

离散数学

一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

命题逻辑的局限性

- 在第一章，一个原子命题只用一个字母表示，而不再对命题中的句子成分细分。这样有一些逻辑问题无法解决。
- 例1. 令 P ：小张是大学生。
 Q ：小李是大学生。
- 从符号 P 、 Q 中不能归纳出他们都是大学生的共性。我们希望通过所使用的符号那里带给我们更多的信息，比如可以看出他们的共性。这种想法在第一章是无法实现的。

命题逻辑的局限性-2

- **例2.** 令 A：所有自然数都是整数。
B：8 是自然数。
C：8 是整数。
- 这是著名的三段论推理，A是大前提，B是小前提，C是结论。显然，由 A 和 B 可以推出结论 C。这个推理是有效的，但是**这个推理在第一章也是无法实现的。**
- **分析：**命题 P 与 Q 中的谓语是相同的(是大学生)，只是主语不同。命题 A、B、C 之间在主语谓语方面也是有联系的，靠这种联系才能由 A、B 推出 C。而从这三个符号上看不出此种联系。

命题逻辑的局限性-3

- 苏格拉底三段论：

凡是人都要死的。

苏格拉底是人。

所以苏格拉底是要死的。

- 在命题逻辑中，只能用 p 、 q 、 r 表示以上3个命题，上述推理可表成： $(p \wedge q) \rightarrow r$ ，这不是重言式。
- 所以就要另外考虑表示命题的方法。

解决这个问题的方法

- 在表示命题时，既表示出主语，也表示出谓语，就可以解决上述问题。这就提出了谓词的概念。
 - 令 $C(x)$ 表示 x 是大学生， a :小张， b :小李
命题 P 表示成 $C(a)$:小张是大学生。
命题 Q 表示成 $C(b)$:小李是大学生。
 - 从符号 $C(a)$ 、 $C(b)$ 可看出小张和小李都是大学生的共性。
 - 令 $N(x)$: x 是自然数。 $I(x)$: x 是整数。 \forall 表示所有的。

$A: \forall x (N(x) \rightarrow I(x))$	推理如此实现:	$N(8) \rightarrow I(8)$
$B: N(8)$		$N(8)$
$C: I(8)$		$\Rightarrow I(8)$
- 符号 $C(x)$ 、 $N(x)$ 、 $I(x)$ 就是所谓的谓词。

2.1 一阶逻辑基本概念

- 个体词
- 谓词
- 量词
- 一阶逻辑中命题符号化

基本概念——个体词

- **个体词（个体或客体）**：所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的个体。
- **个体常项**：具体的事物，用 a, b, c 表示
- **个体变项**：抽象的事物，用 x, y, z 表示
- **个体域**：个体变项的取值范围
- **有限个体域**，如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$
- **无限个体域**，如 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \dots$
- **全总个体域**：宇宙间一切事物组成

基本概念——谓词

- **谓词**: 表示个体词性质或相互之间关系的词
- **谓词常项**: $F(a)$: a 是人
- **谓词变项**: $F(x)$: x 具有性质 F
- **一元谓词**: 表示事物的性质
- **多元谓词(n 元谓词, $n \geq 2$)**: 表示事物之间的关系。
 - 例如
 - $C(x)$: 表示 x 是大学生。 一元谓词
 - $G(x, y)$: 表示 $x > y$ 。 二元谓词
 - $B(x, y, z)$: 表示 x 在 y 与 z 之间。 三元谓词
 - 一般地 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元谓词。
- **0元谓词**: 不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项

命题函数

- 谓词本身并不是命题，只有谓词的括号内填入足够的个体常项，同时将谓词部分由谓词常项代替，才变成命题。
- 例如，
 - a表示小张，b表示小李，则
 - $C(a)$: 小张是大学生。
 - $C(b)$: 小李是大学生。
 - $G(7, 3)$ 表示: $7 > 3$ 。
- 如果c表示锦州，d表示沈阳，e表示山海关，则 $B(c, d, e)$ 表示：锦州在沈阳与山海关之间。
- 这时 $C(a)$ 、 $C(b)$ 、 $G(7, 3)$ 、 $B(c, d, e)$ 才是命题。

命题函数--2

- 令谓词 $C(x)$: x 是大学生, 括号内填入不同的人名, 就得到不同的命题, 故谓词 $C(x)$ 相当于一个函数, 称之为命题函数。
- 定义: n 元谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称之为简单命题函数。
- 规定: 当命题函数 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中 $n=0$ 时, 即0元谓词, 表示不含有个体变元的谓词, 它本身就是一个命题变元。
- 定义: 将若干个简单命题函数用逻辑联结词联结起来, 构成的表达式, 称之为复合命题函数。简单命题函数与复合命题函数统称为命题函数。

命题函数--3

- 例如 给定简单命题函数：

$A(x)$ ： x 身体好，

$B(x)$ ： x 学习好，

$C(x)$ ： x 工作好，

- 复合命题函数 $\neg A(x) \rightarrow (\neg B(x) \wedge \neg C(x))$

表示如果 x 身体不好，则 x 的学习与工作都不会好。

基本概念—量词

- 例如：有些人是大学生。

所有事物都是发展变化的。

“有些”，“所有的”，就是对个体量化的词。

- **定义**：在命题中表示对个体数量化的词，称之为**量词**。
- 定义了两种量词：
 - (1). **存在量词**：记作 \exists ，表示“有些”、“一些”、“某些”、“至少一个”等。
 - (2). **全称量词**：记作 \forall ，表示“每个”、“任何一个”、“一切”、“所有的”、“凡是”、“任意的”等。

基本概念—量词

- **定义**：量词后边要有一个个体变元，指明对哪个个体变元量化，称此个体变元是**量词后的指导变元**。
- 例如 $\forall x$ (读作“任意 x ”)， $\exists x$ (读作“存在 x ”)，其中的 x 就是量词后的指导变元。
- **例题 1**. 所有的自然数都是整数。
设 $N(x)$ ： x 是自然数。 $I(x)$ ： x 是整数。
此命题可以写成 $\forall x (N(x) \rightarrow I(x))$
- **例题 2**. 有些自然数是偶数。
设 $E(x)$ ： x 是偶数。
此命题可以写成 $\exists x (N(x) \wedge E(x))$

- 例题3. 每个人都有一个生母。

设 $P(x) : x$ 是个人。 $M(x, y) : y$ 是 x 的生母。

此命题可以写成

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge M(x, y)))$$

一阶逻辑中命题符号化

例 用0元谓词将命题符号化

要求：先将它们在命题逻辑中符号化，再在一阶逻辑中符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

在命题逻辑中, 设 p : 墨西哥位于南美洲

符号化为 p

在一阶逻辑中, 设 a : 墨西哥, $F(x)$: x 位于南美洲

符号化为 $F(a)$

例(续)

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数

在命题逻辑中, 设 p : $\sqrt{2}$ 是无理数, q : $\sqrt{3}$ 是有理数.

符号化为 $p \rightarrow q$

在一阶逻辑中, 设 $F(x)$: x 是无理数, $G(x)$: x 是有理数.

符号化为 $F(\sqrt{2}) \rightarrow G(\sqrt{3})$

(3) 如果 $2>3$, 则 $3<4$

在命题逻辑中, 设 p : $2>3$, q : $3<4$.

符号化为 $p \rightarrow q$

在一阶逻辑中, 设 $F(x,y)$: $x>y$, $G(x,y)$: $x<y$,

符号化为 $F(2,3) \rightarrow G(3,4)$

• 命题的符号表达式与论域有关系。例如

1. 每个自然数都是整数。

(1). 如果论域是自然数集合 N ,

令 $I(x)$: x 是整数, 则命题的表达式为 $\forall x I(x)$

(2). 如果论域扩大为全总个体域时, 上述表达式 $\forall x I(x)$ 表示“所有客体都是整数”, 显然这是假的命题, 此表达式已经不能表达原命题了。

因此需要添加谓词 $N(x)$: x 是自然数, 用于表明 x 的特性, 于是命题的符号表达式为 $\forall x (N(x) \rightarrow I(x))$

2. 有些大学生吸烟。

(1). 如果论域是大学生集合 S ,

令 $A(x)$: x 吸烟, 则命题的表达式为 $\exists x A(x)$

(2). 如果论域扩大为 全总个体域 时, 上述表达式 $\exists x A(x)$ 表示“有些客体吸烟”, 就不是表示此命题了,

故需要添加谓词 $S(x)$: x 是大学生, $\text{用于表明}x\text{的特性}$, 于是命题的表达式为 $\exists x (S(x) \wedge A(x))$

- 从上述两个例子可以看出，命题的符号表达式与论域有关。当论域扩大时，需要添加用来表示客体特性的谓词，称此谓词为特性谓词。
- 特性谓词往往就是给定命题中量词后边的那个名词。如上面两个例子中的“所有自然数”、“有些大学生”。
- 如何添加特性谓词，这是个十分重要的问题，这与前边的量词有关。
- 特性谓词的添加方法如下：
- 如果前边是全称量词，特性谓词后边是蕴含联结词“ \rightarrow ”；如果前边是存在量词，特性谓词后边是合取联结词“ \wedge ”。

例(续)

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美; (2) 有人用左手写字

分别取(a) D 为人类集合, (b) D 为全总个体域.

解: (a) (1) 设 $G(x)$: x 爱美, 符号化为 $\forall x G(x)$

(2) 设 $G(x)$: x 用左手写字, 符号化为 $\exists x G(x)$

(b) 设 $F(x)$: x 为人, $G(x)$: 同(a)中

(1) $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\exists x (F(x) \wedge G(x))$

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解：注意：题目中没给个体域，使用全总个体域

(1) 令 $F(x)$: x 为正数, $G(y)$: y 为负数, $L(x,y)$: $x > y$

$$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow L(x,y)))$$

或 $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow L(x,y))$ 两者等值

(2) 令 $F(x)$: x 是无理数, $G(y)$: y 是有理数,

$$L(x,y): x > y$$

$$\exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$$

或 $\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x,y))$ 两者等值

例 所有大学生都喜欢一些歌星。

令 $S(x)$: x 是大学生, $X(x)$: x 是歌星, $L(x, y)$: x 喜欢 y 。

则命题的表达式为 $\forall x (S(x) \rightarrow \exists y (X(y) \wedge L(x, y)))$

例 没有不犯错误的人。

此话就是“没有人不犯错误”，“没有”就是“不存在”之意。

令 $P(x)$: x 是人, $F(x)$: x 犯错误,

此命题的表达式为 $\neg \exists x (P(x) \wedge \neg F(x))$

或者 $\forall x (P(x) \rightarrow F(x))$

例 不是所有的自然数都是偶数。

令 $N(x)$: x 是自然数, $E(x)$: x 是偶数,

命题的表达式为: $\neg \forall x (N(x) \rightarrow E(x))$ 或者 $\exists x (N(x) \wedge \neg E(x))$

6. 如果一个人只是说谎话，那么他所说的每句话没有一句是可以相信的。

令 $A(x)$: x 是人, $B(x, y)$: y 是 x 说的话, $C(x)$: x 是说谎话, $D(x)$: x 是可以相信的

命题的表达式为:

$$\forall x (A(x) \rightarrow (\forall y (B(x, y) \rightarrow C(y)) \rightarrow \neg \exists z (B(x, z) \wedge D(z))))$$

7. 每个自然数都有唯一的后继数。

令 $N(x)$: x 是自然数, $A(x, y)$: y 是 x 的后继数, $E(x, y)$: $x=y$

则命题的表达式为

$$\forall x (N(x) \rightarrow \exists y (N(y) \wedge A(x, y) \wedge \forall z ((N(z) \wedge A(x, z)) \rightarrow E(y, z))))$$

有一个后继数

后继数的唯一性

一阶逻辑中命题符号化(续)

- 几点注意:
 - 无特别要求, 应使用全总个体域, 引入特性谓词
 - 量词顺序一般不能随便颠倒
 - 两个基本形式 $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$ 和 $\exists x (F(x) \wedge G(x))$ 的使用
 - 否定的表示, 如“没有不呼吸的人”等同于“所有的人都呼吸”, “不是所有的人都喜欢吃糖”等同于“存在不喜欢吃糖的人”

作业

- P52
- 2.3

问题？

