2018-2019 学年第一学期《数学分析三》期中试卷解答

一、（15 分）设 $z=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，而 $x=\dfrac{-u+\sqrt{3}v}{2}$， $y=\dfrac{\sqrt{3}u+v}{2}$，证明：

（1）$(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2=(\dfrac{\partial z}{\partial u})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial v})^2$；　　（2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

解：（1）$\dfrac{\partial z}{\partial u}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.　　（5 分）

$$(\frac{\partial z}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2=(-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial z}{\partial y})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y})^2=(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2.$$　　（7 分）

（2）
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial z}{\partial y})\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial z}{\partial y})\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x})\cdot(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$　　（3 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y})\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y})\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$　　（6 分）

故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.　　（8 分）

二、（15 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y})=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，证明：

（1）$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；　　（2）$x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$.

解：方程 $F(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y})=0$ 两边对 x 求导，则 $F_1(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{x^2})+F_2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1}{x^2(F_1+F_2)},$$

同理可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2}{y^2(F_1+F_2)},$$ （**5** 分）

于是，$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_1}{F_1+F_2}+\frac{F_2}{F_1+F_2}=1$. （**7** 分）

（**2**）对 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 两边分别对 x 求导，得

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$ （**2** 分）

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$ （**4** 分）

则 $$2x^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-xy^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2y^2\frac{\partial z}{\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

即 $$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2(x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

故 $$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$ （**8** 分）

三、（**15** 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性及一阶偏导数的连续性.

解：因为 $0\le\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\le\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}=0$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0=f(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. （**4** 分）

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$ （**8** 分）

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}[\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}]^2$ 不存在，所以，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. （12 分）

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的一阶偏导数不连续. （15 分）

四、（10 分）设 $u=f(x,y)$，$g(x,y,z)=0$，$h(x,z)=0$，其中各函数都具有连续的偏导数，且 $g_y\neq0$，$h_x\neq0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解：由 $g(x,y,z)=0$，$h(x,z)=0$ 两边对 x 求导，

$$g_x+g_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+g_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\quad h_x+h_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$$ （4 分）

于是，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{g_y}(g_x+g_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})=-\dfrac{1}{g_y}(g_x-g_z\dfrac{h_x}{h_z})=\dfrac{g_zh_x-g_xh_z}{g_yh_z}$. （7 分）

故 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\dfrac{g_zh_x-g_xh_z}{g_yh_z}$. （10 分）

五、（10 分）设 $z=f(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=f(x,y)$ 的极值点和极值.

解：对方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 求导，得

$$\begin{cases}2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\-6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases},$$ （*）

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $\begin{cases}2x-6y=0\\-6x+20y-2z=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3y\\z=y\end{cases}$，代入方程，得

$$x=9,\ y=3,\ z=3\text{ 或 }x=-9,\ y=-3,\ z=-3.$$ （4 分）

对（*）式再次求导，得

$$\begin{cases}2-2y\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}-2(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2-2z\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=0\\-6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}-2(\dfrac{\partial z}{\partial x})(\dfrac{\partial z}{\partial y})-2z\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=0\\20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}-2(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2-2z\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=0\end{cases}$$

所以，$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6}$，$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2}$，$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$，因为$B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，且$A>0$，所以$(9,3,3)$是$z(x,y)$的极小值点，极小值为$z(9,3)=3$.（7 分）

同理，$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6}$，$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2}$，$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}$，因为$B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，且$A<0$，所以$(-9,-3)$是$z(x,y)$的极大值点，极大值为$z(-9,-3)=-3$.

（10 分）

六、（20 分）（1）求旋转椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$上任意一点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程；

（2）求旋转椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$在第一卦限上一点，使该点处的切平面在三个坐标轴的截距平方和最小。

解：（1）旋转椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$上任意一点(x_0,y_0,z_0)处的法向量为

$$\vec{n}=(2x_0,2y_0,\frac{z_0}{2}),\qquad\text{（5 分）}$$

故所求的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+\frac{z_0}{2}(z-z_0),$$

即

$$x_0x+y_0y+\frac{z_0}{4}z=x_0^2+y_0^2+\frac{z_0^2}{4}=1.\qquad\text{（10 分）}$$

（2）切平面在三个坐标轴上的截距分别为$\frac{1}{x_0}$，$\frac{1}{y_0}$，$\frac{4}{z_0}$，（12 分）

设$f(x,y,z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}$，问题转化为求$f(x,y,z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}$在条件

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1,(x>0,y>0,z>0)$$

下的最小值点.

构造拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}+\lambda(x^2+y^2+\frac{z^2}{4}-1)$，（14 分）

令

$$\begin{cases} L_x = -\dfrac{2}{x^3} + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -\dfrac{2}{y^3} + 2\lambda y = 0 \\ L_z = -\dfrac{32}{z^3} + \dfrac{1}{2}\lambda z = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = y = \dfrac{1}{2}$， $z = \sqrt{2}$.　　　　（**18 分**）

有实际意义知，最小值显然存在，所以唯一驻点 $M_0(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \sqrt{2})$ 为所求的点.　　　　（**20 分**）

七、（**15 分**）如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D \subset R^2$ 上连续，证明： $f(x,y)$ 在 D 上有界，且能取得最大值与最小值.

证明：先证明 $f(x,y)$ 在 D 上有界. 用反证法，如果 $f(x,y)$ 在 D 上无界，则对于任意正整数 n，总存在 $P_n \in D$，使得 $|f(P_n)| > n$， $n = 1, 2, \cdots$.

于是，得到一个有界点列 $\{P_n\} \subset D$，且总能使 $\{P_n\}$ 中有无穷多个不同的点.　　　　（**3 分**）

由定理 **16.3**， $\{P_n\}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0$. 因为 D 为闭域，故 $P_0 \in D$.　　（**5 分**）

因为 $f(x,y)$ 在 D 上连续，故 $f(x,y)$ 在 P_0 上连续，则 $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P_0)$. 与 $|f(P_{n_k})| > n_k$ 相矛盾.

所以， $f(x,y)$ 在 D 上有界.　　　　（**7 分**）

设 $M = \sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$， $m = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

下面证明：必存在一点 $Q \in D$，使得 $f(Q) = M$.

用反证法，假设对于 $\forall (x,y) \in D$， $f(x,y) < M$，即 $M - f(x,y) > 0$.

定义 D 上的连续正值函数 $F(x,y) = \dfrac{1}{M - f(x,y)}$. 由前面的证明知道， $F(x,y)$ 在 D 上有界.

（**4 分**）

又因为 $f(x,y)$ 不能在 D 上达到上确界 M，所以存在收敛点列 $\{P_n\} \subset D$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = M$.

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} F(P_n) = +\infty$，这与 $F(x,y)$ 在 D 上有界矛盾.

故 $f(x,y)$ 在 D 上能取到最大值.

同理， $f(x,y)$ 在 D 上能取到最小值.　　　　（**8 分**）