厦门大学《数学分析-1》课程期中试卷

_______学院_______系_______年级_______专业

试卷类型：（A 卷）　　　　考试时间:2016 年 11 月 13 日

1.（6 分）用 $\varepsilon - N$ 语言证明：设 $a_n > 0, n \in N_+$，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$，则 $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln a$.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < a(1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon})$，即

$$-a(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}) < a_n - a < a(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}).$$

由 $a_n - a > -a(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon})$ 得 $a_n > a\mathrm{e}^{-\varepsilon}$，即 $\ln\dfrac{a_n}{a} = \ln a_n - \ln a > -\varepsilon$.

由 $a_n - a < a\mathrm{e}^{-\varepsilon}(\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1) < a(\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1)$ 得 $a_n < a\mathrm{e}^{\varepsilon}$，即 $\ln\dfrac{a_n}{a} = \ln a_n - \ln a < \varepsilon$.

故当 $n > N$ 时，$-\varepsilon < \ln a_n - \ln a < \varepsilon$，即 $|\ln a_n - \ln a| < \varepsilon$.

由极限的定义，$\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln a$.

2.（6 分）用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明：若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = A$.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，由 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$，存在正数 $M > 0$，使得当 $x > M$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

于是，取 $\delta = \dfrac{1}{M}$，则当 $0 < x < \delta$，即 $\dfrac{1}{x} > M$ 时，有 $\left|f(\dfrac{1}{x}) - A\right| < \varepsilon$.

由极限定义，$\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = A$.

3. （6 分）证明：极限 $\lim_{x\to 0^+} \cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明：取 $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}, n = 1,2,\cdots$，$\lim_{n\to\infty} \cos\dfrac{1}{x_n} = 1$；取 $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, n = 1,2,\cdots$，$\lim_{n\to\infty} \cos\dfrac{1}{y_n} = 0$.

即 $\lim_{n\to\infty} \cos\dfrac{1}{x_n} \ne \lim_{n\to\infty} \cos\dfrac{1}{y_n}$.

由归结原理，极限 $\lim_{x\to 0^+} \cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

4. （每小题 6 分，共 12 分）

（1）试确定 k 的值，使 $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-2x^2}$ 与 x^k 是 $x \to 0$ 时的同阶无穷小量，

(2) 试确定 k 的值，使函数 $\sqrt[3]{x^2\sin\frac{1}{x}}$ 与 x^k 是 $x\to\infty$ 时的等价无穷大量.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-2x^2})}=\frac{3}{2}$，故当 $k=2$ 时，$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-2x^2}$ 与 x^k 是 $x\to 0$ 时的同阶无穷小量.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2\sin\frac{1}{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x\sin\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=1$，所以当 $k=\frac{1}{3}$ 时，函数 $\sqrt[3]{x^2\sin\frac{1}{x}}$ 与 x^k 是 $x\to\infty$ 时的等价无穷大量.

5. （7 分）求曲线 $y=\sqrt{4x^2+2x+3}$ 的渐近线.

解：$k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=2$，

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+2x+3}-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+2x+3}+2x}=\frac{1}{2}.$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x+3}}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=-2,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y+2x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x+3}+2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+2x+3}-2x}=-\frac{1}{2}.$$

故曲线 $y=\sqrt{4x^2+2x+3}$ 有两条渐近线 $y=2x+\frac{1}{2}$ 和 $y=-2x-\frac{1}{2}$.

6. （15 分）求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln\cos x}{(1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}})\arctan(x^2)}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+\ln n}{n-\ln n})^{\frac{n}{\ln n}}$； (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x+x^2}-x)$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln\cos x}{(1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}})\arctan(x^2)}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln(1+\cos x-1)}{(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1)\arctan(x^2)}$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x(-\frac{1}{2}x^2)}{\sqrt{x}x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0;$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+\ln n}{n-\ln n})^{\frac{n}{\ln n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2\ln n}{n-\ln n})^{\frac{n-\ln n}{2\ln n}\cdot\frac{2n}{n-\ln n}}$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2\ln n}{n-\ln n})^{\frac{n-\ln n}{2\ln n}}=\mathrm{e}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1-\dfrac{\ln n}{n}}=2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+\ln n}{n-\ln n})^{\frac{n}{\ln n}}=\mathrm{e}^2$.

⑶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x+x^2}+x}=\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

7. （10 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & 当x为有理点\\ 0 & 当x为无理点\end{cases}$的连续性，并指出间断点的类型.

解：(1) 当x_0为整数时，由于$\lim\limits_{x\to k}f(x)=0=f(k)$，所以$f(x)$在$0,\pm1,\pm2,\cdots$处都连续；

(2) 当x_0为有理数且不为整数，或x_0为无理数时，

由实数的稠密性，可分别作一个无理数列$\{x_n\}(x_n>x_0)$和有理数列$\{y_n\}(y_n>y_0)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，而$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\sin\pi x_0\neq0$，故$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$不存在；同理，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$不存在.

故$f(x)$在$x=x_0$处间断，且间断点为第二类间断点.

8. （10 分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对任何$x_1\in[a,b]$，存在$x_2\in[a,b]$，满足$|f(x_2)|\le\dfrac{2}{3}|f(x_1)|$，试证明：存在$x_0\in[a,b]$，使得$f(x_0)$=0.

证明：取$x_1\in[a,b]$，由题意，存在$x_2\in[a,b]$，使得$|f(x_2)|\le\dfrac{2}{3}|f(x_1)|$；

对$x_2\in[a,b]$，同样存在$x_3\in[a,b]$，使得$|f(x_3)|\le\dfrac{2}{3}|f(x_2)|\le(\dfrac{2}{3})^2|f(x_1)|$；

………

类似地，存在$x_n\in[a,b]$，使得$x_n\in[a,b]$，使得$|f(x_n)|\le\dfrac{2}{3}|f(x_{n-1})|\le(\dfrac{2}{3})^{n-1}|f(x_1)|$；

以此类推，得到一个数列$\{x_n\}$，因为它有界，于是存在收敛的子序列$\{x_{n_k}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c$，由$x_{n_k}\in[a,b]$，故$c\in[a,b]$.

因为$|\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{3})^{n-1}|f(x_1)|=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n_k})=0$. 由于$f(x)$在$x=c$处连续，故

$$f(c)=\lim_{n\to\infty}f(x_{n_k})=0.$$

9. （10 分）证明：$f(x)=\sin x+\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证明：对于任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \le 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right| + 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\sin\frac{x_1+x_2}{2}\right|$$

$$\le 2\left|x_1-x_2\right| < \varepsilon .$$

10. （每小题 6 分，共 18 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明:

（1）$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界；(2）$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上能取到最大值或最小值；(3）$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证明：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.$

（1）因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$．取 $\varepsilon=1$，存在 $M>0$，使得当 $x>M$ 时，

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\text{，即}\left|f(x)\right| \le \left|f(x)-A\right|+\left|A\right| < \left|A\right|+1 .$$

又 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上连续，则存在 $B>0$，使得 $\left|f(x)\right| \le B, x\in[a,M]$.

取 $K=\max(1+\left|A\right|,B)$，则 $\left|f(x)\right| \le B, x\in[a,+\infty)$.

（2）如果 $a>0$，令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $g(t)=f(\dfrac{1}{t})$.

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则函数 $g(t)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a}]$ 上连续, 且 $\lim\limits_{t\to0^+} g(t)$ 存在，且 $\lim\limits_{t\to0^+} g(t)=A$.

作函数 $G(t)=\begin{cases} g(t), & 0<t\le\dfrac{1}{a} \\ A, & t=0 \end{cases}$，显然 $G(t)$ 在 $[0,\dfrac{1}{a}]$ 上连续，则 $G(t)$ 在 $[0,\dfrac{1}{a}]$ 上可取到最大值和最小值, 且最大值和最小值至少有一个可在 $(0,\dfrac{1}{a}]$ 取到. 因此函数 $g(t)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a}]$ 上可取到最大值或最小值.

故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上能取到最大值或最小值.

如果 $a\le0$，可将区间分为 $[a,1]$ 和 $[1,+\infty)$，由前面证明可知，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 能取到最大值或最小值. 函数 $f(x)$ 在 $[a,1]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,1]$ 上取到最大值和最小值. 因此，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上能取到最大值或最小值.

（3）对于任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，存在 $X>a$，只要 $x',x''\ge X$，都有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon .$$

又 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上一致连续，存在 $0<\delta<1$，当 $|x'-x''|<\delta$ 且 $x',x''\in[a,X+1]$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

于是，当 $|x'-x''|<\delta$，且 $x',x''\in[a,+\infty)$ 时，有两种可能：

① $x',x''\in[a,X+1]$，此时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$；

② x',x'' 中有一个大于 $X+1$，不妨设 $x''>X+1$，则 $x'=x'-x''+x''>-\delta+X+1>X$，于是，$x',x''>X$，此时也有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

于是，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.