南京工业大学 <u>概 率 统 计</u> 试题( )卷

标 准 答 案

2020—2021 学年第一学期　使用班级 <u>2019 级</u>

一、填空题(每题 3 分，共 18 分)

1、0.8； 2、0.3； 3、$\frac{8}{9}$； 4、$\frac{4}{3}$ 5、n,2； 6. (144.72,149.94).

二、选择题(每题 3 分，共 12 分)

1、(D); 2、(C); 3(B); 4、(C).

三(10 分)、解 设 $A_1=\{$从甲袋中取出白球$\}$，$A_2=\{$从甲袋中取出红球$\}$，B=$\{$从乙袋中取出红球$\}$.

(1) 由题意，$P(B|A_1)=\frac{2}{7},P(B|A_2)=\frac{3}{7},P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2},$ (4 分)

由全概率公式 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{14}$ (7 分)

(2) 由条件概率 $P(A_2\,|\,\overline{B})=\frac{P(A_2\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A_2)P(\overline{B}\,|\,A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}}{\frac{9}{14}}=\frac{4}{9}.$ (10 分)

四（8分）解由题意得，

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=\frac{a}{2}+b,$$

$$\frac{7}{12}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(ax+b)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2},$$

联立方程组解得 $a=1,b=\frac{1}{2}$.(4分）

由分布函数定义得 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2+x}{2}, & 0\le x\le 1,\text{(8分）}\\ 1, & x>1.\end{cases}$

五(8 分)、解设至少购买 n 件商品，X 表示 n 件商品中合格品的件数，则

$X\sim B(n,0.9),EX=0.9n,DX=0.09n,$由$D-L$中心极限定理

$$P\{\mathrm{X}\ge 100\}=P\{\frac{X-0.9n}{\sqrt{0.09n}}\ge\frac{100-0.9n}{\sqrt{0.09n}}\}$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{100-0.9n}{\sqrt{0.09n}})=\Phi(\frac{0.9n-100}{\sqrt{0.09n}})\ge 0.977=\Phi(2).\text{(4分）}$$

由 $\frac{0.9n-100}{0.3\sqrt{n}}\ge 2,n\ge 118.36,$取$\mathrm{n}=119.$

因此，至少购买119件这种商品才能以97.7%的概率保证每个人都得到1件合格品.（8分）

六、 (12分) 解(1) $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.65 & 0.35\end{pmatrix}, Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.4 & 0.25 & 0.35\end{pmatrix}$, (4分)

(2) $EX=0\times 0.65+1\times 0.35=0.35, EY=0\times 0.4+1\times 0.25+2\times 0.35=0.95,$

$P\{X+Y>1\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=0.3+0.15+0.05=0.5,$ (8分)

X~(3) $Z=max(X,Y)$ 可取值为 $0,1,2,$

$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0.25,$

$P\{Z=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}=0.35,$ 则 $P\{Z=1\}=1-0.25-0.35=0.4,$

故 $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.25 & 0.4 & 0.35\end{pmatrix}, EZ=0.4+0.7=1.1.$ (12分)

七 (12分) $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$,

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 2xdy=\frac{2}{3},$ (3 分)

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 2x^2 dy=\frac{1}{2}$;

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{18}$。同理, $EY=\frac{1}{3}, DY=\frac{1}{18}$ (6 分)

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 2xydy=\frac{1}{4}$。 (8 分)

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36},$。 (10 分)

于是, $\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{2}.$ (12 分)

八(10 分)、解:

总体 X 的数学期望 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\alpha+1)x^{\alpha}dx=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$, 令 $EX=\overline{X},$

则得未知参数 α 的矩估计量为 $\hat{\alpha}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$ (5 分)

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相应于的样本值,则似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}(\alpha+1)x_i^{\alpha}=(\alpha+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\alpha}\quad,(i=1,2,\ldots,n),$$

$$\ln L(\alpha)=n\ln(\alpha+1)+\alpha(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i), \frac{d\ln L}{d\alpha}=\frac{n}{\alpha+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令 $\frac{d\ln L}{d\alpha}=0,$ 解得 α 的极大似然估计值为 $\hat{\alpha}=-1-n/(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i).$

从而得 α 的极大似然估计量为 $\hat{\alpha}=-1-n/(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i).$ (10分)

九(10 分)、解: 设该次考试学生的成绩为 X,则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

建立假设H_0：$\mu=\mu_0=70$，H_1：$\mu\neq\mu_0=70$

在H_0选取检验统计量 T=$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$, （4 分）

由α=0.05$\Rightarrow t_{\alpha/2}=t_{0.025}(36-1)=2.0301$，又由$\overline{x}=66.5$、$s$=15，可算得统计量观测值$t$为

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sqrt{s^2/n}}=\frac{66.5-70}{\sqrt{15^2/36}}=-1.4,$$

因$|t|=1.4<t_{0.025}(35)=2.0301$，接受$H_0$,故可以认为这次考试全体学生的平均成绩为 70 分。 （10 分）