2023—2024 学年第一学期《数学分析 I 》期中试题参考答案

1.（24 分，每小题 6 分）求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\sin x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

解一： $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\sin x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+x\sin x)^{\frac{1}{x\sin x}}]^{\frac{x\sin x}{1-\cos x}}$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\sin x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\mathrm{e}$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

所以， $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\sin x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^2$.

解二： $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\sin x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x\sin x)}{x\sin x}}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{x^2}{2}}=2.$

所以， $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\sin x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^2$.

（2） $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1-\cos 2x)(\sqrt{1+\tan 2x}-\sqrt{1-\tan 2x})}{x\ln(1+4x^2)}$；

解： $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1-\cos 2x)(\sqrt{1+\tan 2x}-\sqrt{1-\tan 2x})}{x\ln(1+4x^2)}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos 2x)\cdot 2\tan 2x}{x\ln(1+4x^2)(\sqrt{1+\tan 2x}+\sqrt{1-\tan 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos 2x)\cdot\tan 2x}{x\ln(1+4x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{(2x)^2}{2}\cdot 2x}{x\cdot 4x^2}=1.$$

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$；

解： 因为

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2},$$

即 $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{n+1}{2n}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，由迫敛性定理，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})=\frac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\sqrt{x+x^2}-x)$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\sqrt{x+x^2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{x}{\sqrt{x+x^2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1}=\sin\frac{1}{2}$.

2.（8 分）设数集 S 有下确界，证明：$\eta=\inf S\in S$ 的充要条件是 $\eta=\min S$.

证明： 必要性. 如果 $\eta=\inf S\in S$，则对于任意的 $x\in S$，都有 $x\ge\eta$；又因为 $\eta\in S$，于是，$\eta=\min S$.

充分性. 假设 $\eta=\min S$. 则 $\eta\in S$，且对于任意的 $x\in S$，都有 $x\ge\eta$，因此，η 为数集 S 的下界.

又因为对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$，有 S 的元素 η，使得 $\eta<\eta+\varepsilon$，因此 $\eta+\varepsilon$ 不是 S 的下界.

因此，$\eta=\min S$ 是 S 的最大上界，即 $\eta=\inf S\in S$.

3.（8 分）用 $\varepsilon-N$ 语言证明：设 $a_n>0,n\in N_+$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos a_n=\cos a$. .

证明： 注意到 $\cos a_n-\cos a=-2\sin\frac{a_n+a}{2}\sin\frac{a_n-a}{2}$，故

$$\left|\cos a_n-\cos a\right|\le 2\left|\sin\frac{a_n+a}{2}\sin\frac{a_n-a}{2}\right|\le 2\cdot\frac{\left|a_n-a\right|}{2}=\left|a_n-a\right|.$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$\left|a_n-a\right|<\varepsilon$.

因此，当 $n>N$ 时，$\left|\cos a_n-\cos a\right|\le\left|a_n-a\right|<\varepsilon$.

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos a_n=\cos a$.

4.（8 分）用 $\varepsilon-M$ 语言证明：若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(\frac{1}{x})=A$.

证明： 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<\left|x-0\right|<\delta$ 时，$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

取 $M=\frac{1}{\delta}>0$，则当 $\left|x\right|>M$ 时，$0<\left|\frac{1}{x}-0\right|<\delta$，于是，$\left|f(\frac{1}{x})-A\right|<\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{x\to\infty}f(\frac{1}{x})=A$.

5.（8 分）证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$ 不存在.

证明： 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=A$，则

$$\lim_{n\to\infty}[\cos(n+2)-\cos n]=A-A=0\Rightarrow 2\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)\sin 1=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin(n+1)=0\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin n=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\sin n\cos 1+\cos n\sin 1)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\cos n=0$$

故 $\lim_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=0+0=0$.

事实上，$\lim_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=\lim_{n\to\infty}1=1$.

因此，矛盾. 故 $\lim_{n\to\infty}\cos n$ 不存在.

6.（8 分）极限 $\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}})$ 是否存在？如果不存在，说明理由；如果存在，求出极限.

解： $\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}})=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}})=1+0=1$；

$\lim_{x\to 0^-}(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}})=\lim_{x\to 0}(-\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}})=-1+\frac{2}{1+0}=1$；

因为 $\lim_{x\to 0^+}(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}})=\lim_{x\to 0^-}(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}})=1$，

所以，$\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}})=1$.

7.（8 分）求曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的渐近线.

解： 因为 $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}y=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x^2}{2x+1}=\infty$（1 分），故 $x=-\frac{1}{2}$ 为曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的垂直渐近线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\frac{1}{2}x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}x)=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4};$$

因此，曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 有一条斜渐近线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

8.（8 分）设 $x_n>0,\ x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2,\ n=1,2,\cdots$，证明：$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$.

证明： 因为$x_n>0$，则$x_{n+1}-x_n<2-\dfrac{1}{x_n}-x_n=-\dfrac{(x_n-1)^2}{x_n}\le 0$，故数列$\{x_n\}$单调减少，且有下界 0.

因此，由单调有界定理，数列$\{x_n\}$极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由$x_{n+1}+\dfrac{1}{x_n}<2$两边求极限，$a+\dfrac{1}{a}\le 2$，即$\dfrac{(a-1)^2}{a}\le 0$.

因为$x_n>0$，可知$a\ge 0$. 因此，$a=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

9.（10 分）设$f(x)$为定义在$(x_0,x_0+\eta)$上的递增函数，证明：若存在数列$\{x_n\}\subset(x_0,x_0+\eta)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，证明：$f(x_0+0)=\sup\limits_{x\in(x_0,x_0+\eta)}f(x)=A.$

证明： 由$\lim\limits_{n\to\infty}`f(x_n)=A$，则对于$\varepsilon=1$，存在正整数$N_1$，使得当$n>N_1$时，$|f(x_n)-A|<\varepsilon=1$，即

$$|f(x_n)|=|f(x_n)-A+A|\le|f(x_n)-A|+|A|<1+|A|,\quad n=N_1+1,N_1+2,\cdots.$$

对于任意的$\xi\in\mathrm{U}_-^\circ(x_0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(\xi-x_n)=\xi-x_0<0$，根据极限的保号性，存在正整数$N_2$，使得当$n>N_2$时，$\xi-x_n<0$.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，于是，当$n>N$时，$\xi<x_n,<x_0$. 由$f(x)$为$\mathrm{U}_-^\circ(x_0)$上的递增函数，因此，

$$f(\xi)\le f(x_n)\le 1+|A|.$$

因此，$f(x)$在$\mathrm{U}_-^\circ(x_0)$上有上界. 由确界原理，$f(x)$在$\mathrm{U}_-^\circ(x_0)$上有上确界.

记$B=\sup\limits_{x\in\mathrm{U}_-^\circ(x_0)}f(x)$，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在$x'\in\mathrm{U}_-^\circ(x_0)$，使得$f(x')>B-\varepsilon$.

取$\delta=x_0-x'>0$，则当$x\in\mathrm{U}_-^\circ(x_0,\delta)$时，$x_0-x<x_0-x'$，即$x>x'$. 于是，

$$B-\varepsilon<f(x')\le f(x)\le B<B+\varepsilon,$$

即$|f(x)-B|<\varepsilon$.

根据极限的定义，$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=B=\sup\limits_{x\in\mathrm{U}_-^\circ(x_0)}f(x)$.

由归结原理，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$，即$f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in\mathrm{U}_-^\circ(x_0)}f(x)=A.$

10. (10 分) 如果数列$\{a_n\}$收敛，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明：如果存在某个正整数$k$，使得$a_k<a$，那么数列$\{a_n\}$存在最小数.

证明： 取$\varepsilon=a-a_k>0$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$可知，存在正整数$N$，使得当$n>N$时，有$|a_n-a|<a-a_k$，

于是，$-a+a_k<a_n-a, n=N+1, N+2\cdots$，即$a_n>a_k$，$n=N+1, N+2\cdots$.

显然，$k\le N$.

记$A=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$（元素个数有限），则$a_n>a_k\ge A$，$n=N+1, N+2\cdots$.

因此，A是数列$\{a_n\}$的最小值.