Dekompozycja SVD Macierzy — Raport

Filip Dziurdzia, Jakub Płowiec

1. Wstęp

Celem zadania było przeprowadzenie dekompozycji SVD (Singular Value Decomposition) macierzy prostokątnej A o rozmiarach $(n \times m)$. Proces ten polega na rozbiciu macierzy A na trzy składniki:

$$A = USV^T$$

gdzie:

- U — macierz ortogonalna (wiersze to wektory własne AA^T),
- S — macierz diagonalna (singular values — pierwiastki z wartości własnych),
- V^T — macierz transponowana macierzy ortogonalnej V (wiersze to wektory własne A^TA).

2. Wybrane narzędzia

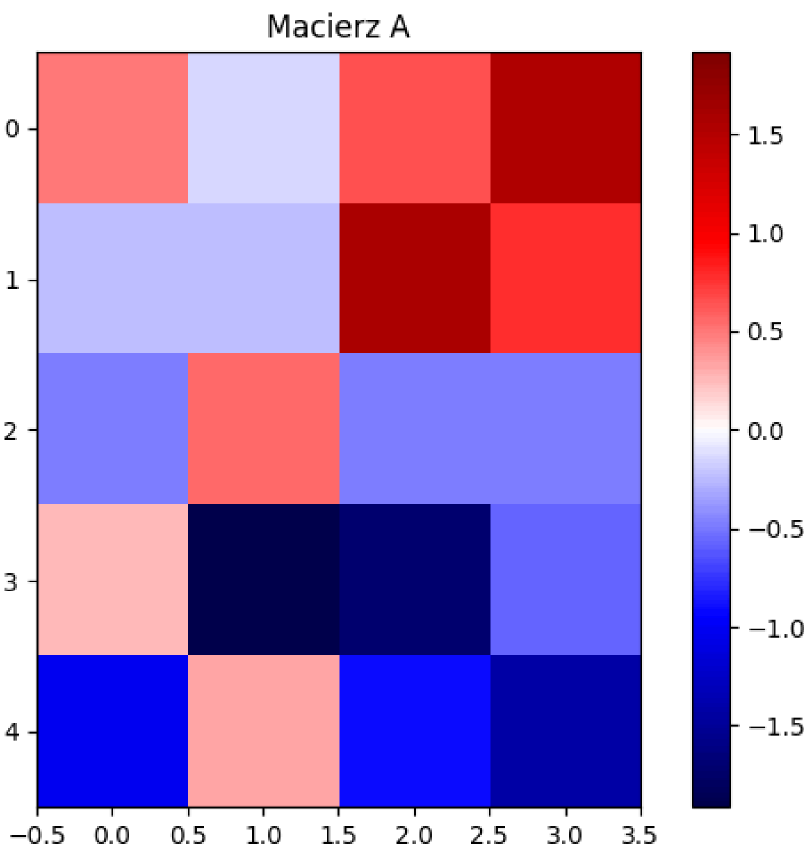
- **Język programowania:** Python 3.10
- **Biblioteki:**
  - `numpy` — operacje na macierzach, wartości i wektory własne
  - `matplotlib` — wizualizacja macierzy

3. Struktura kodu

Kod został uruchomiony dla $n = 5, m = 4$ i składa się z następujących kroków:

3.1 Wygenerowanie macierzy A

Generujemy losowo macierz A o rozmiarze $n \times m$.



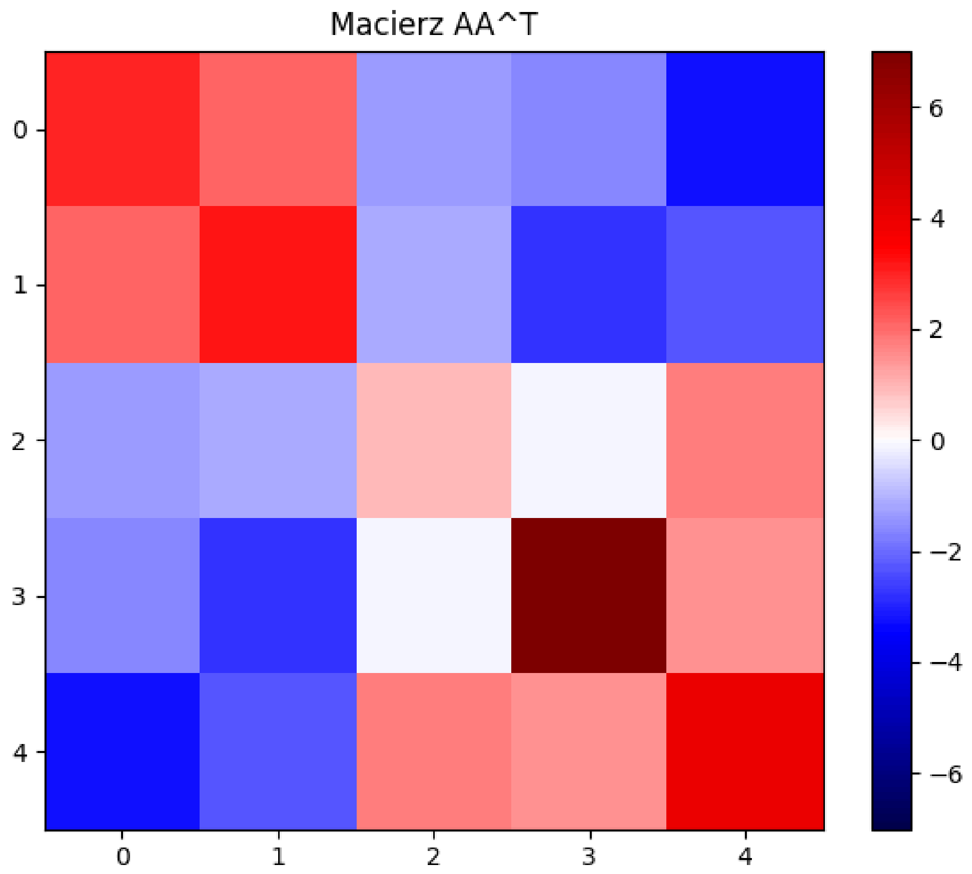
3.2 Dekompozycja przez AA^T

W pierwszej metodzie rozpoczynamy od obliczenia macierzy AA^T, następnie znajdujemy wartości własne oraz wektory własne tej macierzy, które zostaną wykorzystane do wyliczenia U oraz S. Kolejnym krokiem jest obliczenie V ze wzoru:

$$V = A^T U S^{-1}$$

3.2.1 Obliczenie AA^T

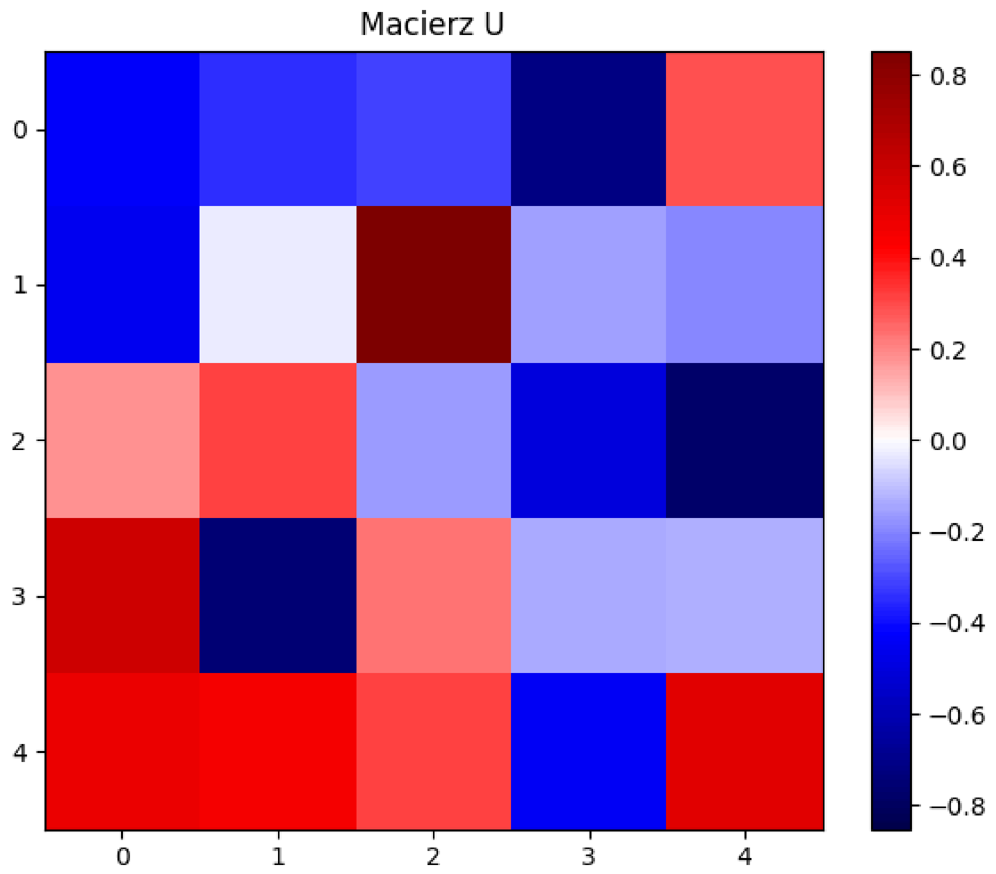
Pierwszym krokiem w tej metodzie jest obliczenie macierzy AA^T. Produkt AA^T jest macierzą kwadratową, o wymiarach $n \times n$. Obliczenie tej macierzy jest kluczowe, ponieważ w kolejnych krokach będziemy wykorzystywać jej wartości i wektory własne do wyznaczenia macierzy U i S.

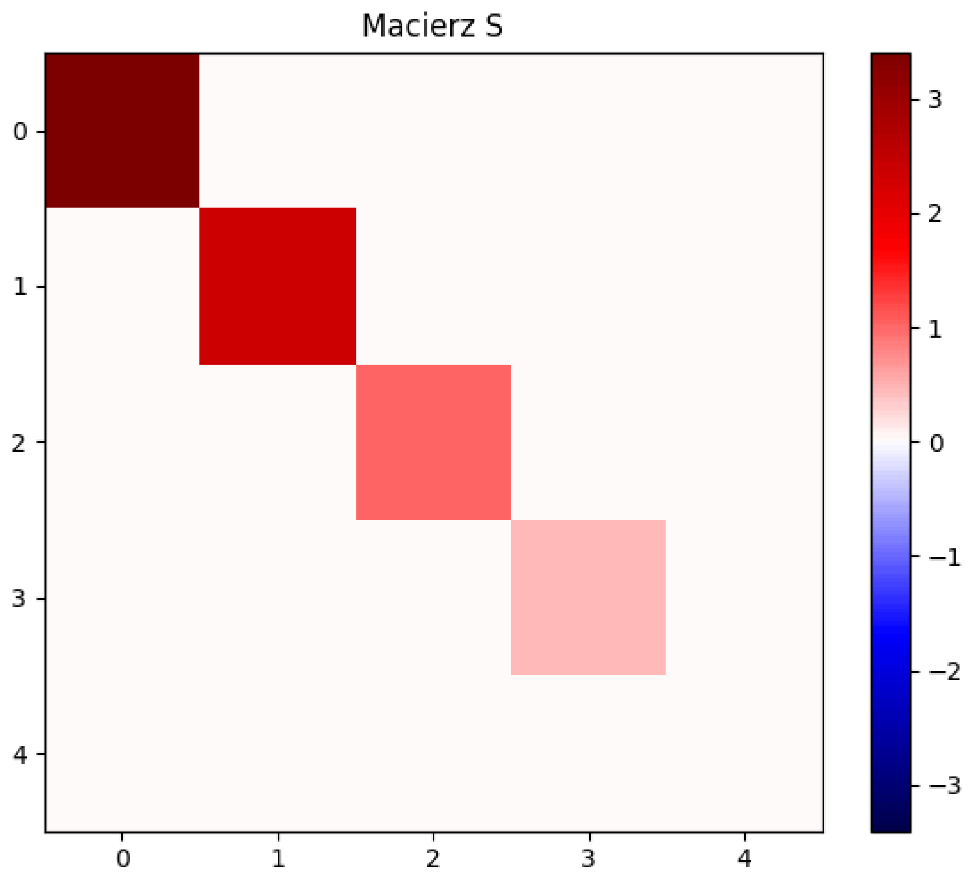


3.2.2 Wyznaczenie macierzy U i S

Kolejnym krokiem jest obliczenie wartości i wektorów własnych macierzy AA^T. Wartości własne odpowiadają pierwiastkom kwadratowym z wartości osobliwych macierzy A. Wektory własne stanowią kolumny macierzy U, a wartości własne są umieszczane na przekątnej macierzy diagonalnej S.

- U — wektory własne macierzy AA^T
- S — pierwiastki wartości własnych (na przekątnej)



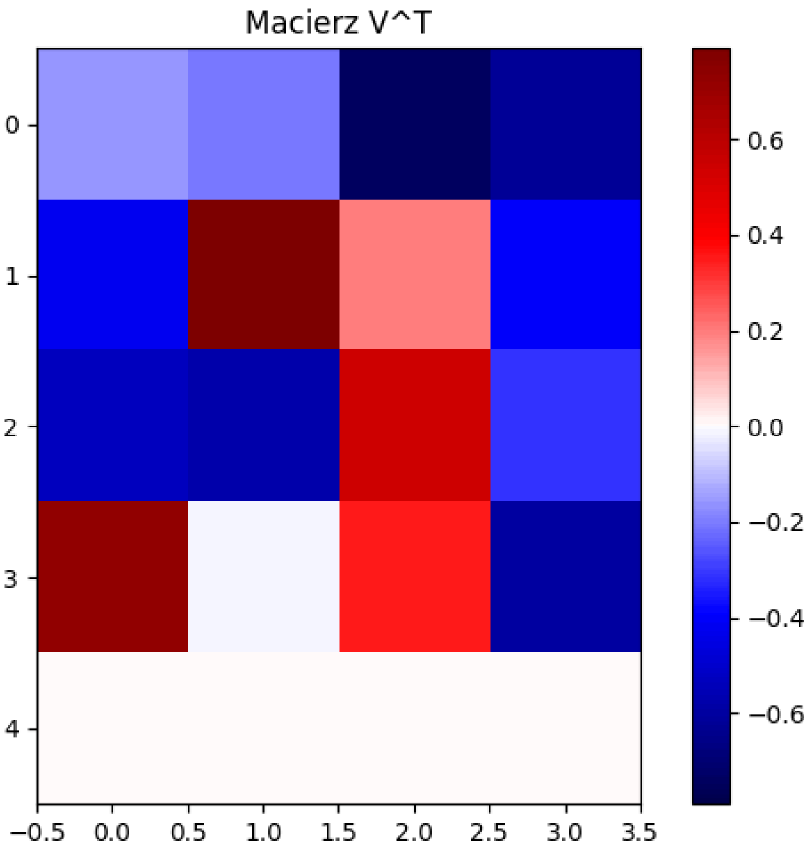


3.2.3 Wyznaczenie macierzy V

Po obliczeniu macierzy U oraz S, możemy wyznaczyć macierz V za pomocą wzoru:

$$V = A^T U S^{-1}$$

W praktyce oznacza to obliczenie odwrotności macierzy diagonalnej S, a następnie obliczenie macierzy V. Wartości te są użyteczne w dalszych obliczeniach, ponieważ macierz V zawiera wektory własne $A^T A$.



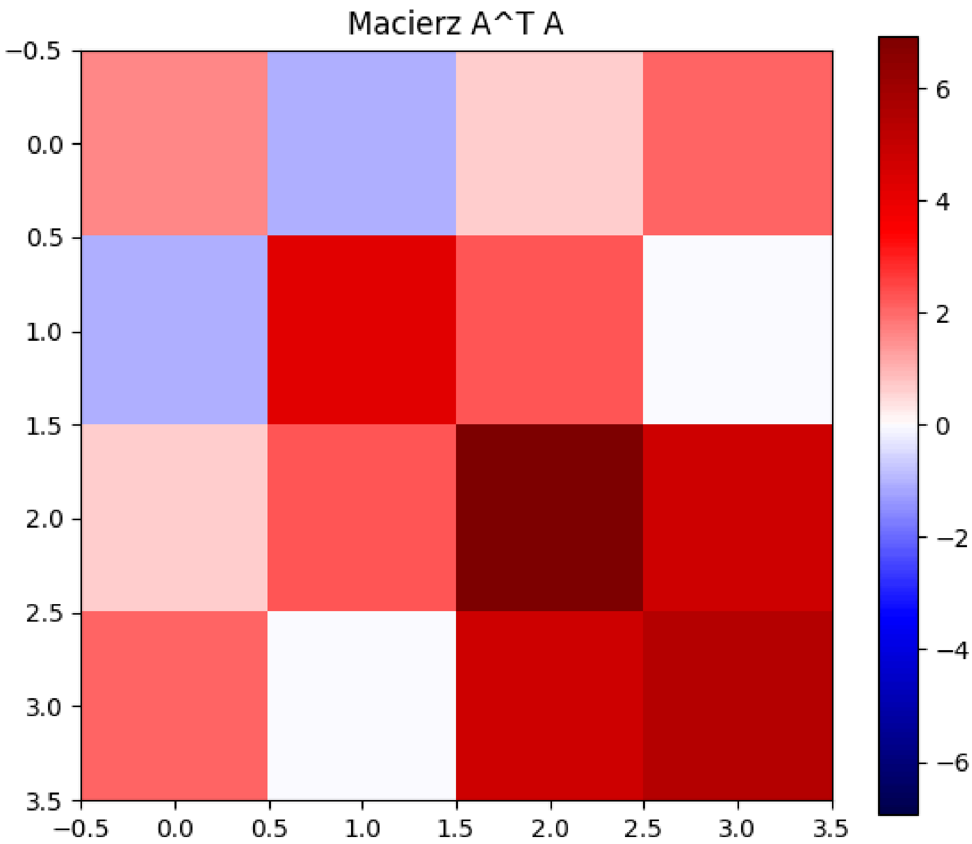
3.3 Dekompozycja przez $A^T A$

W drugiej metodzie, obliczamy macierz $A^T A$ i na jej podstawie wyznaczamy wartości własne i wektory własne, które zostaną wykorzystane do wyznaczenia V oraz S. Kolejnym krokiem jest obliczenie U ze wzoru:

$$U = AVS^{-1}$$

3.3.1 Obliczenie $A^T A$

Liczymy $A^T A$.

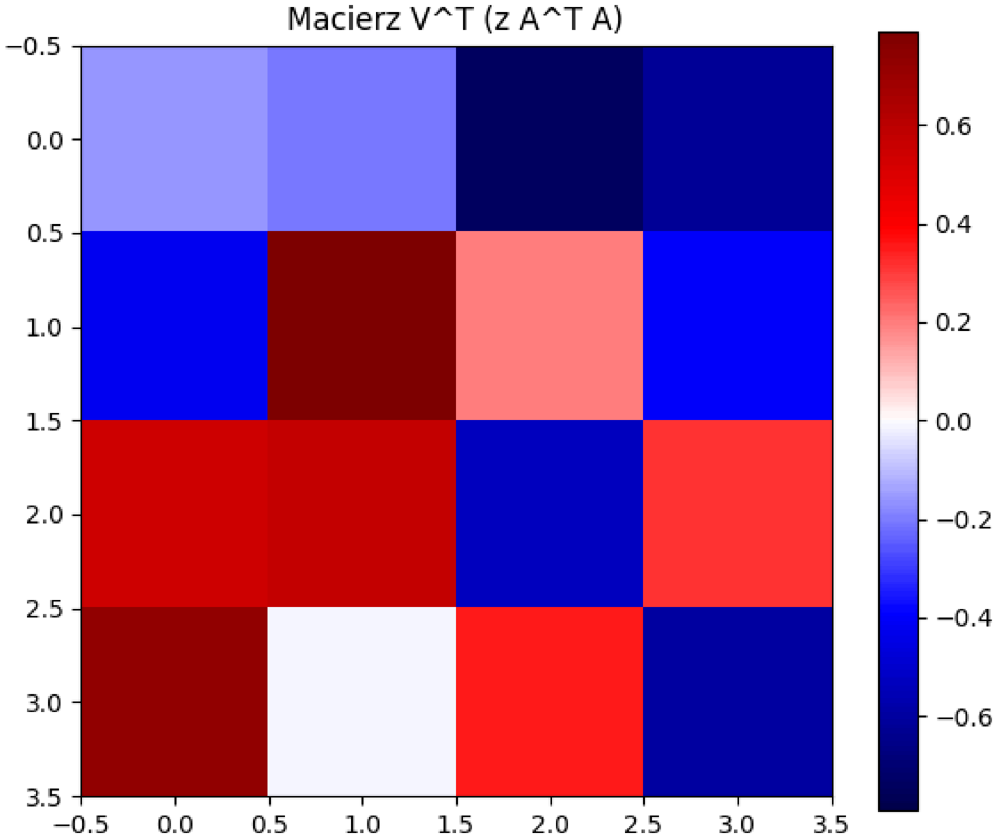


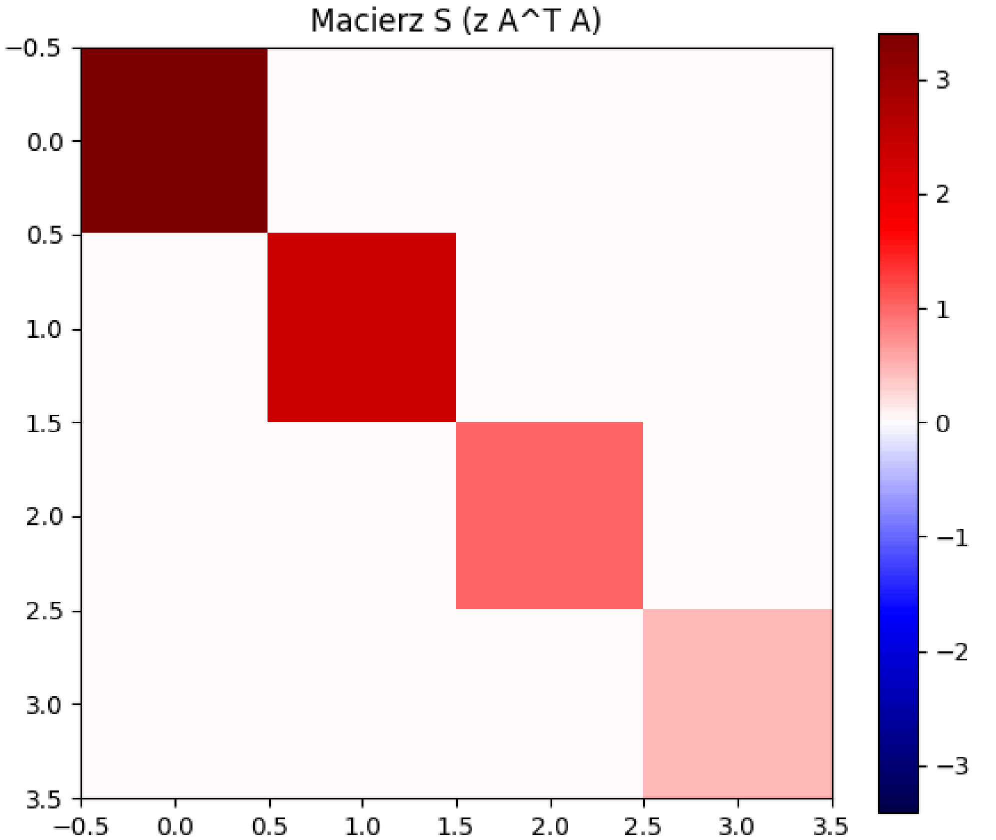
3.3.2 Wyznaczenie V i S

Na podstawie macierzy A^TA obliczamy wartości i wektory własne. Tak samo jak w przypadku AA^T, wartości własne odpowiadają pierwiastkom z wartości osobliwych, a wektory własne tworzą macierz V.

Na podstawie A^TA:

- V — wektory własne A^TA
- S — pierwiastki wartości własnych



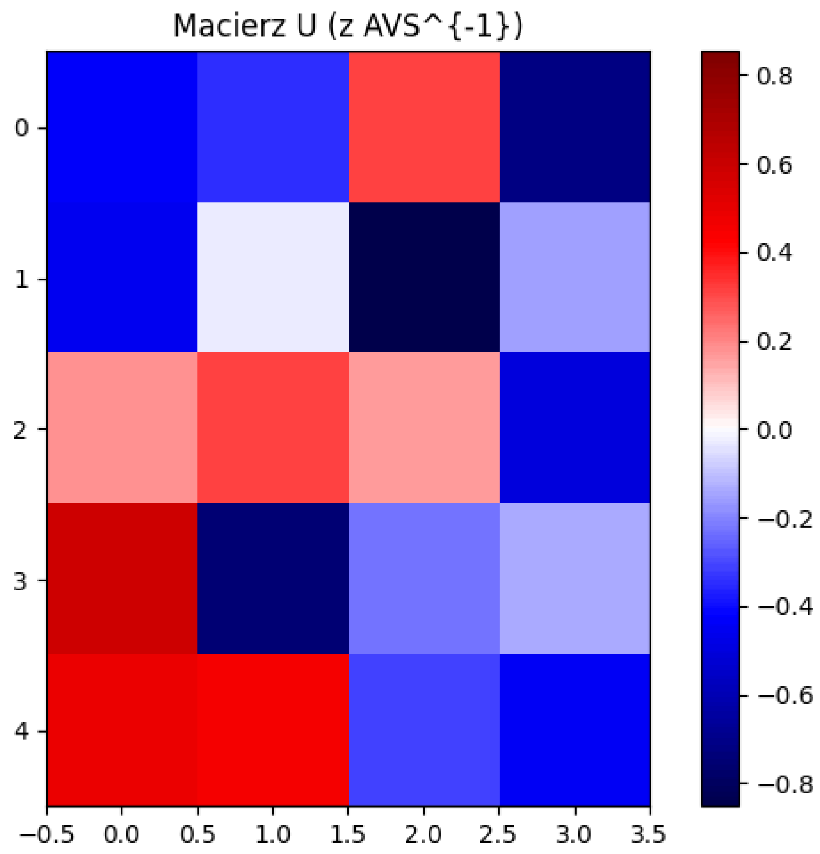


3.3.3 Wyznaczenie U

Po obliczeniu V oraz S, możemy wyznaczyć macierz U za pomocą wzoru:

$$U = AVS^{-1}$$

Jest to kluczowy etap, w którym uzyskujemy macierz U zawierającą wektory własne AA^T.



4. Porównanie dekompozycji

Obie metody pozwalają na odtworzenie macierzy A:

$$A \approx USV^T$$

Porównano błędy rekonstrukcji przy użyciu obu metod, otrzymując bardzo małe normy błędu (bliskie zeru):

- **Błąd rekonstrukcji metodą pierwszą**: $3.964580616172801 \times 10^{-15}$
- **Błąd rekonstrukcji metodą drugą**: $3.744328995048555 \times 10^{-15}$

Obie metody wykazują bardzo mały błąd rekonstrukcji, co oznacza, że dekompozycja SVD jest stabilna i obie metody prowadzą do poprawnych wyników.

5. Wnioski

- Obie metody rekonstrukcji dają poprawne wyniki.
- Dekompozycja SVD dzieli macierz A na trzy składniki opisujące:
    - kierunki (U i V),
    - skale (S).
- Możliwe jest obliczenie SVD na dwa sposoby:
    - poprzez analizę AA^T,
    - poprzez analizę A^TA.

Dzięki temu możliwe jest efektywne wykorzystanie SVD w:

- kompresji danych,
- analizie głównych składowych (PCA),
- redukcji wymiarowości.

6. Wymiary jądra i obrazu

Obliczono również:

- **dim R(A)** = 4 — wymiar obrazu macierzy A (rangę A)
- **dim N(A)** = 0 — wymiar jądra macierzy A (ilość wektorów zerowych)

Zgodnie z twierdzeniem:

$$\dim(R(A)) + \dim(N(A)) = m$$