离散数学

代数结构

第9章 代数系统简介

埃瓦里斯特·伽罗瓦 （法）
1811年10月25日－1832年5月31日

尼尔斯·亨利克·阿贝尔（挪威）
1802年8月5日－1829年4月6日

第9章 代数系统简介

- **9.1** 二元运算及其性质
- **9.2** 代数系统
- **9.3** 几个典型的代数系统

9.1 二元运算及其性质

- 二元运算及一元运算的定义
- 二元运算的性质
  - 交换律、结合律、幂等律、消去律
  - 分配律、吸收律
- 二元运算的特异元素
  - 单位元
  - 零元
  - 可逆元素及其逆元

二元运算的定义及其实例

- **定义** 设 S 为集合,函数 f：$S \times S \rightarrow S$ 称为 S 上的二元运算, 简称为**二元运算**. 也称 S 对 f **封闭**.

例1

(1) N 上的二元运算：加法、乘法.

(2) Z 上的二元运算：加法、减法、乘法.

(3) 非零实数集 R* 上的二元运算: 乘法、除法.

(4) 设 $S = \{ a_1, a_2, \ldots , a_n\}$, $a_i \circ a_j = a_i$, $\circ$为 S 上二 元运算.

二元运算的实例（续）

(5) 设 $M_n(\mathbf{R})$ 表示所有 n 阶 ($n\geq 2$) 实矩阵的集合，即

$$M_n(\mathbf{R})=\left\{\left.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right| a_{ij}\in \mathbf{R},\ i,j=1,2,\ldots,n\right\}$$

矩阵加法和乘法都是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的二元运算.

(6) 幂集 $P(S)$ 上的二元运算：$\cup,\cap,-,\oplus$.

(7) S^S 为 S 上的所有函数的集合：合成运算$\circ$.

*n*元运算

- 定义 设 S 为集合，n为正整数，函数f称为 S 上的 n 元运算，简称为 n元运算.

$$f: \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n\text{个}} \to S$$

例2 (1) Z, Q 和 R 上的一元运算: 求相反数

(2) 非零有理数集 Q*和实数集 R*的一元运算：倒数

(3) 复数集合 C 上的一元运算：求共轭复数

(4) 幂集 $P(S)$ 上, 全集为 S：求绝对补运算~

(5) A 为 S 上所有双射函数的集合，$A \subseteq S^S$: 求反函数

(6) 在 $M_n(\mathrm{R})$ ($n \geq 2$)上，求转置矩阵

运算的表示

- 算符：$\circ$, $*$, $\cdot$, $\oplus$, $\otimes$ 等符号
- 表示 n 元运算

$$\circ(a_1, a_2, \ldots, a_n)=b.$$

- 对二元运算 $\circ$，如果 x 与 y 运算得到 z，记做

$$x \circ y = z;$$

- 对一元运算 $\circ$，x 的运算结果记作 $\circ x$

- 注意：在同一问题中不同的运算使用不同的算符

二元与一元运算的表示

- **公式表示**

例3 设 R 为实数集合，如下定义 R 上的二元运算 $*$:

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x * y = x.$$

那么 $3 * 4 = 3$

$$0.5 * (-3) = 0.5$$

运算表的形式

- **运算表**（表示有穷集上的一元和二元运算）

$\circ$	a_1	a_2	…	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	…	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	…	$a_2 \circ a_n$
.		. . .		
.		. . .		
.		. . .		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	…	$a_n \circ a_n$

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
.	.
.	.
.	.
a_n	$\circ a_n$

运算表的实例

例4 $A = P(\{a, b\})$, $\oplus$, ~分别为对称差和绝对补运算

（$\{a,b\}$为全集）

$\oplus$ 的运算表

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

~ 的运算表

X	$\sim X$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

运算表的实例（续）

例5 $Z_5 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$, $\oplus, \otimes$ 分别为　　加法与乘法

$\oplus$ 的运算表

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$ 的运算表

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

二元运算的性质

定义 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算,

(1) 如果对于任意的 $x, y \in S$ 有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则称运算在 S 上满足交换律.

(2) 如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则称运算在 S 上满足结合律.

(3) 如果对于任意的 $x \in S$ 有

$$x \circ x = x,$$

则称运算在 S 上满足幂等律.

实例分析

- Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；M_n(R)为 n 阶实矩阵集合，$n\geq2$；$P(B)$为幂集；A^A 为 A上A，$|A|\geq2$.

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z, Q, R	普通加法+			
	普通乘法×			
M_n(R)	矩阵加法+			
	矩阵乘法×			
$P(B)$	并∪			
	交∩			
	相对补−			
	对称差⊕			
A^A	函数复合∘			

二元运算的性质（续）

定义 设 $\circ$ 和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算,

(1) 如果$\forall x, y, z \in S$ 有

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$$

$$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$$

则称 $\circ$ 运算对 $*$ 运算满足分配律.

(2) 如果$\circ$ 和 $*$ 都可交换, 并且$\forall x, y \in S$ 有

$$x \circ (x * y) = x$$

$$x * (x \circ y) = x$$

则称 $\circ$ 和 $*$ 运算满足吸收律.

实例分析

- Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；M_n(R) 为 n 阶实矩阵集合，$n\geq 2$；$P(B)$为幂集.

集合	运算	分配律	吸收律
Z,Q,R	普通加法 + 与乘法 ×	× 对 + 可分配 + 对 × 不分配	无
M_n(R)	矩阵加法 + 与乘法 ×	× 对 + 可分配 + 对 × 不分配	无
$P(B)$	并 ∪ 与交 ∩	∪ 对 ∩ 可分配 ∩ 对 ∪ 可分配	有
	交 ∩ 与对称差 ⊕	∩ 对 ⊕ 可分配 ⊕ 对 ∩ 不分配	无

二元运算的特异元素

- 单位元
- 定义 设∘为S上的二元运算，如果存在e_l（或e_r）$\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有 $e_l \circ x = x$ (或 $x \circ e_r = x$)，则称 e_l (或 e_r)是 S 中关于 ∘ 运算的 左 (或右) 单位元.
- 若 $e \in S$ 关于 ∘ 运算既是左单位元又是右单位元，则称 e 为 S 上关于 ∘ 运算的 单位元.
- 单位元也叫做 幺元.

二元运算的特异元素（续）

- **零元**
- 设 ∘ 为 S 上的二元运算, 如果存在θ_l（或θ_r）$\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有 $\theta_l \circ x = \theta_l$ (或 $x \circ \theta_r = \theta_r$)，则称θ_l(或θ_r)是 S 中关于 ∘ 运算的 左 (或右) 零元.
- 若$\theta \in S$关于∘运算既是左零元又是右零元，则称θ为 S 上关于运算 ∘ 的 零元.

二元运算的特异元素（续）

- **可逆元素及其逆元**
- 令 e 为 S 中关于运算∘的单位元. 对于 $x \in S$，如果存在y_l（或 y_r）$\in S$ 使得 $y_l \circ x = e$（或 $x \circ y_r = e$），则称 y_l(或 y_r)是 x 的 左逆元 (或右逆元).
- 关于 ∘运算，若 $y \in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称 y 为 x 的逆元.
- 如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的.

实例分析

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z, Q, R	普通加法+			
	普通乘法×			
M_n(**R**)	矩阵加法+			
	矩阵乘法×			
$P(B)$	并∪			
	交∩			
	对称差⊕			

惟一性定理

- 定理　设 $\circ$为S上的二元运算，e_l 和 e_r 分别为 S 中关于运算的左和右单位元，则 $e_l = e_r = e$ 为 S 上关于 $\circ$ 运算的惟一的单位元.
- 证　　$e_l = e_l \circ e_r$ ，　$e_l \circ e_r = e_r$

　所以 $e_l = e_r$, 将这个单位元记作 e. 假设 e' 也是 S 中的单位元，则有$e' = e \circ e' = e$.

　惟一性得证.

- 类似地可以证明关于零元的惟一性定理.

惟一性定理（续）

- 定理 设 $\circ$为 S 上可结合的二元运算, e 为该运算的单位元, 对于 $x\in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r, 则有 $y_l = y_r= y$, 且 y 是 x 的惟一的逆元.
- 证 由 $y_l \circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$ 得

  $$y_l = y_l \circ e = y_l \circ(x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$

  令 $y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.

  假若 $y'\in S$ 也是 x 的逆元, 则

  $$y' = y' \circ e = y' \circ(x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

  所以 y 是 x 惟一的逆元.
- 说明：对于可结合的二元运算，可逆元素 x 只有惟一的逆元，记作 x^{-1}.

消去律

定义 设$\circ$为V上二元运算，如果$\forall\, x, y, z \in V$，

若 $x \circ y = x \circ z$，且 x不是零元，则 $y = z$

若 $y \circ x = z \circ x$，且 x 不是零元，则 $y = z$

那么称 $\circ$ 运算满足 **消去律**.

- 实例: Z, Q, R 关于普通加法和乘法满足消去律，M_n(R) 关于矩阵加法满足消去律，但是关于矩阵乘法不满足消去律.
- Z_n关于模 n 加法满足消去律，当 n 为素数时关于模 n乘法满足消去律. 当 n 为合数时关于模 n 乘法不满足消去律.

例题分析

例6　设 ∘ 运算为 Q 上的二元运算，

$$\forall x, y\in Q,\quad x\circ y = x+y+2xy,$$

(1) ∘运算是否满足交换和结合律？说明理由.

(2) 求 ∘ 运算的单位元、零元和所有可逆元.

解　(1) ∘ 运算可交换，可结合．任取$x, y\in Q$,

$$x \circ y = x+y+2xy = y+x+2yx = y \circ x,$$

任取$x, y, z\in Q$,

$$(x \circ y) \circ z= (x+y+2xy) + z + 2(x+y+2xy) z$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

$$x \circ (y \circ z) = x + (y+z+2yz) + 2x(y+z+2yz$$

$$= x+y+z+2xy+2xz+2yz+4xyz$$

例题分析（续）

(2) 设$\circ$运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，
则对于任意 x 有 $x\circ e = x$ 成立，即 $x+e+2xe = x \Rightarrow e = 0$
由于 $\circ$ 运算可交换，所以 0 是单位元.

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立，即

$$x+\theta+2x\theta = \theta \Rightarrow x + 2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x+y+2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq -1/2)$$

因此当 $x \neq -1/2$时，$y = -\frac{x}{1+2x}$ 是 x 的逆元.

例题分析（续）

例7 (1) 说明那些运算是交换的、可结合的、幂等的.
(2) 求出运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

$\bullet$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解 (1) $*$ 满足交换、结合律；$\circ$ 满足结合、幂等律；
$\bullet$ 满足交换、结合律.

(2) $*$ 的单位元为 b, 没零元， $a^{-1} = c, b^{-1} = b, c^{-1} = a$
$\circ$ 的单位元和零元都不存在，没有可逆元素.
$\bullet$ 的单位元为 a，零元为c，$a^{-1}=a$. b, c不可逆.

例题分析（续）

- 例8 设 $A = \{ a, b, c \}$, 构造 A 上的二元运算* 使得 $a*b = c$, $c*b = b$, 且*运算是幂等的、可交换的，给出关于*运算的一个运算表，说明它是否可结合，为什么？
- 根据幂等律和已知条件$a*b = c$, $c*b = b$ 得到运算表
- 根据交换律得到新的运算表
- 方框 □ 可以填入a, b, c中任一选定的符号, 完成运算表
- 不结合，因为 $(a*b)*b = c*b = b$, $a*(b*b) = a*b = c$

*	a	b	c
a	a	c	□
b	c	b	b
c	□	b	c

由运算表判别算律的一般方法

- 交换律：运算表关于主对角线对称
- 幂等律：主对角线元素排列与表头顺序一致
- 消去律：所在的行与列中没有重复元素
- 单位元：所在的行与列的元素排列都与表头一致
- 零元：元素的行与列都由该元素自身构成
- A 的可逆元：a 所在的行中某列 (比如第 j 列) 元素为 e，且第 j 行 i 列的元素也是 e，那么 a 与第 j 个元素互逆
- 结合律：除了单位元、零元之外，要对所有3个元素的组合验证表示结合律的等式是否成立

作业

- P226
- 9.14
- 9.16
- 9.19

问题？