离散数学

命题逻辑
1.3 等值演算

1.3 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算
- 置换规则

等值式

- **例子** 看下面三个公式的真值表

P	Q	$P\to Q$	$\neg P\vee Q$	$\neg Q\to\neg P$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	T	T

- 从真值表可以看出，不论对P、Q作何指派，都使得$P\to Q$、$\neg P\vee Q$和$\neg Q\to\neg P$的真值相同，表明它们之间彼此等值。

等值式

- 定义一：若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是等值式。
- 定义二： A、B是含有命题变元P1,P2,…, Pn的命题公式，如不论对P1, P2 , …, Pn作任何指派，都使得A和B的真值相同，则称之为A与B等值，记作A⇔B。
- 说明：定义中，$A,B,\Leftrightarrow$均为元语言符号, A或B中可能有哑元出现。
- 例如，在 $(p\rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\vee (\neg r\wedge r))$中，$r$为左边公式的哑元。
- 用真值表可验证两个公式是否等值
- 请验证：$p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q) \rightarrow r$

  $p\rightarrow(q\rightarrow r) \not\Leftrightarrow (p\rightarrow q) \rightarrow r$

基本等值式

双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律:　$A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律:　$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律:　$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律:　$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

吸收律: $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

零律: $A\vee 1\Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

同一律: $A\vee 0\Leftrightarrow A$, $A\wedge 1\Leftrightarrow A$

排中律: $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

假言易位: $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意:

A,B,C代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

等值公式的证明方法

- 方法1：用列真值表。（不再举例）
- 方法2：用公式的等值变换。(用置换定律)

等值演算与置换规则

等值演算:

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则（置换定律）：若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$ （$\Phi(B)$是一个命题公式，B是$\Phi(B)$中的一部分且也是合式公式，如果$A \Leftrightarrow B$，用A代替$\Phi(B)$中的B得到公式$\Phi(A)$，则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$。）

等值演算的基础:

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

性质

1)有自反性：任何命题公式A，有A⇔A。

2)有对称性：若A⇔B，则B⇔A

3)有传递性：若A⇔B且B⇔C，则A⇔C

应用举例——证明两个公式等值

例1 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ （德·摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

说明:也可以从右边开始演算（请做一遍）

因为每一步都用置换规则，故可不写出

熟练后，基本等值式也可以不写出

应用举例——证明两个公式不等值

- 例2 证明: $p \to (q \to r) \not\Leftrightarrow (p \to q) \to r$
- 用等值演算不能直接证明两个公式不等值,证明两个公式不等值的基本思想是找到一个赋值使一个成真,另一个成假.
- 方法一 真值表法（自己证）
- 方法二 观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的成真赋值，是右边的成假赋值.
- 方法三 用等值演算先化简两个公式，再观察.

应用举例——判断公式类型

例3 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

解 $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德·摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

由最后一步可知，该式为矛盾式.

例3 (续)

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

解 $\quad (p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

由最后一步可知，该式为重言式.

问：最后一步为什么等值于1?

例3 (续)

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解　$((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$　　（分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$　　（排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$　　（同一律）

这不是矛盾式，也不是重言式，而是非重言式的可满足式. 如101是它的成真赋值, 000是它的成假赋值。

总结：A为矛盾式当且仅当$A\Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A\Leftrightarrow 1$

说明：演算步骤不惟一, 应尽量使演算短些

例4

求证吸收律 $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

证明 $P \wedge (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$ (同一律)

$\Leftrightarrow P \vee (F \wedge Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow P \vee F$ (零律)

$\Leftrightarrow P$ (同一律)

例5

求证 $(\neg P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$

证明 $(\neg P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(P\wedge Q)$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow(\neg\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$ (德摩根定律)

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$ (双重否定律)

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg Q\vee Q)$ (分配律)

$\Leftrightarrow P\wedge T$ (互补律)

$\Leftrightarrow P$ (同一律)

例6

化简$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$

解 原公式

$\Leftrightarrow\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$ (蕴涵等值式，结合律)

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$ (双重否定律，幂等律)

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$ (交换律)

$\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$ (结合律)

$\Leftrightarrow Q\vee\neg P$ (吸收律)

基本等值式

双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律: $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律: $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律: $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律: $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律: $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律: $A \vee 0 \Leftrightarrow A$, $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

排中律: $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

假言易位: $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意:

A,B,C代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

等价公式的对偶性

- 从前面列出的等值公式看出，有很多是成对出现的。这就是等值公式的**对偶性**。
- **对偶式**：在一个只含有联结词 ¬ 、 ∨、 ∧的公式A中，将∨换成∧，∧换成∨， T换成F，F换成T，其余部分不变，得到另一个公式A*，称A与A*互为对偶式。

例如::

A	A*
P	P
$\neg Q \wedge R$	$\neg Q \vee R$
$(P \vee T) \wedge \neg Q$	$(P \wedge F) \vee \neg Q$

用对偶式求公式的否定

- 定理1-5.1 令$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是一个只含有联结词$\neg$、$\vee$、$\wedge$的命题公式，则$\neg A(P_1,P_2,\ldots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$

  此定理可以反复地使用德-摩根定律得以证明。下面我们验证一下。

- 令 $A(P,Q) \Leftrightarrow P \vee Q$　　$A^*(P,Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

  $\neg A(P,Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$

  $A^*(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

可见　　$\neg A(P,Q) \Leftrightarrow A^*(\neg P,\neg Q)$

推论:$A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

例如，利用上述定理求$\neg(((P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q))\vee R)$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q))\wedge\neg R$

对偶原理(定理1-5.2)

- 令$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)$、$B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$是只含有联结词$\neg$、$\vee$、$\wedge$的命题公式，则如果$A(P_1,P_2,\ldots,P_n)\Leftrightarrow B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ 则

$$A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)\Leftrightarrow B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$$

- 证明：因为 $A(P_1,P_2,\ldots,P_n)\Leftrightarrow B(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

故 $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)\Leftrightarrow B(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)$

而 $A(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)\Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

$B(\neg P_1,\neg P_2,\ldots,\neg P_n)\Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

故 $\neg A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)\Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

所以 $A^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)\Leftrightarrow B^*(P_1,P_2,\ldots,P_n)$

下面我们验证一下对偶原理：

- $\underbrace{P \vee (Q \wedge R)}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}_{B}$
- $\underbrace{P \wedge (Q \vee R)}_{A^*} \Leftrightarrow \underbrace{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}_{B^*}$
- $\underbrace{P \vee T}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{T}_{B}$
- $\underbrace{P \wedge F}_{A^*} \Leftrightarrow \underbrace{F}_{B^*}$

作业

- P33
- 1.8(1)(3)
- 1.9(1)(3)

问题？