一、（10 分）解：$f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$ 在 $D$ 上都有定义，且为初等函数，因此，$f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$ 在 $D$ 上连续.（5 分）

下面证明：$f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$ 在 $D$ 上不一致连续.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$，无论 $\delta>0$ 取得多么小，取 $P_1(\dfrac{n}{n+1},\dfrac{n}{n+1})$，$P_2(\dfrac{n-1}{n},\dfrac{n-1}{n})$.

只要 $n$ 足够大，就有 $\left|\overline{P_1P_2}\right|=\sqrt{2(\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n-1)}{n})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{n(n+1)}<\dfrac{2}{n^2}<\delta$.

而此时 $$\left|f(P_2)-f(P_1)\right|=\left|\frac{1}{1-(\frac{n}{n+1})^2}-\frac{1}{1-(\frac{n-1}{n})^2}\right|$$

$$=\frac{2n^2-1}{4n^2-1}=\frac{2-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$，故存在 $N$，使得当 $n>N$ 时，$\dfrac{2-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}>\dfrac{1}{4}=\varepsilon_0$.

故 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$ 在 $D$ 上不一致连续.（5 分）

二、函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的偏导函数在原点是否连续？$f(x,y)$ 在原点是否可微？

解：如果 $(x,y)\neq(0,0)$，

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}. \qquad \text{（3 分）}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{y^2}=0.\qquad（3 分）$$

因为极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2})$不存在，所以，极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$不存在.

同理$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)$不存在.

故$f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$在$(0,0)$处不连续.　　　　　　　　　　　　　　　　（4 分）

因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0.$$

即　$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$.

所以，$f(x,y)$在原点可微.（5 分）

三、定义$r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：除原点外，函数$u(x,y,z)=\dfrac{1}{r(x,y,z)}$满足 Laplace 方程$\Delta u=0$，其中$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{x}{r}=-\dfrac{x}{r^3}$（2 分），$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{r^3}-x\cdot\dfrac{-3}{r^4}\cdot\dfrac{x}{r}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3x^2}{r^5}$（4 分）.

同理，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3y^2}{r^5}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3z^2}{r^5}$（2 分）

$$\Delta u=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.\text{（2 分）}$$

四、设 $F(x-y,y-z)=0$ 确定 $z$ 是 $x,y$ 的函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：令 $u=x-y$，$v=y-z$.

对方程 $F(x-y,y-z)=0$ 两边对 $x$ 求导数，则 $F_u\cdot 1+F_v\cdot(-\dfrac{\partial z}{\partial x})=0$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_u}{F_v}$.（4 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{F_v\cdot[F_{uu}+F_{uv}\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})]-F_u\cdot[F_{vu}+F_{vv}\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})]}{(F_v)^2}$$

$$=\frac{F_v\cdot[F_{uu}-F_{uv}\cdot\frac{F_u}{F_v}]-F_u\cdot[F_{vu}-F_{vv}\cdot\frac{F_u}{F_v}]}{(F_v)^2}$$

$$=\frac{F_{uu}F_v^2-2F_{uv}F_uF_v+F_{vv}F_u^2}{(F_v)^3}.$$（6 分）

五、已知 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v \end{cases}$，求偏导数 $u_x,u_y,v_x,v_y$.

解：方程 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v \end{cases}$ 两边对 $x$ 求导，得

$$\begin{cases} 1=(\mathrm{e}^u+\sin v)u_x+u\cos v\cdot v_x \\ 0=(\mathrm{e}^u-\cos v)u_x+u\sin v\cdot v_x \end{cases}$$（3 分）

解得
$$\begin{cases} u_x=\dfrac{u\sin v}{(\mathrm{e}^u+\sin v)u\sin v-(\mathrm{e}^u-\cos v)u\cos v} \\ v_x=\dfrac{-(\mathrm{e}^u-\cos v)}{(\mathrm{e}^u+\sin v)u\sin v-(\mathrm{e}^u-\cos v)u\cos v} \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} u_x=\dfrac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1} \\ v_x=\dfrac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u} \end{cases}.$$（2 分）

方程 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v \end{cases}$ 两边对 $y$ 求导，得

$$\begin{cases}0=(\mathrm{e}^u+\sin v)u_y+u\cos v\cdot v_y\\1=(\mathrm{e}^u-\cos v)u_y+u\sin v\cdot v_y\end{cases}$$（3 分）

解得
$$\begin{cases}u_y=-\dfrac{u\cos v}{(\mathrm{e}^u+\sin v)u\sin v-(\mathrm{e}^u-\cos v)u\cos v}\\v_y=\dfrac{\mathrm{e}^u+\sin v}{(\mathrm{e}^u+\sin v)u\sin v-(\mathrm{e}^u-\cos v)u\cos v}\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}u_y=-\dfrac{\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1}\\v_y=\dfrac{\mathrm{e}^u+\sin v}{u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u}\end{cases}.$$（2 分）

六、设 $a>0$，证明曲面 $xyz=a^3$ 上任一点的切平面与坐标平面围得的四面体体积都相等.

证明：记 $F(x,y,z)=xyz-a^3$. 设 $(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 $xyz=a^3$ 上任一点，则法向量

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(y_0z_0,z_0x_0,x_0y_0).$$（3 分）

过该点的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+z_0x_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0,$$（3 分）

整理后，得 $y_0z_0x+z_0x_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0$，即

$$\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1.$$（2 分）

该切平面与坐标平面围得的四面体体积

$$V=\frac{1}{6}(3x_0)(3y_0)(3z_0)=\frac{9}{2}a^3.$$（2 分）

七、求 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y$ 的极值.

解：令 $\begin{cases}f_x(x,y)=2x+y-1=0\\f_y(x,y)=x+2y-1=0\end{cases}$，得 $x=y=\dfrac{1}{3}$.（3 分）

$$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{yy}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=1.$$（2 分）

因为 $f_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\cdot f_{yy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})-[f_{xy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})]^2=2\times2-1^2=3>0$，$f_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=2>0$，

所以，$f(x,y)$在$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$点取到极小值.（4 分）

极小值为$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$.（1 分）

八、求函数$f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$的最大值，其中

$$x^2+y^2+z^2=5r^2, x>0, y>0, z>0,$$

并利用这一结果证明：对任意正数$a,b,c,$成立$abc^3\le 27(\frac{a+b+c}{5})^5$.

解：作拉格朗日函数$L(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2)$，（2 分）

$$令\begin{cases} L_x=\frac{1}{x}+2\lambda x=0 \\ L_y=\frac{1}{y}+2\lambda y=0 \\ L_z=\frac{3}{z}+2\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+z^2-5r^2=0 \end{cases}，得$$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}=\frac{3}{z^2},$$

代入最后一个方程，得唯一稳定点$x=y=r, z=\sqrt{3}r$.（4 分）

因为$u=\ln x+\ln y+3\ln z$，将$x^2+y^2+z^2=5r^2$看作隐函数$z=z(x,y)$.

那么，$u_x=\frac{1}{x}+\frac{3}{z}z_x=\frac{1}{x}-\frac{3x}{z^2}$，$u_y=\frac{1}{y}+\frac{3}{z}z_y=\frac{1}{y}-\frac{3y}{z^2}$.

$$u_{xx}=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{z^2}-6\frac{x^2}{z^4},\ u_{xy}=\frac{6x}{z^3}\cdot(-\frac{y}{z})=-\frac{6xy}{z^4},\ u_{yy}=-\frac{1}{y^2}-\frac{3}{z^2}-6\frac{y^2}{z^4}$$

所以，$u_{xx}\big|_{(r,r,\sqrt{3}r)}=-\frac{1}{r^2}-\frac{3}{3r^2}-6\frac{r^2}{9r^4}=-\frac{8}{3r^2}, u_{yy}\big|_{(r,r,\sqrt{3}r)}=-\frac{1}{r^2}-\frac{3}{3r^2}-6\frac{r^2}{9r^4}=-\frac{8}{3r^2}$

$$u_{xy}\big|_{(r,r,\sqrt{3}r)}=-\frac{2}{3r^2}.$$

由于$[u_{xx}u_{yy}-(u_{xy})^2]\Big|_{(r,r,\sqrt{3}r)}=\dfrac{20}{3r^4}>0$，且$u_{xx}\Big|_{(r,r,\sqrt{3}r)}<0$.

可见稳定点为极大值点，且为最大值点.

故$f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$在条件$x^2+y^2+z^2=5r^2,x>0,y>0,z>0$下的最大值为

$$f(r,r,\sqrt{3}r)=\ln r+\ln r+3\ln(\sqrt{3}r)=\ln(3\sqrt{3}r^5),$$

即$\ln x+\ln y+3\ln z\le\ln(3\sqrt{3}r^5)$，（4 分）

去掉对数，得$xyz^3\le3\sqrt{3}(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5})^{\frac{5}{2}}$.（1 分）

两边平方，得$x^2y^2z^6\le27(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5})^5$.（2 分）

记$a=x^2,b=y^2,c=z^2$，则有$abc^2\le27(\dfrac{a+b+c}{5})^5$.（2 分）

九、设$\varphi(x)$在$(-1,1)$内有连续导数，$\varphi(0)=0,\ |\varphi'(0)|<1$. 证明：存在$\delta>0$，当$x\in(-\delta,\delta)$时，有唯一的可微函数$y=y(x)$满足$y(0)=0$以及$x=y(x)+\varphi(y(x))$.

证明：令$D=(-1,1)\times(-1,1)$，$F(x,y)=x-y-\varphi(y)$.（2 分）

由于$\varphi(x)$在$(-1,1)$内有连续导数，于是，$F(x,y)$在$D$内存在连续的偏导数.（2 分）

由$\varphi(0)=0,\ |\varphi'(0)|<1$，我们得到

$$F(0,0)=0-0-\varphi(0)=0.$$（2 分）

$$F_y(0,0)=-1-\varphi'(0)\ne0.$$（2 分）

因此，$F(x,y)$满足隐函数存在唯一性定理的条件，故存在$\delta>0$，当$x\in(-\delta,\delta)$时，有唯一的可微函数$y=y(x)$满足$y(0)=0$以及$x=y(x)+\varphi(y(x))$.（2 分）