



*Universidad Nacional Autónoma de
México*

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

EJERCICIO 4: BAIRSTOW

Materia: Métodos Numéricos

Autor: Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Octubre 2023

1 Propósito

Durante el transcurso de este ejercicio en particular se tratará de ganar soltura, entendimiento y rapidez en la utilización del método Bairstow. Será necesario tener nociones básicas sobre cómo funcionan las operaciones matriciales, además del conocer la fórmula general para la obtención de raíces tanto complejas como reales para un binomio cuadrado dado.

2 Instrucciones

Según el polinomio siguiente:

$$P(x) = x^5 - 4.1x^4 + 3.35x^3 - 4.775x^2 - 2.6x + 46.5$$

Obtener las raíces con las siguientes reglas o convenciones:

- Tomar como valores iniciales $r = 1$, $s = 3$ para la primera aplicación.
- En la segunda aplicación tomar a $r = -1$ y $s = -3$.
- Tolerancia al paro es del 0.5% para el error relativo porcentual.

3 Planteamiento

Realmente en este ejercicio no hay muchas cosas que tener en cuenta, esto debido a que se nos está diciendo desde el principio los valores a escoger para la descomposición del polinomio.

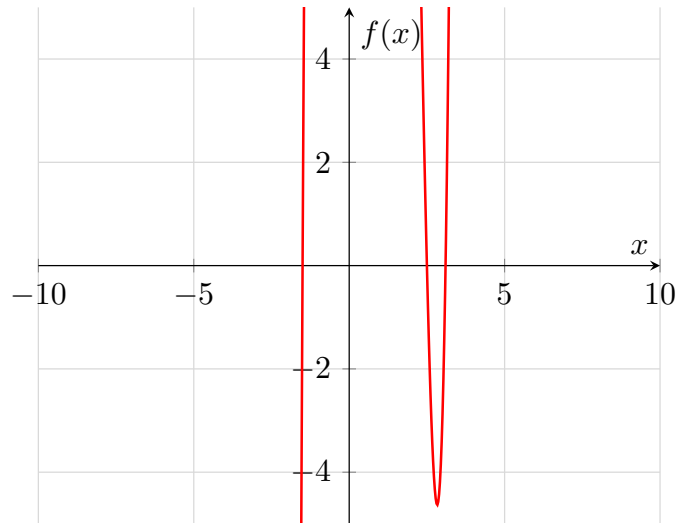
Lo que considero importante recalcar es el porque se nos otorgan datos para dos aplicaciones. Esto es necesario porque sabemos que descompondremos el polinomio en un binomio cuadrado a la vez, por lo tanto al tener un polinomio de grado 5 en la primera aplicación este se descompondrá en uno de grado 3 y grado 2 donde estaremos en condiciones para encontrar la raíz del binomio cuadrático por medio de la fórmula general, pero esto no sucede con el polinomio de grado 3, por lo que será necesario descomponerlo, es decir, volver a aplicar el método.

Una vez descompuesto el polinomio de grado 3, se deberá haber descompuesto en dos, un binomio cuadrático y en otro binomio, por lo que ya no será necesario volver a hacer uso del método.

Por otra parte también considero de importancia ver cómo se comporta la gráfica, ya que a través de ella podemos darnos una idea de cuántas raíces reales y cuántas complejas podemos esperar y aspirar a encontrar.

4 Gráfica

Tomaremos al polinomio inicial como una función en base a la variable x para observar su comportamiento.



Como se puede observar en la gráfica, solo se pueden detectar tres intersecciones con el eje de las x por lo que es probable que solo se nos presenten tres raíces reales y las dos restantes sean complejas.

5 Implementación del método

Lo que debemos hacer para continuar es configurar nuestra hoja de cálculo de tal manera que no se nos sea sencillo en todas las operaciones necesarias a realizar para la obtención de las raíces.

Simplemente se deberá configurar para que se le otorguen tanto los coeficientes como los datos iniciales de r y s . También será necesario tener en cuenta las operaciones matriciales para la obtención de los nuevos datos a evaluar.

Como se mencionó en el planteamiento, será necesario hacer uso del método más de una vez debido a que se tiene un polinomio inicial de grado 5 y también conocemos que el método es capaz de descomponer el polinomio en uno cuadrático a la vez.

Por lo que en resumen tendremos que descomponer el polinomio inicial, utilizar la fórmula general en el que encontramos, volver a descomponer el polinomio restante y hacer uso de la fórmula general para encontrar las raíces del polinomio encontrado, por último el polinomio restante después de la segunda implementación del método debe ser de grado uno por lo que la raíz ya está encontrada.

Tal vez el hablar de esta manera presta a confusiones o pérdidas en el camino en el transcurso de la idea, por esto trataré de mostrarlo de manera más gráfica.

$$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f \quad (1)$$

$$P(x) = (x^2 - rx - s)(x^3 + ax^2 + bx + c) \quad (2)$$

$$P(x) = (x^2 - rx - s)(x^2 - jx - k)(x + c) \quad (3)$$

Como se puede observar en las ecuaciones descritas arriba, 1 se tiene al polinomio inicial, en 2 se descompuso en dos polinomios, uno cuadrático y otro de tercer grado, ese será el que deberemos volver a descomponer con la aplicación del método. Para la tercera ecuación se puede observar a un polinomio descompuesto en dos cuadráticos y uno de primer grado, como se explicó arriba, ahora solo restará hacer uso de la fórmula general para las raíces de los binomios cuadráticos.

Donde j y k son variantes de r y s encontrados en la segunda aplicación del método, la diferencia del nombre de las variables proviene del intento de evitar confusiones con el método.

6 Ejecución del Método

6.1 Primera Aplicación

Una vez hemos planteado e implementado como debe comportarse el uso del método para este polinomio en particular, ya nos encontramos en posición de pasar al uso del mismo teniendo en cuenta lo que debería suceder y si no sucede como se planeaba, replantearse el modo de ejecución.

Como bien ya hemos visto durante los ejercicios anteriores, el uso de las hojas de cálculo son primordiales debido a que nos facilitan las operaciones y la implementación del método, en nosotros queda con mayor peso la responsabilidad de haber planteado bien el problema además claro de haberlo comprendido. Este caso no es la excepción, el planteamiento ya lo hemos realizado y solo bastaría con configurar la hoja de cálculo para poder hacer la aplicación del método.

Dentro de la hoja de cálculo se deberán encontrar operaciones matriciales, multiplicaciones, sumas y es todo. Se deberá configurar a la hoja de cálculo para realizar divisiones sintéticas específicamente dos por iteración de aplicación del método, además de las operaciones matriciales para la obtención de los nuevos datos a probar.

Iteración 1. Primera obtención de polinomio cuadrático.

	$x^5 = 1$	$x^4 = -4.1$	$x^3 = 3.35$	$x^2 = -4.775$	$x = -2.6$	$x^0 = 46.5$
	$i = 5$	$i = 4$	$i = 3$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 0$
	1	-4.1	3.35	-4.775	-2.6	46.5
$r = 1$		1	-3.1	3.25	-10.825	-3.675
$s = 3$			3	-9.3	9.75	-32.475
	1	-3.1	3.25	-10.825	-3.675	10.35
						b_i

$$\begin{array}{c|cccccc} & i=5 & i=4 & i=3 & i=2 & i=1 & i=0 \\ r=1 & & 1 & -2.1 & 4.15 & -12.975 & \\ s=3 & & & 3 & -6.3 & 12.45 & \\ \hline & 1 & -2.1 & 4.15 & -12.975 & -4.2 & c_i \end{array}$$

Datos encontrados:

$b_1 = -3.674$, $b_0 = 10.35$, $c_1 = -4.2$, $c_2 = -12.975$ y $c_3 = 4.15$.

Con estos valores ya estamos en condiciones de encontrar los nuevos a usar:

$$\begin{bmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -12.975 & 4.15 \\ -4.2 & -12.975 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.675 \\ -10.35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.975 & 4.15 \\ -4.2 & -12.975 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3.675 \\ -10.35 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0254635003 \\ 0.8059303816 \end{bmatrix}$$

Entonces se tiene que los nuevos valores de r y s son:

$$r = 1 - 0.0254635003 = 0.9745364997$$

$$s = 3 + 0.8059303816 = 3.805930382$$

Ahora tenemos que calcular el error porcentual relativo para asegurarnos de si se cumple la tolerancia para otra iteración o no.

$$|\varepsilon_{rr}| = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| = 2.54635003\%$$

$$|\varepsilon_{rs}| = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| = 26.86434605\%$$

Cómo continúa sin cumplirse la tolerancia, debemos continuar la aplicación del método con los nuevos valores de r y s . En las próximas iteraciones ya no se pondrá el proceso de manera tan gráfica, solo se continuará, insertando una tabla que contenga tantos los datos obtenidos como su número de iteración.

La tabla es la siguiente:

Iteración	1	2	3	4
b_5	1	1	1	1
b_4	-3.1	-3.1255	-3.0999	-3.1
b_3	3.25	4.1101	4.0021	4
b_2	-10.825	-12.6649	-12.4043	-12.4
b_1	-3.675	0.7002	0.0115	0.0000
b_0	10.35	-1.0194	-0.0336	0.0000
c_3	4.15	5.8198	5.6544	5.65
c_2	-12.975	-15.1795	-14.6282	-14.625
c_1	-4.2	8.057	6.5991	6.5625
r	1	0.9745	1.0001	1
s	3	3.8059	3.7524	3.75
Δr	-0.0255	0.0256	-0.0001	0.0000
Δs	0.8059	-0.0536	-0.0024	0.0000
ε_{rr}	2.5464	2.6253	0.0121	0.0000
ε_{rs}	26.8643	1.4077	0.0627	0.0000

Como se puede observar en la iteración número cuatro es donde se debe parar debido a que se rompe con la tolerancia en ambos errores, con los datos de los coeficientes de b y c seremos capaces de descomponer el polinomio original de la siguiente manera:

$$P(x) = x^5 - 4.1x^4 + 3.35x^3 - 4.775x^2 - 2.6x + 46.5$$

$$P(x) = (x^2 - x - 3.75)(x^3 - 3.1x^2 - 4x - 12.4)$$

Por lo tanto ahora nuestro siguiente polinomio a descomponer es:

$$(x^3 - 3.1x^2 - 4x - 12.4)$$

6.2 Segunda Aplicación

El procedimiento será enteramente el mismo al descrito en la sección anterior, pero ahora nos saltaremos la parte gráfica, ya que está ya debió quedar clara en la explicación e implementación anterior hecha en la primera aplicación.

La diferencia radica en que como se nos dijo en las instrucciones, será obligatorio comenzar con $r = -1$ y $s = -3$. Pasaremos directamente a la construcción de la tabla y a la explicación de la misma.

<i>Iteracion</i>	1	2	3	4	5	6	7
b_3	1	1	1	1	1	1	1
b_2	-4.1	-2.9937	-3.1332	-3.1004	-3.1	-3.1	-3.1
b_1	5.1	1.224	0.0195	1.10E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
b_0	-5.2	-4.9122	0.3971	0.0021	0	0	0
c_3	1	1	1	1	1	1	1
c_2	-5.1	-2.8873	-3.1664	-3.1008	-3.1	-3.1	-3.1
c_1	7.2	-1.5408	-3.96	-3.9978	-4	-4	-4
r	-1	0.1063	-0.0332	-0.0004	0	0	0
s	-3	-2.4577	-4.0846	-4.0002	-4	-4	-4
Δr	1.1063	-0.1395	0.0328	0.0004	0	0	0
Δs	0.5423	-1.6268	0.0844	0.0002	0	0	0
ε_{rr}	1.1063	1.3123	0.9879	1	1	0.8244	0
ε_{rs}	0.1808	0.6619	0.0207	0	0	0	0

Como se observa en la tabla, el momento en el que se deja de cumplir la tolerancia al error relativo porcentual es en la 7ma iteración y los polinomios descompuestos son los siguientes:

$$P(x) = (x^3 - 3.1x^2 - 4x - 12.4)$$

$$P(x) = (x^2 + 0x + 4)(x - 3.1)$$

Con estos datos ya podemos descomponer el polinomio en su complitud teniendo como resultado esto:

$$P(x) = (x^2 - x - 3.75)(x^2 + 0x + 4)(x - 3.1)$$

Solo basta usar la fórmula general para encontrar las raíces tanto complejas como reales:

Primer binomio cuadrático:

$$(x^2 - x - 3.75) \rightarrow x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$$

Segundo binomio cuadrático:

$$(x^2 + 0x + 4) \rightarrow x_1 = 2i, x_2 = -2i$$

Último polinomio:

$$(x - 3.1) \rightarrow x = 3.1$$

Como habíamos analizado terminamos con 2 raíces imaginarias y 3 raíces reales, por lo que podemos afirmar que logramos nuestro cometido y encontramos todas las raíces del polinomio en cuestión.

7 Conclusión

Definitivamente no se trata del método más sencillo de implementar, pero cumple su cometido cuando se conoce y se analiza de manera detenida el entorno del problema para así lograr utilizarlo y llevando cierto control debido a los resultados esperados acotados a través del análisis previo.

Entre sus desventajas diría que se encuentra la facilidad que tiene para poder perderte durante el proceso, pero esta se ve compensada con una tremenda ventaja, que es la facilidad que se nos proporciona para encontrar todas las raíces de un polinomio, incluyendo las complejas de una manera más sencilla que el método de Newton.