



Universidad Nacional Autónoma de
México

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

EJERCICIO 2: MÉTODOS DE BISECCIÓN Y POSICIÓN FALSA

Materia: Métodos Numericos 1

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Septiembre 2023

1 Propósito

Resolver un problema de aplicación empleando los métodos de acotamiento.

2 Instrucciones

Determinar el coeficiente de rozamiento c , necesario para que un paracaidista de masa $m = 71$ tenga una velocidad de 42 m/s , después de una caída libre de $t = 13 \text{ s}$. La aceleración de la gravedad es 9.8 m/s^2 .

El problema se puede resolver determinando la raíz de la siguiente ecuación:

$$f(c) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\frac{ct}{m}} \right) - v$$

Donde:

- t = tiempo
- v = velocidad
- m = masa
- g = gravedad

3 Fórmula

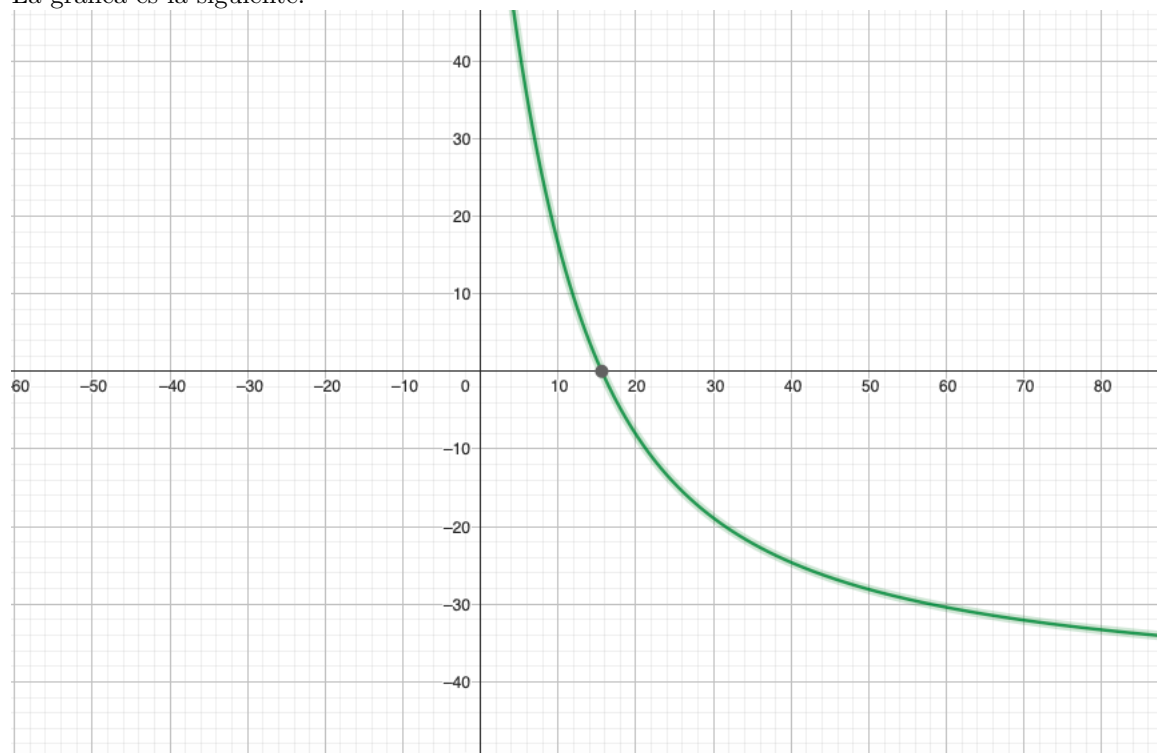
Primero partiremos de reemplazar los datos que conocemos en la fórmula para tener una idea más concreta de la función a graficar:

$$f(c) = \frac{(9.8)(71)}{c} \left(1 - e^{-\frac{c \cdot 13}{71}} \right) - 42$$

Ahora a partir de esta fórmula con los datos proporcionados graficamos para comprobar la existencia de una raíz.

4 Gráfica

La gráfica es la siguiente:



5 Elegir un intervalo de solución

Analizando la gráfica más detenidamente se observa que su raíz puede estar entre el intervalo de $[10, 20]$, por lo que lo tomaremos como intervalo inicial. Posterior a esto encontraremos su raíz por medio de dos métodos, serán los de Bisección y de Posición Falsa.

6 Encontrar una raíz, con tolerancia 0.00005 en el error relativo y absoluto

6.1 Método de Bisección

Usamos el intervalo que ya delimitamos contiene a la raíz y se continuará realizando en una hoja de cálculo los comandos y funciones pertinentes para llegar a la raíz.

Ejercicio 2: Portafolio: Bisección									
a	b	f(a)	f(b)	p	f(p)	E(a)	E(r)	Tolerancia Absoluta	Tolerancia Relativa
10	20	16.4294229	-8.103470607	15	1.410806323				
15	20	1.410806323	-8.103470607	17.5	-3.853871627	2.5	0.1428571429	Continuar	Continuar
15	17.5	1.410806323	-3.853871627	16.25	-1.366541548	1.25	0.07692307692	Continuar	Continuar
15	16.25	1.410806323	-1.366541548	15.625	-0.0167129527	0.625	0.04	Continuar	Continuar
15	15.625	1.410806323	-0.0167129527	15.3125	0.6869879827	0.3125	0.02040816327	Continuar	Continuar
15.3125	15.625	0.6869879827	-0.0167129527	15.46875	0.3326673565	0.15625	0.0101010101	Continuar	Continuar
15.46875	15.625	0.3326673565	-0.0167129527	15.546875	0.1573651291	0.078125	0.005025125628	Continuar	Continuar
15.546875	15.625	0.1573651291	-0.0167129527	15.5859375	0.07017374737	0.0390625	0.002506265664	Continuar	Continuar
15.5859375	15.625	0.07017374737	-0.0167129527	15.60546875	0.02669239642	0.01953125	0.001251564456	Continuar	Continuar
15.60546875	15.625	0.02669239642	-0.0167129527	15.61523438	0.00498023214	0.009765625	0.0006253908693	Continuar	Continuar
15.61523438	15.625	0.00498023214	-0.0167129527	15.62011719	-0.005868731399	0.0048828125	0.0003125976868	Continuar	Continuar
15.61523438	15.62011719	0.00498023214	-0.005868731399	15.61767578	-0.0004448425727	0.00244140625	0.0001563232765	Continuar	Continuar
15.61523438	15.61767578	0.00498023214	-0.0004448425727	15.61645508	0.002267546527	0.001220703125	0.00007816774799	Continuar	Continuar
15.61645508	15.61767578	0.002267546527	-0.0004448425727	15.61706543	0.0009113149157	0.0006103515625	0.0000390823465	Continuar	Parar
15.61706543	15.61767578	0.0009113149157	-0.0004448425727	15.61737061	0.0002332269065	0.0003051757813	0.0000195407914	Continuar	Parar
15.61737061	15.61767578	0.0002332269065	-0.0004448425727	15.61752319	-0.0001058101493	0.0001525878906	0.000009770300241	Continuar	Parar
15.61737061	15.61752319	0.0002332269065	-0.0001058101493	15.6174469	0.00006370779951	0.00007629394531	0.000004885173985	Continuar	Parar
15.6174469	15.61752319	0.00006370779951	-0.0001058101493	15.61748505	-0.00002105131968	0.00003814697266	0.000002442581027	Parar	Parar

Primero se realiza la primera fila de acuerdo al intervalo escogido, la función y la evaluación de la misma a través de los extremos del intervalo $[a, b]$, y calcular el punto medio de los intervalos para tomar ese punto p y evaluarlo en la función. De esta manera ya tenemos todos los datos necesarios para poder hacer uso de nuestra lógica e implementarla en el método.

Lo que se busca es encerrar a la raíz, por lo que los intervalos siempre, al ser evaluados, deben devolver valores de distinto signo, esto para asegurar que el intervalo contiene a la raíz. Nuestro intervalo $[a, b]$ en específico ya devuelven imágenes de signo contrario al ser evaluadas en la función, lo que se debe hacer a continuación es:

- Si el valor devuelto por p es del mismo signo que el devuelto por a , p tomará el lugar de a y b será el mismo, pues así se tienen valores a evaluar que regresan imágenes de signo contrario.
- Similarmente se hará en el caso en el cual la imagen de p es del mismo signo de la imagen de b , p pasará a tomar el valor de a y b quedará intacta.

Este proceso lógico continuará hasta llegar a la raíz al hacer el posible espacio donde esta se encontrará más pequeño, así se repetirá hasta llegar a ella o hasta lo que nos permita la tolerancia establecida.

Por último, será necesario el error absoluto que se calcula de la siguiente manera:

$$E_a = |x - x_n|$$

Donde x toma el valor exacto o el de la última p evaluada y x_n el de la aproximación o la p anterior a x . Una vez calculado el error absoluto, haremos uso de la tolerancia que nos dieron. Si el error absoluto llega a ser menor de 0.00005, es momento de parar el proceso.

En el caso del error relativo, se aborda el mismo problema. Se calcula el error relativo de la siguiente manera:

$$E_r = \frac{|x - x_n|}{|x|}$$

A partir de este se compara con la tolerancia. Si el error es menor a la tolerancia, será momento de parar el proceso.

Como se puede observar, el proceso para en distintos momentos según la tolerancia al error utilizada.

- Raíz con la tolerancia ligada al error absoluto: 15.61748505
- Raíz con la tolerancia ligada al error relativo: 15.61706543

6.2 Método de Posición Falsa

De igual manera se usará el mismo intervalo que con el método anterior, y se procederá configurando la hoja de cálculo que nos devuelva los datos necesarios.

Ejercicio 2: Portafolio: Posición falsa									
x_0	x_1	f(x_0)	f(x_1)	x_2	f(x_2)	E(a)	E(r)	Tolerancia Absoluta	Tolerancia Relativa
10	20	16.4294229	-8.103470607	16.6968957	-2.287028189	0.8183169538	0.05153590677	Continuar	Continuar
10	16.6968957	16.4294229	-2.287028189	15.87857875	-0.5734313081	0.1982585428	0.01264378152	Continuar	Continuar
10	15.87857875	16.4294229	-0.5734313081	15.6803202	-0.1392429919	0.04773738483	0.003053710662	Continuar	Continuar
10	15.6803202	16.4294229	-0.1392429919	15.63258282	-0.0335442112	0.01147670079	0.0007346919418	Continuar	Continuar
10	15.63258282	16.4294229	-0.0335442112	15.62110612	-0.008065423686	0.002758122258	0.000176595006	Continuar	Continuar
10	15.62110612	16.4294229	-0.008065423686	15.61834799	-0.001938366391	0.0006627823921	0.00004243794026	Continuar	Parar
10	15.61834799	16.4294229	-0.001938366391	15.61768521	-0.0004657965371	0.0001592645189	0.00001019780722	Continuar	Parar
10	15.61768521	16.4294229	-0.0004657965371	15.61752595	-0.0001119296208	0.00002689620585	0.000002450494207	Parar	Parar
10	15.61752595	16.4294229	-0.0001119296208	15.61748768	-0.00002689620585	0.000003827056308	0.0000002450494207	Parar	Parar

Similar al método anterior, se parte del intervalo escogido $[x_0, x_1]$ y se realizan los cálculos y configuraciones con la hoja de cálculo para evaluar los puntos x_0 y x_1 en la función.

El gran cambio con este método es que no particionamos el intervalo a la mitad para tomar ese valor y evaluarlo, para en base a este hacer las demás condiciones e iteraciones hasta llegar a la raíz. Lo que se hace en este método es, a grandes rasgos, calcular por medio de conocimientos algebraicos y matemáticos a la x_2 donde están cortando el eje de las x la recta tangente creada entre x_0 y x_1 , en base a este cálculo y conociendo el valor de x_2 , se evalúa en la función y se analiza cómo continuar con la siguiente condición:

- Si $f(x_2)$ es de signo contrario que $f(x_0)$, se cambiarán $x_1 = x_2$, si esta condición es falsa, entonces $x_0 = x_2$.

Como en este caso la condición sí se cumple, pues x_1 tomará el valor de x_2 para así empezar a acotar cada vez más a la raíz hasta que se llegue a ella, casi como si se tratara de un lazo que la va delimitando cada vez más y más. Pero ¿cómo funciona esto? Pues al revisar la conclusión, sea el resultado falso o verdadero, esta condición está pensada para que sin importar el resultado se delimite a la raíz, ya que al las imágenes ser de distinto signo se asegura que la raíz se encuentra ahí, por lo que solo es necesario mover un valor y usar al otro como punto para trazar a la recta tangente que se acercará cada vez más hasta la raíz hasta alcanzarla, es como un barrido de la zona en donde se parte de un mismo punto, para a partir de este generar la recta con el otro punto y poco a poco acercarse mas a la raíz, casi como si se trazara un círculo.

Al completar la condición, lo único que continúa es seguir evaluando las x hasta llegar a una raíz o que nos detenga la tolerancia del error. En este caso nos

detuvo la tolerancia primero, de igual manera ambas tolerancias nos detuvieron en momentos distintos:

- La tolerancia al error absoluto nos da la raíz es: 15.61748768
- La tolerancia al error relativo nos da la raíz es: 15.61768521

7 Conclusión

Se observó que ambos métodos no llegan a la raíz, debido a que la tolerancia llega primero y por lo tanto nos obliga a parar, pero también considero que es importante tener en cuenta los intervalos que se tomaron para comenzar el mismo proceso.

No es lo mejor traer a la suerte en métodos numéricos ya que deberían ser efectivos dentro de un marco lógico y no causal, pero en este método sucede, pude haber escogido un intervalo que al biparticionarlo ya nos da el valor de la raíz debido a su cercanía. En caso contrario con la posición falsa la suerte se representa en la cercanía que podríamos tener al escoger una x a evaluar muy cercana a la raíz, esto provocaría que es menor el tramo que se debe recorrer a partir de esta para llegar a la raíz misma, la suerte radica en la capacidad de estar lo suficientemente cerca de la raíz desde un principio.

En ambos casos la convergencia a la solución es lineal pero, como ya se puede observar en la magnitud de las gráficas, el método de bisección es más tardado en acercarse a la raíz e incluso a la tolerancia de cualquier error, ya sea el absoluto o el relativo. Esto solo significa que este método se tarda más en llegar a la raíz en sí, también es importante denotar y observar que tanto la tolerancia al error absoluto como a la del relativo, en ambos métodos, se llegan a ellas en distintos puntos de la iteración. La razón por la que se me ocurre que sucede esto es por que en el error relativo se tiene en cuenta el hecho de que, al menos en este caso, se están usando magnitudes distintas, cosa que no tiene en cuenta el error absoluto, de aquí parte la diferente tolerancia al error de cada una.

En conclusión el método de posición falsa es más eficaz que el de bisección, aunque no lo sea por mucho sigue siéndolo, pero también es un poco más complicada y debe tener más una cierta comprensión y soltura algebraica además de conciencia matemática.