离散数学

图论
5.1 无向图及有向图

图论部分

- **第5章 图的基本概念**
- **第6章 特殊的图**
- **第7章 树**

第5章 图的基本概念

5.1 无向图及有向图

5.2 通路, 回路和图的连通性

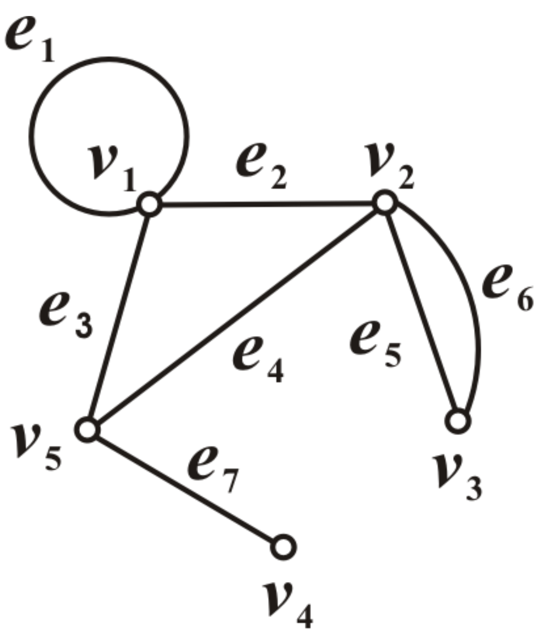
5.3 图的矩阵表示

5.4 最短路径, 关键路径和着色

5.1 无向图及有向图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

无向图



- 多重集合: 元素可以重复出现的集合
- 无序积: $A\&B=\{(x,y) \mid x\in A \wedge y\in B\}$
- 定义 无向图$G=<V,E>$, 其中

(1) 顶点集V是非空有穷集合,其元素称为顶点

(2) 边集E为$V\&V$的多重子集，其元素称为无向边，简称边.

- 例如, $G=<V,E>$, 其中

  $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

  $E=\{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

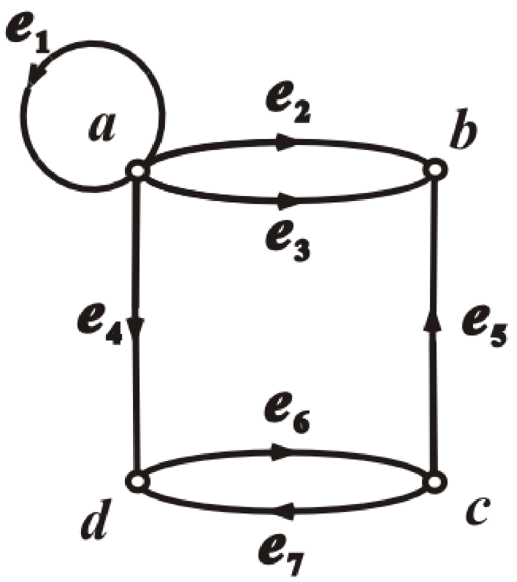
有向图

- 定义 有向图$D=<V,E>$, 其中

(1)顶点集V是非空有穷集合, 其元素称为顶点

(2) 边集E为$V\times V$的多重子集，其元素称为有向边，简称边.

- D的基图:用无向边代替有向边



- 如$D=<V,E>$, 其中

$V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{<a,a>,<a,b>,<a,b>,<a,d>,<c,b>,<d,c>,<c,d>\}$

无向图与有向图(续)

- 通常用G表示无向图, D表示有向图, 也常用G泛指无向图和有向图.
- $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$: G和D的顶点集, 边集.
- n 阶图: n个顶点的图
- 零图: $E=\varnothing$
- 平凡图: 1 阶零图
- 空图: $V=\varnothing$

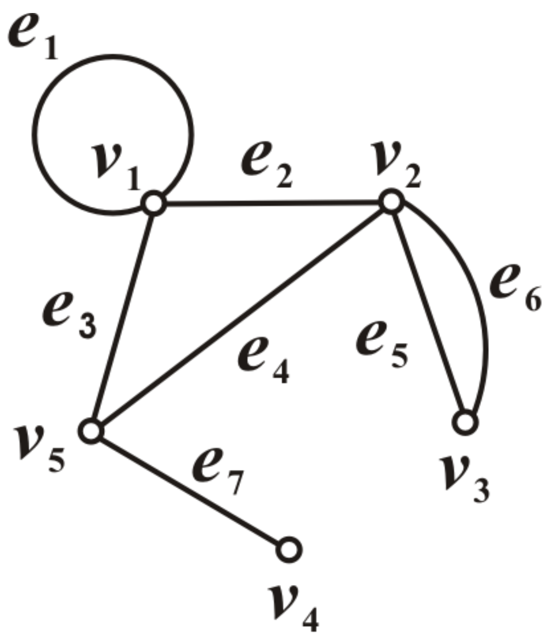
顶点和边的关联与相邻

- **定义** 设$e=(u,v)$是无向图$G=\langle V,E\rangle$的一条边，称u,v为e的**端点**，e与u (v)**关联**. 若$u\neq v$，则称e与u (v)的**关联次数为1**;若$u=v$，则称e为**环**，此时称e与u的**关联次数为2**; 若w不是e端点，则称e与w 的**关联次数为0**. 无边关联的顶点称作**孤立点**.

- **定义** 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $u,v\in V$, $e,e'\in E$, 若$(u,v)\in E$, 则称u,v**相邻**; 若e,e'至少有一个公共端点，则称e,e'**相邻**.
- 对有向图有类似定义. 设$e=\langle u,v\rangle$是有向图的一条边,又称u是e的**始点**，v是e的**终点**, u**邻接到**v, v**邻接于**u.

顶点的度数

- 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图, $v\in V$,
  v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和
  悬挂顶点: 度数为1的顶点
  悬挂边: 与悬挂顶点关联的边
  G的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v)|\ v\in V\}$
  G的最小度$\delta(G)=\min\{d(v)|\ v\in V\}$
- 例如 $d(v_5)=3$, $d(v_2)=4$, $d(v_1)=4$,
  $\Delta(G)=4$, $\delta(G)=1$,
  v_4是悬挂顶点, e_7是悬挂边, e_1是环



顶点的度数(续)

- 设$D=<V,E>$为有向图, $v\in V$,

  v的出度$d^+(v)$: v作为边的始点次数之和

  v的入度$d^-(v)$: v作为边的终点次数之和

  v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和 $d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$

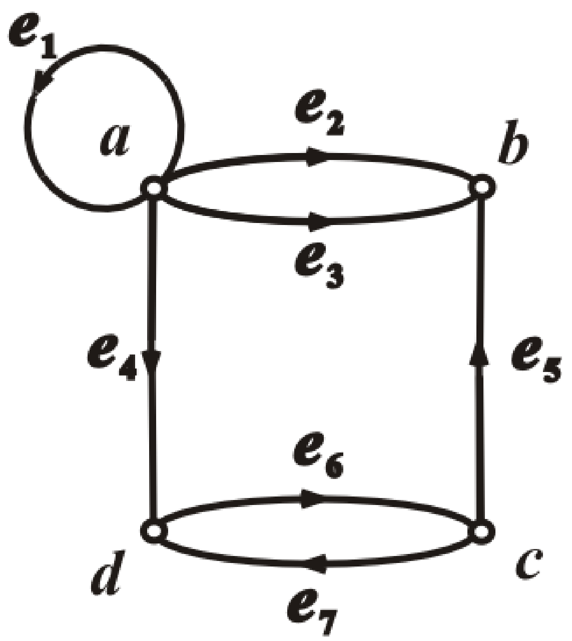
- D的最大出度$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)|v\in V\}$ 最小出度$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)|v\in V\}$

  最大入度$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)|v\in V\}$ 最小入度$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)|v\in V\}$

  最大度$\Delta(D)=\max\{d(v)|v\in V\}$ 最小度$\delta(D)=\min\{d(v)|v\in V\}$

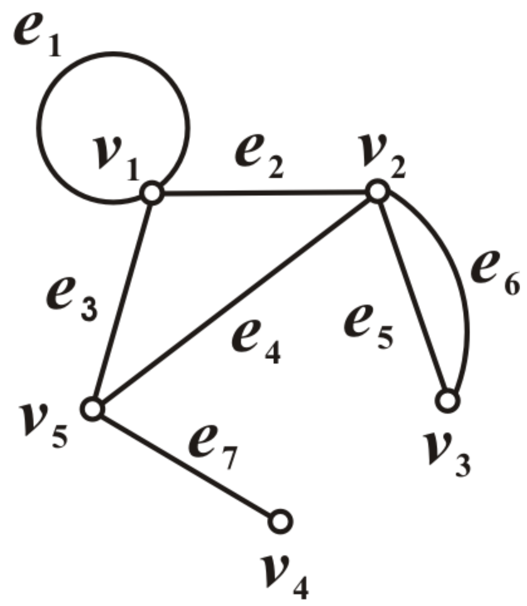
例

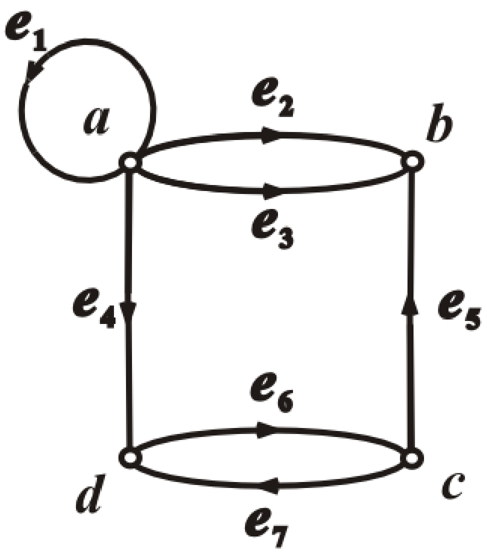
- 例 $d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$,
  $d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$,
  $\Delta^+(D)=4$, $\delta^+(D)=0$, $\Delta^-(D)=3$,
  $\delta^-(D)=1$, $\Delta(D)=5$, $\delta(D)=3$.



图的度数列

- 设无向图G的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  G的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$
- 如右图度数列:4,4,2,1,3
- 设有向图D的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$
  D的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$
  D的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$
- 如右图度数列:5,3,3,3
  出度列:4,0,2,1
  入度列:1,3,1,2





图论基本定理——握手定理

- **定理** 任意无向图和有向图的所有顶点度数之和都等于边数的2倍，并且有向图的所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.
- 证 G中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m条边共提供$2m$度. 有向图的每条边提供一个入度和一个出度, 故所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.
- **推论** 任意无向图和有向图的奇度顶点个数必为偶数.

握手定理的应用

- **例1 (3,3,3,4), (2,3,4,6,8)能成为图的度数列吗?**

  解 不可能. 它们都有奇数个奇度顶点.

- **例2 已知图*G*有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问*G*至少有多少个顶点?**
- **解 设*G*有*n*个顶点. 由握手定理,**

$$4\times3+2\times(n-4)\geq 2\times10$$

解得 $n \geq 8$

握手定理的应用(续)

- 例3 证明不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体.
- 证 用反证法. 假设存在这样的多面体,

  作无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中$V=\{v \mid v$为多面体的面$\}$,

  $E=\{(u,v) \mid u,v\in V \wedge u$与$v$有公共的棱$\wedge u\neq v\}$.

  根据假设, $|V|$为奇数且$\forall v\in V$, $d(v)$为奇数. 这与握手定理的推论矛盾.

握手定理的应用(续)

例4：假设一共有9个工厂，证明：

1）它们之间不可能每个工厂都只与其他3个工厂有业务联系。

2）他们之间不可能只有4个工厂与偶数个工厂有业务联系。

证明：

每个工厂用一个点表示，有业务联系的两个工厂之间加边，则可构成一个无向图G。

1）如果每个工厂都只与其他3个工厂有业务联系，那么图G中每个顶点度数为3。与握手定理的推论矛盾。

2）如果只有4个工厂与偶数个工厂有业务联系，那么有5个工厂与奇数个工厂有业务联系，与握手定理的推论矛盾。

多重图与简单图

- 定义 (1) 在无向图中, 如果有2条或2条以上的边关联同一对顶点, 则称这些边为平行边, 平行边的条数称为重数.

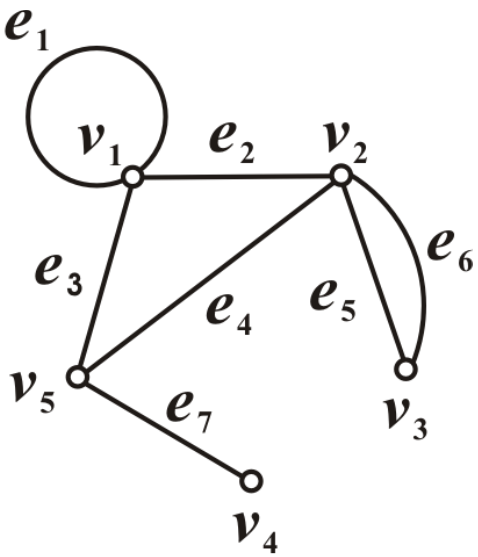
(2) 在有向图中, 如果有2条或2条以上的边具有相同的始点和终点, 则称这些边为有向平行边, 简称平行边, 平行边的条数称为重数.

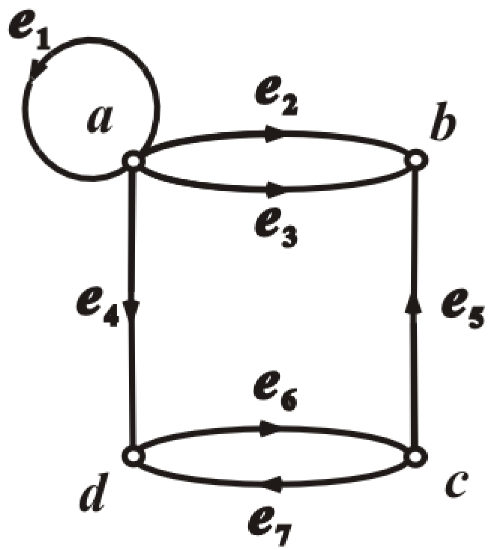
(3) 含平行边的图称为多重图.

(4) 既无平行边也无环的图称为简单图.

注意: 简单图是极其重要的概念

实例





e_5和e_6 是平行边
重数为2
不是简单图

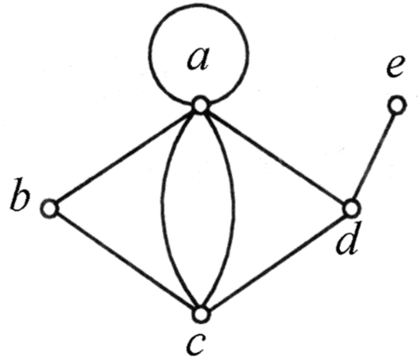
e_2和e_3 是平行边,重数为2
e_6和e_7 不是平行边
不是简单图

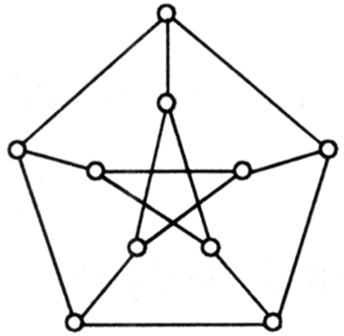
图的同构

定义 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图(有向图), 若存在双射函数 $f: V_1 \to V_2$, 使得对于任意的$v_i,v_j \in V_1$, $(v_i, v_j) \in E_1$（$<v_i, v_j> \in E_1$）当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$（$<f(v_i), f(v_j)> \in E_2$），并且, (v_i, v_j)（$<v_i, v_j>$）与 $(f(v_i), f(v_j))$（$<f(v_i), f(v_j)>$）的重数相同，则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1 \cong G_2$.

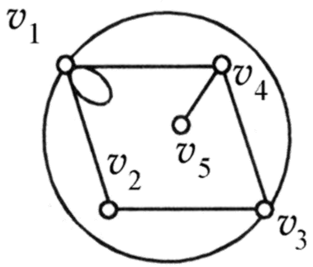
同构实例

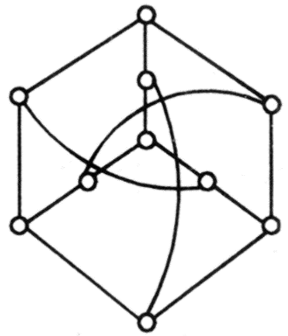
- 例1 证明下述2对图是同构的





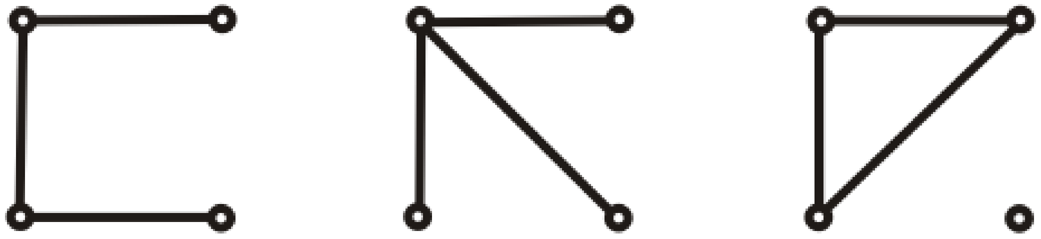
彼得森图





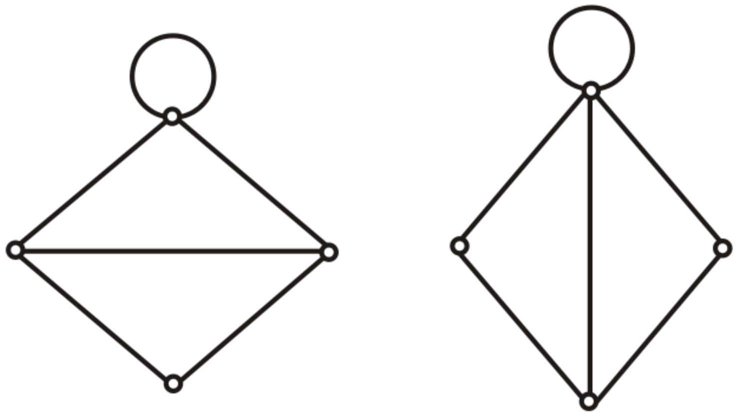
同构实例(续)

- 例2 试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图



- 例3 判断下述每一对图是否同构:

(1)

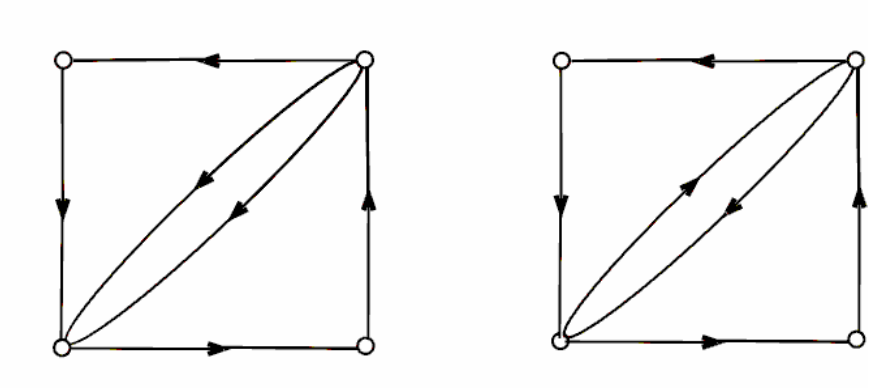


度数列不同

不同构

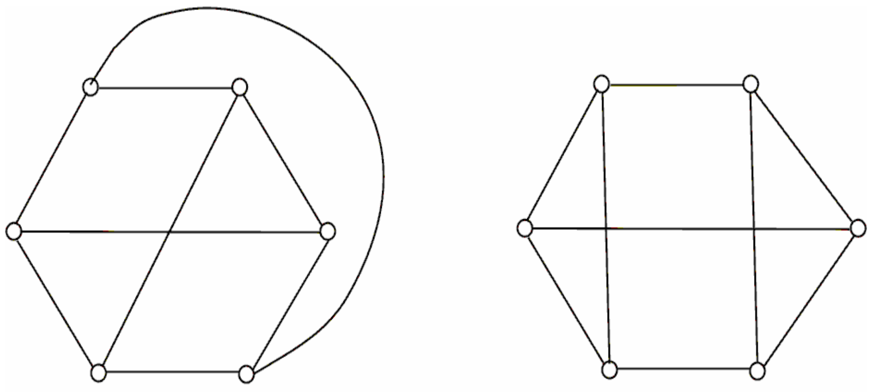
同构实例(续)

(2)



不同构
入(出)度列不同

(3)



(1) (2)

不同构(左边没有三角形,右边有三角形)

注意:度数列相同

图的同构(续)

- 几点说明：
- 图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.
- 能找到多条同构的必要条件, 但它们都不是充分条件:

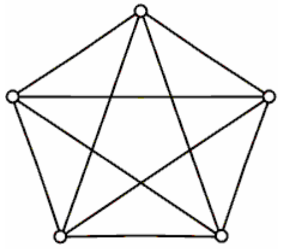
  ① 边数相同，顶点数相同

  ② 度数列相同(不计度数的顺序)

  ③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等
- 若破坏必要条件，则两图不同构
- 至今没有找到判断两个图同构的多项式时间算法

完全图

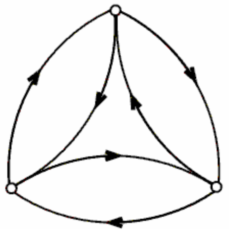
- *n*阶无向完全图K_n: 每个顶点都与其余顶点相邻的*n*阶无向简单图.
- 简单性质: 边数$m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$



K_5

- *n*阶有向完全图: 每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的*n*阶有向简单图.
- 简单性质: 边数$m=n(n-1)$, $\Delta=\delta=2(n-1)$,

$$\Delta^+=\delta^+=\Delta^- =\delta^- =n-1$$



3阶有向完全图

子图

定义 设$G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$是两个图

(1) 若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$, 则称G'为G的子图, G为G'的母图，记作$G'\subseteq G$

(2) 若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

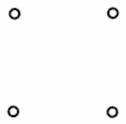
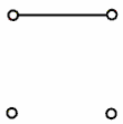
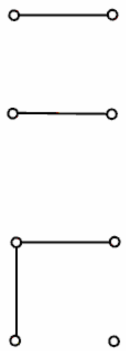
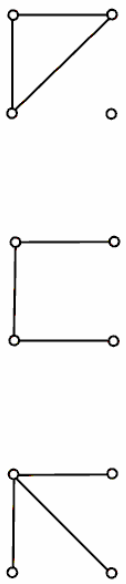
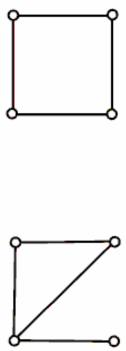
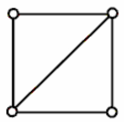
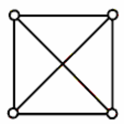
(3) 若$G'\subseteq G$ 且$V'\subset V$ 或$E'\subset E$，称G'为G的真子图

(4) 设$V'\subseteq V$ 且$V'\neq\varnothing$, 以V'为顶点集, 以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图称作V'的导出子图，记作 $G[V']$

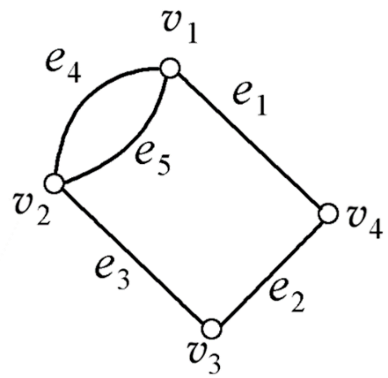
(5) 设$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以E'为边集, 以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图称作E'的导出子图, 记作 $G[E']$

生成子图实例

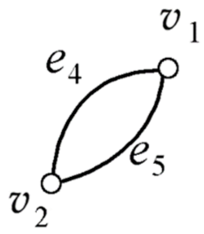
- K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6	
								

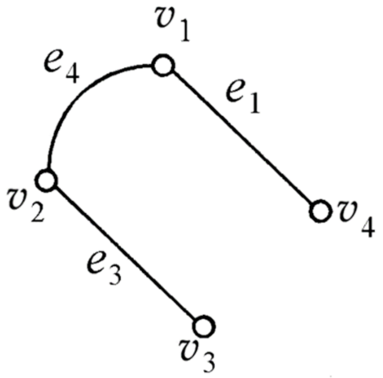
导出子图实例



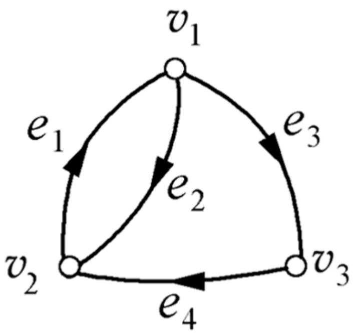
G



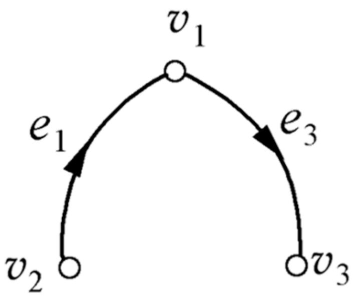
$G[\{v_1,v_2\}]$



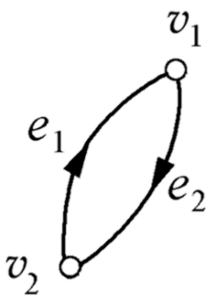
$G[\{e_1,e_3,e_4\}]$



D



$D[\{e_1,e_3\}]$



$D[\{v_1,v_2\}]$

补图

- 定义 设$G=\langle V,E\rangle$为n阶无向简单图，以V为顶点集,所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$.
- 若$G\cong\overline{G}$, 则称G是自补图.

- 例 对K_4的所有非同构子图, 指出互为补图的每一对子图, 并指出哪些是自补图.

作业

- P137
- 5.1
- 5.3
- 5.5/(2)
- 5.8
- 5.11

问题？