

一、(10 分) 证明: 函数  $f(x, y) = \frac{1}{1-xy}$  在  $D$  上连续, 但在  $D$  上不一致连续.

二、(15 分) 函数  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  的偏导函数在原点是否连续?

$f(x, y)$  在原点是否可微?

三、(10 分) 定义  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 证明: 除原点外, 函数  $u(x, y, z) = \frac{1}{r(x, y, z)}$  满足 Laplace

方程  $\Delta u = 0$ , 其中  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ .

四、(10 分) 设  $F(x-y, y-z) = 0$  确定  $z$  是  $x, y$  的函数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

五、(10 分) 已知  $\begin{cases} x = e^u + u \sin v \\ y = e^u - u \cos v \end{cases}$ , 求偏导数  $u_x, u_y, v_x, v_y$ .

六、(10 分) 设  $a > 0$ , 证明曲面  $xyz = a^3$  上任一点的切平面与坐标平面围得的四面体体积都相等.

七、(10 分) 求  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x - y$  的极值.

八、(15 分) 求函数  $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$  的最大值, 其中

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2, x > 0, y > 0, z > 0,$$

并利用这一结果证明: 对任意正数  $a, b, c$ , 成立  $abc^3 \leq 27 \left( \frac{a+b+c}{5} \right)^5$ .

九、(10 分) 设  $\varphi(x)$  在  $(-1, 1)$  内有连续导数,  $\varphi(0) = 0$ ,  $|\varphi'(0)| < 1$ . 证明: 存在  $\delta > 0$ , 当  $x \in (-\delta, \delta)$

时, 有唯一的可微函数  $y = y(x)$  满足  $y(0) = 0$  以及  $x = y(x) + \varphi(y(x))$ .