厦门大学《数学分析》课程期中试卷

试卷类型：（A 卷）　　　　考试时间：2021.11.7

一、（12 分）证明：$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处连续、可导，但不可微.

二、（10 分）求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t}, y=\dfrac{1}{1+t}, z=2t$ 上的一点，使得曲线在该点的切线平行于平面 $x+3y+z=3$.

三、（10 分）求椭球面 $\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=21$ 在 $(1,2,2)$ 处的切平面和法线方程.

四、（12 分）求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值.

五、（10 分）证明：函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ 在 $x^2+y^2<1$ 上连续，但不一致连续.

六、（12 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(2x,y,z-x)=0$ 所确定的二元函数，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

七、（12 分）设方程组 $\begin{cases} x=e^u\cos v \\ y=e^u\sin v \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

八、（12 分）用拉格朗日乘数法求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在条件 $(x-y)^2-z^2=1$ 下的极值点，并判断这些极值点是极大值点还是极小值点.

九、（10 分）设 $E\subset R^2$ 为有界无限点集. 证明：E 在 R^2 中至少有一个聚点.