Tecria di perturbazione dependente dal tempo

Cominciamo con un insieme completo di stati per un' Hamiltoniana H_0

$$H_0 |n\rangle = E_n^{(0)} |n\rangle$$

Un stato generico $|\psi(t)\rangle$ per la sistema imperturbata

$$|\psi_0(t)\rangle = \sum_n C_n^{(0)} |n(t)\rangle$$

dove

$$|n(t)\rangle = e^{-i/\hbar E_n^{(0)} t} |n\rangle$$

Quando introducciamo una pertubazione H_1 con una dipendenza dal tempo

$$H = H_0 + H_1(t)$$

lo stato generico $|\psi(t)\rangle$ soddisfa l'equazione di schrödinger

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$$

e può essere scritto usando la base ortonormale $|n(t)\rangle$, quindi

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|n(t)\rangle$$

dove dobbiamo determinare i coefficienti $c_n(t)$.

$\star$ $c_n(t) = \langle n(t)|\psi(t)\rangle$ (NB $|c_n(t)|^2 = |\langle n|\psi(t)\rangle|^2$)

$\star$ $$H|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,H|n(t)\rangle$$
$$= \sum_n c_n(t)\,e^{-i/\hbar E_n^{(0)} t}\,H|n\rangle$$
$$= \sum_n c_n(t)\,e^{-i/\hbar E_n^{0} t}\,(H_0 + H_1(t))|n\rangle$$

$$= \sum_n c_n(t)\, e^{-i/\hbar\, E_n^{(0)} t} \left(E_n^{(0)} + H_1(t)\right) |n\rangle$$

$$= \sum_n \left(c_n(t)\, E_n^{(0)} + c_n(t)\, e^{-i/\hbar\, E_n^{(0)} t}\, H_1(t)\, e^{i/\hbar\, E_n^{(0)} t}\right) |n(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = i\hbar \sum_n \left(c_n(t) \frac{\partial}{\partial t} |n(t)\rangle + \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} |n(t)\rangle \right)$$

$$= \sum_n \left(c_n(t)\, E_n^{(0)} + i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} \right) |n(t)\rangle$$

$$\boxed{\Rightarrow \sum_n \left(i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} - c_n(t)\, \tilde{H}_{1,n}(t) \right) |n(t)\rangle = 0}$$

dove $\tilde{H}_{1,n}(t) = e^{-i/\hbar\, E_n^{(0)} t}\, H_1(t)\, e^{i/\hbar\, E_n^{(0)} t}$

Se facciamo la contrazione con uno stato $|k(t)\rangle$ troviamo un sistema di equazioni differenziali accoppiate.

- $\langle k | n \rangle = \delta_{kn}$.

- $\langle k(t) | n(t) \rangle = e^{i/\hbar E_k^{(0)} t} e^{-i/\hbar E_n^{(0)} t} \delta_{kn}$
$$= e^{-i/\hbar (E_n^{(0)} - E_k^{(0)}) t} \delta_{kn}$$

$$\Rightarrow \sum_n \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_n(t) e^{-i/\hbar (E_n^{(0)} - E_k^{(0)}) t} \delta_{kn} \right.$$

$$\left. - c_n(t) \langle k(t) | \tilde{H}_{1,n}(t) | n(t) \rangle \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} c_k(t) &= \frac{-i}{\hbar} \sum_n c_n(t) \langle k(t) | \tilde{H}_{1,n} | n(t) \rangle \\ &= \frac{-i}{\hbar} \sum_n c_n(t) \langle k | H_1 | n \rangle e^{-i/\hbar (E_n^{(0)} - E_k^{(0)}) t} \qquad (*) \end{aligned}}$$

Ora, possiamo risolvere il sistema usando un espansione perturbativo

$$c_n(t) = c_n^{(0)}(t) + c_n^{(1)}(t) + \cdots$$

Integrare $(*)$ tra 0 e t' per ottenere

$$C_k(t') = C_k(0) - \frac{i}{\hbar}\sum_n \int_0^{t'} dt\, C_n(t) \langle k(t)| \overbrace{\tilde{\hat{H}}_{1,n}(t)}^{O(\lambda)} |n(t)\rangle$$

quale, fino a primo ordine,

$$\lambda^0 : C_k^{(0)}(t') = C_k^{(0)}(0)$$

$$\lambda^1 : C_k^{(1)}(t') = \cancelto{0}{C_k^{(1)}(0)} - \frac{i}{\hbar}\sum_n \int_0^{t'} dt\, C_n^{(0)}(t) \times$$

$$\langle k(t)| \tilde{\hat{H}}_{1,n}(t) |n(t)\rangle$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_n \int_0^{t'} dt\, C_n^{(0)} \langle k| H_1 |n\rangle e^{-i/\hbar\,(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})t}$$

Descrizione usando la rappresentazione di interazione

Ricordi: la definizione per la rappr. di Heisenberg. l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H_S(t) |\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t) |\psi(0)\rangle}$$

con $\mathcal{U}(t) = T\left\{ \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' H_S(t') \right) \right\}$

In caso di un' Hamiltoniana indep. dal tempo; $H_S(t) \equiv H_S$

$$\mathcal{U}(t) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} H_S t \right)$$

L'operatori nella rappresentazione di Heisenberg sono O_H dove

$$O_H(t) = U^\dagger(t)\, O_S\, U(t)$$

$$\langle O(t)\rangle = \langle \psi(t) | O_S | \psi(t)\rangle$$
$$= \langle \psi(0) | O_H | \psi(0)\rangle .$$

Torniamo al caso di un'Hamiltoniana

$$H_S(t) = H_{0,S} + H_{1,S}(t)$$

dove $H_{0,S}$ é indep. dal tempo. Introducciamo la rappresentazione di interazione,

$$|\psi(t)\rangle_I = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} H_{0,S}\, t\right) |\psi(t)\rangle .$$
$$= U_0(t)\, |\psi(t)\rangle$$

Esercizio Mostra che

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = H_{1,I}(t)\, |\psi(t)\rangle_I$$

dove $H_{1,I}(t) = U_0^\dagger(t)\, H_{1,S}(t)\, U_0(t)$

il soluzione formale per l'evoluzione dal $t=t_0$ é

$$|\psi(t)\rangle_I = \mathcal{U}_I(t,t_0)\,|\psi(t_0)\rangle_I \quad ,$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_I(t,t_0) = H_{1,I}(t)\,\mathcal{U}_I(t,t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_I(t,t_0) = T\left\{\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H_{1,I}(t')\right)\right\}$$

$$= \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt_1\, H_{1,I}(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} dt_1\, dt_2\, H_{1,I}(t_1) H_{1,I}(t_2)$$

$$+ \dots$$

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t)\,|n\rangle \quad , \quad H_0|n\rangle = E_n^{(0)}|n\rangle$$

$$c_n(t) = \langle n|\psi(t)\rangle_I$$

$$= \langle n|\mathcal{U}_I(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_I$$

$$= \langle n | I \rangle \leftarrow c_n^{(0)}(t)$$

$$+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^{t} \langle n | H_{1,I}(t_1) | I \rangle \, dt_1 \leftarrow c_n^{(1)}(t)$$

$$+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \langle n | H_{1,I}(t_1) | m \rangle \times$$

$$\langle m | H_{1,I}(t_2) | I \rangle \leftarrow c_n^{(2)}(t)$$

$$+ \dots$$

$$\left(\text{NB } \sum_m |m\rangle\langle m| = 1 \right)$$

dove $|I\rangle = |\psi(t_0)\rangle_I$.