离散数学

第一章 命题逻辑

复习 习题课

第一章　命题逻辑 小结

本章的重点内容、及要求：

1. 逻辑联结词，要熟练掌握联结词的真值表定义以及它们在自然语言中的含义。其中特别要注意“∨”和“→”的用法。

2. 会命题符号化。

3. 掌握永真式的证明方法：

(1).真值表。

(2).等值变换，化简成T。

(3).主析取范式。

4. 掌握等值公式的证明方法，熟练记忆并会应用9页的重要等值式。

5. 熟练掌握范式的写法及其应用。

6. 熟练掌握使用电路物理实现命题公式的方法，并能使用奎因-莫可拉斯基方法化简得到最简展开式。

7. 熟练掌握三种推理方法，熟练记忆并会应用23页的重要推理定律。

第一章　　习题课

一. 命题符号化

用 P 表示命题“天下雪”，Q 表示命题“我将去镇上”，R 表示命题“我有时间”. 以符号形式写出下列命题:

a) 如果天不下雪和我有时间, 那么我将去镇上.

b) 我将去镇上，仅当我有时间.

c) 天不下雪

d) 天下雪, 那么我不去镇上

a) $(\neg P \wedge R) \rightarrow Q$

b) $Q \rightarrow R$

c) $\neg P$

d) $P \rightarrow \neg Q$

试把原子命题表示为 P, Q, R 等，然后用符号译出下列各句子。

a) 或者你没有给我写信，或者它在途中丢失了。

P:你给我写信。Q:信在途中丢失了。

表达式为$\neg P \overline{\vee} Q$或 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

b) 如果张三和李四都不去，他就去。

P: 张三不去。Q: 李四不去。R: 他就去。

$(P \wedge Q) \rightarrow R$

c) 我们不能既划船又跑步。

P: 我们划船。 Q: 我们跑步。

$\neg(P \wedge Q)$

d) 如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否伴奏而定。

P: 你来了。Q: 他唱歌。R: 你伴奏。

$P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \wedge (\neg R \rightarrow \neg Q))$

也可以写成： $P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$

用符号形式写出下列命题。

a) 假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报。

P: 上午下雨。 Q:我去看电影。 R:我在家里读书。 S:我在家里看报。

表达式为：$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow (R \vee S))$

不可以写成：$(\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (R \vee S))$

$$
\begin{aligned}
&(\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (R \vee S)) \\
&\Leftrightarrow (\neg\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee (R \vee S)) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee (\neg P \vee (R \vee S)) \\
&\Leftrightarrow P \vee Q \vee \neg P \vee R \vee S \\
&\Leftrightarrow P \vee \neg P \ \vee Q \vee R \vee S \\
&\Leftrightarrow T
\end{aligned}
$$

b) 仅当你走我将留下。

P: 你走了。 Q:我留下。

Q→P， 或 **¬P→¬Q**

二.重言式的证明方法

方法1：列真值表。

方法2：公式的等价变换，化简成“T”。

方法3：用公式的主析取范式。

证明$(P\to Q)\to(P\to(P\land Q))$是重言式

方法1:

P	Q	$P\to Q$	$P\to(P\land Q)$	$(P\to Q)\to(P\to(P\land Q))$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

方法2：$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee (P \wedge Q))$	蕴涵等值式
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q))$	德摩根律，分配律
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (T \wedge (\neg P \vee Q))$	排中律
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)$	同一律
$\Leftrightarrow (P \vee (\neg P \vee Q)) \wedge (\neg Q \vee (\neg P \vee Q)$	分配律
$\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \vee Q)) \wedge (\neg Q \vee (Q \vee \neg P)$	结合律、交换律
$\Leftrightarrow (T \vee Q)) \wedge ((\neg Q \vee Q) \vee \neg P)$	排中律、结合律
$\Leftrightarrow T \wedge (T \vee \neg P)$	零律、排中律
$\Leftrightarrow T \wedge T$	零律
$\Leftrightarrow T$	等幂律

方法3 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee(\neg P\vee(P\wedge Q))$ 去→

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee\neg P\vee(P\wedge Q)$ ¬内移

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))\vee(P\wedge Q)$ 补变项Q

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$ 分配律

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$ 整理

可见，该公式的主析取范式含有全部(四个)小项，这表明 $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow(P\wedge Q))$ 是永真式。

三. 等价公式的证明方法

方法1：用列真值表。（不再举例）
方法2：用公式的等价变换。(用置换定律)

证明 $((A\wedge B)\to C)\wedge(B\to(D\vee C))\Leftrightarrow(B\wedge(D\to A))\to C$

左式 $\Leftrightarrow(\neg(A\wedge B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))$ 蕴涵等值律

$\Leftrightarrow((\neg A\vee\neg B)\vee C)\wedge(\neg B\vee(D\vee C))$ 德摩根律

$\Leftrightarrow((\neg B\vee\neg A)\vee C)\wedge((\neg B\vee D)\vee C)$ 交换律、结合律

$\Leftrightarrow((\neg B\vee\neg A)\wedge(\neg B\vee D))\vee C$ 分配律

$\Leftrightarrow(\neg B\vee(\neg A\wedge D))\vee C$ 分配律

$\Leftrightarrow\neg(B\wedge(A\vee\neg D))\vee C$ 德摩根律

$\Leftrightarrow(B\wedge(D\to A))\to C$ 蕴涵等值律

四. 范式的写法及应用

写出$(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$的主析取范式和主合取范式

方法1，用真值表

令$A(P,Q,R)\Leftrightarrow(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$它的真值表见下页。

$A(P,Q,R)\Leftrightarrow m_0\vee m_7\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$A(P,Q,R)\Leftrightarrow M1\wedge M2\wedge M3\wedge M4\wedge M5\wedge M6$

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge$

$(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

	P	Q	R	$P \to (Q \wedge R)$	$\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R)$	A(P, Q, R)
0	F	F	F	T	T	T
1	F	F	T	T	F	F
2	F	T	F	T	F	F
3	F	T	T	T	F	F
4	T	F	F	F	T	F
5	T	F	T	F	T	F
6	T	T	F	F	T	F
7	T	T	T	T	T	T

方法2. 等价变换

$(P\to(Q\wedge R))\wedge(\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R))$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee(Q\wedge R))\wedge(P\vee(\neg Q\wedge\neg R))$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge P)\vee(P\wedge Q\wedge R))\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R))$

$\vee((Q\wedge R)\wedge(\neg Q\wedge\neg R))$ 分配律

$\Leftrightarrow F\vee(P\wedge Q\wedge R))\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee F$ 排中律

$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$ 同一律

$$(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R))$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R))$$

$$\wedge (P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$$

范式的应用

A,B,C,D四个人中要派两个人出差，按下述三个条件有几种派法?

①若A去则C和D中要去一个人。

②B和C不能都去。

③C去则D要留下

解.设A,B,C,D分别表示A去，B去，C去，D去。

①$A \rightarrow ((C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D))$

$\Leftrightarrow \neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)$

② $\neg(B \wedge C) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg C$

③ $C \rightarrow \neg D \Leftrightarrow \neg C \vee \neg D$

总的条件为:

$(\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$ 令此式为真。

将$(\neg A \lor (C \land \neg D) \lor (\neg C \land D)) \land (\neg B \lor \neg C) \land (\neg C \lor \neg D)$ 化成析取范式。

上式$\Leftrightarrow (\neg A \lor (C \land \neg D) \lor (\neg C \land D)) \land (\neg C \lor (\neg B \land \neg D))$

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg C) \lor (C \land \neg D \land \neg C) \lor (\neg C \land D \land \neg C) \lor$

$(\neg A \land \neg B \land \neg D) \lor (C \land \neg D \land \neg B \land \neg D) \lor (\neg C \land D \land \neg B \land \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg C) \lor F \lor (\neg C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg D) \lor (C \land \neg D \land \neg B) \lor F$

可以取$\neg A \land \neg C$为T，得B和D去。

取$\neg C \land D$为T，得A和D去，或者 B和D去。

取$C \land \neg D \land \neg B$为T，得A和C去 。

最后得三种派法： A和C去、A和D去、B和D去。

五、组合电路

一次举重比赛由甲、乙、丙三名裁判共同表决，比赛结果A采用“少数服从多数”的原则判定。当运动员举完杠铃后，每名裁判可以按自己的表决器来裁决该名运动员是举起成功还是失败。

设P：甲裁判判定成功；Q：乙裁判判定成功；R：丙裁判判定成功

（a）请写与A等价的仅含命题变元P、Q、R的命题；

（b）如果已知输入P、Q、R，请设计一个组合逻辑门电路计算最终的表决结果A，要求尽量简化门电路的使用。

1. 写出命题公式A的真值表。

P	Q	R	A(P, Q, R)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

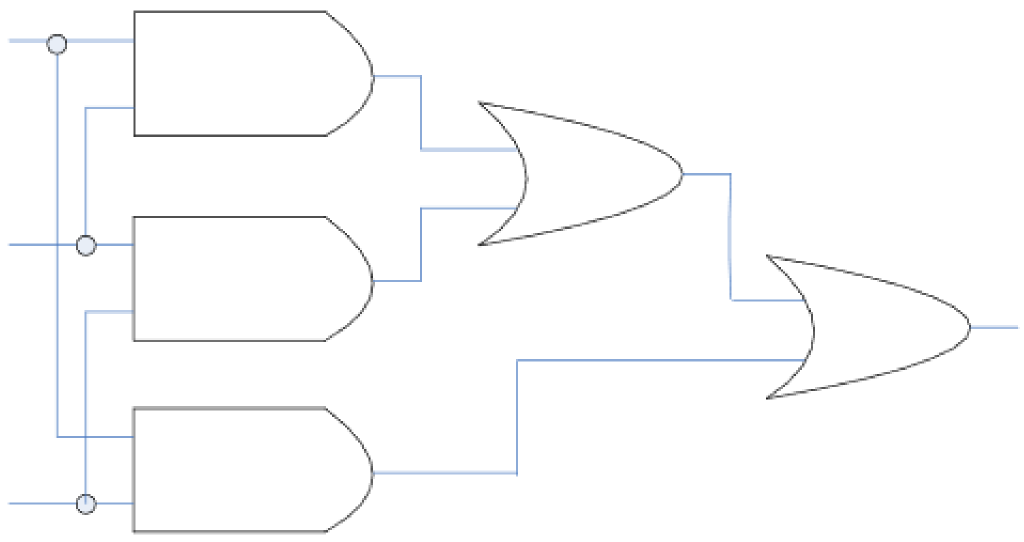
2. 写出命题公式A的主析取范式。

$A \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

3. 对命题公式A进行化简（奎因-莫可拉斯基方法）

A $\Leftrightarrow$ $(Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge Q)$

4. 画出A对应的组合门电路



六. 逻辑推理

- 证明$(A \lor B) \to (C \land D), (D \lor E) \to F \Rightarrow A \to F$

1.直接推理

(1) $(A \lor B) \to (C \land D)$	引入前提
(2) $\neg(A \lor B) \lor (C \land D)$	(1) 蕴涵等值式
(3) $(\neg A \land \neg B) \lor (C \land D)$	(2) 德摩根律
(4) $(\neg A \lor C) \land (\neg B \lor C) \land (\neg A \lor D) \land (\neg B \lor D)$	(3) 分配律
(5) $\neg A \lor D$	(4) 化简
(6) $A \to D$	(5) 蕴涵等值式
(7) $(D \lor E) \to F$	引入前提
(8) $\neg(D \lor E) \lor F$	(7) 蕴涵等值式
(9) $(\neg D \land \neg E) \lor F$	(8) 德摩根律
(10) $(\neg D \lor F) \land (\neg E \lor F)$	(9) 分配律
(11) $\neg D \lor F$	(10) 化简
(12) $D \to F$	(11) 蕴涵等值式
(13) $A \to F$	(6)(12) 假言三段论

证明$(A \lor B) \to (C \land D), (D \lor E) \to F \Rightarrow A \to F$

2.附加前提证明法

(1)	A	引入附加前提
(2)	$A \lor B$	(1)附加律
(3)	$(A \lor B) \to (C \land D)$	引入前提
(4)	$C \land D$	(2)(3)假言推理
(5)	D	(4)化简
(6)	$D \lor E$	(5)附加律
(7)	$(D \lor E) \to F$	引入前提
(8)	F	(6)(7)假言推理

由附加前提证明法可知，推理正确

显然此方法比直接推理简单。

$(A \vee B) \to (C \wedge D), (D \vee E) \to F \Rightarrow A \to F$

3.反证法

(1)	$\neg(A \to F)$	结论否定引入
(2)	$\neg(\neg A \vee F)$	蕴涵等值式
(3)	$A \wedge \neg F$	(2)双重否定律
(4)	A	(3)化简
(5)	$A \vee B$	(1)附加律
(6)	$(A \vee B) \to (C \wedge D)$	引入前提
(7)	$C \wedge D$	(2)(3)假言推理
(8)	D	(4)化简
(9)	$D \vee E$	(5)附加律
(10)	$(D \vee E) \to F$	引入前提
(11)	F	(6)(7)假言推理
(12)	$\neg F$	(3)化简
(13)	$F \wedge \neg F$	

由(13)得出了矛盾，根据归谬法说明推理正确

可见此法也比较简单

补充题：请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。

令A:清洁工谋害了经理。　B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。　D:秘书的证词是正确的.

E:午夜时屋里灯光灭了。H:清洁工富裕.

G:经理有钱.

命题符号为:

$A \vee B,\ A \rightarrow \neg C,\ D \rightarrow C,\ \neg D \rightarrow \neg E,\ H \rightarrow \neg A,\ G \wedge \neg H,\ E \ \Rightarrow ?$

A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。 C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的.
E:午夜时屋里灯光灭了。 H:清洁工富裕。 G:经理有钱。

$A \vee B,\ A \to \neg C,\ B \to C,\ D \to C,\ \neg D \to \neg E,\ H \to \neg A,\ G \wedge \neg H,\ E \Rightarrow ?$

(1) E 引入前提

(2) $\neg D \to \neg E$ 引入前提

(3) $\neg\neg D$ (1)(2)拒取式

(4) D (3)双重否定律

(5) $D \to C$ 引入前提

(6) C (4)(5)假言推理

(7) $A \to \neg C$ 引入前提

(8) $\neg A$ (6)(7)拒取式

(9) $A \vee B$ 引入前提

(10) B (8)(9)析取三段论

结果是秘书谋害了经理。