厦门大学 2018-2019 学年第一学期

《数学分析 3》期末试卷（A 卷）解答

一、(8 分) 计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$ 分，其中为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$， $y=a(\sin t-t\cos t)$ （$0\le t\le 2\pi$）.

解：$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi} a^2(1+t^2)at\mathrm{d}t$

$$=a^3(2\pi^2+4\pi^4)=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

二、(8 分) 计算二次积分 $I=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

解：交换积分次序，得

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\\
&=-\frac{1}{6}\left(y^2\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^1-2\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\\
&=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

三、(8 分) 设 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=9\quad(z\ge 0)$，取上侧，计算 $I=\oiint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：记 $D: x^2+y^2\le 9$，则

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\sqrt{9-r^2}r\mathrm{d}r\\
&=2\pi\left[-\frac{1}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^3=18\pi.
\end{aligned}$$

四、(8 分) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$，方向为逆时针方向.

解：$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}\oint_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{4}\iint\limits_D(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 4\pi=-2\pi.$$

五、(8 分) 计算第一型曲面积分: $\iint\limits_{S}(x^2+y^2-z)\mathrm{d}S$，其中 S 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界曲面.

解: 记 $S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}, (x,y)\in D:\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$

$S_2: z=1, (x,y)\in D:\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$

而 $$\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2-z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^3-r^2)\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{2}\pi.$$

$$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2-z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)r\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}.$$

故 $\iint\limits_{S}(x^2+y^2-z)\mathrm{d}S=-\frac{\sqrt{2}}{6}\pi-\frac{1}{2}\pi.$

六、(10 分) 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:-1\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

解: 记 $D_1:-1\le x\le 1, 0\le y\le x^2$， $D_2:-1\le x\le 1, x^2\le y\le 1$.

故 $$\iint\limits_{D}\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{3}\int_{-1}^1(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int_{-1}^1(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^1\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1x^3\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}.$$

七、(10 分) 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{V}[(x+y)^2+(y+z)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $V=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

解：$\iiint\limits_V [x^2+2xy+2y^2+2yz+z^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

由对称性，$\iiint\limits_V (2xy+2yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，

故 $I=\iiint\limits_V (x^2+2y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

由轮换对称性，有 $\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

于是，$I=\frac{4}{3}\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$
$$=\frac{16}{15}\pi.$$

八、(10 分) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分的下侧.

解：作辅助面 S_1：$z=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 取上侧，记 V 为 S 和 S_1 围成的立体. 于是，

$$I=\oiint\limits_{S+S_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\oiint\limits_{S+S_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

应用 Gauss 公式，得

$$I=-\iiint\limits_V 4z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-4\int_0^c z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-4\pi ab\int_0^c z(1-\frac{z^2}{c^2})\mathrm{d}z=-\pi abc^2.$$

九、(10 分) 若 (1) 对任意 $A>a$，含参变量正常积分 $\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}y$ 对参变量 x 在 I 上一致有界，即存在正数 M，对一切 $A>a$ 及一切 $x\in I$，都有 $\left|\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}y\right|\le M$；(2) 对每一个 $x\in I$，$g(x,y)$ 为 y 的单调函数，且当 $y\to+\infty$ 时，对参变量 x，$g(x,y)$ 一致地收敛于 0.

证明：含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 I 上一致收敛.

证明：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，因为当 $y\to+\infty$ 时，对参变量 x，$g(x,y)$ 一致地收敛于 0，则存在 $N>0$，

使得对任意$x\in I$，当$y>N$时，有$|g(x,y)|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$.

故当$A_1>A_2>N$时，由第二积分中值定理，存在$\xi\in[A_1,A_2]$，使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\right|=\left|g(x,A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}y+g(x,A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\le|g(x,A_1)|\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}y\right|+|g(x,A_2)|\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|$$

$$\le\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon.$$

所以，含参变量反常积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$在$I$上一致收敛.

十、(10 分) 证明：(1) 含参变量反常积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x$关于$\alpha$在$[0,+\infty)$上一致收敛；(2) 求$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan(\alpha x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$，$\alpha\ge 0$.

证明：(1) 因为$\left|\dfrac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}\right|\le\dfrac{1}{1+x^2}$，而$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}$. 即$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛，

由 M 判别法知，$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x$关于$\alpha$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) 由 (1)，当$\alpha\ne 1$时，

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1-\alpha^2}\int_0^{+\infty}[\frac{1}{1+x^2}-\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2x^2}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1-\alpha^2}[\arctan x-\alpha\arctan(\alpha x)]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2(1-\alpha^2)}(1-\alpha)=\frac{\pi}{2(1+\alpha)}.$$

当$\alpha=1$时，$I'(1)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sec^4 t}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{4}$.

于是，对于$\alpha\in[0,+\infty)$，$I(\alpha)=\dfrac{\pi}{2(1+\alpha)}$.

故$I(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)+C$.

因为$I(0)=0$，故$I(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$.

十一、(10 分) 计算第二型曲面积分$\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是抛物面$z=4-x^2-y^2$在$z\geq 0$部分，方向取下侧.

解：S在xoy面上的投影是$D: x^2+y^2\leq 4, z=0$.

S的单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}})$$

于是，

$$\begin{aligned}\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_S (xz\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_S (2x^2z+4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad \text{(4 分)}\\&=-\iint\limits_D [2x^2(4-x^2-y^2)+4]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2(4-r^2)r\mathrm{d}r-4\cdot\pi\cdot 2^2\\&=-\frac{80}{3}\pi.\end{aligned}$$

解二：增加辅助面$S_1: z=0,\ x^2+y^2\leq 4$，取上侧.

$$\begin{aligned}\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{S+S_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{S_1}4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\pi\int_0^4 z(4-z)\,\mathrm{d}z-\iint\limits_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\pi(2z^2-\frac{1}{3}z^3)\Big|_0^4-4\cdot 4\pi\\&=-\frac{80}{3}\pi.\end{aligned}$$