

离散数学

命题逻辑

1.7 推理理论

1.7 推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与推理规则
- 构造证明

直接证明法, 附加前提证明法, 归缪法

推理的形式结构—问题的引入

- **推理**就是根据一个或几个已知的判断得出一个新的判断的思维过程。称这些已知的判断为**前提**，得到的新的判断为前提的**有效结论**。
- 实际上，推理的过程就是证明永真蕴含式的过程，即令 H_1, H_2, \dots, H_n 是已知的命题公式(前提)，若有 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$ 则称 C 是 H_1, H_2, \dots, H_n 的有效结论，简称结论。
- 即对于每组赋值，或者 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 为假，或者当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 为真时， C 也为真，则称由 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 推 C 的**推理正确**，否则**推理不正确**（错误）。
- **推理的形式结构**： $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow C$ 或
 前提： $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$
 结论： C
- 若推理正确，则记作： $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$ 。

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
 - 等值演算法
 - 主析取范式法
- } 判断推理是否正确
- 构造证明法 证明推理正确
 - 说明：用前3个方法时采用形式结构
“ $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ ”。
 - 用构造证明时, 采用
“前提: A_1, A_2, \dots, A_k , 结论: B ”。

实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号。 今天是1号。 所以明天是5号。

解 设 p : 今天是1号, q : 明天是5号。

推理的形式结构为: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

证明 (用等值演算法)

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

实例 (续)

(2) 若今天是1号，则明天是5号。 明天是5号。 所以今天是1号。

解 设 p : 今天是1号, q : 明天是5号。

推理的形式结构为: $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$

证明 (用主析取范式法)

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

结果不含 m_1 , 故01是成假赋值, 所以推理不正确。

推理定律——重言蕴涵式

- 重要的推理定律

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

$$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$

附加律

化简律

假言推理

拒取式

析取三段论

假言三段论

等价三段论

构造性二难

构造性二难（特殊形式）

破坏性二难

- **证明**:描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论。
- 在推理过程中，还要应用教材P23推理定律和 P9等值公式(**常用的公式要熟记**)

推理规则

- (1) 前提引入规则：在推理过程中，可以随时引入前提。
- (2) 结论引入规则：在推理过程中，如果前边有一个或几个公式永真蕴涵公式 S ，则可将 S 纳入推理过程中。
- (3) 置换规则：在推理过程中，命题公式的任何子命题公式都可由与之等价的公式置换
- (4)-(11)以及由8条推理定律得出8条推理规则
- 下面主要介绍三种推理方法：直接证明、条件论证及反证法

构造证明之一——直接证明法

- 直接证明/直接推理，就是从前提直接推出结论。
- 上面讲到推理的过程实际上是证明重言蕴涵式的过程。只不过证明的过程采用另外一种书写格式。
- 格式中包含：步骤号，给定前提或得出的结论，此结论是从哪几步得到的以及所用公式。

直接证明法 (续)

• 例 求证 前提: $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow R$, P 结论: R

• 证明

步骤号	前提或结论	从哪几步得到	所用公式
(1)	P	前提引入	
(2)	$P \rightarrow Q$	前提引入	
(3)	Q	(1) (2)	假言推理
(4)	$Q \rightarrow R$	前提引入	
(5)	R	(3) (4)	假言推理

直接证明法 (续)

例 构造下面推理的证明：

- 若明天是星期一或星期三，我就有课。若有课，今天必备课。我今天没备课。所以，明天不是星期一和星期三。

解 设 p ：明天是星期一， q ：明天是星期三，

r ：我有课， s ：我备课

推理的形式结构为

前提： $(p \vee q) \rightarrow r$, $r \rightarrow s$, $\neg s$

结论： $\neg p \wedge \neg q$

直接证明法 (续)

证明

① $r \rightarrow s$

前提引入

② $\neg s$

前提引入

③ $\neg r$

①②拒取式

④ $(p \vee q) \rightarrow r$

前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$

③④拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$

⑤德摩根律

直接证明法 (续)

例 用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性：

如果我学习，那么我数学不会不及格。如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习。但是我数学不及格。因此，我热衷于玩扑克。

解设 P：我学习。

Q：我数学及格。

R：我热衷于玩扑克。

推理的形式结构为：

前提： $P \rightarrow Q$, $\neg R \rightarrow P$, $\neg Q$

结论： R

证明:

- | | |
|--------------------------|---------|
| ① $P \rightarrow Q$ | 前提引入 |
| ② $\neg Q$ | 前提引入 |
| ③ $\neg P$ | ① ② 拒取式 |
| ④ $\neg R \rightarrow P$ | 前提引入 |
| ⑤ $\neg \neg R$ | ③ ④ 拒取式 |
| ⑥ R | ⑤ 双重否定律 |

例* 求证 前提: $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q$ 结论: $R \rightarrow S$

证明 (1) $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ 前提引入

(2) $\neg P \vee (\neg Q \vee S)$ (1) 蕴涵等值式

(3) $\neg P \vee (S \vee \neg Q)$ (2) 交换律

(4) $(\neg P \vee S) \vee \neg Q$ (3) 结合律

(5) Q 前提引入

(6) $\neg P \vee S$ (4) (5) 析取三段论

(7) $P \rightarrow S$ (6) 蕴涵等值式

(8) $\neg R \vee P$ 前提引入

(9) $R \rightarrow P$ (8) 蕴涵等值式

(10) $R \rightarrow S$ (7) (9) 假言三段论

构造证明之二——附加前提证明法

- 欲证明

前提: A_1, A_2, \dots, A_k

结论: $C \rightarrow B$

- 等价地证明

前提: A_1, A_2, \dots, A_k, C

结论: B

- 理由:
$$\begin{aligned} & (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B) \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B) \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \vee B \\ \Leftrightarrow & (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B \end{aligned}$$

附加前提证明法 (续)

- 例* 用附加前提证明法, 证明 前提: $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q$ 结论: $R \rightarrow S$

证明 (1) R 附加前提引入
(2) $\neg R \vee P$ 前提引入
(3) P (1) (2) 析取三段论
(4) $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ 前提引入
(5) $Q \rightarrow S$ (3) (4) 假言推理
(6) Q 前提引入
(7) S (5) (6) 假言推理

由附加前提证明法可知, 推理正确

- 与直接证明法证明相比, 因为它增加了一个附加前提, 所以推理就容易些。

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数。若2是素数, 则 $\sqrt{2}$ 是无理数。若 $\sqrt{2}$ 是无理数, 则4不是素数。所以, 如果4是素数, 则2是合数。用附加前提证明法构造证明。

解 设 p : 2是素数, q : 2是合数,

r : $\sqrt{2}$ 是无理数, s : 4是素数

推理的形式结构

前提: $p \vee q, p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s$

结论: $s \rightarrow q$

附加前提证明法 (续)

证明:

- | | |
|--------------------------|---------|
| ① s | 附加前提引入 |
| ② $p \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ③ $r \rightarrow \neg s$ | 前提引入 |
| ④ $p \rightarrow \neg s$ | ②③假言三段论 |
| ⑤ $\neg p$ | ①④拒取式 |
| ⑥ $p \vee q$ | 前提引入 |
| ⑦ q | ⑤⑥析取三段论 |

课后请用直接证明法证明

附加前提证明法 (续)

例 用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性：

- 如果体育馆有球赛，青年大街交通就拥挤。在这种情况下，如果小王不提前出发，就会迟到。因此，小王没有提前出发也未迟到，则体育馆没有球赛。
- 证明 先将命题符号化。
设 P：体育馆有球赛。
Q：青年大街交通拥挤。
R：小王提前出发。
S：小王迟到。
- 推理的形式结构
前提： $P \rightarrow Q, (Q \wedge \neg R) \rightarrow S$
结论： $(\neg R \wedge \neg S) \rightarrow \neg P$

附加前提证明法 (续)

证明

(1) $\neg R \wedge \neg S$

(2) $\neg R$

(3) $\neg S$

(4) $(Q \wedge \neg R) \rightarrow S$

(5) $\neg(Q \wedge \neg R)$

(6) $\neg Q \vee R$

(7) $\neg Q$

(8) $P \rightarrow Q$

(9) $\neg P$

附加前提引入

(1) 化简

(1) 化简

前提引入

(3) (4) 拒取式

(5) 德摩根律

(2) (6) 析取三段论

前提引入

(7) (8) 拒取式

构造证明之三——归谬法(反证法)

- 欲证明

前提: A_1, A_2, \dots, A_k

结论: B

- 将 $\neg B$ 加入前提, 若推出矛盾, 则得证推理正确。
- 理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

- 括号内部为矛盾式当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B)$ 为重言式

归谬法 (续)

• 例 前提: $P \rightarrow Q, (\neg Q \vee R) \wedge \neg R, \neg(\neg P \wedge S)$ 结论: $\neg S$

- | | | |
|-------------------------------------|-----------|-------|
| (1) $\neg\neg S$ | 结论否定引入 | |
| (2) S | (1) | 双重否定律 |
| (3) $\neg(\neg P \wedge S)$ | 前提引入 | |
| (4) $P \vee \neg S$ | (3) | 德摩根律 |
| (5) P | (2) (4) | 析取三段论 |
| (6) $P \rightarrow Q$ | 前提引入 | |
| (7) Q | (5) (6) | 假言推理 |
| (8) $(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$ | 前提引入 | |
| (9) $\neg Q \vee R$ | (8) | 化简 |
| (10) $\neg R$ | (8) | 化简 |
| (11) R | (7) (9) | 析取三段论 |
| (12) $R \wedge \neg R$ | (10) (11) | 合取 |

由**(12)**得出了矛盾, 根据归谬法说明推理正确

归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提: $\neg(p \wedge q) \vee r, r \rightarrow s, \neg s, p$

结论: $\neg q$

证明 (用归谬法)

- | | |
|---------------------|--------|
| ① q | 结论否定引入 |
| ② $r \rightarrow s$ | 前提引入 |
| ③ $\neg s$ | 前提引入 |
| ④ $\neg r$ | ②③拒取式 |

归谬法 (续)

$$\textcircled{5} \neg(p \wedge q) \vee r$$

前提引入

$$\textcircled{6} \neg(p \wedge q)$$

④⑤析取三段论

$$\textcircled{7} \neg p \vee \neg q$$

⑥德摩根律

$$\textcircled{8} \neg p$$

①⑦析取三段论

$$\textcircled{9} p$$

前提引入

$$\textcircled{10} \neg p \wedge p$$

⑧⑨合取

课后请用直接证明法证明。

作业

- P35
- 1.19/ (3) (5)
- 1.20

问题？

