



Universidad Nacional Autónoma de  
México

*Facultad de Estudios Superiores Acatlán*

# TAREA 8: VOLUMEN DE PARALELEPÍPEDOS Y TETRAEDROS

*Materia: Geometría del Espacio*

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto  
Número de cuenta: 320324280

*Abril 2024*

Sea  $N_1$  el primer dígito de tu número de cuenta,  $N_2$  el segundo dígito,  $N_3$  el tercero y así sucesivamente.

**Ejercicio 1:** Calcula el volumen del paralelepípedo generado por los vectores  $u = (-N_1, N_2, -N_3)$ ,  $v = (N_4, -N_5, N_6)$  y  $w = (2N_7, -N_8, 3N_9)$ .

**Solución:**

Tenemos  $u = (-3, 2, 0)$ ,  $v = (3, -2, 4)$ ,  $w = (4, -8, 0)$ .

La fórmula para calcular el volumen de un paralelepípedo sabemos que es  $|u \cdot (v \times w)|$  entonces será la fórmula a desarrollar y conseguir un resultado, también conocemos que se trata de un producto mixto y la manera de resolverlo o desarrollarlo es la siguiente:

$$\begin{aligned} |u \cdot (v \times w)| &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left| \left( \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} (-3) - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} 2 + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} 0 \right) \right| \\ &= |32(-3) + 16(2) - 16(0)| \\ &= |-96 + 32 + 0| = |-64| = 64 \end{aligned}$$

∴ El volumen del paralelepípedo formado por los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  es 64.

**Ejercicio 2:** Verifica que se cumpla la igualdad

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

para los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  del ejercicio 1.

**Solución:**

Tenemos  $u = (-3, 2, 0)$ ,  $v = (3, -2, 4)$ ,  $w = (4, -8, 0)$ .

**1.1**

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} k \right) \\ &= (8i + 12j + 0k) \\ &= (8, 12, 0) \end{aligned}$$

**1.2**

$$(u \times v) \times w = (8, 12, 0) \times (4, -8, 0)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 12 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} k \right) \\ &= (0i + 0j - 112k) \\ &= (0, 0, -112) \end{aligned}$$

### 2.1

$$\begin{aligned}
(u \cdot w)v &= ((-3, 2, 0) \cdot (4, -8, 0))(3, -2, 4) \\
&= ((-3)(4) + 2(-8) + 0)(3, -2, 4) = (-28)(3, -2, 4) \\
&= (-84, 56, -112)
\end{aligned}$$

### 2.2

$$\begin{aligned}
(v \cdot w)u &= ((3, -2, 4) \cdot (4, -8, 0))(-3, 2, 0) \\
&= (3(4) + (-2)(-8) + 4(0))(-3, 2, 0) \\
&= (28)(-3, 2, 0) = (-84, 56, 0)
\end{aligned}$$

### 2.3

$$\begin{aligned}
(u \cdot w)v - (v \cdot w)u &= (-84, 56, -112) - (-84, 56, 0) \\
&= (0, 0, -112)
\end{aligned}$$

Como se puede observar  $(0, 0, -112) = (0, 0, -112)$  por lo tanto podemos afirmar que se cumple

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

■

**Ejercicio 3:** Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los vectores  $u = (-N_1, N_2, -N_3)$ ,  $v = (N_4, -N_5, N_6)$  y  $w = (2N_7, -N_8, 3N_9)$  y el origen  $0 = (0, 0, 0)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}
u &= (-3, 2, 0) \\
v &= (3, -2, 4) \\
w &= (4, -8, 0)
\end{aligned}$$

Primero procederemos a calcular el volumen del paralelepípedo como lo hicimos en el primer ejercicio, posterior a eso calcularemos el volumen del tetraedro, pero cabe resaltar y notar que el paralelepípedo creado por estos tres vectores es el mismo que fue calculado en el ejercicio 1, esto porque los vectores son los mismos, por lo tanto ya tenemos el dato de volumen que es 64.

Para terminar falta calcular el volumen del tetraedro contenido en ese paralelepípedo generado por esos tres vectores, como se conoce, dentro de un paralelepípedo hay 6 tetraedros, por lo que el volumen de uno solo será el valor del volumen del paralelepípedo entre seis, ya que este es el número de tetraedros iguales existentes.

∴ El volumen del tetraedro creado por  $u$ ,  $v$  y  $w$  es:  $\frac{64}{6}$

■

**Ejercicio 4:** Calcula el volumen del paralelepípedo generado por los vectores  $u = (N_1, 2N_2, -N_3)$ ,  $v = (N_4, -N_5, N_6)$  y  $w = (-3N_7, 2N_8, N_9)$ .

**Solución:**

Tenemos  $u = (3, 4, 0)$ ,  $v = (3, -2, 4)$  y  $w = (-6, 16, 0)$ .

La manera de calcular el volumen será la misma que se expuso en el ejercicio 1.

$$\begin{aligned}
 |u \cdot (v \times w)| &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ -6 & 16 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \left( \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 16 & 0 \end{vmatrix} 3 - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} 4 + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 16 \end{vmatrix} 0 \right) \\
 &= |-64(3) - (24)4 + 0| \\
 &= |-192 - 96 + 0| = 288
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 5:** Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos  $p = (N_1, 2N_2, -N_3)$ ,  $q = (N_4, -N_5, N_6)$ ,  $r = (-3N_7, 2N_8, N_9)$  y  $s = (-N_3, N_5, -N_7)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 p &= (3, 4, 0) \\
 q &= (3, -2, 4) \\
 r &= (-6, 16, 0) \\
 s &= (0, 2, -2)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto nuestros vectores son contruidos al restarle a tres puntos un mismo punto:

$$\begin{aligned}
 u &= p - s = (3, 4, 0) - (0, 2, -2) = (3, 2, 2) \\
 v &= q - s = (3, -2, 4) - (0, 2, -2) = (3, -4, 6) \\
 w &= r - s = (-6, 16, 0) - (0, 2, -2) = (-6, 14, 2)
 \end{aligned}$$

Se continua calculando el volumen del paralelepípedo construido por estos tres vectores y después dividir entre 6 el resultado, ya que 6 son el número de tetraedros que existen dentro de un paralelepípedo:

$$\begin{aligned}
 |u \cdot (v \times w)| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ -6 & 14 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \left| \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} 3 - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} 2 + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 14 \end{vmatrix} 2 \right| \\
 &= |(-92)3 - (42)2 + 18(2)| \\
 &= |-324| = 324
 \end{aligned}$$

$\therefore$  El valor del tetraedro es:  $\frac{324}{6} = 54$

**Ejercicio 6:** Verifica que se cumple la igualdad de Jacobi con los vectores del ejercicio 4.

**Solución:**

Tenemos  $u = (3, 4, 0)$ ,  $v = (3, -2, 4)$  y  $w = (-6, 16, 0)$  y la igualdad de Jacobi nos dice lo siguiente:

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$$

**1.**

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= u \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ -6 & 16 & 0 \end{vmatrix} \\ &= u \times \left( \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 16 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 16 \end{vmatrix} k \right) \\ &= u \times (-64, -24, 36) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ -64 & -24 & 36 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -24 & 36 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -64 & 36 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -64 & -24 \end{vmatrix} k \\ &= (144, -108, 184) \end{aligned}$$

**2.**

$$\begin{aligned} v \times (w \times u) &= v \times \left( \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 16 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= v \times \left( \begin{vmatrix} 16 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & 16 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} k \right) \\ &= v \times (0, 0, -72) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -72 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -72 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -72 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} k \\ &= (144, 216, 0) \end{aligned}$$

**3.**

$$\begin{aligned} w \times (u \times v) &= w \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= w \times \left( \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} k \right) \\ &= w \times (16, -12, -18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 16 & 0 \\ 16 & -12 & -18 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 16 & 0 \\ -12 & -18 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 16 & -18 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & 16 \\ 16 & -12 \end{vmatrix} k \\
&= (-288, -108, -184)
\end{aligned}$$

4.

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$$

$$(144, -108, 184) + (144, 216, 0) + (-288, -108, -184) = (144+144-288, -108+216-108, 184+0-184) = 0$$

∴ Se comprueba que la igualdad de Jacobi se cumple para estos tres vectores. ■