2016-2017学年《数学分析一》期末试卷

1、 计算下列各题的极限：(30分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x})$；　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cos x - xe^{x^2}-1}{x-\sin x}$.

3. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{\frac{n}{2n+1}\sin\frac{n\pi}{4}\}$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{\sqrt[n]{|\cos\frac{n\pi}{3}|}\}$.

4. 已知 $f(x_0)=-1$，$f'(x_0)=1$，求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0)\sin x - f(x)\sin x_0}{f(x)e^{x_0}-f(x_0)e^x}$.

5. 已知 $f(x)=\frac{x}{x^2+2x-3}+x^2e^x$，求 $f^{(n)}(x)$.

二、计算下列各题：（20分）

1. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，试求:(1) $\frac{dy}{dx}|_{x=3}$，$d^2y|_{x=3}$，

(2) 此曲线在 $x=3$ 处的切线方程和法线方程.

2. 在抛物线 $y=x^2$ 上求一点，使其与点 $(0,a)$ 的距离最短.

三、证明题：（50分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,$ 上连续，在 $(0,$ 内可导，且 $f(0)=f($.证明：存在 $\xi\in(0,$ ，使得 $f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$.

2. 证明不等式 $\sin x>\frac{2x}{\pi}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，证明：至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(\frac{a+b}{2})=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

5. 利用有限覆盖定理或者用致密性定理来证明：“闭区间上的连续函数必是一致连续的”，即“若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续”.

2016-2017学年《数学分析一》期末试卷解答

一、计算下列各题的极限：(30分)

1．$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x})$

解：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x\cot x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\cot x+x\csc^2 x}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x\cos x+x}{2x\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x\cos x+x}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

2．$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cos x-xe^{x^2}-1}{x-\sin x}$.

解：$e^x\cos x=[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)][1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)]$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)=1+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

则 $e^x\cos x-xe^{x^2}-1=1+x-\frac{x^3}{3}-x-x^3-1+o(x^3)$

$$=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cos x-xe^{x^2}-1}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=-8.$

3．$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{\frac{n}{2n+1}\sin\frac{n\pi}{4}\}$，　$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{\sqrt[n]{|\cos\frac{n\pi}{3}|}\}$.

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=2$，数列$\{\sin\frac{n\pi}{4}\}$的项共有5个不同的值，

$-1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2},1$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sin\frac{n\pi}{4}$=1，所以$\overline{\lim_{n\to\infty}}\{\frac{n}{2n+1}\sin\frac{n\pi}{4}\}$=2；

又因为 $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\le\sqrt[n]{|\cos\frac{n\pi}{3}|}\le 1$，由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1$

故$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\cos\frac{n\pi}{3}|}=1$，从而$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\cos\frac{n\pi}{3}|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\cos\frac{n\pi}{3}|}=1$.

4．已知$f(x_0)=-1$，$f'(x_0)=1$，求极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)\sin x-f(x)\sin x_0}{f(x)e^{x_0}-f(x_0)e^{x}}$.

解：$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)\sin x-f(x)\sin x_0}{f(x)e^{x_0}-f(x_0)e^{x}}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)\sin x-f(x_0)\sin x_0+f(x_0)\sin x_0-f(x)\sin x_0}{f(x)e^{x_0}-f(x_0)e^{x_0}+f(x_0)e^{x_0}-f(x_0)e^{x}}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\sin x_0}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}e^{x_0}-f(x_0)\frac{e^{x_0}-e^{x}}{x-x_0}}$$

$$=\frac{-\cos x_0-\sin x_0}{2e^{x_0}}=-\frac{1}{2}e^{-x_0}(\cos x_0+\sin x_0).$$

5．已知$f(x)=\frac{x}{x^2+2x-3}+x^2e^x$，求$f^{(n)}(x)$.

解：因为$\frac{x}{x^2+2x-3}=\frac{x}{(x+3)(x-1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3})$，故

$$(\frac{x}{x^2+2x-3})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{4}[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{3}{(x+3)^{n+1}}]$$

利用莱布尼茨公式，

$$(x^2e^x)^{(n)}=e^x[x^2+2nx+n(n-1)],$$

故$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{4}[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{3}{(x+3)^{n+1}}]+e^x[x^2+2nx+n(n-1)]$.

二、计算下列各题：(20 分)

1．设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，试求:(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=3}$， $\mathrm{d}^2y|_{x=3}$，

(2) 此曲线在 $x=3$ 处的切线方程和法线方程.

解：令 $x=t^2+2t=3$，解得 $t=1$ 或 $t=-3$（舍去，不在定义域中）.

(1) $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}\right|_{t=1}=\frac{1}{8}$，　$\mathrm{d}^2y=(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2})\mathrm{d}x^2$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\frac{1}{2(1+t)^2}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{1}{2(1+t)^2}]\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{(1+t)^3}\cdot\frac{1}{2(1+t)}$$

$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=3}=\left.-\frac{1}{2(1+t)^4}\right|_{t=1}=-\frac{1}{32}$，故 $\mathrm{d}^2y\big|_{x=3}=(-\frac{1}{32})\mathrm{d}x^2$.

（2）因为曲线经过点 $(3,\ln 2)$，由（1）知切线斜率 $k_1=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\frac{1}{8}$，法线斜率

$k_2=\frac{1}{k_1}=-8$，故所求的切线方程为 $y-\ln 2=\frac{1}{8}(x-3)$，即 $y=\frac{1}{8}x-\frac{3}{8}+\ln 2$；

法线方程为 $y-\ln 2=-8(x-3)$，即 $y=-8x+24+\ln 2$.

2．在抛物线 $y=x^2$ 上求一点，使其与点 $(0,a)$ 的距离最短.

解：设抛物线上点 (x,x^2) 到 $(0,a)$ 的距离为 $d=\sqrt{x^2+(x^2-a)^2}$.

$$d'(x)=\frac{2x+2(x^2-a)\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+(x^2-a)^2}}=\frac{x(1+2x^2-2a)}{\sqrt{x^2+(x^2-a)^2}}=\frac{2x(x^2-a+\frac{1}{2})}{\sqrt{x^2+(x^2-a)^2}}.$$

（1）当 $a\le\frac{1}{2}$ 时，$x^2-a+\frac{1}{2}\ge 0$. 由 $d'(x)=0$ 解得 $x=0$，并且当 $x>0$ 时，

$d'(x)>0$；$x<0$ 时，$d'(x)<0$，于是 $x=0$ 为 $d(x)$ 的最小值点.

故 $(0,0)$ 与点 $(0,a)$ 的距离最短，最短距离为 $|a|$.

（2）当$a>\frac{1}{2}$时，.由$d'(x)=0$解得$x=0$或$x=\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$.

当$x<-\sqrt{a-\frac{1}{2}}$时，$d'(x)<0$；$-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}<x<0$时，$d'(x)>0$；

$0<x<\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}$时，$d'(x)<0$；$x>\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}$时，$d'(x)>0$；

于是$x=\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$为$d(x)$的最小值点，最小值为$\sqrt{a-\frac{1}{4}}$.

三、证明题：(50分)

1．设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，且$f(0)=f(\pi)$.证明：存在$\xi\in(0,\pi)$，使得$f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$.

证明：做辅助函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\sin x}$，显然$F(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导, 且$F(0)=F(\pi)$, 由罗尔定理, 存在$\xi\in(0,\pi)$, 使得$f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$.

2．证明不等式 $\sin x>\frac{2x}{\pi},x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

证明1：设$f(x)=\sin x$，$f''(x)=-\sin x<0,x\in(0,\frac{\pi}{2})$，故$f(x)$是$[0,\frac{\pi}{2}]$上的严格凹函数，则有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)\text{，其中}\lambda_1,\lambda_2\in(0,1),\text{且}\lambda_1+\lambda_2=1$$

对任意给定的$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，取$\lambda_1=\frac{2x}{\pi}$，$\lambda_2=1-\frac{2x}{\pi},x_1=\frac{\pi}{2},x_2=0$，代入上式得

$$\sin[\frac{2x}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+(1-\frac{2x}{\pi})\cdot 0]>\frac{2x}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2})+(1-\frac{2x}{\pi})\sin(0)=\frac{2x}{\pi}$$

即得 $\sin x>\frac{2x}{\pi},x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

证明 2： 因为$f(x)=\sin x$是$[0,\frac{\pi}{2}]$上的严格凹函数，由凹函数的定义和几何特

征，在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上，函数曲线$y_1=\sin x$应该位于区间$[0,\frac{\pi}{2}]$端点弦连线的上方，

区间$[0,\frac{\pi}{2}]$端点弦连线的直线方程为$y_2=\frac{2}{\pi}x,$，则有$y_1>y_2, x\in(0,\frac{\pi}{2})$，

即$\sin x>\frac{2x}{\pi}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

证明 3：设$f(x)=\frac{\sin x}{x}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0$

其中$\tan x>x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$，故$f(x)$严格单调下降，所以$f(x)>f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$，

即$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$，从而 $\sin x>\frac{2x}{\pi}$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

其中 $\tan x>x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$，事实上令$h(x)=\tan x-x, h'(x)=\sec^2 x-1>0$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$h(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调增加，故$h(x)>h(0)=0$.即$\tan x>x$.

3．设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导，且$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界，证明：至少存在一点$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$f''(\xi)=0$.

证明：反证法.

假设对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 都有$f''(x)\neq 0$，由导函数的介值性知，$f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒正或者恒负，不妨假设$f''(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$.

由$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f''(x)>0\Rightarrow f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的严格的凸函数，

$\Rightarrow$ $\forall x, x_0\in(-\infty,+\infty)$，有$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. 且$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单增. 任意取定$x_0\in(-\infty,+\infty)$，

若$f'(x_0)>0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=+\infty$，

与$f(x)$有界条件矛盾.

若$f'(x_0)<0$，则$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=+\infty$，

也与 $f(x)$ 有界条件矛盾.

若 $f'(x_0)=0$，因为 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增函数，故存在 $x^*>x_0$，使得

$f'(x^*)>f'(x_0)=0$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)]=+\infty$，也与 $f(x)$ 有界条件矛盾.

综上所述，至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f''(\xi)=0$.

4．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(\frac{a+b}{2})=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，

使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证明：$f(a)=f(\frac{a+b}{2})-\frac{b-a}{2}f'(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_1)$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+\frac{b-a}{2}f'(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2)$$

其中 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$.

两式相减，得

$$f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)],$$

故 $|f(b)-f(a)|\leq\frac{(b-a)^2}{4}\max\{|f''(\xi_2)|,|f''(\xi_1)|\}$.

取 $\xi=\xi_1$ 或 ξ_2，使得 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_2)|,|f''(\xi_1)|\}$，故 $\xi\in(a,b)$，且

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

5. 利用有限覆盖定理或者用致密性定理来证明：“闭区间上的连续函数必是一致连续的”，即“若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续”.

证明 1：(用致密性定理证)

反证：设 $f(x)$在$[a,b]$上不一致连续，即存在$\varepsilon_0>0$，对于一切$\delta>0$（无论δ多么小），总存在$x',x''\in[a,b]$，虽然$|x'-x''|<\delta$,但$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$.

现分别取 $\delta=1$，存在$x_1',x_1''\in[a,b]$，$|x_1'-x_1''|<1$，使$|f(x_1')-f(x_1'')|\geq\varepsilon_0$，

$\delta=\dfrac{1}{2}$，存在$x_2',x_2''\in[a,b]$，$|x_2'-x_2''|<\dfrac{1}{2}$，使$|f(x_2')-f(x_2'')|\geq\varepsilon_0,\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\delta=\dfrac{1}{n}$，存在$x_n',x_n''\in[a,b]$，$|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}$，使$|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon_0$，

由此得到$\{x_n'\},\{x_n''\}\in[a,b]$，且$|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}\to 0$，但总有$|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon_0$.

因为$\{x_n'\}$有界，由致密性定理,存在$\{x_n'\}$的一个子列$\{x_{n_k}'\}$使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0\in[a,b]$，

又$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}''=\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}''-x_{n_k}')+\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}'=x_0$.

由$f(x)$的连续性和归结原理得

$$\varepsilon_0\leq\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|=|\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}')-\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}'')|=f(x_0)-f(x_0)=0$$

这就构成矛盾！，所以闭区间上的连续函数必是一致连续的.

证明 2：（用有限覆盖定理证）

因为$f(x)$在$[a,b]$上连续,对$\forall x\in[a,b],\forall\varepsilon>0,\exists\delta_x>0,$

当$x'\in\bigcup(x,\delta_x)\bigcap[a,b]$时有$\left|f(x')-f(x)\right|<\varepsilon$.

令 $H=\{(x-\frac{\delta_x}{2},x+\frac{\delta_x}{2})\mid\forall x\in[a,b]\}$，$H$ 中的每个小区间都满足：对 $\forall x',x''\in(x-\frac{\delta_x}{2},x+\frac{\delta_x}{2})$，都有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$，则 H 构成了 $[a,b]$ 的一个开覆盖，由有限覆盖定理得，存在有限个开区间

$$(x_1-\frac{\delta_1}{2},x_1+\frac{\delta_1}{2}),(x_2-\frac{\delta_2}{2},x_2+\frac{\delta_2}{2}),\cdots,(x_n-\frac{\delta_n}{2},x_n+\frac{\delta_n}{2})$$

也覆盖了 $[a,b]$．令 $\delta=\min\limits_{1\le i\le n}\{\frac{\delta_i}{2}\}>0$，对 $x',x'\in[a,b]$，只要 $|x'-x''|<\delta$,那么 x' 必属于某个上述 n 个小区间中的某一个，设 $x'\in(x_i-\frac{\delta_i}{2},x_i+\frac{\delta_i}{2})$，于是有

$|x'-x_i|<\frac{\delta_i}{2}<\delta_i$，$|x''-x_i|<|x''-x'|+|x'-x_i|<\delta+\frac{\delta_i}{2}\le\delta_i$，即 $x''\in(x_i-\frac{\delta_i}{2},x_i+\frac{\delta_i}{2})$，所以 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$

这就证明了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.