Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tarea 6: Proyección ortogonal y distancia entre dos puntos

Materia: Geometria del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Abril 2024

Sea N_1 el primer dígito de tu número de cuenta, N_2 el segundo dígito, N_3 el tercero y así sucesivamente.

Ejercicio 1: Encuentra un vector ortogonal al vector:

$$u = (\frac{N_1+1}{\sqrt{(N_1+1)^2+(N_2+1)^2}}, \frac{N_2+1}{\sqrt{(N_1+1^2)+(N_2+1)^2}}, 0)$$

Solución:

$$u = (\frac{3+1}{\sqrt{(3+1)^2+(2+1)^2}}, \frac{2+1}{\sqrt{(3+1^2)+(2+1)^2}}, 0)$$

Para encontrar un vector que sea ortogonal al vector u será necesario encontrar un vector v que provoque que $u \cdot v = 0$, ya que si esto se cumple, por teorema sabemos que el ángulo entre ellos será de $\frac{\pi}{2}$, que es lo mismo que decir que será ortogonal uno con el otro.

$$v = (a, b, c)$$

$$u \cdot v = (\frac{3+1}{\sqrt{(3+1)^2+(2+1)^2}}, \frac{2+1}{\sqrt{(3+1^2)+(2+1)^2}}, 0) \cdot (a, b, c)$$

$$u \cdot v = \frac{4}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}(a) + \frac{3}{\sqrt{(4^2)+(3)^2}}(b) + 0(c)$$

$$u \cdot v = \frac{4}{\sqrt{25}}(a) + \frac{3}{\sqrt{25}}(b) + 0(c)$$

$$u \cdot v = \frac{4}{5}(a) + \frac{3}{5}(b) + 0(c)$$

Si $a = \frac{5}{4}$ y $b = \frac{-5}{3}$ tendremos lo siguiente:

$$u \cdot v = \frac{4}{5}(\frac{5}{4}) + \frac{3}{5}(\frac{-5}{3}) + 0(c)$$

$$u \cdot v = 1 - 1 + 0c = 0 + 0c = 0$$

Por lo tanto podemos decir que el vector creado como ortogonal al vector u es:

$$v = (\frac{5}{4}, \frac{-5}{3}, c)$$

Es importante denotar que $c \in \mathbb{R}$, esto por que no importa que valor se le de, al estar siendo multiplicado siempre por cero su valor siempre será cero y no afectará a la creación de un vector ortogonal.

Ejercicio 2: Construye un vector ortogonal al vector $x = (\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}})$.

Solución: La manera de proceder será la misma que en el ejercicio anterior, encontrar un vector v que provoque $x \cdot v = 0$.

$$v = (\lambda, \alpha, \beta)$$

$$x \cdot v = (\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}) \cdot (\lambda, \alpha, \beta)$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{3}}(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{4}}(\beta)$$

Si $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1}$ y $\beta = 0$ tenemos:

$$x \cdot v = \frac{-2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{1}) + \frac{1}{\sqrt{4}}(0)$$

$$x \cdot v = -1 + 1 + 0 = 0$$

$\therefore$ Un vector ortogonal a $x = (\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}})$ es:

$$v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{1}, 0)$$

$\blacksquare$

Ejercicio 3: Construye la proyección ortogonal sobre el vector $x = (\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})$.

Solución:

Tenemos $u = (\alpha, \beta, \omega)$ y usando la fórmula o proposición para encontrar la proyección ortogonal de un vector dado en conjunto con un vector arbitrario, en este caso u, tenemos lo siguiente:

$$y = \frac{u \cdot x}{\|x\|^2}x = \frac{(\alpha, \beta, \omega) \cdot (\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})}{\|(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})\|^2}(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})$$

$$y = \frac{\frac{-2\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}} + \frac{4\omega}{\sqrt{3}}}{(\frac{-2}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{3}})^2}(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})$$

$$y = \frac{\frac{-2\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}} + \frac{4\omega}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{16}{3}}(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})$$

$$y = \frac{\frac{-2\alpha+\beta+4\omega}{\sqrt{3}}}{7}(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})$$

$$y = (\frac{-2\alpha + \beta + 4\omega}{7\sqrt{3}})(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})$$

$$y = (\frac{4\alpha - 2\beta - 8\omega}{21}, \frac{-2\alpha + \beta + 4\omega}{21}, \frac{-8\alpha + 4\beta + 16\omega}{21})$$

$\therefore$ Podemos afirmar que la proyección ortogonal sobre el vector x será:

$$y = (\frac{4\alpha - 2\beta - 8\omega}{21}, \frac{-2\alpha + \beta + 4\omega}{21}, \frac{-8\alpha + 4\beta + 16\omega}{21}) \text{ Donde: } \alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$$

$\blacksquare$

Ejercicio 4: Construye un vector ortogonal al vector $x = (1, -2, 3)$.

Solución:

Continuaremos bajo la misma visión para construir dicho vector, lo haremos a través de la necesidad de que $x \cdot y = 0$ para poder afirmar que el vector x es ortogonal con respecto a y y viceversa, por lo tanto solo buscaremos un vector que satisfaga dicha igualdad.

Sea $y = (\alpha, \beta, \omega)$ donde $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = (1, -2, 3) \cdot (\alpha, \beta, \omega) = \alpha - 2\beta + 3\omega$$

Si $\alpha = -1, \omega = 1, \beta = 1$ entonces tendremos lo siguiente:

$$x \cdot y = -1 - 2(1) + 3(1) = -1 - 2 + 3 = 0$$

Ejercicio 5: Construye la proyección ortogonal sobre el vector $u = (N_1, N_2, -N_3)$

Solución:

Tenemos el vector $u = (3, 2, 0)$ y haciendo uso de la definición de proyección ortogonal encontraremos esta proyección a través de un vector arbitrario. Sea $x = (\lambda, \alpha, \beta)$

$$y = \frac{x \cdot u}{\|u\|^2} u = \frac{(\lambda, \alpha, \beta) \cdot (3, 2, 0)}{\|(3, 2, 0)\|^2}(3, 2, 0)$$

$$y = \frac{3\lambda + 2\alpha + 0}{3^2 + 2^2 + 0^2}(3, 2, 0) = \frac{3\lambda + 2\alpha}{13}(3, 2, 0)$$

$$y = (\frac{9\lambda + 6\alpha}{13}, \frac{6\lambda + 4\alpha}{13}, 0)$$

Por lo tanto la proyección ortogonal sobre el vector u será:

$$y = (\frac{9\lambda + 6\alpha}{13}, \frac{6\lambda + 4\alpha}{13}, 0) \text{ Donde: } \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\blacksquare$

Ejercicio 6: Calcula la distancia entre la siguiente pareja de vectores:
1. $u = (N_1, 2N_2, -N_3)$, $v = (N_4, -N_5, N_6)$
2. $u = (2N_1, -N_2, -N_3)$, $v = (N_7, -N_8, 2N_9)$

Solución: 1. $u = (3, 2(2), 0)$, $v = (3, -2, 4)$

$$d(u,v) = \sqrt{(3-3)^2 + (4-(-2))^2 + (0-4)^2}$$

$$d(u,v) = \sqrt{0+36+16} = \sqrt{52}$$

2. $u = (2(3), -2, 0)$, $v = (2, -8, 0)$

$$d(u,v) = \sqrt{(6-2)^2 + (-2-8)^2 + 0^2}$$

$$d(u,v) = \sqrt{16+100+0} = \sqrt{116}$$