve:

1. $\bar{\gamma}_1(t) = (\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
2. $\bar{\gamma}_2(t) = (t, \ln\cos t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$;
3. $\bar{\gamma}_3(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \qquad t \in [0, \pi]$.

Soluzione.
In tutti i casi useremo la formula

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

1. Vale $\bar{\gamma}_1'(t) = (t\sin t, t\cos t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, da cui segue che $|\bar{\gamma}_1'(t)| = t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pertanto, si ha:

$$L(\bar{\gamma}_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Risulta

$$\bar{\gamma}_2'(t) = \left(1, -\frac{\sin t}{\cos t}\right), \qquad \text{da cui} \quad |\bar{\gamma}_2'(t)| = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{|\cos t|}.$$

Pertanto:

$$L(\bar{\gamma}_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{|\cos t|}\, dt.$$

Questo integrale si può risolvere con il cambiamento di variabile $s = \tan(t/2)$, usando la formula parametrica del coseno $\cos t = \frac{1-s^2}{1+s^2}$. In tal modo, si ottiene:

$$\begin{aligned} L(\bar{\gamma}_2) &= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{ds}{1-s^2}\, ds = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{ds}{1+s} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{ds}{1-s}\, ds \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \ln(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

3. Risulta $\bar{\gamma}_3'(t) = (-3\cos^2 t\sin t, 3\cos t\sin^2 t)$, $t \in [0, \pi]$, da cui segue che $|\bar{\gamma}_3'(t)| = 3|\cos t| \cdot |\sin t|$, $t \in [0, \pi]$. Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned} L(\bar{\gamma}_3) &= \int_0^{\pi} 3|\cos t\sin t|\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\sin t\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\cos t\sin t\, dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, dt - \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2t)\, dt \\ &= -\frac{3}{4}[\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}[\cos(2t)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\bar\gamma} \sqrt{1 + x^2 + 3y}\ ds,$$

dove $\bar\gamma$ è l'arco di parabola di equazione $y = x^2$, con $x \in [0, 3]$.

Soluzione.
Scrivendo la formula in forma parametrica si ha: $\bar\gamma(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 3]$. Perciò il vettore tangente è $\bar\gamma'(x) = (1, 2x)$, $x \in [0, 3]$. Se indichiamo con $|\bar v|$ la norma euclidea di un vettore $\bar v \in \mathbb{R}^n$, l'integrale curvilineo di prima specie di f lungo $\bar\gamma$ è

$$\begin{aligned} I &= \int_{\bar\gamma} f ds \int_0^3 f(\bar\gamma(x))\, |\bar\gamma'(x)| dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + x^2 + 3x^2}\, \sqrt{1 + 4x^2} dx = \int_0^3 (1 + 4x^2) = 39. \end{aligned}$$

Osserviamo che se avessimo avuto invece di $\bar\gamma$ la curva $\bar\beta$, dove

$$\bar\beta(x) = ((3 - x), (3 - x)^2), \quad x \in [0, 3],$$

avremmo trovato lo stesso

$$J = \int_{\bar\beta} \sqrt{1 + x^2 + 3y}\, ds = I = 39.$$

Infatti $\bar\beta$ è la curva opposta di $\bar\gamma$ (si scrive $\bar\beta = -\bar\gamma$; $\bar\beta$ ha lo stesso sostegno di $\bar\gamma$ percorso in senso opposto) e **l'integrale curvilineo di prima specie non dipende dal verso di percorrenza della curva che consideriamo.**

Esercizio 3. Sia $\bar\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, ht)$, $t \in [0, 2\pi]$ ($R > 0$ ed $h \in \mathbb{R}$, parametri assegnati). Si calcolino gli integrali curvilinei

$$M = \int_{\bar\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds \ \text{ e } \ J = \int_{\bar\gamma} (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) ds.$$

Soluzione.
Il vettore tangente è $\bar\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t, h)$, $t \in [0, 2\pi]$; la sua norma è

$$|\bar\gamma'(t)| = \sqrt{R^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + h^2} = \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Poniamo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)$; risulta:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\bar\gamma} f ds = \int_0^{2\pi} f(\bar\gamma(t))\, |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 + \gamma_3(t)^2\Big) \sqrt{R^2 + h^2} dt = \int_0^{2\pi} \Big(R^2 + h^2 t^2\Big) \sqrt{R^2 + h^2} dt \\ &= \sqrt{R^2 + h^2} \Big(2\pi R^2 + h^2 \frac{(2\pi)^3}{3}\Big); \\ J &= \int_{\bar\gamma} g ds = \int_0^{2\pi} g(\bar\gamma(t))\, |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(R^2 + h^2 t^2\Big) R^2 \sqrt{R^2 + h^2} dt = R^2 \sqrt{R^2 + h^2} \Big(2\pi R^2 + h^2 \frac{(2\pi)^3}{3}\Big). \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si calcoli l'integrale curvilineo di $f(x,y) = xy$ lungo la porzione dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ contenuta nel quadrante $x \geq 0, y \geq 0$.

Soluzione.
Osserviamo che l'insieme dato è il sostegno della curva regolare semplice

$$\bar{\gamma}(t) = (2\cos t, 3\sin t), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Osserviamo che $\bar{\gamma}'(t) = (-2\sin t, 3\cos t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, da cui segue che $|\bar{\gamma}'(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t} = \sqrt{4 + 5\cos^2 t}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pertanto, vale:

$$\int_{\bar{\gamma}} f\,ds = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{4 + 5\cos^2 t}\,dt = -\frac{2}{5}\left[(4 + 5\cos^2 t)^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{38}{5}.$$

Esercizio 5. Si calcoli la lunghezza della curva cardiode $\bar{\gamma}$, descritta in forma polare da $\rho = 2a(1 + \cos\theta)$, dove $\theta \in [-\pi, \pi]$ e $a > 0$ è un parametro fissato.

Soluzione. La curva è

$$\bar{\gamma}(\theta) = \rho(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = 2a(1 + \cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Il vettore tangente è $\bar{\gamma}'(\theta) = \rho'(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + \rho(\theta)(-\sin\theta, \cos\theta)$. Osservando che i versori $(\cos\theta, \sin\theta)$ e $(-\sin\theta, \cos\theta)$ sono ortogonali (per ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$), si ha: $|\bar{\gamma}'(\theta)| = \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}$.

Usando la formula $(\cos(t/2))^2 = \frac{1+\cos t}{2}$, la lunghezza è

$$\begin{aligned} L(\bar{\gamma}) &= \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{\gamma}'(\theta)| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta \\ &= 2\sqrt{2}a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta} d\theta = 4a \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta \\ &= 8a \int_0^{\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta = 16a \int_0^{\pi/2} \cos u du = 16a. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Si calcolino la lunghezza L e il baricentro (x_g, y_g) della curva cicloide $\bar{\gamma}(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $R > 0$ (per il calcolo del baricentro si supponga la curva materiale omogenea con densità uguale a 1).

Soluzione.
Cominciamo a calcolare la lunghezza $L(\bar{\gamma})$ della curva $\bar{\gamma}$. Il vettore tangente è $\bar{\gamma}'(t) = R(1 - \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$; la sua norma è

$$|\bar{\gamma}'(t)| = \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + \sin t^2} = R\sqrt{2}\sqrt{(1 - \cos t)}.$$

Usando che $(\sin(t/2))^2 = \frac{1-\cos t}{2}$, si trova:

$$\begin{aligned} L(\bar{\gamma}) &= \int_0^{2\pi} |\bar{\gamma}'(t)| dt \\ &= R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)} dt = R\sqrt{2}\sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin(t/2)| dt \\ &= 4R \int_0^{\pi} |\sin(u)| du = 8R. \end{aligned}$$

Ricordiamo che il baricentro ha coordinate (x_g, y_g) date dalla formula

$$x_g = \frac{1}{L(\bar{\gamma})} \int_{\bar{\gamma}} x\,ds, \quad y_g = \frac{1}{L(\bar{\gamma})} \int_{\bar{\gamma}} y\,ds.$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
x_g &= \frac{1}{8R} R^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} R \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\,\sqrt{2}\,|\sin(t/2)|\,dt = \frac{R}{2} \int_0^{\pi} (2u - \sin(2u))\,\sin u\,du \\
&= \frac{R}{2}\Big(\int_0^{\pi} 2u \sin u du - \int_0^{\pi} \sin u \sin(2u)\,du \Big) = \pi R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_g &= \frac{1}{8R} R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} R \int_0^{2\pi} 2\sin^2(t/2)\ \sqrt{2}|\sin(t/2)|dt = R \int_0^{\pi} \sin^2(u)\ \sin(u)\,du = \frac{4}{3}R.
\end{aligned}$$

Esercizio 7. Si calcoli l'area della superficie laterale del cilindroide

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2,\ 0 \le z \le 5 - 2x\}.$$

Soluzione.
L'area A richiesta si può ottenere attraverso un integrale curvilineo di I specie. Si considera il campo scalare $f(x,y) = 5 - 2x$ e la curva $\bar{\gamma}(t) = \sqrt{2}(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (si noti che $(f \circ \bar{\gamma})(t) \ge 0$, per $t \in [0, 2\pi]$).
Risulta

$$A = \int_{\bar{\gamma}} f\,ds = \int_0^{2\pi} f(x(t), y(t))\,|\bar{\gamma}'(t)|dt = \int_0^{2\pi} (5 - 2\sqrt{2}\cos t)\sqrt{2}dt = 10\sqrt{2}\,\pi.$$

Esercizio 8. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\bar{F}(x,y) = (x^2, xy^2), \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si calcoli l'integrale di linea (di II specie) $\int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s}$, dove $\bar{\gamma}$ è il bordo del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ percorso in senso antiorario.

Soluzione.
Possiamo parametrizzare il quadrato con le seguenti curve:

$$\begin{aligned}
&\bar{\gamma}_1(t) = (t, 0), \quad t \in [0,1] \\
&\bar{\gamma}_2(t) = (1, t), \quad t \in [0,1] \\
&\bar{\gamma}_3(t) = (1-t, 1), \quad t \in [0,1] \\
&\bar{\gamma}_4(t) = (0, 1-t), \quad t \in [0,1]
\end{aligned}$$

Calcoliamo quindi l'integrale di linea di II specie nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar s &= \sum_{i=1}^{4} \int_{\bar\gamma_i} \bar F((\bar\gamma_i(t))) \cdot \bar\gamma_i'(t)dt \\
&= \int_0^1 (t^2, 0) \cdot (1,0)dt + \int_0^1 (1, t^2) \cdot (0,1)dt \\
&+ \int_0^1 ((1-t)^2, (1-t)) \cdot (-1,0)dt + \int_0^1 (0,0) \cdot (0,-1)dt \\
&= \int_0^1 [t^2 + 2t - 1]dt = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 9. Si consideri il campo vettoriale $\bar F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$
\bar F(x,y) = (xy^2, x^2 + y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.
$$

Si calcoli l'integrale di linea (di II specie) $\int_{\bar\gamma} \bar F \cdot d\bar s$, dove $\bar\gamma$ è il bordo del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \le 1,\, x \ge 0,\, y \ge 0\}$ percorso in senso antiorario.

Soluzione.
Possiamo parametrizzare il dominio con le seguenti curve:

$$
\begin{aligned}
&\bar\gamma_1(t) = (t, 0), \quad t \in [0,1] \\
&\bar\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \\
&\bar\gamma_3(t) = (0, 1-t), \quad t \in [0,1]
\end{aligned}
$$

Calcoliamo quindi l'integrale di linea di II specie nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\int_{\bar\gamma} \bar f \cdot d\bar s &= \sum_{i=1}^{3} \int_{\bar\gamma_i} \bar F((\bar\gamma_i(t))) \cdot \bar\gamma_i'(t)dt \\
&= \int_0^1 (0, t^2) \cdot (1,0)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin^2 t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t)dt \\
&+ \int_0^1 (0, (1-t)^2) \cdot (0,-1)dt \\
&= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos t \sin^3 t + \cos t]dt - \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

Esercizio 10. Si consideri il campo vettoriale $\bar F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$,

$$
\bar F(x,y) = \Big(2x \log y, \frac{x^2}{y} + y\Big), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y > 0\}.
$$

Si provi che $\bar F$ è conservativo su $\mathbb{R}^2_+$. Si calcoli un potenziale di $\bar F$.

Soluzione.
Provare che $\bar F$ è conservativo significa dimostrare che ammette un potenziale. Equivalentemente, siccome $\mathbb{R}^2_+$ è un aperto semplicemente connesso in quanto

convesso, un'altra strada sarebbe dimostrare che è irrotazionale.
Trovare un potenziale significa trovare una funzione

$$U\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} \text{ almeno } \mathcal{C}^1 \text{ tale che } \nabla U = \bar{F}.$$

Vogliamo quindi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \log y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + y,$$

da cui

$$U(x,y) = x^2 \log y + f(y), \quad \text{con f di classe } \mathcal{C}^1$$

$$f(y) = \frac{1}{2}y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Un potenziale per il campo vettoriale $\bar{F}$ è pertanto una qualunque funzione del tipo

$$U(x,y) = x^2 \log y + \frac{1}{2}y^2 + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}$$

Esercizio 11. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\bar{F}(x,y,z) = \Big(z + ax + by, x + 2y + z, ax + by\Big), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

dipendente dai parametri $a, b \in \mathbb{R}$. Si determinino i parametri a e b in modo che $\bar{F}$ sia conservativo su $\mathbb{R}^3$. Con la precedente scelta dei parametri, si calcoli un potenziale di $\bar{F}$.

Soluzione.
Provare che $\bar{F}$ è conservativo significa dimostrare che ammette un potenziale. Equivalentemente, siccome $\mathbb{R}^3$ è un aperto semplicemente connesso in quanto convesso, un'altra strada sarebbe dimostrare che è irrotazionale.
Trovare un potenziale significa trovare una funzione

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ almeno } \mathcal{C}^1 \text{ tale che } \nabla U = \bar{F}.$$

Vogliamo quindi trovare il potenziale di $\bar{F}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= z + ax + by \implies U_1(x,y,z) = zx + \frac{1}{2}ax^2 + bxy + f(y,z) \\
\frac{\partial U_1}{\partial y} &= bx + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = x + 2y + z \iff b = 1 \text{ e } \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = x + 2y + z \\
&\iff f(y,z) = y^2 + zy + g(z) \\
&\implies U_2(x,y,z) = zx + \frac{1}{2}ax^2 + xy + y^2 + zy + g(z) \\
\frac{\partial U_2}{\partial z} &= x + y + g'(z) = ax + y \iff a = 1 \text{ e } g(z) = C
\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che il campo $\bar{F}$ è conservativo per $a = b = 1$ e un suo potenziale è

$$U(x,y,z) = zx + \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + zy + C$$

Esercizio 12. Si determini $f \in C^1(\mathbb{R})$, con $f(x) \neq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, in modo che il campo vettoriale

$$\bar{F}(x,y) = \Big(xf(x)y^2, -y\log|f(x)|\Big)$$

sia conservativo su $\mathbb{R}^2$. Dopo aver trovato tale f, si calcoli un potenziale di $\bar{F}$.

Soluzione.
Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, $\bar{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \Longleftrightarrow \quad 2xf(x)y = -\frac{y}{f(x)}f'(x).$$

Se $y = 0$, l'uguaglianza è verificata, se invece $y \neq 0$:

$$2x = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \Longleftrightarrow x^2 = -\frac{1}{f(x)} + C \Longleftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + C}$$

Scegliamo C=1 e abbiamo che

$$\bar{F}(x,y) = \Big(\frac{xy^2}{x^2+1}, y\log|x^2+1|\Big), \quad U(x,y) = \frac{1}{2}y^2\log(x^2+1) + C.$$

Esercizio 13. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F}_a$ (dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$)

$$\bar{F}_a(x,y,z) = \Big(z^2 - 2y^2 + \frac{2y}{1+x}, a\log(1+x) - 4xy, 2xz - 2\Big).$$

(i) Si determini il dominio D di $\bar{F}_a$.
(ii) Per quali valori di a, $\bar{F}_a$ è conservativo in D?
(iii) Si calcoli un potenziale di $\bar{F}_a$ (in corrispondenza a quei valori di a per cui è conservativo), usando il metodo dell'integrazione lungo poligonali.
(iv) Si calcoli l'integrale curvilineo di II specie $\int_{\bar{\gamma}} \bar{F}_a \cdot d\bar{s}$, quando $\bar{F}_a$ è conservativo e

$$\bar{\gamma}(t) = (\sin(t\pi), e^t - 1, t^2), \quad t \in [0,1].$$

Soluzione.
Il dominio di $\bar{F}_a$ è $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + x > 0\big\}$: notiamo che D è un semispazio, quindi è semplicemente connesso. Di conseguenza, $\bar{F}$ è conservativo se e solo se è irrotazionale. La condizione affinché il campo sia irrotazionale è che $a = 2$, infatti:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \Longleftrightarrow \frac{a}{1+x} - 4y = \frac{2}{1+2} - 4y \Longleftrightarrow a = 2$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \Longleftrightarrow 2z = 2z$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \Longleftrightarrow 0 = 0$$

Per calcolare un potenziale di $\bar{F}_1$, possiamo scegliere $barx_0 = (0,0,0)$ e integrare lungo il cammino $\gamma = \gamma_x \cup \gamma_y \cup \gamma_z$, dove:

$$\gamma_x = (t,0,0), \quad t \in [0,x]$$
$$\gamma_y = (x,t,0), \quad t \in [0,y]$$
$$\gamma_z = (x,y,t), \quad t \in [0,z]$$

Otteniamo dunque che un potenziale è

$$U(x,y,z) = \int_{\gamma_x} \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_{\gamma_y} \bar{F} \cdot + \int_{\gamma_z} \bar{F} \cdot d\bar{s}$$
$$= xz^2 - 2xy^2 + 2y\log(1+x) - 2z$$

Data $\bar{\gamma}(t) = (\sin(t\pi), e^t - 1, t^2), \quad t \in [0,1]$, visto che il campo è conservativo, abbiamo che

$$\int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s} = U(\bar{\gamma}(1)) - U(\bar{\gamma}(2))$$
$$= U(0, e-1, 1) - U(0,0,0) = -2$$

Esercizio 14. Sia data la forma differenziale

$$\omega = \left(\log y + \frac{z}{x}\right) dx + \left(\log z + \frac{x+1}{y}\right) dy + \left(\log x + \frac{y+2}{z}\right) dz$$

(i) Verificare che ω è esatta sul suo dominio.

(ii) Determinare una primitiva di ω sul suo dominio.

(iii) Calcolare $\int_{\bar{\gamma}} \omega$ essendo $\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\bar{\gamma}(t) = (t+2, t+3, t+4)$, $t \in [0,1]$.

Soluzione.
Il dominio è $D = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$, dunque è semplicemente connesso, quindi per verificare che è esatta basta controllare che ω sia chiusa. Una primitiva è:

$$U(x,y,z) = (x+1)\log y + z\log x + (y+2)\log z$$

Abbiamo dunque che

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega = U(\bar{\gamma}(1)) - U(\bar{\gamma}(0)) = U(3,4,5) - U(2,3,4)$$

Esercizio 15. Si consideri la forma differenziale ω,

$$\omega(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy, \quad (x,y) \in D,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$.
(i) Si provi che ω è chiusa in D.
(ii) Si calcoli l'integrale di ω sulla curva $\bar{\gamma}$, cioè $\int_{\bar{\gamma}} \omega$, dove $\bar{\gamma}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0,\pi]$; è vero che ω è esatta in D?
(iii) Si verifichi (senza fare calcoli) che

$$\int_{\bar{r}} \omega = 0, \quad \text{dove } \bar{r}(t) = (1 + \frac{1}{2}\cos t, \sin t + \cos t), \ t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione.
ω è chiusa in D, infatti

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

D non è semplicemente connesso: ω è chiusa, ma non è esatta infatti

$$\int_{\bar{\gamma}} \omega = 2\pi.$$

Possiamo notare che ω è esatta in ogni aperto semplicemente connesso contenuto nel dominio di ω (in particolare lo è sui semispazio che non contengono $\underline{0}$): poiché $\bar{r}(t) \geq \frac{1}{2}$, possiamo dedurre che

$$\int_{\bar{r}} \omega = 0.$$

Esercizio 16. Calcolare l'integrale curvilineo (di II specie) del campo $\bar{F}(x,y) = (xy, -1-x^2)$ lungo il bordo del triangolo T di vertici $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$ percorso in senso antiorario, direttamente e usando il teorema di Gauss-Green.

Soluzione.
Dato il campo $\bar{F}(x,y) = (F_1, F_2) = (xy, -1-x^2)$, Tuttavia, essendo il triangolo limitato in $\mathbb{R}$, possiamo applicare Gauss Green e otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_T \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \right) dxdy \\
&= \int_T (-2x - x) dxdy = \int_T -3x dxdy \\
&= \dots \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 17. Si consideri il campo vettoriale $\bar{F}(x,y) = (xy^2, x^2+y^2)$.
(i) Si calcoli l'integrale di linea (o di II specie) $\int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s}$, dove $\bar{\gamma}$ è il bordo del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2+y^2 \leq 1, \, x \geq 0, \, y \geq 0\}$, bordo orientato positivamente.
(ii) Applicando la formula di Gauss-Green, si deduca dal punto (i) quanto vale

$$\iint_D (x - xy) \, dx \, dy \, .$$

Soluzione.

Applicando Gauss-Green e riparametrizzando il dominio con

$$x = \rho \cos\theta \quad y = \rho \sin\theta, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \rho \in [0,1];$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_D (2x - 2xy)\, dxdy = \int_D 2x\,(1-y)\, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\rho^2 \cos\theta(1 - \rho\sin\theta) d\rho d\theta \\ &= \dots \\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

Esercizio 18. Usando la formula di Gauss-Green, calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_{+\partial D} (-yx^2\, dx + xy^2\, dy)$$

dove $+\partial D$ è il bordo (orientato positivamente) del dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

Soluzione.
Il campo è $\bar{F}(x, y) = (-yx^2, xy^2)$. Applicando Gauss Green e riparametrizzando il dominio con

$$x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \rho \in [0, 2\sin\theta];$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_D \left(y^2 + x^2\right) dxdy \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 \rho d\rho d\theta \\ &= \dots \\ &= \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

Esercizio 19. Si consideri un arco di cicloide, di equazioni $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ con $t \in [0, 2\pi]$. Sia Γ il sostegno di tale curva, che unisce i punti $A = (0, 0)$ e $B = (2\pi, 0)$, e sia D l'insieme delimitato da Γ e dal segmento congiungente A e B. Calcolare l'area di D e l'integrale

$$\iint_D y\, dx\, dy\,.$$

Soluzione.
Il dominio D è delimitato dalle due curve

$$\gamma_1(t) = (t, 0), t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2 = -\gamma, \text{ dove } \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$$

Per calcolare l'area di D possiamo applicare Gauss-Green e vedere

$$\iint_D dx\, dy\,.$$

come integrale di linea lungo il bordo positivamente orientato di D ad esempio del campo $\bar{F}(x,y) = (-y, 0)$.

$$\begin{aligned}\iint_D dxdy &= \int_{\bar{\gamma}_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} - \int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s}s \\ &= 0 - \int_0^{2\pi} (-1+\cos t, 0)(1-\cos t, \sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = 3\pi\end{aligned}$$

L'integrale doppio si può calcolare usando di nuovo la formula di Gauss-Green come integrale di linea lungo il bordo positivamente orientato di D ad esempio del campo $\bar{F} = (-\frac{1}{2}y^2, 0)$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\iint_D ydxdy &= \int_{\bar{\gamma}_1} \bar{F} \cdot d\bar{s} - \int_{\bar{\gamma}} \bar{F} \cdot d\bar{s}s \\ &= 0 - \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}(-1+\cos t)^3 dt \\ &= \frac{5}{2}\pi\end{aligned}$$

Esercizio 20. Siano $f, g \in C^1(D)$, dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio limitato per cui vale la formula di Gauss-Green. Si verifichino le seguenti formule di integrazione per parti:

$$\iint_D f g_x \, dx\, dy = \int_{+\partial D} f g \, dy - \iint_D f_x g \, dx\, dy\,,$$

$$\iint_D f g_y \, dx\, dy = -\int_{+\partial D} f g \, dx - \iint_D f_y g \, dx\, dy\,.$$

Soluzione.
Per dimostrare la seguente uguaglianza

$$\iint_D f g_x \, dx\, dy = \int_{+\partial D} f g \, dy - \iint_D f_x g \, dx\, dy\,,$$

applichiamo Gauss Green considerando $\bar{F} = (0, fg)$

$$\begin{aligned}\int_{+\partial D} fg\, dy &= \int_{+\partial D} (0, fg) \cdot \, d\bar{s} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(fg) - \frac{\partial}{\partial y}(0) \right) dxdy \\ &= \iint_D (f_x g + f g_x) dxdy\end{aligned}$$

La seconda uguaglianza si dimostra in modo analogo considerando $\bar{F} = (fg, 0)$.