厦门大学《数学分析》课程期中试卷

试卷类型：（A 卷）　　　　　考试时间：2022.11.13

一、（10 分）设方程 $F(x,y)=0$ 满足隐函数存在定理的条件，且存在二阶偏导数，求其所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数.

二、（10 分）设求方程组 $\begin{cases} u^3+xv=y \\ v^3+yu=x \end{cases}$ 所确定的隐函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

三、（10 分）求球面 $x^2+y^2+z^2=6$ 与抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在点 $(1,1,2)$ 的切线方程和法平面方程.

四、（10 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $f(x^2-y^2,y^2-z^2,z^2-x^2)=0$ 所确定，其中 f 具有连续的一阶偏导数，且 $f_3-f_2\neq 0$，求 $\mathrm{d}z$，并证明：当 $xy\neq 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{z}$.

五、（15 分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处的可微性和偏导函数在 $(0,0)$ 点的连续性.

六、（10 分）设 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$(x,y)\in D=\{(x,y)\,|\,0<x\le 1,0<y\le 1\}$，证明：$f(x,y)$ 在 D 上连续，但不一致连续.

七、（15 分）设函数 $f(x,y)$ 为连续函数，且当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)>0$，及对任意 $c>0$，有 $f(cx,cy)=cf(x,y)$. 证明：

（1）$f(0,0)=0$；（2）证明：$f(x,y)$ 在 $x^2+y^2=1$ 上必取得最大值和最小值；（3）存在 $\alpha>0,\beta>0$，使得 $\alpha\sqrt{x^2+y^2}\le f(x,y)\le\beta\sqrt{x^2+y^2}$.

八、（10 分）求包含在椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c}\le 1$ 内长方体的最大体积.

九、（10 分）证明：曲面 $\dfrac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\dfrac{z^2}{c^2-\lambda_1}=1$ 与 $\dfrac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda_2}+\dfrac{z^2}{c^2-\lambda_2}=1$ 交线处的切平面互相垂直，其中 a,b,c 是给定的实数，$\lambda_1\neq\lambda_2$，$\lambda_1,\lambda_2\neq a^2,b^2,c^2$.