厦门大学《数学分析三》课程试卷

_____________学院(系)________年级__________专业

主考教师：庄平辉　试卷类型：（A 卷）　2019.1.15

一、（8 分）计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$ 分，其中为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$（$0\le t\le 2\pi$）.

二、（8 分）计算二次积分 $I=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

三、（8 分）设 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=9\quad(z\ge 0)$，取上侧，计算 $I=\oiint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

四、（8 分）计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$，方向为逆时针方向.

五、（8 分）计算第一型曲面积分：$\iint\limits_S (x^2+y^2-z)\mathrm{d}S$，其中 S 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界曲面.

六、（10 分）计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:-1\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

七、（10 分）计算三重积分 $I=\iiint\limits_V [(x+y)^2+(y+z)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

八、（10 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分的下侧.

九、（10 分）若（1）对任意 $A>a$，含参变量正常积分 $\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}y$ 对参变量 x 在 I 上一致有界，即存在正数 M，对一切 $A>a$ 及一切 $x\in I$，都有 $\left|\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}y\right|\le M$；（2）对每一个 $x\in I$，$g(x,y)$ 为 y 的单调函数，且当 $y\to+\infty$ 时，对参变量 x，$g(x,y)$ 一致地收敛于 0.

证明：含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 I 上一致收敛.

十、（10 分）证明：（1）含参变量反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+\alpha^2x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛；（2）求 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan(\alpha x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$，$\alpha\ge 0$.

十一、（10 分）计算第二型曲面积分 $\iint\limits_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 在 $z\ge 0$ 部分，方向取下侧.