厦门大学《数学分析》课程期中试卷答案

试卷类型：（A 卷）　　　考试时间：2022.11.13

一、（10 分）计算下列各题：

（1）计算重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

解：由于 $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1$，则 $\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le|x+y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$，

对于任意的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有 $\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$，由极限定义，有

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$。

或者，由于 $\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le 1$，则 $0\le\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le|x+y|\le|x|+|y|$，由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)=0$ 及夹逼准则，有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$

（2）设 $z=\arctan(xy), y=\mathrm{e}^x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+(xy)^2}\cdot y+\dfrac{1}{1+(xy)^2}\cdot x\cdot\mathrm{e}^x=\dfrac{\mathrm{e}^x(1+x)}{1+x^2\mathrm{e}^{2x}}$

二、（10 分）设二元函数 $F(x,y)$ 存在二阶连续偏导数，且方程 $F(x,y)=0$ 满足隐函数存在定理的条件，求其所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数.

解：方程 $F(x,y)=0$ 两端关于 x 求导，有

$$F_x+F_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

$F_x+F_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 两端继续关于 x 求导，

$$F_{xx}+F_{xy}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(F_{yx}+F_{yy}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_y\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{F_{xx}+F_{xy}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(F_{yx}+F_{yy}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{F_y}$$

$$=-\frac{F_{xx}+F_{xy}\cdot(-\frac{F_x}{F_y})+(F_{yx}+F_{yy}\cdot(-\frac{F_x}{F_y}))\cdot(-\frac{F_x}{F_y})}{F_y}$$

$$=\frac{-F_{xx}F_y{}^2+2F_{xy}F_xF_y-F_{yy}F_x{}^2}{F_y{}^3}。$$

三、（10 分）求方程组 $\begin{cases}u^3+xv=y\\ v^3+yu=x\end{cases}$ 所确定的隐函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$.

解：方程组 $\begin{cases}u^3+xv=y\\ v^3+yu=x\end{cases}$ 两端关于 x 求导，有

$$\begin{cases}3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+v+x\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ 3v^2\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=1\end{cases},$$

当 $\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix}=9u^2v^2-xy\neq 0$ 时，解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{9u^2v^2-xy}\begin{vmatrix}-v & x\\ 1 & 3v^2\end{vmatrix}=\frac{-3v^3-x}{9u^2v^2-xy}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{9u^2v^2-xy}\begin{vmatrix}3u^2 & -v\\ y & 1\end{vmatrix}=\frac{3u^2+vy}{9u^2v^2-xy}。$$

四、（10 分）求球面 $x^2+y^2+z^2=6$ 与抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在点 $(1,1,2)$ 处的切线方程和法平面方程.

解：令 $G(x,y,z)=x^2+y^2-z$，则

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 2y & -1\end{vmatrix}=-2y-4yz,\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,1,2)}=-10;$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2z & 2x\\ -1 & 2x\end{vmatrix}=4xz+2x,\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,1,2)}=10;$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=0\text{，}\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1,2)}=0\text{.}$$

于是，所求的切线方程为$\dfrac{x-1}{-10}=\dfrac{y-1}{10}=\dfrac{z-2}{0}$或$\begin{cases}x+y=2\\ z=2\end{cases}$，

法平面方程为　　$-10(x-1)+10(y-1)=0$，即$x-y=0$.

五、（10 分）设函数$z=z(x,y)$由方程$f(x^2-y^2,y^2-z^2,z^2-x^2)=0$所确定，其中$f$具有连续的一阶偏导数，且$f_3-f_2\neq 0$，求$\mathrm{d}z$，并证明：当$xy\neq 0$时，$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{z}$.

解：式子$f(x^2-y^2,y^2-z^2,z^2-x^2)=0$两边微分，得

$$f_1\cdot(2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y)+f_2(2y\mathrm{d}y-2z\mathrm{d}z)+f_3(2z\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}x)=0\text{，}$$

则$\mathrm{d}z=\dfrac{x(f_3-f_1)}{z(f_3-f_2)}\mathrm{d}x+\dfrac{y(f_1-f_2)}{z(f_3-f_2)}\mathrm{d}y$.

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x(f_3-f_1)}{z(f_3-f_2)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y(f_1-f_2)}{z(f_3-f_2)}$.

当$xy\neq 0$时，$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f_3-f_1}{z(f_3-f_2)}+\dfrac{f_1-f_2}{z(f_3-f_2)}=\dfrac{1}{z}$.

六、(10 分)讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在$(0,0)$点处的可微性和偏导函数在$(0,0)$点的连续性.

解：$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}0=0.$

因为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\text{，}$$

而$\left|\dfrac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\left|\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，由$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0$及夹

逼极限准则得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

即 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，也即

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}).$$

因此，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

又 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f_y(x,y)=x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

注意到，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{2|x|}-\frac{x^3}{|x|^3}\cos\frac{1}{2|x|})$，$\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=y}}f_y(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}(y\sin\frac{1}{2|y|}-\frac{y^3}{|y|^3}\cos\frac{1}{2|y|})$ 均不存在，所以，偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

七、(10 分) 设 $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$，$(x,y)\in D=\{(x,y)\big|0<x\le 1,0<y\le 1\}$，证明：$f(x,y)$ 在 D 上连续，但不一致连续.

证明：对于任意的 $(x_0,y_0)\in D$，由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in D}}f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in D}}\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{x_0^2+y_0^2},$$

故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

因为 $(x_0,y_0)\in D$ 是任意的，所以，$f(x,y)$ 在 D 上连续.

取 $\varepsilon_0=1$，无论 $0<\delta<1$ 如何小，取 $x_1=\frac{\delta}{\sqrt{2}},y_1=\frac{\delta}{\sqrt{2}}$，$x_2=\frac{\delta}{2\sqrt{2}}$，$y_2=\frac{\delta}{2\sqrt{2}}$，

则 $$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\frac{\delta^2}{8}+\frac{\delta^2}{8}}=\frac{\delta}{4}<\delta.$$

但 $$\left|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)\right|=\frac{1}{\sqrt{\frac{\delta^2}{8}+\frac{\delta^2}{8}}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{2}}}=\frac{1}{\delta}>1=\varepsilon_0.$$

故函数 $f(x,y)$ 在 D 上不一致连续.

八、（10 分）求包含在椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c}\le 1$ 内长方体的最大体积.

$$\frac{2}{3}\lambda+\frac{2\lambda x^2}{a^2}=0, \tag{0.4}$$
$$\frac{2}{3}\lambda+\frac{2\lambda y^2}{a^2}=0, \tag{0.5}$$
$$\frac{2}{3}\lambda+\frac{2\lambda z^2}{a^2}=0. \tag{0.6}$$

解得 $\lambda=0$ 或者 $(x,y,z)=\frac{\sqrt{3}}{3}(a,b,c)$ 和 $\lambda=\sqrt{3}abc$. 由于 $V(x,y,z)=8xyz$ 在椭球面上一定有最值，而 $\lambda=0$ 时 $V=8xyz=\frac{2}{3}\lambda=0$ 不可能是最大值，故 $\lambda=\sqrt{3}abc$ 对应到最大值，即最大体积为 $V=8xyz=\frac{2}{3}\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{3}abc$.

九、（10 分）证明：曲面 $\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_1}=1$ 与 $\frac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_2}=1$ 交线处的切平面互相垂直，其中 a,b,c 是给定的实数，$\lambda_1\ne\lambda_2$，$\lambda_1,\lambda_2\ne a^2,b^2,c^2$.

参考答案：考虑任意由 $\lambda_i, i=1,2, \lambda_1 \neq \lambda_2$, 决定的两个曲面。设

$$F_i(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2-\lambda_i} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_i} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_i} - 1,$$

两曲面在 $(x_0.y_0.z_0)$ 处的法向量由

$$\nabla F_i(x_0.y_0.z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2-\lambda_i}, \frac{2y_0}{b^2-\lambda_i}, \frac{2z_0}{c^2-\lambda_i}\right)$$

给出。计算

$$\frac{1}{4}\langle\nabla F_1, \nabla F_2\rangle(x_0.y_0.z_0) = \frac{x_0^2}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)} + \frac{y_0^2}{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)} + \frac{z_0^2}{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)}.$$

另一方面，

$$F_i(x_0,y_0,z_0) = \frac{x_0^2}{a^2-\lambda_i} + \frac{y_0^2}{b^2-\lambda_i} + \frac{z_0^2}{c^2-\lambda_i} - 1 = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &= F_1(x_0,y_0,z_0) - F_2(x_0,y_0,z_0) \\ &= (\lambda_1-\lambda_2)\left[\frac{x_0^2}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)} + \frac{y_0^2}{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)} + \frac{z_0^2}{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)}\right]. \end{aligned}$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以 $\langle\nabla F_1, \nabla F_2\rangle(x_0.y_0.z_0) = 0$。这说明两曲面正交。

十、（10 分）设 $f(x,y)$ 为连续函数，且当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有 $f(x,y)>0$ 及 $f(cx,cy)=cf(x,y)$ (对任意的 $c>0$). 证明：（1） $f(0,0)=0$；（2）存在 $\alpha>0, \beta>0$，使得 $\alpha\sqrt{x^2+y^2} \le f(x,y) \le \beta\sqrt{x^2+y^2}$.

证明：（1）由连续性假设，$\lim\limits_{c\to0^+} f(cx,cy) = \lim\limits_{c\to0^+} cf(x,y) = 0$，$\lim\limits_{c\to0^+} f(cx,cy) = f(0,0)$，故 $f(0,0)=0$.

（2）令 $D:\{(x,y)\big|x^2+y^2=1\}$. 显然 D 是有界集.

对于任意的 $P_0(x_0,y_0)\in D$，显然 $\bigcup(P_0,\delta)$ 中都有异于 $P_0(x_0,y_0)$ 的 D 中的点，同时也有不属于 D 中的点，故 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 为 D 的边界，也是聚点. 所以，D 中的聚点都属于 D.

根据有界闭集上的连续函数必取到最大值和最小值，故 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2=1$ 上必取得最大值和最小值.

（3）当 $(x,y)=(0,0)$ 时，不等式显然成立.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，取 $c=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，由 $f(cx,cy)=cf(x,y)$ 可得

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y),$$

所以，$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}).$$

因为 $f(u,v)$ 为连续函数，则在 $u^2+v^2=1$ 上必取得最小值 β 和最大值 α .

由于 $u^2+v^2=1$ 不包含原点，则 $\beta\ge\alpha>0$.

故 $$\alpha\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{x^2+y^2}\,f(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})\le\beta\sqrt{x^2+y^2}.$$