



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی

تحلیل نظریه اطلاعاتی محرمانگی تفاضلی موضعی و کاربردهای آماری آن

نگارش

فیروزه ابریشمی

استاد راهنما

دکتر جواد ابراهیمی بروجنی

۱۴۰۴ اسفند

الله اعلم

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

این پایان نامه به عنوان تحقیق بخشی از شرایط دریافت درجه کارشناسی ارشد است.

عنوان: تحلیل نظریه اطلاعاتی محرمانگی تفاضلی موضعی و کاربردهای آماری آن

نگارش: فیروزه ابریشمی

کمیته ممتحنین

استاد راهنما: دکتر جواد ابراهیمی امضاء:

بروجنی

استاد مشاور: استاد مشاور امضاء:

استاد مدعو: استاد ممتحن امضاء:

تاریخ:



اظهارنامه

(اصالت متن و محتوای پایان نامه کارشناسی ارشد)

عنوان پایان نامه: تحلیل نظریه اطلاعاتی محترمانگی تفاضلی موضعی و کاربردهای آماری آن

استاد مشاور: استاد مشاور

استاد راهنما: دکتر جواد ابراهیمی بروجنی

این جانب فیروزه ابریشمی اظهار می دارد:

۱. متن و نتایج علمی ارائه شده در این پایان نامه اصیل بوده و زیرنظر استادان نام برده شده در بالا تهیه شده است.
۲. متن پایان نامه به این صورت در هیچ جای دیگری منتشر نشده است.
۳. متن و نتایج مندرج در این پایان نامه، حاصل تحقیقات این جانب به عنوان دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف است.
۴. کلیه مطالبی که از منابع دیگر در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته، با ذکر مرجع مشخص شده است.

نگارنده: فیروزه ابریشمی

تاریخ:

امضاء:

نتایج تحقیقات مندرج در این پایان نامه و دستاوردهای مادی و معنوی ناشی از آن (شامل فرمولها، توابع کتابخانه‌ای، نرم‌افزارها، سخت‌افزارها و مواردی که قابلیت ثبت اختراع دارد) متعلق به دانشگاه صنعتی شریف است. هیچ شخصیت حقیقی یا حقوقی بدون کسب اجازه از دانشگاه صنعتی شریف حق فروش و ادعای مالکیت مادی یا معنوی بر آن یا ثبت اختراق از آن را ندارد. همچنین، کلیه حقوق مربوط به چاپ، تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و نظائر آن در محیط‌های مختلف اعم از الکترونیکی، مجازی یا فیزیکی برای دانشگاه صنعتی شریف محفوظ است. نقل مطلب با ذکر مأخذ بلامانع است.

نگارنده: فیروزه ابریشمی

تاریخ:

امضاء:

استاد راهنما: دکتر جواد ابراهیمی بروجنی

تاریخ:

امضاء:

چکیده

کلیدواژه‌ها:

اول

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۲	۱-۱ اهمیت داده‌ها و ضرورت حفظ حریم خصوصی	۲
۴	۱-۱-۱ محرمانگی تفاضلی (Differential Privacy)	۴
۷	۱-۱-۲ محرمانگی تفاضلی موضعی (Local Differential Privacy)	۷
۸	۲-۱ کارهای پیشین و مرور ادبیات	۸
۸	۲-۱-۱ آغازگرها: از پیمایش‌های آماری تا تعریف مدرن محرمانگی	۸
۱۲	۲-۱-۲ چالش سودمندی و موازنۀ دقت-محرمانگی	۱۲
۱۳	۲-۱-۳ نگاهی آماری به LDP: چارچوب مینیماکس و حدود بنيادین	۱۳
۱۴	۲-۱-۴ دسته‌بندی پروتکل‌های موضعی: تعاملی و غیرتعاملی	۱۴
۱۵	۳-۱ بیان مسئله و اهداف پژوهش	۱۵
۱۶	۳-۱-۱ رویکرد تحلیل: f-واگرایی‌ها به عنوان زبان مشترک	۱۶
۱۶	۳-۱-۲ اهداف و ساختار پژوهش	۱۶
۱۷	۴-۱ ساختار پایان‌نامه	۱۷
۱۹	۲ پیش‌نیازها	۲
۱۹	۱-۱ محرمانگی تفاضلی مرکز (CDP)	۱۹
۱۹	۱-۱-۱ مدل اعتماد و تعریف رسمی	۱۹
۲۱	۱-۱-۲ مکانیزم‌های پایه در CDP	۲۱

۲۲	۳-۱-۲ خواص کلیدی محramانگی تفاضلی
۲۲	۴-۱-۲ محدودیت مدل متمرکز
۲۳	۲-۲ محramانگی تفاضلی موضعی
۲۳	۱-۲-۲ مقدمه و گذار از مدل متمرکز
۲۳	۲-۲-۲ تعاریف رسمی و مدل‌های محاسباتی
۲۶	۳-۲-۲ مکانیزم‌های پایه در α -LDP
۲۹	۴-۲-۲ چالش سودمندی در مدل موضعی
۲۹	۳-۲ f-واگرایی‌ها
۳۰	۱-۳-۲ تعریف f-واگرایی
۳۰	۲-۳-۲ نمونه‌های مهم f-واگرایی
۳۱	۳-۳-۲ ارتباط f-واگرایی‌ها با یکدیگر
۳۱	۴-۲ مبانی آماری و نظریه اطلاعات
۳۲	۱-۴-۲ معیارهای فاصله اطلاعاتی
۳۲	۲-۴-۲ ریسک مینیماکس
۳۳	۵-۲ آزمون فرض آماری و روش تقلیل
۳۳	۱-۵-۲ آزمون فرض دودویی
۳۴	۲-۵-۲ تقلیل تخمین به آزمون (روش بسته‌بندی)
۳۴	۳-۵-۲ نامساوی‌های کران پایین
۳۶	۳ تحلیل‌های مبتنی بر انقباض و نرخ‌های مینیماکس
۳۶	۱-۳ مقدمه
۳۶	۲-۳ محramانگی به عنوان انقباض اطلاعاتی
۳۸	۱-۲-۳ انقباض در فاصله واریانس کل
۳۸	۳-۳ تحلیل نرخ‌های مینیماکس با استفاده از انقباض
۳۹	۴-۳ مطالعه موردی: تخمین میانگین

۳۹	۵-۳ محدودیت‌های تحلیل کلاسیک
۴۱	۴ همارزی α -LDP و انقباض E_γ -واگرایی
۴۱	۴-۱ مقدمه و انگیزه
۴۲	۴-۲ معرفی E_γ -واگرایی
۴۲	۴-۲-۱ خواص هندسی
۴۲	۴-۳ قضیه همارزی اصلی
۴۴	۴-۴ بهبود کران‌های انقباض
۴۴	۴-۵ تعمیم به محض مانگی تقریبی $((\alpha, \delta)\text{-LDP})$
۴۵	۴-۶ کاربرد در تخمین توزیع گستته
۴۵	۴-۷ انقباض قوی برای خانواده‌ی f -واگرایی‌ها
۴۵	۴-۷-۱ کران دقیق برای واگرایی کای-دو (χ^2)
۴۶	۴-۷-۲ تعمیم به سایر واگرایی‌ها
۴۷	۴-۸ نامساوی ون‌تریز خصوصی (Private van Trees Inequality)
۴۷	۴-۹ کاربردهای نوین و بهبود نرخ‌ها
۴۹	۵ نتیجه‌گیری
۵۰	مراجع
۵۲	واژمنامه
۵۴	آ مطالب تکمیلی

فهرست جداول

فهرست تصاویر

۲-۱	مدل محramانگی تفاضلی متمرکز با یک متصدی مورد اعتماد.	۲۰
۲-۲	مدل محramانگی تفاضلی موضعی (α -LDP). نویز به صورت موضعی روی دستگاه کاربر اضافه می شود.	۲۴

فصل ۱

مقدمه

در این بخش به توضیح مسئله‌ی محترمانگی تفاضلی و اهمیت آن می‌پردازیم. سپس ادبیات موضوع را شرح داده و مسئله را بیان می‌کنیم.

۱-۱ اهمیت داده‌ها و ضرورت حفظ حریم خصوصی

در دهه‌های اخیر، جهان شاهد رشد انفجاری در تولید و جمع‌آوری داده‌ها بوده است. پیشرفت‌های چشم‌گیر در فناوری‌های ذخیره‌سازی، محاسبات ابری و اینترنت اشیاء، منجر به انباشت حجم عظیمی از داده‌ها شده است که اغلب تحت عنوان کلان‌داده^۱ شناخته می‌شوند. این داده‌ها سوخت اصلی موتورهای تصمیم‌گیری مدرن و سیستم‌های هوشمند هستند. امروزه، الگوریتم‌های یادگیری ماشین^۲ و تحلیل داده^۳ با بهره‌گیری از این مخازن عظیم اطلاعاتی، قادرند الگوهای پیچیده‌ای را شناسایی کنند که در حوزه‌هایی نظری تشخیص پزشکی، بهینه‌سازی ترافیک شهری، توصیه‌گرهای تجاری و سیاست‌گذاری‌های کلان اقتصادی کاربرد حیاتی دارند.

با این حال، این استفاده‌ی گسترده از داده‌ها، نگرانی‌های جدی و فزاینده‌ای را در خصوص حریم خصوصی^۴ افراد به وجود آورده است. داده‌های خامی که برای آموزش مدل‌های هوشمند یا استخراج آماره‌ها استفاده می‌شوند، اغلب حاوی اطلاعات حساس^۵ و شخصی هستند. تاریخچه‌ی تراکنش‌های مالی، سوابق پزشکی، موقعیت‌های مکانی و حتی الگوهای جستجو در وب، همگی می‌توانند جزئیات دقیقی از زندگی

¹Big Data

²Machine Learning

³Data Analytics

⁴Privacy

⁵Sensitive Information

خصوصی افراد را فاش کنند. بنابراین، یک چالش اساسی شکل می‌گیرد: چگونه می‌توان از سودمندی^۶ آماری داده‌ها بهره برد، بدون آنکه حریم خصوصی مشارکت‌کنندگان در داده‌ها نقض شود؟

در سال‌های ابتدایی عصر اطلاعات، تصور عمومی بر این بود که حذف شناسه‌های صریح^۷ (مانند نام، کد ملی و شماره تلفن) برای محافظت از هویت افراد کافی است. این فرایند که گمنامسازی^۸ نامیده می‌شود، با این فرض انجام می‌شد که داده‌های باقی‌مانده قابلیت ردیابی به فرد خاصی را ندارند. اما پژوهش‌های متعددی نشان داده‌اند که این روش‌های سنتی در برابر حملات بازشناسایی^۹ به شدت آسیب‌پذیر هستند. در این نوع حملات، مهاجم با استفاده از اطلاعات جانبی^{۱۰} یا اتصال پایگاه‌داده‌های مختلف به یکدیگر، موفق به کشف هویت افراد در داده‌های به ظاهر گمنام می‌شود.

چندین رخداد مشهور در دو دهه‌ی گذشته، ناکارآمدی روش‌های سنتی گمنامسازی را اثبات کرده‌اند:

• **داده‌های پزشکی ماساچوست:** در یکی از اولین و مشهورترین موارد، لاتانیا سوئینی نشان داد که می‌توان با ترکیب داده‌های پزشکی گمنامسازی شده (که نام بیماران از آن حذف شده بود) با فهرست عمومی رأی‌دهندگان، هویت افراد را بازشناسایی کرد. او با استفاده از ترکیب تاریخ تولد، جنسیت و کد پستی (که به آن‌ها شبه‌شناسه^{۱۱} می‌گویند)، موفق شد پرونده پزشکی فرماندار وقت ایالت ماساچوست را شناسایی کند [۱۵].

• **مجموعه داده‌ی نتفلیکس^{۱۲}:** شرکت نتفلیکس مجموعه‌ای از امتیازهای کاربران به فیلم‌ها را منتشر کرد که در آن شناسه‌های کاربری با اعداد تصادفی جایگزین شده بودند. پژوهشگران نشان دادند که با استفاده از اطلاعات عمومی موجود در وبسایت IMDb و تطبیق الگوهای امتیازدهی، می‌توان هویت بسیاری از کاربران را با دقت بالا کشف کرد [۱۴].

• **داده‌های جستجوی AOL:** در سال ۲۰۰۶، شرکت AOL تاریخچه‌ی جستجوی هزاران کاربر خود را منتشر کرد. اگرچه نام کاربران حذف شده بود، اما تحلیل محتواهای جستجوها منجر به شناسایی هویت افراد شد (از جمله پرونده مشهور تلما آرنولد) که نشان داد حتی خود داده‌ها نیز می‌توانند به عنوان شناسه عمل کنند [۴].

این شواهد تجربی و نظری نشان می‌دهند که تعاریف هیوریستیک و روش‌های موردنی (مانند حذف ستون‌ها یا مخدوش‌سازی ساده) نمی‌توانند تضمین امنیتی پایداری ارائه دهند. مهاجمان همواره می‌توانند

⁶Utility

⁷Explicit Identifiers

⁸Anonymization

⁹Re-identification Attacks

¹⁰Auxiliary Information

¹¹Quasi-identifier

¹²Netflix Prize Data

دانش پس زمینه‌ی پیش‌بینی نشده‌ای داشته باشد که مکانیزم‌های سنتی را دور بزند. در نتیجه، نیاز مبرمی به یک چارچوب ریاضی دقیق احساس شد که بتواند حریم خصوصی را به صورت کمی تعریف کرده و تضمین دهد که ریسک افشاء اطلاعات، مستقل از توان محاسباتی یا دانش جانبی مهاجم، همواره محدود باقی می‌ماند. این نیاز، زمینه‌ی را برای ظهور مفهوم محرمانگی تفاضلی فراهم کرد که در بخش‌های آتی به تفصیل به آن خواهیم پرداخت.

۱-۱-۱ محرمانگی تفاضلی (Differential Privacy)

در پاسخ به چالش‌های امنیتی و ناکارآمدی روش‌های سنتی گمنام‌سازی، دُورک و همکاران در سال ۲۰۰۶ مفهوم محرمانگی تفاضلی^{۱۳} را معرفی کردند [۱۰]. این چارچوب ریاضی دقیق، به جای تمرکز بر ویژگی‌های ظاهری داده‌ها (مانند حذف نام‌ها)، بر فرایند تولید خروجی تمرکز دارد و تضمین می‌کند که حضور یا عدم حضور یک فرد خاص در پایگاهداده، تأثیر ناچیزی بر خروجی نهایی الگوریتم داشته باشد.

پیش از آنکه به تعاریف صوری و ریاضی بپردازیم، ضروری است که درک عمیقی از چیستی محرمانگی و تمایز بین این آن با مفاهیم امنیتی کلاسیک پیدا کنیم. بسیاری از سوتفاهم‌ها در این حوزه ناشی از تمایز ندادن دو مفهوم امنیت داده (که قلمرو رمزنگاری^{۱۴} است) و محرمانگی داده (که هدف ماست) می‌باشد. رمزنگاری اساساً سازوکاری برای کنترل دسترسی^{۱۵} است و تضمین می‌کند که تنها افراد مجاز می‌توانند داده‌ها را ببینند؛ اما در برابر نشت اطلاعات از خروجی‌های مجاز سکوت می‌کند. تصور کنید یک پایگاهداده‌ی حساس پزشکی کاملاً رمزنگاری شده باشد و پژوهشگری مجاز، نتیجه‌ی یک تحلیل آماری ساده (مانند میانگین حقوق یا نرخ یک بیماری) را منتشر کند. رمزنگاری هیچ محافظتی در برابر استنتاج‌های ثانویه ارائه نمی‌دهد و مهاجم می‌تواند با ترکیب این خروجی مجاز با دانش پیشین^{۱۶} خود، اطلاعات خصوصی افراد را بازسازی کند. بنابراین، رمزنگاری شرط لازم است، اما برای حفظ محرمانگی کافی نیست؛ چرا که خود نتیجه‌ی تحلیل، حامل اطلاعات است.

در پاسخ به این چالش، دُورک مفهوم محرمانگی را با ایده‌ی امنیت معنایی^{۱۷} پیوند می‌زند. در این دیدگاه، هدف محرمانگی جلوگیری از یادگیری حقایق کلی درباره‌ی جامعه نیست، بلکه هدف محافظت از حقایق خاص مربوط به یک فرد مشخص است. فلسفه‌ی مرکزی این است که نتیجه‌ی هر تحلیلی باید تقریباً یکسان باشد، چه یک فرد خاص در آن مطالعه مشارکت کند و چه نکند. این تعریف، محرمانگی را به مفهوم ریسک گره می‌زند؛ به این معنا که مشارکت در یک پایگاهداده نباید باعث شود ریسک افشاء رازهای یک

¹³Differential Privacy

¹⁴Cryptography

¹⁵Access Control

¹⁶Auxiliary Knowledge

¹⁷Semantic Security

فرد به طور چشمگیری افزایش یابد.

برای مدل‌سازی این مفهوم، می‌توانیم از استعاره‌ی جهان‌های موازی استفاده کنیم. دو پایگاهداده همسایه^{۱۸} (\mathcal{D} و \mathcal{D}') را به عنوان دو جهان موازی در نظر بگیرید که در یکی، داده‌های کاربر x وجود دارد و در دیگری، این داده‌ها حذف یا تغییر یافته‌اند. هدف نهایی این است که از دیدگاه یک ناظر بیرونی (مهاجم)، این دو جهان غیرقابل تفکیک^{۱۹} باشند. اگر مکانیزم محروم‌گی بتواند کاری کند که مهاجم با مشاهده‌ی خروجی، نتواند تشخیص دهد که این خروجی از کدام جهان آمده است، آنگاه حریم خصوصی کاربر x حفظ شده است.

برای رسیدن به این هدف، ما از الگوریتم‌های تصادفی^{۲۰} بهره می‌بریم. این الگوریتم‌ها با تزریق نویز کنترل شده، توزیع خروجی‌ها را بین دو مجموعه‌داده‌ی همسایه چنان به هم نزدیک می‌کنند که تمایز قائل شدن میان آنها از نظر آماری ناممکن می‌شود.

چرا روش‌های قطعی شکست می‌خورند؟

دستیابی به هدف فوق با روش‌های قطعی^{۲۱} ممکن نیست. برای درک بهتر، یک حمله‌ی تفاضلی^{۲۲} کلاسیک را در نظر بگیرید. فرض کنید f تابعی قطعی است که میانگین درآمد n فرد در پایگاهداده را برمی‌گردد:

$$f(\mathcal{D}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

۱. میانگین درآمد n نفر حاضر در پایگاهداده (\mathcal{D}) .

۲. میانگین درآمد همان افراد، به جز فرد هدف k .

از آنجا که خروجی بدون نویز است، مهاجم با یک محاسبه‌ی ساده‌ی جبری $(x_k = n \cdot M_1 - (n-1) \cdot M_2)$ مقدار دقیق درآمد فرد k را به دست می‌آورد. این مثال نشان می‌دهد که هر تغییر کوچکی در ورودی یک تابع قطعی، به تغییری مشخص و قابل‌ردیابی در خروجی منجر می‌شود که بلاfacile دو جهان موازی را از هم تمایز می‌کند.

در واقع مثال میانگین را می‌توان به هر تابع قطعی $Z \rightarrow \mathcal{X}^n$: f تعمیم داد. فرض کنید مهاجم به دنبال بازیابی داده‌ی فرد k -ام (x_k) است. اگر سایر داده‌های موجود در پایگاهداده، یعنی $\mathcal{D}_{-k} = \{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\}$

¹⁸Neighboring Datasets

¹⁹Indistinguishable

²⁰Randomized Algorithms

²¹Deterministic

²²Differencing Attack

بدینانه محرمانگی تفاضلی استاندارد است)، تابع خروجی را می‌توان تنها بر حسب متغیر مجهول x_k به صورت $g(x) = f(x, \mathcal{D}_{-k})$ بازنویسی کرد.

اگر تابع g روی دامنه \mathcal{X} یکبهیک^{۲۳} (یا حتی در بازه‌ای مشخص وارونپذیر) باشد، محرمانگی به طور کامل از بین می‌رود؛ زیرا مهاجم با مشاهده خروجی z ، می‌تواند ورودی را به صورت $(z^{-1} = g^{-1}(z))$ بازیابی کند. حتی اگر g کاملاً وارونپذیر نباشد، مشاهده z فضای جستجوی مقادیر ممکن برای x_k را به شدت کاهش می‌دهد:

$$x_k \in \{x \in \mathcal{X} \mid g(x) = z\}$$

از دیدگاه نظریه اطلاعات، مشکل مکانیزم‌های قطعی این است که توزیع احتمال خروجی آن‌ها به ازای یک ورودی مشخص، یک جرم احتمالی^{۲۴} تک نقطه‌ای (تابع دلتای دیراک) است. اگر دو پایگاهداده همسایه‌ی \mathcal{D} و \mathcal{D}' چنان باشند که $f(\mathcal{D}') \neq f(\mathcal{D})$ ، آن‌گاه تکیه‌گاه^{۲۵} توزیع‌های خروجی کاملاً مجزا خواهد بود. در نتیجه، واگرایی کولبک-لایلر^{۲۶} بین آن‌ها بی‌نهایت می‌شود:

$$D_{KL}(\mathcal{M}(\mathcal{D}) \parallel \mathcal{M}(\mathcal{D}')) = \infty$$

این رابطه اثبات می‌کند که هیچ سطح محدودی از محرمانگی ($\infty < \epsilon$) با توابع قطعی غیرثابت قابل دستیابی نیست. بنابراین، همان‌طور که در ادبیات موضوع تأکید شده است [۱۱]، برای شکستن این وابستگی قطعی و ایجاد ابهام آماری، تصادفی‌سازی^{۲۷} در فرآیند مکانیزم الزامی است.

کاربردهای محرمانگی تفاضلی

این چارچوب ریاضی امروزه به استاندارد طلایی در تحلیل داده‌های حساس تبدیل شده و کاربردهای آن فراتر از آمارهای ساده رفته است. برخی از مهم‌ترین کاربردهای آن عبارتند از:

- **تخمین میانگین و مجموع^{۲۸}**: اساسی‌ترین کاربرد DP در محاسبه آماره‌های توصیفی است. سازمان‌های آماری (مانند اداره سرشماری آمریکا) از این روش برای انتشار میانگین درآمد، سن یا جمعیت مناطق استفاده می‌کنند، بدون آنکه داده‌های فردی شهروندان به خطر بیفتند.

- **انتشار هیستوگرام^{۲۹}**: بسیاری از تحلیل‌ها نیازمند دانستن توزیع داده‌ها هستند. DP اجازه می‌دهد

²³Injective

²⁴Probability Mass

²⁵Support

²⁶Kullback-Leibler Divergence

²⁷Randomization

²⁸Mean and Sum Estimation

²⁹Histogram Release

تا تعداد افراد در هر بازه (مثلاً گروههای سنی یا درآمدی) با دقت بالا منتشر شود، در حالی که نویز اضافه شده مانع از شناسایی افراد در گروههای کم جمعیت می‌شود.

• **یادگیری ماشین خصوصی^{۳۰}**: در آموزش مدل‌های عمیق، خطر به خاطر سپاری^{۳۱} داده‌های آموزشی وجود دارد. با استفاده از الگوریتم‌هایی نظیر DP-SGD، می‌توان مدل‌هایی آموزش داد که الگوهای کلی را یاد می‌گیرند اما قادر به بازتولید داده‌های آموزشی حساس (مانند تصاویر چهره یا متون خصوصی) نیستند.

• **سیستم‌های توصیه‌گر و داده‌های مکانی**: شرکت‌های فناوری از DP برای جمع‌آوری آمارهای رفتاری (مانند پربازدیدترین وب‌سایتها یا مکان‌های پرتردد) استفاده می‌کنند تا بدون ردیابی لحظه‌ای کاربران، کیفیت خدمات خود را بهبود بخشد (مانند مکانیزم RAPPOR در گوگل کروم).

این توضیحات، زیربنای اصلی تعاریف ریاضی دقیقی است که در فصل بعد به آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲-۱-۱ محرمانگی تفاضلی موضعی (Local Differential Privacy)

اگرچه محرمانگی تفاضلی متمرکز (CDP) استاندارد طلایی حفاظت از داده‌ها محسوب می‌شود، اما پاشنه‌ی آشیل آن در فرضیه‌ی وجود یک متصدی مورد اعتماد^{۳۲} نهفته است که به تمام داده‌های خام دسترسی دارد. این مدل در دنیای واقعی با چالش‌های امنیتی و حقوقی جدی روبروست؛ چرا که تجربه نشان داده است اعتماد کامل به سرورهای مرکزی، حتی در صورت مدیریت توسط نهادهای بزرگ فناوری، همواره در معرض تهدید است. یکی از این خطرات، نفوذ‌های خارجی و سرقت انبوی داده‌هاست؛ به طوری که حتی پیشرفته‌ترین دیوارهای آتش^{۳۳} نیز در برابر حملات پیچیده آسیب‌پذیرند. در چنین شرایطی، اگر داده‌ها به صورت خام ذخیره شده باشند، نشت اطلاعاتی مانند آنچه در واقعه‌ی Equifax رخ داد، مکانیزم‌های محرمانگی تفاضلی مرکزی را عملأً بی‌فایده می‌کند؛ زیرا مهاجم با دور زدن مکانیزم، مستقیماً به مخزن داده‌های حساس دست می‌یابد^[۱۶].

علاوه بر تهدیدهای خارجی، خطر سوءاستفاده‌های داخلی توسط کارمندان یا مدیران سیستم با دسترسی‌های سطح بالا نیز وجود دارد که امنیت داده‌ها را نه به ریاضیات، بلکه به اخلاق انسانی گره می‌زنند. از سوی دیگر، محدودیت‌های حقوقی و احصاریه‌های قضایی نیز متصدی را ملزم به افشاء اطلاعات می‌کند. در تمام این سناریوها، مدل متمرکز با یک نقطه شکست مرکزی^{۳۴} روبروست.

³⁰Private Machine Learning

³¹Memorization

³²Trusted Curator

³³Firewalls

³⁴Single Point of Failure

گذار به مدل موضعی، حذف نیاز به اعتماد

بنابراین، تنها راه تضمین قطعی حریم خصوصی، اتخاذ رویکردی است که در آن متصدی اساساً به داده‌های اصلی دسترسی نداشته باشد. این ضرورت، نقطه‌ی عزیمت ما از مدل متمرکز به سمت چارچوب محترمانگی تفاضلی موضعی (LDP) است که در آن فرآیند خصوصی‌سازی پیش از خروج داده از دستگاه کاربر انجام می‌شود.

در این معماری، مرز اعتماد از سرور مرکزی به دستگاه شخصی کاربر (موبایل یا لپ‌تاپ) منتقل می‌شود. پروتکل به گونه‌ای طراحی می‌شود که هیچ‌کس، نه نفوذگران، نه کارمندان کنجهکاو و نه حتی دولت‌ها، هرگز داده‌ی واقعی کاربر را مشاهده نکند. سرور تنها نسخه‌هایی مخدوش و نویزدار از داده‌ها را دریافت می‌کند که به تنها‌ی بی‌معنی هستند، اما در تجمعی با تعداد زیادی داده‌ی دیگر، الگوهای آماری دقیق را آشکار می‌سازند. این رویکرد، خطر نقض حریم خصوصی را بسیار کنترل می‌کند.

۲-۱ کارهای پیشین و مرور ادبیات

۲-۱-۱ آغازگرها: از پیمایش‌های آماری تا تعریف مدرن محترمانگی

اگرچه نگرانی پیرامون محترمانگی داده‌ها قدمتی به اندازه خود آمار دارد، اما فرمول‌بندی ریاضی دقیق آن دستاورد قرن بیست و یکم است. ادبیات کلاسیک این حوزه با تلاش برای کنترل افشاری آماری^{۳۵} آغاز شد، اما ناکارآمدی روش‌های مبتنی بر گمنامسازی در برابر دانش پس‌زمینه مهاجم، نیاز به یک تعریف معنایی قوی‌تر را ایجاد کرد.

نقطه عطف این تحول، معرفی مفهوم محترمانگی تفاضلی^{۳۶} توسط دُورک و همکاران بود [۱۰]. این تعریف، برخلاف روش‌های پیشین که بر ویژگی‌های داده تمرکز داشتند، بر ویژگی‌های مکانیزم پردازش داده تمرکز دارد. در مدل استاندارد (متمرکز)، یک مکانیزم تصادفی M دارای شرایط $\text{DP}-\epsilon$ است اگر برای هر دو پایگاه داده همسایه \mathcal{D} و \mathcal{D}' (که تنها در داده یک فرد متفاوت‌اند) و برای هر زیرمجموعه از خروجی‌ها $\mathcal{S} \subseteq \text{Range}(M)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\Pr[M(\mathcal{D}) \in \mathcal{S}] \leq e^\epsilon \cdot \Pr[M(\mathcal{D}') \in \mathcal{S}] + \delta \quad (1-1)$$

³⁵Statistical Disclosure Control

³⁶Differential Privacy

که در آن ϵ پارامتری کلیدی به نام بودجه محرمانگی^{۳۷} است و δ احتمال شکست ناچیز مکانیزم را نشان می‌دهد [۱۱]. برای درک شهودی این مفهوم، می‌توان ϵ را به عنوان یک «پیچ تنظیم» برای کنترل توازن میان امنیت و مطلوبیت داده‌ها در نظر گرفت. این پارامتر تعیین می‌کند که خروجی مکانیزم تا چه حد اجازه دارد بین دو جهان موازی (جهانی با حضور داده‌ی شما و جهانی بدون آن) تمایز قائل شود:

- **مقادیر کوچک ϵ (محرمانگی قوی):** زمانی که $\epsilon \rightarrow 0$ ، توزیع‌های خروجی برای دو پایگاهداده همسایه تقریباً بر هم منطبق می‌شوند. در این حالت، مکانیزم مجبور است نویز بسیار زیادی به پاسخ اضافه کند تا تفاوت‌ها را بپوشاند. در نتیجه، مهاجم تقریباً هیچ توانی برای تشخیص حضور فرد ندارد، اما در مقابل، دقت آماری خروجی کاهش می‌یابد.
- **مقادیر بزرگ ϵ (محرمانگی ضعیف):** با افزایش ϵ ، مکانیزم آزادی عمل بیشتری دارد تا خروجی‌های متمایزتری تولید کند (نویز کمتر). این امر دقت تحلیل را افزایش می‌دهد، اما همزمان ریسک بازشناسایی فرد و نشت اطلاعات خصوصی نیز به صورت نمایی بالا می‌رود.

همان‌طور که در بخش قبل توضیح داده شد، پیاده‌سازی این تعریف نیازمند یک پیش‌فرض قوی است: وجود یک متصدی مورد اعتماد که تمام داده‌های خام را جمع‌آوری کرده و نویز را به صورت مرکزی اعمال کند. اما دیدیم که این مدل دارای نقطه ضعف‌هایی است. حذف این فرض و انتقال اعتماد از سرور به کاربر، منجر به شکل‌گیری مفهوم محرمانگی تفاضلی موضعی^{۳۸} (LDP) شد. اگرچه اصطلاح LDP و صورت‌بندی مدرن آن در سال‌های اخیر توسط پژوهشگرانی نظری کاسیسی‌سوانatan و دیگران تدوین شد [۱۲]، اما ریشه‌های عملی آن به دهه‌ها قبل باز می‌گردد.

تعریف ۱-۱ (محرمانگی تفاضلی موضعی (α, δ) -LDP) یک مکانیزم تصادفی $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$: \mathcal{M} : (تصادفی‌ساز موضعی) شرط «محرمانگی تفاضلی موضعی تقریبی» یا (α, δ) -LDP را برآورده می‌کند، اگر برای تمام جفت ورودی‌های ممکن $x, x' \in \mathcal{X}$ و هر زیرمجموعه‌ی خروجی $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{S}$ ، رابطه زیربرقرار باشد:

$$\Pr[\mathcal{M}(x) \in \mathcal{S}] \leq e^\alpha \cdot \Pr[\mathcal{M}(x') \in \mathcal{S}] + \delta \quad (2-1)$$

در این تعریف:

- α ، بودجه محرمانگی است که میزان شباهت توزیع‌های خروجی را کنترل می‌کند.
- δ ، احتمال ناچیز شکست مکانیزم در برقراری شرط محرمانگی است.

³⁷Privacy Budget

³⁸Local Differential Privacy

اگر $\delta = 0$ باشد، تعریف به حالت استاندارد یا «محرمانگی تفاضلی موضعی خالص» (α -LDP) باز می‌گردد.

در واقع، ساده‌ترین و نخستین نمونه از یک مکانیزم LDP، روش «پاسخ تصادفی»^{۳۹} است که توسط وارنر در سال ۱۹۶۵ برای حذف سوگیری در نظرسنجی‌های حساس معرفی شد [۱۸]. وارنر این روش را نه برای حفاظت در برابر حملات سایبری، بلکه برای تشویق پاسخ‌دهندگان به صداقت در سوالات حساس (مانند مصرف مواد مخدر یا عقاید سیاسی خاص) طراحی کرد.

سازوکار کلاسیک این روش برای یک پرسش با پاسخ «بله/خیر» به صورت زیر است: فرض کنید از کاربر n خواسته می‌شود که ویژگی حساس $\{X_i \in \{0, 1\}\}$ را گزارش کند. کاربر به جای پاسخ مستقیم، طبق دستورالعمل زیر عمل می‌کند:

۱. یک سکه را پرتاب می‌کند. (می‌تواند سکه غیرمنصفانه^{۴۰} باشد)

۲. اگر سکه «شیر» آمد، پاسخ واقعی (X_i) را گزارش می‌کند.

۳. اگر سکه «خط» آمد، یک پاسخ تصادفی (با پرتاب سکه‌ی دوم) تولید و گزارش می‌کند.

در این سناریو، حتی اگر سرور پاسخ «بله» را دریافت کند، با قطعیت نمی‌داند که آیا کاربر واقعاً دارای ویژگی X بوده است (شیر آمده) یا صرفاً به دلیل تصادف (خط آمدن سکه‌ی اول و شیر آمدن سکه‌ی دوم) این پاسخ را ارسال کرده است. با این حال، از آنجایی که احتمالات سکه‌ها مشخص است، سرور می‌تواند با جمع‌آوری تعداد زیادی از پاسخ‌ها (n بسیار بزرگ)، اثر نویز را به صورت آماری حذف کرده و توزیع واقعی جامعه را با خطأ تخمین بزند. به زبان ریاضی مدرن، اگر احتمال گزارش پاسخ واقعی p باشد، نسبت احتمال خروجی‌ها برای دو ورودی متفاوت x و x' به صورت زیر محدود می‌شود:

$$\frac{\Pr[\mathcal{M}(x) = z]}{\Pr[\mathcal{M}(x') = z]} \leq \frac{p}{1-p} \quad (3-1)$$

این رابطه دقیقاً منطبق بر تعریف α -LDP است و نشان می‌دهد که بودجه محروم‌انگی α چگونه مستقیماً از پارامترهای مکانیزم (p) مشتق می‌شود:

$$e^\alpha = \frac{p}{1-p} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \quad (4-1)$$

این فرمول، تفسیر شهودی LDP را کامل می‌کند:

³⁹Randomized Response (RR)

⁴⁰Unfair

- اگر $0.5 \approx p$ (سکه کاملاً تصادفی)، آنگاه $0 \approx \alpha$ می‌شود. یعنی خروجی هیچ اطلاعاتی از ورودی ندارد (محرمانگی کامل، اما بدون فایده آماری).

- اگر $1 \rightarrow p$ (پاسخ تقریباً همیشه راست)، آنگاه $\infty \rightarrow \alpha$ می‌شود. یعنی داده‌ها دقیق هستند اما هیچ محرمانگی وجود ندارد.

بنابراین، کار وارنر را می‌توان سنگ بنای تاریخی این حوزه دانست که نشان داد چگونه می‌توان بدون اعتماد به گیرنده پیام، و با تنظیم دقیق پارامتر p (و در نتیجه α)، اطلاعات آماری مفیدی را مخابره کرد.

اما پاسخ تصادفی تنها راهکاری برای ایجاد محرمانگی در داده‌های دودویی است، و در کاربردهای مدرن با چالش دامنه‌ی بسیار بزرگ^{۴۱} روبروست. شرکت‌های بزرگ فناوری نیاز دارند داده‌هایی نظری «آدرس‌های اینترنتی بازدید شده» یا «کلمات جدید تایپ شده» را جمع‌آوری کنند که دامنه‌ی آنها^{۴۲} (\mathcal{X}) می‌تواند شامل میلیون‌ها حالت باشد. اعمال مستقیم RR در این حالات منجر به نویز بسیار زیاد و کاهش شدید سودمندی می‌شود. در ادامه، راهکارهای اتخاذ شده توسط بزرگ‌ترین شرکت‌های فناوری را مورر می‌کنیم:

- **گوگل و پروتکل RAPPOR:** در سال ۲۰۱۴، گوگل برای جمع‌آوری آمار تنظیمات مرورگر کروم و شناسایی بدافزارها، پروتکل RAPPOR^{۴۳} را معرفی کرد [۱۷]. چالش اصلی گوگل، جمع‌آوری رشته‌های متنه^{۴۴} بود. راه حل آن‌ها ترکیب پاسخ تصادفی با فیلترهای بلوم^{۴۵} بود. در این روش، داده‌ی ورودی ابتدا به یک بردار بیتی (با استفاده از توابع درهم‌سان) نگاشت می‌شود و سپس پاسخ تصادفی روی تک‌تک بیت‌های این فیلتر اعمال می‌گردد. این معماری به گوگل اجازه داد تا بدون دانستن ورودی دقیق هر کاربر، الگوهای پرتکرار و ناهنجاری‌ها را در مقیاس میلیونی شناسایی کند.

- **اپل و جمع‌آوری داده‌های دایره‌لغات:** شرکت اپل از LDP برای بهبود کیبورد QuickType شناسایی ایموجی‌های پرطرفدار و داده‌های سلامت در سیستم‌عامل‌های iOS و macOS استفاده می‌کند. مسئله‌ی اپل، مخابره‌ی کارآمد داده‌ها با حفظ حریم خصوصی بود. راه حل اپل استفاده از تکنیک‌های مبتنی بر طرح ریزی^{۴۶} و تبدیل‌های ریاضی مانند تبدیل هادامارد^{۴۷} است. این تبدیل‌ها به مکانیزم اجازه می‌دهند که اطلاعات را در ابعاد پایین‌تر فشرده کند تا هم بار ارتباطی کاهش یابد و هم واریانس تخمین‌گر در دامنه‌های بزرگ کنترل شود [۱۷].

⁴¹High-Dimensional Domain

⁴²Randomized Aggregatable Privacy-Preserving Ordinal Response

⁴³String

⁴⁴Bloom Filters

⁴⁵Sketching

⁴⁶Hadamard Transform

• مایکروسافت و داده‌های تله‌متري: مایکروسافت برای جمع‌آوری داده‌های تله‌متري ویندوز (مانند مدت زمان استفاده از برنامه‌ها) با چالش تخمين هیستوگرام‌های پیوسته روبرو بود. آن‌ها از مکانیزم‌هایی نظیر نمونه‌برداری هیستوگرام و روش‌های تکرارکننده برای بازسازی توزیع داده‌ها استفاده کردند. تمرکز اصلی در این‌جا، ایجاد تعادل بین دقت آماری در جمع‌آوری داده‌های سیستمی و عدم امکان بازناسایی رفتار یک کاربر خاص در طول زمان است.

این نمونه‌ها نشان می‌دهند که محترمانگی تفاضلی موضعی (LDP) تنها یک مفهوم نظری نیست، بلکه یک ابزار حیاتی مهندسی است که با استفاده از تکنیک‌های پیشرفته‌ی آماری برای حل مسائل دنیای واقعی مقیاس‌دهی شده است.

۲-۲-۱ چالش سودمندی و موازنۀ دقت-محترمانگی

اگرچه حذف متصدی مرکزی در مدل LDP، تضمین‌های امنیتی بسیار قوی‌تری را فراهم می‌کند، اما این امنیت رایگان به دست نمی‌آید. چالش بنیادین در این رویکرد، کاهش چشم‌گیر سودمندی^{۴۷} داده‌ها یا همان دقت تحلیل‌های آماری است. این پدیده تحت عنوان موازنۀ محترمانگی-دقت^{۴۸} شناخته می‌شود.

برای درک شهودی این چالش، مقایسه نحوه اعمال نویز در دو مدل ضروری است:

• در مدل متمرکز (CDP): نویز تنها «یک‌بار» و پس از تجمع داده‌ها به نتیجه نهایی اضافه می‌شود. از آن‌جا که مجموع (یا میانگین) داده‌ها حساسیت کمی دارد، مقدار نویز معمولاً^{۴۹} مستقل از تعداد کاربران (n) و بسیار کوچک است.

• در مدل موضعی (LDP): نویز باید به «تک‌تک» داده‌های ورودی اضافه شود (پیش از آنکه از دستگاه کاربر خارج شوند). وقتی تحلیل‌گر قصد دارد میانگین این داده‌ها را محاسبه کند، واریانس نویزهای n کاربر با هم جمع می‌شود.

این انباست نویز باعث می‌شود که نسبت سیگنال به نویز^{۴۹} در مدل موضعی بسیار پایین‌تر از مدل متمرکز باشد. به بیان دیگر، برای دستیابی به همان سطح از دقت که در مدل متمرکز وجود دارد، در مدل LDP نیازمند تعداد بسیار بیش‌تری نمونه داده هستیم.

این مسئله در کاربردهای عملی بسیار حائز اهمیت است. برای مثال، اگر هدف تخمين فراوانی یک بیماری نادر باشد، نویز اضافه شده توسط مکانیزم‌های LDP ممکن است سیگنال اصلی را کاملاً بپوشاند.

⁴⁷Utility

⁴⁸Privacy-Accuracy Trade-off

⁴⁹Signal-to-Noise Ratio (SNR)

همین چالش بود که پژوهشگران را بر آن داشت تا به جای استفاده از روش‌های ساده (مثل وارنر)، به دنبال پاسخ این پرسش باشند که: «آیا می‌توان مکانیزم‌هایی طراحی کرد که با کمترین میزان نویز، بیشترین محرومگی را فراهم کنند؟» و «حد نهایی این دقت کجاست؟» این پرسش‌ها زمینه را برای ورود تئوری‌های پیشرفته‌تر نظری «تخمین مینیماکس» فراهم کرد.

۳-۲-۱ نگاهی آماری به LDP: چارچوب مینیماکس و حدود بنیادین

پاسخ به پرسش بالا، مسیر پژوهش‌های این حوزه را به سمت نظریه مینیماکس آماری^{۵۰} تغییر داد. نقطه عطف این تحول، سلسله مقالات جریان‌ساز دوچی، جردن و وین‌رایت^{۵۱} [۸، ۹] بود. آن‌ها با صورتی بندی مسئله در قالب نظریه اطلاعات، نشان دادند که هزینه محرومگی در مدل موضعی بسیار سنگین و غیرقابل اجتناب است.

در تحلیل مینیماکس، هدف یافتن «ریسک مینیماکس» (\mathcal{M}_n) است؛ یعنی کمترین خطایی که «بهترین تخمین‌گر ممکن» در «بدترین توزیع داده‌ی ممکن» مرتكب می‌شود. دوچی و همکاران با استفاده از ابزارهایی نظری نامساوی فانو^{۵۲} و لم اسود^{۵۳} (که در فصل سوم به تفصیل بررسی خواهند شد)، ثابت کردند که برای مسائل پایه‌ای نظری تخمین میانگین یا چگالی احتمال، نرخ هم‌گرایی خطا در مدل LDP رفتاری متفاوت با مدل متمرکز دارد.

به طور مشخص، برای n کاربر و بودجه محرومگی α ، کران پایین خطا (\mathcal{E}) به صورت مجانی از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

$$\mathcal{E}_{LDP} \asymp \frac{1}{\sqrt{n\alpha^2}} \quad \text{در حالی که} \quad \mathcal{E}_{CDP} \asymp \frac{1}{n\varepsilon}$$

این نتیجه که به «قانون مقیاس‌دهی کانونی»^{۵۴} معروف است، حاوی دو پیام مهم است:

۱. کندی هم‌گرایی: در حالی که خطای مدل متمرکز با سرعت $1/n$ کاهش می‌یابد، خطای مدل موضعی با سرعت بسیار کندر $1/\sqrt{n}$ کم می‌شود.

۲. اندازه نمونه مؤثر: ضریب α^2 نشان می‌دهد که هر نمونه داده‌ی خصوصی‌سازی شده، عملأً حاوی اطلاعاتی معادل با α^2 نمونه داده‌ی خام است (برای $1 < \alpha$). این یعنی برای جبران نویز α -LDP

⁵⁰Statistical Minimax Theory

⁵¹Duchi, Jordan, and Wainwright

⁵²Fano's Inequality

⁵³Assouad's Lemma

⁵⁴Canonical Scaling Law

حجم داده‌ها باید با ضریب $\alpha^2 / 1$ افزایش یابد.

پس از استقرار این چارچوب نظری، تمرکز جامعه علمی بر طراحی «مکانیزم‌های بهینه ترتیب مقدماتی»^{۵۵} قرار گرفت که بتوانند به این کران‌های نظری دست یابند. از جمله مهم‌ترین این تلاش‌ها می‌توان به معرفی «مکانیزم‌های پله‌ای»^{۵۶} توسط کایروز و همکاران [۱۲] و توسعه پروتکل‌های پیشرفت‌های نظری UE (کدگذاری یگانی)^{۵۷} و OLH (هشینگ محلی بهینه)^{۵۸} توسط وانگ و همکاران [۱۷] اشاره کرد. این روش‌ها تلاش می‌کنند با بهینه‌سازی ساختار نویز و استفاده از تکنیک‌های فشرده‌سازی اطلاعات، فاصله بین عملکرد عملی و حدود نظری مینیماکس را به حداقل برسانند.

۴-۲-۱ دسته‌بندی پروتکل‌های موضوعی: تعاملی و غیرتعاملی

به عنوان آخرین مبحث در مرور ادبیات موضوع، لازم است به دسته‌بندی پروتکل‌های α -LDP بر اساس «معماری ارتباطی» اشاره کنیم. پژوهش‌های انجام شده در این حوزه، مکانیزم‌ها را به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌کنند:

۱. پروتکل‌های غیرتعاملی^{۵۹}: در این حالت، تمام کاربران به صورت همزمان و مستقل عمل می‌کنند. هر کاربر i مکانیزم M را تنها بر اساس داده‌ی خودش X_i اجرا کرده و پیام Z_i را به سرور می‌فرستد. هیچ ارتباطی بین کاربران وجود ندارد و سرور نیز هیچ بازخوردی به کاربران نمی‌دهد. به دلیل سادگی پیاده‌سازی و مقیاس‌پذیری بالا، اکثر پروتکل‌های صنعتی (مانند RAPPOR گوگل یا سیستم‌های اپل) در این دسته قرار می‌گیرند.

۲. پروتکل‌های تعاملی^{۶۰}: در این روش، کاربران به صورت متوالی با سرور ارتباط برقرار می‌کنند. کاربر i می‌تواند قبل از ارسال داده‌ی خود، خلاصه‌ای از داده‌های کاربران قبلی (Z_1, \dots, Z_{i-1}) را از سرور دریافت کند و نویز خود را هوشمندانه‌تر تنظیم نماید. اگرچه به نظر می‌رسد این آزادی عمل باید دقت را افزایش دهد، اما دوچی و همکاران در نتایج حیرت‌انگیزی نشان دادند که برای دسته‌ی بزرگی از توابع محدب (مانند تخمین میانگین)، پروتکل‌های تعاملی هیچ مزیتی نسبت به روش‌های غیرتعاملی ندارند و نرخ مینیماکس را بهبود نمی‌بخشند [۱۲, ۸].

⁵⁵Order-optimal Mechanisms

⁵⁶Staircase Mechanisms

⁵⁷Unary Encoding

⁵⁸Optimal Local Hashing

⁵⁹Non-interactive / Simultaneous

⁶⁰Interactive / Sequential

در این پایان‌نامه، چارچوب نظری ارائه شده به گونه‌ای است که نتایج (به‌ویژه کران‌های پایین مینیماکس) برای هر دو کلاس پروتکل‌های تعاملی و غیرتعاملی صادق هستند. ما نشان خواهیم داد که محدودیت‌های ذاتی مدل LDP، مستقل از معماری ارتباطی شبکه عمل می‌کنند و افزودن تعامل، لزوماً راه گریزی از این محدودیت‌های بنیادین فراهم نمی‌کند. ابزارهای ریاضیاتی قدرتمندی که امکان چنین تحلیل یک‌پارچه‌ای را فراهم می‌سازند، در بخش بعدی معرفی خواهند شد.

۳-۱ بیان مسئله و اهداف پژوهش

محرمانگی تفاضلی موضعی (LDP) به عنوان یک حوزه‌ی میان‌رشته‌ای، محل تلاقی «علوم کامپیوتر» (با تمرکز بر طراحی الگوریتم و امنیت) و «آمار ریاضی» (با تمرکز بر نظریه تخمین و مینیماکس) است. این ماهیت دوگانه، اگرچه باعث غنای ادبیات موضوع شده، اما منجر به پراکندگی قابل توجهی در روش‌ها و ابزارهای تحلیلی گشته است.

همان‌طور که در مرور ادبیات اشاره شد، چارچوب مینیماکس که توسط دوچی و همکاران [۸] پایه‌گذاری شده، نشان می‌دهد که اعمال محدودیت محرمانگی منجر به کاهش نرخ هم‌گرایی در تخمین‌های آماری می‌شود. با این حال، اثبات این نتایج در مقالات مختلف با ابزارهای متفاوتی صورت گرفته است که منجر به نوعی «اثر برج بابل» در ادبیات علمی شده است. برای مثال:

- در برخی مسائل تخمین چگالی، پژوهشگران عمدتاً از واگرایی کولبک-لایبلر (KL) و نامساوی فانو استفاده کرده‌اند.
- در مسائل آزمون فرض ساده، اغلب از فاصله‌ی تغییرات کل (TV) و لم لوکام بهره گرفته شده است.
- در تحلیل‌های اخیرتر، فاصله‌ی کای-دو (χ^2) به دلیل رفتار هموارتر در همسایگی صفر و ارتباط مستقیم با واریانس، مورد توجه قرار گرفته است.

این تنوع در ابزارها، درک هندسی و شهودی از ماهیت «اتلاف اطلاعات» را برای پژوهشگران دشوار می‌سازد. پژوهشگری که قصد ورود به این حوزه را دارد، با مجموعه‌ای از تکنیک‌های اثباتی مجزا روبرو می‌شود که ارتباط درونی آن‌ها شفاف نیست. مسئله‌ی اصلی که این پایان‌نامه بر آن تمرکز دارد، فقدان یک چارچوب یک‌پارچه و منسجم در ادبیات (به‌ویژه منابع فارسی) است که بتواند این ابزارهای به‌ظاهر متفاوت را زیر یک چتر واحد گردآوری و تحلیل کند.

۱-۳-۱ رویکرد تحلیل: f -واگرایی‌ها به عنوان زبان مشترک

برای غلبه بر چالش پراکندگی و ایجاد یکپارچگی نظری، این پایان‌نامه پیشنهاد می‌کند که تمام تحلیل‌ها بر مبنای خانواده‌ی عمومی f -واگرایی‌ها^{۶۱} بازنویسی و تفسیر شوند. f -واگرایی‌ها (معرفی شده توسط سیسار^{۶۲})، کلاسی جامع از معیارهای فاصله بین دو توزیع احتمال P و Q هستند:

$$D_f(P\|Q) = \mathbb{E}_Q \left[f \left(\frac{dP}{dQ} \right) \right] \quad (5-1)$$

که در آن f یک تابع محدب با ویژگی $f(1) = 0$ است.

انتخاب این رویکرد به ما اجازه می‌دهد تا «محرمانگی» را نه صرفاً به عنوان یک ویژگی الگوریتمی، بلکه به عنوان یک محدودیت هندسی تفسیر کنیم. در این دیدگاه، هر مکانیزم LDP مانند یک «کanal انقباضی»^{۶۳} عمل می‌کند که فاصله‌ی بین توزیع‌های ورودی را فشرده می‌سازد. هدف ما در این پژوهش، بررسی این است که چگونه ادبیات پیشرو، مفهوم «ضریب انقباض»^{۶۴} را برای f -واگرایی‌های مختلف محاسبه کرده و از آن برای استخراج کران‌های مینیماکس استفاده می‌کنند. این دیدگاه هندسی، پلی میان اثبات‌های پراکنده ایجاد می‌کند و نشان می‌دهد که انتخاب f مناسب، تابعی از هندسه‌ی مسئله است.

۲-۳-۱ اهداف و ساختار پژوهش

هدف نهایی این پایان‌نامه، ارائه‌ی یک «بازخوانی تحلیلی و آموزشی» از نظریه مینیماکس تحت محدودیت محرمانگی است تا شکاف میان مفاهیم علوم کامپیوتر و آمار پر شود. اهداف مشخص این پژوهش عبارتند از:

۱. یکپارچه‌سازی مبانی نظری: گردآوری و بازتعریف قضایای بنیادین (مانند نامساوی‌های پردازش داده قوی) با استفاده از نمادگذاری واحد و چارچوب f -واگرایی، به‌گونه‌ای که خواننده بتواند ارتباط ریاضی بین معیارهای مختلف (KL, TV, χ^2) را به وضوح مشاهده کند.

۲. تبیین روش‌های کران‌پایین: تشریح دقیق و گام‌به‌گام متدهای کلاسیک آماری نظری «متد دو نقطه‌ای لوكام»^{۶۵} و «نامساوی فانو»^{۶۶} در بستر محرمانگی. هدف این است که نشان دهیم چگونه می‌توان

⁶¹ f -divergences

⁶² Csiszár

⁶³ Contraction Channel

⁶⁴ Contraction Coefficient

⁶⁵ Le Cam's Method

⁶⁶ Fano's Inequality

مسئله‌ی پیچیده‌ی «تخمین» را به مسئله‌ی ساده‌تر «آزمون فرض» تقلیل داد و از هندسه‌ی f -واگرایی برای حل آن استفاده کرد.

۳. تفسیر هندسی رفتار مکانیزم‌ها: تحلیل «رفتار انقباضی»^{۶۷} مکانیزم‌ها با هدف محاسبه‌ی ضرباب انقباض برای f -واگرایی‌های مختلف. ما نشان می‌دهیم که چگونه مکانیزم‌های محربمانگی (مانند پاسخ تصادفی) باعث کاهش فاصله بین توزیع‌ها می‌شوند و این کاهش چگونه به طور مستقیم بر خطای تخمین تأثیر می‌گذارد.

۴. مرور تحلیلی و بازخوانی ادبیات موضوع: انجام مروری جامع و ساختاریافته بر کارهای انجام شده در حوزه‌ی تخمین مینیماکس تحت محدودیت α -LDP و تحلیل دقیق نتایج موجود با استفاده از ابزار f -واگرایی‌ها، به منظور یکپارچه‌سازی اثبات‌های پراکنده و شفاف‌سازی مسیرهای استدلالی برای پژوهشگران این حوزه.

۴-۱ ساختار پایان‌نامه

ساختار ادامه‌ی این پایان‌نامه به شرح زیر سازمان‌دهی شده است:

• فصل دوم: مفاهیم اولیه و تعاریف در این فصل، بستر ریاضیاتی پژوهش بنا می‌شود. ابتدا چارچوب‌های محربمانگی تفاضلی مرکز (CDP) و موضعی (LDP) به صورت دقیق تعریف شده و مکانیزم‌های پایه‌ی این حوزه (نظیر پاسخ تصادفی وارنر و مکانیزم لاپلاس) به همراه چالش‌های سودمندی آن‌ها بررسی می‌گردد. سپس خانواده‌ی f -واگرایی‌ها و در بخش آخر مفاهیم بنیادین مورد نیاز آماری معرفی می‌شوند.

• فصل سوم: نرخ‌های مینیماکس و حدود پایین این فصل هسته‌ی اصلی تحلیل‌های آماری پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد. در این بخش، چارچوب تخمین مینیماکس معرفی شده و با استفاده از ابزار f -واگرایی‌ها، متدهای کلاسیک (نظیر روش لوکام و نامساوی فانو) بازنویسی می‌شوند. هدف نهایی این فصل، اثبات کران‌های پایین برای خطای تخمین در مسائل مختلف تحت قید α -LDP با استفاده از نامساوی‌های پردازش داده است.

• فصل چهارم: همارزی LDP با انقباض و کاربردهای آماری f -واگرایی‌ها در این فصل، روابط و همارزی‌های موجود میان f -واگرایی‌های مختلف (مانند χ^2 و KL) در بستر محربمانگی موضعی

⁶⁷Contraction Behavior

بررسی می‌شود. نشان خواهیم داد که در رژیم‌های محروم‌نگی بالا (High Privacy)، این معیارها رفتاری مشابه از خود نشان می‌دهند و نتایج به دست آمده با یک معیار، قابل تعمیم به سایرین است.

- **فصل پنجم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها** در نهایت، در فصل آخر ضمن مرور دستاوردهای کلیدی پژوهش، به جمع‌بندی مباحث پرداخته و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی در این حوزه ارائه خواهیم داد.

فصل ۲

پیش‌نیازها

۱-۲ محرمانگی تفاضلی متمرکز (CDP)

مفهوم محرمانگی تفاضلی^۱ یا به اختصار DP- ϵ ، اولین بار توسط دُورک و همکاران^[۱۰] معرفی شد و به سرعت به استاندارد طلایی برای حفظ حریم خصوصی در تحلیل داده‌ها تبدیل گشت. این چارچوب، یک تعریف ریاضی قوی از حریم خصوصی ارائه می‌دهد که مبتنی بر پنهان‌سازی حضور یا عدم حضور یک فرد خاص در مجموعه داده است.

۱-۱-۲ مدل اعتماد و تعریف رسمی

در مدل متمرکز^۲، فرض بر این است که یک متصدی مورد اعتماد^۳ وجود دارد. تمام افراد داده‌های خام و حساس خود را در اختیار این متصدی قرار می‌دهند (شکل ۱-۲ را ببینید). متصدی، مجموعه داده‌ی کامل D را در اختیار دارد. وظیفه‌ی متصدی این است که با اجرای یک مکانیزم تصادفی^۴ M بر روی مجموعه داده‌ی D ، نتایجی (مثالاً پاسخ به یک پرس‌وجو^۵) را به صورت عمومی منتشر کند، به طوری که اطلاعات حساس افراد فاش نشود.

برای تعریف رسمی محرمانگی تفاضلی، مفاهیم الگوریتم (mekanizm) تصادفی، فاصله‌ی بین دو

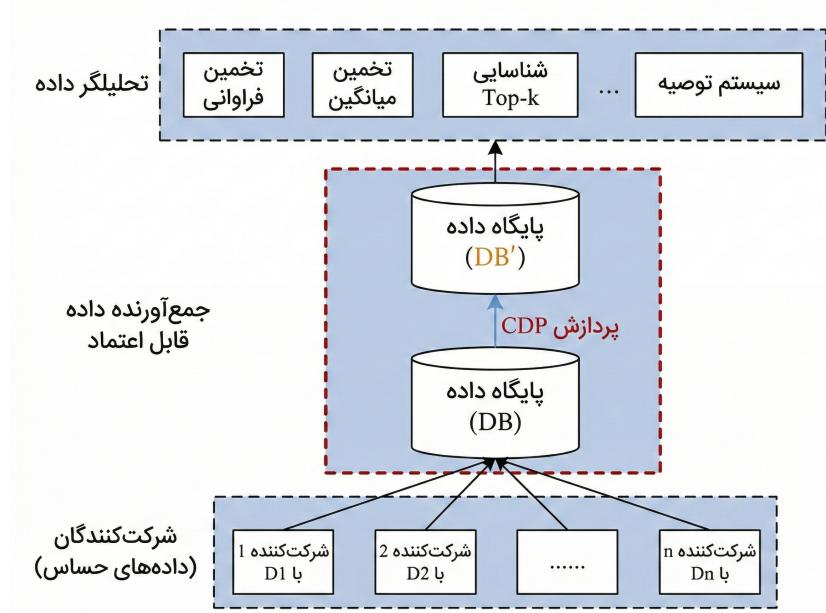
¹Differential Privacy

²Centralized

³Trusted Curator

⁴Randomized Mechanism

⁵Query



شکل ۱-۲: مدل محترمانگی تفاضلی متبرکز با یک متصلی مورد اعتماد.

پایگاه‌داده^۶ و سپس همسایگی^۷ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۲ (الگوریتم تصادفی) طبق تعریف کتاب اضافه شود. عکسش توهمین فولدر هست. همچنین تعریف λ و پایگاه‌داده هم اضافه شود.

تعریف ۲-۲ (فاصله بین دو پایگاه‌داده) نرم ℓ_1 یک پایگاه‌داده‌ی \mathcal{D} به صورت $\|\mathcal{D}\|_1$ نمایش و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathcal{D}\|_1 = \sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} |x_i|$$

فاصله‌ی ℓ_1 بین دو پایگاه‌داده \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_2 برابر است با $\|\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2\|_1$.

تعریف ۳-۲ (پایگاه‌داده‌های همسایه) دو پایگاه‌داده‌ی \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_2 را همسایه^۸ می‌گوییم (و با $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ نشان می‌دهیم) اگر $\|\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2\|_1 \leq 1$.

ایده‌ی اصلی محترمانگی تفاضلی این است که خروجی مکانیزم برای دو مجموعه داده‌ی همسایه باید از نظر آماری «شبیه» باشد، به طوری که مهاجم نتواند تشخیص دهد ورودی واقعی کدام بوده است.

⁶Database

⁷Neighboring

⁸Adjacent

تعريف ۴-۲ (ε -محرمانگی تفاضلی (ε -DP)) یک مکانیزم تصادفی M ، تعريف ε -محرمانگی تفاضلی را بآورده می‌سازد، اگر برای هر دو مجموعه داده‌ی همسایه‌ی \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_2 و برای هر زیرمجموعه S از خروجی‌های ممکن ($\text{Range}(M)$)، داشته باشیم:

$$\Pr[M(\mathcal{D}_1) \in S] \leq \exp(\varepsilon) \cdot \Pr[M(\mathcal{D}_2) \in S] \quad (1-2)$$

گاهی اوقات، یک تعريف انعطاف‌پذیرتر به نام (ε, δ) -DP نیز استفاده می‌شود که اجازه‌ی یک احتمال شکست کوچک δ را می‌دهد:

$$\Pr[M(\mathcal{D}_1) \in S] \leq \exp(\varepsilon) \cdot \Pr[M(\mathcal{D}_2) \in S] + \delta \quad (2-2)$$

۲-۱-۲ مکانیزم‌های پایه در CDP

برای دستیابی به ε -DP^{۱۰}، باید به پاسخ دقیق پرس‌وجو «نویز»^۹ اضافه کنیم. میزان نویز به حساسیت پرس‌وجو بستگی دارد.

تعريف ۵-۲ (حساسیت سراسری) برای یک تابع f ، حساسیت سراسری ℓ_1 ($\Delta_1 f$) و ℓ_2 ($\Delta_2 f$) به صورت زیر تعريف می‌شوند:

$$\Delta_1 f = \max_{\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2} \|f(\mathcal{D}_1) - f(\mathcal{D}_2)\|_1 \quad (3-2)$$

$$\Delta_2 f = \max_{\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2} \|f(\mathcal{D}_1) - f(\mathcal{D}_2)\|_2 \quad (4-2)$$

سه مکانیزم اساسی برای دستیابی به CDP عبارتند از:

- **مکانیزم لاپلاس**^{۱۱}: برای تابع عددی، با افزودن نویز از توزیع لاپلاس مناسب با حساسیت ℓ_1 ، می‌توان به ε -DP دست یافت:

$$M(\mathcal{D}) = f(\mathcal{D}) + \text{Lap}\left(\frac{\Delta_1 f}{\varepsilon}\right) \quad (5-2)$$

- **مکانیزم گوسی**^{۱۲}: این مکانیزم اغلب زمانی استفاده می‌شود که حساسیت ℓ_2 تابع کمتر از حساسیت ℓ_1 باشد. در اینجا نویز از توزیع نرمال (گوسی) افزوده می‌شود:

$$M(\mathcal{D}) = f(\mathcal{D}) + \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (6-2)$$

⁹Noise

¹⁰Sensitivity

¹¹Laplace

¹²Gaussian

که در آن $\frac{\Delta_2 f}{\varepsilon} \cdot \sqrt{2 \ln(1/25/\delta)}$ است. برخلاف مکانیزم لاپلاس، این مکانیزم تنها (ε, δ) -DP را (با $\delta > 0$) تضمین می‌کند.

- **مکانیزم نمایی^{۱۳}**: برای خروجی‌های غیر عددی (دسته‌ای)، از یک «تابع امتیاز» $q(\mathcal{D}, r)$ استفاده می‌شود. این مکانیزم خروجی r را با احتمالی متناسب با امتیاز آن برمی‌گرداند:

$$\Pr[\mathcal{M}(\mathcal{D}) = r] \propto \exp\left(\frac{\varepsilon \cdot q(\mathcal{D}, r)}{2\Delta q}\right) \quad (7-2)$$

۳-۱-۲ خواص کلیدی محترمانگی تفاضلی

قدرت چارچوب DP در خواص ترکیبی آن نهفته است:

- **مصنونیت در برابر پس‌پردازش^{۱۴}**: انجام هرگونه محاسبات بر روی خروجی یک مکانیزم ε -DP (بدون دسترسی مجدد به داده‌های اصلی)، نمی‌تواند سطح محترمانگی را کاهش دهد.

- **ترکیب‌پذیری^{۱۵}**: اگر چندین مکانیزم ε -DP را اجرا کنیم، بودجه‌های محترمانگی جمع می‌شوند.

– ترکیب‌پذیری پایه‌ای: اجرای k مکانیزم ε_i -DP منجر به $\sum \varepsilon_i$ -DP می‌شود.

– ترکیب‌پذیری پیشرفته: با پذیرش یک δ کوچک، می‌توان نشان داد که بودجه کل با نرخ \sqrt{k} رشد می‌کند (نه k).

- **محترمانگی گروهی^{۱۶}**: محترمانگی تفاضلی به طور طبیعی برای گروه‌هایی از افراد نیز صادق است. اگر دو پایگاه داده در k رکورد با هم متفاوت باشند، تضمین محترمانگی به صورت $k\varepsilon$ -DP برقرار خواهد بود. این یعنی با افزایش اندازه گروه، تضمین محترمانگی به صورت خطی تضعیف می‌شود.

۴-۱-۲ محدودیت مدل مت مرکز

با وجود تمام مزایا، مدل CDP یک نقطه‌ی ضعف اساسی دارد: نیاز به یک متصلی کاملاً مورد اعتماد. در بسیاری از سناریوهای دنیای واقعی (مانند جمع‌آوری داده از گوشی‌های هوشمند)، کاربران به سرور مرکزی اعتماد ندارند. این عدم اعتماد، ما را به سمت مدل جایگزین، یعنی «محترمانگی تفاضلی موضعی» سوق می‌دهد. در بخش بعد با محترمانگی تفاضلی موضعی و تعاریف و قضایای اساسی آن آشنا خواهیم شد.

¹³Exponential

¹⁴Post-processing Immunity

¹⁵Composition

¹⁶Group Privacy

۲-۲ محرمانگی تفاضلی موضعی

در فصل گذشته، مبانی نظری حریم خصوصی متمرکز (CDP) و ابزارهای آماری لازم برای تحلیل آن را مرور کردیم. در این فصل، به طور اختصاصی به چارچوب محرمانگی تفاضلی موضعی^{۱۷} (α -LDP) می‌پردازیم. این مدل، که امروزه در سیستم‌های توزیع شده و جمع‌آوری داده‌های بزرگ مقیاس کاربرد فراوان دارد، پارادایم اعتماد را از «سرور مرکزی» به «کاربر نهایی» تغییر می‌دهد.

۱-۲-۲ مقدمه و گذار از مدل متمرکز

همان‌طور که در بخش ۱-۲ دیدیم، مدل متمرکز نیازمند وجود یک متصلی مورد اعتماد^{۱۸} است که به داده‌های خام دسترسی داشته باشد. اگرچه این مدل دقت آماری بالایی را فراهم می‌کند، اما در دنیای واقعی با چالش‌های امنیتی و حقوقی جدی روبروست:

- **نقطه شکست مرکزی^{۱۹}:** سرور مرکزی هدف جذابی برای مهاجمان است. نشت اطلاعات از سرور (چه بر اثر هک و چه بر اثر خطای انسانی) حریم خصوصی تمام کاربران را به خطر می‌اندازد.
- **عدم اعتماد کاربران:** در بسیاری از کاربردها (مانند جمع‌آوری داده‌های پزشکی یا تاریخچه مرورگر)، کاربران تمایلی ندارند داده‌های حساس خود را حتی به یک سرور «مطمئن» بسپارند.

در پاسخ به این چالش‌ها، مدل محرمانگی تفاضلی موضعی مطرح شد. در α -LDP، فرآیند خصوصی‌سازی (افزودن نویز) به سمت کلاینت (کاربر) منتقل می‌شود. به این معنا که داده‌ها قبل از ترک دستگاه کاربر، نویزدار می‌شوند و سرور تنها به داده‌های بینام و نویزدار دسترسی دارد (شکل ۲-۲). این رویکرد توسط شرکت‌های بزرگ فناوری برای جمع‌آوری داده‌های تله‌تری پذیرفته شده است. برای مثال، گوگل از مکانیزم RAPPOR در مرورگر کروم، و اپل و مایکروسافت از روش‌های مشابهی برای جمع‌آوری داده‌های آماری از سیستم‌عامل‌های خود استفاده می‌کنند.

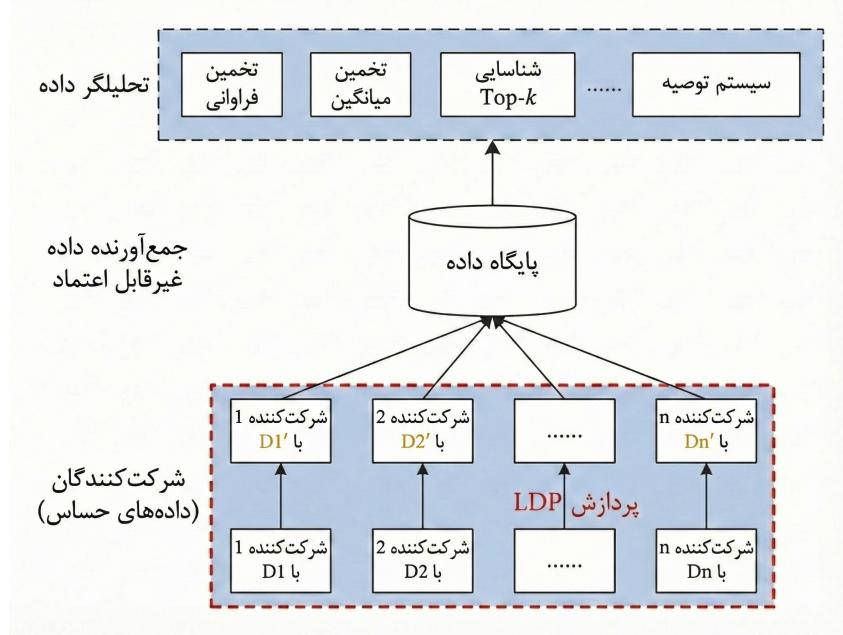
۲-۲-۲ تعاریف رسمی و مدل‌های محاسباتی

در مدل موضعی، ما n کاربر داریم که هر کدام یک داده‌ی خصوصی X_i از دامنه \mathcal{X} در اختیار دارند. هر کاربر به طور مستقل یک الگوریتم تصادفی (مکانیزم) را اجرا می‌کند و خروجی Z_i را منتشر می‌کند.

¹⁷Local Differential Privacy (LDP)

¹⁸Trusted Curator

¹⁹Single Point of Failure



شکل ۲-۲: مدل محترمانگی تفاضلی موضعی (α -LDP). نویز به صورت موضعی روی دستگاه کاربر اضافه می‌شود.

تعريف α -LDP

هسته‌ی اصلی این مدل، «تصادفی‌ساز موضعی» است.

تعريف ۶-۲ (تصادفی‌ساز موضعی^{۲۰}) یک مکانیزم تصادفی $Z \rightarrow \mathcal{M} : \mathcal{X}$ را یک تصادفی‌ساز موضعی می‌نامیم که ورودی $x \in \mathcal{X}$ را می‌گیرد و خروجی $z \in Z$ را بر اساس توزیع احتمال شرطی $Q(z|x)$ تولید می‌کند.

شرط محترمانگی در اینجا تضمین می‌کند که با مشاهده‌ی خروجی z ، تمایز قائل شدن بین هر دو ورودی اولیه x و x' دشوار باشد. تفاوت کلیدی این تعریف با مدل متمرکز در این است که در CDP ما دو پایگاه داده‌ی همسایه را مقایسه می‌کردیم، اما در اینجا هر دو مقدار ورودی ممکن مقایسه می‌شوند.

تعريف ۷-۲ (α -محترمانگی تفاضلی موضعی) یک مکانیزم M دارای α -محترمانگی تفاضلی موضعی $S \subseteq Z$ است اگر برای تمام جفت ورودی‌های $x, x' \in \mathcal{X}$ و هر زیرمجموعه از خروجی‌ها $\mathcal{S} \subseteq Z$ داشته باشیم:

$$\sup_S \frac{\Pr[M(x) \in \mathcal{S}]}{\Pr[M(x') \in \mathcal{S}]} \leq e^\alpha \quad (8-2)$$

(نکته: در متون آماری مانند [۸] معمولاً از پارامتر α به جای ε برای نمایش بودجه حریم خصوصی موضعی استفاده می‌شود تا تمایز آن با مدل متمرکز مشخص باشد. ما نیز در این فصل و فصول بعدی از این نمادگذاری پیروی می‌کنیم).

این تعریف معادل شرط زیر بر روی واگرایی ماکزیمم (D_∞) بین توزیع‌های شرطی است:

$$\sup_{x,x' \in \mathcal{X}} D_\infty(Q(\cdot|x)||Q(\cdot|x')) \leq \alpha \quad (9-2)$$

تعیین‌ها و خواص

علاوه بر تعریف استاندارد α -LDP (معادله ۲-۸)، دو مفهوم دیگر نیز در تحلیل‌های نظری و طراحی مکانیزم‌ها اهمیت دارند: محترمانگی تقریبی و خاصیت ترکیب.

تعریف ۲-۸ ((α, δ)–محترمانگی تفاضلی موضعی) یک مکانیزم تصادفی M دارای محترمانگی تفاضلی موضعی تقریبی یا α -LDP یا (δ, α) است اگر برای هر دو ورودی $x, x' \in \mathcal{X}$ و هر زیرمجموعه خروجی $Z \subseteq \mathcal{Z}$ داشته باشیم:

$$\Pr[M(x) \in Z] \leq e^\alpha \cdot \Pr[M(x') \in Z] + \delta \quad (10-2)$$

این تعریف (که در [۱۷] نیز بررسی شده است)، اجازه‌ی یک احتمال شکست کوچک δ را می‌دهد. اهمیت نظری این تعریف در آن است که ارتباط مستقیمی با واگرایی E_γ (که در فصل قبل معرفی شد) دارد.

قضیه ۱-۲ (ترکیب ترتیبی ۲۱) اگر یک کاربر در k مرحله‌ی مختلف در پروتکل‌های M_1, \dots, M_k شرکت کند که هر کدام به ترتیب دارای بودجه‌ی حریم خصوصی α_i باشند، آنگاه کل فرآیند دارای محترمانگی تفاضلی موضعی با بودجه‌ی $\sum_{i=1}^k \alpha_i$ خواهد بود. این خاصیت در تحلیل پروتکل‌های تعاملی (بخش بعد) که در آن خروجی‌های بعدی به خروجی‌های قبلی وابسته هستند، نقش بنیادین دارد.

پروتکل‌های تعاملی و غیرتعاملی

یکی از جنبه‌های مهم در تحلیل نرخ‌های مینیماکس (که در فصل بعد به آن می‌پردازیم)، نحوه‌ی تعامل کاربران با سرور است. دوچی و همکاران [۸] پروتکل‌های موضعی را به دو دسته تقسیم می‌کنند:

۱. پروتکل‌های غیرتعاملی^{۲۲}: در این حالت، خروجی هر کاربر Z_i تنها به ورودی خودش X_i وابسته است و مستقل از داده‌ها یا خروجی‌های سایر کاربران تولید می‌شود.

$$Z_i = \mathcal{M}_i(X_i) \quad (11-2)$$

²²Non-interactive

این مدل ساده‌ترین و رایج‌ترین شکل پیاده‌سازی α -LDP است.

۲. پروتکل‌های تعاملی (ترتیبی)^{۲۳}: در این حالت، مکانیزم کاربر i می‌تواند به خروجی‌های منتشر شده توسط کاربران قبلی (Z_1, \dots, Z_{i-1}) وابسته باشد. به عبارت دیگر، کanal ارتباطی i Q_i می‌تواند به صورت پویا بر اساس تاریخچه تغییر کند:

$$Z_i \sim Q_i(\cdot | X_i, Z_1, \dots, Z_{i-1}) \quad (12-2)$$

این مدل به الگوریتم‌های تطبیقی اجازه می‌دهد تا دقیق تخمین را بهبود بخشد. با این حال، همان‌طور که در فصل بعد خواهیم دید، حتی با وجود تعامل، محدودیت‌های بنیادی f -واگرایی همچنان مانع از کاهش چشمگیر نرخ خطأ می‌شوند.

۳-۲-۲ مکانیزم‌های پایه در α -LDP

در این بخش، مکانیزم‌های بنیادین را معرفی می‌کنیم که برای تحقق محترمانگی تفاضلی موضعی استفاده می‌شوند. این مکانیزم‌ها بلوک‌های سازنده‌ی پروتکل‌های پیچیده‌تر هستند و بسته به نوع داده (دودویی، دسته‌ای یا عددی) و اندازه دامنه انتخاب می‌شوند.

پاسخ تصادفی دودویی (RR)

پایه‌ای‌ترین و کلاسیک‌ترین مکانیزم در مدل موضعی، «پاسخ تصادفی»^{۲۴} است که دهه‌ها پیش از تعریف رسمی α -LDP توسط وارنر [۱۸] برای نظرسنجی‌های حساس معرفی شد. فرض کنید دامنه ورودی دودویی باشد ($\mathcal{X} = \{0, 1\}$).

مکانیزم \mathcal{M}_{RR} با ورودی $\{0, 1\}$ ، $x \in \{0, 1\}$ ، خروجی $\{0, 1\}$ را طبق احتمالات زیر تولید می‌کند:

$$\Pr[z = x] = p, \quad \Pr[z \neq x] = 1 - p \quad (13-2)$$

برای اینکه این مکانیزم شرط α -LDP را برآورده کند، طبق تعریف ۷-۲ باید نسبت احتمالات حداکثر e^α باشد:

$$\frac{\Pr[z = 1 | x = 1]}{\Pr[z = 1 | x = 0]} = \frac{p}{1 - p} \leq e^\alpha \quad (14-2)$$

بنابراین، برای دستیابی به کمترین خطأ، پارامتر احتمال p به صورت زیر تنظیم می‌شود:

$$p = \frac{e^\alpha}{1 + e^\alpha} \quad (15-2)$$

²³Sequential/Interactive

²⁴Randomized Response (RR)

در این حالت، واریانس تخمین‌گر حاصل از این مکانیزم برابر است با:

$$\text{Var}[\hat{x}] = \frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^2} \quad (16-2)$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای α ‌های کوچک، واریانس به سرعت (تقریباً با نرخ $1/\alpha^2$) افزایش می‌یابد که نشان‌دهندهٔ هزینهٔ بالای حریم خصوصی در دقت تخمین است.

پاسخ تصادفی تعمیم‌یافته (GRR)

زمانی که دامنهٔ ورودی شامل $2 > k$ عنصر باشد ($\mathcal{X} = \{1, \dots, k\}$), از نسخهٔ تعمیم‌یافتهٔ پاسخ تصادفی استفاده می‌شود [۱۲]. این روش تعمیم‌مستقیم RR برای دامنه‌های گسته است.

در این مکانیزم، برای ورودی x :

$$\Pr[\mathcal{M}(x) = z] = \begin{cases} p & \text{if } z = x \\ q & \text{if } z \neq x \end{cases} \quad (17-2)$$

از آنجا که مجموع احتمالات باید ۱ باشد، داریم $1 = p + (k-1)q$. همچنین شرط α -LDP ایجاب می‌کند که $e^\alpha \leq \frac{p}{q}$. با حل این دستگاه معادلات، مقادیر بهینه p و q به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$p = \frac{e^\alpha}{e^\alpha + k - 1}, \quad q = \frac{1}{e^\alpha + k - 1} \quad (18-2)$$

این مکانیزم برای دامنه‌های کوچک (k کوچک) بسیار کارآمد است و واریانس آن بهینه است. اما با افزایش k ، دقت آن به شدت کاهش می‌یابد زیرا احتمال گزارش پاسخ صحیح (p) با افزایش k کاهش می‌یابد و به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین برای دامنه‌های بزرگ (مانند لغات یک دیکشنری)، GRR گزینهٔ مناسبی نیست.

مکانیزم‌های مبتنی بر کدگذاری یگانی (UE)

برای غلبهٔ بر مشکل کاهش دقت GRR در دامنه‌های بزرگ، خانواده‌ای از مکانیزم‌ها تحت عنوان «کدگذاری یگانی»^{۲۶} توسعهٔ یافته‌اند. این رویکرد اساس پروتکل مشهور RAPPOR گوگل را تشکیل می‌دهد [۱۷].

در این روش، فرآیند خصوصی‌سازی طی دو مرحلهٔ انجام می‌شود:

²⁵Generalized Randomized Response (GRR)

²⁶Unary Encoding (UE)

۱. کدگذاری (Encoding) : ورودی $\{1, \dots, k\}$ به یک بردار بیتی v به طول k تبدیل می‌شود که تنها در موقعیت x برابر با ۱ و در سایر جاهای ۰ است (One-hot encoding).

۲. اختلال (Perturbation) : هر بیت این بردار به صورت مستقل با استفاده از یک مکانیزم باینری معکوس می‌شود.

اگر v_i بیت i -ام بردار کدگذاری شده باشد، خروجی z_i به صورت زیر تولید می‌شود:

$$\Pr[z_i = 1] = \begin{cases} p & \text{if } v_i = 1 \\ q & \text{if } v_i = 0 \end{cases} \quad (19-2)$$

بر اساس انتخاب مقادیر p و q ، دو مکانیزم مهم در این خانواده تعریف می‌شوند:

- کدگذاری یگانی متقارن (SUE) : که به آن Basic RAPPOR نیز گفته می‌شود. در این حالت، احتمالات تغییر بیت به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که مکانیزم متقارن باشد ($1 - p = q$). مقادیر بهینه عبارتند از:

$$p = \frac{e^{\alpha/2}}{e^{\alpha/2} + 1}, \quad q = \frac{1}{e^{\alpha/2} + 1} \quad (20-2)$$

مزیت SUE این است که واریانس تخمین برای هر آیتم مستقل از تعداد کل آیتم‌ها (k) است، اما به دلیل استفاده از نیمی از بودجه حریم خصوصی ($\alpha/2$) برای هر بیت، خطای آن همچنان قابل توجه است.

- کدگذاری یگانی بهینه (OUE) : وانگ و همکاران [۱۷] نشان دادند که برای تخمین فراوانی در دامنه‌های بزرگ، نیازی به متقارن بودن مکانیزم نیست. در روش OUE^{۲۷}، پارامترها به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که اطلاعات بیت‌های ۱ (سیگنال اصلی) با بیشترین دقیقت حفظ شود ($p = 1/2$) و نویز روی بیت‌های ۰ (که تعدادشان زیاد است) کنترل شود:

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{e^\alpha + 1} \quad (21-2)$$

تحلیل‌های نظری و تجربی نشان می‌دهند که OUE برای های متوسط و بزرگ، واریانس کمتری نسبت به GRR و SUE دارد و استاندارد فعلی برای جمع‌آوری داده‌های دسته‌ای بزرگ مقیاس است.

²⁷Optimized Unary Encoding

مکانیزم لاپلاس موضعی

برای داده‌های عددی (مثالاً $[1, -1] \in x$)، استفاده از مکانیزم لاپلاس که در مدل متتمرکز محبوب است، در مدل موضعی نیز ممکن است اما با چالش‌هایی همراه است.

حساسیت سراسری (Δ) در مدل موضعی برابر با قطر دامنه است، زیرا هر دو ورودی $x, x' \in \mathcal{X}$ باید از نظر مکانیزم غیرقابل تمایز باشند. اگر دامنه ورودی $[1, -1] = \mathcal{X}$ باشد، حساسیت برابر است با:

$$\Delta = \max_{x, x'} |x - x'| = |1 - (-1)| = 2 \quad (22-2)$$

بنابراین، مکانیزم لاپلاس موضعی خروجی را به صورت زیر تولید می‌کند:

$$M_{Lap}(x) = x + \eta, \quad \eta \sim \text{Lap}\left(\frac{2}{\alpha}\right) \quad (23-2)$$

نکته مهمی که دوچی و همکاران [۸] به آن اشاره کرده‌اند این است که برخلاف مدل متتمرکز، مکانیزم لاپلاس در مدل موضعی برای ابعاد بالا ($d > 1$) زیر-بهینه^{۲۸} است و نرخ خطای آن بدتر از مکانیزم‌های پیشرفته‌تر (مانند نمونه‌برداری هایپرکیوب) است که در فصل‌های آینده به آن‌ها اشاره خواهیم کرد.

۴-۲-۲ چالش سودمندی در مدل موضعی

بهای عدم اعتماد به سرور، کاهش شدید سودمندی^{۲۹} آماری است. از آنجایی که نویز به داده‌ی هر فرد به صورت مستقل اضافه می‌شود، خطای تجمعی در مدل α -LDP- $O(1/n)$ بسیار بیشتر از مدل متتمرکز CDP است.

برای رسیدن به سطح دقت مشابه، مدل موضعی معمولاً^{۳۰} به تعداد کاربران n بسیار بیشتری نیاز دارد. به طور کلی، در حالی که خطای مکانیزم‌های CDP اغلب با $O(1/n)$ کاهش می‌یابد، خطای مکانیزم‌های α -LDP معمولاً^{۳۱} با $O(1/\sqrt{n})$ کاهش می‌یابد. این کاهش در «اندازه نمونه مؤثر» یکی از موضوعات اصلی است که در فصل آینده با استفاده از ابزارهای f -واگرایی آن را اثبات خواهیم کرد.

۳-۲ f -واگرایی‌ها

در بخش‌های قبلی، ما مکانیزم‌های محروم‌انگی تفاضلی را به عنوان روش‌هایی برای ایجاد «شباهت آماری» بین خروجی‌های دو پایگاه داده‌ی همسایه معرفی کردیم. در این بخش، ما ابزار ریاضیاتی اصلی برای سنجش

²⁸Sub-optimal

²⁹Utility

این «شباهت» یا «فاصله» بین توزیع‌های احتمالی را معرفی می‌کنیم. این ابزار، خانواده‌ی f -واگرایی‌ها^{۳۰} است که بسیاری از معیارهای رایج فاصله‌ی آماری را به عنوان حالت‌های خاص خود در بر می‌گیرد.

۱-۳-۲ تعریف f -واگرایی

مفهوم f -واگرایی اولین بار توسط سیسر [۶] و به طور همزمان توسط علی و سیلوی [۱] معرفی شد. این معیار، یک روش عمومی برای اندازه‌گیری تفاوت بین دو توزیع احتمال P و Q (تعریف شده بر روی یک فضای یکسان) ارائه می‌دهد.

تعریف ۹-۲ (f -واگرایی) فرض کنید P و Q دو توزیع احتمال باشند به طوری که P نسبت به Q مطلقاً پیوسته^{۳۱} باشد. فرض کنید p و q توابع چگالی احتمال (یا توابع جرم احتمال) آن‌ها باشند. برای هر تابع محدب $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که $f(0) = 0$ باشد، f -واگرایی P از Q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_f(P||Q) = \int q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) dx \quad (24-2)$$

در حالت گسسته، این تعریف به صورت حاصل جمع زیر در می‌آید:

$$D_f(P||Q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \quad (25-2)$$

تابع f «زنراتور» (تولیدکننده) واگرایی نامیده می‌شود و با انتخاب f ‌های متفاوت، می‌توان معیارهای فاصله یا واگرایی متفاوتی را به دست آورد. شرط $f(1) = 0$ تضمین می‌کند که اگر دو توزیع یکسان باشند ($P = Q$)، واگرایی آن‌ها صفر خواهد بود.

۲-۳-۲ نمونه‌های مهم f -واگرایی

بسیاری از معیارهای معروف در آمار و نظریه اطلاعات، حالت‌های خاصی از f -واگرایی هستند:

- **واگرایی کولبک-لایبلر^{۳۲}**: این معیار که به آن آنتروپی نسبی^{۳۳} نیز گفته می‌شود، با انتخاب تابع $f(t) = t \log t$ به دست می‌آید:

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_x p(x) \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \quad (26-2)$$

³⁰ f -divergences

³¹ Absolutely Continuous

³² Kullback-Leibler (KL) Divergence

³³ Relative Entropy

• فاصله‌ی واریانس کل^{۳۴}: فاصله‌ی TV (که اغلب با $d_{TV}(P, Q)$ نشان داده می‌شود) ارتباط

نزدیکی با f -واگرایی دارد و با انتخاب $|f(t) - f(x)|$ حاصل می‌شود:

$$d_{TV}(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_x |p(x) - q(x)| \quad (27-2)$$

• واگرایی کای-دو^{۳۵}: این معیار آماری با انتخاب $f(t) = (t - 1)^2$ به دست می‌آید:

$$\chi^2(P||Q) = \sum_x \frac{(p(x) - q(x))^2}{q(x)} \quad (28-2)$$

• فاصله‌ی هلینجر (مربع)^{۳۶}: این فاصله با انتخاب $f(t) = (\sqrt{t} - 1)^2$ (یا معادل آن $= f(t) = (\sqrt{t} - 1)^2$) حاصل می‌شود:

$$H^2(P, Q) = \sum_x (\sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)})^2 \quad (29-2)$$

۳-۳-۲ ارتباط f -واگرایی‌ها با یکدیگر

این واگرایی‌ها مستقل از هم نیستند و روابط ریاضی مهمی بین آن‌ها برقرار است. یکی از مشهورترین این روابط، نامساوی پینسکر^{۳۷} است که ارتباط بین واگرایی KL و فاصله‌ی TV را نشان می‌دهد:

$$d_{TV}(P, Q) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} D_{KL}(P||Q) \quad (30-2)$$

این نامساوی‌ها در تحلیل‌های حریم خصوصی بسیار کاربردی هستند، زیرا به ما اجازه می‌دهند که با داشتن یک کران (حد) بر روی یک معیار واگرایی، بتوانیم کرانی برای سایر معیارها نیز به دست آوریم.

در فصل بعدی، ما به تفصیل بررسی خواهیم کرد که چگونه تضمین α -LDP (که در معادله ۸-۲ تعریف شد) مستقیماً منجر به ایجاد یک کران بالا بر روی f -واگرایی‌های مختلف بین توزیع‌های خروجی می‌شود.

۴-۲ مبانی آماری و نظریه اطلاعات

در بخش‌های پیشین، ابزارهای سنجش فاصله بین توزیع‌ها (مانند f -واگرایی‌ها) را معرفی کردیم. در این بخش، به معرفی چارچوب آماری می‌پردازیم که در آن از این ابزارها برای تحلیل حدود پایین خطأ در حضور

³⁴Total Variation (TV) Distance

³⁵Chi-Squared (χ^2) Divergence

³⁶Squared-Hellinger Distance

³⁷Pinsker's Inequality

محدودیت‌های محروم‌گی استفاده می‌شود. این تعاریف و قضایا عمده‌تاً³⁸ بر اساس چارچوب ارائه شده در [۸] تدوین شده‌اند.

۱-۴-۲ معیارهای فاصله اطلاعاتی

برای دو توزیع احتمال P و Q که روی فضای \mathcal{X} تعریف شده‌اند و نسبت به یک اندازه‌ی پایه μ مطلقاً³⁹ پیوسته هستند (با توابع چگالی p و q ، معیارهای زیر را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۰-۲ (واگرایی کولبک-لایبلر) واگرایی کولبک-لایبلر (KL) بین دو توزیع P و Q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{KL}(P||Q) = \int_{\mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} d\mu(x) \quad (31-2)$$

تعریف ۱۱-۲ (فاصله‌ی واریانس کل) فاصله‌ی واریانس کل⁴⁰ بین دو توزیع P و Q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|P - Q\|_{TV} = \sup_{S \in \sigma(\mathcal{X})} |P(S) - Q(S)| = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{X}} |p(x) - q(x)| d\mu(x) \quad (32-2)$$

تعریف ۱۲-۲ (اطلاعات متقابل) اگر X و V دو متغیر تصادفی باشند، اطلاعات متقابل⁴¹ بین آن‌ها به صورت امید ریاضی واگرایی KL بین توزیع شرطی و توزیع حاشیه‌ای تعریف می‌شود:

$$I(X; V) = D_{KL}(P_{X,V} || P_X \otimes P_V) = \mathbb{E}_V [D_{KL}(P_{X|V} || P_X)] \quad (33-2)$$

این معیار نقش کلیدی در نامساوی فانو (که در ادامه می‌آید) ایفا می‌کند.

۲-۴-۲ ریسک مینیماکس

در نظریه تصمیم آماری، هدف تخمین یک پارامتر $(P)\theta$ از یک توزیع ناشناخته $P \in \mathcal{P}$ است. اگر $\hat{\theta}$ یک تخمین‌گر باشد که تابعی از داده‌های مشاهده شده (مانند Z_1, \dots, Z_n) است، کیفیت آن با استفاده از یک تابع زیان صعودی $\rho \circ \Phi$ سنجیده می‌شود (که ρ یک شبهمتر روی فضای پارامتر است).

نرخ مینیماکس⁴⁰، کمترین خطای ممکنی است که یک تخمین‌گر در بدترین سناریو (بدترین توزیع P در کلاس \mathcal{P}) متحمل می‌شود.

³⁸Total Variation Distance

³⁹Mutual Information

⁴⁰Minimax Rate

تعريف ۱۳-۲ (نرخ مینیماکس) برای یک کلاس از توزیع‌ها \mathcal{P} و پارامتر θ ، نرخ مینیماکس \mathfrak{M}_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathfrak{M}_n(\theta(\mathcal{P}), \Phi \circ \rho) = \inf_{\hat{\theta}} \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P[\Phi(\rho(\hat{\theta}(Z^n), \theta(P)))] \quad (34-2)$$

که در آن اینفیم روى تمام تخمین‌گرهای ممکن $\hat{\theta}$ گرفته می‌شود.

در حالتی که محدودیت محرومگی تفاضلی موضعی با پارامتر α وجود داشته باشد، نرخ مینیماکس خصوصی $(\alpha\text{-Private Minimax Rate})$ با در نظر گرفتن اینفیم روى تمام مکانیزم‌های کانال Q که شرط $\text{LDP-}\alpha$ را برآورده می‌کنند، تعریف می‌شود [A].

۵-۲ آزمون فرض آماری و روش تقلیل

برای اثبات حدود پایین نرخ‌های مینیماکس، روش استاندارد این است که مسئله‌ی تخمین پارامتر را به یک مسئله‌ی آزمون فرض^{۴۱} تقلیل دهیم. ایده اصلی این است: اگر نتوانیم بین چند مقدار گسسته از پارامتر با دقت بالا تمایز قائل شویم، قطعاً نمی‌توانیم پارامتر را در فضای پیوسته با خطای کم تخمین بزنیم.

۱-۵-۲ آزمون فرض دودویی

ساده‌ترین حالت آزمون فرض، تصمیم‌گیری بین دو توزیع احتمال P_0 و P_1 است. فرض کنید داده‌ی مشاهده شده Z از یکی از این دو توزیع تولید شده است. ما دو فرض داریم:

• فرض صفر (H_0): $Z \sim P_0$

• فرض مقابل (H_1): $Z \sim P_1$

یک آزمون (یا تابع تست) $\psi : \mathcal{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ تابعی است که بر اساس داده‌ی مشاهده شده، حدس می‌زند کدام فرض صحیح است. خطای این آزمون به صورت مجموع احتمال خطای نوع اول و دوم تعریف می‌شود:

$$P_{err}(\psi) = \Pr_{H_0}(\psi(Z) = 1) + \Pr_{H_1}(\psi(Z) = 0) \quad (35-2)$$

⁴¹Hypothesis Testing

لم نیمن-پیرسون^{۴۲} نشان می‌دهد که کمترین خطای ممکن برای هر آزمون دودویی، مستقیماً با فاصله‌ی واریانس کل (d_{TV}) بین دو توزیع ارتباط دارد:

$$\inf_{\psi} P_{err}(\psi) = 1 - \|P_0 - P_1\|_{TV} \quad (36-2)$$

این رابطه نشان می‌دهد که هرچه دو توزیع P_0 و P_1 به هم شبیه‌تر باشند (فاصله‌ی TV کمتر)، احتمال خطای بیشتر شده و به ۱ (حدس تصادفی) نزدیک‌تر می‌شود. در فضای α -LDP، نویز اضافه شده باعث کاهش شدید فاصله‌ی TV و در نتیجه افزایش خطای آزمون می‌شود.

۲-۵-۲ تقلیل تخمین به آزمون (روش بسته‌بندی)

برای استفاده از ابزارهای آزمون فرض در مسئله‌ی تخمین نرخ مینیماکس (معادله ۳۴-۲)، از تکنیک گسسته‌سازی فضای پارامتر Θ استفاده می‌کنیم. این روش شامل مراحل زیر است:

۱. ساخت مجموعه‌ی بسته‌بندی^{۴۳}: مجموعه‌ای متناهی از پارامترها $\Theta \subset \{\theta_1, \dots, \theta_M\}$ را

انتخاب می‌کنیم به طوری که از یکدیگر فاصله‌ی معناداری داشته باشند. به طور دقیق‌تر، اگر ρ متريک خطای باشد، برای هر $j \neq i$ باید داشته باشیم $\rho(\theta_i, \theta_j) \geq 2\delta$.

۲. تعریف مسئله‌ی آزمون: فرض می‌کنیم طبیعت^{۴۴} یک اندیس V را به صورت تصادفی و یکنواخت از

مجموعه $\{1, \dots, M\}$ انتخاب می‌کند و داده‌ها بر اساس توزیع P_{θ_V} تولید می‌شوند. هدف، یافتن

V بر اساس داده‌های مشاهده شده است.

۳. ارتباط خطاهای تخمین‌گر $\hat{\theta}$: وجود داشته باشد که خطای تخمین آن با احتمال بالا کمتر از δ

باشد، می‌توانیم از آن برای حل مسئله‌ی آزمون فرض استفاده کنیم (با انتخاب نزدیک‌ترین θ_i به $\hat{\theta}$).

بنابراین، کران پایین روی خطای آزمون فرض، یک کران پایین برای خطای تخمین ایجاد می‌کند:

$$\mathfrak{M}_n(\theta(\mathcal{P})) \geq \Phi(\delta) \cdot \inf_{\psi} \Pr(\psi(Z^n) \neq V) \quad (37-2)$$

۳-۵-۲ نامساوی‌های کران پایین

برای اثبات کران‌های پایین، سه روش اصلی که بر پایه f -واگرایی‌ها بنا شده‌اند را معرفی می‌کنیم:

⁴²Neyman-Pearson Lemma

⁴³Packing Set

⁴⁴Nature

قضیه‌ی ۲-۲ (نامساوی لو کم^{۴۵}) این روش برای آزمون بین دو توزیع P_1 و P_2 استفاده می‌شود. کمینه احتمال خطأ با استفاده از فاصله‌ی واریانس کل (رابطه ۲-۳۲) کران دار می‌شود:

$$\inf_{\psi} \Pr(\psi(Z^n) \neq V) \geq \frac{1}{2} (1 - \|P_1^n - P_2^n\|_{TV}) \quad (38-2)$$

این روش زمانی مفید است که مسئله را به تشخیص بین دو حالت ساده تقلیل دهیم.

قضیه‌ی ۲-۳ (نامساوی فانو^{۴۶}) زمانی که پارامتر مورد نظر متعلق به مجموعه‌ای بزرگتر \mathcal{V} باشد (تعداد فرضیه‌ها $2 > |\mathcal{V}|$ ، نامساوی فانو کران پایین قوی‌تری ارائه می‌دهد که مبتنی بر اطلاعات متقابل است:

$$\inf_{\psi} \Pr(\psi(Z^n) \neq V) \geq 1 - \frac{I(Z^n; V) + \log |\mathcal{V}|}{\log |\mathcal{V}|} \quad (39-2)$$

که در آن V متغیر تصادفی یکنواخت روی مجموعه اندیس‌ها \mathcal{V} است.

لم ۴-۲ (لم اسود^{۴۷}) این لم مسئله تخمین را به چندین آزمون فرض دودویی مستقل روی مختصات یک ابرمکعب $\{1, 0\}^d$ تبدیل می‌کند. نسخه دقیق‌تر آن که در [۱] استفاده شده است، کران پایین را براساس فاصله‌ی واریانس کل توزیع‌های مخلوط حاشیه‌ای بیان می‌کند:

$$\mathfrak{M}_n(\theta(\mathcal{P})) \geq \delta \sum_{j=1}^d [1 - \|M_{+j}^n - M_{-j}^n\|_{TV}] \quad (40-2)$$

که در آن M_{+j}^n و M_{-j}^n توزیع‌های حاشیه‌ای مخلوط روی مقادیر ۰ و ۱ در بعد j -ام هستند.

فصل ۳

تحلیل‌های مبتنی بر انقباض و نرخ‌های مینیماکس

۱-۳ مقدمه

در فصل پیشین، تعاریف پایه محرمانگی تفاضلی موضعی (LDP) و مکانیزم‌های ابتدایی آن را بررسی کردیم. همان‌طور که دیدیم، چالش اصلی در مدل موضعی، کاهش شدید نسبت سیگنال به نویز است. برای تحلیل دقیق این پدیده و یافتن حدود نهایی دقت آماری، نیازمند ابزارهای قوی‌تری هستیم.

در این فصل، به بررسی چارچوب نظری استانداردی می‌پردازیم که توسط دوچی و همکاران [۸] توسعه داده شده است. ایده مرکزی این چارچوب، نگاه به مکانیزم‌های محرمانگی به عنوان «عملگرهای انقباضی»^۱ است. به بیان شهودی، اعمال شرط α -LDP باعث می‌شود که توزیع‌های خروجی $(x|M)$ و $(x'|M)$ بسیار به یکدیگر شبیه شوند، حتی اگر ورودی‌های x و x' کاملاً متفاوت باشند.

ما نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان این شباهت اجباری را با استفاده از نامساوی‌های پردازش داده و f -واگرایی‌ها (به‌ویژه واگرایی کولبک-لایبلر) مدل‌سازی کرد و از آن برای اثبات نرخ‌های مینیماکس در مسائل تخمین آماری استفاده نمود [۸].

۲-۳ محرمانگی به عنوان انقباض اطلاعاتی

یکی از ویژگی‌های بنیادین نظریه اطلاعات، «نامساوی پردازش داده»^۲ است که بیان می‌کند پردازش روی داده‌ها (بدون دسترسی به منبع اصلی) نمی‌تواند اطلاعات متقابل را افزایش دهد. در زمینه محرمانگی، ما

¹Contraction Operators

²Data Processing Inequality

با نسخه قوی‌تری از این مفهوم سروکار داریم که به آن «نامساوی قوی پردازش داده»^۳ می‌گویند [۳].

فرض کنید M یک مکانیزم $LDP-\alpha$ -بашد. هدف ما یافتن کرانی برای واگرایی بین توزیع‌های خروجی بر حسب واگرایی ورودی‌هاست. دوچی و همکاران نشان دادند که مکانیزم‌های موضعی باعث انقباض شدید در واگرایی KL می‌شوند.

قضیه ۱-۳ (انقباض KL در مکانیزم‌های موضعی) فرض کنید M یک مکانیزم $LDP-\alpha$ -باشد. برای هر دو ورودی $x, x' \in \mathcal{X}$, واگرایی کولبک-لایلر بین توزیع‌های خروجی متناظر $M(\cdot|x)$ و $M(\cdot|x')$ با رابطه زیر محدود می‌شود:

$$D_{KL}(M(\cdot|x) \| M(\cdot|x')) \leq 4(e^\alpha - 1)^2 \quad (1-3)$$

به طور دقیق‌تر، اگر $1 \leq \alpha$ باشد، این کران به صورت $O(\alpha^2)$ رفتار می‌کند [۱].

اثبات. برای اثبات دقیق این قضیه، از تعریف واگرایی KL شروع می‌کنیم. فرض کنید $(z|x)$ و $(z'|x')$ چگالی‌های احتمال خروجی باشند. طبق تعریف $LDP-\alpha$ -می‌دانیم که برای هر $z \in \mathcal{Z}$:

$$e^{-\alpha} \leq \frac{q(z|x)}{q(z|x')} \leq e^\alpha \quad (2-3)$$

این شرط تضمین می‌کند که نسبت درست‌نمایی‌ها حول عدد ۱ محدود است. با بسط تیلور تابع $\log t$ حول $t = 1$ و استفاده از خواص تحدب، می‌توان نشان داد که:

$$D_{KL}(P \| Q) = \int p(z) \log \frac{p(z)}{q(z)} dz \quad (3-3)$$

$$\leq \int p(z) \left(\frac{p(z)}{q(z)} - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p(z)}{q(z)} - 1 \right)^2 \right) dz \quad (4-3)$$

با اعمال کران‌های $LDP-\alpha$ -بر روی نسبت p/q ، جمله درجه اول صفر می‌شود و جمله درجه دوم ضریب $(1 - e^\alpha)^2$ را تولید می‌کند. جزئیات کامل این محاسبات در لم ۱ مقاله [۱] آمده است. نکته کلیدی این است که برای α کوچک، فاصله KL به صورت مربعی با α کاهش می‌یابد. \square

این قضیه ابزار بسیار قدرتمندی است. به جای اینکه مستقیماً با تعریف دشوار $LDP-\alpha$ -کار کنیم، می‌توانیم از این کران ساده در نامساوی‌هایی مثل فانو استفاده کنیم. همچنین مطالعات جدیدتر نشان داده‌اند که این انقباض را می‌توان با استفاده از معیارهای دیگری نظیر اطلاعات متقابل [۵] یا واگرایی E_γ [۲] نیز بیان کرد که در فصل بعد به آن می‌پردازیم.

³Strong Data Processing Inequality (SDPI)

۱-۲-۳ انقباض در فاصله واریانس کل

علاوه بر KL، کران مشابهی برای فاصله واریانس کل (TV) نیز ارائه شده است که در استفاده از روش «لم لو کم^۴» کاربرد دارد [۸]:

قضیه‌ی ۲-۳ (انقباض TV) تحت شرایط مشابه، برای هر مکانیزم α -LDP:

$$\|\mathcal{M}(\cdot|x) - \mathcal{M}(\cdot|x')\|_{TV} \leq \min\{1, e^\alpha - 1\} \cdot \|x - x'\|. \quad (5-3)$$

(در اینجا $\|x - x'\|$ نشان‌دهنده فاصله همینگ یا متريک مجزا روی ورودی است). برای α کوچک، اين رابطه بيان می‌کند که فاصله آماری خروجي‌ها نمی‌تواند بيشتر از $O(\alpha)$ باشد.

۳-۳ تحليل نرخ‌های مينيماكس با استفاده از انقباض

حال که ابزار انقباض را در اختیار داریم، می‌توانیم استراتژی کلی اثبات حدود پایین^۵ در مدل موضعی را صورت‌بندی کنیم. این استراتژی که توسط دوچی [۸] و بعدها با جزئیات بیشتر در [۹] بسط داده شد، شامل سه گام است:

۱. تقلیل به آزمون فرض: تبدیل مسئله تخمین پارامتر θ به مسئله تشخیص اندیس V در یک مجموعه متناهی (استفاده از LM فانو یا اسود).

۲. کران‌دار کردن اطلاعات متقابل: استفاده از خاصیت انقباض α -LDP برای محدود کردن اطلاعاتی که نمونه‌های مشاهده شده Z_1, \dots, Z_n درباره اندیس V می‌دهند [۵].

۳. محاسبه ریسک نهایی: ترکیب نتایج برای رسیدن به کران پایین خطای تخمین.

مهم‌ترین گام، گام دوم است. طبق نامساوی قوى پردازش داده برای مدل موضعی، داریم:

$$I(V; Z^n) \leq \sum_{i=1}^n I(V; Z_i) \leq n \cdot \alpha^2 \cdot C \quad (6-3)$$

که در آن C ثابتی است که به هندسه مسئله بستگی دارد. این رابطه نشان می‌دهد که اطلاعات موثر با نرخ $n\alpha^2$ رشد می‌کند، نه n . این همان دلیلی است که «اندازه نمونه موثر» در مدل موضعی برابر با $n\alpha^2$ در نظر گرفته می‌شود.

⁴Le Cam

⁵Lower Bounds

۴-۳ مطالعه موردی: تخمین میانگین

برای نمایش قدرت این چارچوب، مسئله کلاسیک تخمین میانگین را در نظر می‌گیریم. فرض کنید هر کاربر i برداری $X_i \in [-1, 1]^d$ دارد و هدف تخمین میانگین جامعه $\mu = \mathbb{E}_X$ است. معیار خطا را «میانگین مربعات خطای میانگین» (MSE) در نظر می‌گیریم.

قضیه ۴-۳ (کران پایین تخمین میانگین) برای هر مکانیزم $LDP-\alpha$ -گرایی، ماکسیمم خطای مورد انتظار با رابطه زیر محدود می‌شود [۱]:

$$\inf_{\hat{\mu}, \mathcal{M}} \sup_P \mathbb{E}_{\|\hat{\mu} - \mu\|^2} \geq \Omega \left(\frac{d}{n \min\{\alpha, \alpha^2\}} \right) \quad (4-3)$$

تحلیل اثبات: برای اثبات این کران، از لم اسود استفاده می‌کنیم. فضای پارامتر را به صورت یک ابرمکعب $\{-1, 1\}^d$ گسترش می‌کنیم. طبق لم اسود، خطای مجموع فاصله‌های TV بین توزیع‌های شرطی مرتبط است. با استفاده از قضیه انقباض ۴-۳ و نامساوی پینسکر، می‌دانیم که:

$$\|\mathcal{M}(\cdot|x) - \mathcal{M}(\cdot|x')\|_{TV}^2 \leq \frac{1}{\alpha} D_{KL}(\mathcal{M}(\cdot|x) || \mathcal{M}(\cdot|x')) \leq O(\alpha^2) \quad (4-4)$$

بنابراین فاصله TV حداکثر از مرتبه α است. با جایگذاری این مقدار در لم اسود، کران پایین $\frac{1}{n\alpha^2}$ حاصل می‌شود.

این نتیجه نشان می‌دهد که برای رسیدن به خطای کم در مدل موضعی، تعداد داده‌ها باید متناسب با α^2/α افزایش یابد، که هزینه‌ی بسیار سنگین‌تری نسبت به مدل متغیر (که متناسب با $1/\varepsilon$ است) دارد.

۵-۳ محدودیت‌های تحلیل کلاسیک

با وجود موفقیت چارچوب دوچی در اثبات نرخ‌های مینیماکس بهینه برای α ‌های کوچک (رزیم محترمانگی بالا)، این روش در رزیم α ‌های بزرگ (محترمانگی پایین) دچار ضعف است.

همان‌طور که در رابطه (۴-۳) دیدیم، کران انقباض KL با ضریب $(1 - e^\alpha)^2$ رشد می‌کند. زمانی که α بزرگ باشد، این کران به سرعت به بینهایت می‌کند و اطلاعاتی فراتر از کران بدیهی به ما نمی‌دهد. این در حالی است که به طور شهودی، حتی با α بزرگ، مکانیزم همچنان باید مقداری انقباض ایجاد کند.

این محدودیت ناشی از ذات واگرایی KL است که رفتار دنباله‌های توزیع را با حساسیت زیادی وزن دهدی می‌کند. برای رفع این مشکل و به دست آوردن تحلیل‌های دقیق‌تر^۶ که در تمام بازه‌های α معتبر باشند، نیازمند

⁶Tight

معیار هندسی متفاوتی هستیم. این نیاز، انگیزه اصلی معرفی واگرایی‌های جدید مانند f – واگرایی‌های خاص (نظیر E_7) است [۲، ۳] که در فصل آینده به تفصیل به آن خواهیم پرداخت.

فصل ۴

همارزی E_γ -LDP-واگرایی و انقباض

۱-۴ مقدمه و انگیزه

در فصل پیشین، دیدیم که چگونه دوچی و همکاران [۸] از واگرایی کولبک-لایلر (KL) برای تحلیل محترمانگی تفاضلی موضعی استفاده کردند. اگرچه کرانهای آنها برای رژیم‌های محترمانگی بالا (α کوچک) بسیار کارآمد هستند، اما در رژیم‌های α متوسط و بزرگ، دقت خود را از دست می‌دهند.

مشکل اصلی در آنجاست که واگرایی KL متريک «بومی» برای تعریف α -LDP می‌باشد. تعريف α -LDP (معادله ۸-۲) مبنی بر نسبت احتمالات است، در حالی که KL مبنی بر لگاریتم نسبت‌هاست. این نامخوانی باعث می‌شود که در تبدیل شرایط α -LDP به کرانهای KL، اطلاعاتی از دست برود (lossy conversion).

در این فصل، نشان می‌دهیم که یک معیار واگرایی دیگر به نام E_γ -واگرایی وجود دارد که دقیقاً ساختار هندسی α -LDP را تسخیر می‌کند. ما ثابت خواهیم کرد که شرط E_γ -واگرایی دقیقاً معادل صفر شدن سایر واگرایی‌ها است. سپس از این همارزی برای استخراج کرانهای انقباض دقیق^۱ برای E_γ -واگرایی (برای $e^\alpha = \gamma$) است. [۲]

¹Tight

۲-۴ معرفی E_γ -واگرایی

-واگرایی یکی از اعضای کمتر شناخته شدهی خانواده f -واگرایی هاست که در نظریه اطلاعات برای مقایسه نسبت درست نمایی توزیع‌ها کاربرد دارد.

تعريف ۱-۴ (-واگرایی) فرض کنید P و Q دو توزیع احتمال باشند و $1 \geq \gamma \geq 0$ یک عدد حقیقی باشد.
-واگرایی بین P و Q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\gamma(P||Q) = \sup_{\mathcal{S} \in \sigma(\mathcal{X})} (P(\mathcal{S}) - \gamma Q(\mathcal{S})) \quad (1-4)$$

این تعریف را می‌توان به صورت بسطه‌ی زیر نیز نوشت:

$$E_\gamma(P||Q) = \int_{\mathcal{X}} \max\{\cdot, p(x) - \gamma q(x)\} d\mu(x) \quad (2-4)$$

که در آن p و q توابع چگالی احتمال هستند.

۱-۲-۴ خواص هندسی

این واگرایی خواص جالبی دارد که آن را برای تحلیل محروم‌نگی ایده‌آل می‌کند:

- ارتباط با فاصله واریانس کل: اگر $\gamma = 1$ باشد، داریم:

$$E_1(P||Q) = \sup_{\mathcal{S}} (P(\mathcal{S}) - Q(\mathcal{S})) = \|P - Q\|_{TV} \quad (3-4)$$

بنابراین E_γ تعمیمی از فاصله TV است.

- غیرمنفی بودن: همواره $E_\gamma(P||Q) \geq 0$ نیست. در واقع، اگر نسبت $p(x)/q(x)$ همواره کمتر از γ باشد، این مقدار صفر می‌شود. دقیقاً همین ویژگی است که آن را به α -LDP-مرتبه می‌کند.

۳-۴ قضیه همارزی اصلی

اکنون به مهم‌ترین نتیجه‌ی نظری این پایان‌نامه می‌رسیم: اثبات اینکه α -LDP-چیزی جز محدودیت بر روی -واگرایی نیست.

قضیه‌ی ۱-۴ (همارزی- LDP_{α} و E_{γ}) یک مکانیزم \mathcal{M} در شرط LDP_{α} -صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای تمام جفت ورودی‌های $x, x' \in \mathcal{X}$

$$E_{e^{\alpha}}(\mathcal{M}(\cdot|x)||\mathcal{M}(\cdot|x')) = 0 \quad (4-4)$$

اثبات. اثبات را در دو جهت انجام می‌دهیم.

جهت اول (\Rightarrow): فرض کنید \mathcal{M} خاصیت LDP_{α} -دارد. طبق تعریف ۷-۲، برای هر زیرمجموعه خروجی $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Z}$ و هر $x, x' \in \mathcal{S}$:

$$\Pr[\mathcal{M}(x) \in \mathcal{S}] \leq e^{\alpha} \Pr[\mathcal{M}(x') \in \mathcal{S}] \quad (5-4)$$

این نامساوی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Pr[\mathcal{M}(x) \in \mathcal{S}] - e^{\alpha} \Pr[\mathcal{M}(x') \in \mathcal{S}] \leq 0 \quad (6-4)$$

از آنجایی که این رابطه برای تمام \mathcal{S} ‌ها برقرار است، سوپریمم آن نیز باید کوچکتر یا مساوی صفر باشد. اما طبق تعریف E_{γ} در معادله ۱-۴، این سوپریمم دقیقاً همان $E_{e^{\alpha}}$ است. چون E_{γ} نمی‌تواند منفی باشد (با انتخاب $\emptyset = \mathcal{S}$ مقدار حداقل صفر است)، پس حتماً برابر صفر است.

جهت دوم (\Leftarrow): فرض کنید $\Pr[\mathcal{M}(x) \in \mathcal{S}] - e^{\alpha} \Pr[\mathcal{M}(x') \in \mathcal{S}] \leq 0$. طبق تعریف سوپریمم، برای هر مجموعه دلخواه \mathcal{S} :

$$\Pr[\mathcal{M}(x) \in \mathcal{S}] - e^{\alpha} \Pr[\mathcal{M}(x') \in \mathcal{S}] \leq 0 \quad (7-4)$$

که بلافارسله نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\Pr[\mathcal{M}(x) \in \mathcal{S}]}{\Pr[\mathcal{M}(x') \in \mathcal{S}]} \leq e^{\alpha} \quad (8-4)$$

□ این دقیقاً همان تعریف LDP_{α} -است.

این قضیه ساده اما بنیادین، یک تفسیر هندسی دقیق از محرمانگی ارائه می‌دهد: LDP_{α} -یعنی توزیع‌های خروجی چنان به هم نزدیک باشند که هیچ بخشی از دامنه نتواند نسبت درست‌نمایی بیشتر از e^{α} ایجاد کند.

۴-۴ بهبود کران‌های انقباض

در فصل ۳ دیدیم که دوچی [۱] کران زیر را برای انقباض KL ارائه کرد:

$$D_{KL}(\mathcal{M}(\cdot|x) \parallel \mathcal{M}(\cdot|x')) \leq 4(e^\alpha - 1)^2 \quad (9-4)$$

حال با استفاده از چارچوب E_γ ، می‌توانیم کران‌های بسیار دقیق‌تری استخراج کنیم. آسوده و همکاران [۲] نشان داده‌اند که اگر شرط $E_{e^\alpha} = 0$ برقرار باشد، می‌توان کران‌های انقباض برای سایر f -واگرایی‌ها را از طریق بهینه‌سازی محدب به دست آورد.

قضیه‌ی ۲-۴ (کران دقیق انقباض KL) اگر \mathcal{M} یک مکانیزم α -LDP باشد، آنگاه:

$$D_{KL}(\mathcal{M}(\cdot|x) \parallel \mathcal{M}(\cdot|x')) \leq \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \cdot (e^\alpha - 1) \quad (10-4)$$

برای مقادیر کوچک α (رژیم محروم‌گی بالا)، این کران به $\alpha^2/2$ میل می‌کند که 4 برابر کوچکتر (بهتر) از کران دوچی است.

تحلیل مقایسه‌ای: باید رفتار دو کران را در $\alpha \rightarrow 0$ بررسی کنیم:

- کران دوچی: $4(e^\alpha - 1)^2 \approx 4\alpha^2$

- کران مبتنی بر E_γ : $\frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \approx \tanh(\alpha/2) \approx \alpha/2 \approx \frac{\alpha}{2} \cdot \alpha = \frac{\alpha^2}{2}$

این بهبود ضریب ثابت (از 4 به 0.5) در تحلیل‌های مینیماکس بسیار حیاتی است و نشان می‌دهد که «اندازه نمونه موثر» واقعی می‌تواند تا 8 برابر بهتر از چیزی باشد که آنالیزهای قبلی نشان می‌دادند.

۵-۴ تعمیم به محروم‌گی تقریبی (α, δ) -LDP

یکی دیگر از قدرت‌های چارچوب E_γ ، توانایی آن در توصیف ساده‌ی محروم‌گی تقریبی است. یادآوری می‌کنیم که (α, δ) -LDP شرط زیر را دارد:

$$\Pr[\mathcal{M}(x) \in \mathcal{S}] \leq e^\alpha \Pr[\mathcal{M}(x') \in \mathcal{S}] + \delta \quad (11-4)$$

با بازنویسی این رابطه داریم:

$$\sup_S (\Pr[\mathcal{M}(x) \in \mathcal{S}] - e^\alpha \Pr[\mathcal{M}(x') \in \mathcal{S}]) \leq \delta \quad (12-4)$$

که دقیقاً معادل است با:

$$E_{e^\alpha}(\mathcal{M}(\cdot|x)||\mathcal{M}(\cdot|x')) \leq \delta \quad (13-4)$$

نتیجه‌ی ۳-۴ محرمانگی تقریبی $LDP_{\alpha, \delta}$ - E_{e^α} -واگرایی توزیع‌های خروجی به مقدار δ است. این نتیجه نشان می‌دهد که E_γ -واگرایی طبیعی‌ترین زبان برای صحبت درباره محرمانگی تفاضلی (چه خالص و چه تقریبی) است.

۶-۴ کاربرد در تخمین توزیع گستته

برای نشان دادن کاربرد عملی این نتایج، مسئله تخمین توزیع احتمال روی یک دامنه k -تایی را در نظر بگیرید. با استفاده از تکنیک‌های انقباض E_γ ، می‌توان نشان داد که نرخ مینیماکس برای این مسئله تحت شرط α -LDP برابر است با:

$$\mathfrak{M}_n \asymp \frac{k}{n(e^\alpha - 1)^2} \quad (14-4)$$

در حالی که استفاده از تکنیک‌های کلاسیک (دوچی)، جمله‌ای به صورت $\frac{k}{n\alpha^2}$ را پیشنهاد می‌کرد. تفاوت این دو عبارت در رژیم α بزرگ (محرمانگی کم) آشکار می‌شود؛ جایی که $(1 - e^\alpha)^2$ به صورت نمایی رشد می‌کند و نشان می‌دهد که دقت می‌تواند بسیار سریع‌تر از پیش‌بینی‌های قبلی بهبود یابد.

۷-۴ انقباض قوی برای خانواده‌ی f -واگرایی‌ها

تا اینجا دیدیم که شرط α -LDP معادل صفر شدن E_{e^α} -واگرایی است. یک پرسش طبیعی و بسیار مهم این است: آیا این شرط بر روی سایر معیارهای فاصله (مثل χ^2 یا هلینجر) نیز انقباض ایجاد می‌کند؟ پاسخ مثبت است. در مقاله‌ی اخیر آسوده و ژانگ [۳]، نشان داده شده است که مکانیزم‌های موضعی خاصیت «انقباض قوی» را برای طیف وسیعی از واگرایی‌ها به ارمغان می‌آورند.

۱-۷-۴ کران دقیق برای واگرایی کای-دو (χ^2)

یکی از مهم‌ترین نتایج این پژوهش، ارائه‌ی یک ضریب انقباض دقیق برای واگرایی χ^2 است. اهمیت این واگرایی در آن است که کار با آن در محاسبات واریانس و کران‌های مینیماکس بسیار ساده‌تر از KL است.

قضیه‌ی ۴-۴ (انقباض χ^2) فرض کنید M یک مکانیزم α -LDP باشد. برای هر دو توزیع ورودی P و Q ، واگرایی کای-دو بین توزیع‌های خروجی با رابطه زیر محدود می‌شود:

$$\chi^2(MP||MQ) \leq \eta_\alpha \cdot \chi^2(P||Q) \quad (15-4)$$

که در آن η_α ضریب انقباض بهینه است و برابر است با:

$$\eta_\alpha = \left(\frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \right)^2 \quad (16-4)$$

تحلیل مجانی: برای مقادیر کوچک α (رژیم محترمانگی بالا)، داریم:

$$\eta_\alpha \approx \left(\frac{1 + \alpha - 1}{1 + \alpha + 1} \right)^2 \approx \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} \quad (17-4)$$

این نتیجه بسیار قابل توجه است. یادآوری می‌کنیم که کران‌های کلاسیک دوچی (فصل ۳) ضریبی از مرتبه $O(\alpha^2)$ داشتند، اما ضریب $1/4$ در اینجا نشان‌دهنده‌ی یک انقباض بسیار شدیدتر است. این ضریب دقیقاً با ضریب انقباض «پاسخ تصادفی دودویی» برای واریانس مطابقت دارد و نشان می‌دهد که این کران برای کل کلاس مکانیزم‌های α -LDP «تایت» (Tight) است.

۲-۷-۴ تعمیم به سایر واگرایی‌ها

نویسنده‌گان در [۳] نشان داده‌اند که این ضریب انقباض η_α تنها مختص χ^2 نیست، بلکه برای خانواده‌ای از واگرایی‌ها که خاصیت «تحدب مشترک» دارند (شامل فاصله هلینجر مجدد H^2 و واگرایی KL) نیز صادق است.

نتیجه‌ی ۵-۴ برای هر مکانیزم α -LDP، کران‌های زیر برقرار هستند:

$$D_{KL}(MP||MQ) \leq \eta_\alpha \cdot D_{KL}(P||Q) \quad (18-4)$$

$$H^2(MP, MQ) \leq \eta_\alpha \cdot H^2(P, Q) \quad (19-4)$$

این یکسان‌سازی ضرایب انقباض، تحلیل مکانیزم‌های پیچیده را بسیار ساده می‌کند؛ زیرا کافیست فقط ضریب η_α را محاسبه کنیم.

۸-۴ نامساوی ونتریز خصوصی (Inequality Private van Trees)

اکثر تحلیل‌های موجود در ادبیات α -LDP (مانند کارهای دوچی)، بر روی «ریسک مینیماکس» (بدترین حالت) تمرکز دارند. اما در بسیاری از کاربردهای مدرن، ما به تحلیل‌های بیزی (Bayesian) علاقه‌مندیم، جایی که پارامتر مجهول θ دارای یک توزیع پیشین $(\theta) \pi$ است.

نامساوی ونتریز (van Trees) ابزاری کلاسیک برای کران دار کردن خطای بیزی بر اساس «اطلاعات فیشر» است. آسوده و ژانگ^۳ [۳] نسخه‌ی خصوصی شده‌ی این نامساوی را ارائه کردند که ابزاری نوین در جعبه‌ابزار تحلیل محروم‌گی محسوب می‌شود.

قضیه‌ی ۶-۴ (نامساوی ونتریز موضعی) فرض کنید می‌خواهیم پارامتر θ را از روی مشاهدات Z^n که خروجی یک مکانیزم α -LDP-هستند، تخمین بزنیم. اگر $\hat{\theta}$ هر تخمین‌گر دلخواهی باشد، آنگاه میانگین مربعات خطای بیزی^۴ دارای کران پایین زیر است:

$$\mathbb{E}_{(\hat{\theta}-\theta)^2} \geq \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathcal{I}(\theta)} + \mathcal{I}_{prior}(\pi)} \quad (20-4)$$

نکته‌ی کلیدی اینجاست که در نسخه خصوصی، اطلاعات فیشر مشاهدات $((\mathcal{I}(\theta))$ با ضریب انقباض تضعیف می‌شود:

$$\mathcal{I}_{priv}(\theta) \leq \eta_\alpha \cdot \mathcal{I}_{orig}(\theta) \quad (21-4)$$

که در آن \mathcal{I}_{orig} اطلاعات فیشر داده‌های خام است.

تفسیر: این نامساوی به زبان ساده می‌گوید: «در دنیای α -LDP، هر بیت اطلاعات فیشر که از داده‌ها می‌گیرید، به اندازه‌ی $\alpha^2/4 \approx \eta_\alpha$ تضعیف می‌شود.» این نتیجه، اثبات حدود پایین برای مسائل تخمین پارامتر را بسیار ساده می‌کند. به جای درگیر شدن بالمهای پیچیده‌ی اسود یا فانو، کافیست اطلاعات فیشر مسئله‌ی اصلی را محاسبه کنیم و در ضریب η ضرب کنیم.

۹-۴ کاربردهای نوین و بهبود نرخ‌ها

استفاده از کران‌های انقباض قوی (بخش ۴-۵) و نامساوی ونتریز خصوصی (بخش ۴-۸) منجر به بهبود نتایج در مسائل کلاسیک می‌شود.

²Bayesian Mean Square Error

به عنوان مثال، در مسئله‌ی تخمین چگالی غیرپارامتری برای کلاس توزیع‌های هموار (کلاس هولدر با پارامتر β)، استفاده از این ابزارهای جدید نشان می‌دهد که نرخ خطای بهینه دقیقاً برابر است با:

$$R_{opt} \asymp \left(\frac{1}{n\alpha^2} \right)^{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (22-4)$$

اگرچه مرتبه‌ی کلی نرخ همگرایی مشابه نتایج دوچی است، اما ضرایب ثابت بهبود یافته‌اند و مهم‌تر از آن، اثبات با استفاده از انقباض^۲ χ بسیار کوتاه‌تر و مستقیم‌تر از روش‌های مبتنی بر KL است. این امر نشان‌دهنده‌ی برتری رویکرد مبتنی بر E_γ و انقباض قوی در تحلیل سیستم‌های محربمانگی تفاضلی است.

فصل ۵

نتیجه‌گیری

Bibliography

- [1] S. M. Ali and S. D. Silvey. A general class of coefficients of divergence of one distribution from another. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 28(1):131–142, 1966.
- [2] Shahab Asoodeh, Maryam Aliakbarpour, and Flavio P. Calmon. Local differential privacy is equivalent to contraction of an f -divergence. In *2021 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, page 545–550. IEEE Press, 2021.
- [3] Shahab Asoodeh and Huanyu Zhang. Contraction of locally differentially private mechanisms. *IEEE Journal on Selected Areas in Information Theory*, 5:385–395, 2024.
- [4] Michael Barbaro and Tom Zeller. A face is exposed for aol searcher no. 4417749. *New York Times*, 01 2006.
- [5] Leighton Pate Barnes, Wei Ning Chen, and Ayfer Özgür. Fisher information under local differential privacy. *IEEE Journal on Selected Areas in Information Theory*, 1:645–659, 2020.
- [6] Imre Csiszár. Eine informationstheoretische ungleichung und ihre anwendung auf den beweis der ergodizität von markoffschen ketten. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, 8(1-2):85–108, 1963.
- [7] Paul Cuff and Lanqing Yu. Differential privacy as a mutual information constraint. In *Proceedings of the ACM Conference on Computer and Communications Security*, pages 43–54, 2016.
- [8] John C. Duchi, Michael I. Jordan, and Martin J. Wainwright. Local privacy and statistical minimax rates. In *2013 IEEE 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 429–438, 2013.

- [9] John C Duchi, Michael I Jordan, and Martin J Wainwright. Minimax optimal procedures for locally private estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 113(521):182–201, 2018.
- [10] Cynthia Dwork. Differential privacy. In *International colloquium on automata, languages, and programming*, pages 1–12. Springer, 2006.
- [11] Cynthia Dwork, Aaron Roth, et al. The algorithmic foundations of differential privacy. *Foundations and trends® in theoretical computer science*, 9(3–4):211–407, 2014.
- [12] Peter Kairouz, Sewoong Oh, and Pramod Viswanath. Extremal mechanisms for local differential privacy. *J. Mach. Learn. Res.*, 17(1):492–542, January 2016.
- [13] Shiva Prasad Kasiviswanathan, Homin K. Lee, Kobbi Nissim, Sofya Raskhodnikova, and Adam Smith. What can we learn privately? In *2008 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 531–540, 2008.
- [14] Arvind Narayanan and Vitaly Shmatikov. Robust de-anonymization of large sparse datasets. In *2008 IEEE Symposium on Security and Privacy (sp 2008)*, pages 111–125, 2008.
- [15] Latanya Sweeney. k-anonymity: A model for protecting privacy. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 10(05):557–570, 2002.
- [16] U.S. House of Representatives Committee on Oversight and Government Reform. The equifax data breach. Majority staff report, U.S. House of Representatives, December 2018.
- [17] Teng Wang, Xuefeng Zhang, Jingyu Feng, and Xinyu Yang. A comprehensive survey on local differential privacy toward data statistics and analysis. *Sensors*, 20:1–48, 2020.
- [18] Stanley L Warner. Randomized response: A survey technique for eliminating evasive answer bias. *Journal of the American statistical association*, 60(309):63–69, 1965.

واژه‌نامه

الف

ز

ب

س

پ

ش

پرس‌وجو Query
پایگاه‌داده Database

ص

ت

غ

ج

ف

ح

ق

خ

ک

د

گ

داده Data
دودوبی Binary

ل

ر

م

مجموعه Set واگرایی Divergence

متصدی مورد اعتماد Trusted Curator

مکانیزم تصادفی Randomized Mechanism

محترمانگی تفاضلی Differential Privacy

مطلقاً پیوسته Absolutely Continuous

ه

همسایه Ajacent

همسایگی Adjacency

ن

ی

پیوست آ

مطالب تكميلی

Abstract

We present a standard template for typesetting theses in Persian. The template is based on the `XEPersian` package for the `LATEX` typesetting system. This write-up shows a sample usage of this template.

Keywords: Thesis, Typesetting, Template, `XEPersian`



Sharif University of Technology

Department of Mathematics

M.Sc. Thesis

Information-Theoretic Analysis of Local Differential Privacy and its Statistical Applications

By:

Firoozeh Abrishami

Supervisor:

Dr. Javad Ebrahimi Boroujeni

March 2026