



# 厦门大学《数学分析-1》课程期中试卷

学院\_\_\_\_\_系\_\_\_\_\_年级\_\_\_\_\_专业

试卷类型: (A卷)

考试时间: 2016年11月13日

Kaoshishijian

1. (6分) 用  $\varepsilon - N$  语言证明: 设  $a_n > 0, n \in N_+$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = \ln a$ .
2. (6分) 用  $\varepsilon - \delta$  语言证明: 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = A$ .
3. (6分) 证明: 极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$  不存在.
4. (每小题6分, 共12分)
  - (1) 试确定  $k$  的值, 使  $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-2x^2}$  与  $x^k$  是  $x \rightarrow 0$  时的同阶无穷小量,
  - (2) 试确定  $k$  的值, 使函数  $\sqrt[3]{x^2 \sin \frac{1}{x}}$  与  $x^k$  是  $x \rightarrow \infty$  时的等价无穷大量.
5. (7分) 求曲线  $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 3}$  的渐近线.
6. (15分) 求下列极限:
  - (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln \cos x}{(1 - e^{\sqrt{x}}) \arctan(x^2)}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n + \ln n}{n - \ln n} \right)^{\frac{n}{\ln n}}$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin(\sqrt{x + x^2} - x)$
7. (10分) 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{当 } x \\ 0 & \text{当 } x \end{cases}$  的连续性, 并指出间断点的类型.
8. (10分) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且对任何  $x_1 \in [a, b]$ , 存在  $x_2 \in [a, b]$ , 满足  $|f(x_2)| \leq \frac{2}{3}|f(x_1)|$ , 试证明: 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = 0$ .
9. (10分) 证明:  $f(x) = \sin x + \cos x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续.
10. (每小题6分, 共18分) 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 证明:
  - (1)  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界;
  - (2)  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上能取到最大值或最小值;
  - (3)  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续.

