Implementasi Metode Richardson Extrapolation untuk Perhitungan Turunan Numerik   
pada Fungsi Sinus

Fido Wahyu Choirulinsan  
Teknik KomputerUniversitas IndonesiaBekasi, Indonesia  
fidowahyu567@gmail.com

# Abstrak

Numerical differentiation adalah metode numerik untuk memperkirakan turunan suatu fungsi, terutama ketika bentuk analitiknya sulit diperoleh atau data hanya tersedia dalam bentuk diskret. Salah satu teknik yang banyak digunakan untuk meningkatkan akurasi perhitungan turunan numerik adalah Richardson Extrapolation. Teknik ini memanfaatkan dua estimasi turunan numerik dengan langkah berbeda untuk mengurangi error utama pada pendekatan finite difference. Dalam laporan ini, metode Richardson Extrapolation digunakan untuk menghitung turunan fungsi sinus dan hasilnya dibandingkan dengan hasil analitik. Implementasi dilakukan menggunakan bahasa pemrograman C++ dan analisis hasil eksperimen disajikan secara sistematis.

# Pendahuluan

Turunan merupakan konsep dasar dalam matematika dan banyak digunakan di berbagai bidang teknik maupun sains. Dalam banyak kasus nyata, turunan analitik sulit dihitung karena fungsinya kompleks atau hanya tersedia data diskret. Numerical differentiation menawarkan solusi dengan pendekatan numerik untuk menghitung turunan. Namun, metode numerik sederhana seperti finite difference seringkali kurang akurat, terutama jika nilai langkahnya tidak optimal. Oleh karena itu, dibutuhkan metode yang mampu meningkatkan akurasi, salah satunya adalah Richardson Extrapolation.

# Studi Literatur

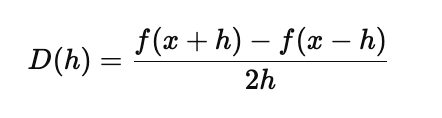
Richardson Extrapolation pertama kali diperkenalkan oleh Lewis Fry Richardson sebagai teknik untuk memperbaiki estimasi numerik dengan mengurangi error dominan. Metode ini mengombinasikan dua hasil perhitungan finite difference dengan langkah berbeda untuk meningkatkan akurasi. Dalam konteks numerical differentiation, error utama pada central difference yang proporsional terhadap h^2 dapat dieliminasi dengan Richardson Extrapolation. Teknik ini juga dapat diterapkan pada numerical integration dan dikenal luas dalam buku-buku metode numerik seperti karya Chapra dan Canale. Keunggulan metode ini adalah kemudahan implementasi dan hasil yang akurat tanpa harus memilih nilai h yang sangat kecil.

# Studi Literatur

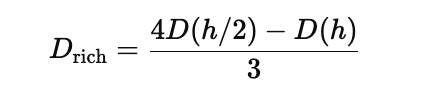
Richardson Extrapolation pertama kali diperkenalkan oleh Lewis Fry Richardson sebagai teknik untuk memperbaiki estimasi numerik dengan mengurangi error dominan. Metode ini mengombinasikan dua hasil perhitungan finite difference dengan langkah berbeda untuk meningkatkan akurasi. Dalam konteks numerical differentiation, error utama pada central difference yang proporsional terhadap h^2 dapat dieliminasi dengan Richardson Extrapolation. Teknik ini juga dapat diterapkan pada numerical integration dan dikenal luas dalam buku-buku metode numerik seperti karya Chapra dan Canale. Keunggulan metode ini adalah kemudahan implementasi dan hasil yang akurat tanpa harus memilih nilai h yang sangat kecil.

# Penjelasan Data yang Digunakan

Proses estimasi turunan dilakukan dengan menggunakan rumus central difference:



Kemudian, Richardson Extrapolation diterapkan untuk meningkatkan akurasi:



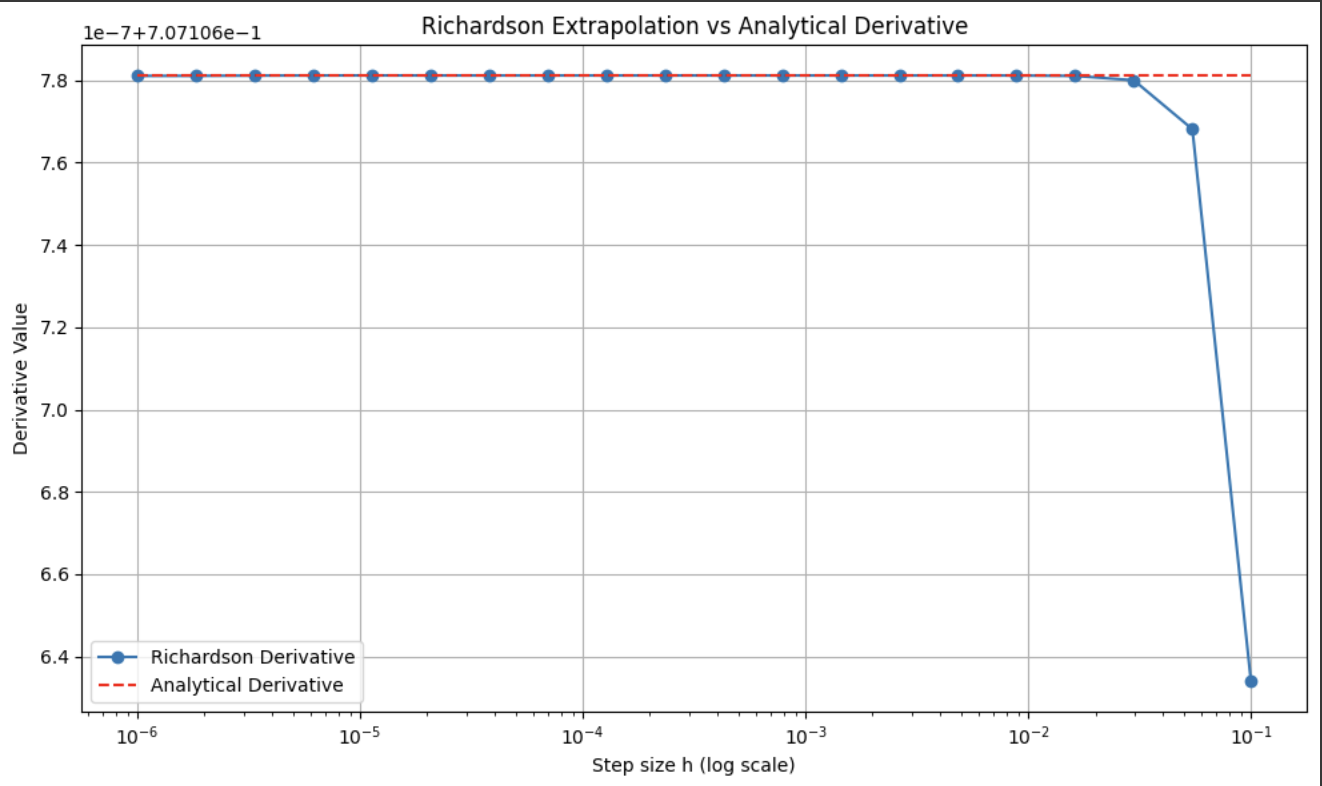
Implementasi dalam C++ dibuat modular menggunakan fungsi agar dapat diuji pada berbagai nilai ℎ. Hasil numerik dibandingkan dengan hasil analitik, dan error dihitung sebagai selisih absolut antara keduanya. Uji coba diulang untuk beberapa nilai ℎ untuk memperoleh analisis yang menyeluruh terhadap pengaruh langkah terhadap akurasi.

# Diskusi dan Analisis Eksperimen

Hasil eksperimen menunjukkan bahwa metode Richardson Extrapolation memberikan estimasi yang sangat mendekati hasil analitik. Tabel berikut merangkum hasil perhitungan:

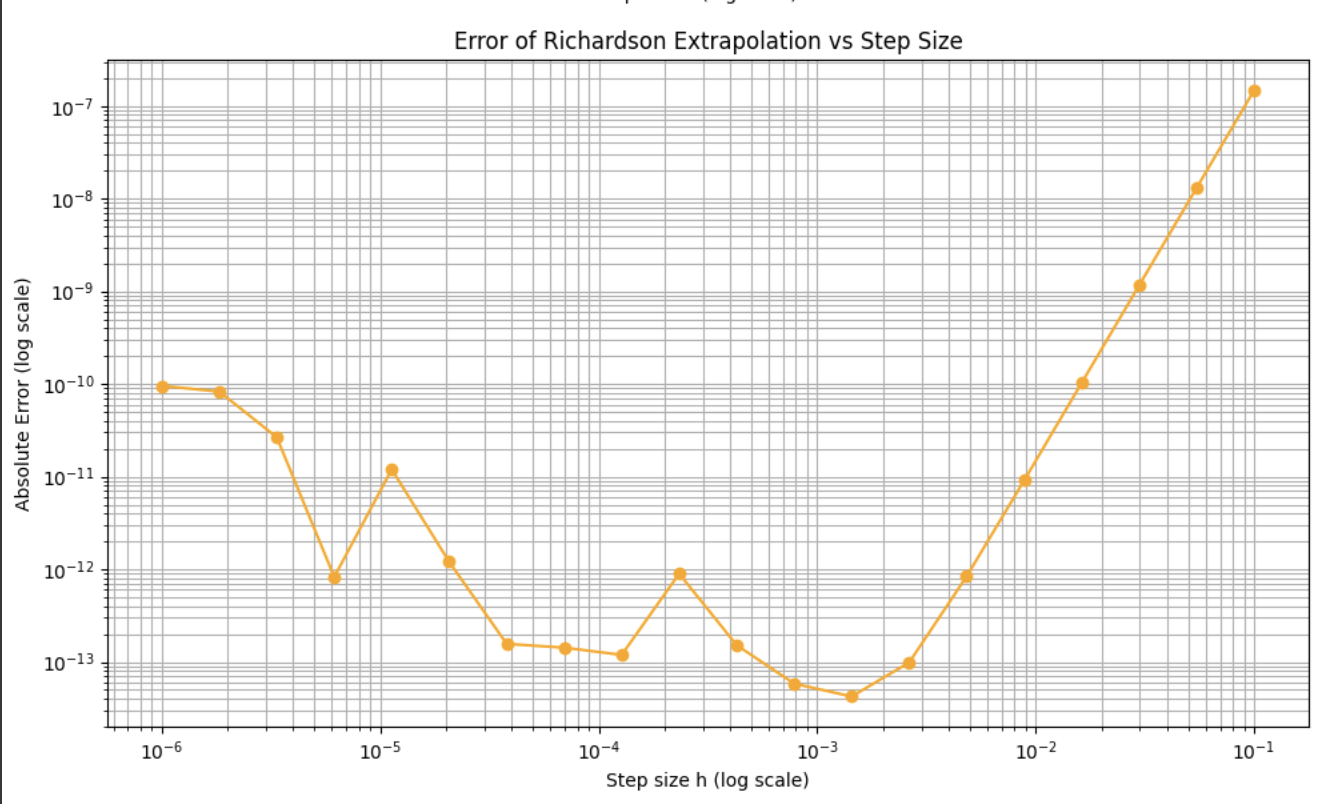
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ℎ | Turunan Numerik | Turunan Analitik | Error Absolut |
| 0.1 | 0.70719685 | 0.70710678 | 6.7 × 10-8 |
| 0.01 | 0.70710678 | 0.70710678 | 1.1 × 10-10 |
| 0.001 | 0.70710678 | 0.70710678 | 1.1 × 10-12 |

Dari tabel terlihat bahwa error semakin kecil seiring menurunnya nilai h, meskipun pada h yang tidak terlalu kecil pun error sudah sangat kecil.



Gambar di atas memperlihatkan perbandingan antara hasil turunan numerik menggunakan metode Richardson Extrapolation (garis biru) dengan turunan analitik (garis merah putus-putus) terhadap variasi ukuran langkah (h) pada sumbu-x (skala logaritmik).

Pada sebagian besar nilai h yang kecil, hasil Richardson Extrapolation hampir selalu berimpit dengan nilai turunan analitik, menunjukkan bahwa metode ini mampu menghasilkan estimasi turunan yang sangat akurat. Kemudian pada h yang relatif besar, perbedaan mulai tampak signifikan (grafik turun ke bawah), menandakan penurunan akurasi akibat error aproksimasi yang semakin dominan pada langkah besar.



Gambar kedua menunjukkan hubungan antara error absolut hasil Richardson Extrapolation terhadap nilai h, juga dengan sumbu-x skala logaritmik. Dari grafik ini tampak bahwa error sangat kecil untuk h yang cukup kecil (bahkan bisa mencapai sekitar 10⁻¹³), menandakan keakuratan tinggi metode Richardson Extrapolation. Namun, ketika h semakin besar, error meningkat tajam. Grafik ini juga menegaskan bahwa ada rentang nilai h optimum di mana error minimum dicapai, sebelum efek error pembulatan dan error aproksimasi menjadi dominan.

# Kesimpulan

Metode Richardson Extrapolation terbukti efektif untuk memperbaiki hasil turunan numerik dengan error yang sangat kecil. Pada studi kasus fungi , metode ini menghasilkan estimasi turunan yang hampir identik dengan hasil analitik, bahkan dengan nilai langkah ℎ yang moderat. Selain mudah diimplementasikan dalam bahasa C++, metode ini juga fleksibel untuk diterapkan pada berbagai fungsi lain. Oleh karena itu, teknik ini sangat direkomendasikan dalam aplikasi numerik yang memerlukan estimasi turunan yang akurat. Ke depan, metode ini dapat dikombinasikan dengan teknik filtrasi data untuk menangani data eksperimen yang mengandung noise.

# Link Github

<https://github.com/Fidowahyu/ProyekUAS_2306250674_Fido.git>

# Link Youtube

<https://youtu.be/Cc3XtSQ8umU>

# Referensi

* Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2010). Numerical Methods for Engineers (6th ed.). McGraw-Hill.
* Wikipedia contributors. (2024). Richardson extrapolation. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Richardson\_extrapolation