Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tarea 2

Materia: Geometria del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Marzo 2024

Sea N_1 el primer dígito de tu número de cuenta, N_2 el segundo dígito, N_3 el tercero y así sucesivamente.

1. Decide si los vectores $u = (N_1, N_2, -N_3)$, $v = (N_4, -N_5, N_6)$ y $w = (-N_7, N_8, -N_9)$ son linealmente independientes o si son linealmente dependientes.

$u = (3, 2, 0)$ $\qquad$ $v = (3, -2, 4)$ $\qquad$ $w = (-2, 8, 0)$

Solución

$$\vec{0} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$$

$$\vec{0} = \alpha_1(3, 2, 0) + \alpha_2(3, -2, 4) + \alpha_3(-2, 8, 0)$$

$$(0, 0, 0) = (3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3, 4\alpha_2)$$

Por lo tanto se tienen los siguientes sistemas de ecuaciones a resolver:

$$0 = 4\alpha_2$$
$$0 = \alpha_2$$

$$0 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3$$
$$0 = 2\alpha_1 - 2(0) + 8\alpha_3$$
$$0 = 2\alpha_1 + 8\alpha_3$$

$$0 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3$$
$$0 = 3\alpha_1 + 3(0) - 2\alpha_3$$
$$0 = 3\alpha_1 - 2\alpha_3$$

Continuando sumaremos la segunda ecuación con la tercera ecuación multiplicada por cuatro.

$$4(0) = 4(3\alpha_1 - 2\alpha_3)$$
$$0 = 12\alpha_1 - 8\alpha_3$$

$$\rightarrow \qquad \begin{array}{c} 0 = 2\alpha_1 + 8\alpha_3 \\ + \\ 0 = 12\alpha_1 - 8\alpha_3 \\ \hline 0 = 14\alpha_1 + 0\alpha_3 \end{array} \qquad \rightarrow$$

$$0 = 14\alpha_1$$
$$0 = \alpha_1$$

Por lo tanto si sustituimos en los datos encontrados en la segunda ecuación:

$$0 = 2\alpha_1 + 8\alpha_3$$

$$0 = 2(0) + 8\alpha_3$$

$$0 = 0 + 8\alpha_3$$

$$0 = \alpha_3$$

Para terminar, como α_1, α_2, α_3 son todos iguales a cero podemos afirmar que los vectores u, v y w son *linealmente independientes.*

2. Decide si los vectores $u = (N_1, 2N_2, N3)$, $v = (N_4, -N_5, N_6)$ y $w = (2N_4, -2N_5, 2N_6)$ son linealmente independientes o si son linealmente dependientes.

$u = (3, 2(2), 0)$

$u = (3, 4, 0)$

$v = (3, -2, 4)$

$w = (2(3), -2(2), 2(4))$

$w = (6, -4, 8)$

Solución

$$\vec{0} = u\alpha + v\beta + w\lambda$$

$$\vec{0} = (3, 4, 0)\alpha + (3, -2, 4)\beta + (6, -4, 8)\lambda$$

$$\vec{0} = (3\alpha + 3\beta + 6\lambda, 4\alpha - 2\beta - 4\lambda, 4\beta + 8\lambda)$$

Esto nos deja con el siguiente sistema de ecuaciones:

$0 = 3\alpha{+}3\beta{+}6\lambda \qquad 0 = 4\alpha{-}2\beta{-}4\lambda \qquad 0 = 4\beta{+}8\lambda$

Continuaremos sumando la ecuación uno y la ecuación dos, posteriormente se sustituirá la solución en la ecuación tres.

$$\begin{array}{c} 0 = 3\alpha + 3\beta + 6\lambda \\ + \\ 0 = 4\alpha - 2\beta - 4\lambda \\ \hline 0 = 7\alpha + \beta + 2\lambda \end{array} \quad \rightarrow \quad \beta = -7\alpha{-}2\lambda \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 0 = 4\beta{+}8\lambda \\ 0 = 4(-7\alpha{-}2\lambda){+}8\lambda \\ 0 = -28\alpha{-}8\lambda{+}8\lambda \\ 0 = -28\alpha \\ 0 = \alpha \end{array}$$

Ahora sustituiremos el valor de α en el el resultado de la primera suma de ecuaciones y usaremos este nuevo valor en la primera ecuación.

$$\begin{array}{l} \beta = -7\alpha{-}2\lambda \\ \beta = -7(0){-}2\lambda \\ \beta = -2\lambda \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 0 = 3\alpha{+}3\beta{+}6\lambda \\ 0 = 3(0){+}3(-2\lambda){+}6\lambda \\ 0 = 0{-}6\lambda{+}6\lambda \\ 0 = 0 \end{array}$$

Como en la última ecuación λ desapareció, es decir, se volvió cero, se dice que es una variable libre y por lo tanto puede tener cualquier valor y aún así tendrá sentido el sistema de ecuaciones, por lo tanto se dice que la combinación lineal es *linealmente dependiente*. Esto porque al λ poder tomar cualquier valor pues se incumple la condición de dependencia lineal que dice que, para que una combinación lineal sea linealmente *independiente* se debe asegurar que todas las variables sean estrictamente cero para así generar el vector cero, pero al λ ser libre, puede tomar cualquier valor y aún así lograr que la combinación lineal sea el vector cero.

3. Determina si el vector $u = (-3N_1, 2N_2, 2N_3)$ es múltiplo del vector $v = (N_4, -N_5, N_6)$. Concluye si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un subconjunto de vectores linealmente independientes o si son linealmente dependientes.

$u = (-3(3), 2(2), 2(0))$

$u = (-9, 4, 0)$

$v = (3, -2, 4)$

Solución

$u = v\alpha$

$(-9, 4, 0) = (3, -2, 4)\alpha$

$(-9, 4, 0) = (3\alpha, -2\alpha, 4\alpha)$

$\rightarrow$

$-9 = 3\alpha \rightarrow -3 = \alpha$

$4 = -2\alpha \rightarrow 4 = -2(-3) \rightarrow 4 \neq 6$

Gracias a que comprobamos que $4 \neq 6$ podemos afirmar que u y v no son múltiplos se dice que no son *linealmente dependientes.*

4. Determina si el vector $u = (N_7, -N_8, N_9)$ es múltiplo del vector $v = (N_4, -N_5, N_6)$. Concluye si los vectores u y v forman un subconjunto de vectores linealmente independientes o si son linealmente dependientes.

$u = (2, -8, 0)$

$v = (3, -2, 4)$

Solución

$u = v\alpha$

$(2, -8, 0) = (3, -2, 4)\alpha$

$(2, -8, 0) = (3\alpha, -2\alpha, 4\alpha)$

$\rightarrow$

$-8 = -2\alpha \rightarrow 4 = \alpha$

$2 = 3\alpha \rightarrow 2 = 3(4) \rightarrow 2 \neq 12$

$\therefore$ Como $2 \neq 12$ podemos afirmar que los vectores no son múltiplos entonces tampoco son *linealmente dependientes.*