Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tarea 7: El producto vectorial: cálculo de área de triángulos y paralelogramos

Materia: Geometria del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Abril 2024

Sea N_1 el primer dígito de tu número de cuenta, N_2 el segundo dígito, N_3 el tercero y así sucesivamente.

Ejercicio 1: Calcula la distancia entre la siguiente pareja de vectores:

a) $u = (N_1, 2N_2, -N_3)$, $v = (N_4, -N_5, N_6)$

a) $u = (2N_1, -N_2, -N_3)$, $v = (N_7, -N_8, 2N_9)$

Solución:

1. $u = (3, 2(2), 0)$, $v = (3, -2, 4)$

$$d(u, v) = \sqrt{(3-3)^2 + (4-(-2))^2 + (0-4)^2}$$

$$d(u, v) = \sqrt{0 + 36 + 16} = \sqrt{52}$$

2. $u = (2(3), -2, 0)$, $v = (2, -8, 0)$

$$d(u, v) = \sqrt{(6-2)^2 + (-2-8)^2 + 0^2}$$

$$d(u, v) = \sqrt{16 + 100 + 0} = \sqrt{116}$$

Ejercicio 2: Calcula u x v y v x u para cada una de las siguientes parejas de vectores.

a) $u = (N_1, 2N_2, -N_3)$, $v = (N_4, -N_5, N_6)$

b) $u = (2N_1, -N_2, -N_3)$, $v = (N_7, -N_8, 2N_9)$

Solución:

a) 1.1 $u = (3, 2(2), 0)$, $v = (3, -2, 4)$

$$u \text{ x } v = \begin{vmatrix} i & j & j \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} k \right)$$

$$= (16i - 12j - 18k)$$

$$= (16, -12, -18)$$

b) 1.2 $u = (3, 2(2), 0)$, $v = (3, -2, 4)$

$$v \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} k \right)$$

$$= (-16i + 12j + 18k)$$

$$= (-16, 12, 18)$$

b) 2.1 $u = (6, -2, 0)$, $v = (2, -8, 0)$

$$u \text{ x } v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -2 & 0 \\ 2 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} k \right)$$

$$= (0i - 0j - 44k)$$

$$= (0, 0, -44)$$

b) 2.1 $u = (6, -2, 0)$, $v = (2, -8, 0)$

$$v \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -8 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0i - 0j + 44k)$$

$$= (0, 0, 44)$$

Ejercicio 3: Calcula el área del paralelogramo generado por los vectores $u = (N_1, N_2, -N_3)$ y $v = (N_4, -N_5, N_6)$.

Solución:

$$u = (3, 2, 0)$$

$$v = (3, -2, 4)$$

1.

$$u \text{ x } v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} k \right)$$

$$= (8i - 12j - 12k)$$

$$= (8, -12, -12)$$

2.

$$\|u \text{ x } v\| = \|(8, -12, -12)\|$$

$$= \sqrt{8^2 + (-12)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 144 + 144} = \sqrt{352}$$

Ejercicio 4: Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $p = (N_1, N_2, -N_3)$ y $q = (N_4, -N_5, N_6)$ y el origen $0 = (0, 0, 0)$.

Solución:

$$u = (3, 2, 0)$$

$$v = (3, -2, 4)$$

Como los vectores son los mismos del ejercicio anterior en el que se calculó el área del paralelogramo que creaban entre si y también conocemos que el área del triángulo formado por dos vectores u, v no nulos y uno nulo es $\frac{\|u \text{ x } v\|}{2}$.

$\therefore$ Usando este razonamiento y conociendo que u x $v = \sqrt{352}$ podemos afirmar que el área del triángulo será igual a $\frac{\sqrt{352}}{2}$ ■

Ejercicio 5: Calcula el área del paralelogramo cuyos vertices son $p = (11, 12, 13)$, $q = (10, 10, 10)$, $r = (8, 11, 12)$ y $s = (9, 13, 15)$.

Solución:

$$u = p - q = (11, 12, 13) - (10, 10, 10) = (1, 2, 3)$$
$$v = s - q = (9, 13, 15) - (10, 10, 10) = (-1, 3, 5)$$

Ahora ya tenemos dos vectores creados de recorrer al paralelogramo al origen para asi poder calcular su área:

1.

$$u \text{ x } v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (1i{-}8j{+}5)$$

2.

$$\|u \text{ x } v\| = \|(1, -8, 5)\|$$

$$= \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 64 + 25}$$

$$= \sqrt{90}$$

Ejercicio 6: Calcula el área del triángulo cuyos vértices son $p = (11, 12, 13)$, $q = (10, 10, 10)$, y $r = (8, 11, 12)$.

Solución:

1.

$$\vec{p} = p{-}q = (11, 12, 13){-}(10, 10, 10) = (1, 2, 3)$$

$$\vec{r} = r{-}q = (8, 11, 12){-}(10, 10, 10) = (-2, 1, 2)$$

2.

$$\vec{p} \text{ x } \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} k \right)$$

$$= (1i{-}8j{+}5k)$$

$$= (-1, -7, 5)$$

3.

$$\|\vec{p} \text{ x } \vec{r}\| = \|(1, -8, 5)\|$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-8)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 64 + 25}$$

$$= \sqrt{90}$$

$\therefore$ El área del triángulo será $\frac{\|\vec{p} \text{ x } \vec{r}\|}{2}$, entonces el área final del triángulo es:

$$\frac{\|\vec{p} \text{ x } \vec{r}\|}{2} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$