

离散数学

第三章 集合论

复习 习题课

第三章 集合论 小结

本章重点掌握内容：

1. 掌握集合间三种关系的定义、谓词定义、证明方法。
2. 掌握三个特殊集合，会求集合的幂集。
3. 掌握集合的五种运算定义、计算方法、性质。
4. 会用包含排斥原理解决集合计数问题。

例1 判断下面命题的真值：

a) 如果 $A \in B$ ， $B \subseteq C$ ，则 $A \in C$ 。

T 证明：因为 $B \subseteq C$ ， $A \in B$ ，所以 $A \in C$ 。

b) 如果 $A \in B$ ， $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ 。

F 举反例 $A=\{1\}$ $B=\{\{1\}\}$ $C=\{\{1\}, 2\}$

满足 $A \in B$, $B \subseteq C$ ，但是不满足 $A \subseteq C$ ($1 \in A$ 但 $1 \notin C$)。

c) 如果 $A \subseteq B$ ， $B \in C$ ，则 $A \in C$ 。

F 举反例 $A=\{1\}$ $B=\{1, 2\}$ $C=\{\{1, 2\}\}$

满足 $A \subseteq B$, $B \in C$ ，但是 $A \notin C$ 。

d) 如果 $A \subseteq B$ ， $B \in C$ ，则 $A \subseteq C$ 。

F 举反例 $A=\{1\}$ $B=\{1, 2\}$ $C=\{\{1, 2\}\}$

满足 $A \subseteq B$, $B \in C$ ，但是不满足 $A \subseteq C$ 。

例2 设 $A=\{\Phi\}$, $B=P(P(A))$, 判断下列命题真假。

a) $\Phi \in B$ $\Phi \subseteq B$

b) $\{\Phi\} \in B$ $\{\Phi\} \subseteq B$

c) $\{\{\Phi\}\} \in B$ $\{\{\Phi\}\} \subseteq B$

$$B=P(P(A))=P(\{\Phi, \{\Phi\}\})=\{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$$

a)、b)、c)中命题均为真。

例3 已知全集 $=N=\{1,2,3,4,\dots\}$ $A=\{1,2,7,8\}$ $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$$C=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$$
 $D=\{2,4,8,16,32,64\}$

$$\sim A=\{3,4,5,6,9,10,11,12,\dots\}$$

求:

1) $B-(A \cup C)$

$$=\{1,2,3,4,5,6,7\}-\{1,2,3,6,7,8,9,12,15,18,21,24,27,30\}$$

$$=\{4,5\}$$

2) $(\sim A \cap B) \cup D$

$$=\{3,4,5,6\} \cup D = \{2,3,4,5,6,8,16,32,64\}$$

例4 证明 $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ 当且仅当 $C \subseteq A$.

证明:

充分性 已知 $C \subseteq A$

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ &= A \cap (B \cup C) \quad (\because C \subseteq A \therefore A \cup C = A)\end{aligned}$$

必要性 已知 $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

任取 $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$

所以 $C \subseteq A$.

例5 证明 $(A-B)-C=(A-C)-B$

方法1

任取 $x \in (A-B)-C$

$$\Leftrightarrow x \in (A-B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in (A-C) \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in (A-C)-B \quad \text{所以 } (A-B)-C=(A-C)-B$$

方法2

$$(A-B)-C=(A \cap \sim B) \cap \sim C = (A \cap \sim C) \cap \sim B = (A-C)-B$$

例6 计算 $\Phi \cap \{\Phi\}$ $\{\Phi\} \cap \{\Phi\}$

$\{\Phi, \{\Phi\}\} - \Phi$ $\{\Phi, \{\Phi\}\} - \{\Phi\}$

$\{\Phi, \{\Phi\}\} - \{\{\Phi\}\}$

$\Phi \cap \{\Phi\} = \Phi$

$\{\Phi\} \cap \{\Phi\} = \{\Phi\}$

$\{\Phi, \{\Phi\}\} - \Phi = \{\Phi, \{\Phi\}\}$

$\{\Phi, \{\Phi\}\} - \{\Phi\} = \{\{\Phi\}\}$

$\{\Phi, \{\Phi\}\} - \{\{\Phi\}\} = \{\Phi\}$

例7 证明各式彼此等价。

$$A \cup B = E, \sim A \subseteq B, \sim B \subseteq A.$$

证明：

$$\begin{aligned} A \cup B = E &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \cup B \leftrightarrow x \in E) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \cup B) \quad (\text{因 } x \in E \text{ 为 } T) \quad (P \leftrightarrow T \Leftrightarrow P) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \notin A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x (x \in \sim A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \sim A \subseteq B \\ \text{同理 } A \cup B = E &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \forall x (x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \notin B \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow \forall x (x \in \sim B \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow \sim B \subseteq A \\ \text{所以 } A \cup B = E &\Leftrightarrow \sim A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq A. \end{aligned}$$

例8 在什么条件下，下面命题为真？

a) $(A-B) \cup (A-C) = A$

解： $(A-B) \cup (A-C) = (A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C) = A \cap (\sim B \cup \sim C)$
 $= A \cap \sim(B \cap C) = A - (B \cap C) = A$

所以满足此式的充要条件是： $A \cap B \cap C = \Phi$

b) $(A-B) \cup (A-C) = \Phi$

解： $(A-B) \cup (A-C) = A - (B \cap C) = \Phi$

所以满足此式的充要条件是： $A \subseteq B \cap C$

c) $(A-B) \cap (A-C) = \Phi$

解： $(A-B) \cap (A-C) = (A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C) = A \cap (\sim B \cap \sim C)$
 $= A \cap \sim(B \cup C) = A - (B \cup C) = \Phi$

所以满足此式的充要条件是： $A \subseteq B \cup C$

d) $(A-B) \oplus (A-C) = \Phi$

解： 因为 当且仅当 $A=B$ ，才有 $A \oplus B = \Phi$

所以满足此式的充要条件是： $A-B=A-C$

$$\emptyset \subseteq A-B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A-B = \emptyset$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A-B = A$$

例9 A, B 是有限集合, $P(A)$ 表示 A 的幂集, 已知 $|A|=3$,
 $|P(B)|=64$, $|P(A \cup B)|=256$, 则 $|B|=(\quad)$,
 $|A \cap B|=(\quad)$, $|A-B|=(\quad)$, $|A \oplus B|=(\quad)$ 。

解.

由 $|P(B)|=64=2^6$, 得 $|B|=6$

由 $|P(A \cup B)|=256=2^8$, 得 $|A \cup B|=8$

由包含排斥原理得 $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$

得 $8=3+6-|A \cap B|$, 所以 $|A \cap B|=1$

$|A-B|=|A|-|A \cap B|=3-1=2$

$|A \oplus B|=|A \cup B|-|A \cap B|=8-1=7$

设F表示一年级大学生的集合, S表示二年级大学生的集合, M表示数学专业学生的集合, C表示计算机专业学生的集合, D表示听离散数学课学生的集合, G表示星期六晚上参加音乐会的学生的集合, H表示星期六晚上很迟才睡觉的学生集合, 则将下面各个句子所对应的集合表达式分别写在句子后面的括号内:

(1) 所有计算机专业二年级的学生在学离散数学课.

($C \cap S \subseteq D$)

(2) 这些且只有这些学离散数学课的学生或者星期六晚上去听音乐会的学生在星期六晚上很晚才睡觉。

($D \cup G = H$)

(3) 星期六晚上的音乐会只有大学一、二年级的学生参加.

($G \subseteq F \cup S$)

(4) 除去数学专业和计算机专业以外的二年级的学生都去参加星期六晚上的音乐会. ($\sim(M \cup C) \cap S \subseteq G$)

问题？

