离散数学

一阶逻辑

2.2 一阶逻辑公式及解释

2.2 一阶逻辑公式及解释

- 合式公式(简称公式)
- 个体变项的自由出现和约束出现
- 解释与赋值
- 公式分类

  永真式，矛盾式，可满足式

个体函数和谓词

- 命题逻辑中有命题公式，类似地，在谓词逻辑中，要研究谓词公式。
- **个体函数**

有些命题中，可能有若干个个体，其中有些个体之间有函数关系

- 例题1. 如果x是奇数，则2x是偶数。

其中个体x与个体2x之间就有函数关系，可以设个体函数

$g(x)=2x$，

谓词 $O(x)$：x是奇数， $E(x)$：x是偶数，

则此命题可以表示为： $\forall x(O(x)\rightarrow E(g(x)))$

个体函数和谓词--2

- 例题2　小王的父亲是个医生。
  设函数f(x)=x的父亲，谓词D(x):x是个医生，a:小王
  此命题可以表示为：$D(f(a))$.
- 例题3 如果x和y都是奇数，则x+y是偶数。
  设函数$h(x,y)=x+y$，谓词O(x):x是奇数，E(x):x是偶数
  此命题可以表示为：$\forall x\forall y((O(x)\wedge O(y))\rightarrow E(h(x,y))$
- 像上述的g(x)、f(x)、h(x,y)就是个体函数，一般地用小写的英文字母f,g,h…. 表示个体函数。
- 注意:个体函数与谓词是不同的，不可混淆.

个体函数与谓词间的区别

- 设例题1的论域是自然数集合N。
- 个体函数中的个体变元用个体带入后的结果依然是个个体(3∈N, g(3)=6，所以g(3)∈N)。
- 谓词中的个体变元用确定的个体带入后就变成了命题，其真值为T或者为F(3∈N，O(3)是个命题，真值为T)。
- 把它们都看成“映射”的话，则**个体函数是论域到论域的映射**，g:N→N，如果指定的个体a∈N，则g(a)∈N。
- **而谓词是从论域到{T, F}的映射**，即谓词E(x)可以看成映射E:N→{T, F}，如果指定个体a∈N，则E(a)的真值∈{T, F}。

字母表

定义 字母表包含下述符号：

(1) 个体常项：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 个体变项：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(4) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(,), ,

项

定义 项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1,t_2,\ldots,t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

- 个体常项、变项是项，由它们构成的n元函数和复合函数还是项

原子公式

- 定义 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的n元谓词，$t_1,t_2,\ldots, t_n$是任意的n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式.

- 原子公式是由项组成的n元谓词.
- 例如，$F(x,y)$, $F(f(x_1,x_2), g(x_3,x_4))$等均为原子公式

合式公式

- **定义 谓词合式公式**（简称**公式**）定义如下：

  (1) 原子公式是合式公式.

  (2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

  (3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

  (4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式

  (5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式.

- 如 $x\geq 0$, $\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$, $\forall x\exists y(x+y=1)$

合式公式

- 下面都是合式公式：

  P、$(P \to Q)$、$(Q(x) \wedge P)$、$\exists x(A(x) \to B(x))$、$\forall x C(x)$

- 而下面都不是合式公式：

  $x \forall y \exists P(x)$ 、$P(\exists x) \wedge Q(x) \forall \exists x$

- 为了方便，最外层括号可以省略，但是若量词后边有括号，则此括号不能省。
- 注意：公式$\exists x(A(x) \to B(x))$中$\exists x$后边的括号不是最外层括号，所以不可以省略。

量词的作用域(辖域)

- **定义**：在谓词公式中，量词的作用范围称之为量词的**作用域**，也叫量词的**辖域**。
- 例如 $\forall xA(x)$中$\forall x$的辖域为$A(x)$.
- $\forall x((P(x)\wedge Q(x))\rightarrow\exists yR(x,y))$中

  $\forall x$的辖域是$((P(x)\wedge Q(x))\rightarrow\exists yR(x,y))$

  $\exists y$的辖域为$R(x,y)$。
- $\forall x\exists y\forall z(A(x,y)\rightarrow B(x,y,z))\wedge C(t)$

  $\forall z$的辖域

  $\exists y$的辖域

  $\forall x$的辖域

量词的作用域(辖域)

一般地，

- 如果量词后边只是一个原子谓词公式时，该量词的辖域就是此原子谓词公式。
- 如果量词后边是括号，则此括号所表示的区域就是该量词的辖域。
- 如果多个量词紧挨着出现，则后边的量词及其辖域就是前边量词的辖域。

自由变元与约束变元

- 在谓词公式中的个体变元可以分成两种，一种是受到量词约束的，一种是不受量词约束的。请看下面公式：
- $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yP(y))\wedge Q(z)$

  $F(x,y)$中的x在$\forall x$的辖域内，受到$\forall x$的约束，而其中的y不受$\forall x$的约束。

  $P(y)$中的y在$\exists y$的辖域内，受$\exists y$的约束。

  $Q(z)$中的z不受量词约束。

自由变元与约束变元--2

- 定义：如果个体变元x在∀x或者∃x的辖域内，则称x在此辖域内约束出现，并称x在此辖域内是约束变元。否则x是自由出现，并称x是自由变元。
- 上例中

  $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yP(y))\wedge Q(z)$

  $F(x,y)$中的x和$P(y)$中的y是约束变元。

而$F(x,y)$中的y和$Q(z)$中的z是自由变元。

- 闭式: 不含自由出现的个体变项的公式.

自由变元与约束变元--3

- 对约束变元和自由变元有如下几点说明：

(1). **对约束变元用什么符号表示无关紧要。**就是说$\forall xA(x)$与$\forall yA(y)$是一样的。这类似于计算积分与积分变元无关，即积分$\int f(x)dx$与$\int f(y)dy$ 相同。

(2). **一个谓词公式如果无自由变元，它就表示一个命题。**

例如 $A(x)$表示x是个大学生。$\exists xA(x)$或者$\forall xA(x)$就是个命题了，因为它们分别表示命题“有些人是大学生”和“所有人都是大学生”。

(3). 一个n元谓词$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，若在前边添加k个量词，使其中的k个个体变元变成约束变元，则此n元谓词就变成了n-k元谓词。

- 例如$P(x, y, z)$表示$x+y=z$，假设论域是整数集。$\forall x \exists y P(x, y, z)$表示“任意给定的整数x，都可以找到整数y，使得$x+y=z$”。
- 如果令 $z=1$，则$\forall x \exists y P(x, y, 1)$就变成了命题“任意给定的整数x，都可以找到整数y，使得$x+y=1$”, …。
- 可见每当给z指定个整数a后，$\forall x \exists y P(x, y, a)$就变成了一个命题。所以谓词公式$\forall x \exists y P(x, y, z)$就相当于只含有个体变元z的一元谓词了。

换名规则

- 在一个谓词公式中，如果某个个体变元既以约束变元形式出现，又以自由变元形式出现，就容易产生混淆。为了避免此现象发生，可以对个体变元更改名称。

  如 $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yP(y))\wedge Q(z)$

- **约束变元的换名规则：**

(1).对约束变元可以更改名称，换名的范围是：量词后的指导变元以及该量词的辖域内此个体变元出现的各处同时换名。

(2).换名后用的个体变元名称，不能与该量词的辖域内的其它变元名称相同。

例如$\forall x(P(x) \to Q(x,y)) \lor (R(x) \land A(x))$

此式中的x 就是以两种形式出现。可以对x换名成

$$\forall z(P(z) \to Q(z,y)) \lor (R(x) \land A(x))$$

对自由变元也可以改名字，此改名叫代入。

对自由变元的代入规则：

(1).对谓词公式中的自由变元可以作代入。代入时需要对公式中出现该变元的每一处，同时作代入。

(2).代入后的变元名称要与公式中的其它变元名称不同

上例也可以对自由变元x作代入，改成

$$\forall x(P(x) \to Q(x,y)) \lor (R(z) \land A(z))$$

公式的解释与分类

给定闭式 $A=\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

取个体域N, $F(x)$: $x>2$, $G(x)$: $x>1$

代入得$A=\forall x(x>2\rightarrow x>1)$ 真命题

给定非闭式 $B=\forall xF(x,y)$

取个体域N, $F(x,y)$: $x\geq y$

代入得$B=\forall x(x\geq y)$ 不是命题

令$y=1$, $B=\forall x(x\geq 1)$ 假命题

解释和赋值

- 定义 解释I由下面4部分组成：
  (a) 非空个体域D_I
  (b) 对每一个命题常项a 指定一个 $\bar{a} \in D_I$
  (c) 对每一个函数符号f指定一个D_I上的函数 $\bar{f}$
  (d) 对每一个谓词符号F指定一个D_I上的谓词 $\bar{F}$
- 赋值σ：对每一个自由出现的个体变项x指定一个值$\sigma(x) \in D_I$
- 公式A在解释I和赋值σ下的含义：取个体域D_I，并将公式中出现的a、f、F 分别解释成 $\bar{a}$、$\bar{f}$、$\bar{F}$，把自由出现的x换成$\sigma(x)$后所得到的命题.
- 在给定的解释和赋值下，任何公式都成为命题.

实例

例 给定解释 I 如下:

(*a*) 个体域 D=N

(*b*) $\bar{a}=2$

(*c*) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=xy$

(*d*) 谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$

以及赋值σ: $\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.

说明下列公式在 I 与σ下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),y)$

$\forall x(2x=1)$　　假命题

例(续)

(2) $\forall x F(f(x,a),y) \to \forall y F(x,f(y,a))$

$\forall x(x+2=1) \to \forall y(0=y+2)$　　　真命题

(3) $\exists x F(f(x,y),g(x,z))$

$\exists x(x+1=2x)$　　　真命题

(4) $\forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z)$

$\forall x \forall y \exists z\ (x+y=z)$　　　真命题

(5) $\exists x \forall y \forall z F(f(y,z),x)$

$\exists x \forall y \forall z\ (y+z=x)$　　假命题

闭式只需要解释, 如(4),(5)

公式的分类

永真式(逻辑有效式):在任何解释和赋值下为真命题
矛盾式(永假式):在任何解释和赋值下为假命题
可满足式：存在成真的解释和赋值

说明:
永真式为可满足式，但反之不真
谓词公式的可满足性（永真性, 永假性)是不可判定的

代换

- 定义 设A_0是含命题变项p_1，p_2，…,p_n的命题公式，$A_1,A_2,\ldots,A_n$是n个谓词公式，用A_i处处代替A_0中的p_i ($1\le i\le n$)，所得公式A称为A_0的代换实例.

- 如 $F(x)\to G(x)$, $\forall xF(x)\to\exists yG(y)$是$p\to q$的代换实例

- 定理 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例 判断下列公式的类型

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$；

- 设I为任意的解释，若$\forall xF(x)$为假，则$\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$为真。若$\forall xF(x)$为真，则$\exists xF(x)$也为真，所以$\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$也为真。
- 是逻辑有效式。

(2) $\forall xF(x)\rightarrow(\forall x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$；

- 重言式$p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，是逻辑有效式。

例(续)

(3) $\forall xF(x)\rightarrow(\forall xF(x)\vee\exists yG(y))$；

- 重言式$p\rightarrow(p\vee q)$的代换实例，是逻辑有效式。

(4) $\neg(F(x,y)\rightarrow R(x,y))\wedge R(x,y)$；

- 矛盾式$\neg(p\rightarrow q)\wedge q$的代换实例，是矛盾式。

(5) $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$.

- 取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x=y$。公式被解释为$\forall x\exists y(x=y)\rightarrow\exists x\forall y(x=y)$，其值为假。
- 解释I'：个体域N, $F(x,y)$为$x\leq y$。在I'下,公式被解释为$\forall x\exists y(x\leq y)\rightarrow\exists x\forall y(x\leq y)$，其值为真。
- 是非逻辑有效式的可满足式。

例(续)

(6) $\exists x F(x,y)$

- 取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_1：$\sigma_1(y)=1$。 在I和σ_1下，$\exists x(x<1)$，真命题。
- 取解释I：个体域N, $F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_2：$\sigma_2(y)=0$。在I和σ_2下，$\exists x(x<0)$， 假命题。
- 是非逻辑有效式的可满足式.

作业

- P53
- 2.6/(2)(4)

问题？