离散数学

图论

5.3 图的矩阵表示

5.3 图的矩阵表示

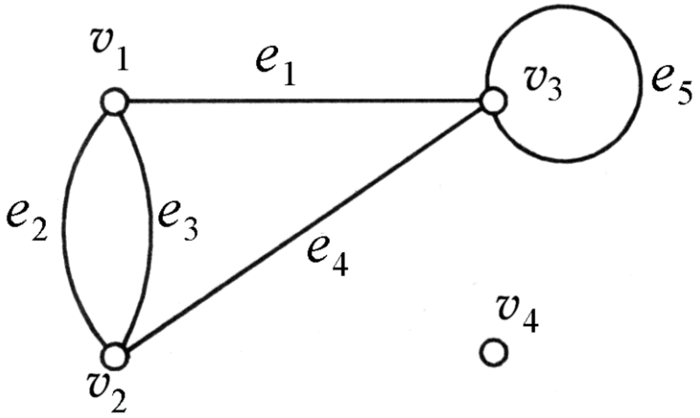
- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

无向图的关联矩阵

- 定义 设无向图$G=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵，记为$M(G)$.

例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



无向图的关联矩阵

- 定义 设无向图$G=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质 (1) 每一列恰好有两个1或一个2

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) v_i为孤立点当且仅当第i行全为0

(5) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

定义 设无环有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

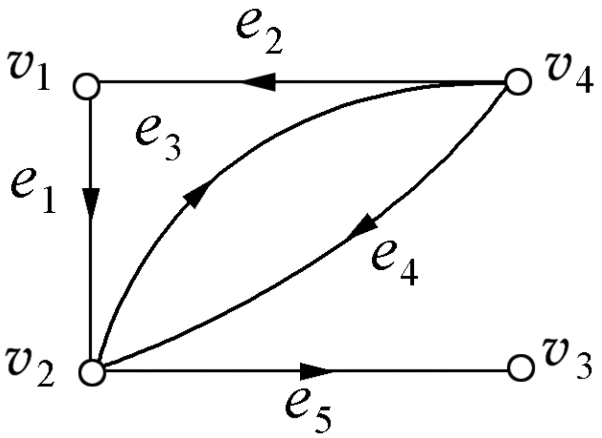
$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为**D的关联矩阵**，记为$M(D)$.

有向图的关联矩阵(续)

例

$$M(D)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



性质

(1) 每一列恰好有一个**1**和一个**-1**

(2) 第i行**1** 的个数等于$d^+(v_i)$, **-1** 的个数等于$d^-(v_i)$

(3) 1的总个数等于**-1**的总个数, 且都等于m

(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵

定义 设有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$a_{ij}^{(1)}$为**顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$边**的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{m\times n}$为**$D$的邻接矩阵**, 记作$A(D)$, 简记为$A$.

性质

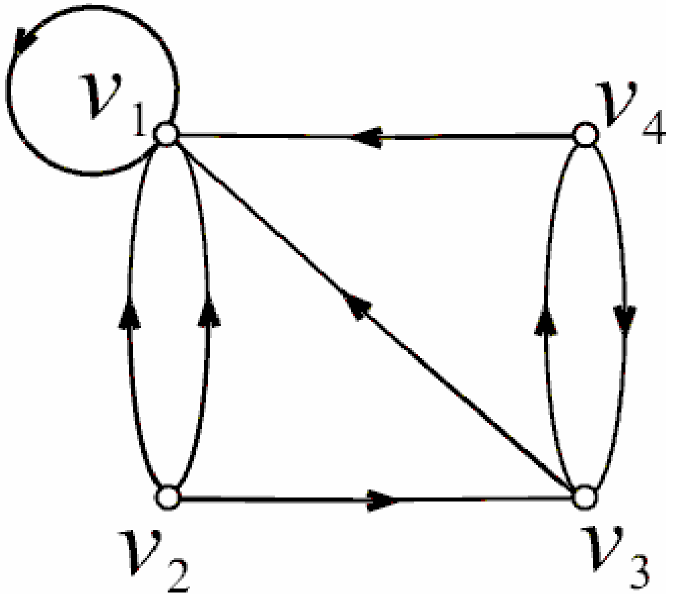
(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j),\quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---D中长度为1的回路数

有向图的邻接矩阵实例



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

D中的通路及回路数

定理 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则$A^l(l\geq 1)$中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数,

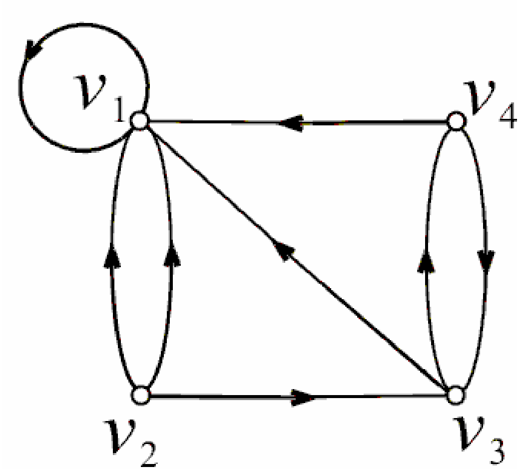
$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数,

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数,

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的回路总数.

- 这里的通路包含回路
- 通路和回路的计算是在定义的意义下，而不是同构的意义下

D中的通路及回路数(续)



推论　设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l(l\geq1)$, 则$B_l$中元素

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$为$D$中长度小于或等于$l$ 的通路数，

$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$为$D$中长度小于或等于$l$ 的回路数.

例 问在有向图D中

(1) 长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) 长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？

例(续)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
合计	50	8

有向图的可达矩阵

定义 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为**D的可达矩阵**, 记作$P(D)$, 简记为P.

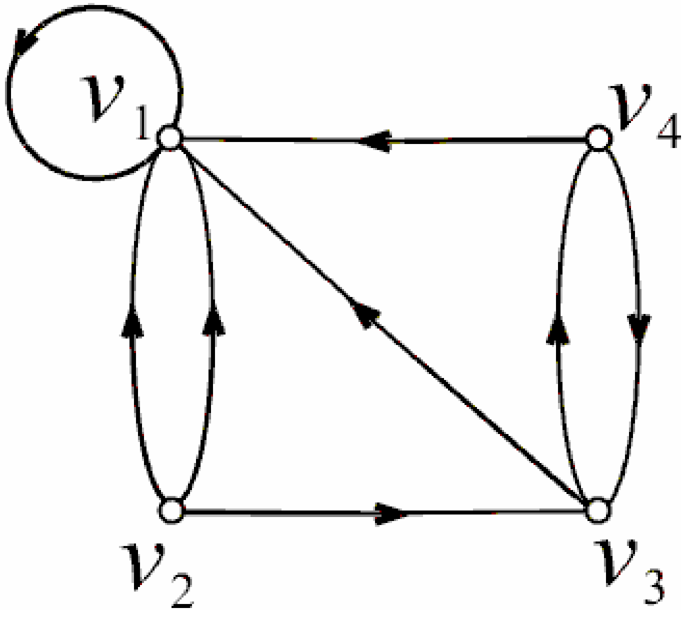
性质:

$P(D)$主对角线上的元素全为1.

D强连通当且仅当$P(D)$的元素全为1.

有向图的可达矩阵实例

- 例



$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

问题？