2023-2024 学年《数学分析-1》期末试卷（A 卷）解答

考试时间：2024.1.4

一、(本题 12 分，每小题 6 分）计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x(e^{2x}-1)\tan x}$ ；

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x(e^{2x}-1)\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{6x^2}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{6}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)-2\cos x+2}{x^2(1-\cos x)}$.

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)-2\cos x+2}{x^2(1-\cos x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)-2\cos x+2}{x^4}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-\frac{1}{2}x^4-2(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})+2+o(x^4)}{x^4}$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{7}{6}.$$

二、(本题 28 分，每小题 7 分）计算下列导数：

1. 设 $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}+x^{\sin x}, 0<x<1$，求 y'.

解：
$$(\arctan\frac{1+x}{1-x})'=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\cdot\frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$$
$$(x^{\sin x})'=(e^{\sin x\ln x})'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$$

故
$$y'=\frac{1}{1+x^2}+x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}).$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0,\\ 1+e^{\frac{1}{x}}, & x<0.\end{cases}$，求函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)$ 和右导数 $f'_+(0)$.

解：
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x}-1}{x}=-1.$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0.$$

3．求参数方程$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$所确定的函数的一阶导数$\frac{dy}{dx}$和二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=-\tan t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}=\frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}=\frac{-\sec^2 t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.$$

4． 求函数$y=\frac{x}{x^2-4}+x^2e^x$在$x=0$处的n阶导数$y^{(n)}(0)$.

解：

$$y=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2})+x^2e^x$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}[\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}]+x^2e^x+2nxe^x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2e^x$$

故$y^{(n)}(0)=\frac{n!}{2^{n+2}}[-1+(-1)^n]+n(n-1)$.

三、(本题 12 分) 讨论函数$y=xe^{-x}$的单调区间, 极值, 凸 (凹) 性区间, 并指出曲线$y=xe^{-x}$的拐点.

解：$y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$，$y''=-(1-x)e^{-x}-e^{-x}=(x-2)e^{-x}$.

当$x<1$时，$y'>0$；当$x>1$时，$y'<0$.

因此，函数$y=xe^{-x}$的单调增加区间是$(-\infty,1)$，单调减少区间是$(1,+\infty)$.

函数$y=xe^{-x}$在$x=1$处取得极大值，极大值为$y(1)=e^{-1}$.

当$x<2$时，$y''<0$；当$x>2$时，$y''>0$.

因此，函数$y=xe^{-x}$在$(-\infty,2)$是凹函数，在$(2,+\infty)$处是凸函数.

曲线$y=xe^{-x}$的拐点坐标为$(2,2e^{-2})$.

四、(本题 16 分，每小题 8 分) 证明不等式：

1．$x-\frac{x^3}{3}<\arctan x<\frac{\pi}{2}-\frac{x}{1+x^2}, x\in(0,+\infty)$;

证明：令$f(x)=x-\frac{x^3}{3}-\arctan x$.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)=1-x^2-\dfrac{1}{1+x^2}=-\dfrac{x^4}{1+x^2}<0$.

因此, 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调减少.

于是, 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f(x)<f(0)=0$, 即 $x-\dfrac{x^3}{3}<\arctan x$.

令 $g(x)=\arctan x-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{1+x^2}$.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2}{(1+x^2)^2}>0$.

因此, 函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{1+x^2})=0,$

故当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $g(x)<0$, 即 $\arctan x<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{1+x^2}$.

2. 设 $p>1$, 证明: 当 $0\le x\le 1$ 时, $\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$.

证明: 因为 $p>1$, $x^p+(1-x)^p\le x+(1-x)=1$.

令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$.

令 $f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]=0$, 得 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 $0\le x<\dfrac{1}{2}$ 时, $f'(x)<0$; 当 $\dfrac{1}{2}<x\le 1$ 时, $f'(x)>0$.

因此, $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处取得极小值 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

故当 $0\le x\le 1$ 时, $\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$.

五、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导, 若有 $f(-1)=f(0)=0, f(1)=1$, 证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$,

使得 $f''(\xi)=1$.

证明: 因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导, 则由麦克劳林公式, 有

$$f(-1)=f(0)+f'(0)(-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1),\quad -1<\xi_1<0,$$

$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2),\quad 0<\xi_2<1.$$

两式相加, 得 $f(1)+f(-1)=2f(0)+\dfrac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$.

将$f(-1)=f(0)=0, f(1)=1$代入, 得$\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]=1$.

因为$\min\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}\le\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\le\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$,

由导数的介值定理, 存在$\xi\in[\xi_1,\xi_2]$, 使得$f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]=1$.

六、(本题 12 分)设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可微, $f(0)=f(1)=0$, 且$f(\frac{1}{2})=1$. 证明:

(1) 存在$\xi\in(\frac{1}{2},1)$, 使得$f(\xi)=\xi$;

(2) 存在$\eta\in(0,\xi)$, 使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

证明:(1) 作辅助函数$F(x)=f(x)-x$.

因为函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续, 则函数$F(x)$在区间$[0,1]$上连续, 且

$$F(\frac{1}{2})F(1)=[f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}][f(1)-1]=-\frac{1}{2}<0.$$

由零点定理, 存在$\xi\in(\frac{1}{2},1)$, 使得$F(\xi)=0$, 即$f(\xi)=\xi$.

(2) 作辅助函数$G(x)=\mathrm{e}^{-x}[f(x)-x]$.

由已知条件知$G(x)$在区间$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可微, 且$G(0)=G(\xi)=0$.

由罗尔定理知, 存在$\eta\in(0,\xi)$, 使得

$$G'(\eta)=-\mathrm{e}^{-\eta}[f(\eta)-\eta]+\mathrm{e}^{-\eta}[f'(\eta)-1]=0,$$

即$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

七、(本题 10 分) 设$f(x)$为$[a,b]$上减函数, 其值域为$[f(b),f(a)]$. 证明: $f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

证明: 用反证法. 假如$f(x)$在$[a,b]$上不连续, 则$f(x)$有间断点$x_0\in(a,b)$, 不妨设$a<x_0<b$.

因为$f(x)$为$[a,b]$上减函数, 所以, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在.

设$m_1=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $m_2=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

因为当$x<x_0$时, $f(x)\ge f(x_0)$, 由函数极限的保不等式得$m_1\ge f(x_0)$. 同理有$f(x_0)\ge m_2$.

因为x_0为$f(x)$的间断点, 所以, $m_1>m_2$. 于是或者$m_1>f(x_0)$或者$f(x_0)>m_2$.

假设$m_1>f(x_0)$, 则不存在ξ使得$m_1>f(\xi)>f(x_0)$.

这是因为, 当$a\le\xi<x_0$时, $f(\xi)\ge\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=m_1$, 当$x_0<\xi\le b$时, $f(\xi)\le\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=m_2\le f(x_0)$.

而$(f(x_0), m_1) \subset [f(b), f(a)]$，这与$f(x)$的值域为$[f(b), f(a)]$矛盾.

同理，$f(x_0) > m_2$也将产生矛盾.

因此，$f(x)$在$[a,b]$上连续, 从而$f(x)$在$[a,b]$上一致连续.