Mnożenie macierzy algorytmem Bineta i Strassena

Jakub Płowiec, Filip Dziurdzia

Zadanie

Dla macierzy o rozmiarze mniejszym lub równym $2^l \times 2^l$ algorytm rekurencyjny Binéta. Dla macierzy o rozmiarze większym od $2^l \times 2^l$ algorytm rekurencyjny Strassena.

Wstęp teoretyczny

1. Wprowadzenie

Najbardziej intuicyjną metodą mnożenia jest **klasyczne mnożenie macierzy**, które ma złożoność czasową $\mathbf{O(n^3)}$. W celu zwiększenia efektywności opracowano różne optymalizacje, takie jak:

- **Metoda Bineta**, która opiera się na rekurencyjnym dzieleniu macierzy na mniejsze bloki i stosowaniu klasycznego mnożenia dla najmniejszych podmacierzy.

- **Metoda Strassena**, która wykorzystuje sprytne obliczenia rekurencyjne, zmniejszając liczbę operacji mnożenia kosztem dodatkowych operacji dodawania i odejmowania.

Obie te metody zmniejszają liczbę operacji mnożenia, co prowadzi do przyspieszenia obliczeń w porównaniu do klasycznej metody.

2. Klasyczne mnożenie macierzy

Niech dane będą dwie macierze kwadratowe:

$$A = [a_{ij}] \quad \text{oraz} \quad B = [b_{ij}]$$

o wymiarach $n \times n$. Klasyczne mnożenie macierzy definiujemy jako:

$$C = A \cdot B, \quad \text{gdzie} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Dla każdego elementu $ c_{ij} $ wykonujemy n operacji mnożenia i dodawania, co prowadzi do całkowitej liczby operacji rzędu $\mathbf{O(n^3)}$.

3. Metoda Bineta – mnożenie adaptacyjne

3.1 Idea metody

Metoda Bineta polega na rekurencyjnym podziale macierzy na bloki i wykonywaniu mnożenia na mniejszych podmacierzach.

3.2 Algorytm

1. **Podział macierzy na podmacierze**
   Dzielimy macierze na cztery mniejsze bloki:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

2. **Rekurencyjne mnożenie bloków**
   Obliczamy wyniki dla podmacierzy:

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\ C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{aligned}$$

3. **Scalanie wyników**
   Łączymy bloki w macierz wynikową $ C $.

3.3 Złożoność obliczeniowa

Niestety metoda Bineta działa ze złożonością $\mathbf{O(n^3)}$, jednakże wykonywanych jest mniej operacji niż przy klasycznym mnożeniu.

4. Metoda Strassena

4.1 Idea metody

Metoda Strassena, opracowana przez Volkera Strassena w 1969 roku, redukuje liczbę operacji mnożenia, zamieniając część z nich na operacje dodawania i odejmowania. Kluczowa idea tej metody polega na inteligentnym wykorzystaniu tożsamości macierzowych w celu zmniejszenia liczby mnożeń blokowych z **8 do 7**.

Dzięki temu, zamiast złożoności $O(n^3)$, uzyskujemy złożoność $O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.81})$, co jest znaczną poprawą dla dużych macierzy.

4.2 Algorytm

Podobnie jak w metodzie Bineta, dzielimy macierze $ A $ i $ B $ na cztery bloki. Następnie definiujemy siedem pośrednich iloczynów macierzowych:

$$M_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$$

$$M_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$$

$$M_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$$

$$M_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$$

$$M_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$$

$$M_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12})$$

$$M_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$$

Na ich podstawie obliczamy elementy wynikowej macierzy C:

$$C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

$$C_{12} = M_3 + M_5$$

$$C_{21} = M_2 + M_4$$

$$C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$$

4.3 Złożoność obliczeniowa

Metoda Strassena redukuje liczbę mnożeń, ale wprowadza dodatkowe operacje dodawania i odejmowania. Jej złożoność wynosi:

$$O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.81})$$

co daje znaczną poprawę dla dużych macierzy.

Rozwiązanie

Implementację obu algorytmów, funkcji je scalającej oraz generowanie wykresów wykonaliśmy w języku **Python**.

1. Pseudokod

Funkcja: `matrix_multiplication(A, B, l)` - Dane wejściowe:
- `A`, `B`: Kwadratowe macierze o rozmiarze $ n ×n $
- `l`: Próg przełączania na metodę Strassena
- **Wynik:**
- Macierz `C`, będąca wynikiem iloczynu `A * B`

Algorytm: 1. **Warunek bazowy:**
- Jeśli `n <= l`, oblicz `C = strassen_multiplication(A, B)` i zwróć wynik.

2. **Podział macierzy:**
   - Podziel `A` na cztery podmacierze: `A_11, A_12, A_21, A_22`

   - Podziel `B` na cztery podmacierze: `B_11, B_12, B_21, B_22`
3. **Rekurencyjne obliczanie wynikowych podmacierzy:**
   Oblicz podmacierze `C` według wzoru:
   - `C_11 = matrix_multiplication(A_11, B_11, l) + matrix_multiplication(A_12, B_21, l)`
   - `C_12 = matrix_multiplication(A_11, B_12, l) + matrix_multiplication(A_12, B_22, l)`
   - `C_21 = matrix_multiplication(A_21, B_11, l) + matrix_multiplication(A_22, B_21, l)`
   - `C_22 = matrix_multiplication(A_21, B_12, l) + matrix_multiplication(A_22, B_22, l)`
4. **Scalanie wyników:**
   - Połącz podmacierze `C_11, C_12, C_21, C_22` w pełną macierz `C` za pomocą `merge_matrices()`.
5. **Zwróć wynikową macierz `C`**

Funkcja: `strassen_multiplication(A, B)` - Dane wejściowe:
- `A`, `B`: Kwadratowe macierze o rozmiarze $ n ×n $ - **Wynik:**
- Macierz `C`, będąca wynikiem iloczynu `A * B`

Algorytm: 1. **Warunek bazowy:**
- Jeśli `n == 1`, wykonaj zwykłe mnożenie skalarne `C = A * B` i zwróć wynik.

2. **Podział macierzy:**
   - Podziel `A` na cztery podmacierze: `A_11, A_12, A_21, A_22`

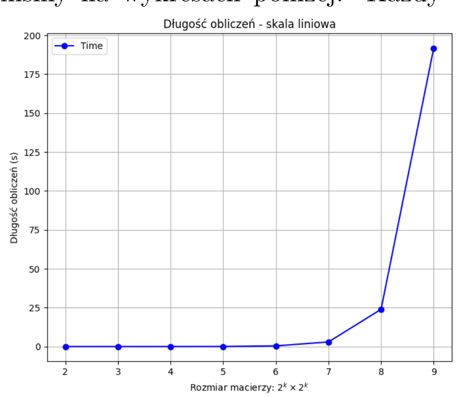
   - Podziel `B` na cztery podmacierze: `B_11, B_12, B_21, B_22`
3. **Obliczenie siedmiu macierzy pomocniczych `M_i`:**
   - `M1 = strassen_multiplication(A_11 + A_22, B_11 + B_22)`

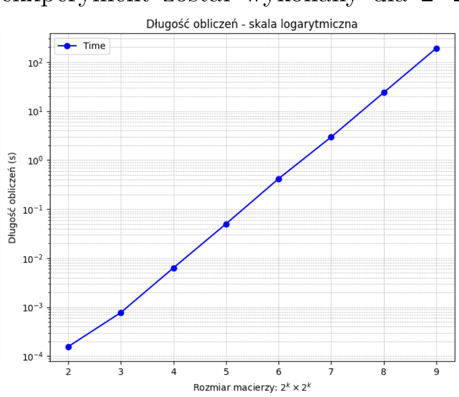
- `M2 = strassen_multiplication(A_21 + A_22, B_11)`
- `M3 = strassen_multiplication(A_11, B_12 - B_22)`
- `M4 = strassen_multiplication(A_22, B_21 - B_11)`
- `M5 = strassen_multiplication(A_11 + A_12, B_22)`
- `M6 = strassen_multiplication(A_21 - A_11, B_11 + B_12)`
- `M7 = strassen_multiplication(A_12 - A_22, B_21 + B_22)`

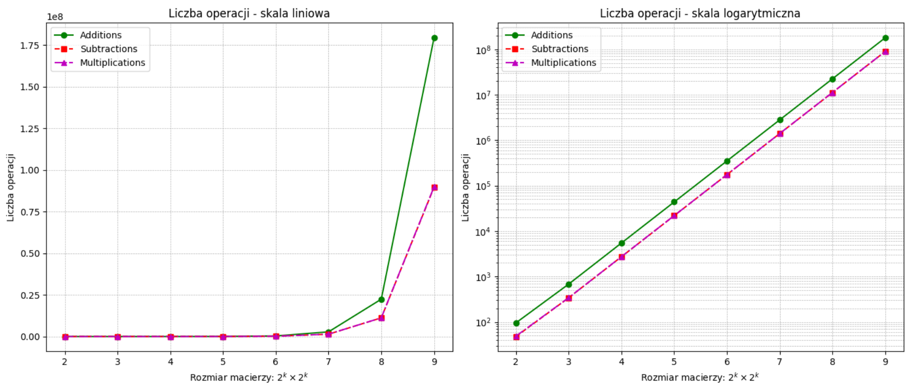
4. **Obliczenie podmacierzy wynikowej macierzy `C`:**
   - `C_11 = M1 + M4 - M5 + M7`
   - `C_12 = M3 + M5`
   - `C_21 = M2 + M4`
   - `C_22 = M1 - M2 + M3 + M6`
5. **Scalanie wyników:**
   - Połącz `C_11, C_12, C_21, C_22` w macierz `C` za pomocą `merge_matrices()`.
6. **Zwróć wynikową macierz `C`**

2. Wyniki

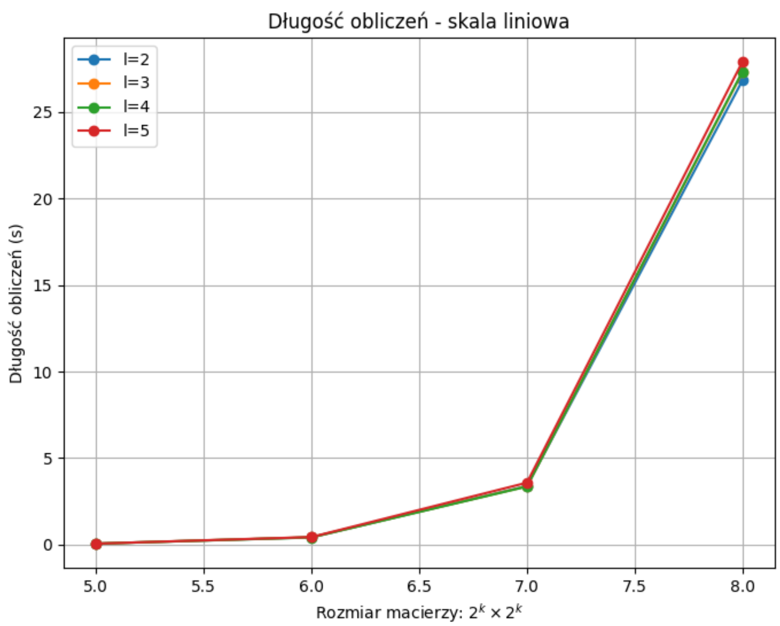
Obliczenia wykonaliśmy dla $k \in [2, 9]$ i otrzymane rezultaty przedstawiliśmy na wykresach poniżej. Każdy ekxperyment został wykonany dla `l=4`.







Następnie przeprowadziliśmy doświadczenia ze zmienną wartością $l \in [2, 5]$



Możemy zauważyć niewielką różnicę w czasach wywołania dla różnych `l` - im mniejsza jego wartość tym obliczenia były nieznacznie szybsze. Wynika to z faktu, że mnożenie algorytmem **Strassena** jest szybsze od mnożenia metodą **Bineta**, więc im szybciej zaczniemy z niej korzystać w obliczeniach tym szybciej otrzymamy całościowe wyniki.