离散数学

集合论

4.3 关系的性质

4.3 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

自反性与反自反性

- 定义　设R为A上的关系,
  (1) 若$\forall x(x \in A \to \langle x,x\rangle \in R) \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to xRx)$, 则称$R$在$A$上是自反的.
  (2) 若$\forall x(x \in A \to \langle x,x\rangle \notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

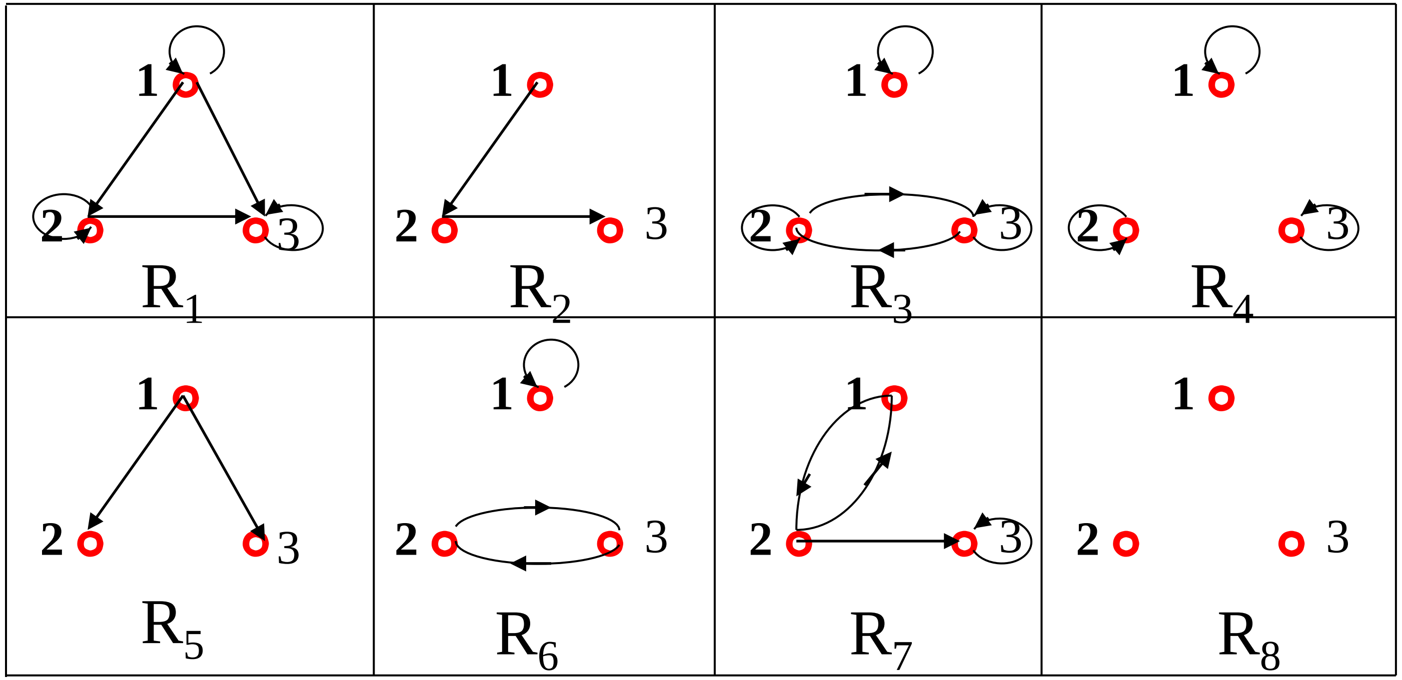
- 实例:
- 自反关系:
  - 在实数集合中,“≤”是自反关系，因为，对任意实数x，有$x \le x$
  - A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A，整除关系D_A
- 反自反关系:
  - 实数集上的小于关系，幂集上的真包含关系

实例

- 例1　$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中
  $R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$
  $R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$
  $R_3=\{<1,3>\}$
- R_2自反,
- R_3反自反,
- R_1既不是自反也不是反自反的
- 注意：一个不是自反的关系，不一定就是反自反的，如前边R1非自反,也非反自反。

- 从关系有向图看**自反性**：每个结点都有环；从关系矩阵看**自反性**：主对角线都为1
- 从关系有向图看**反自反性**：每个结点都无环；从关系矩阵看**反自反性**：主对角线都为0。

- 令A={1,2,3}，给定A上八个关系如下：



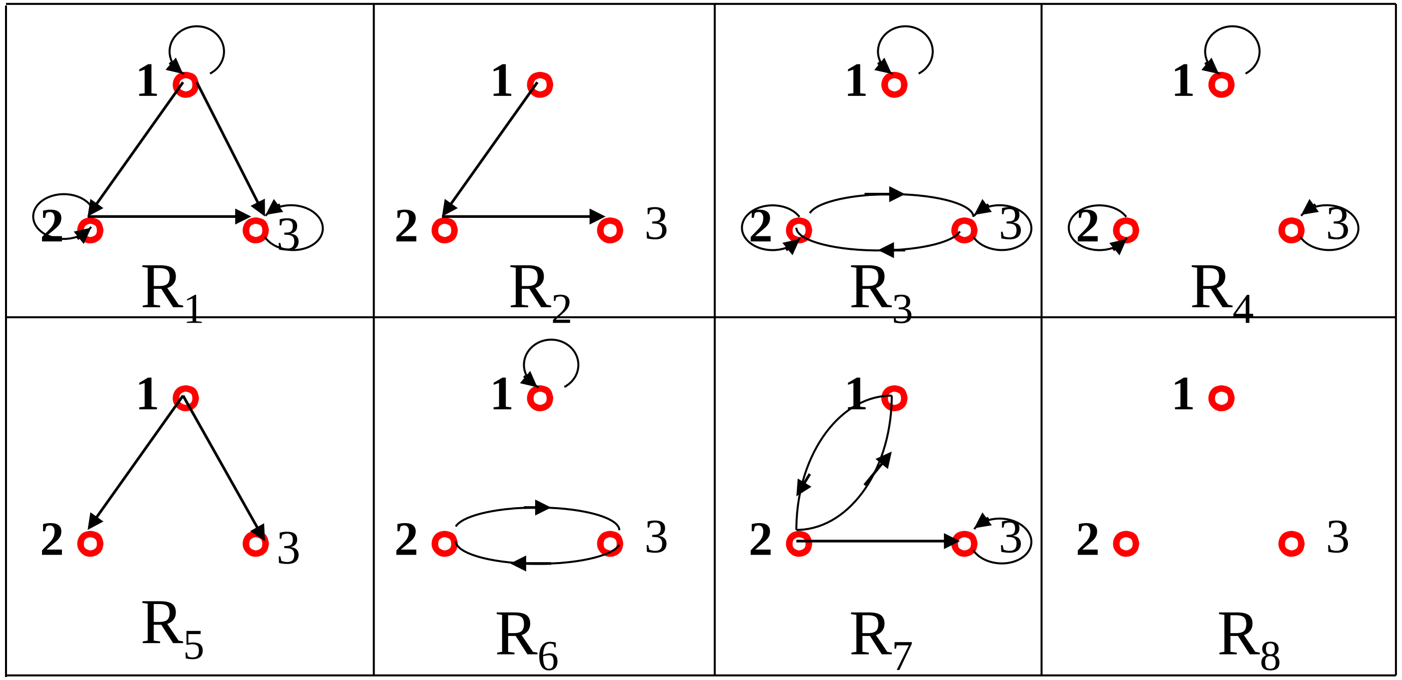
八个关系中R_1、R_3、R_4是自反的。

R_2、R_5、R_8、是反自反的。

对称性与反对称性

- 定义 设R为A上的关系,
  (1) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x,y> \in R \rightarrow <y,x> \in R)$，或$\forall x \forall y((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \rightarrow yRx)$则称$R$为$A$上对称的关系.
  (2) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,x> \in R \rightarrow x=y)$，则称$R$为$A$上的反对称关系.
- 实例:
- 对称关系:
  - 邻居关系，朋友关系，A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$
- 反对称关系:
  - 恒等关系I_A，空关系是A上的反对称关系
- 对称与反对称不是完全对立的，有些关系它既是对称也是反对称的，如空关系和恒等关系。

- 从关系有向图看**对称性**:在两个不同的结点之间，若有边的话，则有方向相反的两条边；从关系矩阵看**对称性**：以主对角线为对称的矩阵。
- 由R的关系图看**反对称性**：两个不同的结点之间最多有一条边；从关系矩阵看**反对称性**：以主对角线为对称的两个元素中最多有一个1。



R3、R4、 R6 、 R8均是对称关系

R1、R2、R4、R5、R8均是反对称关系

R4、R8既是对称也是反对称的

实例

例2　设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系,

其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，　$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，　$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

- R_1 对称、反对称.
- R_2 对称，不反对称.
- R_3 反对称，不对称.
- R_4 不对称、也不反对称.

传递性

- 定义　设R为A上的关系, 若 $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,z\rangle\in R\rightarrow \langle x,z\rangle\in R)$, 或 $\forall x\forall y\forall z((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\rightarrow xRz)$，则称$R$是$A$上的传递关系.

- 实例:
  - A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$
  - 小于等于关系, 小于关系，整除关系，包含关系，真包含关系

实例

- 例3 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中
  $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$
  $R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
  $R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$

- R_1 和 R_3 是A上的传递关系
- R_2不是A上的传递关系

- 从关系关系图和关系矩阵中不易看清是否有传递性。有时，必须直接根据传递的定义来检查。
- 检查时要特别注意使得传递定义表达式的前件为F的时候此表达式为T，即是传递的。即若<x,y>∈R与<y,z>∈R有一个是F时(即定义的前件为假)，R是传递的。

- 例如A={1,2}，A中关系R{<1,2>}是传递的。通过带量词的公式在论域展开式说明R在A上传递。

$1 \circ\!\longrightarrow\!\circ\, 2$

$\forall x\forall y\forall z((x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz)\to xRz)$

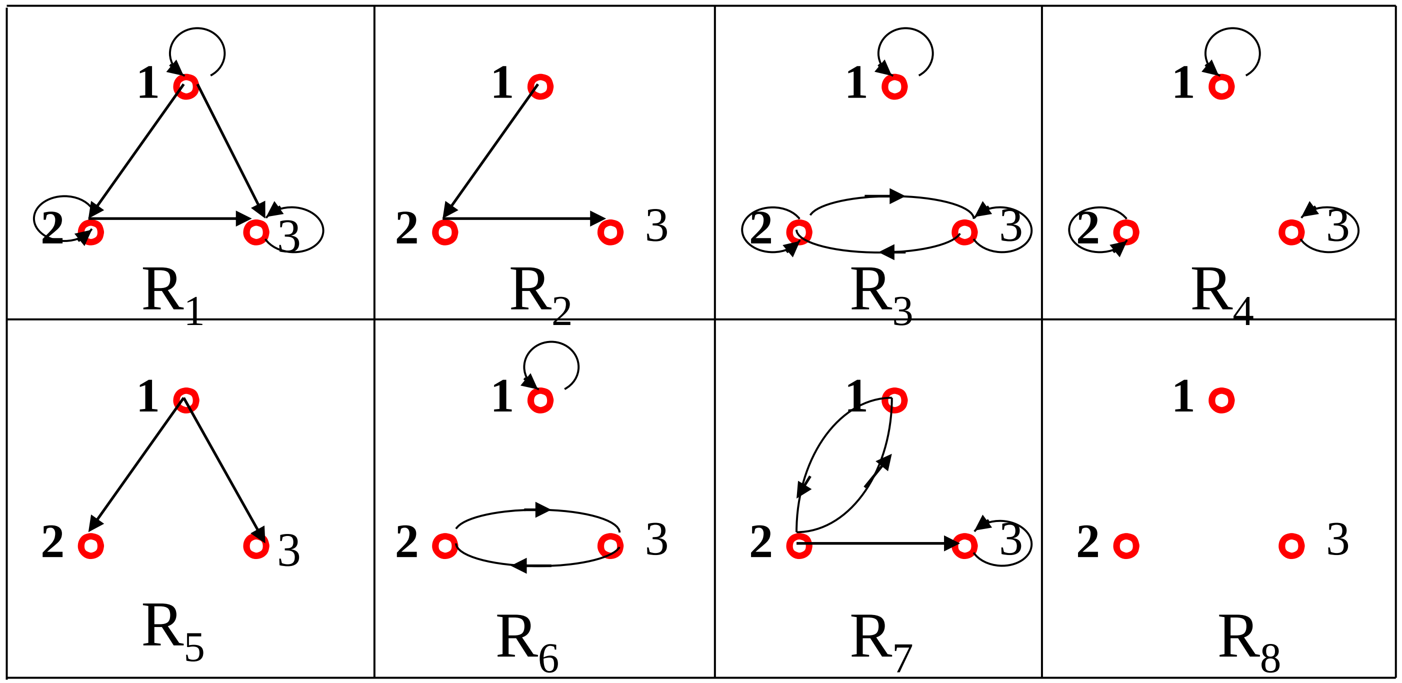
$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall z((xRy\wedge yRz)\to xRz)$ （为了简单做些删改）

$\Leftrightarrow \forall y\forall z((1Ry\wedge yRz)\to 1Rz)\wedge\forall y\forall z((2Ry\wedge yRz)\to 2Rz)$

$\Leftrightarrow (\forall z((1R1\wedge 1Rz)\to 1Rz)\wedge\forall z((1R2\wedge 2Rz)\to 1Rz)\wedge(\forall z((2R1\wedge 1Rz)\to 2Rz)$
$\wedge(\forall z((2R2\wedge 2Rz)\to 2Rz))$

$\Leftrightarrow (((1R1\wedge 1R1)\to 1R1)\wedge((1R1\wedge 1R2)\to 1R2))\wedge$
$(((1R2\wedge 2R1)\to 1R1)\wedge((1R2\wedge 2R2)\to 1R2))\wedge$
$(((2R1\wedge 1R1)\to 2R1)\wedge((2R1\wedge 1R2)\to 2R2))\wedge$
$(((2R2\wedge 2R1)\to 2R1))\wedge((2R2\wedge 2R2)\to 2R2))$

$\Leftrightarrow (((F\wedge F)\to F)\wedge((F\wedge T)\to T))\wedge(((T\wedge F)\to F)\wedge((T\wedge F)\to T))\wedge$
$(((F\wedge F)\to F)\wedge((F\wedge T)\to F))\wedge(((F\wedge F)\to F))\wedge((F\wedge F)\to F))\Leftrightarrow T$



R1、R3、R4、R5、R8均是传递的关系

关系性质的充要条件

- 设R为A上的关系, 则

(1) R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

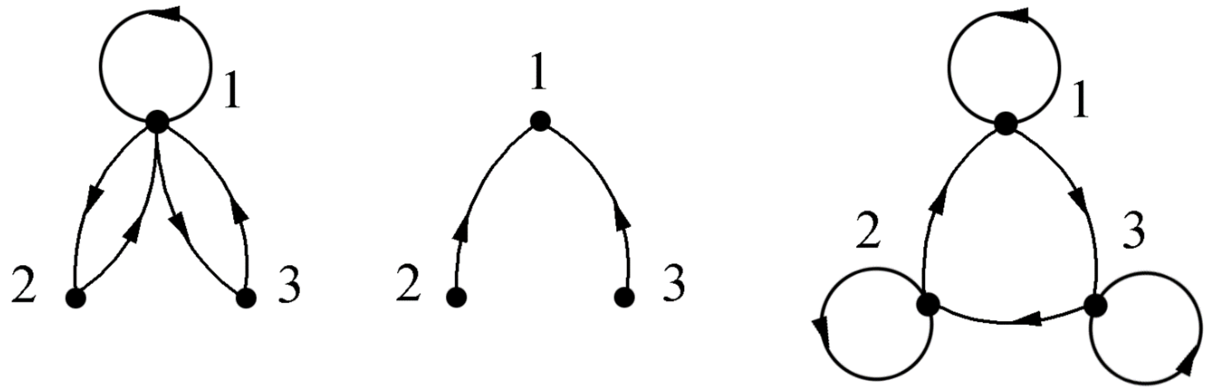
(5) R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

关系性质判别

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	若$r_{ij}=1$,且$r_{jk}=1$,则$r_{ik}=1$
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边,是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边,最多有一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i连通到x_k, 则从x_i到x_k有边

实例

例8 判断下图中关系的性质, 并说明理由.



(a) (b) (c)

(a)不自反也不反自反；对称, 不反对称；不传递.

(b)反自反，不是自反的；反对称，不是对称的；是传递的.

(c)自反，不反自反；反对称，不是对称；不传递.

自反性证明

证明模式　证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$

前提　　　　推理过程　　　　结论

- 例4　证明若 $I_A \subseteq R$，则 R在A上自反.
- 证　　任取x,

$$x \in A \Rightarrow \langle x,x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$$

因此 R 在 A 上是自反的.

对称性证明

证明模式 证明R在A上对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <y,x>\in R$

前提 推理过程 结论

- 例5 证明若 $R=R^{-1}$, 则R在A上对称.
- 证 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$$

因此 R 在 A 上是对称的

反对称性证明

证明模式 证明R在A上反对称

任取$<x, y>$

$<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$

前提 推理过程 结论

- 例6 证明若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$，则$R$在$A$上反对称.
- 证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in R \wedge <y, x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A \Rightarrow x=y$

因此 R 在 A 上是反对称的.

传递性证明

证明模式 证明R在A上传递

任取$<x, y>$， $<y, z>$

$<x,y>\in R \wedge <y, z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$

前提　　推理过程　　结论

- 例7 证明若 $R\circ R\subseteq R$，则R在A上传递.
- 证 任取$<x,y>$， $<y, z>$

$$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in R\circ R \Rightarrow <x,z>\in R$$

因此 R 在 A 上是传递的.

- 练习1:令I是整数集合，I上关系R定义为：$R=\{<x,y> \mid x-y$可被3整除$\}$，求证R是自反、对称和传递的。
- 证明：
- (1)证自反性：任取$x\in I$, (要证出$<x,x>\in R$)

  因为 $x-x=0$，0可被3整除，所以有$<x,x>\in R$，故R自反。
- (2)证对称性：任取$x,y\in I$,设$<x,y>\in R$, (要证出 $<y,x>\in R$)

  由R定义得 $x-y$可被3整除，即$x-y=3n(n\in I)$，$y-x=-(x-y)=-3n=3(-n)$

  因为$-n\in I$，$\therefore <y,x>\in R$，所以R对称。
- (3)证传递性：任取x，y，$z\in I$，设xRy，yRz，(要证出xRz)

  由R定义得 $x-y=3m$，$y-z=3n$ (m，$n\in I$)，$x-z= (x-y)+(y-z)=3m+3n=3(m+n)$

  因为$m+n\in I$，$\therefore$ xRz，所以R传递。

- **练习2：** 设R是集合A上的一个自反关系，求证：R是对称和传递的，当且仅当<a,b>和<a,c>在R中,则有<b,c>也在R中。
- 证明：
- 必要性: 已知R是对称和传递的。(要证出 <b,c>∈R)

  设<a,b>∈R 且<a,c>∈R，

  因为R对称，所以<b,a>∈R，又已知<a,c>∈R，由传递性得<b,c>∈R。

  所以有如果<a,b>和<a,c>在R中,则有<b,c>也在R中。
- 充分性: 已知任意 a,b,c∈A，如<a,b>和<a,c>在R中，则有<b,c>也在R中。(要证出 R是对称和传递的)
- ***先证R对称***：任取 a,b∈A 设<a,b>∈R (要证出<b,a>∈R)

  因R是自反的,所以<a,a>∈R

  由<a,b>∈R且<a,a>∈R，根据已知条件得<b,a>∈R，所以R是对称的。

- ***再证R传递*：** 任取 $a,b,c \in A$ 设$<a,b> \in R$，$<b,c> \in R$。(要证出$<a,c> \in R$)

  由R是对称的,得$<b,a> \in R$ ，

  由$<b,a> \in R$且$<b,c> \in R$，根据已知条件得$<a,c> \in R$

  所以R是传递的。

运算与性质的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

作业

- P113/4.4

问题？