



Universidad Nacional Autónoma de
México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

TAREA 8: VOLUMEN DE PARALELEPÍPEDOS Y TETRAEDROS

Materia: Geometría del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Abril 2024

Sea N_1 el primer dígito de tu número de cuenta, N_2 el segundo dígito, N_3 el tercero y así sucesivamente.

Ejercicio 1: Calcula el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $u = (-N_1, N_2, -N_3)$, $v = (N_4, -N_5, N_6)$ y $w = (2N_7, -N_8, 3N_9)$.

Solución:

Tenemos $u = (-3, 2, 0)$, $v = (3, -2, 4)$, $w = (4, -8, 0)$.

La fórmula para calcular el volumen de un paralelepípedo sabemos que es $|u \cdot (v \times w)|$ entonces será la fórmula a desarrollar y conseguir un resultado, también conocemos que se trata de un producto mixto y la manera de resolverlo o desarrollarlo es la siguiente:

$$\begin{aligned} |u \cdot (v \times w)| &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left| \left(\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} (-3) - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} 2 + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} 0 \right) \right| \\ &= |32(-3) + 16(2) - 16(0)| \\ &= |-96 + 32 + 0| = |-64| = 64 \end{aligned}$$

∴ El volumen del paralelepípedo formado por los vectores u , v y w es 64.

Ejercicio 2: Verifica que se cumpla la igualdad

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

para los vectores u , v y w del ejercicio 1.

Solución:

Tenemos $u = (-3, 2, 0)$, $v = (3, -2, 4)$, $w = (4, -8, 0)$.

1.1

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} k \right) \\ &= (8i + 12j + 0k) \\ &= (8, 12, 0) \end{aligned}$$

1.2

$$(u \times v) \times w = (8, 12, 0) \times (4, -8, 0)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 12 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} k \right) \\ &= (0i + 0j - 112k) \\ &= (0, 0, -112) \end{aligned}$$

2.1

$$\begin{aligned}
(u \cdot w)v &= ((-3, 2, 0) \cdot (4, -8, 0))(3, -2, 4) \\
&= ((-3)(4) + 2(-8) + 0)(3, -2, 4) = (-28)(3, -2, 4) \\
&= (-84, 56, -112)
\end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned}
(v \cdot w)u &= ((3, -2, 4) \cdot (4, -8, 0))(-3, 2, 0) \\
&= (3(4) + (-2)(-8) + 4(0))(-3, 2, 0) \\
&= (28)(-3, 2, 0) = (-84, 56, 0)
\end{aligned}$$

2.3

$$\begin{aligned}
(u \cdot w)v - (v \cdot w)u &= (-84, 56, -112) - (-84, 56, 0) \\
&= (0, 0, -112)
\end{aligned}$$

Como se puede observar $(0, 0, -112) = (0, 0, -112)$ por lo tanto podemos afirmar que se cumple

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

■

Ejercicio 3: Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los vectores $u = (-N_1, N_2, -N_3)$, $v = (N_4, -N_5, N_6)$ y $w = (2N_7, -N_8, 3N_9)$ y el origen $0 = (0, 0, 0)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
u &= (-3, 2, 0) \\
v &= (3, -2, 4) \\
w &= (4, -8, 0)
\end{aligned}$$

Primero procederemos a calcular el volumen del paralelepípedo como lo hicimos en el primer ejercicio, posterior a eso calcularemos el volumen del tetraedro, pero cabe resaltar y notar que el paralelepípedo creado por estos tres vectores es el mismo que fue calculado en el ejercicio 1, esto porque los vectores son los mismos, por lo tanto ya tenemos el dato de volumen que es 64.

Para terminar falta calcular el volumen del tetraedro contenido en ese paralelepípedo generado por esos tres vectores, como se conoce, dentro de un paralelepípedo hay 6 tetraedros, por lo que el volumen de uno solo será el valor del volumen del paralelepípedo entre seis, ya que este es el número de tetraedros iguales existentes.

∴ El volumen del tetraedro creado por u , v y w es: $\frac{64}{6}$

■

Ejercicio 4: Calcula el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $u = (N_1, 2N_2, -N_3)$, $v = (N_4, -N_5, N_6)$ y $w = (-3N_7, 2N_8, N_9)$.

Solución:

Tenemos $u = (3, 4, 0)$, $v = (3, -2, 4)$ y $w = (-6, 16, 0)$.

La manera de calcular el volumen será la misma que se expuso en el ejercicio 1.

$$\begin{aligned}
 |u \cdot (v \times w)| &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ -6 & 16 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 16 & 0 \end{vmatrix} 3 - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} 4 + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 16 \end{vmatrix} 0 \right) \\
 &= |-64(3) - (24)4 + 0| \\
 &= |-192 - 96 + 0| = 288
 \end{aligned}$$

Ejercicio 5: Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $p = (N_1, 2N_2, -N_3)$, $q = (N_4, -N_5, N_6)$, $r = (-3N_7, 2N_8, N_9)$ y $s = (-N_3, N_5, -N_7)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 p &= (3, 4, 0) \\
 q &= (3, -2, 4) \\
 r &= (-6, 16, 0) \\
 s &= (0, 2, -2)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto nuestros vectores son construidos al restarle a tres puntos un mismo punto:

$$\begin{aligned}
 u &= p - s = (3, 4, 0) - (0, 2, -2) = (3, 2, 2) \\
 v &= q - s = (3, -2, 4) - (0, 2, -2) = (3, -4, 6) \\
 w &= r - s = (-6, 16, 0) - (0, 2, -2) = (-6, 14, 2)
 \end{aligned}$$

Se continúa calculando el volumen del paralelepípedo construido por estos tres vectores y después dividir entre 6 el resultado, ya que 6 son el número de tetraedros que existen dentro de un paralelepípedo:

$$\begin{aligned}
 |u \cdot (v \times w)| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ -6 & 14 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \left| \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} 3 - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} 2 + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 14 \end{vmatrix} 2 \right| \\
 &= |(-92)3 - (42)2 + 18(2)| \\
 &= |-324| = 324
 \end{aligned}$$

∴ El valor del tetraedro es: $\frac{324}{6} = 54$

Ejercicio 6: Verifica que se cumple la igualdad de Jacobi con los vectores del ejercicio 4.

Solución:

Tenemos $u = (3, 4, 0)$, $v = (3, -2, 4)$ y $w = (-6, 16, 0)$ y la igualdad de Jacobi nos dice lo siguiente:

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$$

1.

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= u \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ -6 & 16 & 0 \end{vmatrix} \\ &= u \times \left(\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 16 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 16 \end{vmatrix} k \right) \\ &= u \times (-64, -24, 36) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ -64 & -24 & 36 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -24 & 36 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -64 & 36 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -64 & -24 \end{vmatrix} k \\ &= (144, -108, 184) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} v \times (w \times u) &= v \times \left(\begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 16 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= v \times \left(\begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & 16 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} k \right) \\ &= v \times (0, 0, -72) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -72 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -72 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -72 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} k \\ &= (144, 216, 0) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} w \times (u \times v) &= w \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= w \times \left(\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} k \right) \\ &= w \times (16, -12, -18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 16 & 0 \\ 16 & -12 & -18 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 16 & 0 \\ -12 & -18 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 16 & -18 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & 16 \\ 16 & -12 \end{vmatrix} k \\
&= (-288, -108, -184)
\end{aligned}$$

4.

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$$

$$(144, -108, 184) + (144, 216, 0) + (-288, -108, -184) = (144 + 144 - 288, -108 + 216 - 108, 184 + 0 - 184) = 0$$

∴ Se comprueba que la igualdad de Jacobi se cumple para estos tres vectores. ■