

离散数学

集合论

4.1 集合的笛卡儿积与二元关系

第4章 二元关系与函数

- 4.1 集合的笛卡儿积与二元关系
- 4.2 关系的运算
- 4.3 关系的性质
- 4.4 关系的闭包
- 4.5 等价关系和偏序关系
- 4.6 函数的定义和性质
- 4.7 函数的复合和反函数

4.1 集合的笛卡儿积和二元关系

- 有序对
- 笛卡儿积及其性质
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示

有序对

- 定义 由两个客体 x 和 y ，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作 $\langle x, y \rangle$ ，称 x 、 y 分别为有序对 $\langle x, y \rangle$ 的第一，第二元素
- 实例：点的直角坐标 $(3, -4)$
- 有序对性质
 - 有序性 $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ （当 $x \neq y$ 时）
 - $\langle x, y \rangle$ 与 $\langle u, v \rangle$ 相等的充分必要条件是

$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$$

- 例1 $\langle 2, x+5 \rangle = \langle 3y-4, y \rangle$ ，求 x, y .

解 $3y-4 = 2, x+5 = y \Rightarrow y = 2, x = -3$

有序 n 元组

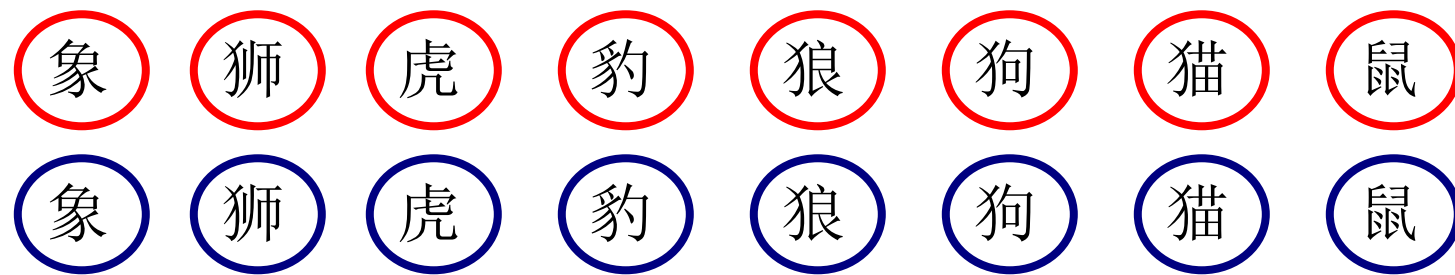
- **定义** 一个有序 n ($n \geq 3$) 元组 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 是一个有序对，其中第一个元素是一个有序 $n-1$ 元组，即

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

- 注意：有序3元组 $\langle \langle a, b \rangle, c \rangle$ 可以简记成 $\langle a, b, c \rangle$ 。但 $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$ 不是有序3元组。
- 当 $n=1$ 时, $\langle x \rangle$ 形式上可以看成有序 1 元组。
- 实例 n 维向量是有序 n 元组。

集合的笛卡尔积

例如“斗兽棋”的16颗棋子，



可看成是由两种颜色的集合A和8种动物的集合B组成的。

$$A=\{\text{红}, \text{蓝}\}$$

$$B=\{\text{象}, \text{狮}, \text{虎}, \text{豹}, \text{狼}, \text{狗}, \text{猫}, \text{鼠}\}$$

每个棋子可以看成是一个有序对，斗兽棋可记成集合 $A \times B$ ：

$$\{\langle \text{红}, \text{象} \rangle, \langle \text{红}, \text{狮} \rangle, \langle \text{红}, \text{虎} \rangle, \langle \text{红}, \text{豹} \rangle, \langle \text{红}, \text{狼} \rangle, \langle \text{红}, \text{狗} \rangle, \langle \text{红}, \text{猫} \rangle, \langle \text{红}, \text{鼠} \rangle, \\ \langle \text{蓝}, \text{象} \rangle, \langle \text{蓝}, \text{狮} \rangle, \langle \text{蓝}, \text{虎} \rangle, \langle \text{蓝}, \text{豹} \rangle, \langle \text{蓝}, \text{狼} \rangle, \langle \text{蓝}, \text{狗} \rangle, \langle \text{蓝}, \text{猫} \rangle, \langle \text{蓝}, \text{鼠} \rangle\}$$

笛卡儿积

- **定义** 设 A, B 为集合, A 与 B 的笛卡儿积记作 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

- **例2** $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$

$$A \times B = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 3, c \rangle \}$$

$$B \times A = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$$

$$A = \{\emptyset\}, \quad P(A) \times A = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset \rangle \}$$

性质1: 不适合交换律 $A \times B \neq B \times A$ ($A \neq B, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$)

笛卡儿积

- $(A \times B) \times C = \{ \langle \langle a, b \rangle, c \rangle \mid \langle a, b \rangle \in A \times B \wedge c \in C \}$

$$A \times (B \times C) = \{ \langle a, \langle b, c \rangle \rangle \mid a \in A \wedge \langle b, c \rangle \in B \times C \},$$

因 $\langle a, \langle b, c \rangle \rangle$ 不是有序三元组,

所以 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ 。

- **性质2：不适合结合律** $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \quad (A \neq \emptyset, B \neq \emptyset)$

笛卡儿积的性质

- 对于并或交运算满足分配律

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

- 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A \times B$ 就是空集.

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$$

- 若 $|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A \times B|=mn$

证明：由笛卡尔积的定义及排列组合中的乘法原理，直接推得此定理。

性质的证明—分配律*

证明 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

证 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \vee \langle x, y \rangle \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以有 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

例题

例3 (1) 证明 $A=B \wedge C=D \Rightarrow A \times C = B \times D$

(2) $A \times C = B \times D$ 是否推出 $A=B \wedge C=D$? 为什么?

解 (1) 任取 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in A \times C \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C$$

$$\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in D \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in B \times D$$

(2) 不一定. 反例如下:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=D=\emptyset$, 则 $A \times C = B \times D$ 但是 $A \neq B$

N阶笛卡尔积

- 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是集合($n \geq 2$), 它们的N阶笛卡尔积记作 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 特别 $A \times A \times \dots \times A = A^n$
- 设 A 是实数集合, 则 A^2 表示笛卡尔坐标平面, A^3 表示三维空间, A^n 表示 n 维空间。

应用

1) 令 $A_1 = \{x | x \text{ 是学号}\}$ $A_2 = \{x | x \text{ 是姓名}\}$ $A_3 = \{\text{男, 女}\}$
 $A_4 = \{x | x \text{ 是出生日期}\}$ $A_5 = \{x | x \text{ 是班级}\}$ $A_6 = \{x | x \text{ 是籍贯}\}$
则 $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$ 中一个元素:

$\langle 001, \text{王强}, \text{男}, 1981:02:16, \text{计2001-1}, \text{辽宁} \rangle$

这就是学生档案数据库的一条信息，所以学生的档案就是 $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$ 的一个子集。

应用

2) 令 $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$
是英文字母表

一个英文单词可以看成有序 n 元组： 如

$at = \langle a, t \rangle$, $boy = \langle b, o, y \rangle$, $data = \langle d, a, t, a \rangle$, $computer = \langle c, o, m, p, u, t, e, r \rangle$

于是可以说：

$at \in A^2$, $boy \in A^3$, $data \in A^4$, $computer \in A^8$, ...

于是英文词典中的单词集合可以看成是 $A \cup A^2 \cup \dots \cup A^n$ 的一个子集。

关系

- 关系是一个非常普遍的概念，如数值的大于关系、整除关系，人类的父子关系、师生关系、同学关系等。

- 例子

1. 大写英字母与五单位代码的对应关系 R_1 :

令 $\alpha = \{A, B, C, D, \dots, Z\}$

五单位代码集合 $\beta = \{\textcolor{red}{11}000, \textcolor{red}{10}011, \textcolor{red}{01}110, \textcolor{red}{10}010, \dots, \textcolor{red}{10}001\}$

($\beta = \{\textcolor{red}{30}, \textcolor{red}{23}, 16, 22, \dots, 21\}$)

$R_1 = \{ \langle A, 30 \rangle, \langle B, 23 \rangle, \langle C, 16 \rangle, \dots, \langle Z, 21 \rangle \} \subseteq \alpha \times \beta$

二元关系的定义

- **定义** 如果一个集合满足以下条件之一：

- (1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

- (2) 集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**, 简称为**关系**, 记作 R .

- 如 $\langle x, y \rangle \in R$, 可记作 xRy ; 如果 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则记作 $x \not R y$

- **实例:** $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle a, b \rangle\}$, $S = \{\langle 1, 2 \rangle, a, b\}$

- R 是二元关系, 当 a, b 不是有序对时, S 不是二元关系

- 根据上面的记法, 可以写 $1R2$, aRb , $a \not R c$ 等.

从A到B的关系与A上的关系

- **定义** 设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**, 当 $A=B$ 时则叫做**A上的二元关系**.
- **例4** $A=\{0,1\}, B=\{1,2,3\}, R_1=\{<0,2>\}, R_2=A \times B, R_3=\emptyset, R_4=\{<0,1>\}$. 那么 R_1, R_2, R_3, R_4 是从A到B的二元关系, R_3 和 R_4 同时也是A上的二元关系.
- **计数**
 - $|A|=n, |A \times A|=n^2, A \times A$ 的子集有 2^{n^2} 个. 所以A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.
 - 例如 $|A|=3$, 则A上有=512个不同的二元关系.

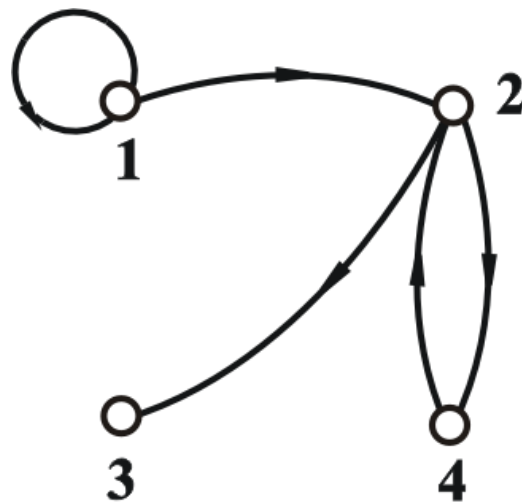
关系的表示

- 表示方式：关系的集合表达式、关系矩阵、关系图
- **枚举法**:即将关系中所有有序对一一列举出，写在大括号内。如 $R = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$ 。
- **谓词公式法**: 即用谓词公式表示有序对的第一元素与第二元素间的关系。
例如 $R = \{ \langle x,y \rangle \mid x < y \}$
- **关系矩阵**: 若 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, R 是从 A 到 B 的关系, R 的关系矩阵是布尔矩阵 $M_R = [r_{ij}]_{m \times n}$, 其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle a_i, b_j \rangle \in R$.
- **关系图**: 若 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, R 是从 A 上的关系, R 的关系图是 $G_R = \langle A, R \rangle$, 其中 A 为结点集, R 为边集.如果 $\langle x_i, x_j \rangle$ 属于关系 R , 在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.
- 注意: A, B 为有穷集, 关系矩阵适于表示从 A 到 B 的关系或者 A 上的关系, 关系图适于表示 A 上的关系

实例

- $A=\{1,2,3,4\}$,
- $R=\{<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>, <4,2>\}$,
- R 的关系矩阵 M_R 和关系图 G_R 如下:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



A上重要关系的实例

- 设 A 为任意集合, \emptyset 是 A 上的关系, 称为空关系。
- E_A, I_A 分别称为全域关系与恒等关系, 定义如下:

$$E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A$$

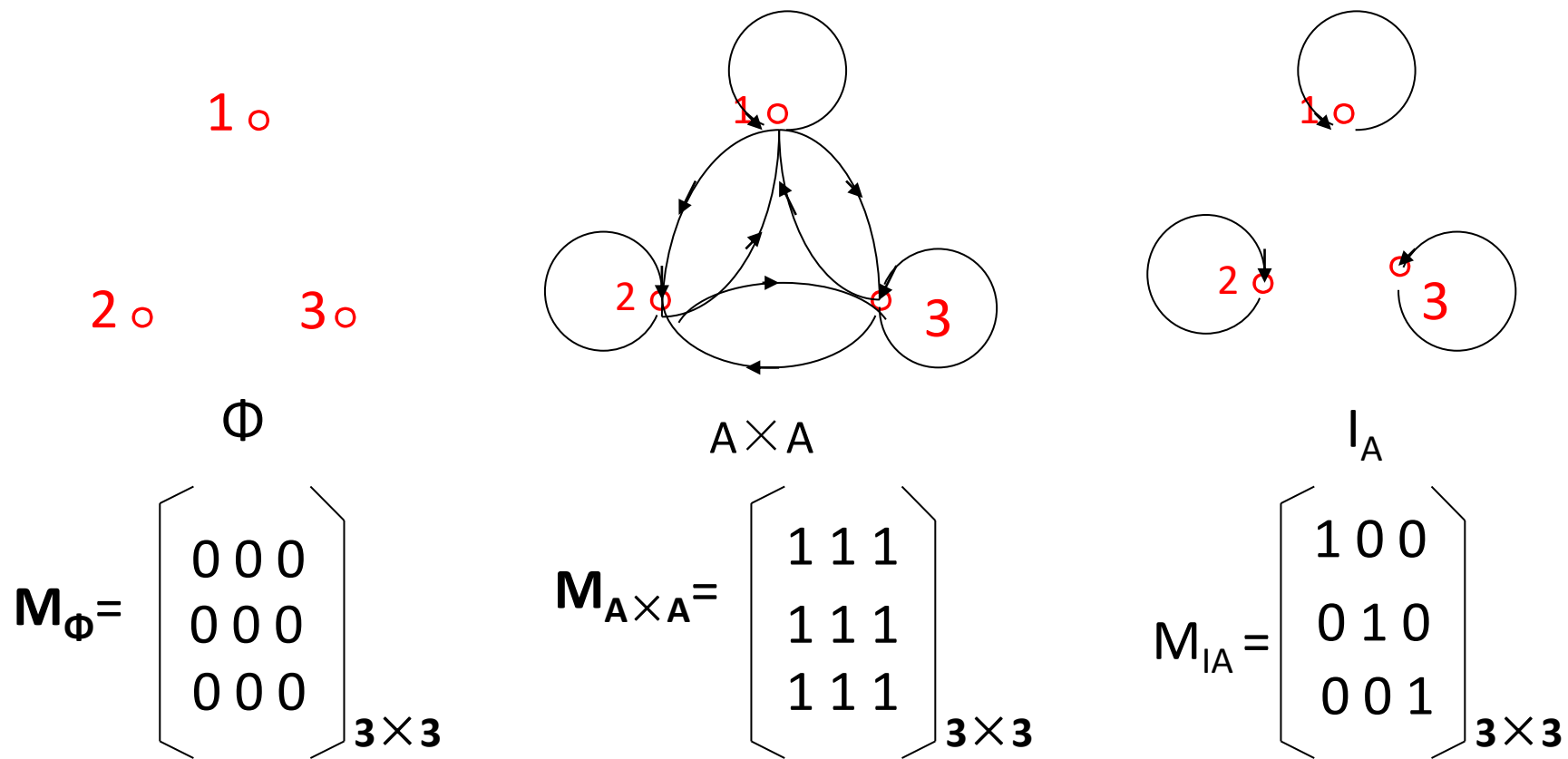
$$I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$$

- 例如, $A = \{1, 2\}$, 则

$$E_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

$$I_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$$

$A=\{1,2,3\}$, 则 A 上的空关系、全域关系 E_A 及恒等关系 I_A 的关系图及矩阵如下:



A上重要关系的实例（续）

- 小于等于关系 L_A , 整除关系 D_A , 包含关系 R_{\subseteq} 定义:
 - $L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y \}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, \mathbb{R} 为实数集合
 - $D_B = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in B \wedge x \text{ 整除 } y \}$, $B \subseteq \mathbb{Z}^*$, \mathbb{Z}^* 为非0整数集
 - $R_{\subseteq} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \subseteq y \}$, A 是集合族.
- 类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

实例

- 例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 则

$$L_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

$$D_A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$$

- $A = P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 则 A 上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, \{a\} \rangle, \langle \emptyset, \{b\} \rangle, \langle \emptyset, \{a, b\} \rangle, \langle \{a\}, \{a\} \rangle, \\ \langle \{a\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{b\}, \{b\} \rangle, \langle \{b\}, \{a, b\} \rangle, \langle \{a, b\}, \{a, b\} \rangle \}$$

作业

- P112/4.1
- P115/4.11(1)(3)

问题？

