

离散数学

集合论

3.3 集合中元素的计数

3.3 集合中元素的计数

- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理
- 有穷集的计数

集合的基数与有穷集合

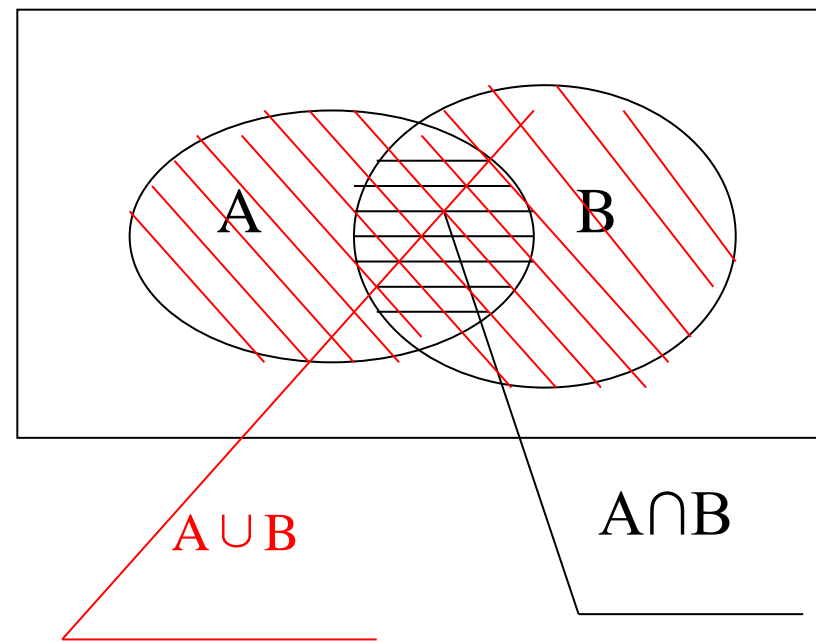
- 集合 A 的**基数**：集合 A 中的元素数，记作 $\text{card}A$
- **有穷集** A ： $\text{card}A=|A|=n$ ， n 为自然数.
- 有穷集的实例：
 - $A=\{a,b,c\}$, $\text{card}A=|A|=3$;
 - $B=\{x \mid x^2+1=0, x \in R\}$, $\text{card}B=|B|=0$
- 无穷集的实例：
 - N, Z, Q, R, C 等

- 例如有**A****B**两个商店，**A**店经营**1000**种商品，**B**店经营**1200**种商品，其中有**100**种商品两个商店都经营，问两个商店共经营多少种商品？

显然 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

如果有ABC三个有限集合，则

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - \\ &\quad (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - \\ &\quad |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$



包含排斥原理

- **定理** 设 S 为有穷集, P_1, P_2, \dots, P_m 是 m 种性质, A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集, $i=1, 2, \dots, m$. 则 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 的元素数为

$$\begin{aligned} & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| \\ &= |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \\ &+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

证明

证明要点：任何元素 x ，如果不具有任何性质，则对等式右边计数贡献为 1，否则为 0

证 设 x 不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m ,

$$x \notin A_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x \notin A_i \cap A_j, 1 \leq i < j \leq m$$

...

$$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m,$$

x 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \dots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

证明

设 x 具有 n 条性质, $1 \leq n \leq m$

x 对 $|S|$ 贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^m |A_i|$ 贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j|$ 贡献为 C_n^2

....

x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$ 贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^m C_n^m = 0$$

推论

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}|$$

将定理 1 代入即可

应用

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？

解： $S = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 1000 \}$,

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C :

$$A = \{ x \mid x \in S, 5 \mid x \},$$

$$B = \{ x \mid x \in S, 6 \mid x \},$$

$$C = \{ x \mid x \in S, 8 \mid x \}$$

例1（续）

对上述子集计数：

$$|S|=1000,$$

$$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200, \quad |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166,$$

$$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125,$$

$$|A \cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33, \quad |A \cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25,$$

$$|B \cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41,$$

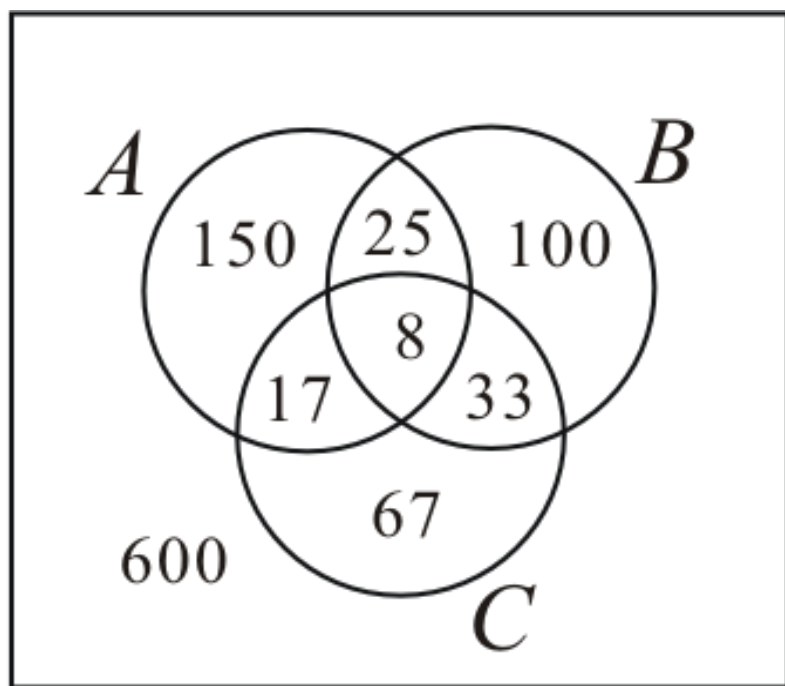
$$|A \cap B \cap C|=\lfloor 1000/120 \rfloor=8,$$

代入公式

$$N = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

文氏图法

- 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？



例2

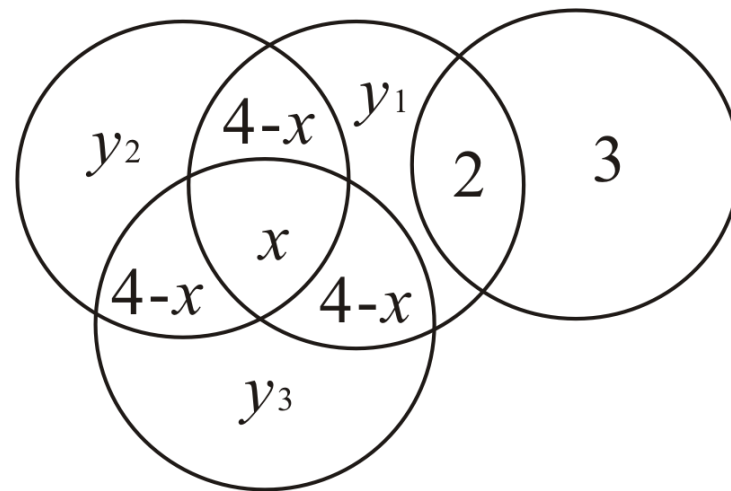
24名科技人员，每人至少会1门外语.

英语：13； 日语：5； 德语：10； 法语：9

英日：2； 英德：4； 英法：4； 法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会1种语言人数，会3种语言人数



$$x+2(4-x)+y_1+2=13$$

$$x+2(4-x)+y_2=10$$

$$x+2(4-x)+y_3=9$$

$$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$$

$$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$$

例3 求欧拉函数的值

欧拉函数: $\phi(n)$

表示 $\{0,1,\dots,n-1\}$ 中与 n 互素的数的个数.

$\phi(12)=4$, 与12互素的数有1, 5, 7, 11.

解: n 的素因子分解式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

$$A_i = \{ x \mid 0 \leq x < n-1 \text{ 且 } p_i \text{ 整除 } x \}$$

$$\phi(n) = | \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k} |$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \leq i < j \leq k$$

...

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_k} \right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} \right)$$

$$- \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}$$

$$= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

实例

与 60 互素的正整数

$$\begin{aligned}\phi(60) &= 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16\end{aligned}$$

有 16 个：

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

作业

- P77
- 3.18
- 3.19
- 3.21

问题？

