厦门大学《数学分析 I》课程期中试卷

经院 经济、金融、统计专业国际试点班

试卷类型:(A 卷) 考试时间:2020 年 11 月 22 日

参考答案:

1. 证明:一切有理真分数 $\dfrac{m}{n}$(式中 m 及 n 为正整数,且 $0<m<n$)的集合无最小及最大元素,并求此集合的上确界和下确界.

证明:由 $\forall m,n\in N_{+}$, 且 $0<m<n$,有 $\dfrac{m+1}{n+1}>\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{m}{n}>\dfrac{m^2}{n^2}$,可见有理真分数中既没有最大数又没有最小数,因此一切有理真分数全体的集合中没有最小及最大元素.

由于(i)有理真分数 $0<\dfrac{m}{n}<1$,(ii) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $n_0=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$,则 $\dfrac{1}{n_0}$ 和 $\dfrac{n_0-1}{n_0}$ 都是有理真分数,且 $\dfrac{1}{n_0}<0+\varepsilon$, $\dfrac{n_0-1}{n_0}=1-\dfrac{1}{n_0}>1-\varepsilon$,由上、下确界定义(两条)知,有理真分数全体所构成的集合的上确界为 1.下确界为 0.

2. 用极限的定义"$\varepsilon-N$","$\varepsilon-\delta$"语言验证下列极限等式成立.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{4^n}=0$; (2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=-3$.

解: (1) 利用二项展开式 $(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$

令 $a=1,b=3$ 得,当 $n>3$ 时,有

$$4^n=(1+3)^n=1+n\cdot3+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot3^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot3^3+\cdots+3^n>\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot3^3,$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$,且当 $n>3$ 时,有

$$\left|\frac{n^2}{4^n}-0\right|=\left|\frac{n^2}{4^n}\right|\le\frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot3^3}=\frac{2n}{9(n-1)(n-2)}=\frac{2n}{9}\cdot\frac{1}{n^2-3n+2}$$

$$\le\frac{2n}{9}\cdot\frac{1}{n^2-3n}=\frac{2n}{9}\cdot\frac{1}{n(n-3)}=\frac{2}{9(n-3)}<\varepsilon$$

解得 $n>3+\frac{2}{9\varepsilon}$，取 $N=4+[\frac{2}{9\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，即有 $|\frac{n^2}{4^n}-0|<\varepsilon$

根据数列极限的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^n}=0$.

（2）对 $\forall\varepsilon>0$，$|\frac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}-(-3)|=|\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}+3|=|\frac{(x+2)}{x(x-2)}+3|$

$=|\frac{(3x-2)(x-1)}{x(x-2)}|$ 为将 $|f(x)-(-3)|$ 放大成 $\beta|x-1|$ 形式,

所以限制 $0<|x-1|<\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，则 $\min\limits_{\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}}|x(x-2)|=\frac{3}{4}$，$\max\limits_{\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}}|3x-2|=\frac{5}{2}$

所以 $|\frac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}+3|=|\frac{(3x-2)(x-1)}{x(x-2)}|\le\frac{5/2}{3/4}|x-1|=\frac{10}{3}|x-1|$

取 $\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{3\varepsilon}{10}\}$，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有

$|\frac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}-(-3)|<\varepsilon$，由函数极限定义，则 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x(x^2-3x+2)}=-3$.

3. 设数列满足 $0<x_0\le1, x_1=\frac{x_0}{2}, x_{n+1}=\frac{x_0-x_n^2}{2}, n\in N_+$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其极限值.

证明 1：由递归数列的定义知，

$$\forall n\in N_+, x_{n+1}=\frac{x_0-x_n^2}{2}\le\frac{x_0}{2}<\frac{1}{2}，且 x_{n+1}=\frac{x_0-x_n^2}{2}\ge\frac{x_0-\frac{x_0^2}{4}}{2}=\frac{x_0(1-\frac{x_0}{4})}{2}>0$$

即数列 $\{x_n\}$ 有界. 令 c 为满足 $x=\frac{x_0-x^2}{2}$ 这个等式的正实数，解得 $c=\sqrt{1+x_0}-1<\frac{1}{2}$.

下面我们用夹逼定理证明满足 $c=\frac{x_0-c^2}{2}$ 这个等式的 c 值，的确是数列 $\{x_n\}$ 的极限.

事实上，$0<|x_{n+1}-c|=|\frac{x_0-x_n^2}{2}-\frac{x_0-c^2}{2}|=|\frac{c^2-x_n^2}{2}|=\frac{(c+x_n)}{2}|x_n-c|<\frac{1}{2}|x_n-c|$

即 $0<|x_{n+1}-c|<\frac{1}{2}|x_n-c|\le(\frac{1}{2})^2|x_{n-1}-c|\le\cdots\le(\frac{1}{2})^n|x_1-c|=(\frac{1}{2})^n|\frac{x_0}{2}-c|$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n|\frac{x_0}{2}-c|=|\frac{x_0}{2}-c|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=0$

由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-c|=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$ 成立。

证明 2：利用导数判断单调性及单调有界定理来证明此数列的收敛性。

由递归数列的定义知 $\{x_n\}\subset(0,\frac{1}{2})$，递归函数为 $f(x)=\frac{x_0-x^2}{2}$，$x\in(0,\frac{1}{2})$ 其导数为

$f'(x)=-x<0$，因此递归数列 $\{x_n\}$ 不单调，但它的偶子列 $\{x_{2n}\}$ 和奇子列 $\{x_{2n-1}\}$ 却是单调的，且具有相反的单调性，又因为 $0<x_n<\frac{1}{2}$，数列有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n},\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$ 均存在，

不妨记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A,\quad\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=B$，由数列的递推式子 $x_{n+1}=\frac{x_0-x_n^2}{2}$，

令 $n=2k-1$，得 $x_{2k}=\frac{x_0-x_{2k-1}^2}{2}$，令 $k\to\infty$，两边取极限得 $A=\frac{x_0-B^2}{2}$

令 $n=2k$，得 $x_{2k+1}=\frac{x_0-x_{2k}^2}{2}$，令 $k\to\infty$，两边取极限得 $B=\frac{x_0-A^2}{2}$

联立方程 $\begin{cases}A=\dfrac{x_0-B^2}{2}\\ B=\dfrac{x_0-A^2}{2}\end{cases}$,解得 $A=B$,从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$，

由此得到递归数列收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_0-x_n^2}{2}=\frac{x_0-\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2}{2}\Rightarrow A=\frac{x_0-A^2}{2}$

解得 $A=\sqrt{1+x_0}-1=c$.

4. 利用数列和函数的性质和定理，求下列各式的极限

（1） 因为当 $n\geq1$ 时，因为 $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\leq\sqrt[n]{1-\frac{1}{2n}}\leq1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1$.

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{2n}}=1$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2[n\pi+(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)]$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1})=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

（3）$\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3+1)-3(1+x)}{(x+1)(x^3+1)}$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)-3(1+x)}{(x+1)(x^3+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^3+2)arc\sin\dfrac{1}{x}}{x^2-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^3+2)\cdot\dfrac{1}{x}}{x^2-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+\dfrac{2}{x}}{x^2-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x^3}}{1-\dfrac{\sin x}{x^2}}=3$，

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(2\dfrac{\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x})=1$，

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}})^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln[1+(\sqrt{\cos\frac{1}{x}})-1]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2[\sqrt{\cos\frac{1}{x}}-1]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{\cos\frac{1}{x}}+1}(\cos\frac{1}{x}-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2}{\sqrt{\cos\frac{1}{x}}+1}(\frac{1}{2x^2})}=e^{\frac{-1}{4}}$.

5. 试用柯西收敛定理证明：下面的数列收敛.

$$\{a_n\}=\{\frac{\cos(1!)}{1\cdot 2}+\frac{\cos(2!)}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\cos(n!)}{n\cdot(n+1)},n=1,2,\cdots\}$$

证明：对 $\forall\varepsilon>0,n,p\in N_+$,

$$|a_{n+p}-a_n|=|\frac{\cos[(n+1)!]}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos[(n+p)!]}{(n+p)(n+p+1)}|$$

$$\le\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\le(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+\cdots+(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1})$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}\le\frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0\Leftrightarrow$ 即对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,$ 当 $n>N$ 时，有 $|\dfrac{1}{n+1}|<\varepsilon$

从而对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall p\in N_+,$ 当 $n>N$ 时，有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

即 $\{a_n\}$ 是柯西列，从而 $\{a_n\}$ 收敛.

6. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增加，且 $f(a)>a,f(b)<b$，试用区间套定理证明：

至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=x_0$.

证明：首先构造闭区间套　令 $g(x)=f(x)-x,x\in[a,b]$，将 $[a,b]$ 二等分成 $[a,\dfrac{a+b}{2}],[\dfrac{a+b}{2},b]$，考察 $g(\dfrac{a+b}{2})$ 的符号，若 $g(\dfrac{a+b}{2})=0$，记 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，$g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=x_0$，命题得证，

若 $g(\frac{a+b}{2})<0$，则取 $[a,\frac{a+b}{2}]=[a_1,b_1]$，此时有 $g(a_1)>0,g(b_1)<0$，

若 $g(\frac{a+b}{2})>0$，则取 $[\frac{a+b}{2},b]=[a_1,b_1]$，此时有 $g(a_1)>0,g(b_1)<0$，

继续将 $[a_1,b_1]$ 二等分 $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}],[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$，再考察 $g(\frac{a_1+b_1}{2})$ 的符号，若等于 $g(\frac{a_1+b_1}{2})=0$，命题得证，若不等于 0，则取其中的一个子区间记为 $[a_2,b_2]$ 使其满足 $g(a_2)>0,g(b_2)<0$，按照这个规则一直将区间 $[a_2,b_2]$ 继续等分下去，从而得到闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$， $n\in N_+$，它满足：

（1）$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots\quad n\in N_+$，

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0;$，

(3) 对 $\forall[a_n,b_n]$， $n\in N_+$，有 $g(a_n)>0,g(b_n)<0$.

由区间套定理得，存在 ξ， $a_n\le\xi\le b_n,\forall n\in N_+$， a_n单调上升趋于ξ, b_n单调下降趋于ξ,，再由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调增加，且 $g(a_n)>0,g(b_n)<0$， 则有 $a_n<f(a_n)\le f(\xi)\le f(b_n)<b_n$

在此不等式的两端令 $n\to\infty$，即得 $f(\xi)=\xi$，即 $x_0=\xi\in(a,b)$，命题得证。

7. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$，证明： $f(x)$ 在 (a,b) 上能取到最小值.

证明：取定 $x_0,y_0\in(a,b)$，且满足 $a<x_0<\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}<y_0<b$，因为 $f(a+0)=+\infty$，由极限的保号性知，一定存在 $x_1\in(a,x_0)$，使得对任意的 $\forall x\in(a,x_1)$，都有 $f(x)>f(x_0)$.

同理， 因为 $f(b-0)=+\infty$，由极限的保号性知，一定存在 $x_2\in(y_0,b)$，使得对任意的 $\forall x\in(x_2,b)$，都有 $f(x)>f(x_0)$.

又因为 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，（因为 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$），由闭区间上连续函数的最值定理知，函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上一定存在最小值，设最小值点为 $\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，因为 $x_0\in[x_1,x_2]$，故有 $f(x_0)\ge f(\xi)$，且在 (a,x_1)和(x_2,b) 上，都有 $f(x)>f(x_0)$，因此对一切的 $x\in(a,b)$，都有 $f(x)>f(\xi)$，所以 $f(\xi)$ 是函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的最小值.

综上， $f(x)$ 在 (a,b) 上取到最小值.

附加题：（10 分）设 $a_1=1, a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{2a_{n-1}}, n\ge 2$.

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加趋于正无穷大.

（2）利用 stolz 定理，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-n}{\ln n}=\dfrac{1}{4}$

证明：(1)首先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

这是因为对 $\forall n\in N_+$, 有 $a_n>0$, 且 $a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{2a_{n-1}}>0$，即数列 $\{a_n\}$ 严格单调增，若 $\{a_n\}$ 有界，

则 $\{a_n\}$ 有正实数的极限. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\in R_+$，则有 $A=A+\dfrac{1}{2A}$ 成立，从而 $\dfrac{1}{A}=0$ 构成矛盾.

因此 $\{a_n\}$ 无界，因而有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

(2) 由 stolz 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a_n^2-n)-(a_{n-1}^2-(n-1))}{\ln n-\ln(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-a_{n-1}^2-1}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n-1}^2}}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{a_{n-1}^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)\ln(1+\frac{1}{n-1})}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{a_{n-1}^2}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}\qquad(\because\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}=\frac{1}{\ln e}=1)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{a_{n-1}^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)-(n-2)}{a_{n-1}^2-a_{n-2}^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{4a_{n-2}^2}}=\frac{1}{4}.$$