

离散数学

图论

6.1 二部图

第6章 特殊的图

6.1 二部图

6.2 欧拉图

6.3 哈密顿图

6.4 平面图

6.1 二部图

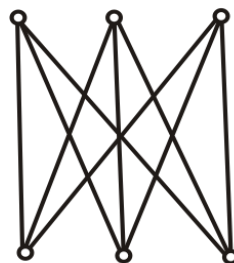
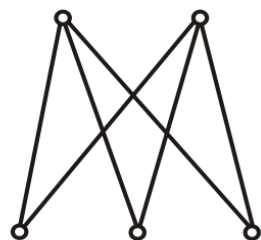
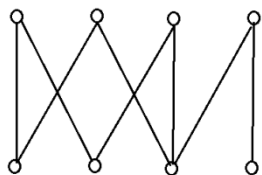
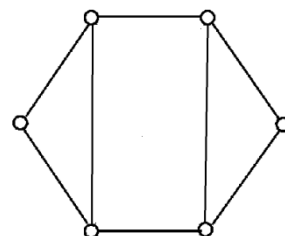
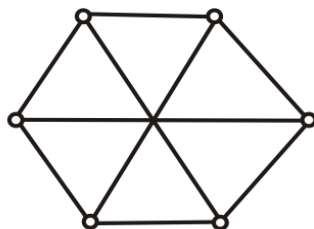
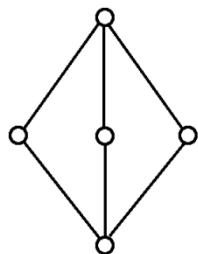
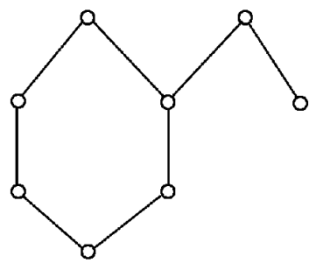
- 二部图
- 完全二部图
- 匹配：极大匹配,最大匹配,完美匹配,完备匹配
- Hall定理

二部图

- **定义** 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, 若能将 V 划分成 V_1 和 V_2 , ($V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\emptyset$), 使得 G 中的每条边的两个端点都一个属于 V_1 , 另一个属于 V_2 , 则称 G 为**二部图**, 记为 $\langle V_1,V_2,E\rangle$, 称 V_1 和 V_2 为**互补顶点子集**.
- 又若 G 是简单图, 且 V_1 中每个顶点都与 V_2 中每个顶点相邻, 则称 G 为**完全二部图**, 记为 $K_{r,s}$, 其中 $r=|V_1|$, $s=|V_2|$.
- 注意: n 阶零图为二部图.

二部图(续)

- 例 下述各图是否是二部图?

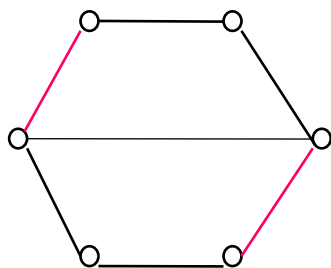


不是

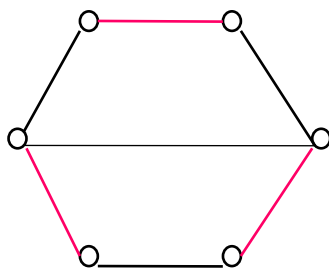
- **定理** 无向图 $G=<V,E>$ 是二部图当且仅当 G 中无奇圈

匹配

- 设 $G=\langle V,E \rangle$,
- **匹配(边独立集)**: 任2条边均不相邻的边子集
- **极大匹配**: 添加任一条边后都不再是匹配的匹配
- **最大匹配**: 边数最多的匹配
- **匹配数**: 最大匹配中的边数, 记为 β_1
- 例



极大匹配



最大匹配 $\beta_1=3$

匹配 (续)

设 M 为 G 中一个匹配

v_i 与 v_j 被 M 匹配: $(v_i, v_j) \in M$

v 为 M 饱和点: M 中有边与 v 关联

v 为 M 非饱和点: M 中没有边与 v 关联

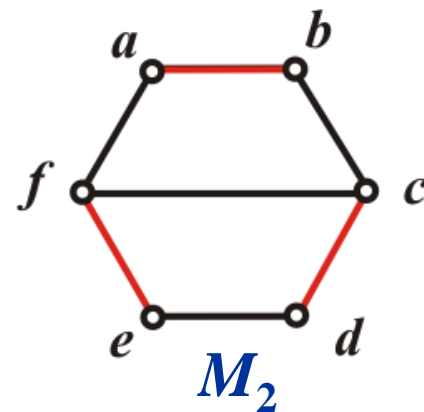
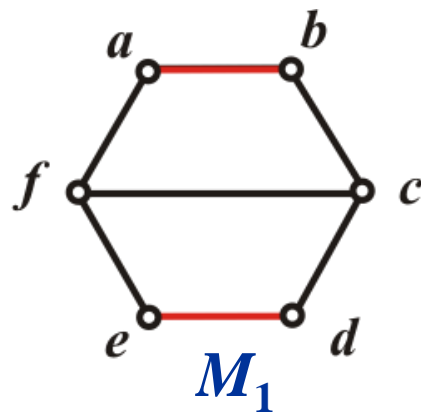
M 为完美匹配: G 的每个顶点都是 M 饱和点

例 关于 M_1 , a, b, e, d 是饱和点

f, c 是非饱和点

M_1 不是完美匹配

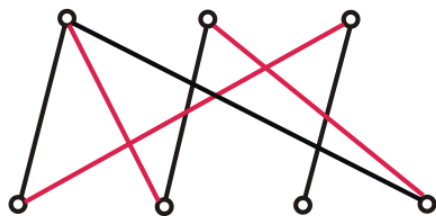
M_2 是完美匹配



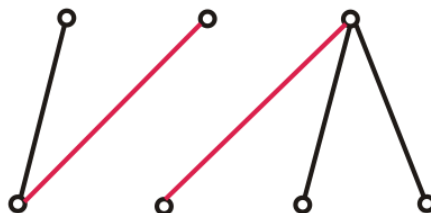
二部图中的匹配

- **定义** 设 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 为二部图, $|V_1| \leq |V_2|$, M 是 G 中最大匹配, 若 V_1 中顶点全是 M 饱和点, 则称 M 为 G 中 V_1 到 V_2 的**完备匹配**. 当 $|V_1|=|V_2|$ 时, 完备匹配变成完美匹配.

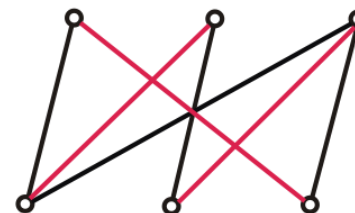
- **例**



完备, 不完美



不完备



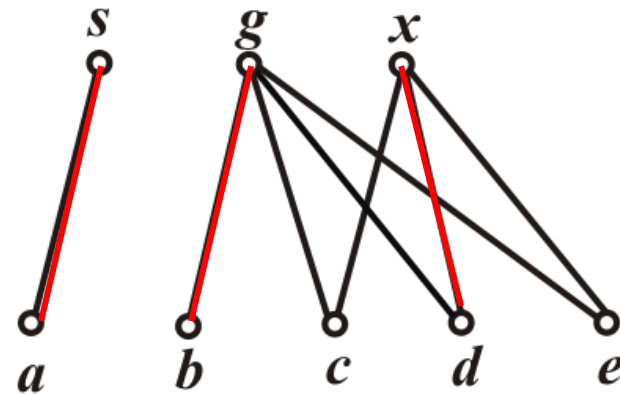
完美

Hall定理

- **定理(Hall定理)** 设二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 中, $|V_1| \leq |V_2|$. G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 k 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻($k=1, 2, \dots, |V_1|$).
——相异性条件
- 由Hall定理, 上一页第2个图没有完备匹配.
- **定理** 设二部图 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 中, 如果存在 $t \geq 1$, 使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边, 而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边, 则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配。
—— t 条件
- **证** V_1 中任意 k 个顶点至少关联 kt 条边, 这 kt 条边至少关联 V_2 中的 k 个顶点, 即 V_1 中任意 k 个顶点至少邻接 V_2 中的 k 个顶点. 由Hall定理, G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

一个应用实例

- 例 某课题组要从 a, b, c, d, e 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知 a 只想去上海, b 只想去广州, c, d, e 都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下, 能否找出合适的派遣方案?
- 解 令 $G=<V_1, V_2, E>$, 其中 $V_1=\{s, g, x\}$, $V_2=\{a, b, c, d, e\}$,
 $E=\{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2, v \text{ 想去 } u\}$,
其中 s, g, x 分别表示上海、广州和香港.
- G 满足相异性条件, 红边是一个完备匹配, 对应的派遣方案:
a—上海, b—广州, d—香港



作业

- P154
- 6.1
- 6.2
- 6.3
- 6.4
- 6.6

问题？

