离散数学

命题逻辑
1.5 联结词全功能集

1.5 联结词全功能集

- 联结词全功能集

- 与非联结词, 或非联结词

联结词的全功能集

- 定义 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词全功能集.
- 说明：若S是联结词全功能集，则任何命题公式都可用S中的联结词表示.
- 设S_1，S_2是两个联结词集合，且$S_1 \subseteq S_2$. 若S_1是全功能集，则S_2也是全功能集. 反之，若S_2不是全功能集，则S_1也不是全功能集.

联结词全功能集实例

- 定理 $\{\neg, \wedge, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$都是联结词全功能集.
- 证明 每一个真值函数都可以用一个主析取范式表示, 故$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词全功能集.

  $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$，故$\{\neg, \wedge\}$是全功能集.

  $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$，故$\{\neg, \vee\}$是全功能集.

  $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$,

  $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ 故$\{\neg, \rightarrow\}$也是全功能集.

复合联结词

- 与非式: $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$
- 或非式: $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$

- ↑和↓与¬, ∧,∨有下述关系:

$$\neg p \Leftrightarrow \neg(p\wedge p) \Leftrightarrow p\uparrow p$$
$$p\wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\uparrow q) \Leftrightarrow (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$$
$$p\vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p\wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p)\uparrow(\neg q) \Leftrightarrow (p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)$$

复合联结词(续)

$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$

$p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

定理 $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$是联结词全功能集.

可以证明: $\{\wedge, \vee\}$不是全功能集, 从而$\{\wedge\}$, $\{\vee\}$也不是全功能集.

例

- 例 将公式$p\wedge\neg q$化成只含下列各联结词集中的联结词的等值的公式.

  (1) $\{\neg,\ \vee\}$；(2) $\{\neg,\ \rightarrow\}$；(3) $\{\uparrow\}$；(4) $\{\downarrow\}$.

- 解 (1) $p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)$.

  (2) $p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\neg(p\rightarrow q)$.

  (3) $p\wedge\neg q\Leftrightarrow p\wedge(q\uparrow q)\Leftrightarrow\neg(\neg(p\wedge(q\uparrow q)))$

  $\Leftrightarrow\neg(p\uparrow(q\uparrow q))\Leftrightarrow(p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q))$.

  (4) $p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow(\neg p)\downarrow q\Leftrightarrow(p\downarrow p)\downarrow q$.

作业

- P34/1.14

问题？