离散数学

集合论

集合论部分

•第3章集合的基本概念和运算

•第4章 二元关系和函数

第3章集合的基本概念和运算

- 3.1 集合的基本概念
- 3.2 集合的基本运算
- 3.3 集合中元素的计数

3.1 集合的基本概念

- •集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合

- 集合是个最基本的概念。
- 集合: 是由确定的对象(客体)构成的无序整体。用大写的英文字母表示。
- 这里所谓"确定"是指:论域内任何客体,要么属于这个集合,要么不属于这个集合,是唯一确定的。
- 集合的表示
 - 列元素法 $A=\{a,b,c,d\}$
 - 谓词表示法 $B=\{x/P(x)\}$, B 由使得 P(x) 为真的 x 构成
- 常用数集
 - N, Z, Q, R, C 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合,注意 0 是自然数.

集合与元素

- 元素:集合中的对象,称之为元素。
- 元素与集合的关系: 隶属关系
- •属于∈,不属于 ∉
- 实例

$$A = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \land x^2 - 1 = 0 \}, A = \{-1,1\}$$

 $1 \in A, 2 \notin A$

•注意:对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合), $x \in A$ 和 $x \notin A$ 两者成立其一,且仅成立其一

说明

- (1)集合中的元素间次序是无关紧要的,但是必须是可以区分的,即是不同的。例如 A={a,b,c,a}, B={c,b,a}, 则A与B是一样的。
- (2)对集合中的元素无任何限制,例如令

A={人, 石头, 1, B}, B={Φ,{Φ}}

(3)常用的几个集合符号的约定:

自然数集合N= {1,2,3,.....}

整数集合I,实数集合R,有理数集合Q

(4)集合中的元素也可以是集合,下面的集合的含义不同:

如 a: 张书记

{a}: 党支部(只有一个书记)

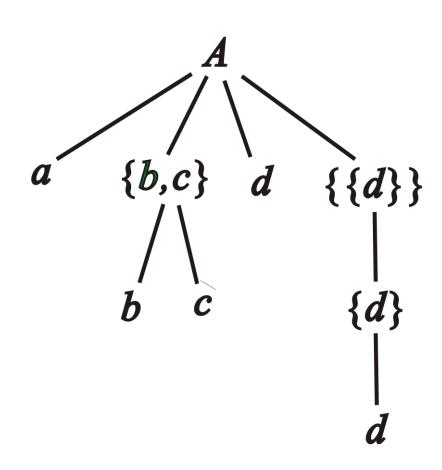
{{a}}: 分党委(只有一个支部)

{{{a}}}: 党委 (只有一个分党委)

{{{{a}}}}: 市党委(只有一个党委)

隶属关系的层次结构

```
例 3.1
A = \{ a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \} 
{b,c}∈A
b \notin A
\{\{d\}\}\in A
\{d\} \not\in A
d \in A
```



集合间的关系

一. 被包含关系(子集) 二

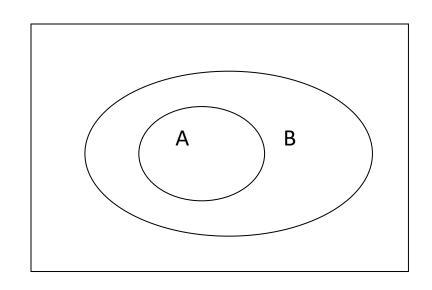
定义: A、B是集合,如果A中元素都是B中元素,则称B包含A,A包含于B,也称A是B的子集。记作A⊂B。

文氏图表示如右图。

例如,N是自然数集合, R是实数集合,则N⊂R

谓词定义:

 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$



集合间的关系

二. 相等关系

- 定义: A、B是集合,如果它们的元素完全相同,则称A与B相等。 记作A=B。
- 定理: A=B,当且仅当A⊆B且 B⊆A。
- 证明:充分性,已知A⊆B且 B⊆A,假设A≠B,则至少有一个元素a,使得a∈A而a∉B;或者a∈B而a∉A。如果a∈A而 a∉B,则与A⊆B
 矛盾。如果a∈B而a∉A,则与 B⊆A矛盾。所以A=B。
- •必要性显然成立,因为如果A=B,则必有A⊆B且 B⊆A。

谓词定义:

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \land \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$\Leftrightarrow \forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \land (x \in B \rightarrow x \in A))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

集合间的关系

- •三. 真被包含关系(真子集) ⊂
- 定义: A、B是集合,如果A⊆B且A≠B,则称B真包含A,A真包含于B,也称A是B的真子集。记作A⊂B。
- 谓词定义: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$ $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \land \neg \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \land (\neg \forall x(x \in A \to x \in B) \lor \neg \forall x(x \in B \to x \in A))$ $\Leftrightarrow (\forall x(x \in A \to x \in B) \land \neg \forall x(x \in A \to x \in B)) \lor (\forall x(x \in A \to x \in B) \land \neg \forall x(x \in B \to x \in A))$ $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \land \exists x(x \in B \land x \notin A)$

特殊集合

- 全集 E
- 定义:包含所讨论的所有集合的集合,称之为全集,记作E。实际上,就是论域。
- 由于讨论的问题不同,全集也不同。所以全集不唯一。例如,
 - 若讨论实数,可以把实数集看成全集。
 - 若讨论人,可以把人类看成全集。
- •由于论域内任何客体x都属于E,所以x∈E为永真式。所以需要用永真式定义E。
 - $E=\{x\mid P(x)\vee \neg P(x)\}$
- 性质:对于任何集合A,都有A⊂E。

- 空集 Φ
- · 定义: 没有元素的集合, 称之为空集, 记作Φ。
- 因为论域内如何客体 $x \in \Phi$ 是矛盾式,所以要用一个矛盾式定义 Φ 。 $\Phi = \{x \mid P(x) \land \neg P(x)\}$
- 性质:
- 1.对于如何集合A,都有Φ⊆A。
 因为∀x(x∈Φ→x∈A)为永真式,所以Φ⊆A。
- 2.空集是唯一的。
- 证明 假设有两个空集 Φ_1 、 Φ_2 ,则因为是 Φ_1 空集,则由性质1得 Φ_1 \subseteq Φ_2 。因为是 Φ_2 空集,则由性质1得 Φ_2 \subseteq Φ_1 。所以 Φ_1 = Φ_2 。

集合的幂集

• 定义: A是集合,由A的所有子集构成的集合,称之为A的幂集。记作P(A)或2^A。

$$P(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$$

例如,A P(A)
 Φ {Φ}
 {a} {Φ,{a}}
 {a,b} {Φ,{a},{b},{a,b}}

• A = {a,b,c} \mathbb{M} P(A)= { Φ ,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}} |P(A)| = $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$

• 性质:

给定有限集合A,如果|A|=n,则|P(A)|=2ⁿ。

证明:因为A有n个元素,故P(A)中元素个数为: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$

而

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^n y^n$$

 $\Rightarrow x = y = 1$ 时得:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

所以:

$$|P(A)| = 2^n$$

作业

- P74
- 3.9
- 3.10/ (2) (4)

问题?

