厦门大学《数学分析-I》课程期末试卷

经济学院 <u>国际金融、统计专业</u>

试卷类型：（A卷）　　　　试时间:2018年1月09日

Kaoshishijian

1.求下列函数的极限（每小题4分，共16分）

（1）
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin(\frac{\pi}{2}x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+\cos(x-1)-1]}{1-\sin(\frac{\pi}{2}x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)-1}{1-\sin(\frac{\pi}{2}x)}$$

$$\underline{\underline{t=x-1}}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{1-\sin[\frac{\pi}{2}(t+1)]}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{1-\sin[\frac{\pi}{2}(t+1)]}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{-\frac{\pi}{2}\cos[\frac{\pi}{2}(t+1)]}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin[\frac{\pi}{2}(t+1)]}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

（2）
$$\lim_{x\to 0}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]}=e^{-\frac{1}{2}}$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}$.

（3）
$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}=e^{-1}$$

其中
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{1+x^2}}=-1$$

（4）
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(1+x^2+o(x^2))]\cdot x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3x^4}{2}+o(x^4)}=-\frac{1}{12}$$

其中 $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$

2.（14分）设正实数 $\alpha>0$，证明：

（1）对任意正整数 $n>1$，有 $\frac{1}{n^{1+\alpha}}\le\frac{1}{\alpha}[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}]$；

（2）数列 $x_n=1+\frac{1}{2^{1+\alpha}}+\frac{1}{3^{1+\alpha}}+\boxed{?}+\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛.

证明：（1）令 $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}},x\in(0,+\infty)$，对在 $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ 在 $[n-1,n]$，$n>1$ 应用

拉格朗日中值定理，得 $\frac{1}{n^{\alpha}}-\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}=\frac{-\alpha}{\xi^{\alpha+1}},\xi\in(n-1,n)$ ，即有

$\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}}>\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}},n>1$ ，从而得 $\frac{1}{n^{1+\alpha}}\le\frac{1}{\alpha}[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}],n>1$ ；

(2) $x_n=1+\frac{1}{2^{1+\alpha}}+\frac{1}{3^{1+\alpha}}+\boxed{?}+\frac{1}{n^{1+\alpha}}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{1+\alpha}}\le1+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=2}^{n}[\frac{1}{(k-1)^{\alpha}}-\frac{1}{k^{\alpha}}]$

$\le1+\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{n^{\alpha}})\le1+\frac{1}{\alpha}$ ，

所以数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增有上界，故收敛.

3. （10分）给出 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日余项的n阶泰勒公式.

解1：由 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\boxed{?}+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},\theta\in(0,1),x\in(-1,1)$ 的泰勒公式

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1+(-x)+(-x)^2+\boxed{?}+(-x)^{n-1}+\frac{(-x)^n}{(1+\theta_1x)^{n+1}}$$

$$=1-x+x^2+\boxed{?}+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\frac{(-1)^nx^n}{(1+\theta_1x)^{n+1}},\theta_1\in(0,1),x\in(-1,1)$$

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}=1-\frac{2x}{1+x}=1-2x[1-x+x^2+\boxed{?}+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\frac{(-1)^nx^n}{(1+\theta_1x)^{n+1}}]$$

$$=1-2x+2x^2-2x^3+\boxed{?}+(-1)^n2x^n+\frac{(-1)^{n+1}2x^{n+1}}{(1+\theta_1x)^{n+1}}.\quad\theta_1\in(0,1)$$

解2：$\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}=-1+2[1+(-x)+(-x)^2+\boxed{?}+(-x)^n+\frac{(-x)^{n+1}}{(1+\theta_2x)^{n+2}}]$

$$=1-2x+2x^2+\boxed{?}+(-1)^n2x^n+\frac{(-1)^{n+1}2x^{n+1}}{(1+\theta_2x)^{n+2}},\quad\theta_2\in(0,1),x\in(-1,1)$$

4. （15分）讨论常数 a 的取值，确定曲线 $y=4\ln x+a$ 与 $y=4x+\ln^4x$ 交点的个数.

解：确定曲线 $y=4\ln x+a$ 与曲线 $y=4x+\ln^4x$ 交点的个数，也就是求方程 $4\ln x+a=4x+\ln^4x$ 根的个数，此又等价于求函数 $f(x)=4x+\ln^4x-4\ln x-a$ 大于0的零点的个数. 为此令 $f(x)=4x+\ln^4x-4\ln x-a,\quad x\in(0,+\infty)$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}[4x+\ln^4x-4\ln x-a]=+\infty$ ，由于 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^4x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,$(洛)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[4x+\ln^4x-4\ln x-a]=\lim_{x\to+\infty}x[4+\frac{\ln^4x}{x}-4\frac{\ln x}{x}-\frac{a}{x}]=+\infty$$

又 $f'(x)=\frac{4(\ln^3x-1+x)}{x}$ ，令 $f'(x)=0$ ，得驻点 $x=1$ ，

当 $0<x<1$ 时， $f'(x)<0$, 当 $1<x<+\infty$ 时， $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取最小值.

$f(1)=4-a$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的唯一的最小值.

当 $f(1)=4-a>0$ ，即 $a<4$ 时， $f(x)>0$ ， $f(x)$ 无零点，即两曲线无交点；

当 $f(1)=4-a=0$ ，即 $a=4$ 时， $f(x)$ 有唯一零点，即两曲线只有一个交点；

当 $f(1)=4-a<0$ ，即 $a>4$ 时， $f(x)$ 有且仅有两个零点，即两曲线有且仅有两个交点,且分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内.

5. （15分）讨论由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t\\y=t-\ln(1+t)\end{cases}$ 确定的曲线 $y=y(x)$ 的单调区间、极值、凹凸区间及拐点.

解：由 $y=t-\ln(1+t)$ 知，参数t的取值范围为 $t>-1$ ，从而函数 $y(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t+2\neq 0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{1+t}\Big/(2t+2)=\frac{t}{2(1+t)^2}$

当 $-1<t<0$ 时，有 $-1<x<0$，$y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{2(1+t)^2}<0$，即函数 $y(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上严格单调降，

当 $0<t<+\infty$ 时，有 $0<x<+\infty$，$y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{2(1+t)^2}\geq 0$，即函数 $y(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调增，

当 $x=0$ 时，$y'(0)=0$，所以 $x=0$ 是函数 $y(x)$ 的极小值点，也是最小值点，最小值为 $y(0)=0$.

$y''(x)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\frac{t}{2(1+t)^2}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{t}{2(1+t)^2}]\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1-t}{2(1+t)^3}\cdot\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1-t}{4(1+t)^4}$

当 $-1<t<1$ 时，有 $-1<x<3$，且有 $y''(x)>0$，即函数 $y(x)$ 在区间 $(-1,3)$ 上是严格凸函数，

当 $1<t<+\infty$ 时，有 $3<x<+\infty$，且有 $y''(x)<0$，即函数 $y(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上是严格凹函数，

当 $t=1$ 即 $x=3$ 时，$y''(3)=0$，且在 $x=3$ 的两旁 $y''(x)$ 变号，即凹凸性改变了，故 $(3,1-\ln 2)$ 是曲线 $y=y(x)$ 的拐点.

综上：$x=0$ 是 $y(x)$ 的极小值点，也是最小值点，最小值为 $y(0)=0$；$(3,1-\ln 2)$ 是曲线 $y=y(x)$ 的拐点，$y(x)$ 在 $(-1,0)$ 上严格单调降，在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增，曲线 $y=y(x)$ 在 $(-1,3)$ 上是严格凸的，在 $(3,+\infty)$ 上是严格凹的.

6. （10分）设 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上五阶可导，且有 $f(\frac{1}{3})=f(\frac{2}{3})=f(1)=f'(1)=f''(1)=0$，证明：对任意给定的 $x\in[0,1]$，都存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)^3$.

证明：（采用k值法）对任意给定的 $x\in[0,1]$，令 k 满足等式 $f(x)=\frac{k}{5!}(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)^3$.

下面证 $k=f^{(5)}(\xi),\xi\in(0,1)$.

构造辅助函数 $F(t)=f(t)-\frac{k}{5!}(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})(t-1)^3,t\in[0,1]$，（把x换成t）

则有 $F(x)=F(\frac{1}{3})=F(\frac{2}{3})=F(1)=0$，当 x 不等于 $\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$ 时，由罗尔定理，存在不相同的三个点 $\xi_1^{(1)},\xi_2^{(1)},\xi_3^{(1)}\in(0,1)$，使得 $F'(\xi_1^{(1)})=F'(\xi_2^{(1)})=F'(\xi_3^{(1)})=0$.

又 $F'(t)=f'(t)-\frac{k}{5!}(t-\frac{2}{3})(t-1)^3-\frac{k}{5}(t-\frac{1}{3})(t-1)^3-\frac{3k}{5}(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})(t-1)^2$，注意到 $F'(1)=0$，且 $F'(t)$ 还满足罗尔定理的条件，再由罗尔定理得，存在不相同的三个点 $\xi_1^{(2)},\xi_2^{(2)},\xi_3^{(2)}\in(0,1)$，使得 $F''(\xi_1^{(2)})=F''(\xi_2^{(2)})=F''(\xi_3^{(2)})=0$. 又因为

$$F''(t)=f''(t)-\frac{k}{5!}(t-1)^3-\frac{3k}{5}(t-\frac{2}{3})(t-1)^2-\frac{k}{5}(t-1)^3-\frac{3k}{5}(t-\frac{1}{3})(t-1)^2$$
$$-\frac{3k}{5!}(t-\frac{2}{3})(t-1)^2-\frac{3k}{5}(t-\frac{1}{3})(t-1)^2-\frac{6k}{5}(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})(t-1)$$

，注意到 $F''(1)=0$，且 $F''(t)$ 还满足罗尔定理的条件，再由罗尔定理得，存在不相同的三个点 $\xi_1^{(3)},\xi_2^{(3)},\xi_3^{(3)}\in(0,1)$，使得 $F'''(\xi_1^{(3)})=F'''(\xi_2^{(3)})=F'''(\xi_3^{(3)})=0$. 对 $F'''(t)$ 再两次运用罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F^{(5)}(\xi)=0$，而 $F^{(5)}(t)=f^{(5)}(t)-k$，所以 $F^{(5)}(\xi)=f^{(5)}(\xi)-k=0$，即得 $k=f^{(5)}(\xi),\xi\in(0,1)$

当 x 分别等于 $\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$ 时，可任取 $\xi\in(0,1)$，$f(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)^3$ 恒成立.

综上，对 $\forall x\in[0,1]$，都存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)^3$.

7. （10分）设 $f(x)$ 是有限开区间 (a,b) 上的有界的凸函数，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

证明：因为 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 上的凸函数，由凸函数的性质1知，$f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数，如果 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x),\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 这两个极限都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上就是一致连续的.

所以只需证$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a+0),\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b-0)$这两个极限都存在.

首先由题设条件知$f(x)$有界，即对$\forall x\in(a,b),\exists M>0$，有$|f(x)|\le M$.

任意取定$x_0\in(a,b)$，由凸函数的性质知，$F(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$在$(a,x_0)$? (x_0,b)上是单调增加的，

再任意取定$x_2\in(x_0,b)$，对$\forall x\in(x_2,b)$有$F(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\dfrac{M-f(x_0)}{x_2-x_0}$，即$F(x)$在$(x_2,b)$上单调上升有上界，故$\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$存在，不妨记$\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=A$，所以

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=\lim_{x\to b^-}[(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)]=\lim_{x\to b^-}[(x-x_0)F(x)+f(x_0)]=(b-x_0)A+f(x_0)$$

即$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b-0)$存在. 下面再证$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a+0)$存在.

再任意取定$x_1\in(a,x_0)$，对$\forall x\in(a,x_1)$有

$$F(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\ge\frac{f(x_0)-M}{x_0-x_1},\forall x\in(a,x_1)$$

所以当$x\to a^+$时，$F(x)$单调下降有下界，故$\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$存在，记为$B$, 则

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}[(x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)]=\lim_{x\to a^+}[(x-x_0)F(x)+f(x_0)]=(a-x_0)B+f(x_0)$$

即$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a+0)$存在. 综上$f(x)$在$(a,b)$上一致连续.

8. （10分）试用有限覆盖定理证明：设函数$f(x)$在$[a,b]$上无界，则必存在$[a,b]$上的某一点, 使得$f(x)$在该点的任意邻域内无界.

证明：（反证法）若对任意$x\in[a,b]$，存在$\delta_x>0$，使得$f(x)$在邻域 ?(x,δ_x) ? $[a,b]$中有界，令$H=\{$?$(x,\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$， 则集合$H$即构成了$[a,b]$的一个开覆盖, 由有限覆盖定理知，存在有限子覆盖 ? $=\{$?$(x_i,\delta_{x_i})\mid x_i\in[a,b], i=1,2,$?$,n\}\subset H$，使得 ? 覆盖了$[a,b]$.

由于$f(x)$在每个邻域 ?(x_i,δ_{x_i}) ? $a,b], i=1,2,$? 内都有界，因此$f(x)$在$[a,b]$上有界，这与函数$f(x)$在$[a,b]$上无界矛盾，故存在$[a,b]$上的某一点, 使得$f(x)$在该点的任意邻域内无界.