# 第二次书面作业答案

1. 若 f(221,396)=18, f(221,397)=45, f(222,396)=52, f(222,397)=36,试分别用最邻近插值法和双线性插值法，分别计算 f(221.23,396.71)的值.

解：（1）已知点（221.23，396.71）的周围像素的灰度值，用最邻近插值法，求点（221.3，396.7）的灰度值，

$\because$ 221.23-221<222-221.23 且 396.71-396>397-396.71 ,即所求点离点(221.397)最近

$\therefore$ f(221.23，396.71)=f(221，397)=45

（2）双线性插值法,设 p,q 为所求点至点（221，396）的 x,y 坐标增量,如图所示：

$$f(221+p,396)=f(221,396)+ p * ( f(222,396)-f(221,396) )$$

$$=18+34*p$$

$$f(221+p,397)=f(221,397)+ p * ( f(222,397)-f(221,397) )$$

$$=45- 9*p$$

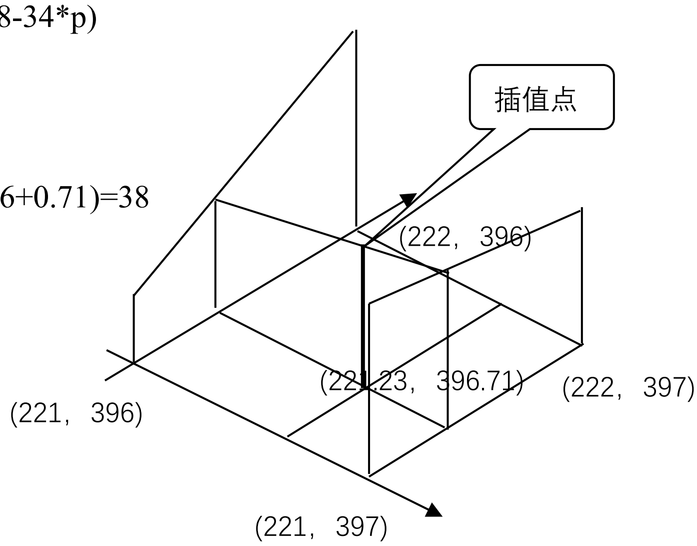
$$f(221+p, 396+q )=f(221+p, 396) + q * ( f(221+p, 397)-f(221+p, 396) )$$

$$=18+34*p + q*(45- 9*p-18-34*p)$$

$$=18+34p+27q-43pq$$

这里，p=0.23, q=0.71

$\therefore$ f(221.23, 396.71)=f(221+0.23, 396+0.71)=38




2. 将如下 3X3 的 256 级灰度图放大到 4X4 大小

| | | |
|---|---|---|
| 234 | 38 | 22 |
| 67 | 44 | 12 |
| 89 | 65 | 63 |

计算分别用最近邻法和双线性插值放大的结果。

解：用最近邻法放大的结果为

| | | | |
|---|---|---|---|
| 234 | 38 | 22 | 22 |
| 67 | 44 | 12 | 12 |
| 89 | 65 | 63 | 63 |
| 89 | 65 | 63 | 63 |

双线性插值放大自行补充（略）。

3. 将如下图像逆时针旋转 45°,写出变换过程，并编程实现。

$$F=\begin{bmatrix} 59 & 60 & 58 & 57 \\ 61 & 59 & 59 & 57 \\ 62 & 59 & 60 & 58 \\ 59 & 61 & 60 & 58 \end{bmatrix}$$

解：(略)，参考 ppt 例子

4. 计算 2*2 的数字图像{f(0,0)=2，f(0,1)=3，f(1,0)=6，f(1,1)=2}的幅度谱。

解：二维付里叶变换公式为：$F(\mu,\nu)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{\mu x}{M}+\frac{\nu y}{N}\right)}$

$$F(0,0)=\frac{1}{4}[2+3+6+2]=\frac{13}{4}$$

$$F(0,1)=\frac{1}{4}\left[2+3e^{-j\pi}+6+2e^{-j\pi}\right]=\frac{1}{4}[2-3+6-2]=\frac{3}{4}$$

$$F(1,0)=\frac{1}{4}\left[2+3+6e^{-j\pi}+2e^{-j\pi}\right]=\frac{1}{4}[5-8]=-\frac{3}{4}$$

$$F(1,1)=\frac{1}{4}\left[2+3e^{-j\pi}+6e^{-j\pi}+2e^{-j2\pi}\right]=\frac{1}{4}[2-3-6+2]=-\frac{5}{4}$$

因此：幅度谱为：

$$|F(0,0)|=\frac{13}{4},|F(0,1)|=\frac{3}{4},|F(1,0)|=\frac{3}{4},|F(1,1)|=\frac{5}{4}$$

5. 已知一幅图像为

$$f=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

求其二维傅里叶变换，并绘制其频谱图。
解：根据二维离散傅立叶变换的公式，有：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{3}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}=\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{3}e^{-j2\pi ux/M}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}=\mathrm{P}f\mathrm{Q}$$

$P=e^{-j2\pi ux/M}$ $\quad Q=e^{-j2\pi vy/N}$ , $\quad x,y,u,v=0,1,2,3 \quad M,N=4$ ,

令$W = e^{-j2\pi/N}$

$$P=Q=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}$$

利用 W 的周期性，得：$W^2= -W^0$, $W^4= W^0$, $W^6= -W^0$,
和 W 的对称性，得：$W^3= -W^1$, $W^2= -W^0$,
则有：

$$P=Q=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$F(u,v)=\mathrm{P}f\mathrm{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

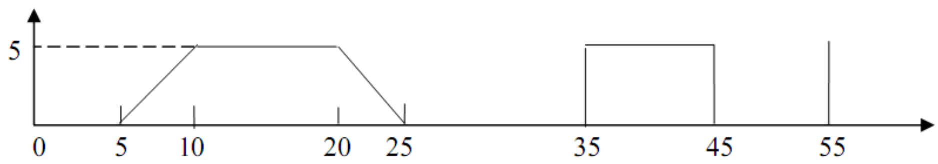
$$F(u,v)=\begin{bmatrix} 36 & -4j & -36 & 4j \\ -8+8j & 0 & 8-8j & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \\ -8-8j & 0 & 8+8j & 0 \end{bmatrix}$$

**6**. 拉普拉斯算子利用二阶导数$\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$来估计一个点的空间变化程度，

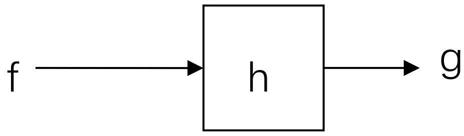
广泛使用的基于拉普拉斯的增强方法是称为高频增强滤波：$g = f - \nabla^2 f$。

（a）拉普拉斯$\nabla^2 f$通常利用空域模板[1　-2　1]来实现。原点对应模板中心。推导相应的计算 g 的空域模板。

(b)假设输入信号 f(x)有如下的形状，利用(a)中推导的模板计算高频增强滤波处理的输出。描出输出值图形并标出所有重要位置处的数值。




(c) 我们可以建模高频增强滤波处理为如下线性系统

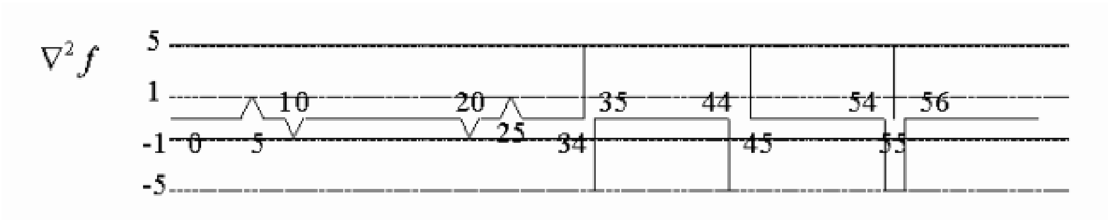



推导滤波器 h 的离散傅里叶变换，画出谱曲线并解释实际上这个傅里叶变换是频域中的拉普拉斯算子谱的好逼近。

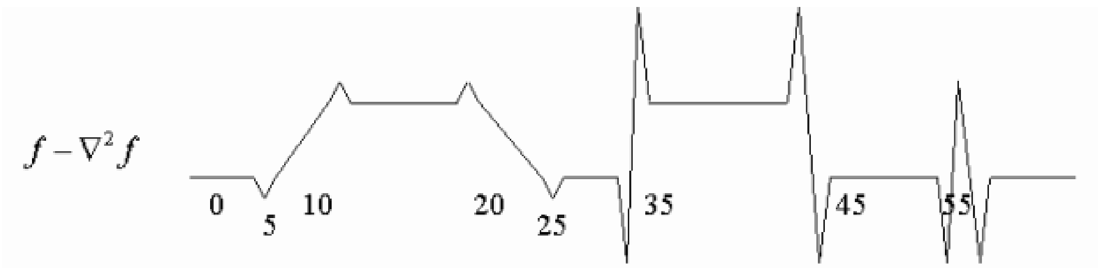
解：（a）$g = f - \nabla^2 f$， $\nabla^2$空域模板为[1,-2,1]

则$g$的空域模板为[−1, 3, −1]

（b）$\nabla^2 f$的结果示意图




则增强滤波$g = f - \nabla^2 f$ 的结果为




（c）对$g = f - \nabla^2 f$进行离散傅里叶变换：

$$\Im(f - \nabla^2 f)$$

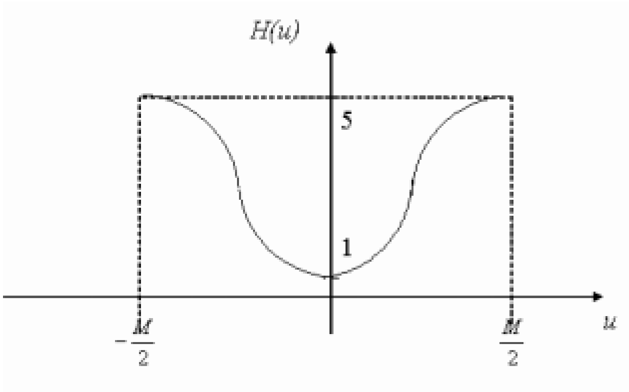
$$= \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}(f(x) - (f(x-1) - 2f(x) + f(x+1)))e^{-j\frac{2\pi ux}{M}}$$

$$= F(u)(e^{-j\frac{2\pi u}{M}} + 3 + e^{j\frac{2\pi u}{M}})$$

$$= F(u)(3 - 2\cos\frac{2\pi u}{M})$$

所以

$$H(u) = 3 - 2\cos\frac{2\pi u}{M}$$




可知为高通滤波器。

**7.** 对于如下所示的空域增强公式:

g(m,n)=f(m,n)-f(m+1,n)+f(m,n)-f(m,n+1)

1）写出该空域滤波模板 h(m,n)；

2）推导出其相应的频域等价滤波器 H(u,v)。

解：1）

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | -1 |
| 0 | -1 | |

2）对题设表达式进行傅立叶变换得

$$G(u,v) = F(u,v) - F(u,v)e^{j2\pi u/M} + F(u,v) - F(u,v)e^{j2\pi v/N}$$

$$= \left[1 - e^{j2\pi u/M}\right]F(u,v) + \left[1 - e^{j2\pi v/N}\right]F(u,v)$$

$$= [(1 - e^{j2\pi u/M}) + (1 - e^{j2\pi v/N})]F(u,v)$$

$$= H(u,v)F(u,v)$$

所以，频域的等价滤波器为

$$H(u,v) = (1 - e^{j2\pi u/M}) + (1 - e^{j2\pi v/N})$$