厦门大学《数学分析三》课程期中试卷评分标准

试卷类型:（经济学院国际化班） 考试时间：2024.10.27

一、（16 分）判断下列极限是否存在？如果极限存在，求此极限；如果极限不存在，说明理由.

（1） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$； （2） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.

解：（1） $\left|\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$，

令 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho(|\cos\theta|^3+|\sin\theta|^3)$$

因为 $|\cos\theta|^3+|\sin\theta|^3\le 2$，而 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\rho=0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}=0.$

于是，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$.

另解：$\left|\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}\le\dfrac{(|x|+|y|)(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=|x|+|y|$，

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|+|y|)=0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$.

（2）因为 $\lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0}}x=0$，

而 $$\lim_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(x-x^2)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(2-2x+x^2)=2,$$

于是，$$\lim_{\substack{y=x\\ x\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x+y}\ne\lim_{\substack{y=x^2-x\\ x\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x+y},$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ 不存在.

二、（12 分）证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处连续，且两个偏导数存在，

并讨论函数在$(0,0)$点处的可微性.

证明：当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$|f(x,y)|=\left|xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|xy|,$$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy=0$，所以，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，因此，$f(x,y)$在$(0,0)$处连续.

又因为 $$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$处可导.

由于 $$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta x\Delta y\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

因为 $$\left|\frac{\Delta x\Delta y\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\left|\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

且$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0$，于是，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{\Delta x\Delta y\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$,

即$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$

故函数$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

三、(10 分)设$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，证明：函数$v=f(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2})$满足$\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2v}{\partial y^2}=0$.

证明：因为$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，则$f_{12}=f_{21}$，于是，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=f_1\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})+f_2\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x^2+y^2})$$

$$=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}f_1-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{-2x(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}f_1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}f_{11}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_{12})$$

$$-\frac{2y(x^2+y^2)^2-2xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}f_2-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}f_{21}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}f_{22})$$

$$=\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}f_1+\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^4}f_{11}-\frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}f_{12}$$

$$-\frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}f_2-\frac{2xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}f_{21}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}f_{22}$$

$$=\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}f_1-\frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}f_2+\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^4}f_{11}-\frac{4xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}f_{12}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}f_{22}.$$

类似地，可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}f_1+\frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}f_2+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}f_{11}-\frac{4xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}f_{12}+\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}f_{22}.$$

于是，$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{(y^2-x^2)^2+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}f_{11}+\frac{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}f_{22}$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(f_{11}+f_{22})$$

由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，即 $f_{11}+f_{22}=0$，可得 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

四、(12 分) 设 $\begin{cases} x=\ln(u\cos v) \\ y=u\sin v \\ z=ue^v \end{cases}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解一：由 $x=\ln(u\cos v)$，$y=u\sin v$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} 1=\frac{1}{u\cos v}(\cos v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-u\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}) \\ 0=\sin v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

解得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u^2\cos^2 v}{u}=u\cos^2 v,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{u\cos v\sin v}{u}=-\sin v\cos v.$$

由 $x=\ln(u\cos v)$，$y=u\sin v$ 两边对 y 求导，得

$$\begin{cases}0=\dfrac{1}{u\cos v}(\cos v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-u\sin v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y})\\ 1=\sin v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

解得 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\sin v}{u}=\sin v,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\cos v}{u}.$$

于是，$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+u\mathrm{e}^v\frac{\partial v}{\partial x}=u\mathrm{e}^v\cos v(\cos v-\sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+u\mathrm{e}^v\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^v(\sin v+\cos v).$$

解二：对 $x=\ln(u\cos v)$，$y=u\sin v$ 两边微分，得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{u\cos v}(\cos v\mathrm{d}u-u\sin v\mathrm{d}v)\\ \mathrm{d}y=\sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v\end{cases},$$

或 $$\begin{cases}\cos v\mathrm{d}u-u\sin v\mathrm{d}v=u\cos v\mathrm{d}x\\ \sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v=\mathrm{d}y\end{cases},$$

解得 $$\begin{cases}\mathrm{d}u=u\cos^2 v\mathrm{d}x-\sin v\cos v\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}v=\sin v\mathrm{d}x+\dfrac{\cos v}{u}\mathrm{d}y\end{cases}.$$

所以，$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u^2\cos^2 v}{u}=u\cos^2 v,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\sin v}{u}=\sin v$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{u\cos v\sin v}{u}=-\sin v\cos v,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\cos v}{u}.$$

于是，$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^v\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+u\mathrm{e}^v\frac{\partial v}{\partial x}=u\mathrm{e}^v\cos v(\cos v-\sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+u\mathrm{e}^v\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^v(\sin v+\cos v).$$

五、(10 分) 求坐标原点到曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$ 的最远最近距离.

解: 目标函数: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; 约束条件: $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$.

作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z^2)+\mu(x+2y+z-4)$.

令

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x+\mu=0 & (1) \\ L_y=2y+2\lambda y+2\mu=0 & (2) \\ L_z=2z-2\lambda z+\mu=0 & (3) \\ L_\lambda=x^2+y^2-z^2=0 & (4) \\ L_\mu x+2y+z-4=0 & (5) \end{cases}$$

由 (1)(2) 可得 $\mu=-2(1+\lambda)x$, $\mu=-(1+\lambda)y$, 于是,

$$(1+\lambda)(2x-y)=0.$$

如果 $\lambda=-1$, 则 $\mu=0$, 由 (3) 可得 $\mu=2(\lambda-1)z$, 即 $z=0$.

代入 (4), 有 $x^2+y^2=0$, 得 $x=y=z=0$, 与 (5) 矛盾. 故 $\lambda\neq-1$, 则 $y=2x$.

由 (5) 可得 $z=4-x-2y=4-5x$, 代入 (4) 可得

$$5x^2=(4-5x)^2,$$

即 $\pm\sqrt{5}x=4-5x$, 解得 $x=\frac{4}{5\pm\sqrt{5}}=\frac{1}{5}(5\mp\sqrt{5})=1\mp\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故可得两组解

$$(1-\frac{\sqrt{5}}{5},2-\frac{2\sqrt{5}}{5},-1+\sqrt{5}),\quad (1+\frac{\sqrt{5}}{5},2+\frac{2\sqrt{5}}{5},-1-\sqrt{5}).$$

因为 $f(1-\frac{\sqrt{5}}{5},2-\frac{2\sqrt{5}}{5},-1+\sqrt{5})=12-4\sqrt{5}$, $f(1+\frac{\sqrt{5}}{5},2+\frac{2\sqrt{5}}{5},-1-\sqrt{5})=12+4\sqrt{5}$, 根据问题性质知所求距离的最大值和最小值一定都存在, 因此所得的两个稳定点就是距离的最大值点和最小值点.

于是, 原点到曲线 L 的最近距离、最远距离分别为 $2\sqrt{3-\sqrt{5}}$, $2\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

六、(10 分) 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,-2)$ 处的切线方程和法平面方程.

解: 方程两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases},$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z-1}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{y-z-1}$，

于是，切向量为 $\vec{T}=(1,\dfrac{z-x}{y-z-1},\dfrac{x-y+1}{y-z-1})\Big|_{(1,1,-2)}=(1,-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$.

故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1},$$

法平面方程为

$$2x-3y+z+3=0.$$

七、(10 分) 求函数 $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2$ 的极值.

解：令 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=6xy-6x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3x^2+3y^2-6y=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x(y-1)=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=0 \\ y_2=2 \end{cases}$，$\begin{cases} x_3=1 \\ y_3=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x_4=-1 \\ y_4=1 \end{cases}$.

经计算，可得 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6y-6,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6x,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y-6$.

(1) 考察点 $(0,0)$，$A=-6,\ B=0,\ C=-6$，

由于 $AC-B^2=36>0$，且 $A<0$，则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取到极大值，极大值为 0.

(2) 考察点 $(0,2)$，$A=6,\ B=0,\ C=6$，

由于 $AC-B^2=36>0$，且 $A>0$，则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,2)$ 点取到极小值，极小值为 -4.

(3) 考察点 $(1,1)$，$A=0,\ B=6,\ C=0$，

由于 $AC-B^2=-36<0$，则函数 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处未取得极值.

(4) 考察点 $(-1,1)$，$A=0,\ B=-6,\ C=0$，

由于 $AC-B^2=-36<0$，则函数 $f(x,y)$ 在 $(-1,1)$ 处未取得极值.

综上，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取到极大值，极大值为 0，在 $(0,2)$ 点取到极小值，极小值为 -4.

八、(10 分)证明：函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $0<x^2+y^2<1$ 上连续，但不一致连续.

证明：对于满足 $0<x_0^2+y_0^2<1$ 的点 (x_0,y_0)，有 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$，因此，

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x_0y_0}{x_0^2+y_0^2}=f(x_0,y_0),$$

故函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $0<x^2+y^2<1$ 上连续.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{12}>0$，对于任意的 $0<\delta<\dfrac{1}{2}$，

取 $P_1(\delta,\delta)$，$P_2(\dfrac{\delta}{2},\dfrac{\delta}{4})$，则 $\rho(P_1,P_2)=\sqrt{\dfrac{\delta^2}{4}+\dfrac{9\delta^2}{16}}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}\delta<\delta$，

由于 $$\left|f(P_1)-f(P_2)\right|=\left|\frac{\delta^2}{\delta^2+\delta^2}-\frac{\frac{1}{8}\delta^2}{\frac{1}{4}\delta^2+\frac{1}{16}\delta^2}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right|=\frac{1}{10}>\varepsilon_0.$$

因此，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $0<x^2+y^2<1$ 上连续，但不一致连续.

九、(10 分)证明：曲面 $F(\dfrac{z}{y},\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{x})=0$ 的所有切平面都通过原点，其中函数 F 具有连续的偏导数.

证明：任取曲面 $F(\dfrac{z}{y},\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{x})=0$ 的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的切平面的法向量为

$$\vec{n}=(\frac{1}{z_0}F_2(P_0)-\frac{y_0}{x_0^2}F_3(P_0),-\frac{z_0}{y_0^2}F_1(P_0)+\frac{1}{x_0}F_3(P_0),\frac{1}{y_0}F_1(P_0)-\frac{x_0}{z_0^2}F_2(P_0)),$$

于是，切平面方程为

$$(\frac{1}{z_0}F_2(P_0)-\frac{y_0}{x_0^2}F_3(P_0))(x-x_0)+(-\frac{z_0}{y_0^2}F_1(P_0)+\frac{1}{x_0}F_3(P_0))(y-y_0)$$

$$+(\frac{1}{y_0}F_1(P_0)-\frac{x_0}{z_0^2}F_2(P_0))(z-z_0)=0.$$

将原点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 代入方程左边，可得

$$(\frac{1}{z_0}F_2(P_0)-\frac{y_0}{x_0^2}F_3(P_0))(-x_0)+(-\frac{z_0}{y_0^2}F_1(P_0)+\frac{1}{x_0}F_3(P_0))(-y_0)\ +(\frac{1}{y_0}F_1(P_0)-\frac{x_0}{z_0^2}F_2(P_0))(-z_0)$$

$$=-\frac{x_0}{z_0}F_2(P_0)+\frac{y_0}{x_0}F_3(P_0)+\frac{z_0}{y_0}F_1(P_0)-\frac{y_0}{x_0}F_3(P_0)-\frac{z_0}{y_0}F_1(P_0)+\frac{x_0}{z_0}F_2(P_0)$$

$$=0,$$

故原点在切平面上，因 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 $F(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x})=0$ 上任意一点，于是，曲面 $F(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x})=0$ 的所有切平面都通过原点.