厦门大学《数学分析3》课程期中试卷

试卷类型：金融/统计　　　　考试日期　2017.11.19

一、求下列函数的极限（本题10分，每小题5分）：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$；　　　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2+x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

二、已知函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：（1）偏导数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 存在；（2）函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微；（3）偏导数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.（本题15分，每小题5分）

三、设 $f(x,y)=\dfrac{1+xy}{1-xy}$，$(x,y)\in D=[0,1)\times[0,1)$，证明：函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，但不一致连续.（本题10分）

四、设 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases} u=f(ux,v+y)\\ v=g(u-x,v^2y)\end{cases}$ 所确定的隐函数，试求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.（本题10分）

五、证明：由方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(\frac{\partial z}{\partial y})^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(\frac{\partial z}{\partial x})^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$（本题15分）

六、求锥面 $z=xf(\dfrac{y}{x})$ 在任意一点 (x_0,y_0) $(x_0\neq 0)$ 处的切平面方程，并证明：所有切平面都经过原点.（本题10分）

七、求曲线 $\begin{cases} x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.（本题10分）

八、求由方程 $z=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,b>0)$ 的极值.（本题10分）

九、当 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 时，求函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的最大值。并由此证明：当 a, b, c 为正实数时，成立不等式 $ab^2c^3\leq 108(\dfrac{a+b+c}{6})^6$.（本题10分）