Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tarea 11: Distancia y líneas rectas

Materia: Geometria del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Mayo 2024

Sea N_1 el primer dígito de tu número de cuenta, N_2 el segundo dígito, N_3 el tercero y así sucesivamente.

1. Calcula la distancia del punto $s = (N_7, -4N_9, 2N_8)$ a la recta que pasa por los puntos $q = (3N_1, N_2, -2N_3)$ y $r = (2N_4, -3N_5, -2N_6)$.

Solución:

La fórmula para calcular la distancia de un punto dado a una recta es la siguiente:

$$d(P,l) = \frac{\|u \text{ x } (Q-P)\|}{\|u\|}$$

Donde u es el vector de dirección de la recta, P es el punto y Q es el punto por el que pasa la recta.

Tenemos los datos de $s = (2,0,16)$, $q = (9,2,0)$ y $r = (6,-6,-8)$.

La recta en cuestión es: $L_1 : \{(9,2,0) + t(3,8,8) : t \in \mathbb{R}\}$.

Por lo tanto aplicando la fórmula tenemos:

$$d(s, L_1) = \frac{\|(3,8,8) \text{ x } (7,2,-16)\|}{\|(3,8,8)\|}$$

1.

$$(3,8,8) \text{ x } (7,2,-16) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 8 & 8 \\ 7 & 2 & -16 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & -16 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= (-144, 104, -50)$$

2.

$$\|(3,8,8) \text{ x } (7,2,-16)\| = \|(-144,104,-50)\|$$

$$= \sqrt{(-144)^2 + 104^2 + (-50)^2} = \sqrt{34052}$$

3.

$$\|u\| = \|(3,8,8)\| = \sqrt{3^2 + 8^2 + 8^2}$$

$$= \sqrt{137}$$

$\therefore$ La distancia del punto s a la recta L_1 es: $d(s, L_1) = \sqrt{\frac{34052}{137}}$.

2. Calcula la distancia del punto $s = (2N_3, -4N_6, 2N_9)$ a la recta que pasa por el origen y va en dirección de $v = (2N_4, -3N_5, -2N_6)$.

Solución:

Nuestros datos son: $s = (0,-16,0)$ y $v = (6,-6,-8)$.

$$u = P - S = (0,0,0) - (0,-16,0) = (0,16,0)$$

1.

$$v \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -6 & -8 \\ 0 & 16 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (128, 0, 96)$

2.

$\|v \text{ x } u\| = \|(128, 0, 96)\|$

$= \sqrt{128^2, +0 + 96^2} = \sqrt{25600}$

3.

$\|v\| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{136}$

$\therefore$ La distancia de la recta L_1 al punto s es: $d(s, L_1) = \sqrt{\frac{25600}{136}}$.

3. Calcula la distancia entre las líneas rectas l_1 y l_2, donde:

$$l_1 : \{(1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) : s \in \mathbb{R}\}$$

$$l_2 : \{(-1, 0, 0) + t(2, -6, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

Solución:

1.

$v = (-1, 1, 0)$

$u = (2, -6, 0)$

$$v \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (0, 0, 4)$

$\|(0, 0, 4)\| = \sqrt{0 + 0 + 4^2}$

$= \sqrt{16} = 4$

2.

$w = p_1 - p_2 = (1, 0, 0) - (-1, 0, 0) = (2, 0, 0)$

$$w \cdot (v \text{ x } u) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 0$

Aplicando la fórmula para el cálculo de distancias entre dos líneas tenemos:

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(p_1 - p_2) \cdot (v \text{ x } u)|}{\|v \text{ x } u\|}$$

$$d(l_1, l_2) = \frac{|0|}{4} = 0$$

$\therefore$ Como $w \cdot (v \text{ x } u) = 0$ podemos afirmar que estas líneas se intersectan y es por eso que su distancia es de cero.

4. Calcula la distancia entre las dos líneas rectas:

$$l_1 : \frac{x-3}{27} = \frac{y-1}{21} = \frac{z-8}{33}$$

$$l_2 : \frac{x-1}{9} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-3}{11}$$

Solución:

Tenemos las siguientes rectas: $l_1 : \{(3,1,8) + t(27,21,33) : t \in \mathbb{R}\}$ y $l_2 : \{(1,-3,3) + s(9,7,11) : s \in \mathbb{R}\}$.

1.

$v = (27, 21, 33)$

$u = (9, 7, 11)$

$v \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 27 & 21 & 33 \\ 9 & 7 & 11 \end{vmatrix}$

$= (0, 0, 0)$

Como son rectas paralelas entre sí, solo resta revisar que no se trate de la misma:

$$P - Q = (1, -3, 3) - (3, 1, 8) = (-2, -4, -5)$$

$$(P - Q) \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -4 & -5 \\ 9 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (-9, 23, 22)$$

$\therefore$ Como $(P - Q) \text{ x } u \neq 0$ y $u \text{ x } v = 0$ podemos afirmar que L_1 y L_2 son paralelas pero no la misma recta.

Como sabemos ahora con seguridad de que no se trata de la misma recta, la distancia entre ellas será la del segmento de recta que sea ortogonal a ambas rectas.

Haciendo un análisis rápido sobre cómo encontrar la distancia entre dos rectas paralelas podemos llegar al entendido que se desea encontrar la distancia del segmento que es tanto ortogonal a l_1 como a l_2, pero otra manera de plantearlo es encontrar la distancia de cualquier punto perteneciente a l_1 a la recta l_2 pero ya que conocemos que encontrar esta distancia es lo mismo a encontrar el valor del segmento que es ortogonal a l_2 (ya que este será el más pequeño posible de todos los segmentos del perteneciente a l_1 a l_2) podemos afirmar con toda seguridad que encontrar este segmento ortogonal a l_1 y l_2 será lo mismo que encontrar la distancia de un punto de cualquiera de las dos rectas hacia la otra.

Aplicando este análisis tenemos entonces: $P = (3, 1, 8)$ como punto que pertenece a l_1 y $l_2 : \{(1, -3, 3) + s(9, 7, 11) : s \in \mathbb{R}\}$ como nuestra línea a calcular su distancia con respecto a P.

Tenemos la fórmula para calcular la distancia de un punto a una línea recta dada:

$$d(P, l) = \frac{\|u \text{ x } (Q - P)\|}{\|u\|}$$

Donde u es el vector de dirección de la recta, P es el punto y Q es el punto por el que pasa la recta.

Por lo tanto aplicando:

$$Q - P = (1, -3, 3) - (3, 1, 8) = (-2, -4, -5)$$

$$d(P, l_2) = \frac{\|(9, 7, 11) \text{ x } (-2, -4, -5)\|}{\|(9, 7, 11)\|}$$

4.1

$$(9, 7, 11) \text{ x } (-2, -4, -5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 7 & 11 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (4, 23, -22)$$

4.2

$$\|(9, 7, 11) \text{ x } (-2, -4, -5)\| = \|(4, 23, -22)\|$$

$$= \sqrt{4^2 + 23^2 + (-22)^2} = \sqrt{1029}$$

4.3

$$\|(9, 7, 11)\| = \sqrt{9^2 + 7^2 + 11^2}$$

$$= \sqrt{251}$$

$\therefore$ La distancia del punto P a la recta l_2 y por lo tanto la distancia de l_1 a l_2 es: $d(P, l_2) = \sqrt{\frac{1029}{251}} = d(l_1, l_2)$.

5. Sea l_1 la recta que pasa por los puntos $q = (3N_1, N_2, -2N_3)$ y $r = (2N_4, -3N_5, -2N_6)$.

Sea la recta l_2 que pasa por el punto $p = (N_1, 2N_2, -N_3)$ y va en dirección de $r = (N_7, -4N_9, 2N_8)$.

Calcula la distancia entre las rectas l_1 y l_2.

Solución:

Los datos de la primera recta son: $q = (9, 2, 0)$ y $r = (6, -6, -8)$.

$$l_1 : \{(9, 2, 0) + t(3, 8, 8)\}$$

Los datos de la segunda recta son: $p = (3, 4, 0)$ y $r = (2, 0, 16)$.

$$l_2 : \{(3, 4, 0) + s(2, 0, 16)\}$$

1.

$v = (3, 8, 8)$

$u = (2, 0, 16)$

$$v \text{ x } u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 16 \end{vmatrix}$$

$= (128, -32, -16)$

$\|(128, -32, -16)\| = \sqrt{128^2 + (-32)^2 + (-16)^2}$

$\sqrt{17664}$

2.

$w = p_1 - p_2 = (9, 2, 0) - (3, 4, 0) = (6, -2, 0)$

$$w \cdot (v \text{ x } u) = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & 0 & 16 \end{vmatrix}$$

$= 128(6) + (-2)(-32) + 0(-16) = 832$

Usando la fórmula para el cálculo de distancias entre rectas entonces tenemos:

Aplicando la fórmula para el cálculo de distancias entre dos líneas tenemos:

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(p_1 - p_2) \cdot (v \text{ x } u)|}{\|v \text{ x } u\|}$$

$$d(l_1, l_2) = \frac{|832|}{\sqrt{17664}}$$