离散数学

命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

数理逻辑*

- 逻辑--是研究人的思维的科学。
- 辩证逻辑：是研究人的思维中的辩证法，强调命题成立的前提、条件、相对性。例如：
  - 用全面的和发展的观点观察事物;
  - 具体问题具体分析;
  - 实践是检查事物正误的唯一标准；等等。
- 形式逻辑：是研究人的思维的形式和一般规律，追求一种普遍的、不受条件限制的、绝对正确的命题。
- 这里我们只关心形式逻辑。

形式逻辑*

- 人的思维过程：概念 ⇒ 判断 ⇒ 推理
- 正确的思维：概念清楚，判断正确，推理合乎逻辑。
- 人们是通过各种各样的学习(理论学习和从实践中学习)来掌握许多概念和判断。
- 而形式逻辑主要是研究推理的。
- 推理：是由若干个已知的判断(前提)，推出新的判断(结论)的思维过程。

推理方法*

- 类比推理：由个别事实推出个别结论。
  如：地球上有空气、水，地球上有生物。火星上有空气、水。
  ⇒火星上有生物。
- 归纳推理：由若干个别事实推出一般结论。
  如：铜能导电。铁能导电。锡能导电。铅能导电。……
  ⇒一切金属都导电。
- 演绎推理：由一般规律推出个别事实。
  形式逻辑主要是研究演绎推理的。

演绎推理—三段论*

- 例1：

  如果天下雨，则路上有水。(一般规律)

  天下雨了。 (个别事实)

  推出结论：路上有水。 (个别结论)

- 例2：

  (大前提)：所有金属都导电。 (一般规律)

  (小前提)：铜是金属。 (个别事实)

  推出结论：铜能导电。 (个别结论)

数理逻辑

- **数理逻辑**是用数学的方法研究形式逻辑，或者说是精确化、数学化的形式逻辑。
- 所谓“数学方法”：是建立一套有严格定义的符号，即建立一套形式语言，来研究形式逻辑。所以数理逻辑也称为“**符号逻辑**”。

数理逻辑-2

- **数理逻辑经历了漫长的发展时期**
- **前史时期**——古典形式逻辑时期：亚里斯多德的直言三段论理
- **初创时期**——逻辑代数时期(17世纪末)
  - 莱布尼兹(Leibniz, 1646~1716)完善三段论，提出了建立数理逻辑或者说理性演算的思想
  - 布尔(G. Boole, 1815~1864)代数：将有关数学运算的研究的代数系统推广到逻辑领域
- **数理逻辑的奠基时期**
  - 弗雷格(G. Frege, 1848~1925)：《概念语言——一种按算术的公式语言构成的纯思维公式语言》(1879)的出版标志着数理逻辑的基础部分——命题演算和谓词演算的正式建立。
  - 皮亚诺(Giuseppe Peano, 1858~1932)、罗素(Bertrand Russell,1872~1970)等等

数理逻辑-3

- 第一章：命题逻辑
- 第二章：一阶逻辑(谓词逻辑)
- 继续演绎推理三段论里的两个例子，说明如何将推理符号化

演绎推理—三段论*

- 例1：

  如果天下雨，则路上有水。(一般规律)

  天下雨了。(个别事实)

  推出结论：路上有水。(个别结论)

数理逻辑把推理符号化之一*

- 设 P表示：天下雨。
- 设Q表示：路上有水。
- 设→表示：如果…则…

例1的推理过程表示为：

前提1：P→Q (如果天下雨,则路上有水。)

前提2：P　(天下雨了。)

结 论：Q　(路上有水。)

(这就是第一章命题逻辑中要讨论的问题)

演绎推理—三段论*

- 例2：

(大前提)：所有金属都导电。 (一般规律)

(小前提)：铜是金属。 (个别事实)

推出结论：铜能导电。 (个别结论)

数理逻辑把推理符号化之二*

- 设M(x): x是金属 .
- 设C(x): x能导电.
- 设$\forall x$ 表示: 所有的x .
- 设 a 表示铜.

例2的推理过程表示为:

前提:$\forall x(M(x)\rightarrow C(x))$ (所有金属都导电.)

前提:$M(a)$ (铜是金属.)

结论:$C(a)$ (铜能导电.)

(其中符号M(x)是谓词, $\forall$是量词, 所以这就是第二章“一阶逻辑(谓词逻辑)”中所讨论的内容.)

第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

1.2 命题公式及分类

1.3 等值演算

1.4 范式

1.5 联结词全功能集

1.6 组合电路

1.7 推理理论

逻辑代数化

代数方法的基本要素是对象和运算，代数化的基本过程模式是：符号化(对象)、运算、运算律、演算、标准型、应用。

命题逻辑：命题符号化(对象)、逻辑运算(联结词)、运算律(基本等值式)、等值演算、标准型(范式)、应用(解判定问题、证明等值式、实际应用、推理理论等)。

因而，命题逻辑这部分内容的知识点并不零散，贯穿着代数化这条主线。

1.1 命题符号化及联结词

- 命题与真值
- 原子命题
- 复合命题
- 联结词
- 命题符号化

命题

- 命题是一个能确定是真的或是假的判断。(判断都是用陈述句表示)
- 例1-1.1 判定下面这些句子哪些是命题。

(1) 2是个素数。

(2) 雪是黑色的。

(3) 2025年人类将到达火星。

(4) 如果 $a>b$ 且 $b>c$，则 $a>c$。

(5) $x+y<5$

(6) 请打开书！

(7) 您去吗？

(8) 我正在说谎话.

(1)(2)(3)(4)是命题

注意： 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题；陈述句中的悖论以及判断结果不惟一确定的也不是命题

命题的真值

- 一个命题所作的判断有两种可能：是正确的判断或者是错误的判断。所以一个命题的**真值**有两个：“真”或“假”
- **真值**为真:一个命题所作的判断与客观一致,则称该命题的真值为真,记作T (True)。
- **真值**为假:一个命题所作的判断与客观不一致,则称该命题的真值为假,记作**F** (False)。
- 例1-1.1中(1)(4)的真值为真,(2)的真值为假, (3)暂时不能定，等到2025年确定。

例1-1.2下列句子中那些是命题？它们的真值分别是？

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数.	真命题
(2) **2 + 5 ＝8.**	假命题
(3) x **+ 5 ＞ 3.**	真值不确定
(4) 你有铅笔吗？	疑问句
(5) 这只兔子跑得真快呀！	感叹句
(6) 请不要讲话！	祈使句

(3)~(6)都不是命题

命题的分类

- 简单命题 (原子命题)：由最简单的陈述句构成的命题 (该句再不能分解成更简单的句子了)。通常用小写英字母表示。
- 例1-1.1中的(1)、(2)、(3)是原子命题。
- 复合命题：由若干个原子命题构成的命题。
- 例1-1.1中的(4)是由三个原子命题(a>b、b>c、a>c)构成的复合命题。

简单命题符号化

- 用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i\ (i\geqslant 1)$ 表示简单命题
- 用 “1”表示真，用 “0”表示假

- 例如，令

  p：$\sqrt{2}$是有理数，则 p 的真值为 0

  q：$2 + 5 = 7$，则 q 的真值为 1

联结词与复合命题

- 复合命题的构成：是用“联结词”将原子命题联结起来构成的。
- 归纳自然语言中的联结词，定义了六个逻辑联结词，分别是：

  (1) 否定“$\neg$”

  (2) 合取“$\wedge$”

  (3) 析取“$\vee$”

  (4) 异或“$\overline{\vee}$”

  (5) 蕴涵“$\rightarrow$”

  (6) 等价“$\leftrightarrow$”

一． 否定“¬” *

- 表示：“…不成立”，“不…”。
- 用于：对一个命题P的否定，写成¬P，并读成“非P”。
- ¬P的真值：与P真值相反。
- 例1-2.1　P：2是素数。

　　¬P：2不是素数。

P	¬P
F	T
T	F

二. 合取“∧”*

- 表示：“并且”、“不但…而且…”、“既…又 …”“尽管…还…”
- 例1-2.2 P：小王能唱歌。

  Q：小王能跳舞。

  P∧Q：小王能歌善舞。

  P∧Q读成P合取Q。

  P∧Q的真值为真，当且仅当P和Q的真值均为真。

P	Q	P∧Q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

例 将下列命题符号化.

(1) 王晓既用功又聪明.

(2) 王晓不仅聪明，而且用功.

(3) 王晓虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 令 p：王晓用功，q：王晓聪明，则

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg p \wedge q$.

例 (续)

令 r : 张辉是三好学生，s :王丽是三好学生

(4) $r \wedge s$.

(5) 令 t : 张辉与王丽是同学，t 是简单命题 .

说明:

(1)~(4)说明描述合取式的灵活性与多样性.

(5) 中“与”联结的是两个名词，整个句子是一个简单命题.

三. 析取“∨”、异或“$\overline{\vee}$”

- 表示“或者”
- “或者”有二义性，看下面两个例子：
- 例1-2.3. 灯泡或者线路有故障。
- 例1-2.4. 第一节课上数学或者上英语。
- 例3中的或者是可兼取的或。即析取“∨”
- 例4中的或者是不可兼取的或，也称之为异或、排斥或。即“$\overline{\vee}$”.

1. 析取“∨”

- P：灯泡有故障。
- Q：线路有故障。
- 例3中的复合命题可表示为：$P \vee Q$，读成P析取Q，P或者Q。
- $P \vee Q$的真值为F，当且仅当P与Q均为F。

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

2. 异或“$\bigtriangledown$”

- P：第一节上数学。
- Q：第一节上英语。
- 例4中的复合命题可写成P $\bigtriangledown$Q，读成P异或Q。
- P$\bigtriangledown$Q的真值为F，当且仅当P与Q的真值相同。

P	Q	P $\bigtriangledown$Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

3. 异或的另一种表示

- 异或是表示两个命题不可能同时都成立。
- 命题“第一节课上数学或者上英语。”可以解释为：

“第一节课上数学而没有上英语或者第一节课上英语而没有上数学。”

- 于是有 $P\overline{\vee}Q$
- 与 $(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)$ 是一样的。

实际应用中必须注意“或者”的二义性。

例 将下列命题符号化

(1) 2或4是素数.
(2) 2或3是素数.
(3) 4或6是素数.
(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.
(5) 王晓红生于1975年或1976年.

解 令 p:2是素数, q:3是素数, r:4是素数, s:6是素数,

则 (1), (2), (3) 均为相容或.

分别符号化为: $p \vee r$, $p \vee q$, $r \vee s$,

它们的真值分别为 1, 1, 0.

(4), (5) 为排斥或.

令 t :小元元拿一个苹果, u:小元元拿一个梨,

则 (4) 符号化为 $t \,\overline{\vee}\, u$ 或 $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

令v :王晓红生于1975年, w:王晓红生于1976年, 则 (5) 既可符号化为

$v \,\overline{\vee}\, w$ 或 $(v \wedge \neg w) \vee (\neg v \wedge w)$.

四． 蕴涵（条件）“→”

- 表示 “如果… 则 …”，
- 例1-2.5： P表示：缺少水分。

  Q表示：植物会死亡。
- P→Q：如果缺少水分，植物就会死亡。
- P→Q：也称之为蕴涵式，读成 “P蕴涵Q”， “如果P则Q”。也说成P是P→Q 的前件，Q是P→Q的后件。还可以说P是Q的充分条件，Q是P的必要条件。

$P \to Q$的真值：

- $P \to Q$的真值为假，当且仅当P为真，Q为假。注意：当前件P为假时，$P \to Q$为T。

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

关于充分条件和必要条件的说明：

- 充分条件：就是只要条件成立，结论就成立，则该条件就是充分条件。

  上例中，“缺少水分”就是“植物会死亡”的充分条件。
- 在自然语言中表示充分条件的词有：如果...则...，只要...就...，若...则...
- 必要条件：就是如果该条件不成立，那么结论就不成立, 则该条件就是必要条件。

  上例中，“植物死亡”就是“缺少水分”的必要条件(植物未死亡，一定不缺少水分)。
- 在自然语言中表示必要条件的词有：

  只有...才...；仅当...，...；...，仅当...。

例 设 p:天冷，q:小王穿羽绒服，将下列命题符号化

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服. $p \to q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p \to q$

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷. $p \to q$

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(6) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷. $p \to q$

(7) 如果天不冷，则小王不穿羽绒服. $q \to p$

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \to p$

注意： $p \to q$ 与 $\neg q \to \neg p$ 等值(真值相同)

可见“→”既表示充分条件(即前件是后件的充分条件)；也表示必要条件(即后件是前件的必要条件)。这一点要特别注意!!!它决定了哪个作为前件，哪个作为后件。

五. 等价（双条件）“↔”

- 表示“当且仅当”、“充分且必要”
- 例1-2.6：

  P：⊿ABC是等边三角形。

  Q：⊿ABC是等角三角形。

  $P \leftrightarrow Q$ ：⊿ABC是等边三角形当且仅当它是等角三角形。

P↔Q的真值：

- P↔Q的真值为真，当且仅当P与Q的真值相同。

P	Q	P↔Q
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

例

例 求下列复合命题的真值

(1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$. 1

(2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲. 0

联结词与复合命题

- 以上给出了5个联结词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$，组成一个联结词集合$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，
- 联结词的优先顺序为：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$; 如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算；若遇有括号时，应该先进行括号中的运算.
- 注意：本书中使用的括号全为圆括号.

命题符号化

- 所谓命题符号化，就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。
- 命题符号化的方法
  - 首先要明确给定命题的含义。
  - 对于复合命题，找联结词，用联结词断句，分解出各个原子命题。
  - 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

- 例1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

  P：离散数学是有用的。

  Q：离散数学是枯燥无味的。

  该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

- 例2.如果小张与小王都不去，则小李去。

  P：小张去。 Q：小王去。 R：小李去。

  该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

- 例3. 如果小张与小王不都去，则小李去。

  该命题可写成：$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$

  也可以写成：$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow R$

- 例4. 仅当天不下雨且我有时间，才上街。

  P：天下雨。**Q**：我有时间。**R**：我上街。

  分析：由于“仅当”是表示“必要条件”的，既“天不下雨且我有时间”，是“我上街”的必要条件。

  所以该命题可写成： $R \rightarrow (\neg P \wedge Q)$

- 例5.人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。

  P：人犯我。**Q**：我犯人。

  该命题可写成：$(\neg P \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow Q)$或写成： $P \leftrightarrow Q$

P是Q的必要条件　　P是Q的充分条件　　P是Q的充分且必要条件

- 例6.若天不下雨，我就上街；否则在家。

  P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

  该命题可写成：$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$.
- 注意：中间的联结词一定是“$\wedge$”，而不是“$\vee$”，也不是“$\overline{\vee}$”。
- 因为原命题表示：“天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么”的两种作法，其中有一种作法是假的，则我说的就是假话，所以中间的联结词一定是“$\wedge$”。
- 如果写成 $(\neg P\rightarrow Q)\vee(P\rightarrow R)$，就表明两种作法都是假的时候，我说的才是假话。这显然不对。
- 若写成$(\neg P\rightarrow Q)\overline{\vee}(P\rightarrow R)$时，当P为F，Q为F时，即天没下雨而我没上街，此时我说的是假话，但是表达式 $(\neg P\rightarrow Q)\overline{\vee}(P\rightarrow R)$ 的真值却是“T”，因为此时$(P\rightarrow R)$的真值是“T”。

本节小结：

- 要熟练掌握这五个联结词在自然语言中所表示的含义以及它们的真值表的定义。
- 特别要注意“或者”的二义性，即要区分给定的“或”是“可兼取的或”还是“不可兼取的或”。
- 特别要注意“→”的用法，它既表示“充分条件”也表示“必要条件”，即要弄清哪个作为前件，哪个作为后件。

习题

- P31
- 1.1(6)(7)(9)(12)(14)(15)
- 1.2(只做1.1中选中题目的符号化和真值讨论)
- 1.5(5)(6)(7)(8)

参考资料

- 东北大学信息学院计算机系许桂清
- 耿素云、屈婉玲、张立昂，离散数学配套课件

问题？

练习：填空

- 已知$P\wedge Q$为T，则P为( )，Q为( )。
- 已知$P\vee Q$为F，则P为( )，Q为( )。
- 已知P为F，则$P\wedge Q$为( )。
- 已知P为T，则$P\vee Q$为( )。
- 已知$P\vee Q$为T，且P为F，则Q为( )。
- 已知$P\rightarrow Q$为F，则P为( )，Q为( )。
- 已知P为F，则$P\rightarrow Q$为( )。
- 已知Q为T，则$P\rightarrow Q$为( )。
- 已知 $\neg P\rightarrow\neg Q$为F，则P为( )， Q为( )。

- 已知P为T，P$\rightarrow$Q为T，则Q为(　)。
- 已知$\neg$Q为T，P$\rightarrow$Q为T，则P为(　)。
- 已知P$\leftrightarrow$Q为T，P为T，则Q为(　)。
- 已知P$\leftrightarrow$Q为F，P为T，则Q为(　)。
- P$\leftrightarrow$P 的真值为(　)。
- P$\rightarrow$P 的真值为(　)。