2022 计算方法复习

第 1 章、数值计算引论

（一）复习要求

1.了解误差限与有效数字，

2.了解简单误差估计。

（二）**例题**

第 2 章、非线性方程的数值解法

(一)复习要求

1.了解不动点迭代法和迭代收敛性；了解收敛阶的概念和有关结论。

2.会介值定理判断定义区间根的存在性。

3.掌握牛顿法及其收敛性、重根情形迭代格式。

4.掌握二分法。

（二）例题

1.用 Newton 法求方程 $x - \ln x = 2$ 在区间 $(2, \infty)$ 内的根，要求 $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < 10^{-8}$。

解：此方程在区间 $(2, \infty)$ 内只有一个根 s，而且在区间（2，4）内。设

$f(x) = x - \ln x - 2$

则 $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

Newton 法迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \ln x_k - 2}{1 - 1/x_k} = \frac{x_k(1 + \ln x_k)}{x_k - 1}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

取 $x_0 = 3$，得 $s \approx x_4 = 3.146193221$。

第 3 章、线性代数方程组的数值解法

（一）复习要求

1. 向量和矩阵范数。

2. 掌握高斯消去法。

3. 掌握直接三角分解法，并利用该分解解方程组。

4. 了解迭代法及其收敛性的概念。

5. 掌握 Jacobi 迭代法、高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法，迭代矩阵，谱半径、收敛性。

（二）例题

1. 用直接三角分解法(杜利脱尔分解)求解线性方程组 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\18\\20\end{bmatrix}$

解：直接三角分解法(杜利脱尔分解)：（详细步骤自行补充，下同）

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\3&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{bmatrix}=\mathrm{LU}$$

解 $Ly=b$，Ux=y 得 x=(1,2,3)^T

2. 讨论 $AX=b$ 的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的收敛性

其中，$A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-1&1&-1\\-2&-2&1\end{bmatrix}$ $\qquad b=(1,1,0)^T$

解：Jacobi 迭代法的迭代矩阵 $B_J=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}(I-A)=\begin{pmatrix}0&2&-2\\1&0&1\\2&2&0\end{pmatrix}$

则 $|\lambda I-B_J|=\lambda^3=0\Rightarrow\rho(B_J)=0<1$

$\therefore$ Jacobi 迭代收敛

Gauss-Seidel 迭代矩阵

$$B_{G-S}=\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\-2&-2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&2&-2\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-2\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&2&-1\\0&8&-6\end{pmatrix}$$

$|\lambda I-B_{G-S}|=\lambda(\lambda^2-4\lambda-4)=0\Rightarrow\rho(B_2)=2+2\sqrt{2}>1$

$\therefore$ Gauss-Seidel 迭代发散.

3. 已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(1)列出 **Jacobi** 迭代法和 **Gauss-Seidel** 迭代法的分量形式；
(2)讨论上述两种迭代法的收敛性。

解：（1）Jacobi 迭代法：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k)}-x_2^{(k)})/2\end{cases}$$

Jacobi 迭代矩阵：

$$B=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$\rho(B)=1$ 收敛性不能确定

（2）Gauss-Seidel 迭代法：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-x_2^{(k)}-x_3^{(k)})/2\\x_2^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)})/2\\x_3^{(k+1)}=(1-x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)})/2\end{cases}$$

$$G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel 迭代矩阵：

$$\rho(B)=\left|\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{16}\right|=\sqrt{\frac{1}{8}}<1$$

该迭代法收敛

第 4 章、插值法

(一)复习要求

1.掌握拉格朗日(Lagrange)插值法、插值基函数。

2.掌握牛顿插值法、会计算差商。

3.会埃尔米特插值。

（二）例题

1．给定数据表：$i=1,2,3,4,5$，

x_i	1	2	4	6	7
$f(x_i)$	4	1	0	1	1

求 4 次牛顿插值多项式，并写出插值余项。

解：

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
1	4				
2	1	-3			
4	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$		
6	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{60}$	
7	1	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{180}$

由差商表可得 4 次牛顿插值多项式为：

$$N_4(x)=4-3(x-1)+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)-\frac{7}{60}(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$+\frac{1}{180}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)$$

，

$$=4-3(x-1)+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)-\frac{7}{60}(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$+\frac{1}{180}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)$$

插值余项为

$$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)(x-7),\quad \xi\in(1,7)。$$

2 已知函数 $y=f(x)$的观察数据为

x_k	−2	0	4	5
y_k	5	1	−3	1

试构造 $f(x)$ 的拉格朗日多项式 $P_n(x)$，并计算 $f(-1)$。

解 先构造基函数

$$l_0(x)=\frac{x(x-4)(x-5)}{(-2-0)(-2-4)(-2-5)}=-\frac{x(x-4)(x-5)}{84}$$

$$l_1(x)=\frac{(x+2)(x-4)(x-5)}{(0-(-2))(0-4)(0-5)}=\frac{(x+2)(x-4)(x-5)}{40}$$

$$l_2(x)=\frac{(x+2)x(x-5)}{(4+2)(4-0)(4-5)}=-\frac{x(x+2)(x-5)}{24}$$

$$l_3(x)=\frac{(x+2)x(x-2)(x-4)}{(5+2)(5-0)(5-4)}=\frac{(x+2)x(x-4)}{35}$$

所求三次多项式为

$$P_3(x)=\sum_{k=0}^{3}y_k l_k(x)$$

$$=-5\times\frac{x(x-4)(x-5)}{84}+\frac{(x+2)(x-4)(x-5)}{40}-(-3)\times\frac{x(x+2)(x-5)}{24}+\frac{(x+2)x(x-4)}{35}$$

$$=\frac{5}{42}x^3-\frac{1}{14}x^2-\frac{55}{21}x+1$$

$$P_3(-1)=-\frac{5}{42}-\frac{1}{14}-\frac{55}{21}+1=\frac{24}{7}$$

3. 求满足条件下面条件的 Hermite 插值多项式

x	1	2
$f(x)$	2	3
$f'(x)$	1	−1

解：建立差商表，节点 1 和节点 2 都是二重节点

x	$f(x)$	一阶	二阶	三阶	因子
1	2				1
1	2	$f[1,1]=f'(1)=1$			$x-1$
2	3	$f[2,1]=\frac{3-2}{2-1}=1$	0		$(x-1)^2$
2	3	$f[2,2]=f'(2)=-1$	−2	−2	$(x-1)^2(x-2)$

三次 Hermite 插值多项式为

$$H_3(x)=2+(x-1)+(-2)(x-1)^2(x-2)$$

$$=-2x^3+8x^2-9x+5$$

4. 已知如下数据求四次 Hermite 插值多项式

x	0	1	2
$f(x)$	3	5	6
$f'(x)$	4		7

解：建立差商表，节点 0 和节点 2 都是二重节点

x	$f(x)$	一阶	二阶	三阶	四阶	因子
0	3					1
0	3	$f[0,0]=f'(0)=4$				x

1	5	$f[0,1]=\frac{5-3}{1-0}=2$	-2			x^2
2	6	$f[1,2]=\frac{6-5}{2-1}=1$	$-1/2$	$3/4$		$x^2(x-1)$
2	6	$f[2,2]=f'(2)=7$	6	$13/4$	$5/4$	$x^2(x-1)(x-2)$

所以 $H_4(x)=3+4x+-2x^2+\frac{3}{4}x^2(x-1)+\frac{5}{4}x^2(x-1)(x-2)$

第 5 章、曲线拟合

(一)复习要求

1. 会曲线拟合的最小二乘法，法方程组。

2. 会超定方程组

3. 会可线性化模型的最小二乘拟合。

4. 掌握多项式拟合。

（二）例题

1. 已知实验数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求一个形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式，使它与下列数据相拟合，并求均方误差。

解：方法一：由题意 $\Phi=span\{1,x^2\}$，$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$，

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{5}1=5,$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5}x_i^2=19^2+25^2+31^2+38^2+44^2,$$

$$=361+625+961+1444+1936=5327$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5}x_i^4=19^4+25^4+31^4+38^4+44^4$$

$$=130321+390625+923521+2085136+3748096=7277699$$

$$d_1=(\varphi_0,y)=\sum_{i=1}^{5}y_i=19.0+32.3+49.0+73.3+97.8=271.4。$$

$$d_2 = (\varphi_1, y) = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2$$
$$= 19.0 \times 19^2 + 32.3 \times 25^2 + 49.0 \times 31^2 + 73.3 \times 38^2 + 97.8 \times 44^2 \text{。}$$
$$= 6859 + 20187.5 + 47089 + 105845.2 + 189340.8 = 369321.5$$

故法方程为$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$，解得$\begin{cases} a = 0.972604 \\ b = 0.0500351 \end{cases}$。

均方误差为$\sum_{i=1}^{5} \left[S(x_i) - y(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{5} \left[a + b x_i^2 - y(x_i)\right]^2 = 0.01693$

方法二：将书已给数据代入$y = a + bx^2$得到超定方程组

$$\begin{cases} a + 19^2 b = 19 \\ a + 25^2 b = 32.3 \\ a + 31^2 b = 49 \\ a + 38^2 b = 73.3 \\ a + 44^2 b = 97.8 \end{cases}$$

矩阵表示 $Ax = c$

其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 19^2 \\ 1 & 25^2 \\ 1 & 31^2 \\ 1 & 38^2 \\ 1 & 44^2 \end{bmatrix}$，$x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，$c = \begin{bmatrix} 19 \\ 32.3 \\ 49 \\ 73.3 \\ 97.8 \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \qquad A^T c = \begin{bmatrix} 271.45 \\ 369321.5 \end{bmatrix}$$

得到法方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 271.45 \\ 369321.5 \end{bmatrix},$$

解得$\begin{cases} a = 0.973 \\ b = 0.050 \end{cases}$

所以 $y = 0.973 + 0.050x^2$

2. 给定数据表

x	-2	-1	0	1	2
y	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

试用三次多项式以最小二乘法拟合所给数据.

解 $y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & -8\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\end{bmatrix},\quad A^TA=\begin{bmatrix}5 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 34\\ 10 & 0 & 34 & 0\\ 0 & 34 & 0 & 130\end{bmatrix}$$

$$A^Ty=(2.9,4.2,7,14.4)^T$$

正则方程

$$A^TAc=A^Ty$$

的解为$c_0=0.4086$，$c_1=0.39167$，$c_2=0.0857$，$c_3=0.00833$

得到三次多项式

$$y(x)=0.4086+0.39167x+0.0857x^2+0.00833x^3$$

3.给定如下数据

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
y_i	1.1	1.8	3.3	4.6

试求线性拟合函数$P(\mathrm{x})=\mathrm{c}_0+c_1x$，使$\sum_{i=0}^{3}(P(\mathrm{x}_i)-\mathrm{y}_i)^2$最小。

解：这是线性最小平方逼近问题，通过解法方程求参数c_0,c_1，需要计算

$\sum_{i=0}^{3}1$， $\sum_{i=0}^{3}x_i$， $\sum_{i=0}^{3}x_i^2$， $\sum_{i=0}^{3}y_i$， $\sum_{i=0}^{3}x_iy_i$，

x_i	1	2	3	4
x_i^2	1	4	9	16
y_i	1.1	1.8	3.3	4.6

$x_i y_i$	1.1	3.6	9.9	18.4

每行相加，得到

$\sum_{i=0}^{3} 1=4$， $\sum_{i=0}^{3} x_i=10$， $\sum_{i=0}^{3} x_i^2=30$， $\sum_{i=0}^{3} y_i=10.8$，$\sum_{i=0}^{3} x_i y_i=33$

则法方程

$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10.8 \\ 33 \end{pmatrix}$，可解得 c_0, c_1。

（也可以用解超定方程组的方法解本题，自行补充）

4. 设有一组实验数据如下表的第 2，3 列所示.试从这组数据出发，建立变量 x 与 y 之间的经验公式.

w_i	x_i	y_i	$Y_i = \lg y_i$	x_i^2	$x_i Y_i$
1	1	15.3	1.1847	1	1.1847
1	2	20.5	1.3118	4	2.6236
1	3	27.4	1.4378	9	4.3134
1	4	36.6	1.5635	16	6.2540
1	5	49.1	1.6911	25	8.4555
1	6	65.6	1.8169	36	10.9014
1	7	87.8	1.9435	49	13.6045
1	8	117.6	2.0704	64	16.5632
$\sum_{i=0}^{7}$	36	419.9	13.0197	204	63.9003

解 画一草图可知，曲线接近一指数曲线，故取指数函数 $y = ae^{bx}$ （a,b 为待定常数）作为拟合函数.然而，这并非是一个线性函数.因此需要先将 $y = ae^{bx}$ 线性化，对 $y = ae^{bx}$ 两边取以 10 为底的对数得 $\lg y = \lg a + bx\lg e$，令 $Y = \lg y$，$A_0 = \lg a$，$A_1 = b\lg e$，则问题变为线性函数问题 $Y = A_0 + A_1 x$，相应的 $Y_i = \lg y_i$ （$i = 0,1,\cdots,7$）

这里 m=7,n=1, $\varphi_0(x) = 1,\ \ \varphi_1(x) = x,$ 同上例，

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \sum_{i=0}^{7} w_i\varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) = 8$$，

$$(\varphi_0,\varphi_1) = (\varphi_1,\varphi_0) = \sum_{i=0}^{5} w_i\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{5} w_i x_i = 36$$.

同理，

$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{7} w_i x_i^2 =204$， $(\varphi_0, f)=\sum w_i Y_i =13.0197$，

$(\varphi_1, f)=\sum w_i x_i Y_i =63.9003$.

得线性方程组

$$\begin{pmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13.0197 \\ 63.9003 \end{pmatrix}$$

解之得

$A_0 =1.0583=\lg a$， $A_1 =0.1265=b\lg e$.

所以得

$a=11.41$， $b=0.2913$.

最后得所求经验公式

$$y=11.44e^{0.2913x}$$

第 6 章、数值积分与数值微分

(一) 复习要求

1.代数精度的概念、会推导插值型求积公式及其代数精度。

2.掌握梯形公式和辛普生公式、复化梯形公式和复化辛普森公式及其余项；Romber 算法。

3.掌握高斯求积法。

（二）例题

提高求积精度的措施有：求积节点为区间等分点的一类方法包括复化求积（分段低阶求积）→变步长求积（步长逐次减半）→Romber 算法（逐次分半加速）；另一类选择求积节点的高斯型求积方法。

1. 构造插值求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的步骤：

1）在 $[a, b]$ 上节点 x_k 计算 $f(x_k)$；

2）直接计算 $A_k =\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$；或代入 $f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^n$ 到求积公式解关于 A_k 的线性方程组求出 A_k；

3）用 $f(x)=x^{n+1},\cdots$， 验证精度。

例 对 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$， 构造一个至少有 3 次代数精度的求积公式。

解：4 个节点至少有 3 次代数精度，在[0, 3]上选 0，1，2，3。

求 A_k：法一、直接利用 $A_k=\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x$，有

$$A_0=\int_0^3 l_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}，\quad A_1=A_2=\frac{9}{8}, A_3=\frac{3}{8}$$

法二、解关于 A_k 的线性方程组，将 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 代入

$A_0+A_1+A_2+A_3=3$，$A_1+2A_2+3A_3=9/2$，$A_1+4A_2+9A_3=9$，

$A_1+8A_2+27A_3=81/4$，解之 $A_0=\frac{3}{8}$，$A_1=\frac{9}{8}, A_2=\frac{9}{8}, A_3=\frac{3}{8}$

所以求积公式为 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x\approx(3/8)[f(0)+3f(1)+3f(2)+f(3)]$

用 $f(x)=x^4$,验证精度：$\int_0^3 x^4\mathrm{d}x=48.6$，$\frac{3}{8}(0^4+3\times1^4+3\times2^4+3^4)=48.75$，只有 3 次精度。

2.用复化梯形公式和复化辛普森公式计算下列积分：

$\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx$；　n=8；

解：

$$T_8=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]=\frac{1}{16}[\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{\frac{k}{8}}{4+\left(\frac{k}{8}\right)^2}+\frac{1}{5}]$$

$$=\frac{1}{16}(\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{8k}{256+k^2}+\frac{1}{5})$$ 。

$$=\frac{1}{16}[\frac{1}{4}+2(\frac{8}{257}+\frac{4}{65}+\frac{24}{265}+\frac{2}{17}+\frac{40}{281}+\frac{12}{73}+\frac{56}{305})+\frac{1}{5}]\approx0.11140$$

$$S_8=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{7}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]$$

$$=\frac{1}{48}[\frac{1}{4}+4\sum_{k=0}^{7}\frac{\frac{2k+1}{16}}{4+\left(\frac{2k+1}{16}\right)^2}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{\frac{k}{8}}{4+\left(\frac{k}{8}\right)^2}+\frac{1}{5}]$$

$$=\frac{1}{48}(\frac{1}{4}+4\sum_{k=0}^{7}\frac{16(2k+1)}{1024+(2k+1)^2}+2\sum_{k=1}^{7}\frac{8k}{256+k^2}+\frac{1}{5})\approx0.11157$$

精确值为 $\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(4+x^2)\,|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}\approx0.11157$ 。

3.如下列表给出 $f(\mathrm{x})=\frac{1}{1+2x^2}$ 五个等距节点，按如下要求求积分 $I=\int_0^2 f(\mathrm{x})dx$ ：

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(\mathrm{x}_i)=\dfrac{1}{1+2x_i^2}$	1	0.666667	0.333333	0.181818	0.111111

(1)用复化 Simpson 公式分别计算 n = 1 和 n = 2 等分积分区间时的积分值 S_1 和 S_2；
(2)由（1）的这两个结果 S_1 和 S_2，利用 Romberg 积分方法得到更好的结果 C_1；
(3)假设已给三个高斯点，$x_0=-\frac{\sqrt{15}}{5},\ x_1=0,\ x_2=\frac{\sqrt{15}}{5}$，构造高斯求积公式 $\int_{-1}^{1} f(\mathrm{x})dx = A_0 f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\mathrm{A}_1 f(0)+\mathrm{A}_2 f(\frac{\sqrt{15}}{5})$，并利用它求本题的定积分 $I=\int_0^2 f(\mathrm{x})dx$

解：复化 Simpson 公式：

$$S_n=\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

(1)n=1，h =(2-0)/1=2，S1=2/6(1+ 4×0.333333+0.111111)=0.8148148
n=2， h =(2-0)/2=1， S2=1/6(1 +4×0.666667+ 2×0.3333333+ 4×0.181818+ 0.1111111)=0.861953

(2)Romberg 积分：$C_1=S_2+\dfrac{S_2-S_1}{2^4-1}$

=0.8650955467

（3)对 $\int_{-1}^{1} f(\mathrm{x})dx = A_0 f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\mathrm{A}_1 f(0)+\mathrm{A}_2 f(\frac{\sqrt{15}}{5})$ 分别代入 $f(\mathrm{x})=\mathrm{x}^0, x^1, x^2$，解出 A_0,A_1,A_2。

即 $\int_{-1}^{1} f(\mathrm{x})dx=\frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5})$；

要求定积分 $I=\int_0^2 f(\mathrm{x})dx$。先做积分换元，将其化为[-1,1]上的定积分，即令

$$x=\frac{0+2}{2}+\frac{2-0}{2}t=1+t$$ 有

$$I=\int_0^2\frac{1}{1+2x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+2(1+\mathrm{t})^2}dt$$

$$\approx\frac{5}{9}\times\frac{1}{1+2(1-\sqrt{15}/5)^2}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{1+2(1+0)^2}+\frac{5}{9}\times\frac{1}{1+2(1+\sqrt{15}/5)^2}$$

=0.5555556 × $1/(1+2(1-0.7745967)^2)$+0.8888889 × 0.3333333+ 0.5555556 × $1/(1+2(1+0.7745967)^2)$=0.5043109+0.2962963+0.0761203=0.8767275。

4．用下列方法计算积分 $\int_1^3 \frac{dy}{y}$，并比较结果。

(1)龙贝格方法；　(2)三点及五点高斯公式.

解: $I = \int_1^3 \frac{dy}{y}$

(1)采用龙贝格方法可得

k	$T_0^{(k)}$ （T）	$T_1^{(k)}$ (S)	$T_2^{(k)}$ (C)	$T_3^{(k)}$ (R)	$T_4^{(k)}$
0	1.333333 T_1				
1	1.166667 T_2	1.099259 S_1			
2	1.116667 T_4	1.100000 S_2	1.099259 C_1		
3	1.103211 T_8	1.098726 S_4	1.098641 C_2	1.098613 R_1	
4	1.099768 T_{16}	1.098620 S_8	1.098613 C_4	1.098613 R_2	1.098613

$T_n^k = \frac{4^n T_{n-1}^k - T_{n-1}^{k-1}}{4^n - 1}$，自己补充计算细节。

（如果不习惯 $T_n^{(k)}$ 这个记号，上述公式，按 T，S，C，R（我在上表每列右边标出来了，具体可见课本 P218 及例 6-15）写出来 $S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1}$，$C_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1}$，$R_n = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3 - 1}$,….）

故有 $I \approx 1.098613$

(2)采用高斯公式时

$I = \int_1^3 \frac{dy}{y}$ 此时 $y \in [1,3]$, 令 $x = y - z$, 则 $x \in [-1,1]$,

$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx,$

$f(x) = \frac{1}{x+2},$

利用三点高斯公式，则

$I = 0.5555556 \times [f(-0.7745967) + f(0.7745967)] + 0.8888889 \times f(0)$

≈ 1.098039

利用五点高斯公式，则

$I \approx 0.2369239 \times [f(-0.9061798) + f(0.9061798)]$

$+0.4786287 \times [f(-0.5384693) + f(0.5384693)] + 0.5688889 \times f(0)$

≈ 1.098609

5. 用变步长梯形法则计算积分 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ ，并加速。

解　对区间 $[0,1]$ 用梯形公式， $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ， $f(0) = 1$ ， $f(1) = 0.8414710$ 。所以，

$T_1 = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = 0.9207355$

将区间二等分， $f(\frac{1}{2}) = 0.9588510$ ， $T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = 0.9397933$

再将区间二等分， $f(1/4) = 0.9896158$ ， $f(3/4) = 0.9088516$

$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right] = 0.9445135$ ，有 2 位有效数字。

再将区间二等分， $f(1/8) = 0.9973979$ ， $f(3/8) = 0.9767267$ ， $f(5/8) = 0.9361551$ ，

$f(7/8) = 0.8771926$

$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right] = 0.9456909$ ，有 3 位有效数字。

加速：可以算出 $S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 =$ ， $S_2 = \frac{4}{3}T_4 - \frac{1}{3}T_2 =$

$S_4 = \frac{4}{3}T_8 - \frac{1}{3}T_4 =$ ，有 6 位有效数字。　　　（自行补充这几个计算）

第 7 章、常微分方程初值问题的数值解法

(一)复习要求

1.掌握欧拉法和改进的欧拉法，知道其局部截断误差。

2.掌握梯形法及迭代格式;

（二）例题

1．用欧拉法解初值问题 $\begin{cases} y' = -y - xy^2 (0 \le x \le 0.6) \\ y(0) = 1 \end{cases}$,取步长 h=0.2。

解 h=0.2, $f(x)$=－y－xy^2。首先建立欧拉迭代格式

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k - hy_k - hx_k y_k^2 = 0.2 y_k (4 - x_k y_k)(k = 0,1,2)$$

当 k=0，x_1=0.2 时，已知 x_0=0,y_0=1，

有 $y(0.2)\approx y_1$=0.2×1(4－0×1)＝0.8

当 k＝1,x_2=0.4 时,已知 x_1=0.2, y_1=0.8,

有 $y(0.4)\approx y_2$=0.2×0.8×(4－0.2×0.8)＝0.614 4

当 k=2,x_3=0.6 时,已知 x_2=0.4,y_2=0.6144,

有 $y(0.6)\approx y_3$=0.2×0.6144×(4－0.4×0.6144)= 0.461321

2．设初值问题 $\begin{cases} y' = 3x + 2y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 0 < x < 1$.

写出用改进的 Euler 法解上述初值问题数值解的公式，若 $h = 0.2$，求解 y_1, y_2，保留两位小数。

解：改进的 Euler 公式是：

$$\begin{cases} \overline{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \overline{y}_{n+1})] \end{cases}$$

具体到本题中，求解的公式是：

$$\begin{cases} \overline{y}_{n+1} = y_n + 0.2(3x_n + 2y_n) = 1.4y_n + 0.6x_n \\ y_{n+1} = y_n + 0.1[3x_n + 2y_n + 3x_{n+1} + 2\overline{y}_{n+1}] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

代入求解得：$\overline{y}_1 = 1.4, y_1 = 1.54$

$\overline{y}_2 = 2.276, y_2 = 2.4832$

3、用梯形方法解初值问题 $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$，证明其近似解为 $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$，并证明当 $h \to 0$ 时，它收敛于原初值问题的准确解 $y = e^{-x}$。

解：由梯形公式可知，$y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(-y_n - y_{n+1})$，从而 $(1+\dfrac{h}{2})y_{n+1} = (1-\dfrac{h}{2})y_n$，即 $y_{n+1} = \dfrac{2-h}{2+h} y_n$，从而 $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n y_0$，又由 $y_0 = 1$ 可知，$y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$。

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n = \lim_{h\to 0}\left(1-\frac{4h}{2+h}\right)^n = \lim_{h\to 0}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{1}{2h}+1}\right)^{-(\frac{1}{2h}+1)}\right]^{-\frac{2nh}{2h+1}} = e^{-x}$$

。