

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján KLUKA, Júlia PUKANCOVÁ,
Martin HOMOLA, Jozef ŠIŠKA, Iveta BEČKOVÁ

Letný semester 2023/2024

Posledná aktualizácia: 4. marca 2024

Obsah

1	Atomické formuly	3
1.1	Sémantika atomických formúl	3
1.2	Formalizácia do jazyka atomických formúl	7
2	Výrokovologické spojky	16
2.1	Syntax výrokovologických formúl	16
2.2	Sémantika výrokovologických formúl	22
2.3	Formalizácia do výrokovologických formúl	27
2.4	Ohodnotenia	33
3	Výrokovologické vyplývanie	37
3.1	Vyplývanie, nezávislosť, nesplniteľnosť	37
4	Vlastnosti a vzťahy výrokovologických formúl	44
4.1	Tautológie, splniteľné, falzifikovateľné a nesplniteľné formuly . . .	44
4.2	Ekvivalentnosť formúl	47
4.3	Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď.	51

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk \mathcal{L} logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna, Boris, mama, oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{dievča}(x)$	x je žena
$\text{chlapec}(x)$	x je chlapec
$\text{sestra}(x, y)$	x je sestra y
$\text{uprednostňuje}(x, y, z)$	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) $\text{dievča}(\text{Anna})$	(B_1) $\text{dievča}(\text{mama})$
(A_2) $\text{chlapec}(\text{Boris})$	(B_2) $\text{chlapec}(\text{oco})$
(A_3) $\text{sestra}(\text{Anna, Boris})$	(B_3) $\text{uprednostňuje}(\text{mama, Boris, Anna})$
(A_4) $\text{uprednostňuje}(\text{mama, Anna, Boris})$	(B_4) $\text{uprednostňuje}(\text{oco, Boris, Anna})$
(A_5) $\text{uprednostňuje}(\text{Boris, Boris, Anna})$	

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.	(B_1) Mama je dievča.
(A_2) Boris je chlapec.	(B_2) Oco je chlapec.
(A_3) Anna je sestra Borisa.	(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.
(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.	(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.
(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.	

‡

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku \mathcal{L} z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku \mathcal{L} závisí od počtu individuových konštánt v jazyku \mathcal{L} (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

V jazyku \mathcal{L} máme $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku \mathcal{L} 4 atomické formuly. Keďže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátavať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti \doteq . Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku \mathcal{L} môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. \square



Pomôcka. Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_{\mathcal{L}}| = n$ môžeme v jazyku \mathcal{L} vytvoriť n^k atomických formúl.

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$i(\text{Anna}) = 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4,$$

$$i(\text{dievča}) = \{1, 5\},$$

$$i(\text{chlapec}) = \{2, 4, 5\},$$

$$i(\text{sestra}) = \{(3, 4), (1, 2)\},$$

$$i(\text{uprednostňuje}) = \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}.$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v \mathcal{M} , skrátene $\mathcal{M} \models \text{dievča}(\text{Anna})$, pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models \text{chlapec}(\text{Boris})$, pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models \text{sestra}(\text{Anna}, \text{Boris})$, pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models \text{uprednostňuje}(\text{mama}, \text{Anna}, \text{Boris})$, pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v \mathcal{M} , skrátene $\mathcal{M} \not\models \text{uprednostňuje}(\text{Boris}, \text{Boris}, \text{Anna})$, pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \not\models \text{dievča}(\text{mama})$, pretože $i(\text{mama}) \notin i(\text{dievča})$.

- (B_2) $\mathcal{M} \models \text{chlapec}(\text{oco})$, pretože $i(\text{oco}) \in i(\text{chlapec})$.
 (B_3) $\mathcal{M} \models \text{uprednostnuje}(\text{mama}, \text{Boris}, \text{Anna})$,
 pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \in i(\text{uprednostnuje})$.
 (B_4) $\mathcal{M} \not\models \text{uprednostnuje}(\text{oco}, \text{Boris}, \text{Anna})$,
 pretože $(i(\text{oco}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostnuje})$. □

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a \mathcal{M}_3 pre jazyk \mathcal{L} tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_5 , ale nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_4 a aby zároveň:

- doména štruktúry \mathcal{M}_1 mala aspoň 5 prvkov;
- doména štruktúry \mathcal{M}_2 mala najviac 3 prvky;
- doména štruktúry \mathcal{M}_3 mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

- Štruktúra \mathcal{M}_1 s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1) \\ i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o, \\ i_1(\text{dievča}) &= \{a\}, \\ i_1(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\ i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\}, \\ i_1(\text{uprednostnuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.\end{aligned}$$

- Štruktúra \mathcal{M}_2 s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2) \\ i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c, \\ i_2(\text{dievča}) &= \{a\}, \\ i_2(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\ i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\}, \\ i_2(\text{uprednostnuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.\end{aligned}$$

- Nie je možné zostrojiť \mathcal{M}_3 tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl A_1, \dots, A_5 , ale nebola modelom žiadnej z formúl B_1, \dots, B_4 .
 Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto \mathcal{M}_3 by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a .

Problém nastáva už pri A_1 a B_1 . Keďže v doméne \mathcal{M}_3 je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky individuové konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v \mathcal{M}_3 , potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. \square

1.1.5 Uvažujme jazyk \mathcal{L} logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{žena}(x)$	x je žena
$\text{rodič}(x, y)$	x je rodičom y
$\text{dieťa}(u, x, y)$	u je dieťaťom matky x a otca y
$\text{starší}(x, y)$	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)	(B_1) rodič(Edo, Edo)
(A_2) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)	(B_2) starší(Beáta, Cyril)
(A_3) starší(Dana, Cyril)	(B_3) Cyril \doteq oco
(A_4) žena(Dana)	(B_4) žena(Alex)
(A_5) rodič(Dana, Alex)	(B_5) dieťa(Beáta, Gabika, oco)
(A_6) rodič(Dana, Beáta)	(B_6) starší(Gabika, Cyril)
(A_7) dieťa(Alex, Dana, Cyril)	

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku \mathcal{L} z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk \mathcal{L} a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_7, B_1, \dots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
 D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\
 i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4, \\
 i(\text{Edo}) &= 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3, \\
 i(\text{žena}) &= \{1, 2, 3, 8\}, \\
 i(\text{rodič}) &= \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\}, \\
 i(\text{dieťa}) &= \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\},
 \end{aligned}$$

$$i(\text{starší}) = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (7, 3), (8, 7)\}.$$

💡 Všimnite si, že hoci každá individuová konštanta musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero individuových konštánt môže pomenúvať ten istý objekt.

💡 Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk \mathcal{L} a atómové formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a \mathcal{M}_3 pre jazyk \mathcal{L} tak, aby každá z nich bola modelom všetkých forém A_1, \dots, A_7 , ale *súčasne* nebola modelom žiadnej z forém B_1, \dots, B_6 a aby *zároveň*:

- a) doména štruktúry \mathcal{M}_1 mala aspoň 9 prvkov;
- b) doména štruktúry \mathcal{M}_2 mala najviac 5 prvkov;
- c) doména štruktúry \mathcal{M}_3 mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2 Formalizácia do jazyka atómových forém

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atómové formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

- (A_1) Jozef je profesor.
- (A_2) Jozef a jeho kolegyňa profesorka obedujú.
- (A_3) Jozef je žemľovku, zatiaľ čo kolegyňa má na obed rezeň.
- (A_4) Márii, ako sa Jozefova kolegyňa volá, obed chutí.
- (A_5) Aj Jozefovi jeho obed chutí, má žemľovku rád.
- (A_6) Aj pani upratovačka je kolegyňa Jozefa a Márie.
- (A_7) Pani upratovačka má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.
- (A_8) Jozef učí predmet *Dejiny antického Ríma* vo veľkej posluchárni P42.
- (A_9) Tento predmet (vždy) niekto navštevuje.
- (A_{10}) Chodí naň aj pani upratovačka.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to, aby sme volili vhodný spoločný jazyk a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) je jednoduché: keďže Jozef je jednoznačne konkrétnou osobou z domény, ktorú popisuje úloha, zvolíme si pre jeho reprezentáciu individuovú konštantu Jozef. Ďalej keďže *byť profesorom* je Jozefova vlastnosť, zvolíme si pre ňu unárny predikátový symbol profesor¹. Samotný výrok môžeme teraz vyjadriť atomickou formulou:

(A_1) profesor(Jozef)

💡 Pozrime sa na dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenala individuová konštantu profesor? Zmyslom slova *profesor* vo vete (A_1) nie je konkrétny profesor, ale trieda/množina/katégoria/súbor všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol.

Z podobných dôvodov je nesprávna aj formula Jozef \doteq profesor. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

(Zatiaľ) nevieme meno Jozefovej kolegyne z tvrdenia (A_2) , ale určite je to tiež konkrétna osoba. Vytvoríme si preto novú individuovú konštantu o_1 aby sme mohli všetky výroky o nej zapísať. Tvrdenie (A_2) sa v skutočnosti skladá z viacerých atomických výrokov. V prvej časti sa dozvieme, že o_1 je profesorka, tu použijeme opäť unárny predikátový symbol profesor¹. Tiež sa dozvieme, že ide o Jozefovu kolegyňu. Keďže *byť kolegom (alebo kolegyňou)* je vzťah dvoch ľudí (elementov z domény), vytvoríme si pre jeho reprezentáciu binárny predikátový symbol kolega². V ďalšej časti tvrdenia sa dozvieme, že obaja obedujú — toto korešponduje ďalším dvom atomickým výrokom, ktoré vieme ľahko zapísať napríklad pomocou unárneho predikátového symbolu obeduje¹:

$(A_{2.1})$ profesor(o_1)

$(A_{2.2})$ kolega(Jozef, o_1)

$(A_{2.3})$ obeduje(Jozef)

$(A_{2.4})$ obeduje(o_1)

💡 Všimnime si, že v prípade Jozefovej kolegyne o_1 sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka¹, ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor¹. Hoci v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký — je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by sme zahrnuli aj o_1 . Podobne aj v prípade vzťahu *byť kolegom alebo kolegyňou* budeme používať vždy len jeden predikátový symbol kolega² a nebudeme vytvárať symbol kolegyňa².

Podobne ako v prípade Jozefovej kolegyne profesorky, aj v nasledujúcom tvrdení (A_3) sa stretneme s konkrétnymi objektmi, ktoré sú pomenované len menami všeobecných „kategórií“, do ktorých patria. Vytvoríme si preto dva nové individuové konštanty p_1 a p_2 pre konkrétne porcie jedla, pričom to, že p_1 je (jedlo z kategórie) žemľovka a p_2 je (jedlo z kategórie) rezeň, vyjadríme vhodne zvolenými unárnymi predikátovými symbolmi:

($A_{3,1}$) $je(Jozef, p_1)$

($A_{3,2}$) $je(o_1, p_2)$

($A_{3,3}$) $žemľovka(p_1)$

($A_{3,4}$) $rezeň(p_2)$

Pre vyjadrenie vzťahu *konzumovať niečo* sme použili predikátový je^2 , hoci v prirodzenom jazyku to bolo vyjadrené rôznymi spôsobmi — ich význam v tomto kontexte je však rovnaký. Okrem toho to, že obajaedia obed, sme už vyjadrili samostatným tvrdením s predikátovým symbolom *obeduje*¹.

💡 Šikovný a krátky predikátový symbol je^2 tu môžeme použiť vo význame *konzumuje* aj preto, že v tvrdení (A_1), kde sme zvažovali jeho použitie v *inom* význame, sme ho nakoniec nepoužili. Použitíu jedného symbolu v dvoch rôznych zamýšľaných významoch sa musíme vyhnúť.

💡 Povedzme si ešte, prečo jednoduchšie riešenie $je(Jozef, žemľovka)$ (a analogicky pre rezeň) nie je správne. Striktne vzaté, konštanty pre konkrétne porcie (či iné objekty) si môžeme nazvať, ako chceme — v tom problém nie je. Toto riešenie však nevyjadruje, že konštanta žemľovka je jedlo typu žemľovka, pretože to musíme vyjadriť ako vlastnosť pomocou unárneho predikátového symbolu. Riešenie $je(Jozef, žemľovka)$ a $žemľovka(žemľovka)$ zasa nie je správne, pretože množiny predikátových symbolov a individuových konštánt musia byť disjunktné. Pre jedno z použití musíme preto zvoliť iný symbol.

Tvrdenie (A_4), že Márii obed chutí, sformalizujeme jednoducho atomickou formulou s predikátovým symbolom *chutí*². Musíme sa však vysporiadať s novou informáciou, že Mária je vlastne už vyššie spomínaná Jozefova kolegyňa. Jedno z korektných riešení využije rovnosť:

($A_{4,1}$) $chutí(Mária, p_2)$

($A_{4,2}$) $Mária \doteq o_1$

💡 Iným prípustným riešením je vybrať si len jednu z dvoch individuových konštánt o_1 , Mária a používať ju konzistentne všade. V prípade, že si ale vyberieme a budeme všade používať o_1 , stratíme informáciu, že o_1 je osoba s menom Mária.

Ďalšia možnosť je to, že sa niekto nejako volá vyjariť binárnym predikátom volá_sa^2 a nie pomocou rovnosti. Potom by však analogicky konzistentne bolo potrebné postupovať aj v prípade Jozefa a ďalších osôb, či objektov, ktoré majú meno.

Prvú časť tvrdenia (A_5) teraz poľahky sformalizujeme analogicky, zaradiť nás však môže jeho druhá časť. To, že Jozefovi chutí konkrétna porcia žemľovky a to, že má rád žemľovku vo všeobecnosti, sú dve rôzne informácie, preto je potrebné každú vyjadriť nezávislým predikátovým symbolom. Keďže však žemľovka¹ je predikátový symbol, nemôže nikdy stáť zároveň ako argument predikátu. Nevieme teda atomickou formulou binárnym vzťahom medzi dvoma objektmi vyjadriť to, že Jozefovi chutí žemľovka vo všeobecnosti, pretože pre žemľovku vo všeobecnosti nemáme individuovú konštantu. Vieme si však vytvoriť predikátový symbol, ktorého zamýšľaným významom budú tie elementy z domény, ktoré majú rady žemľovku:

($A_{5,1}$) $\text{chutí}(\text{Jozef}, p_1)$

($A_{5,2}$) $\text{má_rád_žemľovku}(\text{Jozef})$

Nasledujúce tvrdenie (A_6) poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo sme už videli vyššie:

($A_{6,1}$) $\text{upratovačka}(o_2)$

($A_{6,2}$) $\text{kolega}(\text{Jozef}, o_2)$

($A_{6,3}$) $\text{kolega}(\text{Mária}, o_2)$

💡 Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka^1 . Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby, sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_7) zodpovedá dvom atomickým formulám:

($A_{7,1}$) $\text{má_väčší_plat_ako}(\text{Mária}, o_2)$

($A_{7,2}$) $\text{má_väčší_plat_ako}(o_2, \text{Jozef})$

💡 Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol $\text{má_väčší_plat_ako}^2$, ale úmyselne sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu $\text{má_menší_plat_ako}^2$. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak platí $\text{má_väčší_plat_ako}(\text{Mária}, o_2)$, nijako z toho nevyplýva, že platí aj $\text{má_menší_plat_ako}(o_2, \text{Mária})$. Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických foriem nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_8) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že učí³ bude ternárny predikátový symbol. Pri dvoch nových individuových konštantách, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame, do akej „skupiny“ patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

($A_{8.1}$) učí(Jozef, DAR, P42)

($A_{8.2}$) predmet(DAR)

($A_{8.3}$) poslucháreň(P42)

($A_{8.4}$) veľký(P42)

💡 Keďže byť veľký a byť poslucháreň sú dve samostatné, nezávislé vlastnosti, použijeme dva samostatné predikátové symboly veľký¹ a poslucháreň¹.

Na záver sa zamerajme na posledné dve tvrdenia (A_9) a (A_{10}). To, že *Dejiny antického Ríma* niekto (teda aspoň jeden študent) navštevuje, vieme pomocou atomickej formuly vyjadriť tak, že to vyjadríme pre nejakú konštantu. Mohli by sme si zvoliť úplne novú (napr. študent o_3), ale keďže z tvrdenia (A_{10}) vieme, že tam chodí (teda ho navštevuje) aj pani upratovačka, pre ktorú už konštantný symbol máme, môžeme obe tieto tvrdenia vyjadriť jednou atomickou formulou:

(A_9) navštevuje(o_2 , DAR)

💡 Použitie individuovej konštanty, aby sme vyjadrili, že existuje aspoň jeden objekt, pre ktorý niečo platí, je tak trochu trik, ktorý ale môžeme využiť. V tomto prípade nám ani nič iné neostáva, keďže máme len atomické formuly. Neskôr sa naučíme aj iný, krajší spôsob.

Uvedieme ešte množiny individuových konštant a predikátových symbolov, ktoré sme použili:

$C_{\mathcal{L}} = \{\text{DAR, Jozef, Mária, } o_1, o_2, p_1, p_2, P42\}$,

$P_{\mathcal{L}} = \{\text{chuti}^2, \text{je}^2, \text{kolega}^2, \text{má}_\text{rád}_\text{žemľovku}^1, \text{má}_\text{väčší}_\text{plat}_\text{ako}^2, \text{navštevuje}^2, \text{obeduje}^1, \\ \text{poslucháreň}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{rezeň}^1, \text{učí}^3, \text{upratovačka}^1, \text{veľký}^3, \text{žemľovka}^1\}.$

A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet <i>Dejiny antického Ríma</i>
Jozef, Mária, o_1, o_2	konkrétne osoby
p_1, p_2	konkrétne porcie jedla
P42	poslucháreň P42
$chutí(x, y)$	osoba x chutí jedlo y
$je(x, y)$	x konzumuje y
$kolega(x, y)$	x je kolegom y
$má_rád_žemľovku(x)$	x má rád žemľovku
$má_väčší_plat_ako(x, y)$	x má väčší plat ako y
$navštevuje(x, y)$	osoba x navštevuje predmet y
$obeduje(x)$	x konzumuje obed
$poslucháreň(x)$	x je poslucháreň
$predmet(x)$	x je predmet (v zmysle <i>kurz</i>)
$profesor(x)$	x je profesor(ka)
$rezeň(x)$	x je rezeň
$učí(x, y, z)$	x učí predmet y v miestnosti z
$upratovačka(x)$	x je upratovačka (alebo upratovač)
$veľký(x)$	x je veľké (v zmysle <i>rozmerné</i>)
$žemľovka(x)$	x je žemľovka

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. \models

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

(A_2) Peter je študent.

(A_3) Lucia je žena a študentka.

(A_4) Lucia je staršia ako Peter.

(A_5) Matematiku učí Eugen.

(A_6) Peter a Lucia sú od neho mladší.

(A_7) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

(A_8) Eugen má rád Luciu.

(A_9) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

- (A₁₀) Známká „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.
- (A₁₁) Eugen sa má rád.
- (A₁₂) Je Učiteľom roka 2020.
- (A₁₃) Matematika je povinný predmet.
- (A₁₄) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.
- (A₁₅) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.
- (A₁₆) Peter má rád Matematiku.
- (A₁₇) Lucia má rada Petra.
- (A₁₈) Telocvik je voliteľný predmet.

⚠ Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte viacerými atómami.

Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

1.2.3

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom*, vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu.

- (A₁) Janko je chlapec.
- (A₂) Marienka je jeho najlepšia kamarátka.
- (A₃) Marienka je dievča – hoci keď (u nich doma) hovoria o Máriovi, ide v skutočnosti o Marienku. (Poznáte tieto prezývky, vlastne sa už nikto nepamätá, ako to vzniklo.)
- (A₄) V Čiernom lese stojí chalúpka z perníku.
- (A₅) Táto chalúpka je obrovská, niektorí jej hovoria aj Perníková veža.
- (A₆) V Perníkovej veži býva zlá a škaredá čarodejnica.

(A_7) Čarodejnica má bradavicu na nose.

(A_8) Janko sa bojí čarodejnice.

(B_1) Marienka je chlapec.

(B_2) Marienka sa bojí čarodejnice.

(B_3) Janko je Marienkin najlepší kamarát.

(B_4) Čarodejnica Janka zjedla.

(C_1) Mário je chlapec.

b) Vytvorte štruktúru \mathcal{M} pre jazyk \mathcal{L} tak, aby všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A , boli v \mathcal{M} pravdivé, ale *súčasne* boli všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny B , v \mathcal{M} nepravdivé.

c) Je možné, aby v nejakej štruktúre boli súčasne všetky formuly podľa výrokov zo skupiny A pravdivé, všetky formuly podľa výrokov z B nepravdivé a formula pre výrok (C_1) pravdivá?

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2.4 (pre odvážnejších) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, ale nespájajte nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátu.

Následne vytvorte štruktúru tak, aby formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A , boli všetky pravdivé a formuly, ktoré formalizujú výroky skupiny B , všetky nepravdivé.

(A_1) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A_2) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A_3) Ňufko je Jankine zvieratko.

(A_4) Je to myš.

(A_5) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A_6) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A_7) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smrad'ocha.

(A_8) Smrad'och však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A_9) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

- (B_1) Janka sa Smrad'ocha bojí.
- (B_2) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.
- (B_3) Ňufko je menší ako Chrumko.
- (B_4) Janka má rada Jurka.
- (B_5) Ňufko a Chrumko sú deti.
- (B_6) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

2 Výrokovologické spojky

2.1 Syntax výrokovologických formúl

2.1.1 Príklad. Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. V prípade kladnej odpovede určte množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Svoje odpovede stručne zdôvodnite.

- | | |
|---|---|
| a) (futbalista(Adam)) | c) $\neg\neg(\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \rightarrow \text{šťastný}(\text{Adam}))$ |
| b) (futbalista(Adam) \wedge vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA)) | d) $(\text{šťastný}(\text{Adam}) \leftrightarrow \text{šťastný}(\neg\text{Barbora}))$ |

Riešenie. a) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A \ b \ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek ale nachádza atomická formula.

b) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam) \wedge vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A \ b \ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek nachádzajú tri atomické formuly a medzi nimi dve binárne spojky \wedge .

c) Postupnosť symbolov $\neg\neg(\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \rightarrow \text{šťastný}(\text{Adam}))$ je formulou napríklad nad množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúbi}, \text{šťastný}\}$ a množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Adam}, \text{Barbora}\}$ (množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ môžu obsahovať aj ľubovoľné ďalšie prvky). Postupnosť symbolov sa začína symbolom negácie \neg , za ňou sa musí nachádzať formula A . Keďže v tomto prípade $A = \neg(\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \rightarrow \text{šťastný}(\text{Adam}))$, opäť ide o formulu v tvar $\neg B$, kde $B = (\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}) \rightarrow \text{šťastný}(\text{Adam}))$. Formula B je ohraničená zátvorkami, musí byť teda v tvare $(C \ b \ D)$. V prípade tejto formuly teda bude $C = \text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})$ a $D = \text{šťastný}(\text{Adam})$ a binárna spojka b zodpovedá implikácii \rightarrow .

d) Postupnosť symbolov $(\text{šťastný}(\text{Adam}) \leftrightarrow \text{šťastný}(\neg\text{Barbora}))$ nie je formulou. Postupnosť je ohraničená zátvorkami a v ich vnútri sa naozaj nachádza výraz v tvare $A \ b \ B$. B však nie je formulou, pretože argumentom potenciálneho predikátového symbolu šťastný musí byť konštanta, ale $\neg\text{Barbora}$ nie je správnou konstantou, lebo symboly konštánt a predikátové symboly nemôžu obsahovať žiadnu z logických spojok. \dashv

2.1.2 Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

- a) $(\text{žena}(\text{Alex}) \wedge \text{muž}(\text{Alex}))$
- b) $\neg(\text{má_rād}(\text{Alex}, \text{Alex}))$
- c) $(\text{starší}(\text{Edo}, \text{Alex}) \rightarrow (\neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo})))$
- d) $(\text{Alex} \vee \neg \text{oco})$
- e) $(\neg(\text{muž}(\text{Alex}) \wedge \text{žena}(\text{Alex})) \rightarrow (\neg \text{muž}(\text{Alex}) \vee \neg \text{žena}(\text{Alex})))$
- f) $(\neg \neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \leftrightarrow (\text{starší}(\text{Alex}, \text{Edo}) \neg \wedge \text{muž}(\text{Edo})))$

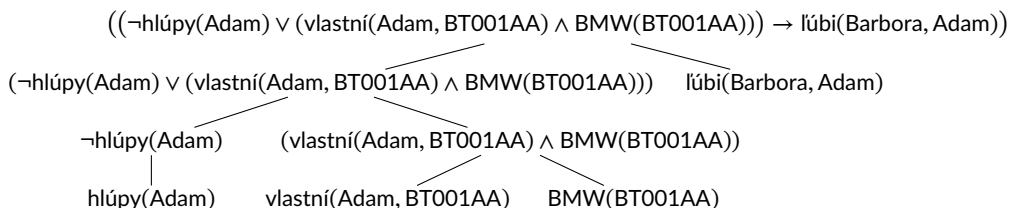
2.1.3 Príklad. Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$((\neg \text{hlúpy}(\text{Adam}) \vee (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \rightarrow \text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}))$$

Riešenie. Vytvárajúcou postupnosťou pre zadanú formulu je napríklad nasledujúca postupnosť:

BMW(BT001AA),
 vlastní(Adam, BT001AA),
 (vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA)),
 hlúpy(Adam),
 \neg hlúpy(Adam),
 (\neg hlúpy(Adam) \vee (vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA))),
 lúbi(Barbora, Adam),
 ((\neg hlúpy(Adam) \vee (vlastní(Adam, BT001AA) \wedge BMW(BT001AA)))
 \rightarrow lúbi(Barbora, Adam)).

Nasledujúci strom predstavuje vytvárajúci strom pre zadanú formulu.



Stupeň zadanej formuly vypočítame ako:

$$\begin{aligned}
 & \deg(((\neg \text{hlúpy}(\text{Adam}) \vee (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \\
 & \quad \rightarrow \text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam}))) \\
 &= \deg((\neg \text{hlúpy}(\text{Adam}) \vee (\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA})))) \\
 & \quad + \deg(\text{lúbi}(\text{Barbora}, \text{Adam})) \\
 & \quad + 1 \\
 &= \deg(\neg \text{hlúpy}(\text{Adam})) \\
 & \quad + \deg((\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA}) \wedge \text{BMW}(\text{BT001AA}))) \\
 & \quad + 1 \\
 & \quad + 1 \\
 &= \deg(\text{hlúpy}(\text{Adam})) + 1 \\
 & \quad + \deg(\text{vlastní}(\text{Adam}, \text{BT001AA})) + \deg(\text{BMW}(\text{BT001AA})) + 1 \\
 & \quad + 1 + 1 \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4
 \end{aligned}$$

□

2.1.4 Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\begin{aligned}
 & ((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow \\
 & \quad ((\neg \text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))
 \end{aligned}$$

2.1.5 Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte nasledujúce funkcie nad jeho formulami:

- a) $\text{atoms} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$
 $\text{atoms}(A)$ je množina všetkých atómov vyskytujúcich sa vo formule A ;
- b) $\text{acnt} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{N}$
 $\text{acnt}(A)$ je počet výskytov atómov vo formule A ;
- c) $\text{acount} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{N}$
 $\text{acount}(A, a)$ je počet výskytov atómu a vo formule A ;
- d) $\text{subfs} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$
 $\text{subfs}(A)$ je množina všetkých podformúl formuly A ;
- e) $\text{pcount} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{N}$
 $\text{pcount}(A)$ je počet výskytov zátvoriek vo formule A ;

f) $\text{cons} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\})$

$\text{cons}(A)$ je množina všetkých logických spojok vyskytujúcich sa vo formule A ;


g) $\text{ccount} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{N}$

$\text{ccount}(A)$ je počet výskytov logických spojok vo formule A ;

h) $\text{bccount} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \rightarrow \mathbb{N}$

$\text{bccount}(A, b)$ je počet výskytov binárnej spojky b vo formule A .

Riešenie. f)

 Funkciu cons zdefinujeme indukčnou definíciou. Musíme *jednoznačne* určiť hodnotu funkcie pre každý z možných tvarov forúl. Sme sa pritom odvolávať na hodnoty tej istej funkcie pre formuly *nižšieho* stupňa. Na začiatku definície musíme deklarovať, aké druhy objektov predstavujú jednotlivé metapremenné (podobne ako sa v mnohých programovacích jazykoch deklarujú typy argumentov funkcií, procedúr, metód).

Definícia. Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každý atóm $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ a pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme:

$$\text{cons}(a) = \emptyset$$

$$\text{cons}(\neg A) = \{\neg\} \cup \text{cons}(A)$$

$$\text{cons}((A \wedge B)) = \{\wedge\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)$$

$$\text{cons}((A \vee B)) = \{\vee\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)$$

$$\text{cons}((A \rightarrow B)) = \{\rightarrow\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)$$

 Pretože prípady pre rôzne binárne výrokové spojky sú si navzájom dostatočne podobné, môžeme ich spojiť napríklad takto:

Definícia. Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre všetky atómy $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a všetky binárne spojky $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ definujeme:

$$\text{cons}(a) = \emptyset$$

$$\text{cons}(\neg A) = \{\neg\} \cup \text{cons}(A)$$

$$\text{cons}((A \ b \ B)) = \{b\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)$$

□

2.1.6 Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Příklad. [Tvrdenie 2.12] Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupnosť symbolov A je formulou jazyka \mathcal{L} vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku \mathcal{L} .

- b) Příklad. Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka \mathcal{L} platí

$$\text{atoms}(A) \subseteq \text{subfs}(A).$$

- c) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka \mathcal{L} platí

$$\text{acnt}(A) \leq \text{deg}(A) + 1.$$

- d) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka \mathcal{L} platí

$$\text{pcount}(A) \leq 4 \text{deg}(A) + 2.$$

Riešenie príkladu a). Tvrdenie a) platí. Nech \mathcal{L} je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupne dokážeme obe implikácie vhodnou indukciou.

(\Leftarrow) Predpokladáme, že A je formulou v jazyku \mathcal{L} . Existenciu vytvárajúcej postupnosti pre A dokážeme štruktúrnou indukciou na A :

1. Báza indukcie: Ak A je atóm (či už predikátový alebo rovnostný), jednoprvková postupnosť (A) je vytvárajúcou postupnosťou pre A .

2. Indukčný krok:

1. Indukčný predpoklad: Nech A je formula a nech pre A existuje vytvárajúca postupnosť.

Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $\neg A$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť A_1, A_2, \dots, A_m taká, že $A_m = A$. Zostrojme postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_{m+1})$. Nech A_i pre nejaké $1 \leq i \leq m+1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

Ak $i = m+1$, tak $A_{m+1} = \neg A = \neg A_m$ a $m < m+1$, takže A_{m+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

Ak $1 \leq i \leq m$, tak A_i tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo (A_1, A_2, \dots, A_m) je vytvárajúca postupnosť.

Preto $(A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $\neg A$, je to aj vytvárajúca postupnosť pre $\neg A$.

2. IP: Nech A a B sú formuly a nech existuje vytvárajúca postupnosť pre A a existuje vytvárajúca postupnosť pre B .

Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $(A \text{ b } B)$ pre ľubovoľnú binárnu spojku $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť (A_1, A_2, \dots, A_m) taká, že $A_m = A$, a vytvárajúca postupnosť (B_1, B_2, \dots, B_n) taká, že $B_n = B$. Zostrojme postupnosť

$$(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1}) = (A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n, (A \text{ b } B))$$

Nech C_i pre nejaké $1 \leq i \leq m + n + 1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

Ak $i = m + n + 1$, tak $C_{m+n+1} = (A \text{ b } B) = (A_m \text{ b } B_n) = (C_m \text{ b } C_{m+n})$, pričom zrejme $m < m + n + 1$ a $m + n < m + n + 1$, takže C_{m+n+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

Ak $1 \leq i \leq m$, tak $C_i = A_i$ spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_1, A_2, \dots, C_m) = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

Ak $m + 1 \leq i \leq m + n$, tak prvok $C_i = B_{i-m}$ tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_{m+n}) = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ je vytvárajúca postupnosť.

Preto $(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $(A \text{ b } B)$, je to vytvárajúca postupnosť pre $(A \text{ b } B)$.


(\Rightarrow) Implikácia *Ak existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku \mathcal{L} , tak A je formulou jazyka \mathcal{L}* , vyplýva z tvrdenia: *Pre každé kladné prirodzené číslo n, ak (A_1, \dots, A_n) je vytvárajúca postupnosť v jazyku \mathcal{L} , tak A_n je formula*. Toto tvrdenie dokážeme úplnou indukciou na n .

Nech n je ľubovoľné kladné prirodzené číslo. Indukčný predpoklad: Nech pre každé kladné prirodzené číslo $m < n$ je pravda, že ak (A_1, \dots, A_m) je vytvárajúca postupnosť v jazyku \mathcal{L} , tak A_m je formula.

Dokážme tvrdenie pre n . Predpokladajme, že (A_1, \dots, A_n) je vytvárajúca postupnosť v jazyku \mathcal{L} . Potom pre jej posledný prvok, postupnosť symbolov A_n v jazyku \mathcal{L} môže nastať niektorá z týchto možností:

- A_n je atóm. Potom A_n je samozrejme formula.
- $A_n = \neg A_i$ pre nejaké $i < n$. Ľahko sa presvedčíme, že (A_1, \dots, A_i) je vytvárajúca postupnosť v jazyku \mathcal{L} . Pretože $i < n$, je podľa indukčného predpokladu postupnosť symbolov A_i formula. Potom ale aj $A_n = \neg A_i$ je formula.
- $A_n = (A_i \text{ b } A_j)$ pre nejakú binárnu spojku $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ a pre nejaké $i < n$ a $j < n$. Opäť sa ľahko presvedčíme, že (A_1, \dots, A_i) aj (A_1, \dots, A_j) sú vytvárajúce postupnosti v jazyku \mathcal{L} . Pretože $i < n$ aj $j < n$, sú podľa indukčného predpokladu postupnosti symbolov A_i aj A_j formuly. Potom ale aj $A_n = (A_i \text{ b } A_j)$ je formula. \square

Riešenie príkladu b).

 Pripomeňme, že funkciu $\text{atoms} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$ sme zadefinovali na prednáške (Def. 3.17). Predpokladáme, že funkciu $\text{subfs} : \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$ ste zadefinovali pri riešení predchádzajúceho cvičenia 2.1.5.

Tvrdenie b) platí. Nech \mathcal{L} je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Tvrdenie dokážeme indukciou na konštrukciu formuly A .

1. Báza indukcie: Nech A je atóm. Potom $\text{atoms}(A) = \{A\}$. Taktiež $\text{subfs}(A) = \{A\}$, a teda platí $\text{atoms}(A) \subseteq \text{subfs}(A)$.

2. Indukčné kroky:

- 2.1. Indukčný predpoklad: Nech A je ľubovoľná formula a nech pre ňu tvrdenie platí, teda $\text{atoms}(A) \subseteq \text{subfs}(A)$. Dokážme tvrdenie aj pre $\neg A$:

Z definície funkcie atoms vieme, že $\text{atoms}(\neg A) = \text{atoms}(A)$. Súčasne podľa definície funkcie subfs máme $\text{subfs}(\neg A) = \text{subfs}(A) \cup \{\neg A\}$. Keďže podľa indukčného predpokladu $\text{atoms}(A) \subseteq \text{subfs}(A)$, dostávame

$$\text{atoms}(\neg A) = \text{atoms}(A) \subseteq \text{subfs}(A) \subseteq \text{subfs}(A) \cup \{\neg A\} = \text{subfs}(\neg A),$$


teda $\text{atoms}(\neg A) \subseteq \text{subfs}(\neg A)$.

- 2.2. IP: Nech A a B sú ľubovoľné formuly a nech tvrdenie pre ne platí (teda $\text{atoms}(A) \subseteq \text{subfs}(A)$ a $\text{atoms}(B) \subseteq \text{subfs}(B)$). Dokážme ho aj pre $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$:
Podľa definícií funkcií atoms a subfs vieme, že pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ platí

$$\text{atoms}((A \ b \ B)) = \text{atoms}(A) \cup \text{atoms}(B)$$

$$\text{a } \text{subfs}((A \ b \ B)) = \text{subfs}(A) \cup \text{subfs}(B) \cup \{(A \ b \ B)\}.$$

Vďaka IP platí $\text{atoms}(A) \cup \text{atoms}(B) \subseteq \text{subfs}(A) \cup \text{subfs}(B) \cup \{(A \ b \ B)\}$, a teda $\text{atoms}((A \ b \ B)) \subseteq \text{subfs}((A \ b \ B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

 Túto úvahu môžeme stručnejšie a azda aj prehľadnejšie zapísať takto:

Podľa IP a definícií funkcií atoms a subfs pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ platí

$$\begin{aligned} \text{atoms}((A \ b \ B)) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{atoms}(A) \cup \text{atoms}(B) \\ &\stackrel{\text{IP}}{\subseteq} \text{subfs}(A) \cup \text{subfs}(B) \\ &\subseteq \text{subfs}(A) \cup \text{subfs}(B) \cup \{(A \ b \ B)\} \stackrel{\text{def}}{=} \text{subfs}((A \ b \ B)), \end{aligned}$$

teda $\text{atoms}((A \ b \ B)) \subseteq \text{subfs}((A \ b \ B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. □

2.2 Sémantika výrokovologických formúl

2.2.1 Príklad. Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologických formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{profesor}^1, \text{hlúpy}^1, \text{sčítaný}^1\}$. V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk \mathcal{L} , kde

$$D = \{\text{barča, janči, karči}\}$$

$$i(\text{Karol}) = \text{karči}$$

$$i(\text{profesor}) = \{\text{karči, janči}\}$$

$$i(\text{hlúpy}) = \{\text{jancí}\}$$

$$i(\text{sčítaný}) = \{\text{barča, karčí}\}$$

vyhodnoťte nasledujúcu formulu postupom *zdola nahor* a postupom *zhora nadol*.

$$(\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})))$$

Riešenie. 1. spôsob — *zdola nahor*: Pravdivosť danej formuly určíme podľa definície 2.21 postupným vyhodnotením všetkých prvkov jej vytvárajúcej postupnosti:

$$\begin{aligned} &\text{profesor}(\text{Karol}), \quad \text{sčítaný}(\text{Karol}), \quad \text{hlúpy}(\text{Karol}), \quad \neg \text{hlúpy}(\text{Karol}), \\ &(\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})), \quad (\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))) \end{aligned}$$

Dostávame:

1. $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$, teda $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$
2. $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$, teda $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$
3. $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$, teda $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$
4. $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$, teda $\mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$
5. Keďže $\mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$ a $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$,
tak $\mathcal{M} \models (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))$
6. Keďže $\mathcal{M} \models (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))$,
tak $\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})))$

Vyhodnotenie spôsobom *zdola nahor* môžeme prehľadnejšie zapísať do tabuľky, v ktorej h = hlúpy, p = profesor, s = sčítaný a K = Karol:

	$p(K)$	$s(K)$	$h(K)$	$\neg h(K)$	$(\neg h(K) \wedge s(K))$	$(p(K) \rightarrow (\neg h(K) \wedge s(K)))$
\mathcal{M}	\models	\models	$\not\models$	\models	\models	\models

alebo (trocha menej prehľadne):

	(profesor(Karol)	\rightarrow	(\neg	hlúpy(Karol)	\wedge	sčítaný(Karol))
\mathcal{M}		\models	\models		\models	$\not\models$	\models	\models	

Nesmieme pritom zabúdať, že odvodenie je založené na definícii 2.21 pravdivosti formuly v štruktúre.

💡 Aby prvá tabuľka nebola príliš široká, celkom prirodzene sme si konkrétne symboly jazyka \mathcal{L} označili meta premennými p, s, h a K . Tieto premenné nie sú súčasťou jazyka \mathcal{L} , slúžia nám, aby sme mohli stručne písať o jeho symboloch (predložka *o* sa po grécky povie *meta*). Konkrétne symboly (napr. Karol) si môžeme predstaviť ako konkrétne reťazce ('Karol') napríklad v jazyku Python. Meta premenné (napr. K) ako pythonovské *premenné*, do ktorých reťazce priradujeme. Skrátenejší zápis $\neg h(K)$ formuly $\neg \text{hlúpy}(\text{Karol})$ zodpovedá (oveľa menej prehľadnému) pythonovskému výrazu `'¬' + h + '(' + K + ')'`.

2. spôsob — zhora nadol: Podľa definície 2.21 vzťahu pravdivosti (\models) a podľa definície danej štruktúry \mathcal{M} platí:

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))) \\
 \text{vtt} \\
 \mathcal{M} \not\models \text{profesor}(\text{Karol}) \text{ alebo } \mathcal{M} \models (\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol})) \\
 \text{vtt} \qquad \qquad \qquad \text{vtt} \\
 i(\text{Karol}) \notin i(\text{profesor}) \qquad \mathcal{M} \models \neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \text{ a } \mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol}) \\
 \text{nepravda} \qquad \qquad \qquad \text{vtt} \qquad \qquad \qquad \text{vtt} \\
 \qquad \qquad \qquad \mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol}) \quad i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný}) \\
 \qquad \qquad \qquad \text{vtt} \qquad \qquad \qquad \text{pravda} \\
 \qquad \qquad \qquad i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy}) \\
 \qquad \qquad \qquad \text{pravda}
 \end{array}$$


Pretože pri vyhodnocovaní implikácie sme zistili, že jej antecedent $\text{profesor}(\text{Karol})$ nie je nepravdivý v \mathcal{M} , museli sme vyhodnotiť aj konzekvent $(\neg \text{hlúpy}(\text{Karol}) \wedge \text{sčítaný}(\text{Karol}))$. Ten je konjunkciou dvoch formúl, o ktorých sme zistili, že sú pravdivé v \mathcal{M} . Preto je v \mathcal{M} pravdivý aj konzekvent, a teda celá implikácia.

💡 Istou výhodou vyhodnocovania pravdivosti zhora nadol je, že ho niekedy môžeme ukončiť skôr. Keby sme napríklad zistili, že antecedent implikácie je nepravdivý, mohli by sme hneď skonštatovať, že implikácia je pravdivá a konzekventom sa nezaoberať. \square

2.2.2 V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
 D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\
 i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6, \\
 i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\}, \\
 i(\text{muž}) &= \{2, 4\}, \\
 i(\text{má_rád}) &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6)\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(\text{brat}) &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 6)\}, \\
i(\text{rodič}) &= \{(1, 1), (2, 5), (2, 6), (1, 5), (3, 4), (4, 2), (1, 6), (5, 6), (6, 5)\}, \\
i(\text{starší}) &= \{(2, 1), (5, 6), (6, 5)\},
\end{aligned}$$


zistíte postupom *zdola nahor*, či sú formuly A_1 a A_2 pravdivé. Tipnite si, či je formula A_3 pravdivá v štruktúre \mathcal{M} a overte svoje tip postupom *zhora nadol* pomocou Henkinovej–Hintikkovej hry () v prieskumníku štruktúr.

$$\begin{aligned}
(A_1) \quad &(\text{starší}(\text{Bruno}, \text{Alex}) \rightarrow \neg \text{starší}(\text{Alex}, \text{Bruno})) \\
(A_2) \quad &(\neg \text{má_rād}(\text{Alex}, \text{Bruno}) \leftrightarrow \neg \text{má_rād}(\text{Bruno}, \text{Alex})) \\
(A_3) \quad &((\text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Hugo}) \wedge \text{rodič}(\text{Bruno}, \text{Tereza})) \rightarrow \\
&((\neg \text{žena}(\text{Hugo}) \wedge \text{muž}(\text{Hugo})) \rightarrow \text{brat}(\text{Hugo}, \text{Tereza})))
\end{aligned}$$

2.2.3 Príklad. Vytvorte takú štruktúru, v ktorej budú všetky nasledujúce formuly pravdivé:

$$\begin{aligned}
(A_1) \quad &(\text{profesor}(\text{Alena}) \wedge \text{učiteľ}(\text{Alena})) \\
(A_2) \quad &(\text{profesor}(\text{Karol}) \leftrightarrow \text{učiteľ}(\text{Karol})) \\
(A_3) \quad &(\neg \text{profesor}(\text{Karol}) \rightarrow (\neg \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena}) \vee \neg \text{vychádza}(\text{Karol}, \text{Alena}))) \\
(A_4) \quad &\text{Karol} \neq \text{Alena}
\end{aligned}$$

Riešenie. Hľadáme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ tak, aby $\mathcal{M} \models A_1, \dots, \mathcal{M} \models A_4$.

 Hľadanie štruktúry je najlepšie začať tak, že sa snažíme splniť tzv. fakty — atomické formuly a ich negácie.

Pri zložitejších formulách nám pomôže, keď podľa definície pravdivosti postupom *zhora nadol* rozoberieme, kedy majú byť v hľadanej štruktúre pravdivé. Napr. pre najkomplikovanejšiu formulu A_3 tak zistíme, že $\mathcal{M} \models A_3$ vtt $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena})$ alebo $\mathcal{M} \not\models \text{vychádza}(\text{Karol}, \text{Alena})$.

Vyberieme si poslednú možnosť, lebo predikát *vychádza* sa v inej formule nenachádza. Môžeme ho teda pokojne interpretovať podľa potrieb pravdivosti A_3 . Interpretáciu predikátu *vychádza*² ľahko zvolíme tak, aby $(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{vychádza})$, môže byť napríklad prázdna. Samozrejme, často takúto slobodu nemáme a musíme hľadať iné možnosti, ako zabezpečiť pravdivosť zložitých formúl.

Nech

$$\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\} \\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(\text{Karol}) &= \text{školník} \\
i(\text{profesor}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}), \\
&\quad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\} \\
i(\text{vychádza}) &= \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}), (\text{upratovačka2}, \text{upratovačka1})\}
\end{aligned}$$

V tejto štruktúre sú pravdivé všetky formuly A_1 – A_4 . Zdôvodnenie môžeme spraviť analogicky ako v úlohe 2.2.1. □

2.2.4 Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

- (A_1) titul(Sofina_voľba)
- (A_2) kniha(k325)
- (A_3) má_autora(Sofina_voľba, Styron)
- (A_4) (titul(Kto_chytá_v_žite) \wedge má_autora(Kto_chytá_v_žite, Salinger))
- (A_5) ($\neg(\text{číta}(\text{Adam}, \text{k325}) \wedge \text{obdivuje}(\text{Dana}, \text{Adam})) \rightarrow$
 $\neg(\text{má_titul}(\text{k325}, \text{Sofina_voľba}) \vee \text{má_titul}(\text{k325}, \text{Kto_chytá_v_žite})))$
- (A_6) ($\text{má_titul}(\text{k325}, \text{Kto_chytá_v_žite}) \leftrightarrow \neg \text{má_titul}(\text{k325}, \text{Sofina_voľba})$)



Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formlí podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

2.2.5 Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu:

- a) s binárnymi spojkami \rightarrow (implikácia) a \nrightarrow („a nie“), pričom neformálny význam $(A \nrightarrow B)$ je „ A a nie je pravda, že B “.
- b) s binárnymi spojkami \rightarrow (implikácia) a $\underline{\vee}$ (exkluzívne alebo, XOR), pričom neformálny význam $(A \underline{\vee} B)$ je: buď je pravdivé A , alebo je pravdivé B , ale nie obe súčasne.

Formuly podľa vašich definícií nebudú obsahovať iné spojky okrem vyššie uvedených.

Zadefinujte štandardné spojky (\wedge , \vee , \neg) ako skratky (teda funkcie nad formulami podobne, ako sme zadefinovali \leftrightarrow v dohode 2.8) tak, aby formuly nimi vytvorené mali štandardný význam. Dokážte, že ho majú.

💡 Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície 2.4–2.21 z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

Schopnosť presne sa vyjadriť je potrebná pri programovaní (počítaču musíte všetko vysvetliť do detailov), ale napríklad aj pri písaní špecifikácií softvéru, či požiadaviek na vašu bakalársku prácu.

2.2.6 Sformalizujte nasledujúce skutočnosti do teórie T tak, aby T bola splniteľná. Formalizujte tak, aby každý konkrétny objekt, ktorý sa spomína bol označený individuovou konštantou; a aby všetky vlastnosti a vzťahy boli vyjadrené samostatným predikátovým symbolom:

1. Peter si obliekol nohavice a buď tričko alebo košeľu, nie však oboje. Pred odchodom si ešte zobral aj klobúk.
2. Vieme, že tričko nosí len k džínsovým nohaviciam. Tiež vieme, že džínsy si určite neobliekol, ak má klobúk.
3. Do práce Peter tiež chodí iba v džínсах.
4. Ak má Peter rande s Marikou, určite si vzal červenú alebo zelenú košeľu.
5. S Katkou má rande, len ak si zobral si zelenú.
6. Ak nemá rande (ani s jednou), obliekol si tričko.

Ďalej je vašou úlohou:

- a) Splniteľnosť T dokážte nájdením štruktúry \mathcal{M}_1 takej, že $\mathcal{M}_1 \models T$.
- b) Je za daných okolností *možné*, že Peter pôjde do práce? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou \mathcal{M}_2 . Ak nie, dokážte, že taká štruktúra \mathcal{M}_2 neexistuje.

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl

2.3.1 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu v jazyku \mathcal{L} , kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Dominika, Fernando, Elena, Fero, Gabika, Spain, Slovakia, Databases, Programming,}$

Logics, Informatics, Combinatorics, Slovak_I, Czech_I, 1} a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{student}^1, \text{professor}^1, \text{works}^1, \text{has_classmate}^2, \text{comes_from}^2, \text{supervises}^2, \text{passed}^2, \text{grad_exam}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:


Predikát	Význam
$\text{student}(x)$	x je študent*ka
$\text{works}(x)$	x pracuje
$\text{professor}(x)$	x je profesor*ka
$\text{has_classmate}(x, y)$	x má spolužiaka*čku y
$\text{comes_from}(x, y)$	x pochádza z y
$\text{supervises}(x, y)$	x je školiteľom y
$\text{passed}(x, y)$	x absolvoval y
$\text{grad_exam}(x, y, z)$	x dostal na maturite z y hodnotenie z

- (A₁) Študentka Dominika má spolužiaka Fernanda, ktorý je zo Španielska.
- (A₂) Fernando je, samozrejme, tiež študent, napriek tomu, že popri štúdiu aj pracuje.
- (A₃) Elena je profesorka a školí Dominiku alebo Fernanda.
- (A₄) Fernanda tiež volajú Fero.
- (A₅) Ak Dominika absolvovala aj databázy alebo programovanie, aj logiku, tak je Elena jej školiteľkou.
- (A₆) Pretože “byť spolužiakom*čkou” je symetrický vzťah, je Gabika Fernandovou spolužiačkou rovnako, ako je on jej spolužiakom.
- (A₇) Fero absolvoval programovanie iba za predpokladu, že nedostal na maturite z informatiky jednotku.
- (A₈) Ak ju nedostal, potom musel absolvovať aj kombinatoriku.
- (A₉) Dominika určite neabsolvovala ani kurz slovenčiny, ani češtiny, pokiaľ nie je zo zahraničia.
- (A₁₀) Buď Dominika alebo Gabika je zo Slovenska (no nie obe).

2.3.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

- (A₁) Lucia a jej kamarát sú deti.
- (A₂) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka Blesk.

- (A₃) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, Sally, napriek tomu, že je dievča.
- (A₄) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.
- (A₅) Lucia je kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.
- (A₆) Lucia sa preto hrá buď so svojím obľúbeným autíčkom alebo s Petrovým.
- (A₇) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.
- (A₈) S Bleskom sa nemôžu hrať obaja naraz.
- (A₉) Ak je niektorá z menovaných hračiek poškodená, Peter a Lucia sa k nej správajú opatrne.
- (A₁₀) Lucia je šťastná, keď sa s ňou Peter hrá.
- (A₁₁) Peter je šťastný len za predpokladu, že je šťastná Lucia.
- (A₁₂) Obe Petrove obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je modrá.
- (A₁₃) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou alebo s kamarátovým čiernym koníkom (alebo s oboma naraz).
- (A₁₄) Luciino autíčko je ale modré.
- (A₁₅) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.
- (A₁₆) Psa venčí, ak je pekne.
- (A₁₇) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.
- (A₁₈) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.


 **Pomôcka.** Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

2.3.3 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

- (A₁) Do baru vošli Freddy a George.
- (A₂) Barmanka naliala drink Freddymu.
- (A₃) Barmankou je buď Mary alebo Jane. Službu má vždy len jedna z nich.

- (A_4) Harry nie je v bare, len ak nemá službu Mary, a naopak.
- (A_5) Freddy, George a Harry sú kamaráti. Barmanky sa však spolu nekamarátia.
- (A_6) Freddy mu jeho drink chutí, ak je to whisky, ale nie, ak je to koňak. Vtedy by však určite chutil Georgeovi.
- (A_7) Freddy mu jeho drink nechutí.
- (A_8) Ak je barmankou Mary, tak naliala Freddy mu whisky alebo koňak.
- (A_9) Jane nalieva Freddy mu vždy iba whisky.
- (A_{10}) Iné drinky Mary ani Jane nenalievajú, pokiaľ nie je v bare prítomný Harry.


 **Pomôcka.** Všeobecné tvrdenia $A_9 - A_{10}$ aplikujte na Freddyho drink. Napíšte teda také formuly, aby tvrdenia $A_9 - A_{10}$ platili pre Freddyho drink, ktorý mu barmanka naliala v A_2 .

2.3.4 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

- (A_0) (V bare pracujú traja zamestnanci: Ema, Fero a Gigi. Zároveň sú v bare štyri pracovné pozície: barman/barmanka, čašník/čašníčka, upratovačka a vyhadzovač.)
- (A_1) Každá pozícia je určite niekým obsadená.
- (A_2) Gigi je žena.
- (A_3) Fero je buď čašník alebo vyhadzovač. Čašníkom je však, len ak si popri tom privyrába ešte na ďalšej pozícii.
- (A_4) V bare pracuje iba jeden vyhadzovač.
- (A_5) Ema tiež pracuje na niektorej pozícii. Nie je ale čašníčka, ani upratovačka.
- (A_6) Ak je Ema barmankou, nerobí nič iné.
- (A_7) Fero sa kamaráti s Emou alebo s Gigi, nie však s oboma.
- (A_8) Ema sa kamaráti s Gigi, ale Gigi s ňou nie.
- (A_9) Gigi sa kamaráti s Emou, iba ak obe pracujú na rovnakej pozícii.
- (A_{10}) Ema sa kamaráti sama so sebou. Fero však nie.
- (A_{11}) Fero sa určite kamaráti so všetkými barmanmi.

- (A_{12}) Vyhadzovač sa s nikým ne kamaráti.
- (A_{13}) Vyhadzovačom je žena, len ak aj všetci ostatní zamestnanci sú ženy.
- (A_{14}) Bonus: Ak je upratovačka žena, Gigi ňou nie je.
- (A_{15}) Bonus: Keď sa Ema kamaráti s Gigi, len ak aj Gigi s ňou, potom je aj Ema žena.

 Tvrdenie (A_0) neformalizujte, ale použite ho na špecializáciu nasledujúcich všeobecných tvrdení na uvedených zamestnancov a pracovné pozície.

Okrem tejto výnimky každé tvrdenie formalizujte **verne** a **osobitne**, bez ohľadu na iné tvrdenia. Teda **neprenášajte informácie** z jedného tvrdenia do iných tvrdení. Niektoré formuly budú potom možno rozsiahlejšie, ale z hľadiska kontrolovateľnosti riešenia a hľadania chýb je tento prístup istejší.

2.3.5

- a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_9\}$ vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu \mathcal{L} . Zapište množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu. Nevkladajte do formalizácie žiadne ďalšie intuitívne znalosti na pozadí (napr. ak je niekto zlý, nedopĺňajte, že nemôže byť dobrý).

- (A_1) V Čiernom lese stojí chalúpka, ktorá je z perníku.
- (A_2) Niekedy sa jej hovorí aj Perníková veža.
- (A_3) V Perníkovej veži býva zlá čarodejnica. A tiež chlapec Janko a Marienka, ktorá je jeho súrodencom.
- (A_4) Janko je chlapec, iba ak Marienka je zlá.
- (A_5) Janko a Marienka sú deti, čarodejnica nie.
- (A_6) Rovnako ako čarodejnica, aj Marienka je silná.
- (A_7) Janko alebo Marienka je chlapec.
- (A_8) Ak je niekto (zo spomínaných) silný, nie je dievča a Janka ochráni.
- (A_9) Ak by to, že Marienka je Jankovým súrodencom, znamenalo, že ho ochráni, tak ho čarodejnica určite nezje.

V jazyku \mathcal{L} ďalej sformalizujte formulami B_1 , B_2 a B_3 výroky:

(B_1) Marienka je dievča.

(B_2) Janko je dievča.

(B_3) Ak je Marienka *Jankovým súrodencom*, čarodejnica zje Janka.

b) Vytvorte štruktúru \mathcal{M} pre jazyk \mathcal{L} , ktorá je modelom teórie T .

c) Pre každú z formúl B_1, B_2, B_3 (jednotlivo) rozhodnite, či je možné, aby bola pravdivá v nejakom modeli teórie T .

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície modelu, štruktúry a pravdivosti výrokovologických formúl v nej.

2.3.6 (Podľa Barker-Plummer, Barwise a Etchemendy [1])

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_{12}\}$ v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu \mathcal{L} , kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{A, B, C, D, E, F\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{triangle}^1, \text{square}^1, \text{circle}^1, \text{small}^1, \text{medium}^1, \text{large}^1, \text{same_size}^2, \text{larger}^2\}$. Zamýšľanou doménou sú rovinné geometrické útvary. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
$\text{triangle}(x)$	x je trojuholník
$\text{square}(x)$	x je štvorec
$\text{circle}(x)$	x je kruh
$\text{small}(x)$	x je malý
$\text{medium}(x)$	x je stredne veľký
$\text{large}(x)$	x je veľký
$\text{same_size}(x, y)$	x a y majú rovnakú veľkosť
$\text{larger}(x, y)$	x je väčší než y

(A_1) Ak A je trojuholník, tak B je tiež trojuholník.

(A_2) C je trojuholník, ak je ním B .

(A_3) A a C sú oba trojuholníky, iba ak aspoň jeden z nich je veľký.

(A_4) A je trojuholník, no C nie je veľký.

(A_5) Ak C je malý a D je kruh, tak D nie je ani veľký, ani malý.

(A_6) C je stredne veľký iba ak žiadny z D, E, F nie je štvorec.

(A_7) D je malý kruh, jedine že by A bol malý.

(A_8) E je veľký práve vtedy, keď je pravda, že D je veľký, ak a iba ak je taký F .

(A_9) D a E sú rovnakej veľkosti.

(A_{10}) D a E majú rovnaký tvar.

(A_{11}) F je buď štvorec alebo kruh, ak je veľký.

(A_{12}) C je väčší než E, iba ak B je väčší ako C.

b) Zistite, aké tvary a veľkosti musia mať útvary A, ..., F, aby boli pravdivé výroky $A_1 - A_{12}$. Predpokladajte pritom, že každý z útvarov má práve jeden z uvedených tvarov a práve jednu z uvedených veľkostí.

c) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk \mathcal{L} , ktorá je modelom teórie T , kde útvary A, ..., F majú tvar a veľkosť, ktoré ste určili v predchádzajúcom bode. Interpretácie predikátov v \mathcal{M} musia pritom mať zamýšľaný význam, teda mať nasledujúce dodatočné vlastnosti:

- každý geometrický má práve jednu veľkosť, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\text{small, medium, large}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\text{small})$, $i(\text{medium})$, $i(\text{large})$ sú disjunktné;
- každý geometrický má práve jeden tvar, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\text{triangle, square, circle}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\text{triangle})$, $i(\text{square})$, $i(\text{circle})$ sú disjunktné;
- interpretácia predikátu `same_size` je relácia ekvivalencie na D taká, že pre všetky $x, y \in D$:

$$(x, y) \in i(\text{same_size}) \text{ vtt}$$

$$x, y \in i(\text{small}) \text{ alebo } x, y \in i(\text{medium}) \text{ alebo } x, y \in i(\text{large});$$

- interpretácia predikátu `larger` je ostré čiastočné usporiadanie na D , pričom pre každé $x, y \in D$:

$$(x, y) \in i(\text{larger}) \text{ vtt } x \in i(\text{large}) \text{ a } y \in i(\text{medium}) \cup i(\text{small}), \\ \text{alebo } x \in i(\text{medium}) \text{ a } x \in i(\text{small}).$$

2.4 Ohodnotenia

2.4.1 Príklad. Nech \mathcal{L} je jazyk výrokových formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Alena, Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{učiteľ, pozná}\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} ,

kde:

$$\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\} \\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218} \\
i(\text{Karol}) &= \text{školník} \\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}), \\
&\quad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}
\end{aligned}$$

Zostrojte výrokologické ohodnotenie v pre \mathcal{L} zhodné s \mathcal{M} .

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili výrokologické ohodnotenie v zhodné s \mathcal{M} , musia sa zhodovať na všetkých predikátových atómoch jazyka \mathcal{L} , t.j., $v \models A$ vtt $\mathcal{M} \models A$ pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Preto potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ rozhodnúť, či je v \mathcal{M} pravdivý alebo nie. V prípade pravdivosti mu v ohodnotení v priradíme hodnotu t , v opačnom prípade hodnotu f .

Zostrojme teda množinu všetkých predikátových atómov jazyka \mathcal{L} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{PA}_{\mathcal{L}} &= \{\text{učiteľ}(\text{Alena}), \text{učiteľ}(\text{Karol}), \\
&\quad \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}), \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}), \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}), \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena})\}
\end{aligned}$$

Následne zostrojíme hľadané ohodnotenie v tak, že pre každý atóm určíme, či je alebo nie je pravdivý v \mathcal{M} , a podľa toho mu vo v priradíme príslušnú pravdivostnú hodnotu:

$$\begin{array}{ll}
i(\text{Alena}) \in i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{učiteľ}(\text{Alena}) & v = \{\text{učiteľ}(\text{Alena}) \mapsto t, \\
i(\text{Karol}) \notin i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{učiteľ}(\text{Karol}) & \text{učiteľ}(\text{Karol}) \mapsto f, \\
(i(\text{Alena}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}) & \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Alena}) \mapsto f, \\
(i(\text{Karol}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}) & \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Karol}) \mapsto f, \\
(i(\text{Alena}), i(\text{Karol})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}) & \text{pozná}(\text{Alena}, \text{Karol}) \mapsto t, \\
(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena}) & \text{pozná}(\text{Karol}, \text{Alena}) \mapsto t\} \quad \models
\end{array}$$

2.4.2 Príklad. Nech \mathcal{L} je jazyk výrokologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Adam}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{študent}^1, \text{profesor}^1, \text{učí}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned}
v &= \{\text{študent}(\text{Adam}) \mapsto t, \quad \text{študent}(\text{Karol}) \mapsto f, \\
&\quad \text{profesor}(\text{Adam}) \mapsto f, \quad \text{profesor}(\text{Karol}) \mapsto t, \\
&\quad \text{učí}(\text{Adam}, \text{Karol}) \mapsto f, \quad \text{učí}(\text{Karol}, \text{Adam}) \mapsto f\}
\end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka \mathcal{L} . Zostrojte štruktúru \mathcal{M} zhodnú s v na dom v .

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili štruktúru \mathcal{M} zhodnú s v na dom v , teda na definičnom obore ohodnotenia v , potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \text{dom } v$, pre ktorý $v(A) = t$ zabezpečiť, aby bol A pravdivý v \mathcal{M} , teda $\mathcal{M} \models A$. Naopak, pre každý predikátový atóm $B \in \text{dom } v$, pre ktorý $v(B) = f$ musíme zabezpečiť, aby $\mathcal{M} \not\models B$. Konkrétne:

$v(\text{študent}(\text{Adam})) = t$, takže $\mathcal{M} \models \text{študent}(\text{Adam})$, teda $i(\text{Adam}) \in i(\text{študent})$;
 $v(\text{študent}(\text{Karol})) = f$, takže $\mathcal{M} \not\models \text{študent}(\text{Karol})$, teda $i(\text{Karol}) \notin i(\text{študent})$;
 $v(\text{profesor}(\text{Adam})) = f$, takže $\mathcal{M} \not\models \text{profesor}(\text{Adam})$, teda $i(\text{Adam}) \notin i(\text{profesor})$;
 $v(\text{profesor}(\text{Karol})) = t$, takže $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$, teda $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$;
 $v(\text{učí}(\text{Adam}, \text{Karol})) = f$, takže $\mathcal{M} \not\models \text{učí}(\text{Adam}, \text{Karol})$, teda $(i(\text{Adam}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{učí})$;
 $v(\text{učí}(\text{Karol}, \text{Adam})) = f$, takže $\mathcal{M} \not\models \text{učí}(\text{Karol}, \text{Adam})$, teda $(i(\text{Karol}), i(\text{Adam})) \notin i(\text{učí})$.

Všimnime si, že ohodnotenie v nepriraduje pravdivostnú hodnotu všetkým predikátovým atómom z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. V prípade týchto atómov nezáleží, či budú alebo nebudú pravdivé v \mathcal{M} . Teraz už jednoducho zostrojíme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ napríklad takto:

Zvolíme si doménu s prinajmenšom rovnakou kardinalitou ako množina konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a každou konštantou pomenujeme iný prvok:

$$\begin{aligned}
 D &= \{s352, s667, s986, p520, p830, p921\}, \\
 i(\text{Adam}) &= s667, \\
 i(\text{Karol}) &= p830.
 \end{aligned}$$

Následne skonštruujeme interpretácie predikátov tak, aby v interpretujúcich množinách boli resp. neboli tieto prvky alebo ich n -tice tak, ako sme zistili vyššie:

$$\begin{aligned}
 i(\text{študent}) &= \{s352, s667, s986\}, \\
 i(\text{profesor}) &= \{p520, p830, p921\}, \\
 i(\text{učí}) &= \{(p520, s667), (p830, s352), (p830, s986)\}.
 \end{aligned}$$

□

2.4.3

a) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack}, \text{Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk \mathcal{L} , kde:

$$\begin{aligned}
 D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\
 i(\text{Jack}) &= s3, \\
 i(\text{Corona}) &= p1, \\
 i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\
 i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\}
 \end{aligned}$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre \mathcal{L} zhodné so štruktúrou \mathcal{M} .

b) Nech \mathcal{L} je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy}, \text{Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{ & \text{hračka}(\text{Woody}) \mapsto t, & \text{hračka}(\text{Andy}) \mapsto f, \\ & \text{chlapec}(\text{Andy}) \mapsto t, & \text{chlapec}(\text{Woody}) \mapsto f, \\ & \text{hrá_sa}(\text{Andy}, \text{Woody}) \mapsto t, & \text{hrá_sa}(\text{Woody}, \text{Andy}) \mapsto f \} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka \mathcal{L} . Zostrojte štruktúru \mathcal{M} zhodnú s v na dom v .

3 Výrokovologické vyplývanie

3.1 Vyplývanie, nezávislosť, nespľniteľnosť

3.1.1 Majme výrokovologickú teóriu T :


$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1: (\text{tancuje_s}(A, B) \rightarrow (\text{frajer}(A) \vee \text{spieva}(A))), \\ A_2: (\neg \text{tancuje_s}(A, B) \vee \neg \text{spieva}(A)), \\ A_3: (\neg \text{spieva}(A) \rightarrow \text{frajer}(A)) \end{array} \right\}.$$

O každej z formúl X_1 – X_3 rozhodnite, či a) vyplýva z teórie T , b) je nezávislá od T , alebo c) ani z T nevyplýva, ani od nej nie je nezávislá:

$(X_1) \text{ (tancuje_s}(A, B) \rightarrow \text{frajer}(A))$,

$(X_2) \neg \text{spieva}(A)$,

$(X_3) (\neg \text{spieva}(A) \wedge \neg \text{frajer}(A))$.

 Aká formula vyplýva z teórie v prípade c)?

3.1.2 Príklad. (Variácia na Smullyana [3]) V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil dvoch podozrivých Andrews a Browna, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Andrews nikdy nepracuje sám.

(A_2) Nikto ďalší do prípadu už zapletený nie je.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviňiť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

Riešenie.

💡 Riešenie sme rozdelili na kroky, ktoré by ste mali aplikovať pri každej neformálne zadanej úlohe.

1. Formalizácia. Zistenia A_1 – A_2 sformalizujeme ako teóriu v jazyku výrokových formúl logiky prvého rádu s množinou individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{A, B\}$ (kde A značí Andrews a B značí Brown) a s množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{vinný}^1\}$ (kde $\text{vinný}(x)$ znamená, že x je vinný).

💡 Ostatné skutočnosti, ako napr. konkrétny prípad, kto s kým pracuje a kto je do prípadu zapletený, nepotrebujeme reprezentovať individuovými konštantami alebo predikátovými symbolmi, pretože hovoria iba o vine alebo nevine podozrivých, a to už máme dostatočne reprezentované predikátovým symbolom vinný^1 .

Teória T je nasledovná:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} A_1: (\text{vinný}(A) \rightarrow \text{vinný}(B)), \\ A_2: (\text{vinný}(A) \vee \text{vinný}(B)) \end{array} \right\}.$$

2. Určenie formálneho problému. Aby sme odpovedali na otázky o vine, nevine a nemožnosti o nich rozhodnúť, overíme najprv výrokovologickú *splniteľnosť* teórie T . Ak je T nesplniteľná, zistené skutočnosti si protirečia, neopisujú žiaden stav sveta, preto sa na ich základe nedá rozhodnúť o (ne)vine podozrivých.

Ak je T splniteľná, pre obe individuové konštanty $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ zistíme, či *formula* $\text{vinný}(c)$ *vyrokovologicky vyplýva z teórie* T (potom c je určite vinný), *formula* $\neg \text{vinný}(c)$ *vyplýva z* T (c je určite nevinný), a či je *formula* $\text{vinný}(c)$ *nezávislá od* T (o vine c nemožno rozhodnúť).

3. Riešenie formálneho problému. Najprv zistíme, či je teória T splniteľná. Zostrojíme všetky výrokové ohodnotenia tých atomických formúl, ktoré sa vyskytujú v T , a zistíme, či je aspoň v jednom pravdivá. Keď nájdeme prvý model, musíme nájsť všetky, aby sme následne mohli vyhodnotiť vyplývanie zaujímavých formúl z T , resp. ich nezávislosť od T :

	v_i		T			
	vinný(A)	vinný(B)	vinný(A)	vinný(B)	$(\text{vinný}(A) \rightarrow \text{vinný}(B))$	$(\text{vinný}(A) \vee \text{vinný}(B))$
v_1	f	f	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$
v_2	t	f	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p
v_3	f	t	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p
v_4	t	t	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p

4. Výsledky riešenia formálneho problému. Zistili sme, že T je *splniteľná* (viď def. 3.5), keďže napr. $v_3 \models_p T$. Teória má dva modely, v_3 a v_4 . Pomocou nich určíme aké vzťahy s teóriou T majú formuly zaujímavé pre odpoveď na neformálnu otázku z úlohy:

- Formula $\text{vinný}(A)$ *nevyplýva* z T ($T \not\models_p \text{vinný}(A)$), pretože existuje model T , a to v_3 , v ktorom $\text{vinný}(A)$ nie je pravdivá (def. 3.7). Zároveň však $v_4 \models_p \text{vinný}(A)$, takže $\text{vinný}(A)$ *je od T nezávislá* (def. 3.10). A $T \not\models_p \neg \text{vinný}(A)$, lebo $v_4 \not\models_p \neg \text{vinný}(A)$.
- Formula $\text{vinný}(B)$ *vyplýva* z T ($T \models_p \text{vinný}(B)$), pretože je pravdivá vo všetkých (oboch) modeloch T (stručnejšie: $v_i \models_p \text{vinný}(B)$ pre $i \in \{3, 4\}$). Od T *nie je nezávislá*, lebo neexistuje model T , v ktorom by bola nepravdivá. Formula $\neg \text{vinný}(B)$ *nevyplýva* z T , lebo napr. $v_3 \not\models_p \neg \text{vinný}(B)$.

5. Interpretácia (vyvodenie neformálnych záverov z formálnych). Môžeme teda prejsť na rozhodnutie o vine alebo nevine podozrivých:

- Brown je určite vinný, pretože $T \models_p \text{vinný}(B)$.
- Nikto z podozrivých nie je istotne nevinný, keďže pre žiadne $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ neplatí $T \models_p \neg \text{vinný}(c)$.
- O Adamsovej vine na základe zistených skutočností nemožno rozhodnúť, lebo formula $\text{vinný}(A)$ je nezávislá od T .



Uvedomme si ešte raz, že záver, že je Brown vinný, môžeme zo zistenia $T \models_p \text{vinný}(B)$ urobiť len vďaka tomu, že sme predtým **overili splniteľnosť** T . Ak by bola teória T nesplniteľná, vyplývala by z nej každá formula, teda $\text{vinný}(B)$ aj $\neg \text{vinný}(B)$. Na základe takejto teórie by sme nemohli vyvodiť žiadne zmysuplné závery. \dashv


3.1.3 (Variácia na Smullyana [3]) Inšpektor Scotland Yardu Nick Fishtrawn predviedol troch podozrivých z lúpeže klenotov v obchodnom dome Harrods: Daviesa, Milesa a Parkera. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné indície:

- (A_1) Miles nikdy nepracuje sám, teda lúpil, iba ak sa na lúpeži podieľal aspoň jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.
- (A_2) Davies vždy pracuje s Parkerom.
- (A_3) Parker sa s Milesom neznáša, preto určite nelúpili spolu.
- (A_4) Z lúpeže môžu byť vinní len títo traja podozriví a nikto iný.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

- a) Využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite, koho z podozrivých môže inšpektor s istotou obviňiť, koho môže bez obáv prepustiť, lebo sa krádeže určite nezúčastnil, a koho musí prepustiť pre nedostatok dôkazov.
- b) Aké by boli vaše závery, keby inšpektor zistil aj nasledujúcu skutočnosť?

(A_5) Milesa videli dvaja spoľahliví svedkovia utekať s lupom z obchodného domu, takže je určite vinný.

 **Pomôcka.** Formalizáciu tentoraz obmedzte na skutočnosti, ktoré sú postačujúce k vyriešeniu úlohy (teda sústreďte sa na vinu podozrivých, ak je to postačujúce).

3.1.4 (Variácia na Smullyana [3]) Inšpektor Nick Fishtrawn rieši ďalší zapeklitý prípad lúpeže. Podozriví sú Addams, Doyle a Harris. Inšpektor zistil nasledujúce skutočnosti:

(A_1) Ak pršalo, určite je vinný Harris.

(A_2) Naopak, ak nepršalo, vinný je jeden zo zvyšných dvoch podozrivých.

(A_3) Harris má vždy najviac jedného kumpána.


(A_4) Addams pracuje, ak je jeho kumpánom Doyle.

(A_5) Addams pracuje, len ak prší.

(A_6) Nikto iný nie je podozrivý.

Sformalizujte zistené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu T v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenými množinami $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

S využitím splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite o vine a nevine jednotlivých podozrivých, pokiaľ to je možné.

 **Pomôcka.** Pri formalizácii by vám mali stačiť 4 predikátové atómy.

3.1.5 (Ghidini a Serafini [2]) Prechádzate labyrintom a ocitnete sa na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

Strážnik zlatej cesty: „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor.“

Strážnik mramorovej cesty: „Ani zlato, ani kamienky nevedú do stredu labyrintu.“

Strážnik kamienkovej cesty: „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa.“

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

- i. Dá sa na základe uvedených informácií rozhodovať o tom, ktoré cesty vedú a ktoré nevedú do stredu labyrintu?
- ii. O ktorých cestách môžete s istotou povedať, že vedú do stredu labyrintu?
- iii. Ktoré z ciest určite nevedú do stredu labyrintu?
- iv. O ktorých cestách sa nedá rozhodnúť, že do stredu labyrintu vedú alebo nevedú?

Vašou úlohou je:

- a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlíte.
- b) Určiť, aké logické problémy zodpovedajú otázkam i–iv (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).
- c) Vyriešiť logické problémy, ktoré ste určili.
- d) Zodpovedať otázky i–iv na základe riešení logických problémov.



Pomôcka. Pri formalizácii by vám mali stačiť 3 predikátové atómy.




Vyriešenie samotnej hádanky je len malá časť tejto úlohy. Dôsledne vyriešte všetky podúlohy.

3.1.6 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

- (A_1) Ak Minister nie je schopný, Premiér ho odvolá. Alebo je Premiérov kamarát.
- (A_2) Minister je Premiérov kamarát, ak ho Premiér neodvolal.
- (A_3) Minister, ktorý účinne zasiahol proti pandémie, je schopný.
- (A_4) Premiér Ministra neodvolal, napriek tomu, že Minister proti pandémie účinne nezasiahol.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti rozhodnite (ak je to možné), či na základe výrokov A_1 – A_4 :

- (C_1) je Minister schopný,
- (C_2) Premiér Ministra odvolá,
- (C_3) Minister je Premiérov kamarát.

 **Pomôcka.** V tomto zadaní chápeme Ministra a Premiéra ako konkrétne osoby, nie ako roly nejakých nepomenovaných osôb.

3.1.7 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho predikátových symbolov.

- (A_1) Keď Rusko zaútočilo na Ukrajinu, tak porušilo Budapeštianske memorandum alebo Putin klame.
- (A_2) Rusko je agresor, ak porušilo Budapeštianske memorandum a na Ukrajinu zaútočilo.
- (A_3) Rusko neporušilo Budapeštianske memorandum, len ak Putin neklame.
- (A_4) Ak to, že Rusko zaútočilo na Ukrajinu, znamená, že porušilo Budapeštianske memorandum, tak Putin klame.

Pomocou vašej teórie využitím výrokovologickej splniteľnosti, vyplývania a nezávislosti zistíte, ktoré z nasledujúcich výrokov (C_1)–(C_3) sú na základe výrokov (A_1)–(A_4) určite pravdivé, určite nepravdivé, a o ktorých to nemožno rozhodnúť:

- (C_1) Putin klame,
- (C_2) Rusko Budapeštianske memorandum neporušilo,
- (C_3) Rusko je agresor, iba ak zaútočilo na Ukrajinu.

3.1.8 Inšpektor NAKA Činčila vyšetruje úplatkársku kauzu, v ktorej figurujú štyria podozriví z poskytnutia alebo prijatia úplatku: JH, MK, TG a DT. Inšpektor vyšetrovaním zistil nasledovné indicie:

- (A_1) Ak podlácali JH aj MK, tak podplatili TG.
- (A_2) Podplácal aj MK alebo úplatok prijal TG, ak podplácal JH.
- (A_3) TG berie úplatok, iba ak ani DT neobíde nasucho.
- (A_4) Ak nepodplácal JH, tak bol určite podplatený DT.

Kto je v tejto kauze z podplácania alebo brania úplatku podľa indícií určite vinný, kto určite nevinný a o koho vine nemožno rozhodnúť?

Vašou úlohou je:

- a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu vo vhodnom jazyku, pričom význam symbolov stručne vysvetlíte.

- b) Určiť, aké logické problémy zodpovedajú otázkam o vine zo zadania (napr. rozhodnutie, či nejaká konkrétna formula vyplýva z konkrétnej teórie, je od nej nezávislá, teória je (ne)splniteľná, nájdenie všetkých modelov a pod.).
- c) Vyriešiť logické problémy, ktoré ste určili. Zdôvodnite ich, teda napr. vysvetlite, prečo vaša pravdivostná tabuľka ukazuje, že formula/teória je splniteľná.
- d) Zodpovedať otázky zo zadania na základe riešení logických problémov.

4 Vlastnosti a vzťahy výrokovologických formúl

4.1 Tautológie, splniteľné, falzifikovateľné a nesplniteľné formuly

4.1.1 Majme jazyk \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pekné, rýchle, ekologické}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{moje_auto}\}$. Označme $P = \text{pekné}(\text{moje_auto})$, $R = \text{rýchle}(\text{moje_auto})$ a $E = \text{ekologické}(\text{moje_auto})$.

Rozhodnite o každej z nasledujúcich formúl nad jazykom \mathcal{L} , či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Pri každej formule rozhodnite o *všetkých* uvedených vlastnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

- | | |
|--|---|
| a) $(\neg(P \wedge E) \rightarrow (\neg P \wedge \neg E))$ | i) $((P \rightarrow R) \rightarrow P) \rightarrow P$ |
| b) $((P \vee \neg P) \wedge \neg(E \vee \neg E))$ | j) $\neg\neg\neg(P \vee P)$ |
| c) $(P \rightarrow (P \rightarrow (P \rightarrow P)))$ | k) $((P \wedge E) \rightarrow (\neg P \wedge E))$ |
| d) $(P \wedge (E \vee \neg(P \rightarrow R)))$ | l) $\neg((P \vee R) \vee (\neg P \vee E))$ |
| e) $((P \rightarrow P) \rightarrow P) \rightarrow \neg P$ | m) $((E \vee \neg R) \wedge (P \rightarrow \neg R)) \rightarrow$
$(\neg R \rightarrow (\neg P \wedge E))$ |
| f) $\neg(P \leftrightarrow \neg P)$ | n) $((P \rightarrow (\neg R \rightarrow E)) \wedge$
$((\neg P \vee \neg E) \wedge \neg(P \rightarrow R)))$ |
| g) $((P \wedge \neg P) \vee (P \vee \neg P))$ | |
| h) $(P \wedge \neg P)$ | |

Riešenie. a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $A = (\neg(P \wedge E) \rightarrow (\neg P \wedge \neg E))$, podľa tvrdení 4.3 a 4.4 stačí preskúmať všetky rôzne ohodnotenia výrokovologických atómov, ktoré sa vyskytujú v A :



Keďže v A sa vyskytujú dva atómy, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v úlohách o vyplývaní výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

	v_i		$\neg P$	$\neg E$	$(P \wedge E)$	$\neg(P \wedge E)$	$(\neg P \wedge \neg E)$	$(\neg(P \wedge E) \rightarrow (\neg P \wedge \neg E))$
	P	E						
v_1	f	f	\vdash_p	\vdash_p	$\not\vdash_p$	\vdash_p	\vdash_p	\vdash_p
v_2	t	f	$\not\vdash_p$	\vdash_p	$\not\vdash_p$	\vdash_p	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$
v_3	f	t	\vdash_p	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$	\vdash_p	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$
v_4	t	t	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$	\vdash_p	$\not\vdash_p$	$\not\vdash_p$	\vdash_p



Kedže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly A , nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

- i. Kedže $v_2 \not\vdash_p A$, teda A *nie je pravdivá vo všetkých* ohodnoteniach, tak A *nie je* tautológiou.
- ii. Kedže $v_1 \vdash_p A$, teda A *je pravdivá v aspoň jednom* ohodnotení, tak A *je* splniteľná.
- iii. Kedže $v_2 \not\vdash_p A$, teda A *je nepravdivá v aspoň jednom* ohodnotení, tak A *je* aj falzifikovateľná.
- iv. Kedže $v_1 \vdash_p A$, teda *nie je pravda, že A je nepravdivá vo všetkých* ohodnoteniach, tak A *nie je* nesplniteľná. □

4.1.2 O každej z nasledujúcich formúl nad jazykom \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{lúbi}\}$ a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{P, L\}$, pričom P značí Peter a L značí Lucia rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

$$(X_1) ((\neg \text{lúbi}(P, L) \rightarrow \neg \text{lúbi}(L, P)) \wedge (\text{lúbi}(P, L) \vee \text{lúbi}(L, P)))$$

$$(X_2) (\neg(\text{lúbi}(P, L) \wedge \text{lúbi}(L, P)) \leftrightarrow (\neg \text{lúbi}(P, L) \vee \neg \text{lúbi}(L, P)))$$

$$(X_3) ((\neg \text{lúbi}(P, L) \rightarrow \text{lúbi}(L, P)) \wedge \neg(\text{lúbi}(P, L) \vee \text{lúbi}(L, P)))$$

4.1.3 Nech \mathcal{L} je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka \mathcal{L} .

O každej z nasledujúcich formúl v jazyku \mathcal{L} rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

$$(X_1) \neg(\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$$

$$(X_2) ((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B))$$

$$(X_3) \neg((\neg A \rightarrow B) \wedge \neg(A \vee B))$$

⚠ Pretože formuly A a B nemusia byť atomické, **nemôžeme** vymenovať ich ohodnotenia tak ako v riešení úlohy 4.1.1. $v(A)$ nie je definované, ak A nie je predikátový atóm. Nevieme ani to, aké atómy formuly A a B obsahujú (a možno sú ich tisíce), takže nemôžeme vymenovať ani všetky ohodnotenia týchto atómov. Navyše na rozdiel od atómov môžu byť formuly A a B tautológiami či nespĺniteľnými (nezávisle od seba) a v tom prípade neexistujú ohodnotenia, v ktorých by boli nepravdivé resp. pravdivé.

Môžeme však zobrať ľubovoľné ohodnotenie v pre jazyk \mathcal{L} a skúmať rôzne prípady pravdivosti (\models_p) formúl A a B v tomto ohodnotení. Kvôli prehľadnosti zapíšeme možné prípady do tabuľky. **Všimnite si** však, ako sa táto tabuľka líši od tabuľky z riešenia úlohy 4.1.1.

Nech A a B sú ľubovoľné výrokologické formuly jazyka \mathcal{L} . Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk \mathcal{L} . Rozoberme možné prípady pravdivosti a nepravdivosti formúl A a B vo v a zistíme, v ktorých prípadoch je vo v pravdivá formula X_1 :

	A	B	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(Y \leftrightarrow Z)$	$\neg(Y \leftrightarrow Z)$
v	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$
v	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$
v	\models_p	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$
v	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	$\not\models_p$

Označili sme $Y := \neg(A \wedge B)$ a $Z := (\neg A \vee \neg B)$, teda $X_1 = \neg(Y \leftrightarrow Z)$.

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v . Ako vidíme, v každom prípade je formula X_1 nepravdivá.

Pretože v bolo ľubovoľné ohodnotenie, môžeme naše zistenie zovšeobecniť: X_1 je nepravdivá v každom ohodnotení v pre jazyk \mathcal{L} .

Z definícií vlastností formúl teda vyplýva, že formula X_1 :

- nie je tautológia,
- nie je splniteľná,
- je falzifikovateľná,
- je nespĺniteľná.

□

Riešenie pre X_2 . Nech A a B sú ľubovoľné výrokologické formuly jazyka \mathcal{L} . Nech v je ľubovoľné ohodnotenie pre jazyk \mathcal{L} . Preskúmame, ako pravdivosť a nepravdivosť formúl A a B vo v ovplyvňuje pravdivosť formuly X_2 :

	A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \rightarrow \neg B)$	$(A \vee B)$	$((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B))$
v	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$
v	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p
v	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v . V prípade, že $v \models_p A$, je formula X_2 vo v pravdivá, kým v opačnom prípade je nepravdivá.

Tento výsledok sa **nedá** jednoducho zovšeobecniť. Bez ďalších informácií o formulách A a B nemôžeme rozhodnúť o **žiadnej** z požadovaných vlastností formuly X_2 .

! Tento záver môže na prvý pohľad vyzerat' prehnane pesimisticky. Z tabuľky sa predsa **zdá**, že by X_2 mala byť splniteľná aj falzifikovateľná a nemala by byť tautológia ani nespľniteľná. **Ale nie je to tak**, pretože A a B nemusia byť atomické formuly, a preto pre ne niektoré z prípadov rozoberaných v tabuľke **nemusia nastať**:

Keď zvolíme formulu A tak, že je nespľniteľná (napr., $(a \wedge \neg a)$ pre nejaký predikátový atóm a jazyka \mathcal{L}), nebudú existovať žiadne ohodnotenia, kde by A bola pravdivá. Potom môžu nastať iba prípady z prvých dvoch riadkov našej tabuľky, teda v každom ohodnotení bude formula $((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B))$ nepravdivá, a teda bude nespľniteľná a zároveň falzifikovateľná (a nebude tautológia ani splniteľná).

Ak ale napríklad vyberieme za A tautológiu a za B nespľniteľnú formulu, v každom ohodnotení nastane iba 3. prípad, preto $((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B))$ bude tautológia (a teda splniteľná atď.).

Ako posledný príklad uvažujme, že A bude nejaký predikátový atóm a z jazyka \mathcal{L} a $B = \neg a$. Potom v ohodnotení v_1 , kde $v_1(a) = f$ bude $((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B))$ pravdivá (2. prípad). Naopak v ohodnotení v_2 , kde $v_2(a) = t$ bude $((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B))$ nepravdivá (3. prípad). Pri tejto voľbe formúl A a B bude teda formula $((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B))$ splniteľná aj falzifikovateľná. \dashv

4.2 Ekvivalentnosť formúl

4.2.1 Príklad. Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl nad jazykom \mathcal{L} , kde $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{f^1, h^1, b^1, \text{NHL}^1, i^1, r^1, m^1\}$, kde f značí futbalista, h značí hokejista, b značí bohatý, NHL značí hráč NHL, i značí inteligentná, r značí rozumná, a $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{M, E\}$, kde M značí Miro, E značí Eva, sú (sémanticky) ekvivalentné

a) de Morganove pravidlá:

$$\neg(f(M) \wedge h(M)) \text{ a } (\neg f(M) \vee \neg h(M)),$$

$$\neg(f(M) \vee h(M)) \text{ a } (\neg f(M) \wedge \neg h(M));$$

b) $(h(M) \rightarrow (b(M) \rightarrow \text{NHL}(M))) \text{ a } ((h(M) \wedge b(M)) \rightarrow \text{NHL}(M));$

c) $\neg(i(E) \wedge (r(E) \vee b(E))) \text{ a } (\neg i(E) \vee \neg r(E)) \wedge (\neg i(E) \vee \neg b(E)).$


d) $\neg(i(E) \rightarrow (r(E) \wedge b(E))) \text{ a } (\neg(i(E) \rightarrow r(E)) \vee (i(E) \wedge \neg b(E)))$

Riešenie. a) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme pravdivosť formúl $\neg(f(M) \wedge h(M))$ a $(\neg f(M) \vee \neg h(M))$ vo všetkých rôznych ohodnoteniach

tých predikátových atómov, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

	v_i		$\neg f(M)$	$\neg h(M)$	$(f(M) \wedge h(M))$	$\neg(f(M) \wedge h(M))$	$(\neg f(M) \vee \neg h(M))$
	$f(M)$	$h(M)$					
v_1	f	f	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p
v_2	t	f	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p	\models_p
v_3	f	t	\models_p	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	\models_p
v_4	t	t	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie v_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$, platí $v_i \models_p \neg(f(M) \wedge h(M))$ vtt $v_i \models_p (\neg f(M) \vee \neg h(M))$. Z toho, z tvrdenia 4.3 z prednášky a z definície ekvivalencie 4.10 vyplýva, že formuly $\neg(f(M) \wedge h(M))$ a $(\neg f(M) \vee \neg h(M))$ sú ekvivalentné.

 Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formlí či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme.

□

4.2.2 Príklad. Nasledujúce dvojice formúl sú výrokovologicky ekvivalentné pre všetky formuly A, B, C v ľubovoľnom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Dokážte to rozborom pravdivosti formúl A, B, C v ľubovoľnom výrokovologickom ohodnotení podobne ako v príklade 4.1.3.


a) *Nahradenie implikácie a ekvivalencie*

Implikácia je ekvivalentná disjunkcii negovaného antecedentu (ľavej strany) s konzekventom (pravou stranou).

i. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow_p (\neg A \vee B)$

Ekvivalenciu $(A \leftrightarrow B)$ sme zadefinovali ako skratku za $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$. Alternatívne by sme ju mohli zadefinovať aj podľa nasledujúcej ekvivalencie:

ii. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_p ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

 Kedy je táto ekvivalencia výhodná pri úpravách formúl do CNF? Kedy je naopak výhodná naša definícia \leftrightarrow konjunkciou dvoch implikácií?

b) *Asociatívnosť*

Binárne spojky \wedge, \vee a skratka \leftrightarrow sú asociatívne:

i. $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow_p (A \wedge (B \wedge C))$

ii. $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow_p (A \vee (B \vee C))$

iii. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \Leftrightarrow_p (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$

⚠ Implikácia \rightarrow samozrejme **nie** je asociatívna.

c) *Komutatívnosť a obmena implikácie*

Binárne spojky \wedge , \vee a skratka \leftrightarrow sú komutatívne:

- i. $(A \wedge B) \Leftrightarrow_p (B \wedge A)$
- ii. $(A \vee B) \Leftrightarrow_p (B \vee A)$
- iii. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_p (B \leftrightarrow A)$

Implikácia \rightarrow samozrejme **nie je** komutatívna, ale je ekvivalentná so svojou obmenou:

- iv. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow_p (\neg B \rightarrow \neg A)$

d) *Zákon dvojitej negácie a De Morganove zákony*

Tieto zákony pravdepodobne poznáte:

- i. $\neg\neg A \Leftrightarrow_p A$
- ii. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow_p (\neg A \vee \neg B)$
- iii. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow_p (\neg A \wedge \neg B)$

Pomocou nahradení z časti a) sa z nich dajú ľahko odvodiť analogické zákony pre implikáciu a ekvivalenciu:

- iv. $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow_p (A \wedge \neg B)$
- v. $\neg(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow_p (A \leftrightarrow \neg B)$

e) *Distributívnosť*

Konjunkciu môžeme distribuovať do disjunkcie (\Rightarrow) a aj ju z nej vyňať (\Leftarrow). Rovnako disjunkciu môžeme distribuovať do/vyňať z konjunkcie:

- i. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow_p ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
- ii. $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow_p ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Implikácia je pozoruhodná tým, že ju môžeme distribuovať do konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ba aj ekvivalencie v jej konzekvente (t.j., na jej pravej strane), a tiež môžeme vyňať spoločný antecedent (pravú stranu implikácie).

- iii. $(A \rightarrow (B \wedge C)) \Leftrightarrow_p ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$
- iv. $(A \rightarrow (B \vee C)) \Leftrightarrow_p ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$
- v. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \Leftrightarrow_p ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- vi. $(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)) \Leftrightarrow_p ((A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C))$

f) *Identita, idempotencia a absorpcia*

Pripojením ľubovoľnej tautológie T (napr. $(B \vee \neg B)$) k akejkoľvek formule konjunkciou sa nezmení jej význam. Tautológia sa teda voči konjunkcii správať podobne ako jednotka voči násobeniu. Analogický vzťah je medzi nesplniteľnými formulami \perp (napr. $(B \wedge \neg B)$) a disjunkciou. Týmto dvom faktom sa hovorí aj *zákony identity*.

i. $(A \wedge T) \Leftrightarrow_p A$

ii. $(A \vee \perp) \Leftrightarrow_p A$

Naopak nesplniteľné formuly voči konjunkcii a tautológia voči disjunkcii sa správajú ako nula voči násobeniu:

iii. $(A \wedge \perp) \Leftrightarrow_p \perp$

iv. $(A \vee T) \Leftrightarrow_p T$

Spojky \wedge a \vee sú *idempotentné*, teda ich aplikácia na tú istú formulu nemení jej význam.

v. $(A \wedge A) \Leftrightarrow_p A$

vi. $(A \vee A) \Leftrightarrow_p A$

Zákony absorpcie: Keď formulu A disjunkciou pripojíme ku konjunkcii A s ľubovoľnou formulou B , nepridali sme žiadnu novú informáciu (pridaná konjunkcia sa „absorbuje“ do A). To isté platí o pripojení A konjunkciou k $(A \vee B)$.

vii. $(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow_p A$

viii. $(A \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow_p A$

💡 Pri úprave formuly do CNF nám tieto ekvivalencie umožňujú zbaviť sa zdvojených podformúl, zrejmých tautológií alebo nesplniteľných podformúl a absorbovatelných podformúl, ktoré môžu vzniknúť napríklad aplikáciou distributívnych zákonov.

Riešenie pre d) iv. pravidlo negácie disjunkcie.

Nech A a B sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka \mathcal{L} . Nech v je ľubovoľné výrokovologické ohodnotenie pre jazyk \mathcal{L} .

Rozoberme možné prípady pravdivosti a nepravdivosti formúl A a B vo v a zistíme, v ktorých prípadoch $v \models_p \neg(A \rightarrow B)$ vtt $v \models_p (A \wedge \neg B)$:

⚠️ Platia rovnaké varovania ako v príklade 4.1.3. Postupujeme rozborom pravdivosti formúl A, B, C v ľubovoľnom ohodnotení.

	A	B	$(A \rightarrow B)$	$\neg(A \rightarrow B)$	$\neg B$	$(A \wedge \neg B)$
v	\models_p	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$
v	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	\models_p	\models_p	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$
v	$\not\models_p$	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$	\models_p	$\not\models_p$

Rozobrali sme všetky prípady pravdivosti A a B v ohodnotení v . Obe sú pravdivé, keď $v \models_p A$ a $v \models_p B$, inak sú obe nepravdivé. Teda v každom prípade $v \models_p \neg(A \rightarrow B)$ vtt $v \models_p (A \wedge \neg B)$.

Pretože v bolo ľubovoľné ohodnotenie, môžeme naše zistenie zovšeobecniť: $v \models_p \neg(A \rightarrow B)$ vtt $v \models_p (A \wedge \neg B)$ pre každé ohodnotenie v pre jazyk \mathcal{L} . Podľa definície ekvivalentnosti formúl 4.10 teda $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$. \square

4.3 Tvrdenia o vyplývaní, splniteľnosti, atď.

4.3.1 Príklad. Dokážte: Nech \mathcal{L}_1 je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$, pričom $z \notin \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk \mathcal{L}_2 výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{z\}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, taký že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu A v jazyku \mathcal{L}_1 existuje formula B v jazyku \mathcal{L}_2 taká, že

- a) A je výrokovologicky splniteľná vtt B je výrokovologicky splniteľná (teda výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje vtt existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$).
- b) Štruktúra \mathcal{M}_1 taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje vtt existuje štruktúra \mathcal{M}_2 taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

Riešenie. Nech \mathcal{L}_1 je jazyk podľa predpokladov. Jazyk \mathcal{L}_2 skonštruujeme tak, že $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2} = \{z\}$ (tu ani nemáme inú možnosť) a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{P_{-c_1- \dots -c_n}^1 \mid P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}, \text{ar}_{\mathcal{L}_1}(P) = n, c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}\}.$$

Každý predikátový symbol jazyka \mathcal{L}_2 je teda unárny a vznikne spojením (pomocou podčiarnikov) niektorého pôvodného predikátového symbolu P a toľkých pôvodných individuových konštánt, aká je arita predikátu P . Jazyk \mathcal{L}_2 obsahuje všetky možné také kombinácie.

Nech A je ľubovoľná formula v jazyku \mathcal{L}_1 . Formulu B v jazyku \mathcal{L}_2 skonštruujeme z formuly A tak, že každý výskyt atómu $P(c_1, \dots, c_n)$ nahradíme atómom $P_{-c_1- \dots -c_n}(z)$, pre všetky $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, kde n je arita predikátového symbolu P . (Teda napr. ak $A = (\text{ľúbi}(\text{Peter}, \text{Lucia}) \rightarrow \text{naliála}(\text{Lucia}, \text{Peter}, \text{Pivo}))$, tak $B = (\text{ľúbi_Peter_Lucia}(z) \rightarrow \text{naliála_Lucia_Peter_Pivo}(z))$.)


Dokážme najprv časť a), \Rightarrow : Nech v_1 je výrokové ohodnotenie také, že $v_1 \models_p A$. Výrokové ohodnotenie v_2 skonštruujeme nasledovne:

$$v_2(P_{-c_1- \dots -c_n}(z)) = v_1(P(c_1, \dots, c_n)), \quad \text{pre každý } P_{-c_1- \dots -c_n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}.$$

Ostáva nám dokázať, že platí $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models B$. Dôkaz urobíme indukciou na konštrukciu formuly A :

- Nech A je atomická formula. Ak A je predikátový atóm, má tvar $A = P(c_1, \dots, c_n)$, pre nejaký n -árny predikátový symbol $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a nejaké individuové konštanty $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$, a jej zodpovedajúca formula $B = P_{-c_1- \dots -c_n}(z)$.

Keďže v_2 sme skonštruovali tak, že oba atómy A aj B sú príslušným ohodnotením ohodnotené rovnako (t.j. $v_1(A) = v_2(B)$), vidíme, že platí $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$.

Ak A je rovnostný atóm, tvrdenie preň triviálne platí.  Tvrdenie máme dokázať iba pre výrokovologické formuly, teda také, v ktorých sa rovnosť nevyskytuje.

- Nech A je v tvare $\neg A_1$. Potom B je v tvare $\neg B_1$, pričom B_1 je zodpovedajúca formula k formule A_1 . Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení pre \neg potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \not\models_p A_1$ vtt $v_2 \not\models_p B_1$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $(A_1 \wedge A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \wedge B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení (\wedge) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_1 \models_p A_1$ a $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_1$ a $v_2 \models_p B_2$ vtt $v_2 \models_p B$.
- Nech A je v tvare $(A_1 \vee A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \vee B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení (\vee) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.
- Nech A je v tvare $(A_1 \rightarrow A_2)$. Potom B je v tvare $(B_1 \rightarrow B_2)$, pričom B_1, B_2 sú zodpovedajúce formuly k formulám A_1, A_2 (v tomto poradí). Z indukčného predpokladu máme $v_1 \models_p A_1$ vtt $v_2 \models_p B_1$ ako aj $v_1 \models_p A_2$ vtt $v_2 \models_p B_2$. Z definície pravdivosti formuly v ohodnotení (\rightarrow) potom platí aj $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$ podobne ako v prípade konjunkcie.

Časť a), \Leftarrow je analogická, konštrukciu otočíme: Nech v_2 je výrokové ohodnotenie také, že $v_2 \models_p B$. Výrokové ohodnotenie v_1 skonštruujeme nasledovne:

$$v_1(P(c_1, \dots, c_n)) = v_2(P_{-c_1- \dots -c_n}(z)),$$

pre všetky $P^n \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$ a $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$. V prípade atomickej formuly A opäť priamo z konštrukcie vyplýva, že $v_1 \models_p A$ vtt $v_2 \models_p B$. Indukciou na konštrukciu formuly poľahky dokážeme to isté pre ľubovoľné (neatomické) výrokovologické formuly vo všeobecnosti.

Dokážme teraz časť b), \Rightarrow : Nech $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$. Štruktúru $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ skonštruujeme nasledovne:

$$D_2 = \{7\},$$

$$i_2(z) = 7,$$

$$i_2(P_{c_1 \dots c_n}) = \begin{cases} \{7\}, & \text{ak } (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P), \\ \emptyset, & \text{inak,} \end{cases}$$

pre každý $P_{c_1 \dots c_n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$.

Ak $A = P(c_1, \dots, c_n)$ je atomická formula (a teda $B = P_{c_1 \dots c_n}(z)$), tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie \mathcal{M}_2 máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P) \quad \text{vtt} \quad i_2(z) = 7 \in i_2(P_{c_1 \dots c_n}) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Indukciou na konštrukciu formuly opäť poľahky dokážeme to isté aj pre ľubovoľné (neatomické) formuly.


Dokážme teraz časť b), \Leftarrow : Nech $\mathcal{M}_2 = (D_2, i_2)$ je štruktúra taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$. Štruktúru $\mathcal{M}_1 = (D_1, i_1)$ skonštruujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{\heartsuit_c \mid c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}\}, \\ i_1(c) &= \heartsuit_c && \text{pre každú } c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}, \\ i_1(P) &= \{(\heartsuit_{c_1}, \dots, \heartsuit_{c_n}) \mid i_2(z) \in i_2(P_{c_1 \dots c_n}), c_1, \dots, c_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}\} \\ &&& \text{pre každý } P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}, \text{ kde } n \text{ je arita } P. \end{aligned}$$

Vďaka tejto konštrukcii je zvyšok dôkazu rovnaký ako v prípade \Leftarrow . Opäť sa poľahky presvedčíme, že ak $A = P(c_1, \dots, c_n)$ je atomická formula, a teda $B = P_{c_1 \dots c_n}(z)$, tak z definície pravdivosti formuly v štruktúre a z konštrukcie \mathcal{M}_2 máme:

$$\mathcal{M}_1 \models A \quad \text{vtt} \quad (i_1(c_1), \dots, i_1(c_n)) \in i_1(P) \quad \text{vtt} \quad i_2(z) \in i_2(P_{c_1 \dots c_n}) \quad \text{vtt} \quad \mathcal{M}_2 \models B.$$

Následne indukciou na konštrukciu formuly dokážeme to isté aj pre ľubovoľné formuly.

 V dôkaze časti b) v smere \Leftarrow samozrejme nezáleží na konkrétnom objekte, ktorý použijeme v doméne D_2 .

Podobne ani v smere \Rightarrow nie sú podstatné konkrétne objekty v doméne D_1 , pokiaľ zabezpečíme, že každej individuovej konštante sa dá priradiť unikátny prvok domény, teda že interpretácia konštánt bude injektívna funkcia (prečo?). My sme si zvolili doménu pozostávajúcu zo symbolov \heartsuit_c pre každú konštantu c . Rovnako dobre by sme mohli konštanty zoradiť do postupnosti a i -tu konštantu interpretovať jej poradovým číslom i . Dokonca by ako D_1 poslúžila priamo množina všetkých konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ — takej štruktúre sa hovorí *herbrandovská interpretácia*. \square


4.3.2 Nech \mathcal{L}_1 je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu s množinami individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1} = \{\text{prof_Mráček, doc_Uhladená, Kiki, Veve, študent}_1, \dots, \text{študent}_7, \text{Mat_1}, \dots, \text{Mat_4, Prog_1, Prog_2, null, A, B, \dots, FX, riadny, 1.opravný, 2.opravný}\}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1} = \{\text{milý}^1, \text{prísny}^1, \text{študent}^1, \text{učiteľ}^1, \text{usilovný}^1, \text{školiť}^2, \text{učiteľ_predmetu}^2, \text{hodnotenie}^5\}$.

Dokážte, že existuje jazyk \mathcal{L}_2 výrokovologickej časti logiky prvého rádu s vhodne zvolenou množinou individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2} = \{\text{platí}^2\}$ taký, že pre ľubovoľnú výrokovologickú formulu A v jazyku \mathcal{L}_1 existuje výrokovologická formula B v jazyku \mathcal{L}_2 , pre ktorú platí:

- a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.
- b) Štruktúra \mathcal{M}_1 taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra \mathcal{M}_2 taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

4.3.3 Dokážte: Nech \mathcal{L}_1 je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinami individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_1}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}$. Potom existuje jazyk \mathcal{L}_2 výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti s množinou individuových konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_2}$ a množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$, takou, že $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}$ obsahuje iba *unárne* predikátové symboly a zároveň $|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$, taký že pre ľubovoľnú formulu A v jazyku \mathcal{L}_1 existuje formula B v jazyku \mathcal{L}_2 , pre ktorú platí:

- a) Výrokové ohodnotenie v_1 také, že $v_1 \models_p A$, existuje *vtt* existuje výrokové ohodnotenie v_2 také, že $v_2 \models_p B$.
- b) Štruktúra \mathcal{M}_1 taká, že $\mathcal{M}_1 \models A$, existuje *vtt* existuje štruktúra \mathcal{M}_2 taká, že $\mathcal{M}_2 \models B$.

 **Pomôcka.** Riešenie cvičenia 4.3.1, tiež obsahuje transformáciu, ktorej výsledkom sú iba unárne predikátové symboly. Na rozdiel od cvičenia 4.3.1 je však v tejto úlohe potrebné jazyk \mathcal{L}_1 preložiť do jazyka \mathcal{L}_2 tak, aby sa počet predikátových symbolov nezmenil ($|\mathcal{P}_{\mathcal{L}_2}| = |\mathcal{P}_{\mathcal{L}_1}|$). Môžete teda napr. skúsiť takú transformáciu, že predikátové symboly „zachováte“, iba im zmeníte aritu na 1, a potrebný výsledok dosiahnete vhodnou transformáciou množiny individuových konštánt.

4.3.4 Uvažujme jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti a nech $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ je nejaká jeho individuová konštanta.

Nech A je ľubovoľná výrokovologická formula jazyka \mathcal{L} a nech B vznikne z A nahradením všetkých výskytov všetkých individuových konštánt konštantou a .

Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Ak A je splniteľná, tak aj B je splniteľná.
- b) Ak B je splniteľná, tak aj A je splniteľná.

4.3.5 Uvažujme jazyk \mathcal{L} výrokovologickej časti logiky prvého rádu bez rovnosti. Nech X a Y sú ľubovoľné výrokovologické formuly jazyka \mathcal{L} , nech T je ľubovoľná výrokovologická teória v \mathcal{L} . Dokážte alebo vyvráťte:

- | | |
|--|---|
| a) $\{\} \models_p X$ vtt X je tautológia. | m) Formula $(X \rightarrow Y)$ je nespĺniteľná vtt X je tautológia a Y je nespĺniteľná. |
| b) Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia. | n) Formula X je nezávislá od $\{\}$ vtt X je splniteľná a falzifikovateľná. |
| c) Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$. | o) Ak formula X logicky nevyplýva z T a ani nie je nezávislá od T , tak T je splniteľná a vyplýva z nej negácia X . |
| d) Ak $T \not\models_p X$, tak $T \models_p \neg X$. | p) Ak $T \models_p (A \rightarrow B)$, tak $T \cup \{\neg B\} \models_p \neg A$. |
| e) $T \models_p (X \rightarrow Y)$ vtt $T \cup \{X\} \models_p Y$. | q) Ak $T \not\models_p (A \wedge B)$, tak $T \models_p \neg A$ alebo $T \models_p \neg B$. |
| f) Ak $T \models_p (X \vee Y)$, tak $T \models_p X$ alebo $T \models_p Y$. | r) Ak $T \not\models_p (A \vee B)$, tak $T \not\models_p A$ a $T \not\models_p B$. |
| g) Ak $T \models_p X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \vee Y)$. | s) Ak $T \models_p (A \rightarrow B)$, tak $T \not\models_p (A \wedge \neg B)$. |
| h) Ak $T \models_p (X \rightarrow Y)$, tak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$. | t) Nech T je teória a X je formula. Ak T je nespĺniteľná, tak nemožno rozhodnúť, či $T \models_p X$ alebo $T \not\models_p X$. |
| i) Ak $T \not\models_p X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \rightarrow Y)$. | |
| j) Ak $T \models_p (X \rightarrow Y)$, tak $T \models_p \neg X$ alebo $T \models_p Y$. | |
| k) Ak $T \models_p \neg X$ alebo $T \models_p Y$, tak $T \models_p (X \rightarrow Y)$. | |
| l) $T \models_p X$ a $T \models_p Y$ vtt $T \models_p (X \wedge Y)$. | |

Riešenie. a) Dokážme alebo vyvráťme: $\{\} \models_p X$ vtt X je tautológia.



Na prednáškach ste už videli dôkaz podobného tvrdenia 4.14c). Dôkaz tvrdenia a) podrobne okomentujeme, aby ste podľa neho dokázali robiť vlastné.

Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že $\{\} \models_p X$ je postačujúcou (\Rightarrow) aj nutnou (\Leftarrow) podmienkou toho, že X je tautológia, teda:

(\Rightarrow) ak $\{\} \models_p X$, tak X je tautológia; (\Leftarrow) ak X je tautológia, $\{\} \models_p X$.

(\Rightarrow) a (\Leftarrow) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie \rightarrow). Obe dokážeme priamymi dôkazmi.

Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

(\Rightarrow) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $\{\} \models_p X$. Chceme ukázať, že potom X je tautológia.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že v každom ohodnotení v , v ktorom je pravdivá teória $\{\}$, je pravdivá aj formula X . Podľa definície tautológie chceme dokázať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v .

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v . Pretože teória $\{\}$ neobsahuje žiadne formuly, triviálne platí, že všetky formuly Z sú pravdivé vo v , a teda podľa definície pravdivosti teórie v ohodnotení, $v \models_p \{\}$. Z predpokladu, že z $\{\}$ vyplýva X , potom máme, že $v \models_p X$. Na základe tohto zistenia a preto, že v bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že X je pravdivá v každom ohodnotení v , teda X je tautológia, čo bolo treba dokázať.

(\Leftarrow) Nech X je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že X je tautológia, teda že (podľa definície tautológie) X je pravdivá vo všetkých ohodnoteniach. Chceme dokázať, že potom $\{\} \models_p X$ teda, že (podľa definície vyplývania) vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X .

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie v . Predpokladajme, že $v \models_p \{\}$, a ukážme, že $v \models_p X$. To však máme priamo z predpokladu, že X je tautológia. Teda zovšeobecňujeme, že v každom ohodnotení, v ktorom je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X , teda z $\{\}$ vyplýva X , čo bolo treba dokázať.

Dokázaním tvrdení (\Rightarrow) a (\Leftarrow) sme dokázali tvrdenie a).

💡 Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

💡 Keď máme dokázať, že všetky objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (je v nich pravdivá X), zoberieme si hocijaký taký objekt a ukážeme, že keď pochtivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

💡 Jasnejšia formulácia tvrdenia „Vo všetkých ohodnoteniach, v ktorých je pravdivá $\{\}$, je pravdivá aj X ,“ je „Pre všetky ohodnotenia v , ak $v \models_p \{\}$, tak $v \models_p X$ “. Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

💡 Pri dôkazoch iných tvrdení možno budete navyše potrebovať techniku rozboru prípadov, ktorú sme na prednáške použili pri dôkaze prvej ekvivalencie z vety 4.11 a tvrdenia 4.14c)(\Leftarrow).

c) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \models_p \neg X$, tak $T \not\models_p X$.

💡 Pokúsme sa tvrdenie dokázať. Je to implikácia, takže predpokladáme pravdivosť jej antecedentu (ľavej strany) a snažíme sa ukázať pravdivosť konzekventu (pravej strany).

Predpokladajme, že $T \models_p \neg X$. Naším cieľom je dokázať, že potom $T \not\models_p X$.

Uvedomíme si definíciu vyplývania a aplikujeme ju na náš prípad:

Podľa predpokladu v každom ohodnotení v , v ktorom je pravdivá T , je pravdivá aj $\neg X$. Máme dokázať, že nie je pravda, že v každom ohodnotení v , v ktorom je pravdivá T , je pravdivá aj X . To znamená, že musíme nájsť nejaké ohodnotenie v , v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.

Zdá sa, že s nájdením ohodnotenia by nám mohol pomôcť nasledujúci rozbor prípadov.

Pre každú teóriu sú dve možnosti: buď existuje ohodnotenie, v ktorom je pravdivá, alebo také ohodnotenie neexistuje.

- Ak existuje v , v ktorom je T pravdivá, tak podľa predpokladu $v \models_p \neg X$, a teda $v \not\models_p X$. V tomto prípade teda existuje ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá, ale X nepravdivá.
- Ak neexistuje v , v ktorom je T pravdivá, tak neexistuje ani ohodnotenie, v ktorom je T pravdivá a navyše X nepravdivá. Požadovaný cieľ v tomto prípade **nie je možné dosiahnuť**.

Situáciu by ešte mohlo zachrániť, keby prípad „neexistuje v , v ktorom je T pravdivá“ nemohol nastať, lebo je v spore s nejakým predchádzajúcim predpokladom. To však nie je pravda, čo dokážeme nájdením **konkrétnej** teórie T a formuly X , pre ktoré sú predpoklady pravdivé, ale záver nie.

Zoberme jazyk \mathcal{L} s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{a\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{p\}$, teóriu $T = \{(p(a) \wedge \neg p(a))\}$ a formulu $X = p(a)$. T je nesplniteľná, a preto triviálne platí, že z T vyplýva $\neg X$ (pretože pre každé ohodnotenie v je implikácia „ak $v \models_p T$, tak $v \models_p \neg X$ “ pravdivá, pretože jej antecedent je nepravdivý). Zároveň ale žiadne ohodnotenie nemá vlastnosť, že je v ňom T pravdivá a X nepravdivá.

Konštatujeme teda, že tvrdenie c) **neplatí**. Vyššie uvedená teória a formula tvoria jeden z jeho **kontrapríkladov**.

d) Dokážme alebo vyvráťme: Ak $T \not\models_p X$, tak $T \models_p \neg X$.

💡 Predpokladajme, že $T \not\models_p X$, a zistíme, či $T \models_p \neg X$. Podľa predpokladu existuje nejaké ohodnotenie v , pre ktoré platí $v \models_p T$, ale $v \not\models_p X$. Máme dokázať, že potom pre každé ohodnotenie w platí, že ak $w \models_p T$, tak $w \models_p \neg X$.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie w a predpokladajme, že $w \models_p T$. Ak $w = v$, tak $w \not\models_p X$, a teda $w \models_p \neg X$. Ak však $w \neq v$, túto úvahu uplatniť nemôžeme. Nie je ťažké si uvedomiť, že predpoklad tvrdenia a tento prípad vieme dosiahnuť pre konkrétne T , X a ohodnotenie v , pričom však v nejakom inom ohodnotení budú T aj X pravdivé, a teda $\neg X$ nepravdivé.

Máme teda dôvod sa domnievať, že tvrdenie neplatí. Potvrdíme to nájdením **konkrétneho** kontrapríkladu.

Zoberme jazyk \mathcal{L} s $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{a, b\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{p\}$, teóriu $T = \{p(a)\}$ a formulu $X = p(b)$. Potom $T \not\models_p X$, lebo pre ohodnotenie $v = \{p(a) \mapsto t, p(b) \mapsto f\}$ máme $v \models_p T$ a $v \not\models_p X$. Zároveň pre ohodnotenie $w = \{p(a) \mapsto t, p(b) \mapsto t\}$ máme $w \models_p T$ a $w \models_p X$, teda $w \not\models_p \neg X$. Preto $T \not\models_p \neg X$. Našli sme kontrapríklad, takže tvrdenie d) **neplatí**. \square

Literatúra

- [1] Dave Barker-Plummer, Jon Barwise, and John Etchemendy. *Language, Proof and Logic*. CSLI Publications, second edition edition, 2011.
- [2] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. <http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf>.
- [3] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.