厦门大学《数学分析三》课程期中试卷

________学院________系________年级________专业

主考教师：庄平辉　试卷类型：（A 卷）　2019.11.17

一、（40 分，每小题 8 分）计算下列各题：

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$，分别求出该函数在 $(0,0)$ 点处的累次极限和重极限.

2. 设 $z=z(x,y)$ 为方程 $x^2+y^2+z^2=yf(\dfrac{z}{y})$ 所确定的隐函数，求 $(x^2-y^2-z^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 求曲线 $x=t,\ y=t,\ z=t^3$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

4. 求曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程和法线方程.

5. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+2y^2+2y)$ 的极值.

二、（10 分）证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点连续，可导且可微，但在 $(0,0)$ 的偏导数不连续.

三、（10 分）设函数 $u=u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，且 $u(x,2x)=x^2$，$u_x(x,2x)=x^2$，求 $u_{xx}(x,2x)$，$u_{xy}(x,2x)$ 和 $u_{yy}(x,2x)$.

四、（10 分）设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 具有连续的二阶导数，$u=\varphi(\dfrac{y}{x})+x\psi(\dfrac{y}{x})$. 分别计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，并由此计算 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

五、（10 分）设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f，F 都具有一节连续偏导数，试证明：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}$.

六、（10 分）在空间曲线 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 上求竖坐标分别为最大、最小的点.

七、（10 分）设函数 $F(x,y)$ 满足：（1）在 $D=\{(x,y)\big||x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ 上连续；（2）$F(x_0,y_0)=0$；（3）当 x 固定时，函数 $F(x,y)$ 是 y 的严格单调减少函数．证明：存在 $\delta>0$，使得在 $I_\delta=\{x\big||x-x_0|<\delta\}$ 上由方程 $F(x,y)=0$ 确定了一个满足 $y_0=f(x_0)$ 的隐函数，且 $y=f(x)$ 在 I_δ 上连续.