

离散数学

图论

第7章 树

第7章 树

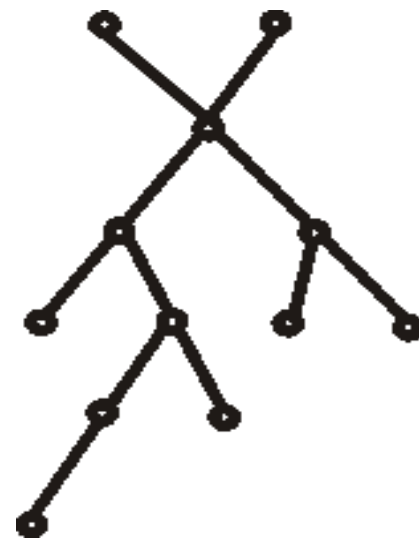
- 7.1 无向树及生成树
- 7.2 根树及其应用

7.1 无向树及生成树

- 无向树与森林
- 生成树与余树
- 基本回路与基本回路系统
- 基本割集与基本割集系统
- 最小生成树与避圈法

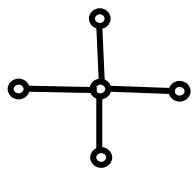
无向树

- **无向树**: 无回路的连通无向图
- **平凡树**: 平凡图
- **森林**: 每个连通分支都是树的非连通的无向图
- **树叶**: 树中度数为1的顶点
- **分支点**: 树中度数 ≥ 2 的顶点
- 右图为一棵12阶树.
- 注:本章中所讨论的回路均指简单回路或初级回路

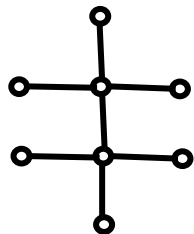


树的应用

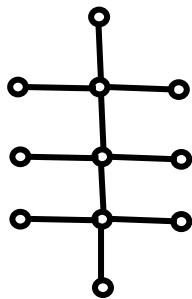
- 英国数学家凯莱(Arthur Cayley)于19世纪中叶研究饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构体时提出树的概念. 当 $n=1,2,3$ 时, 都只有一棵非同构的树; 当 $n=4$ 时, 有2棵不同构的树.



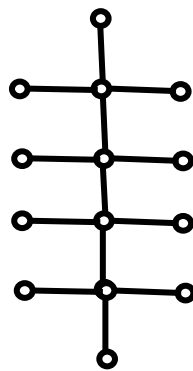
甲烷



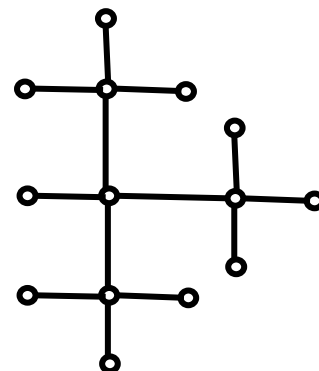
乙烷



丙烷



丁烷



异丁烷

无向树的性质

定理 设 $G=\langle V,E \rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图, 则下面各命题是等价的:

- (1) G 是树(连通无回路);
- (2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径;
- (3) G 中无回路且 $m=n-1$;
- (4) G 是连通的且 $m=n-1$;
- (5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥;
- (6) G 中没有回路, 但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得图中有惟一的一个含新边的圈.

无向树的性质 (续)

定理 设 T 是 n 阶非平凡的无向树, 则 T 中至少有两片树叶.

证 设 T 有 x 片树叶, 由握手定理及前面的定理,

$$2(n-1) \geq x + 2(n-x)$$

解得 $x \geq 2$.

例题

例1 已知无向树 T 中, 有1个3度顶点, 2个2度顶点, 其余顶点全是树叶.
试求树叶数, 并画出满足要求的非同构的无向树.

解 用树的性质 $m=n-1$ 和握手定理.

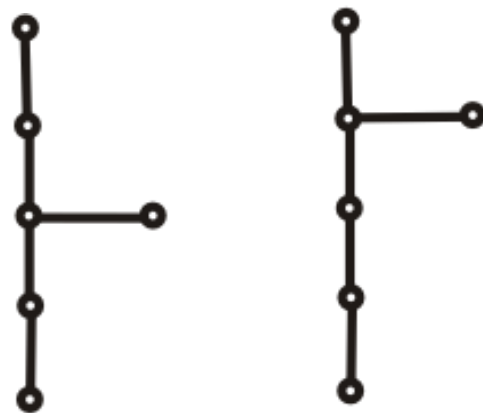
设有 x 片树叶, 于是

$$n=1+2+x=3+x,$$

$$2m=2\times(2+x)=1\times 3+2\times 2+x$$

解得 $x=3$, 故 T 有3片树叶.

- T 的度数列为1, 1, 1, 2, 2, 3
- 有2棵非同构的无向树.



例题

例2 已知无向树 T 有5片树叶, 2度与3度顶点各1个, 其余顶点的度数均为4. 求 T 的阶数 n , 并画出满足要求的所有非同构的无向树.

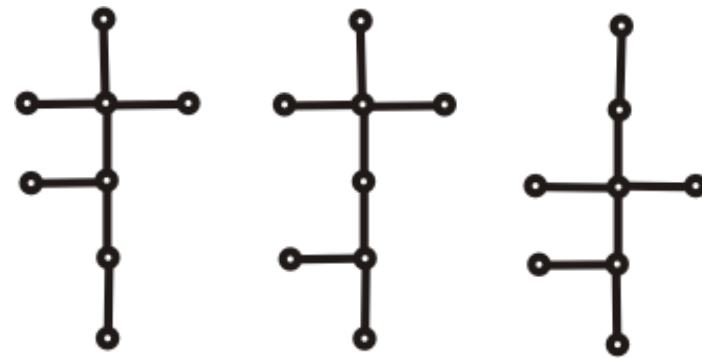
解 设 T 的阶数为 n , 则边数为 $n-1$, 4度顶点的个数为 $n-7$.

由握手定理得

$$2m=2(n-1)=5\times 1+2\times 1+3\times 1+4(n-7)$$

解得 $n=8$, 4度顶点为1个.

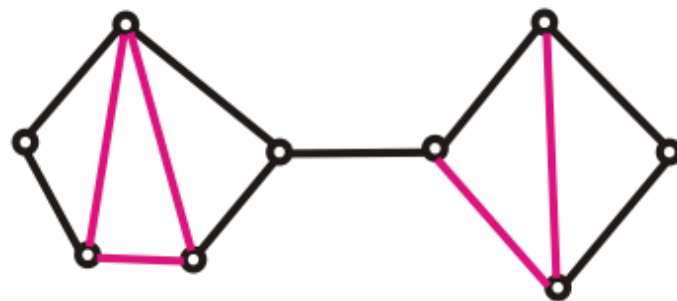
- T 的度数列为1,1,1,1,1,2,3,4
- 有3棵非同构的无向树



生成树

设 G 为无向连通图

- G 的**生成树**: G 的生成子图并且是树
- 生成树 T 的**树枝**: G 在 T 中的边
- 生成树 T 的**弦**: G 不在 T 中的边
- 生成树 T 的**余树**: 所有弦的集合的导出子图
- 注意: 余树不一定连通, 也不一定不含回路.
- 黑边构成生成树
- 红边构成余树



生成树的存在性

定理 任何无向连通图都有生成树.

证 用破圈法.

若图中无圈, 则图本身就是自己的生成树

否则删去圈上的任一条边, 不破坏连通性

重复进行直到无圈为止, 剩下的图是一棵生成树

推论 设 n 阶无向连通图有 m 条边, 则 $m \geq n-1$.

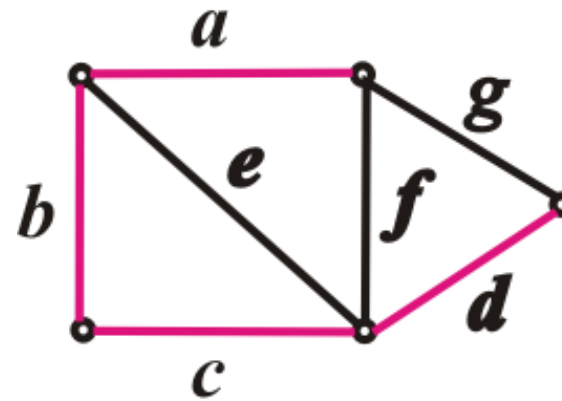
基本回路与基本回路系统

- **定义** 设 T 是连通图 G 的一棵生成树, 对每一条弦 e , 存在惟一的由弦 e 和 T 的树枝构成的初级回路 C_e , 称 C_e 为对应于弦 e 的**基本回路**. 称所有基本回路的集合为对应生成树 T 的**基本回路系统**.
- 求基本回路的算法: 设弦 $e=(u,v)$, 先求 T 中 u 到 v 的路径 Γ_{uv} , 再加上弦 e .

例如

$$C_e = e \ b \ c, \ C_f = f \ a \ b \ c, \ C_g = g \ a \ b \ c \ d,$$

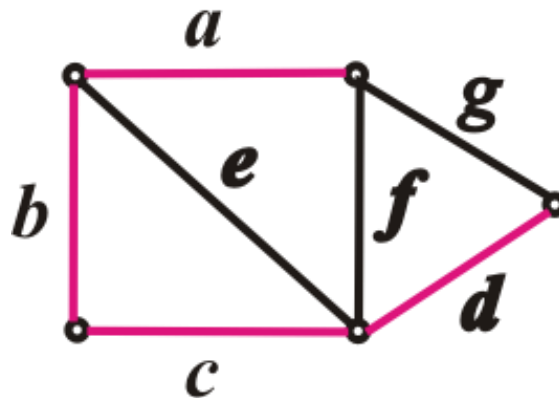
$$C_{\text{基}} = \{C_e, C_f, C_g\}.$$



基本割集与基本割集系统

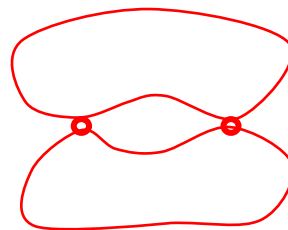
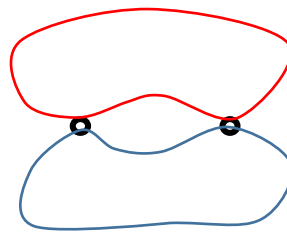
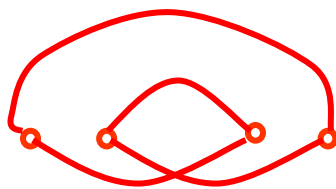
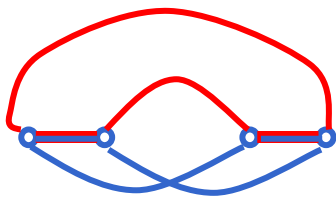
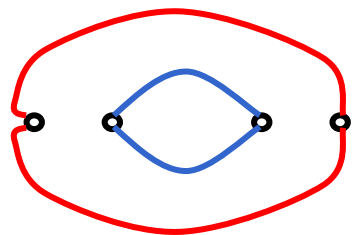
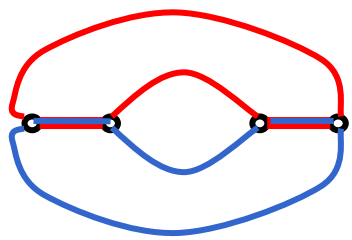
- **定义** 设 T 是连通图 G 的一棵生成树，对 T 的每一条树枝 a ，存在唯一的由树枝 a ，其余的边都是弦的割集 S_a ，称 S_a 为对应树枝 a 的**基本割集**，称所有基本割集的集合为对应生成树 T 的**基本割集系统**.
- 求基本割集的算法：设 a 为生成树 T 的树枝， $T-a$ 由两棵子树 T_1 与 T_2 组成，则 $S_a=\{e \mid e \in E(G) \text{ 且 } e \text{ 的两个端点分别属于 } T_1 \text{ 与 } T_2\}$.

例如 $S_a=\{a, f, g\}$, $S_b=\{b, e, f, g\}$, $S_c=\{c, e, f, g\}$, $S_d=\{d, g\}$,
 $S_{\text{基}}=\{S_a, S_b, S_c, S_d\}$.



回路合并

- 合并回路 C_1 和 C_2 ($C_1 \oplus C_2$): $C_1 \oplus C_2$ 是 C_1 和 C_2 上的边的对称差构成的 (一条或几条) 回路.



基本回路的性质

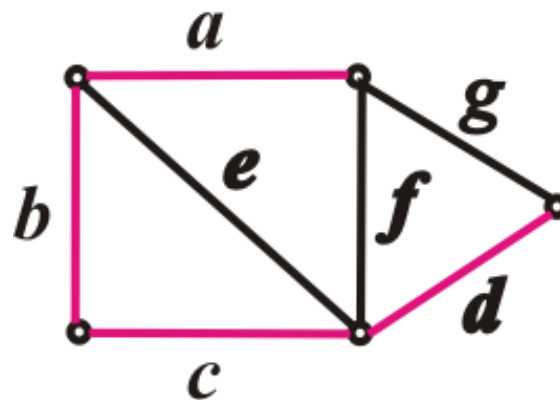
- 连通图中的任一条回路都可以表示成对应它所含弦的基本回路的合并.

例如, $abcf=C_f$

$$aef=C_e\oplus C_f$$

$$aedg=C_e\oplus C_g$$

$$bcdgfe=C_e\oplus C_f\oplus C_g$$



基本割集的性质

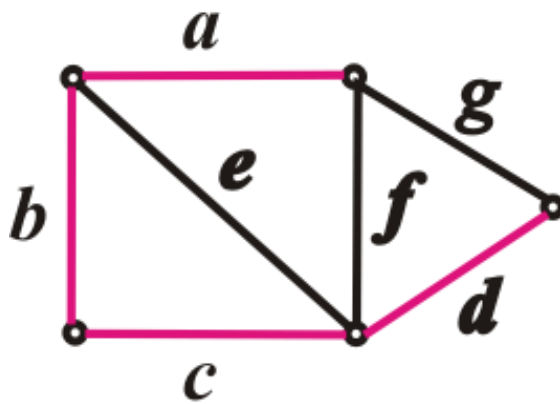
- 连通图中的任一割集都可以表成对应它所含树枝的基本割集的对称差.

例如 $\{g,d\}=S_d$

$$\{a,b,e\}=S_a \oplus S_b$$

$$\{a,e,c\}=S_a \oplus S_c$$

$$\{b,e,f,d\}=S_b \oplus S_d$$



无向图与最小生成树

- 对无向图或有向图的每一条边 e 附加一个实数 $w(e)$, 称作**边 e 的权**. 图连同附加在边上的权称作**带权图**, 记作 $G=\langle V, E, W \rangle$. 设 T 是 G 的生成树, T 所有边的权的和称作 **T 的权**, 记作 $W(T)$.
- **最小生成树**: 带权图权最小的生成树

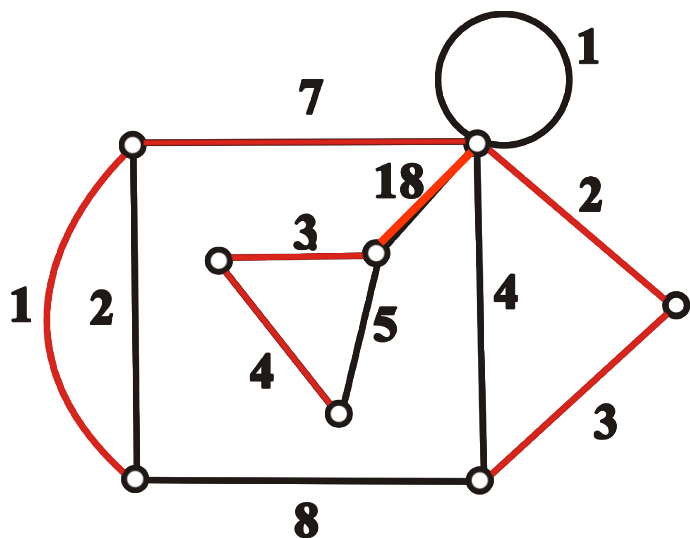
Kruskal —— 求最小生成树的算法

设 G 是 n 阶无向连通带权图 G .

- (1) 按权从小到大排列边(环除外), 设 $W(e_1) \leq W(e_2) \leq \dots \leq W(e_m)$.
- (2) 令 $T \leftarrow \emptyset, i \leftarrow 1, k \leftarrow 0$.
- (3) 若 e_i 与 T 中的边不构成回路, 则令 $T \leftarrow T \cup \{e_i\}, k \leftarrow k+1$.
- (4) 若 $k < n-1$, 则令 $i \leftarrow i+1$, 转(3).

实例

- 例 求图的一棵最小生成树



$$w(T)=38$$

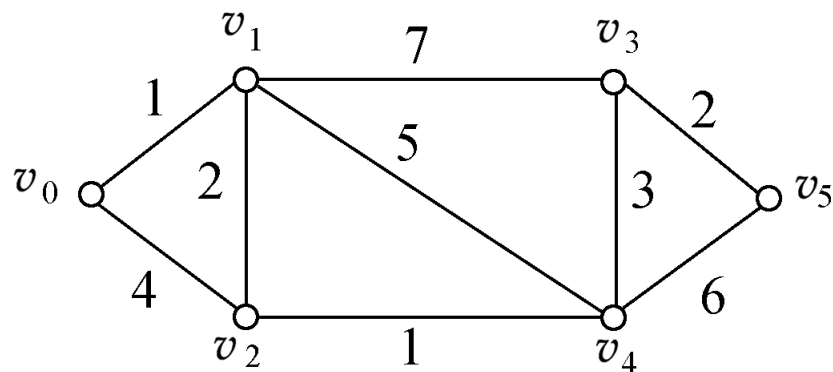
破圈法

- 1.在图中找一个回路
- 2.去掉该回路中权值最大的边，但要保持图仍为连通。
- 3.反复此过程，直至图中再无回路（但仍保持连通），得到最小生成树。

Prim

- 从图 G 中任意一点出发创建树 T
- 每次从图 G 中选择权重最小的边，且要求这条边的一端在树 T 中，另一端不在 T 中
- 将新边和新端点加入树 T

例题



- 从村庄 v_0 到其他村庄怎么走最近？分别有多远？
- 如果要给所有村庄通网，怎么布线最节省？

作业

- P171
- 7.2
- 7.7
- 7.8/(b)

问题？

