Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tarea 4

Materia: Geometria del Espacio

Autor: Díaz Valdez Fidel Gilberto
Número de cuenta: 320324280

Marzo 2024

Sea N_1 el primer dígito de tu número de cuenta, N_2 el segundo dígito, N_3 el tercero y así sucesivamente.

1. Calcula la norma del vector $u = (N_7, -N_8, N_9)$. Si u no es un vector unitario, encuentra un múltiplo de u que sea unitario.

Solución:

$$\vec{u} = (2, -8, 0)$$

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 0}$$

$$= \sqrt{4 + 64 + 0} = \sqrt{68}$$

$\rightarrow$

Gracias a que comprobamos que $\vec{u}$ no es unitario, será necesario normalizar. El proceso de normalización es:

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{68}}(2, -8, 0) = (\frac{2}{\sqrt{68}}, \frac{-8}{\sqrt{68}}, \frac{0}{\sqrt{68}})$$

$$= \|(\frac{2}{\sqrt{68}}, \frac{-8}{\sqrt{68}}, \frac{0}{\sqrt{68}})\| = \sqrt{(\frac{2}{\sqrt{68}})^2 + \sqrt{\frac{-8}{\sqrt{68}}}^2 + 0}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{68} + \frac{64}{64}} = \sqrt{\frac{68}{68}} = \sqrt{1} = 1$$

2. Encuentra la ecuación de la esfera con centro en el origen $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y radio $N_9 + 1$.

Solución: Radio $= 0 + 1 = 1$

$$\therefore \mathbb{S}^2 = x \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

3. Encuentra la ecuación de la esfera con el centro en el origen $(N_7, -N_8, N_9) \in \mathbb{R}^3$ y radio $N_9 + 1$.

Solución: Radio $= 0 + 1 = 1$
Origen $= (2, -8, 0)$

$$\mathbb{S}^2 = x \in \mathbb{R}^3 | (x + 2)^2 + (y - 8)^2 + (z + 0)^2 = 1$$

$$\therefore (x + 2)^2 + (y - 8)^2 + (z + 0)^2 = 1$$

4. Demuestra que si v y w son dos vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w$$

Solución:

Sea $\vec{v} = (a, b, c)$ y $\vec{w} = (d, e, f)$.

$$\|v - w\|^2 = \|(a - d, b - e, c - f)\|^2 = \sqrt{(a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2}^2$$

$$= (a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2 = a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - 2be + e^2 + c^2 - 2cf + f^2$$

Por otro lado:

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}^2 + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}^2 - 2(a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f)$$

$$= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-2(ad+be+cf) = a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-2ad-2be-2cf$$

$$= a^2 - 2ad + d^2 + b^2 - 2be + e^2 + c^2 - 2cf + f^2$$

$$\therefore \|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w$$

■

5. Muestra que se puede determinar el ángulo θ entre los vectores v y w por medio de la fórmula:

$$\cos\,\theta = \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2}{4\|v\|\|w\|}$$

Ayuda: Desarrolla $\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$

Solución:

Haciendo uso de la ayuda desarrollaremos la parte indicada para llegar a la solución.

$$\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 = (v + w) \cdot (v + w) - (v - w) \cdot (v - w)$$
$$(v^2 + 2vw + w^2) - (v^2 - 2vw + w^2) = 4vw$$

Ahora sustituyendo nuestro nuevo valor de $\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$ tenemos:

$$\cos\,\theta = \frac{4vw}{4\|v\|\|w\|} \rightarrow \cos\,\theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

Y como se sabe esa es la fórmula para encontrar el ángulo de dos vectores, por lo que la proposición es cierta. ■