离散数学

命题逻辑
1.2 命题公式及分类

1.2 命题公式及分类

- 命题变项与合式公式
- 公式的赋值
- 真值表
- 命题的分类
  - 重言式
  - 矛盾式
  - 可满足式
- 真值函数

命题变项与合式公式

- **命题常项（常值命题）**：即是我们前面所说的命题。它是有**具体含义（真值）**的。例如：“3是素数。”就是命题常项。
- **命题变项（命题变元）**：**真值不确定的陈述句。**用单独一个英文字母如P、Q等表示任何命题。称这些字母为命题变项。
- 对命题变项作指派(给命题变项一个解释)：将一个命题常项赋予命题变元的过程，或者是直接赋给命题变元真值“T”或“F”的过程。
- 注意：命题变项本身不是命题，只有给它一个解释，才变成命题。

合式公式

- 定义合式公式 (命题公式, 公式)：
  1. 单个命题变元是个合式公式。
  2. 若A是合式公式，则(¬A)是合式公式。
  3. 若A和B是合式公式，则(A∧B)，(A∨B)，(A→B)和(A↔B)都是合式公式。
  4. 当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3)所得到的含有命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式。
- 注意这个定义是递归的。1是递归的基础，由1开始，使用2、3规则，可以得到任意的合式公式。

合式公式--2

- 这里所谓的合式公式可以解释为合法的命题公式之意，在命题逻辑里又称之为**命题公式**，有时也简称**公式**。
- 下面的式子不是合式公式：

  $P \wedge Q$， $P \neg \rightarrow R$， $P \vee Q \wedge R$
- 下面的式子才是合式公式：

  $(P \wedge Q)$，$(\neg P \rightarrow R)$，$((P \vee Q) \wedge R)$
- **约定**：为方便，最外层括号可以不写，上面的合式公式可以写成：

  $P \wedge Q$，$\neg P \rightarrow R$，$(P \vee Q) \wedge R$

合式公式的层次

定义

(1) 若公式A是单个的命题变项, 则称A为0层公式.

(2) 称A是$n+1(n\geq 0)$层公式是指下面情况之一：

(*a*) $A=\neg B$, B是n层公式；

(*b*) $A=B\wedge C$, 其中B,C分别为i层和j层公式， 且

$n=\max(i, j)$；

(c) $A=B\vee C$, 其中B,C的层次及n同(*b*)；

(d) $A=B\to C$, 其中B,C的层次及n同(*b*)；

(*e*) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*).

合式公式的层次 --2

例如 确定公式$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$ 的层次

p	0层
$\neg p$	1层
$\neg p \wedge q$	2层
$\neg(p \wedge q) \rightarrow r$	3层
$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$	4层

公式的赋值

- 定义 给公式A中的命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$指定一组真值称为对A的一个赋值或解释
- 成真赋值: 使公式为真的赋值
- 成假赋值: 使公式为假的赋值
- 说明:
  - 赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$之间不加标点符号，$\alpha_i=0$或1.
  - A中仅出现 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指 $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$
  - A中仅出现$p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指$p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3\ldots$
  - 含n个变项的公式有2^n个赋值.

命题公式的**真值表**

- 一个命题公式不是复合命题，所以它没有真值，但是给其中的所有命题变元作指派以后它就有了真值。可以以表的形式反应它的真值情况
- **给出公式$A= ((q \to p) \wedge q) \to p$ 的真值表**

$p \quad q$	$q \to p$	$(q \to p) \wedge q$	$((q \to p) \wedge q) \to p$
0　0	**1**	**0**	**1**
0　1	**0**	**0**	**1**
1　0	**1**	**0**	**1**
1　1	**1**	**1**	**1**

- 由于对每个命题变元可以有两个真值(T,F)被指派，所以有n个命题变元的命题公式 $A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 的真值表有2^n行。
- 为了有序地列出公式的真值表，在对命题变元做指派时，可以按照二进制数的次序列表。

实例

例 $B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

例 $C=(p\vee q)\rightarrow\neg r$ 的真值表

$p\quad q\quad r$	$p\vee q$	$\neg r$	$(p\vee q)\rightarrow\neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

公式的类型

- 定义 设A为一个命题公式

(1) 若A无成假赋值，则称A为重言式(也称永真式)

(2) 若A无成真赋值，则称A为矛盾式(也称永假式)

(3) 若A不是矛盾式，则称A为可满足式

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

上例中A为重言式，B为矛盾式，C为可满足式

$A=(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$，$B=\neg(\neg p\vee q)\wedge q$，$C=(p\vee q)\rightarrow\neg r$

重言式(永真式)与矛盾式(永假式)

- 例子：

P	$\neg P \vee P$	$\neg P \wedge P$
F	T	F
T	T	F

- 可见不论P取什么真值$\neg P \vee P$ 的真值总是为真，$\neg P \wedge P$的真值总是为假。故称$\neg P \vee P$为重言式(永真式)，称$\neg P \wedge P$为矛盾式(永假式)。

重言式(永真式)与矛盾式(永假式) --2

- 重言式的证明方法

  方法1：列真值表。

  方法2：公式的等价变换，化简成“T”。

  方法3：用公式的主析取范式。
- 其中方法2 和方法3 我们在以后讨论。

重言式(永真式)与矛盾式(永假式) --2

- 列真值表。

  例如，证明 $(P\wedge(P\to Q))\to Q$ 为重言式。

P	Q	$P\to Q$	$P\wedge(P\to Q)$	$(P\wedge(P\to Q))\to Q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

真值函数

- 问题：含n个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？

- **定义** 称定义域为$\{00\cdots0, 00\cdots1, \cdots, 11\cdots1\}$，值域为$\{0, 1\}$的函数是$n$元真值函数，定义域中的元素是长为$n$的0, 1串．常用$F: \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ 表示F是n元真值函数.
- 共有2^{2^n}个n元真值函数.

- 例如 $F: \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$，且$F(00)=F(01)=F(11)=0$，$F(01)=1$，则$F$为一个确定的2元真值函数.

命题公式与真值函数

- 对于任何一个含n个命题变项的命题公式A，都存在惟一的一个n元真值函数F为A的真值表.
- 等值的公式对应的真值函数相同.
- 下表给出所有2元真值函数对应的真值表，每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.

- 例如：$p \to q$，$\neg p \vee q$，$(\neg p \vee q) \vee (\neg (p \to q) \wedge q)$ 等都对应表中的$\boldsymbol{F_{13}^{(2)}}$

2元真值函数对应的真值表

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

作业

- P32
- 1.6(2)(4)

问题？