Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tarea 10: Intersección y ángulo entre dos líneas rectas

Materia: Geometria del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Mayo 2024

1. Decide si las siguientes líneas rectas se cruzan, se intersectan, son paralelas y distintas o son la misma recta.

   - La línea que pasa por los puntos $q = (2N_1, 2N_2, -N_3)$ y $r = (N_4. -4N_5, 3N_6)$.
   - La línea que pasa por los puntos $q = (N_1, 2N_2, -N_3)$ y $r = (N_4, -4N_5, 2N_6)$.

   Solución:

   - Nuestros datos son: $q = (6, 4, 0)$ y $r = (3, -8, 12)$. Por lo tanto, tomando de vector de dirección a $\vec{v} = q - r$ y como punto base a q, nuestra línea recta es:

   $$l_1 = \{(6, 4, 0) + t(3, 12, -12) : t \in \mathbb{R}\}$$

   - Nuestros datos son: $q = (3, 4, 0)$ y $r = (3, -8, 8)$. Por lo tanto, tomando de vector de dirección a $\vec{u}q - r$ y como punto base a q, nuestra línea recta es:

   $$l_2 = \{(3, 4, 0) + t(0, 12, -8) : t \in \mathbb{R}\}$$

1.

$$\vec{v} \text{ x } \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 12 & -12 \\ 0 & 12 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 12 & -12 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= (48, 24, 36)$$

2.

$$P - Q = (6, 4, 0) - (3, 4, 0) = (3, 0, 0)$$

$$(P - Q) \cdot (\vec{v} \text{ x } \vec{u})$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & -12 \\ 0 & 12 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 12 & -12 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} (3) - \begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} (0) + \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} (0)$$

$$= 48(3) + 0 + 0 = 144$$

Como se tiene que $(P - Q) \cdot (\vec{v} \text{ x } \vec{u}) \neq 0$ y $\vec{v} \text{ x } \vec{u} \neq 0$ podemos afirmar que l_1 y l_2 se cruzan.

2. Considera las lineas rectas

   $$l_1 = \{(0, 0, 1) + s(0, 1, 1) : s \in \mathbb{R}\}$$

   $$l_2 = \{(0, 0, -1) + t(0, -3, 5) : t \in \mathbb{R}\}$$

   Decide si l_1 y l_2 se cruzan, se intersecan, son paralelas y distintas o son la misma línea recta. Si las líneas se intersecan, encuentra el punto de intersección entre l_1 y l_2.

   Solución:

1.

$P-Q = (0,0,1)-(0,0,-1) = (0,0,2)$

$$(P-Q)\cdot(\vec{u} \text{ x } \vec{v}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}(0) - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}(0) + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}(2)$$

$= 0+0+0 = 0$

2.

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}(i) - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}(j) + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}(k)$$

$= 8+0+0 = 8$

Por lo tanto las rectas si se intersectan, ahora solo resta encontrar el punto de intersección: Esta igualdad $(0,0,1)+s(0,1,1) = (0,0,-1)+t(0,-3,5)$ nos crea el siguiente sistema de ecuaciones.

$$0s + 0t = 0 - 0$$

$$1s + 3t = 0 - 0$$

$$1s - 5t = -1 - 1$$

Verificando que el subsistema de la ecuación 2 con la ecuación 3 tenga solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8 \neq 0$$

Al ser su determinate diferente de cero sabemos que si tiene una solución única, lo consiguiente es resolver ese subsistema de ecuaciones y estos resultados serán los valores de s y t que geneneran el punto que se encuentra en ambas rectas, es decir, la intersección:

De la ecuación 2:

$$1s + 3t = 0 - 0$$

$$s = -3t$$

Ecuación 3:

$$1s - 5t = -2$$

$$-3t - 5t = -2$$

$$-8t = -2$$

$$t = \frac{1}{4}$$

Regresando a ecuación 1:

$$1s + 3t = 0$$

$$s = -3(\frac{1}{4})$$

$$s = \frac{-3}{4}$$

Verificamos que estos datos si nos generen un punto en común en ambas rectas:

$$(0,0,1) + \left(\frac{-3}{4}\right)(0,1,1) = (0,0,-1) + \left(\frac{1}{4}\right)(0,-3,5)$$

$$(0,0,1) + \left(0, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{4}\right) = (0,0,-1) + \left(0, \frac{-3}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\left(0, \frac{-3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(0, \frac{-3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Como se puede ver si se generá un punto en común, por lo tanto $\left(0, \frac{-3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ es la intersección entre la recta l_1 y l_2.

3. Sea L_1 la recta determinada por $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ y sea L_2 determinada por $\frac{x-x_1}{a_2} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{c_2}$. Demuestra que L_1 es ortogonal a L_2 si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

   Solución:

   Sabemos que para encontrar el ángulo de dos rectas es necesario solo conocer el ángulo agudo que existe entre los vectores de dirección de estas rectas, también gracias a la forma simétrica sabemos que nuestros vectores de dirección son $v = (a_1, b_1, c_1)$ y $u = (a_2, b_2, c_2)$, procederemos por lo tanto a calcular su ángulo:

$$\theta = arcos\left(\frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|}\right)$$

$$\theta = arcos\left(\frac{|(a_1,b_1,c_1)\cdot(a_2,b_2,c_2)|}{\|(a_1,b_1,c_1)\|\|(a_2,b_2,c_2)\|}\right)$$

$$\theta = arcos\left(\frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$$

   Ya que tenemos lo siguiente podemos recordar que un vector es ortogonal a otro si $\theta = 90$ pero también a su vez $arcos(0) = 90$ por lo que necesitamos que nuestra ecuación anterior o igualdad sea $\theta = arcos(0)$ y la única manera en que esto sucede es si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

   $\therefore$ La línea L_1 es ortogonal a L_2 si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. ■

4. Demuestra que las rectas L_1 y L_2 son ortogonales, donde:

$$L_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

$$L_2 : \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

Solución:

Por la propocisión vagamente demostrada en el inciso anterior pero vista en clase, sabemos que L_1 y L_2 son ortogonales si y sólo si los vectores $v = (2, 4, -1)$ y $u = (5, -2, 2)$ generan $v \cdot u = 0$

$$v \cdot u = (2, 4, -1) \cdot (5, -2, 2) = 2(5) + 4(-2) - 1(2)$$

$$= 10 - 8 - 2 = 10 - 10 = 0$$

$\therefore$ Como los vectores de dirección de L_1 y L_2 son ortogonales entre si, podemos afirmar y quedo demostrado que L_1 es ortogonal a L_2.

5. Demuestra que las rectas L_1 y L_2 son paralelas, donde:

$$L_1 : \frac{x-1}{9} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-3}{11}$$

$$L_2 : \frac{x-3}{27} = \frac{y-1}{21} = \frac{z-8}{33}$$

Solución:

La forma vectorial de nuestras rectas es:

$$L_1 : \{(1, -3, 3) + t(9, 7, 11) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 : \{(3, 1, 8) + s(27, 21, 33) : s \in \mathbb{R}\}$$

1.

u x $v = (9, 7, 11)$ x $(27, 21, 33)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 7 & 11 \\ 27 & 21 & 33 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 21 & 33 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 27 & 33 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 27 & 21 \end{vmatrix} k$$

$= (0, 0, 0) = 0$

2.

$P - Q = (1, -3, 3) - (3, 1, 8) = (-2, -4, -5)$

$$(P-Q) \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -4 & -5 \\ 9 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$= (-9, 23, 22)$

$\therefore$ Como $(P - Q)$ x $u \neq 0$ y u x $v = 0$ podemos afirmar que L_1 y L_2 son paralelas pero no la misma recta.