



Universidad Nacional Autónoma de
México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

TAREA 4

Materia: Geometría del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto

Número de cuenta: 320324280

Marzo 2024

Sea N_1 el primer dígito de tu número de cuenta, N_2 el segundo dígito, N_3 el tercero y así sucesivamente.

1. Calcula la norma del vector $u = (N_7, -N_8, N_9)$. Si u no es un vector unitario, encuentra un múltiplo de u que sea unitario.

Solución:

$$\vec{u} = (2, -8, 0)$$

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 0} && \rightarrow && \text{Gracias a que comprobamos que } \vec{u} \text{ no es} \\ &= \sqrt{4 + 64 + 0} = \sqrt{68} && && \text{unitario, será necesario normalizarlo.} \\ & && && \text{El proceso de normalización es:} \\ & && && \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} &= \frac{1}{\sqrt{68}} (2, -8, 0) = \left(\frac{2}{\sqrt{68}}, \frac{-8}{\sqrt{68}}, \frac{0}{\sqrt{68}} \right) \\ &= \left\| \left(\frac{2}{\sqrt{68}}, \frac{-8}{\sqrt{68}}, \frac{0}{\sqrt{68}} \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{68}} \right)^2 + \left(\frac{-8}{\sqrt{68}} \right)^2 + 0} \\ &= \sqrt{\frac{4}{68} + \frac{64}{68}} = \sqrt{\frac{68}{68}} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

2. Encuentra la ecuación de la esfera con centro en el origen $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y radio $N_9 + 1$.

Solución: Radio $= 0 + 1 = 1$

$$\therefore \mathbb{S}^2 = x \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

3. Encuentra la ecuación de la esfera con el centro en el origen $(N_7, -N_8, N_9) \in \mathbb{R}^3$ y radio $N_9 + 1$.

Solución: Radio $= 0 + 1 = 1$

Origen $= (2, -8, 0)$

$$\mathbb{S}^2 = x \in \mathbb{R}^3 | (x+2)^2 + (y-8)^2 + (z+0)^2 = 1$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-8)^2 + (z+0)^2 = 1$$

4. Demuestra que si v y w son dos vectores de \mathbb{R}^3 , entonces:

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w$$

Solución:

Sea $\vec{v} = (a, b, c)$ y $\vec{w} = (d, e, f)$.

$$\begin{aligned}\|v - w\|^2 &= \|(a - d, b - e, c - f)\|^2 = \sqrt{(a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2}^2 \\ &= (a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2 = a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - 2be + e^2 + c^2 - 2cf + f^2\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}^2 + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}^2 - 2(a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2(ad + be + cf) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2ad - 2be - 2cf \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - 2be + e^2 + c^2 - 2cf + f^2 \\ \therefore \|v - w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w\end{aligned}$$

■

5. Muestra que se puede determinar el ángulo θ entre los vectores v y w por medio de la fórmula:

$$\cos \theta = \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2}{4\|v\|\|w\|}$$

Ayuda: Desarrolla $\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$

Solución:

Haciendo uso de la ayuda desarrollaremos la parte indicada para llegar a la solución.

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 &= (v + w) \cdot (v + w) - (v - w) \cdot (v - w) \\ &= (v^2 + 2vw + w^2) - (v^2 - 2vw + w^2) = 4vw\end{aligned}$$

Ahora sustituyendo nuestro nuevo valor de $\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$ tenemos:

$$\cos \theta = \frac{4vw}{4\|v\|\|w\|} \rightarrow \cos \theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

Y como se sabe esa es la fórmula para encontrar el ángulo de dos vectores, por lo que la proposición es cierta. ■