厦门大学《数学分析三》期末试卷

试卷类型：经济学院国际化班（A 卷）　　考试日期: 2024.12.31

一、(每小题 6 分, 共 30 分) 计算下列各题:

1. 设$I(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t$，求$I'(0)$；

2. 计算$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$；

3. 计算三重积分$\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V: x^2+y^2+z^2\le a^2$；

4. 计算$\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中$L$是星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$；

5. 计算曲面积分$\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$.

二、(本题 10 分) 设$I(x)=\int_{\pi}^{2\pi}xy\mathrm{e}^{y-\sin y}\sin(x^2y)\mathrm{d}y$，求$\int_0^1 I(x)\mathrm{d}x$.

三、(本题 10 分) 利用交换积分次序，证明：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z^2)f(z)\mathrm{d}z$.

四、(本题 10 分) 计算三重积分$\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$是由上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$与旋转抛物面$x^2+y^2=3z$围成的立体.

五、(本题10分)计算曲线积分$I=\int_L(2xy+\sin x)\mathrm{d}x+(x^2-y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中$L$是$y=x^2-2x$上由点$O(0,0)$到$A(4,8)$的曲线弧段.

六、(本题 10 分) 计算$\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$的下侧.

七、(本题 12 分) 证明含参变量反常积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t, \int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$关于$x\in(-\infty,+\infty)$一致收敛，并求$I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

八、(本题 8 分) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且$f(x)\ne 0$，L是圆周$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$的逆时针方向

证明：$\oint_L xf^2(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f^2(x)}\mathrm{d}x\ge 2\pi a^2$.