2020-2021学年《数学分析三》期末试卷（A卷）解答及评分标准

一、（每小题8分，共48分）计算下列积分：

1. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ **，其中** V **是由球面** $x^2+y^2+z^2=4$ **与旋转抛物面** $x^2+y^2=3z$ **所围成的区域.**

解一： $I=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 3z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\pi\int_0^1 3z^2\mathrm{d}z+\pi\int_1^2 z(4-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\pi z^3\Big|_0^1+\pi(2z^2-\frac{1}{4}z^4)\Big|_1^2=\pi+\frac{9}{4}\pi=\frac{13}{4}\pi.$$

解二： $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 3}[4-x^2-y^2-\frac{(x^2+y^2)^2}{9}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}(4-r^2-\frac{1}{9}r^4)r\mathrm{d}r$$

$$=\pi(2r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{54}r^6)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\pi(6-\frac{9}{4}-\frac{27}{54})=\frac{13}{4}\pi.$$

2. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S$ **，其中曲面** S **为球面** $x^2+y^2+z^2=R^2$ **.**

解一： $I=2\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-2y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2R\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=4\pi R\int_0^R(\frac{R^2}{\sqrt{R^2-r^2}}-\sqrt{R^2-r^2})\mathrm{d}r$$

$$=4\pi R(R^2\arcsin\frac{r}{R}\Big|_0^R-\frac{1}{4}\pi R^2)=\pi R^3.$$

解二：球面的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\theta\sin\varphi \\ y=R\sin\theta\sin\varphi \\ z=R\cos\varphi \end{cases}，其中 (\theta,\varphi)\in D=\{(\theta,\varphi)\big|0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\pi\}.$$

则 $E=x_\theta^2+y_\theta^2+z_\theta^2=(-R\sin\theta\sin\varphi)^2+(R\cos\theta\sin\varphi)^2=R^2\sin^2\varphi$，

$F=x_\theta x_\varphi+y_\theta y_\varphi+z_\theta z_\varphi$

$=(-R\sin\theta\sin\varphi)(R\cos\theta\cos\varphi)+(R\cos\theta\sin\varphi)(R\sin\theta\cos\varphi)=0$，

$F=x_\varphi^2+y_\varphi^2+z_\varphi^2=(R\cos\theta\cos\varphi)^2+(R\sin\theta\cos\varphi)^2+(-R\sin\varphi)^2=R^2$.

故 $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{R^4\sin^2\varphi}=R^2\sin\varphi$.

$I=\iint\limits_D\sqrt{(R\sin\varphi\cos\theta)^2+(R\sin\varphi\sin\theta)^2}\cdot R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ （4 分）

$=R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$ （2 分）

$=2\pi R^3\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=\pi R^3$. （2 分）

3. 计算曲线积分 $I=\oint_L(x^2+2y+2z^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

解：由轮换对称性，

$$\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L y^2\mathrm{d}s=\oint_L z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3,$$

$$\oint_L x\mathrm{d}s=\oint_L y\mathrm{d}s=\oint_L z\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(x+y+z)\mathrm{d}s=0.$$

故 $I=3\oint_L x^2\mathrm{d}s+2\oint_L y\mathrm{d}s=3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^3$.

4. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+4y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为椭圆域 $x^2+4y^2\le 4$.

解：利用广义极坐标变换 $\begin{cases} x=2r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi.\ J=2r.$

故
$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{-4r^2}\cdot 2r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4r^2})\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

5. **求由旋转抛物面$z=x^2+y^2$和平面$z=x+y$所围立体的体积.**

解：记$D:(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$，则

$$V=\iint_D(x+y-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D[\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})^2-(y-\frac{1}{2})^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变换$x=\frac{1}{2}+r\cos\theta,x=\frac{1}{2}+r\sin\theta$，有

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{2}-r^2)r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4})=\frac{\pi}{8}.$$

6. **交换积分次序$I=\int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y$，使之成为积分次序为$z,x,y$的三次积分.**

解：$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}z\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^x f(x,y,z)\mathrm{d}z+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_x^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\mathrm{d}x\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

二、计算$I=\int_L xyz\mathrm{d}z$，其中L是由平面$y=z$截球面$x^2+y^2+z^2=1$所得的曲线，从z轴正向上看曲线沿逆时针方向.

解：由$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ y=z\end{cases}\Rightarrow x^2+(\sqrt{2}y)^2=1$，故可设曲线的参数方程为

$$x=\cos t,y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\quad t:0\to2\pi.$$

于是，$\int_L xyz\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{8\sqrt{2}}\pi.$$

三、**利用格林公式计算曲线积分** $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$ **，其中曲线** L **是第一象限内从点** $(0,0)$ **沿圆周** $x^2+y^2=2x$ **到点** $(2,0)$ **，再沿第一象限的圆周** $x^2+y^2=4$ **到点** $(0,2)$ **的曲线段.**

解：做辅助线 $L_1: x=0, y:2\to 0.$

于是， $I=\oint_{L\cup L_1}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y-\int_{L_1}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3-x-2y)\mathrm{d}y$

$$=\iint_D(3x^3+1-3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_2^0(-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\int_0^2 y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\pi-4.$$

四、**设曲面** $\Sigma: z=x^2+y^2(z\le 1)$ **的上侧，用高斯公式计算曲面积分:**

$$I=\iint_\Sigma(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解：做辅助面 $\Sigma_1: z=1,(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，取下侧.

则 $$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_\Omega[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由对称性： $\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，于是，

$$I=\iiint_\Omega(3x^2+3y^2+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(3r^2+7)rdz$$

$$=-2\pi\int_0^1(3r^3+7r)(1-r^2)\mathrm{d}r=-4\pi.$$

五、**计算定积分** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{2+\cos x}{2-\cos x}\mathrm{d}x$**.**

解：由 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\dfrac{1}{\cos x}\ln\dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t}\ln\dfrac{2+t}{2-t}=\lim\limits_{t\to 0^+}(\dfrac{1}{2+t}+\dfrac{1}{2-t})=1$，故 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 不是瑕点.

（1 分）

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+t\cos x}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\frac{2-t\cos x}{4-t^2\cos^2 x}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\frac{2}{4-t^2\cos^2 x}\mathrm{d}t \text{ 利用被积函数的奇偶性}$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{4-t^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

令 $u=\tan x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{4-t^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{2}{4-t^2+4u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\frac{4-t^2}{4}+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4-t^2}\arctan\frac{2u}{\sqrt{4-t^2}}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{4-t^2}}.$$

所以，$I=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}\arcsin\dfrac{t}{2}\bigg|_{-1}^{1}=\dfrac{\pi^2}{6}.$

六、**证明：$I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-xt})\cos 2t\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可导. 并计算出 $I(x)$.**

证明：记 $F(x,t)=\dfrac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-xt})\cos 2t$，$\lim\limits_{t\to 0^+}F(x,t)=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-xt})\cos 2t=x$，故 $t=0$ 不是瑕点.

因为 $\left|\displaystyle\int_1^{A}\cos 2t\mathrm{d}t\right|=\left|\dfrac{1}{2}\sin 2A-\dfrac{1}{2\sin 2}\right|\le 1$，$\dfrac{1}{t}$ 单调且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}=0$，故反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{t}\mathrm{d}t$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

又因为 $x\in[0,+\infty)$，所以 $1-\mathrm{e}^{-xt}$ 关于 t 是单调的，且 $\left|1-\mathrm{e}^{-xt}\right|\le 2$（一致有界）.

由阿贝尔判别法，反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{xt})\cos 2t\mathrm{d}t$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

从而反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-xt})\cos 2t\mathrm{d}t$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

因为 $F(x,t)=\dfrac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-xt})\cos 2t$ 的连续性可以推出 $I(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

又因为$F_x(x,t)=\mathrm{e}^{-xt}\cos 2t$，对于任意给定的$\varepsilon>0$，当$x\in[\varepsilon,+\infty)$时，$\left|F_x(x,t)\right|\le \mathrm{e}^{-\varepsilon t}$.

而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}t$收敛，由 M 判别法，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\cos 2t\mathrm{d}t$关于$x\in[\varepsilon,+\infty)$是一致收敛的.

所以，$I(x)$在$[\varepsilon,+\infty)$上可导，由ε的任意性，$I(x)$在$(0,+\infty)$上可导.

且
$$I'(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\cos 2t\mathrm{d}t=\frac{x}{x^2+4}.$$

故$I(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C.$

由$I(0)=0$可得$C=-\ln 2,$所以，$I(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\ln 2.$