厦门大学《数学分析三》期末试卷

试卷类型：经济学院国际化班（A卷）　考试日期　2022.1.6

一、（每小题 6 分，共 36 分）计算下列积分：

1. 设已知当 $x>0$ 时，$f(x)=\int_{x}^{x^2}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$，求 $f'(x)$；

解：$f'(x)=\frac{\sin x^3}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^2}{x}+\int_{x}^{x^2}\cos(xy)\mathrm{d}y$

$$=\frac{2\sin x^3}{x}-\frac{\sin x^2}{x}+\frac{1}{x}\sin(xy)\Big|_{x}^{x^2}=\frac{2\sin x^3}{x}-\frac{\sin x^2}{x}+\frac{1}{x}(\sin x^3-\sin x^2)$$

$$=\frac{3\sin x^3-2\sin x^2}{x}.$$

2. 设 L 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\end{cases}$，计算 $\int_L\sqrt{z^2+2y^2}\mathrm{d}s$；

解一：$\int_L\sqrt{z^2+2y^2}\mathrm{d}s=\int_L\sqrt{z^2+x^2+y^2}\mathrm{d}s=a\int_L\mathrm{d}s=2\pi a^2.$

解二：L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{a}{\sqrt2}\cos\theta\\ y=\frac{a}{\sqrt2}\cos\theta\\ z=a\sin\theta\end{cases}$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\frac{a}{\sqrt2}\sin\theta)^2+(\frac{a}{\sqrt2}\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta$，

则 $$\int_L\sqrt{z^2+2y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+2\cdot\frac12\cos^2\theta}a\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi a^2.$$

3. 设 V 是由上半球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围成的区域，求 $\iiint\limits_V 2z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

解一：将 V 投影到 xoy 面为 $D:x^2+y^2\le1,z=0$. 应用柱坐标，则

$$\iiint\limits_V 2z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}2zr^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3(2-r^2-r^4)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot(\frac12-\frac16-\frac18)=\frac{5\pi}{12}.$$

解二：用截面法.

$$\iiint\limits_V 2z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^1 z\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\le z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\int_1^{\sqrt{2}} z\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}} r^3\mathrm{d}r + 2\int_1^{\sqrt{2}} z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2-z^2}} r^3\mathrm{d}r$$

$$= \pi\int_0^1 z^3\mathrm{d}z + \pi\int_1^{\sqrt{2}} z(2-z^2)^2\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi}{4} + \pi\left(2z^2 - z^4 + \frac{1}{6}z^6\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi .$$

4．设 L 为方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 确定的曲线，正方向为曲线投影到 xoy 面上为逆时针方向，利用斯托克斯公式求 $I=\oint_L ay\mathrm{d}x + bz\mathrm{d}y + cx\mathrm{d}z$ 的值；

解一：设 L_1 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影，L_1 所围成的区域为 D，$S: x+y+z=0, (x,y)\in D.$

由斯托克斯公式，得

$$I = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay & bz & cx \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_S(-b-c-a)\mathrm{d}S = -\frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)\iint\limits_S \mathrm{d}S$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)\pi a^2 .$$

解二：由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 消去 z 可得 $x^2+y^2+xy=\frac{1}{2}a^2$，即 $(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2=\frac{1}{2}a^2$，故 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x+\frac{y}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t \\ z=-(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t \\ y = \frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t \\ z = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t \end{cases},\ t: 0\to 2\pi.$$

于是，

$$I=\int_0^{2\pi}[\frac{2a^2}{\sqrt{6}}\sin t(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t)-b(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t)\frac{2a}{\sqrt{6}}\cos t$$

$$+c(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t-\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t)(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}[-\frac{2a^3}{\sqrt{12}}\sin^2 t-\frac{2a^2b}{\sqrt{12}}\cos^2 t-\frac{a^2c}{\sqrt{12}}(\cos^2 t+\sin^2 t)]\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{a^2\pi}{\sqrt{3}}(a+b+c).$$

5．计算二重积分$\iint\limits_D\sqrt{4R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$为圆周$x^2+y^2=2Rx$所围成的区域；

解：记D_1为上半圆周，利用极坐标，得

$$\iint\limits_D\sqrt{4R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{4R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}\sqrt{4R^2-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2R\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8R^3-8R^3\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}R^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}).$$

6．计算$I=\int_L(\mathrm{e}^x\cos y-2y)\mathrm{d}x-(\mathrm{e}^x\sin y-2x)\mathrm{d}y$，其中$L$为上半圆周$(x+a)^2+y^2=a^2,(y\ge 0)$，沿逆时针方向.

解一：做辅助线$L_1:y=0,x:-2a\to 0$，于是，

$$I=\int_{L\cup L_1}(\mathrm{e}^x\cos y-2y)\mathrm{d}x-(\mathrm{e}^x\sin y-2x)\mathrm{d}y-\int_{L_1}(\mathrm{e}^x\cos y-2y)\mathrm{d}x-(\mathrm{e}^x\sin y-2x)\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D[(-\mathrm{e}^x\sin y+2)-(-\mathrm{e}^x\sin y-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L_1}(\mathrm{e}^x\cos y-2y)\mathrm{d}x-(\mathrm{e}^x\sin y-2x)\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-2a}^0\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=2\pi a^2-(1-\mathrm{e}^{-2a}).$$

二、（8 分）设$I(x)=\int_0^{\pi}\ln(1+x\cos t)\mathrm{d}t\quad(-1<x<1)$，求$I'(x)$及$I(x)$.

解：记 $f(x,t)=\ln(1+x\cos t)$.

任取 $x\in(-1,1)$，选取 $[a,b]\subset(-1,1)$，使得 $x\in[a,b]$.

因为 $f(x,t)=\ln(1+x\cos t)$ 及 $f_x(x,t)=\dfrac{\cos t}{1+x\cos t}$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

对于任意 $x\in[a,b]$，如果 $x=0$，则 $I'(x)=\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t=0$；

如果 $x\neq 0$，则

$$I'(x)=\frac{1}{x}\int_0^{\pi}\frac{x\cos t+1-1}{1+x\cos t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{x}-\frac{1}{x}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+x\cos t}\mathrm{d}t$$

作变换 $u=\tan\dfrac{t}{2}$，则

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+x\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+x+(1-x)u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{1-x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}u)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}.$$

所以，$I'(x)=\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{\pi}{x\sqrt{1-x^2}}=\pi\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot(-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}})$.

两边积分，得 $I(x)=\pi\ln(1+\sqrt{1-x^2})+C$.

由 $I(0)=0$ 可得 $C=-\pi\ln 2$.

故 $I(x)=\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}$.

三、（8 分）设 $a>0$，证明：$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2}\int_0^a f(z)(a-z)^2\mathrm{d}z$.

证明一：$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}y\int_a^y\mathrm{d}x\int_0^y f(z)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\int_a^y\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a f(z)\mathrm{d}z\int_a^z \mathrm{d}y\int_a^y \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a f(z)\mathrm{d}z\int_a^z (a-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)\mathrm{d}z.$$

四、（8 分）试确定常数λ，使得$2xy(x^4+y^2)^\lambda \mathrm{d}x - x^2(x^4+y^2)^\lambda \mathrm{d}y$在右半平面$D=\{(x,y)\big|x>0\}$上是某个函数$u(x,y)$的全微分. 如果$u(1,0)=1$，求出$u(x,y)$.

解：记$P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$，$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}，\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}.$$

令$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，有

$$2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1},$$

即$(\lambda+1)(4xy^2+4x^5)(x^4+y^2)^{\lambda-1}=0$，于是，$\lambda=-1$.

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^x 0\mathrm{d}x-\int_0^y x^2(x^4+y^2)^{-1}\mathrm{d}y$$

$$=-x^2\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}+C=-\arctan\frac{y}{x^2}+C.$$

因为$u(1,0)=1$，则$C=1$，故$u(x,y)=1-\arctan\dfrac{y}{x^2},x>0$.

五、（10 分）计算积分$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$y^2=x$，$x+y=1$，$x+y=2$所围成的的区域.

解一：曲线$y^2=x$与直线$x+y=1$交点的纵坐标分别为$y_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$和$y_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，曲线$y^2=x$与直线$x+y=2$交点的纵坐标分别为$y_3=-2$和$y_4=1$.

记D_1为抛物线$y^2=x$和直线$x+y=1$围成的区域，D_2为抛物线$y^2=x$和直线$x+y=2$围成的区域.

则
$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-2}^1 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}\mathrm{d}x-\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1-y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)\mathrm{d}y-\int_{y_1}^{y_2}(1-y-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=6+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\cdot 9-[(y_2-y_1)-\frac{1}{2}(y_2^2-y_1^2)-\frac{1}{3}(y_2^3-y_1^3)].$$

注意到，$y_2-y_1=\sqrt{5}$，$y_2+y_1=-1$，$y_2^2-y_1^2=-\sqrt{5}$，

$$y_2^3-y_1^3=(y_2-y_1)[(y_2+y_1)^2-y_1y_2]=\sqrt{5}(1+1)=2\sqrt{5}.$$

于是，$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{2}-[\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{2\sqrt{5}}{3}]=\frac{9}{2}-\frac{5\sqrt{5}}{6}.$

解二：曲线 $y^2=x$ 与直线 $x+y=1$ 交点的纵坐标分别为 $y_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 和 $y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，曲线 $y^2=x$ 与直线 $x+y=2$ 交点的纵坐标分别为 $y_3=-2$ 和 $y_4=1$.

记区域 D 的边界为 L，由于 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示区域 D 的面积，则

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L x\mathrm{d}y=\int_{y_1}^{y_3}y^2\mathrm{d}y+\int_{y_3}^{y_4}(2-y)\mathrm{d}y+\int_{y_4}^{y_2}y^2\mathrm{d}y+\int_{y_2}^{y_1}(1-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}(y_3^3-y_1^3)+2(y_4-y_3)-\frac{1}{2}(y_4^2-y_3^2)+\frac{1}{3}(y_2^3-y_4^3)+(y_1-y_2)-\frac{1}{2}(y_1^2-y_2^2)$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{1}{3}(y_2^3-y_1^3)+(y_1-y_2)-\frac{1}{2}(y_1^2-y_2^2)$$

注意到，$y_2-y_1=\sqrt{5}$，$y_2+y_1=-1$，$y_2^2-y_1^2=-\sqrt{5}$，

$$y_2^3-y_1^3=(y_2-y_1)[(y_2+y_1)^2-y_1y_2]=\sqrt{5}(1+1)=2\sqrt{5}.$$

于是，$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{3}-\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{9}{2}-\frac{5\sqrt{5}}{6}.$

六、（10 分）计算 $I=\oiint\limits_S[(x+z)^2+y^2+2yz]\,\mathrm{d}S$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=2x+2y$.

解一：$I=\oiint\limits_S[(x+z)^2+y^2+2yz]\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_S[x^2+z^2+y^2+2xz+2yz]\,\mathrm{d}S$.

由对称性，有 $\oiint\limits_S(2xz+2yz)\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_S(2x+2y)\,z\,\mathrm{d}S=0$.

所以，$I=2\oiint\limits_S(x+y)\,\mathrm{d}S=2A(\bar{x}+\bar{y})$，其中 $A=8\pi$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2x+2y$ 的面积，$(\bar{x},\bar{y})=(1,1)$ 为圆心即形心.

所以，$I=2\cdot 8\pi\cdot(1+1)=32\pi.$

解二：$I=\oiint\limits_S[(x+z)^2+y^2+2yz]\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_S[x^2+z^2+y^2+2xz+2yz]\,\mathrm{d}S$.

由对称性，有 $\oiint\limits_S(2xz+2yz)\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_S(2x+2y)\,z\,\mathrm{d}S=0$.

球面S的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi \\ y = 1 + \sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi, \ 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi. \\ \quad z = \sqrt{2}\cos\varphi \end{cases}$$

注意到，$E = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = 2\sin^2\theta\sin^2\varphi + 2\cos^2\theta\sin^2\varphi + 0^2 = 2\sin^2\varphi$，

$$G = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = 2\cos^2\theta\cos^2\varphi + 2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi = 2,$$

$$F = x_\theta x_\varphi + y_\theta y_\varphi + z_\theta z_\varphi = -\sqrt{2}\sin\theta\sin\varphi\cdot\sqrt{2}\cos\theta\cos\varphi + \sqrt{2}\cos\theta\sin\varphi\cdot\sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi + 0 = 0.$$

所以，$I = 2\oint\!\!\!\oint_S (x+y)\,\mathrm{d}S = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}[2+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\sin\varphi]\sqrt{4\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$

$$= 8\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 8\cdot 2\pi\cdot 2 + 0 = 32\pi.$$

七、（10 分）计算$I = \iint_S (x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$S$是抛物面$z = 2 - x^2 - y^2\ (1 \le z \le 2)$的上侧.

解：做辅助面$S_1 : z = 1,\ x^2 + y^2 \le 1$，取下侧，则

$$I = \iint_{S\cup S_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{S_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由 Gauss 公式，有

$$\iint_{S\cup S_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_V [3x^2z + 1 - x^2z - 2x^2z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^2\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 2-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\int_1^2(2-z)\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{\pi}{2}(2-z)^2\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

而 $\iint_{S_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= -\iint_{x^2+y^2\le 1}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}.$$

或 $\iint_{S_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}.$$

故$I = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

八、（10 分）（1）设 $p>0$，记 $J(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\mathrm{d}x$. 证明：$J(y)$ 对 $y\in[0,1]$ 一致收敛，并求出 $J(y)$；

（2）求反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的值.

证明：（1）因为 $\left|\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\right|\le \mathrm{e}^{-px}$，而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-px}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}$，故反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x$ 收敛. 由 M 判别法知，$J(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\mathrm{d}x$ 对 $y\in[0,1]$ 一致收敛.

当 $y=0$ 时，$J(0)=0$. 当 $y\in(0,1]$ 时，

$$
\begin{aligned}
J(y)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\Big|_0^{+\infty}+\frac{y}{p}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\cos(xy)\mathrm{d}x\\
&=\frac{y}{p}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\cos(xy)\mathrm{d}x\\
&=\frac{y}{p}[-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-px}\cos(xy)\Big|_0^{+\infty}-\frac{y}{p}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\mathrm{d}x]\\
&=\frac{y}{p^2}-\frac{y^2}{p^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

故 $J(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\mathrm{d}x=\frac{y}{p^2+y^2}$.

（2）注意到 $\frac{1-\cos x}{x}=\int_0^{x}\sin(xy)\mathrm{d}x$，故

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{1}\mathrm{e}^{-x}\sin(xy)\mathrm{d}y.$$

因为函数 $\mathrm{e}^{-x}\sin(xy)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,1]$ 上连续且 $J(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\sin(xy)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[0,1]$ 一致收敛，则

$$I=\int_0^{1}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin(xy)\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_0^{1}=\frac{1}{2}\ln 2.$$