厦门大学《数学分析》课程期中试卷

试卷类型：（A卷）　　　　考试时间：2021.11.7

一、（12分）证明：$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在$(0,0)$处连续、可导，但不可微.

解：因为$x^4+y^2\geq 2\left|x^2y\right|$，所以$0\leq\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right|\leq\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{x^3y}{x^2y}\right|=\dfrac{|x|}{2}$，而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{|x|}{2}=0$，则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}=0$，

于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x+\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}y+\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^3y}{x^4+y^2}=0=f(0,0)，$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$处连续.　　　　（4分）

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1，$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y-0}{\Delta y}=1.$$　　　　（8分）

因为$\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\dfrac{\dfrac{\Delta x^3\Delta y}{\Delta x^4+\Delta y^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

当$\Delta y=\Delta x^2$时，$\dfrac{\dfrac{\Delta x^3\Delta y}{\Delta x^4+\Delta y^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\dfrac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{1+(\Delta x)^2}}$，则

$$\lim_{\substack{\Delta y=\Delta x^2\\\Delta x\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \Delta x\to 0^+\\ -\dfrac{1}{2} & \Delta x\to 0^-\end{cases}$$，于是上述极限不存在，所以

$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.　　　　（12分）

二、（10分）求曲线$x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1}{1+t},z=2t$上的一点，使得曲线在该点的切线平行于平面$x+3y+z=3$.

解：设所求点的坐标为$(\dfrac{t_0}{1+t_0},\dfrac{1}{1+t_0},2t_0)$，曲线在该点处的切向量为$(\dfrac{1}{(1+t_0)^2},-\dfrac{1}{(1+t_0)^2},2)$，

因所求切线与平面 $x+3y+z=3$ 平行，则 $\vec{T}\perp\vec{n}$=$(1,3,1)$，故有 $\dfrac{1}{(1+t_0)^2}-\dfrac{3}{(1+t_0)^2}$+2=0，则 t_0=0

或 t_0=-2，故所求点的坐标为 $(0,1,0)$ 或 $(2,-1,-4)$.

三、（10分）求椭球面 $\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=21$ 在 $(1,2,2)$ 处的切平面和法线方程.

解：记 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21,$ 则法向量

$$\vec{n}=\frac{1}{2}(2x,4y,6z)|_{(1,2,2)}=(1,4,6),$$

故所求切平面方程为 $(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$，即 $x+4y+6z=21$.

法线方程为 $x-1=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-2}{6}$.

四、（12分）求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值.

解：令 $\begin{cases} f_x=4x^3-2(x+y)=0 \\ f_y=4y^3-2(x+y)=0 \end{cases}$，则 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases},$

由 $f_{xx}=12x^2-2, f_{xy}=-2, f_{yy}=12y^2-2$，可得在 $(0,0)$ 处

$$f_{xx}(0,0)=-2, f_{xy}(0,0)=-2, f_{yy}(0,0)=-2，$$

因此 $f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=0$，此方法无法判断. 在 $0<x^2+y^2<1$ 内，位于直线 $y=-x$ 上的点处有，$f(x,y)=x^4+y^4>0,$ 位于直线 $y=x$ 上的点处有，$f(x,y)=2x^4-2x^2<0$，因此，$(0,0)$ 不是极值点.

在 $(1,1)$ 处，

$$f_{xx}(1,1)=10, f_{xy}(1,1)=-2, f_{yy}(1,1)=10，$$

因此

$$f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1)-f_{xy}^2(1,1)=96>0, f_{xx}(1,1)=10>0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处取得极小值，极小值为 $f(1,1)=-2.$

在 $(-1,-1)$ 处，

$$f_{xx}(-1,-1)=10, f_{xy}(-1,-1)=-2, f_{yy}(-1,-1)=10，$$

因此

$$f_{xx}(-1,-1)f_{yy}(-1,-1)-f_{xy}^2(-1,-1)=96>0, f_{xx}(-1,-1)=10>0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(-1,-1)$ 处取得极小值，极小值为 $f(-1,-1)=-2.$

五、（10 分）证明：函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ 在 $x^2+y^2<1$ 上连续，但不一致连续.

证明一：$f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ 为初等函数，且在 $x^2+y^2<1$ 上有定义，则在 $x^2+y^2<1$ 上连续.

下面证其在 $x^2+y^2<1$ 上不一致连续.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$, 无论 δ 取得多么小，取 $P_1(\dfrac{n}{n+1},0), P_2(\dfrac{n-1}{n},0)$, 只要 n 足够大，就有 $\left|\overline{P_1P_2}\right|=\sqrt{(\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n-1}{n})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n(n+1)}}<\delta.$

而此时，$\left|f(P_1)-f(P_2)\right|=\left|\dfrac{1}{1-(\dfrac{n}{n+1})^2}-\dfrac{1}{1-(\dfrac{n-1}{n})^2}\right|$

$$=\left|\frac{(n+1)^2}{2n+1}-\frac{n^2}{2n-1}\right|=\left|\frac{2n^2-4n+1}{4n^2-1}\right|$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n^2-4n+1}{4n^2-1}\right|\to\dfrac{1}{2}$，则 $\exists N$, 当 $n>N$，有 $\left|\dfrac{2n^2-4n+1}{4n^2-1}\right|>\dfrac{1}{4}$,

因此，$f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ 在 $x^2+y^2<1$ 上连续，但不一致连续.

证明二：$f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ 为初等函数，且在 $x^2+y^2<1$ 上有定义，则在 $x^2+y^2<1$ 上连续.

下面证其在 $D: x^2+y^2<1$ 上不一致连续.

取 $\varepsilon_0=1>0$，则对任意的 $0<\delta<\dfrac{1}{8}$，取 $x_0=1-\delta, y_0=0$，及 $x_1=1-\dfrac{\delta}{2}, y_1=0$，则 $P_0(x_0,y_0), P(x_1,y_1)\in D$，且

$$\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\sqrt{\frac{\delta^2}{4}}<\delta,$$

但 $$\left|f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)\right|=\left|\frac{1}{1-x_1^2-y_1^2}-\frac{1}{1-x_2^2-y_2^2}\right|=\frac{4}{\delta(4-\delta)}-\frac{1}{\delta(2-\delta)}$$

$$=\frac{4-3\delta}{\delta(4-\delta)(2-\delta)}>\frac{4-\frac{3}{8}}{8\delta}>1=\varepsilon_0,$$

故函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，但不一致连续.

六、（12 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(2x,y,z-x)=0$ 所确定的二元函数，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解：方程 $f(2x,y,z-x)=0$ 两边对 x 求导，则 $2f_1'+f_3'\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-1)=0$，即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1-\frac{2f_1'}{f_3'},$$

方程 $2f_1'+f_3'\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-1)=0$ 两边继续对 x 求导，则

$$2[f_{11}''+f_{13}''\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-1)]+[f_{31}''+f_{33}''\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-1)]\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-1)+f_3'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2[f_{11}''+f_{13}''\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-1)]+[f_{31}''+f_{33}''\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-1)]\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-1)}{f_3'}$$

$$=-\frac{2[f_{11}''+f_{13}''\cdot(-\frac{2f_1'}{f_3'})]+[f_{31}''+f_{33}''\cdot(-\frac{2f_1'}{f_3'})]\cdot(-\frac{2f_1'}{f_3'})}{f_3'}$$

$$=\frac{2(2f_{13}''+f_{31}'')\cdot f_3'\cdot f_1'-2f_{11}''\cdot(f_3')^2-4f_{33}''\cdot(f_1')^2}{(f_3')^3}$$

七、(12 分）设方程组 $\begin{cases}x=e^u\cos v\\ y=e^u\sin v\end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解：方程组两边对 x 求导，则 $\begin{cases}1=e^u\cos v\frac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}\\ 0=e^u\sin v\frac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$，

因为 $\begin{vmatrix}e^u\cos v & -e^u\sin v\\ e^u\sin v & e^u\cos v\end{vmatrix}=e^u\neq 0$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{e^u}\begin{vmatrix}1 & -e^u\sin v\\ 0 & e^u\cos v\end{vmatrix}=\frac{e^u\cos v}{e^u}=\cos v$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{e^u}\begin{vmatrix}e^u\cos v & 1\\ e^u\sin v & 0\end{vmatrix}=-\frac{e^u\sin v}{e^u}=-\sin v$$

方程组两边对 y 求导，则 $\begin{cases}0=e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ 1=e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{e^u}\begin{vmatrix}0 & -e^u\sin v\\ 1 & e^u\cos v\end{vmatrix}=\frac{e^u\sin v}{e^u}=\sin v$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{e^u}\begin{vmatrix}e^u\cos v & 0\\ e^u\sin v & 1\end{vmatrix}=\frac{e^u\cos v}{e^u}=\cos v$$

八、（12 分）用拉格朗日乘数法求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在条件 $(x-y)^2-z^2=1$ 下的极值点，并判断这些极值点是极大值点还是极小值点.

解：构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda((x-y)^2-z^2-1)$，（分）

令

$$\begin{cases}L_x=2x+2\lambda(x-y)=0\\ L_y=2y-2\lambda(x-y)=0\\ L_z=2z-2\lambda z=0\\ L_\lambda=(x-y)^2-z^2-1=0\end{cases}$$

解得稳定点：$x=\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2},z=0$，$x=-\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=0$.（分）

接下来讨论 $f(x,y)=x^2+y^2+(x-y)^2-1$ 在 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的极值问题.

由于 $f_{xx}(x,y)=4,f_{xy}(x,y)=-2,f_{yy}(x,y)=4$，可得在 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 处，均有

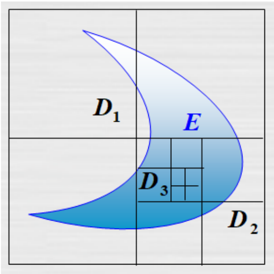
$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=12>0,f_{xx}>0,$$

故 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 均为 $f(x,y)=x^2+y^2+(x-y)^2-1$ 的极小值点，亦为函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在条件 $(x-y)^2-z^2=1$ 下的极小值点.

九、（10 分）设 $E\subset R^2$ 为有界无限点集. 证明：E 在 R^2 中至少有一个聚点.

证明：现用闭域套定理来证明. 由于 E 有界，因此存在一个闭正方形 $D_1\supset E$，如图所示，把 D_1 分成四个相同的小正方形，则在其中至少有一小闭正方形含有 E 中无限多个点，把它记为 D_2. 再对 D_2 如上法分成四个更小的正方形，其中又至少有一个小闭正方形含有 E 的无限

多个点. 如此下去, 得到一个闭正方形序列: $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$ 很显然, $\{D_n\}$ 的边长随着 $n \to \infty$ 而趋于零. 于是由闭域套定理, 存在一点 $M_0 \in D_n, n=1,2,\cdots$



最后, 由区域套定理的推论, $\forall \varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, $D_n \subset U(M_0;\varepsilon)$. 又由 D_n 的取法, 知道 $U(M_0;\varepsilon)$ 中含有 E 的无限多个点, 这就证得了 M_0 是 E 的聚点.