厦门大学《数学分析-II》课程期末试卷

经济学院 国际金融、经济、统计专业

试卷类型：（A 卷）　　　考试时间:2021 年 6 月 15 日

1.（10 分）求函数 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$,在$x=0$处的幂级数展开式，并求 $f^{(n)}(0), \mathrm{n}=1,2,\cdots$.

2. （10 分）判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}-2)^{\lambda}}$的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

3. （20 分）证明: (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$在$(0,1)$上一致收敛于和函数$S(x)$,

(2) $S(x)$在$(0,1)$上具有连续导数.

4. （15 分）求幂级数 $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数$S(x)$，并求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$的和.

5. （20 分）设函数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}(0\le x\le 1)$，且已知$f(1)=\frac{\pi^2}{6}$,

（1）证明: $f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=f(1),(0\le x\le 1)$;

(2) 求积分 $\int_0^1[\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}]dx$.

6. （25 分）(1) 将周期为2π 的函数$f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x),x\in[0,2\pi]$展开成傅里叶级数，并由此求出数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的值.

(2) 分别利用（1）中的傅里叶展开式和 Parseval 等式两种方法，求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

参考答案

1．求函数 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$,在$x=0$处 的幂级数展开式，

并求 $f^{(n)}(0), \mathrm{n}=1,2,\cdots$.

解：$\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}$， $x\in[-1,1]$

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n})dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

$x\in[-1,1]$

$$f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n}=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}-\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n}$$

$$=\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}, x\in[-1,1]$$

由幂级数展开的唯一性知，$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=a_n, n=0,1,2,\cdots$，从而有

$$\frac{f^{2n+2}(0)}{(2n+2)!}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)},\quad n=0,1,\cdots,$$

即有 $f^{(2n+2)}(0)=(-1)^n(2n)!$，$f^{(2n+1)}(0)=0$，$n=0,1,\cdots$

2. 判断数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}-2)^{\lambda}}$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

解： (i)当 $\lambda\le 0$ 时，通项 $u_n=\frac{(-1)^n}{(\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}-2)^{\lambda}}$ 不趋于 0，所以级数发散；

(ii) 当 $\lambda>0$ 时 $u_n=\frac{1}{(\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}-2)^{\lambda}}$ 单调递减且 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}-2)^{\lambda}}=0$,

由 Leibniz 级数判别法知，级数收敛；

(iii) 再考察是否绝对收敛 ，对 $\forall\lambda>0$,

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^{2\lambda}}}=\lim_{n\to\infty}|\frac{(-1)^n}{(\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}-2)^{\lambda}}|\Big/\frac{1}{n^{2\lambda}}=1$

故当 $2\lambda>1$,即 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛，

当 $2\lambda\le 1$，即 $0<\lambda\le\frac{1}{2}$ 时，级数不是绝对收敛，但由(ii)知，它是收敛的，

所以级数是条件收敛.

综上，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}-2)^{\lambda}}=\begin{cases}\text{绝对收敛} & \lambda>\frac{1}{2}\\ \text{条件收敛} & 0<\lambda\le\frac{1}{2}\\ \text{发散} & \lambda\le 0\end{cases}$.

3. 证明: (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $S(x)$,

(2) $S(x)$ 在 $(0,1)$ 上具有连续导数.

证明：(1) 由于 (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 一致收敛，(ii) 对任意固定的 $x\in(0,1)$,

$\frac{x^n}{1+x^n}=1-\frac{1}{1+x^n}$ 关于 n 单调递减，且 $x\in(0,1)$ $\frac{x^n}{1+x^n}\le 1$, 即一致有界，

由 $Abel$ 判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛, 记其和函数为 $S(x)$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛 $S(x)$.

(2) 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$, 任取 $x_0\in(0,1)$, 则存在 $[a,b]\subset(0,1)$, 使得 $x_0\in(a,b)$,

由(1)知 (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$ 在 $(0,1)$ 上收敛，因而 x_0 是收敛点；

(ii) $u_n'(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2}$ 在$[a,b]$上连续，(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在$[a,\mathrm{b}]$上一致收敛.

事实上$|u_n'(x)|\le|(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2}|\le x^{n-1}\le b^{n-1}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b^{n-1}$ 收敛，由 M 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在$[a,\mathrm{b}]$上一致收敛. 由函数项级数一致收敛的可微性定理，原级数可逐项求导，即 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{(1+x^n)^2}$，$x\in(a,b)$

且$S'(x)$在(a,b)上连续，因而在$x_0\in[a,\mathrm{b}]$处连续，由x_0的任意性，$S'(x)$在$(0,1)$在上连续.

4. 求幂级数 $x+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数$S(x)$，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$ 的和.

解：首先求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 的收敛域.

设$u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=|x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(n+1)^2-1}\Big/\frac{1}{4n^2-1}=|x^2|\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}=|x^2|$$

当$|x^2|<1$时即$|x|<1$收敛，当$|x^2|>1$时即$|x|>1$发散.

当$x=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$为莱布尼茨级数，收敛，

当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{4n^2-1}$为莱布尼茨级数，收敛，

故幂级数 $x+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 的收敛域为$[-1,1]$.

其次来求$2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 的和函数$S_1(x)$，当$x\in(-1,1)$时，

$$S_1(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n}dt$$

$$=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n-2}dt-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n}dt$$

$$=x^2\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n-2}]\mathrm{d}t-\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n}]\mathrm{d}t$$

$$=x^2\int_0^x\frac{1}{1+\mathrm{t}^2}\mathrm{d}t+\int_0^x[\frac{1}{1+\mathrm{t}^2}-1]\mathrm{d}t=x^2\arctan x+\arctan x-x$$

由于 $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$ 当 $x=\pm1$ 时，都收敛，

$$S_1(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}=(1+x^2)\,arctanx-x,\quad x\in[-1,1]$$

所以，$S(x)=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$

$$=x+x^2\arctan x+\arctan x-x$$

$$=(1+x^2)\arctan x,\quad x\in[-1,1]$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}=\frac{1}{2}S_1(1)=\frac{1}{2}[2\arctan1-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

5. （20 分）设函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}(0\le x\le1)$，且已知 $f(1)=\frac{\pi^2}{6}$，

（1）证明：$f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=f(1),(0\le x\le1)$；

(2) 求积分 $\int_0^1[\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}]dx$.

解：(1) 令 $F(x)=\begin{cases}f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)-f(1) & x\in(0,1)\\ 0 & x=0,1\end{cases}$

易证 $\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to1^-}F(x)=0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

且对 $x\in(0,1)$ 有 $F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\dfrac{\ln x}{1-x}$

$$=[f'(x)+\frac{\ln(1-x)}{x}]-[f'(1-x)+\frac{\ln x}{1-x}],$$

因为 $\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-x^n}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}=-f'(x)$

所以 $f'(x)+\dfrac{\ln(1-x)}{x}=0$，

令 $t=1-x, f'(1-x)+\dfrac{\ln x}{1-x}=f'(t)+\dfrac{\ln(1-t)}{t}=0$.

因而 $F'(x)=0, x\in(0,1)$，故 $F(x)=c, x\in(0,1)$

又因为 $F(x)$在$[0,1]$上连续，故 $F(x)=c=F(1)=0, x\in[0,1]$

$$F(1)=f(1)+f(0)+\ln x\ln(1-x)|_{x=1}-f(1)=0$$

即 $f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=f(1),(0\le x\le 1)$

(2) $\int_0^1[\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}]dx\,\underline{\underline{令t=2-x}}\,-\int_1^2\frac{\ln(2-t)}{t}dt=-\int_1^2\frac{\ln 2+\ln(1-\frac{t}{2})}{t}dt$

$$=-\int_1^2\frac{\ln 2}{t}dt-\int_1^2\frac{\ln(1-\frac{t}{2})}{t}dt=-\ln^2 2+\int_1^2\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{t}{2})^n}{t}dt$$

$$=-\ln^2 2+\int_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^{n-1}dt=-\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}\int_1^2 t^{n-1}dt$$

$$=-\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\frac{1}{2})=-\ln^2 2+f(1)-f(\frac{1}{2})$$

$$=-\ln^2 2+\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{6}-\ln^2 2)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2$$

其中：由（1）知 $F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})+f(1-\frac{1}{2})+\ln\frac{1}{2}\cdot\ln(1-\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{6}$

从而 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{6}-\ln^2 2)$.

$\int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} \int_1^2 t^{n-1} dt$，此处积分号与无穷和号可交换的依据是：

(i) $\frac{1}{2^n n} t^{n-1}$ 在 $[1,2]$ 上连续（或可积），(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} t^{n-1}$ 在 $[1,2)$ 上内闭一致收敛.

6. (1) 将周期为 2π 的函数 $f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x), x\in[0,2\pi]$ 展开成傅里叶级数，并由此求出数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的值.

(2) 分别利用 (1) 中的傅里叶展开式和 Parseval 等式两种方法，求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

解：首先将 $f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x), x\in[0,2\pi]$ 进行周期延拓，周期延拓后的函数记为 $\tilde{f}(x)$，则 $\tilde{f}(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的周期函数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n^2}, n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,\cdots$$ (因为 $\tilde{f}(x)\sin nx$ 是奇函数)

又由于 $\tilde{f}(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是分段光滑的且连续，故由傅里叶级数的收敛性定理得

$$\tilde{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx, x\in(-\infty,+\infty)$$

限制在 $[0,2\pi]$，则有

$$f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx, x\in[0,2\pi] \qquad (1)$$

令 $x=0$，$\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=0$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$..

(2) (i) 利用（1）中的傅里叶展开式，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx$在$[0,2\pi]$上一致收敛，由函数项级数的可积性定理知，（1）中的傅里叶展开式可逐项积分，于是有

$$\int_0^t f(x)dx=\int_0^t\frac{1}{4}x(2\pi-x)dx=\frac{\pi^2}{6}t-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^t\cos nxdx, t\in[0,2\pi]$$

$$\frac{\pi^2}{6}t-\frac{\pi}{4}t^2+\frac{1}{12}t^3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin n\mathrm{t},\quad t\in[0,2\pi]$$

同理，上式可再逐项积分两次得

$$\frac{\pi^2}{36}t^3-\frac{\pi}{48}t^4+\frac{1}{240}t^5=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}(t-\frac{\sin n\mathrm{t}}{n}),\quad t\in[0,2\pi]$$

再令$x=2\pi$，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

(ii) 利用 Parseval 等式，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

由（1）知 $f(x)=\frac{1}{4}x(2\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx, x\in[0,2\pi]$

右端的傅里叶级数在$[0,2\pi]$上一致收敛，则 Parseval 等式成立，

即
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{1}{4}x(2\pi-x)]^2dx=\frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{3})^2+\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{-1}{n^2})^2+0^2]$$

$$\frac{1}{16\pi}[4\pi^2\frac{x^3}{3}-4\pi\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}]_0^{2\pi}=\frac{\pi^4}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{\pi^4}{15}=\frac{\pi^4}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$ 从而 $$\frac{\pi^4}{15}=\frac{\pi^4}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{15}-\frac{\pi^4}{18}=\frac{\pi^4}{90}.$$