Obliczanie norm i współczynników uwarunkowania macierzy

Jakub Płowiec, Filip Dziurdzia

Zadanie

W wybranym języku programowania (Python) napisać program, który:

- Oblicza normę macierzową $||M||_1$
- Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzowy $||M||_1$
- Oblicza normę macierzową $||M||_2$
- Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzowy $||M||_2$
- Oblicza normę macierzową $||M||_p$
- Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzowy $||M||_p$
- Oblicza normę macierzową $||M||_\infty$
- Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzowy $||M||_\infty$

Wstęp teoretyczny

1. Normy macierzowe

Norma macierzowa to funkcja przypisująca każdej macierzy nieujemną liczbę rzeczywistą, która opisuje jej "wielkość". Wyróżniamy m.in.:

- **Norma kolumnowa ($||\mathbf{M}||_1$):** maksymalna suma bezwzględnych wartości elementów w kolumnie.
- **Norma spektralna ($||\mathbf{M}||_2$):** największa wartość singularna macierzy (czyli pierwiastek z największej wartości własnej $M^T M$).
- **Norma Frobeniusa ($||\mathbf{M}||_\mathbf{F}$):** pierwiastek z sumy kwadratów wszystkich elementów macierzy.

- **Norma wierszowa ($||\mathbf{M}||_\infty$||M||∞):** maksymalna suma bezwzględnych wartości elementów w wierszu.

2. Współczynnik uwarunkowania

Współczynnik uwarunkowania macierzy względem danej normy to liczba:

$$\kappa_p = ||M||_p \cdot ||M^{-1}||_p$$

κp = ||M||p · ||M−1||p

Im wyższy współczynnik, tym bardziej układ równań oparty na tej macierzy jest **wrażliwy na zakłócenia** (czyli jest źle uwarunkowany). Wartości bliskie 1 oznaczają dobrze uwarunkowaną macierz.

Rozwiązanie

Implementacja została wykonana w języku **Python**. Biblioteka `numpy` została wykorzystana do obliczenia wartości własnych macierzy oraz jako benchmark.

Rozwiązanie

Funkcja: `norm_1(M: array) -> float`

Dane wejściowe:

- `M` : macierz

Wyniki:

- wartość normy macierzowej $||M||_1$||M||1

Implementacja:

```
def norm_1(M):
    return max(sum(abs(M[i][j]) for i in range(len(M))) for j in range(len(M[0])))
```

Funkcja: `norm_2(M: array) -> float`

Dane wejściowe:

- `M` : macierz

Wyniki:

- wartość normy macierzowej $||M||_2$

Implementacja:

```
def norm_2(M):
    MtM = np.dot(np.transpose(M), M)
    eigenvalues = np.linalg.eigvals(MtM)
    max_eigenvalue = max(abs(eig) for eig in eigenvalues)
    return max_eigenvalue ** 0.5
```

Funkcja: `norm_frobenius(M: array) -> float`

Dane wejściowe:

- `M` : macierz

Wyniki:

- wartość normy macierzowej Frobeniusa $||M||_F$

Implementacja:

```
def norm_frobenius(M):
    return (sum(M[i][j]**2 for i in range(len(M)) for j in range(len(M[0]))))**0.5
```

Funkcja: `norm_inf(M: array) -> float`

Dane wejściowe:

- `M` : macierz

Wyniki:

- wartość normy macierzowej $||M||_\infty$

Implementacja:

```
def norm_inf(M):
    return max(sum(abs(M[i][j]) for j in range(len(M[0]))) for i in range(len(M)))
```

Funkcja: `test_implementation(matrix_size: int) -> None | AssertionException`

Dane wejściowe:

- `matrix_size` : rozmiar macierzy kwadratowej która ma zostać wygenerowana
- `epsilon` : dozwolony błąd podczas porównania wyników z biblioteką `numpy`

Wyniki:

- Zapewnienie zgodnych wyników pomiędzy implementacjami lub błąd

Funkcja: `benchmark_and_plot(matrix_size: int) -> None`

Dane wejściowe:

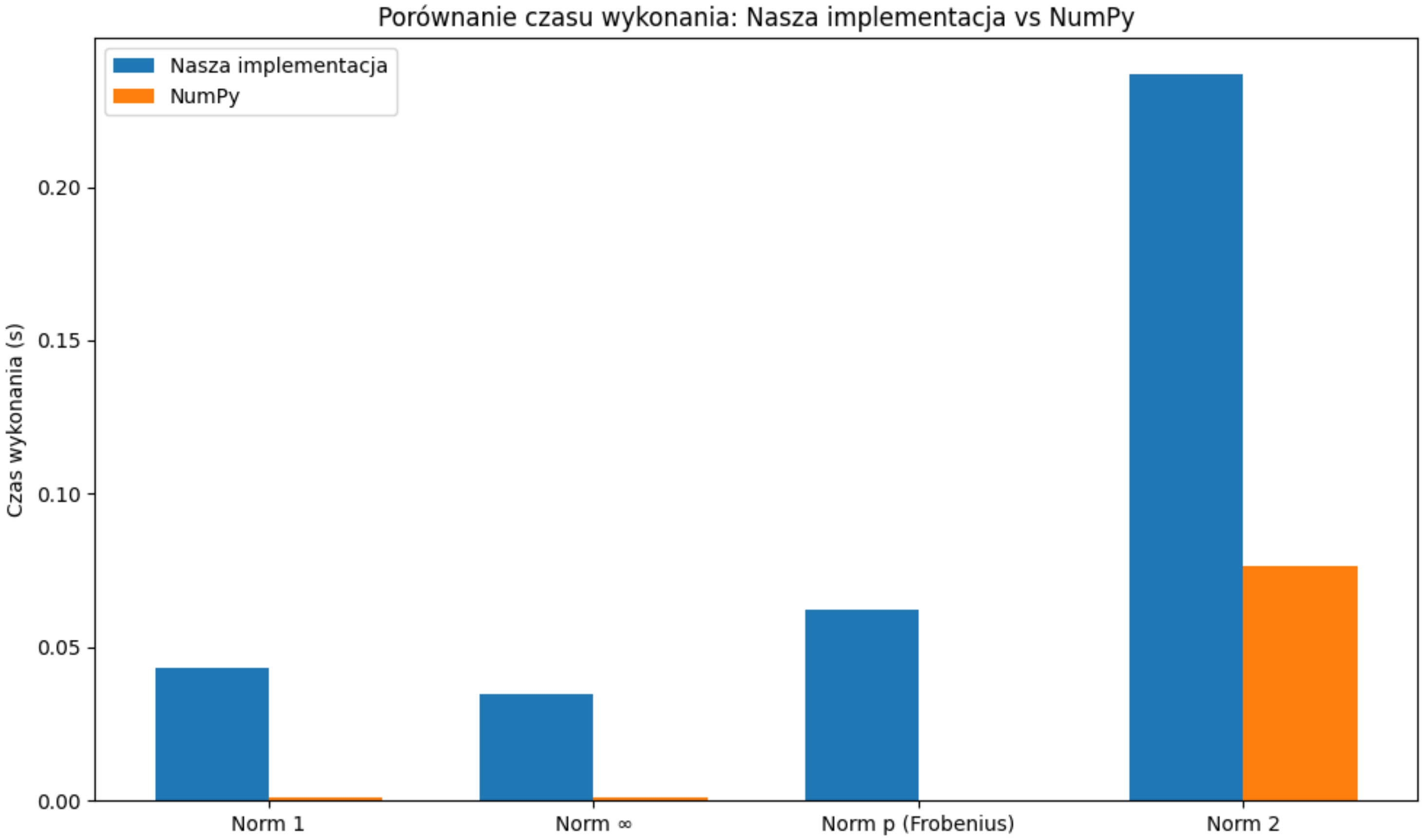
- `matrix_size` : rozmiar macierzy kwadratowej która ma zostać wygenerowana

Wyniki:

- Wykresy porównujące naszą implementację z implementacjami w bibliotece `numpy`

Wyniki

Wygenerowaliśmy macierze kwadratowe o rozmiarze `1000` i korzystając z funkcji `benchmark_and_plot` porównaliśmy czasy wykonań naszych implementacji oraz implementacji w bibliotece `numpy` oraz przedstawiliśmy te różnice na wykresie:


Porównanie czasu wykonania: Nasza implementacja vs NumPy
Nasza implementacja
NumPy
Czas wykonania (s)
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
Norm 1
Norm ∞
Norm p (Frobenius)
Norm 2