厦门大学《数学分析III》课程期中试卷

学院：经济学院　　　　　考试日期　2018.11.18

一、（15分）设 $z=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，而 $x=\dfrac{-u-\sqrt{3}v}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}u+v}{2}$，证明：

（1）$(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2=(\dfrac{\partial z}{\partial u})^2+(\dfrac{\partial z}{\partial v})^2$；　（2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

二、（15分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y})=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，证明：

（1）$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；　（2）$x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$.

三、（15分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性及一阶偏导数的连续性.

四、（10分）设 $u=f(x,y)$，$g(x,y,z)=0$，$h(x,z)=0$，其中各函数都具有连续的偏导数，且 $g_y\neq 0$，$h_x\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

五、（10分）设 $z=f(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=f(x,y)$ 的极值点和极值.

六、（20分）（1）求旋转椭球面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程；

（2）求旋转椭球面 $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 在第一卦限上一点，使该点处的切平面在三个坐标轴的截距平方和最小。

七、（15分）如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D\subset R^2$ 上连续，证明：$f(x,y)$ 在 D 上有界，且能取得最大值与最小值.