Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tarea 5: El ángulo entre dos vectores

Materia: Geometria del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Abril 2024

Sea N_1 el primer dígito de tu número de cuenta, N_2 el segundo dígito, N_3 el tercero y así sucesivamente.

Ejercicio 1: Demuestra que dos vectores u y v de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales si y sólo si $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u+v\|^2$.

Solución:

Usaremos la demostración de la ley de los cosenos para continuar con esta demostración:

$$\|u{+}v\|^2 = (u{+}v){\cdot}(u{+}v)$$
$$= u{\cdot}(u{+}v){+}v{\cdot}(u{+}v)$$
$$= u{\cdot}u{+}u{\cdot}v{+}v{\cdot}u{+}v{\cdot}v$$
$$= \|u\|^2{+}2u{\cdot}v{+}\|v\|^2$$

$\rightarrow$

Usando la fórmula del cálculo de un ángulo sabemos que:

$$\cos\,\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

$$\rightarrow u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\,\theta$$

Sustituyendo lo encontrado en la fórmula del ángulo con la igualdad trabajada tenemos lo siguiente:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos\,\theta + \|v\|^2$$

De esta manera nos quedamos con las siguiente igualdad comparando la trabajada con la que se quiere demostrar:

$$\|u\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos\,\theta + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Como se puede observar eso solo es cierto si y sólo si $2\|u\|\|v\|\cos\,\theta = 0$ y esto solo es posible para cualesquiera vectores u y $v \in \mathbb{R}^3$ si $\cos\,\theta = 0$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ La única manera en que se cumple la igualdad a demostrar es si $\theta = \frac{\pi}{2}$ que es lo mismo que decir que los vectores son *ortogonales*. $\blacksquare$

Ejercicio 2: Usando la noción de ángulo, demuestra que el vector $u = (N_7, N_8, -N_9)$ es paralelo a $v = (-N_7, -N_8, N_9)$.

Solución

Para comenzar es importante denotar que si algo es paralelo con respecto a otra cosa es debido a que su ángulo tiene un valor de π y por lo tanto si decimos que $\theta = \pi$ entonces $\cos\,\theta = -1$. Con el análisis anterior solo resta probar que el valor de $\cos\,\theta$ para los vectores u y v es igual a -1.

$$u = (2, 8, 0)$$
$$v = (-2, -8, 0)$$

Usando la fórmula y desarrollando tenemos:

$$\cos\,\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(2,8,0)\cdot(-2,-8,0)}{\|(2,8,0)\|\|(-2,-8,0)\|}$$

$$= \frac{(2)(-2)+(8)(-8)+0}{(\sqrt{(2)^2+(8)^2+0})(\sqrt{(-2)^2+(-8)^2+0})} = \frac{-68}{(\sqrt{68})(\sqrt{68})} = \frac{-68}{68} = -1$$

Cómo $\cos\theta = -1$ podemos afirmar que $\theta = \pi$ y por lo tanto los vectores u,v son paralelos entre sí.

Ejercicio 3: Determina si el vector $U = (N_7, N_8, N_9)$ es ortogonal al vector $v = (-N_9, 0, N_7)$.

Solución

$$u = (2, 8, 0)$$

$$v = (0, 0, 2)$$

Sabemos que para que dos vectores sean ortogonales entre si, es necesario que su ángulo sea $\theta = \frac{\pi}{2}$, que es lo mismo que decir que se debe cumplir que $u \cdot v = 0$, esto porque si tanto u como v son dos vectores no nulos y tenemos que, por la fórmula del ángulo que: $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta$, pero a su vez como estamos diciendo que $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces tenemos:

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\frac{\pi}{2} = \|u\|\|v\| \cdot 0 = 0$$

Una vez explicado lo anterior es obvio que solo debemos probar que $u \cdot v = 0$.

$$u \cdot v = (2, 8, 0) \cdot (0, 0, 2) = (2)(0) + (8)(0) + (0)(2) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Por lo tanto podemos afirmar que u, v son vectores ortogonales entre si.

Ejercicio 4: Usa el producto punto para determinar si el ángulo entre los vectores $u = (N_3, N_4, -N_5)$ y $v = (1, 0, 0)$ es menor, igual o mayor que $\frac{\pi}{2}$.

Solución:

$$u = (0, 3, -2)$$

$$v = (1, 0, 0)$$

Primero verificaremos que no se trate de que sean vectores ortogonales, para eso usaremos el teorema que nos dice que, si $x \cdot y = 0$ entonces, los vectores u y y son vectores ortogonales, que es lo mismo que decir que tienen un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$u \cdot v = (0, 3, -2) \cdot (1, 0, 0) = 0(1) + 3(0) + 0(-2) = 0$$

Como el producto punto entre u y v es igual a cero podemos afirmar que son ortogonales, que es lo mismo que decir que su ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 5: Usa el producto punto para determinar si el ángulo entre los vectores $u = (-N_3, -N_4, N_5)$ y $v = (1, 0, 0)$ es menor, igual o mayor que $\frac{\pi}{2}$.

Solución:

$$u = (0, -3, 2)$$

$$v = (1, 0, 0)$$

Análogo al razonamiento anterior comenzaremos comprobado que los vectores u y v sean ortogonales.

$$u \cdot v = (0, -3, 2) \cdot (1, 0, 0) = 0(1) + 0(-3) + 2(0) = 0$$

Como se cumple que $u \cdot v = 0$, podemos afirmar, como en el ejercicio anterior, que el ángulo existente entre u y v es de $\frac{\pi}{2}$.