

# Oscilador de Duffing y Secciones de Poincaré

Física Computacional

Fidel Alejandro Navarro Salazar

## 1. Introducción

La teoría del caos es la rama de la ciencia que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos. Por ejemplo, el estudio del movimiento de cuerpos celestes; es posible modelar y predecir el comportamiento de dos cuerpos que interactúan entre sí, sin embargo, para tres o más cuerpos el sistema se torna caótico, y cualquier variación en las condiciones iniciales generarían resultados notoriamente diferentes.

La teoría del caos nace cuando el meteorólogo Edward Lorenz, del Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT), intentó darle una explicación al comportamiento del clima mediante las conocidas "ecuaciones de Lorenz". Al resolver sus ecuaciones, mediante computo, obtuvo como resultado una gráfica, conocida actualmente como atractor de Lorenz, la cual se caracteriza por su forma de mariposa.

Lorenz al estudiar el comportamiento de esta gráfica observó que para condiciones iniciales muy parecidas, con diferencias en los decimales, se obtenían resultados muy diferentes.

Henri Poincaré desarrolló un punto de vista diferente, planteando que para poder estudiar la evolución de un sistema físico era necesario enlistar completamente todos los parámetros que describen al sistema. Sin embargo, existe una gran cantidad de fenómenos no lineales, ocasionando que con el más mínimo cambio en las condiciones iniciales el resultado se vea afectado.

También es posible definir el estado del sistema en cualquier instante, al utilizar variables de estado para describir al sistema dinámico en un espacio fase.

En este trabajo se abordará la ecuación de Duffing como ejemplo de la teoría del caos, al describir un oscilador de comportamiento caótico.

## 2. Ecuación de Duffing

La ecuación de Duffing describe un oscilador de comportamiento caótico, que no obedece la ley de Hooke.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos \omega t$$

Las constantes de la ecuación representan:

$\alpha$  : rigidez  
 $\beta$  : no linealidad  
 $\gamma$  : amplitud de forzamiento  
 $\delta$  : amortiguamiento  
 $\omega$  : frecuencia de forzamiento

Para su solución se utilizó la biblioteca SciPy de Python, con la finalidad de resolver esta ecuación mediante un método numérico, en este caso Runge-Kutta de orden cuatro.

Las condiciones iniciales utilizadas son:

$$\begin{aligned}\alpha &= -1,0 \\ \beta &= 1,0 \\ \delta &= 0,30 \\ \omega &= 1,20\end{aligned}$$

Se obtuvieron varios resultados mediante la variación de la amplitud de forzamiento ( $\gamma$ ).

## 3. Conclusión

Por medio de las figuras es posible observar que para  $\gamma$  diferentes el sistema presenta comportamientos diferentes. Este fenómeno es notorio para  $\gamma = 0,20, 0,28, 0,29$ , ya que la amplitud de forzamiento varía en el segundo decimal, obteniendo resultados visiblemente diferentes a pesar de que  $\gamma$  es muy parecida en en cada caso.

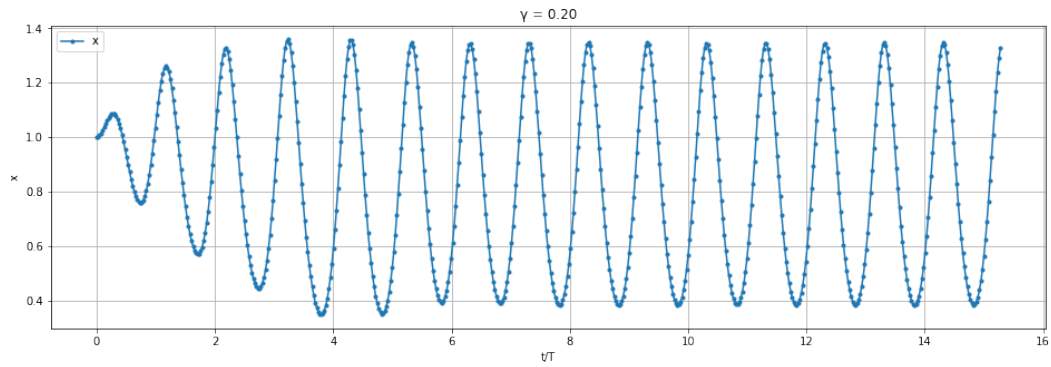


Figura 1: Solución a las ecuacion de Duffing para  $\gamma = 0,20$  en funcion del tiempo.

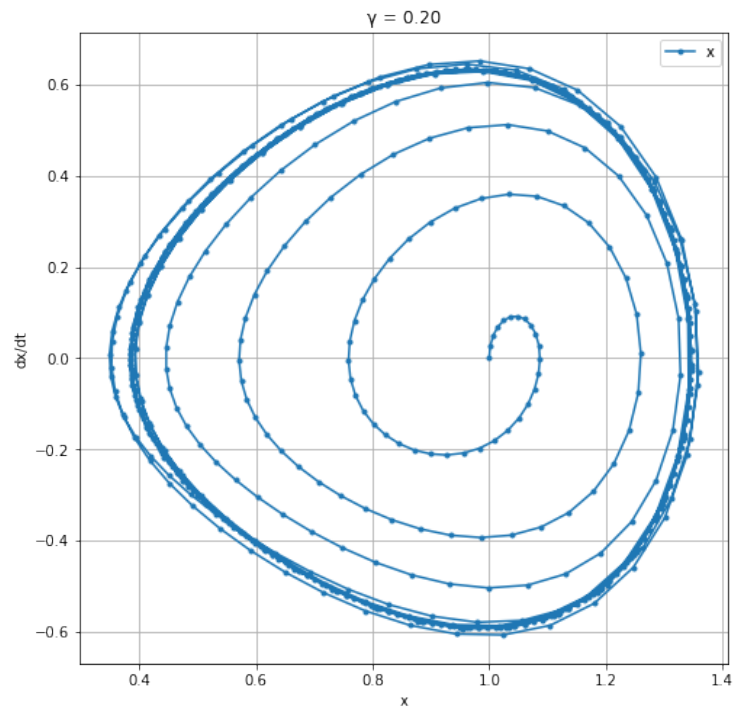


Figura 2: Retrato fase para  $\gamma = 0,20$ .

## Referencias

- [1] Christian Oestreicher. (2007 Sep). A history of chaos theory. Dialogues Clinical Neuroscience, 9, 279–289.
- [2] Editors of Encyclopaedia Britannica. (2019). Chaos theory: MATHEMATICS AND MECHANICS. 26/05/2019, de Encyclopaedia Britannica Sitio

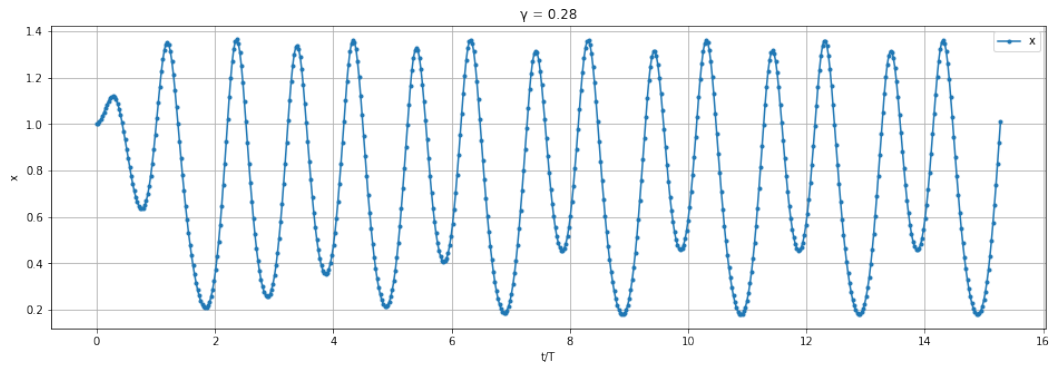


Figura 3: Solución a las ecuacion de Duffing para  $\gamma = 0,28$  en funcion del tiempo.

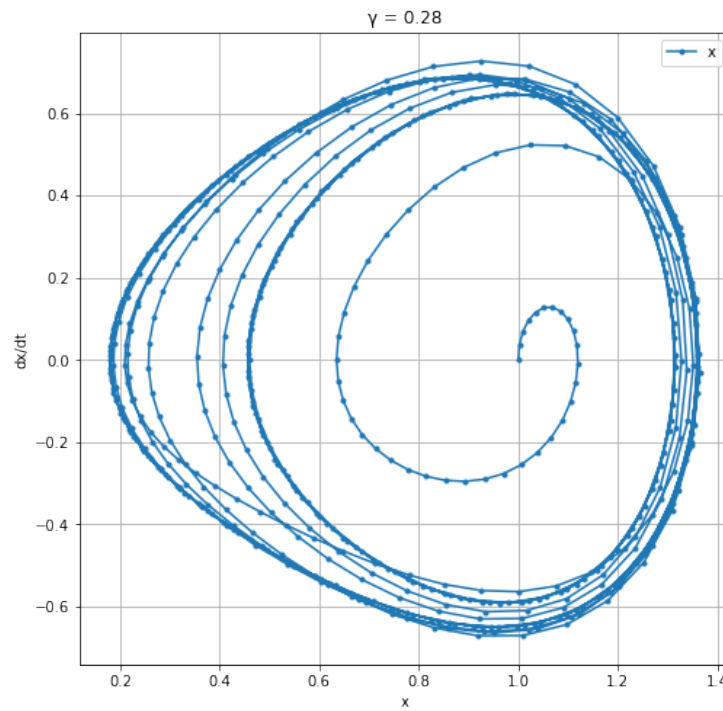


Figura 4: Retrato fase para  $\gamma = 0,28$ .

web: <https://www.britannica.com/science/chaos-theory>

- [3] Paul Halpern. (2018). Chaos Theory, The Butterfly Effect, And The Computer Glitch That Started It All. 26/05/2019, de Forbes Sitio web: <https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2018/02/13/chaos-theory-the-butterfly-effect-and-the-computer-glitch-that-started-it-all/241f48c969f6>

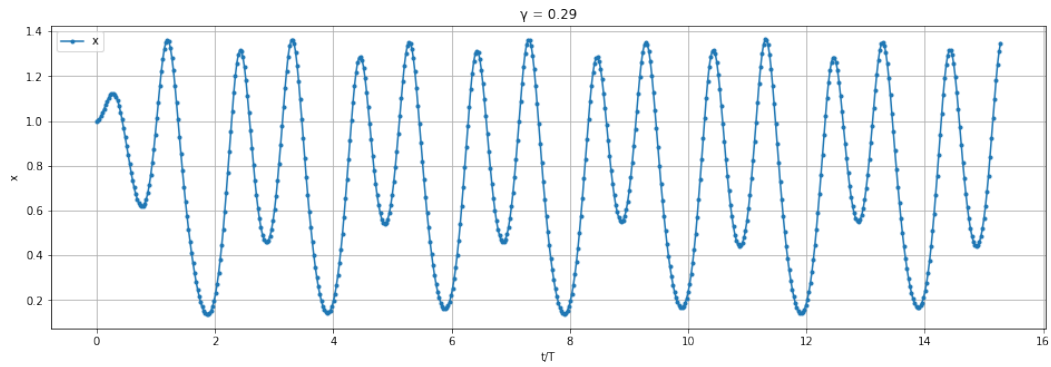


Figura 5: Solución a las ecuacion de Duffing para  $\gamma = 0,29$  en funcion del tiempo.

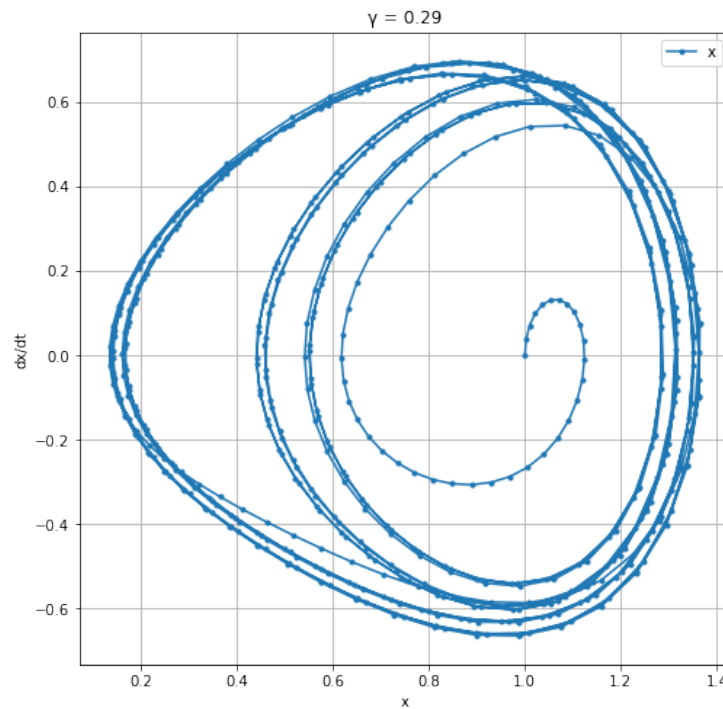


Figura 6: Retrato fase para  $\gamma = 0,29$ .

- [4] Wikipedia. (2019). Chaos theory. 26/05/2019, de Wikipedia Sitio web: [https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory)
- [5] Rafael Barzanallana. (2016). Edward Lorenz, padre de la Teoría del Caos y el Efecto Mariposa. 26/05/2019, de Universidad de Murcia Sitio web: <https://www.um.es/docencia/barzana/BIOGRAFIAS/Biografia-Edward-Lorenz.php>

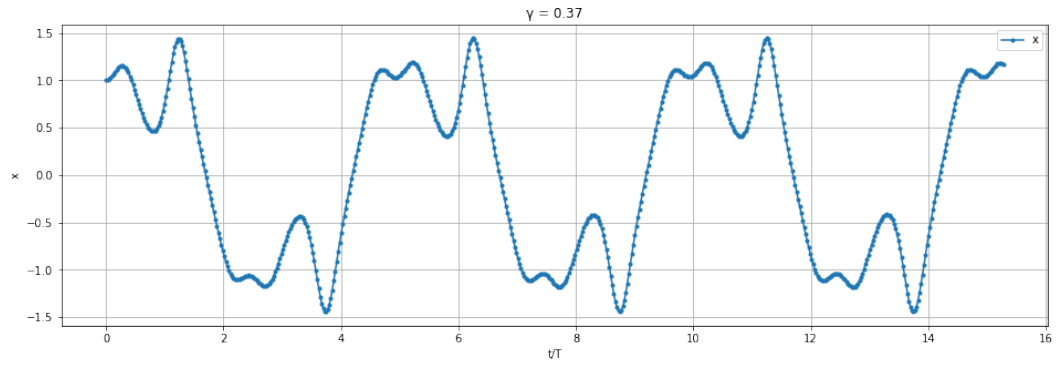


Figura 7: Solución a las ecuacion de Duffing para  $\gamma = 0,37$  en funcion del tiempo.

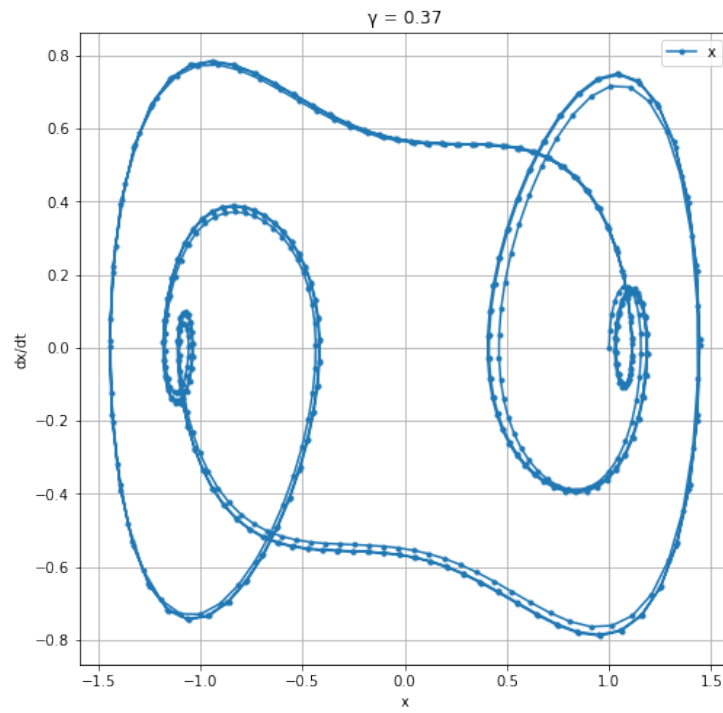


Figura 8: Retrato fase para  $\gamma = 0,37$ .

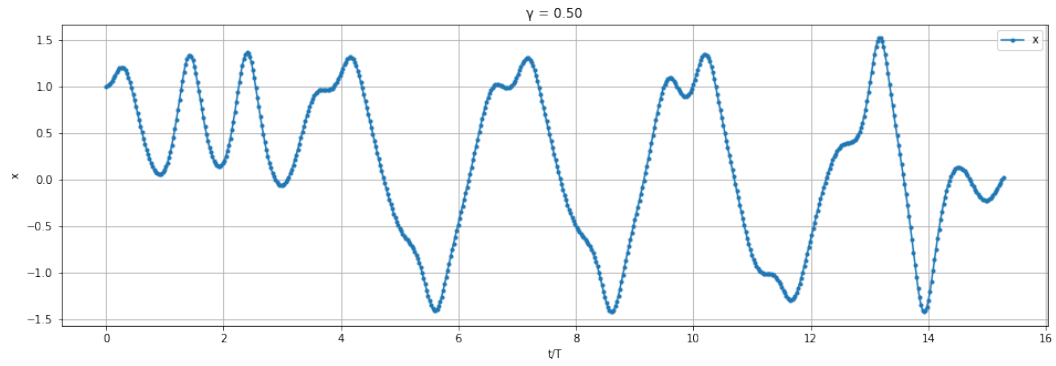


Figura 9: Solución a las ecuacion de Duffing para  $\gamma = 0,50$  en funcion del tiempo.

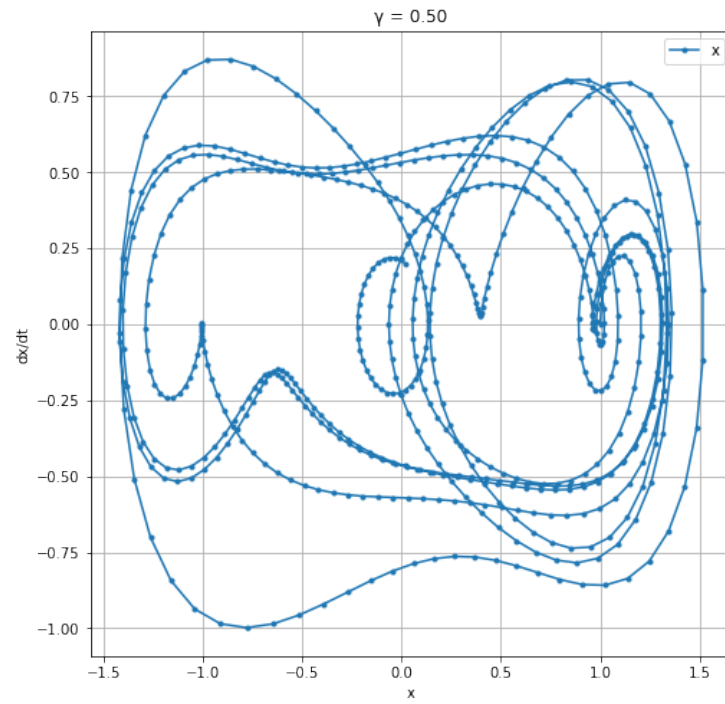


Figura 10: Retrato fase para  $\gamma = 0,50$ .

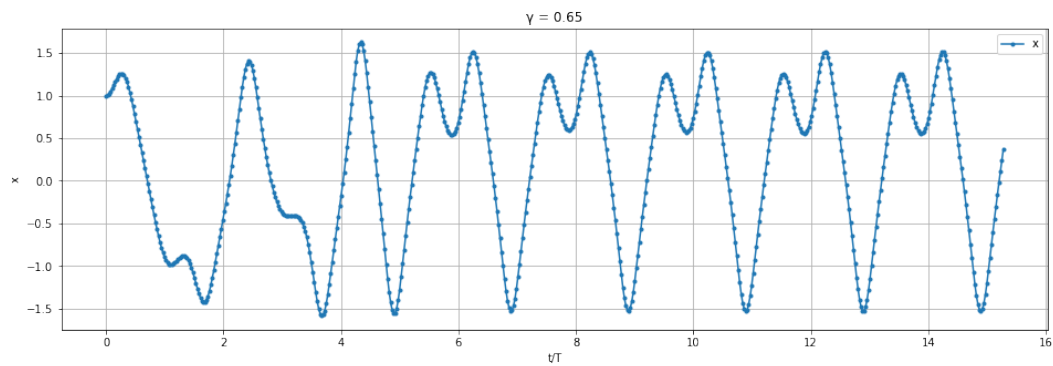


Figura 11: Solución a las ecuaciones de Duffing para  $\gamma = 0,65$  en función del tiempo.

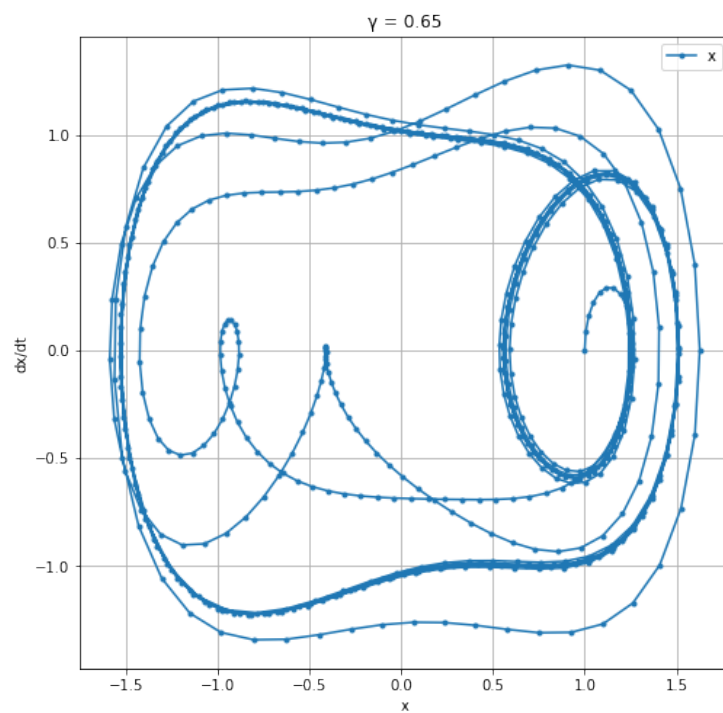


Figura 12: Retrato fase para  $\gamma = 0,65$ .