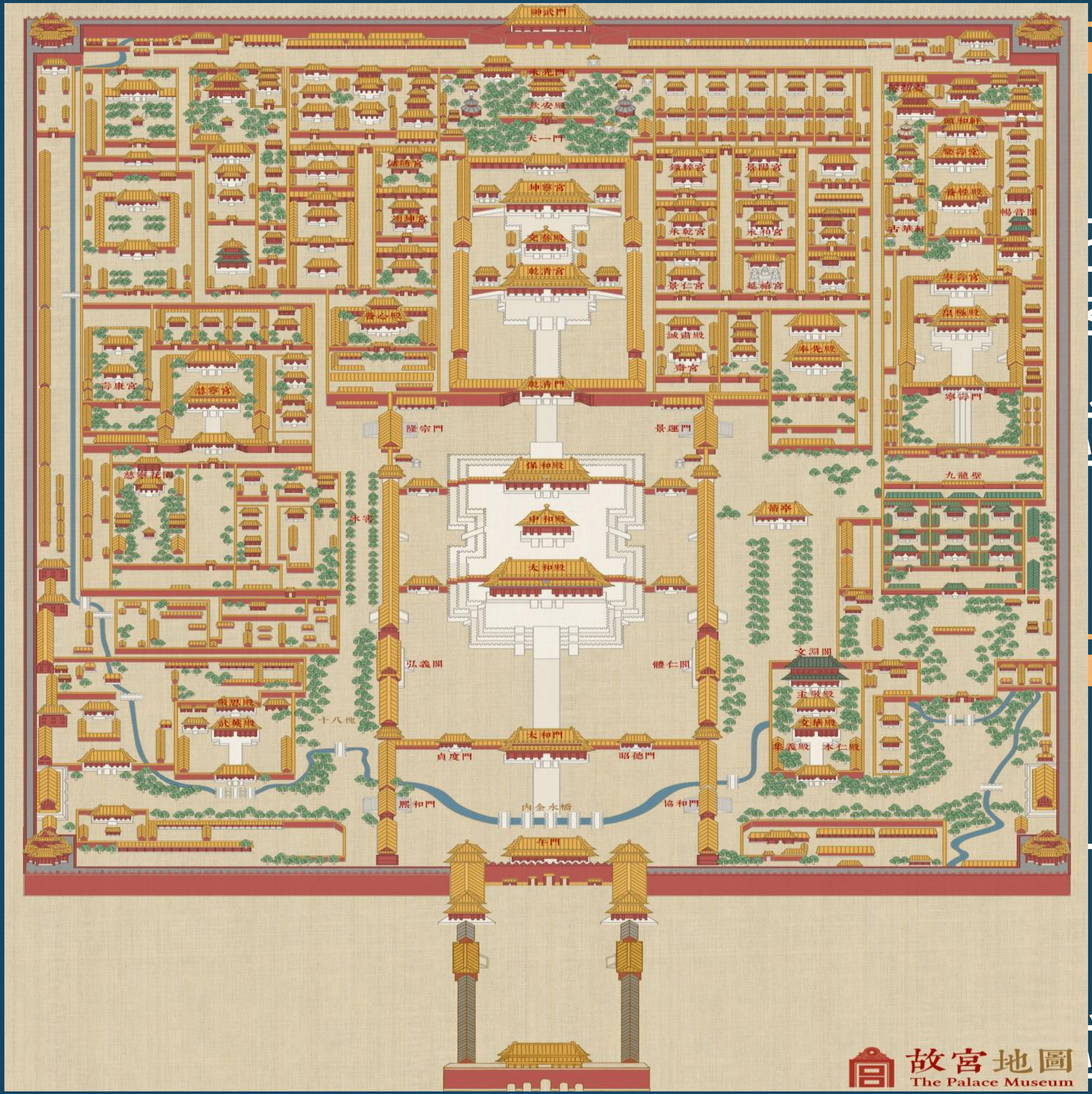
离散数学 图论

哈密顿图

计算机科学与技术学院 管昕洁



故宫博物院

扫、 检查、

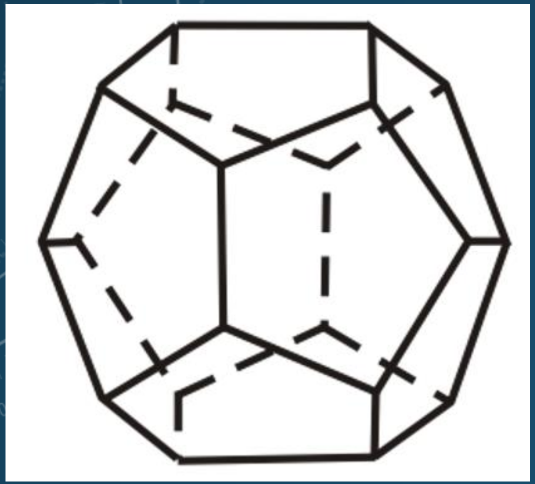
路径

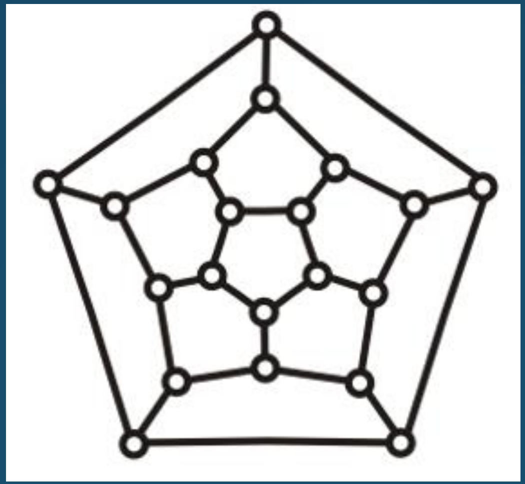
回路!

故宫博物院

卡所有的殿、

回路?





“周游世界”游戏

每个顶点是一个城市，有20个城市，要求从一个城市出发，恰好经过每一个城市一次，回到出发点。

威廉·卢云·哈密顿爵士
Sir William Rowan Hamilton

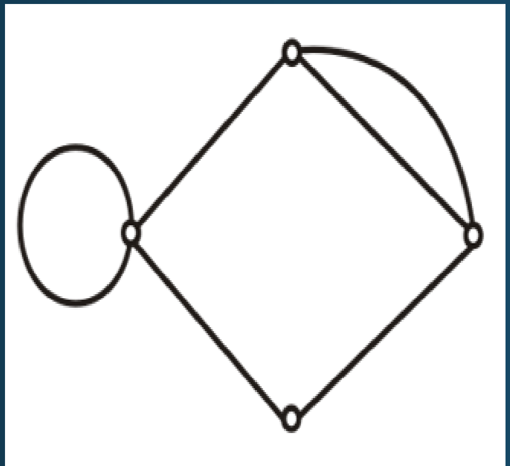
哈密顿图

- **哈密顿通路:** 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路。
- **哈密顿回路:** 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路。
- **哈密顿图:** 具有哈密顿回路的图。
- **半哈密顿图:** 具有哈密顿通路而无哈密顿回路的图。

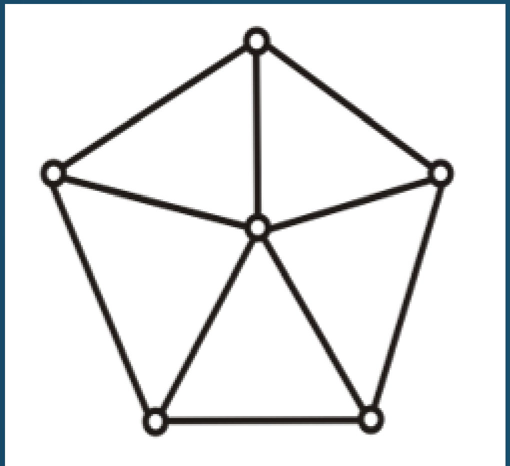
- 几点说明:
  - 平凡图是哈密顿图。当$n\geq 3$时, K_n均为哈密顿图
  - 哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路。
  - 环与平行边不影响图的哈密顿性。

实例

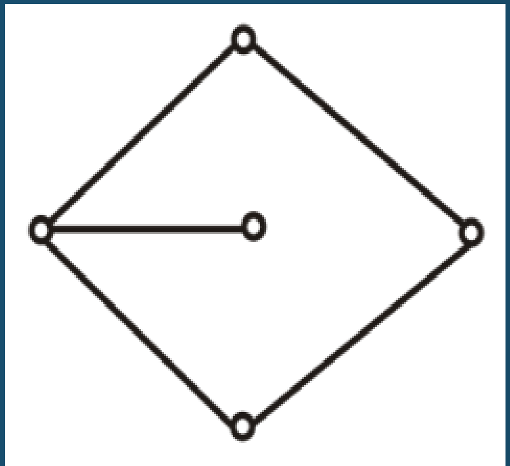
- 下面四个无向图是哈密顿图吗?



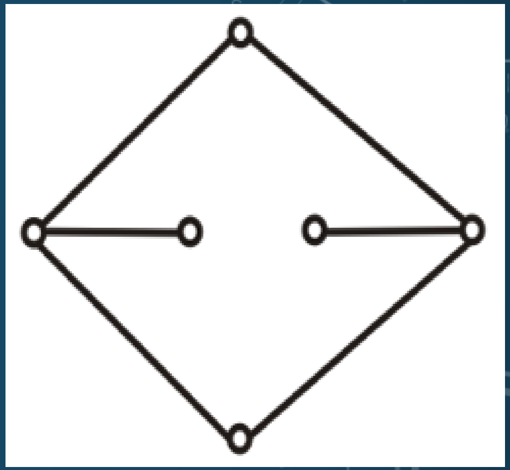
图一



图二



图三



图四

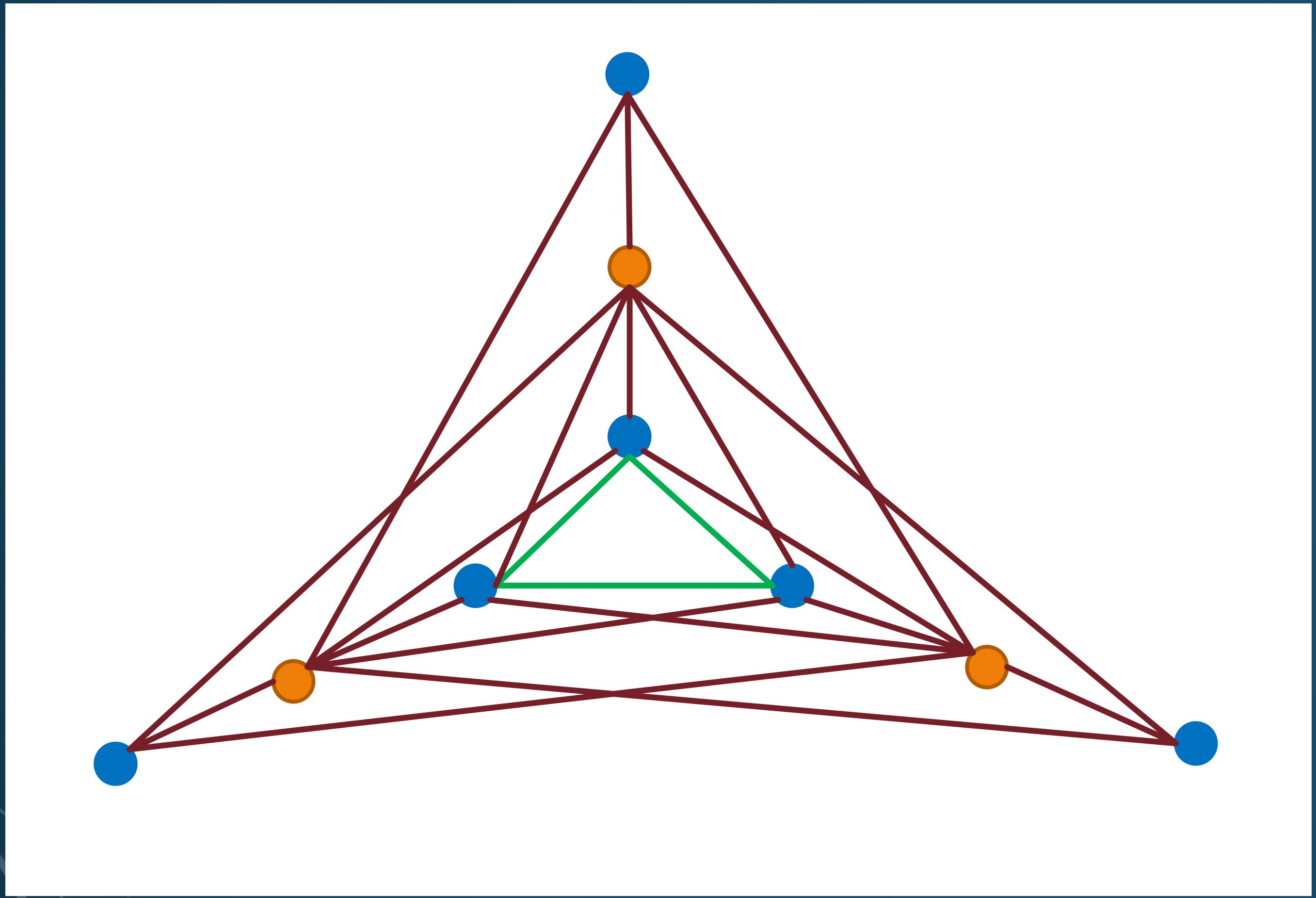
图一、图二为哈密顿图，图三为半哈密顿图，图四不是。

哈密顿图的判定-必要条件

- **定理** 设无向图G=<V,E>是哈密顿图，则对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有$p(G-V_1) \leq |V_1|$。

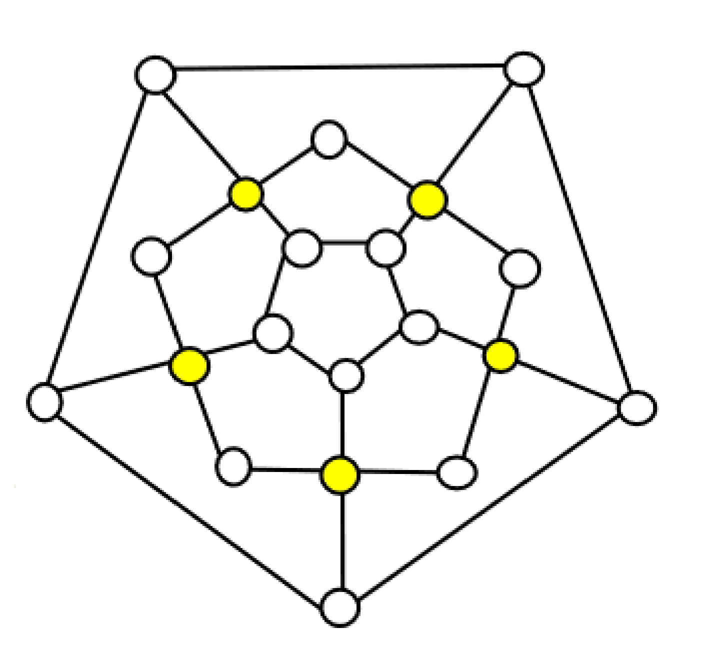
- **证明思路**
  - 设C为G中一条哈密顿回路，有$p(C-V_1) \leq |V_1|$
  - 又因为$C \subseteq G$，故 $p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$

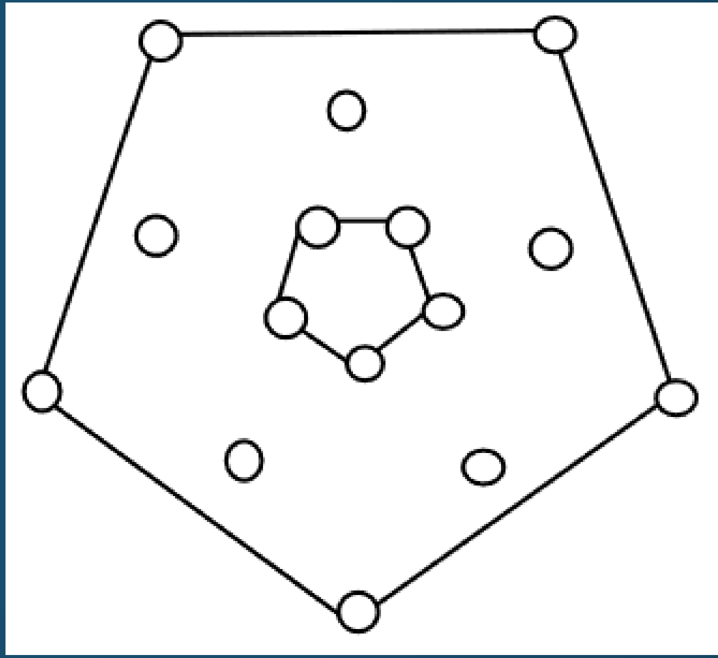
哈密顿图的判定-必要条件-例



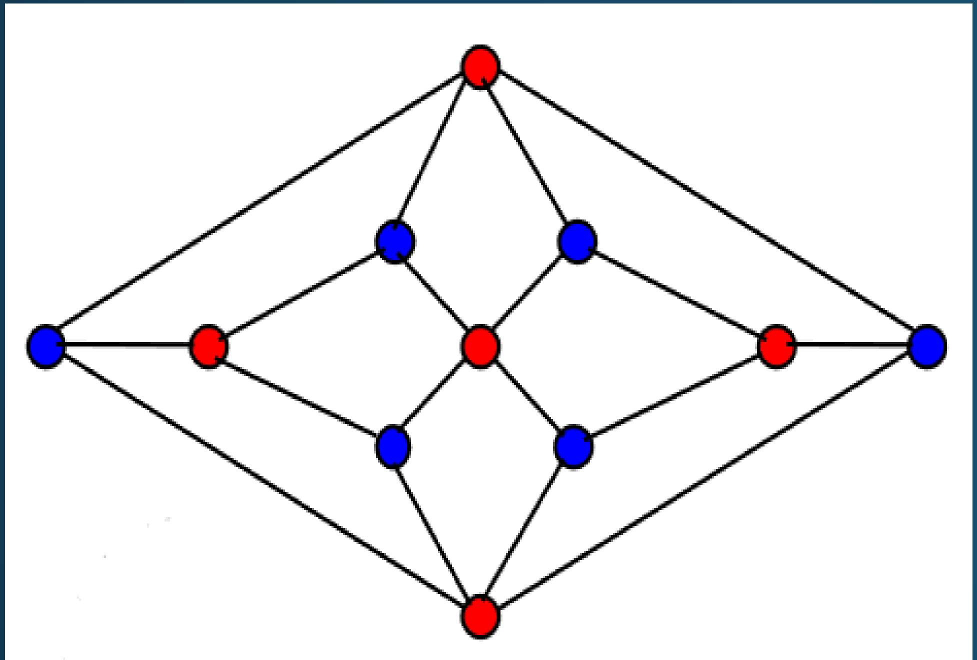
- 判定思路：
  - 将图中黄色的点记为集合V_1
  - G-V_1有4个连通分支，而$|V_1|=3$
  - G不是Hamilton图

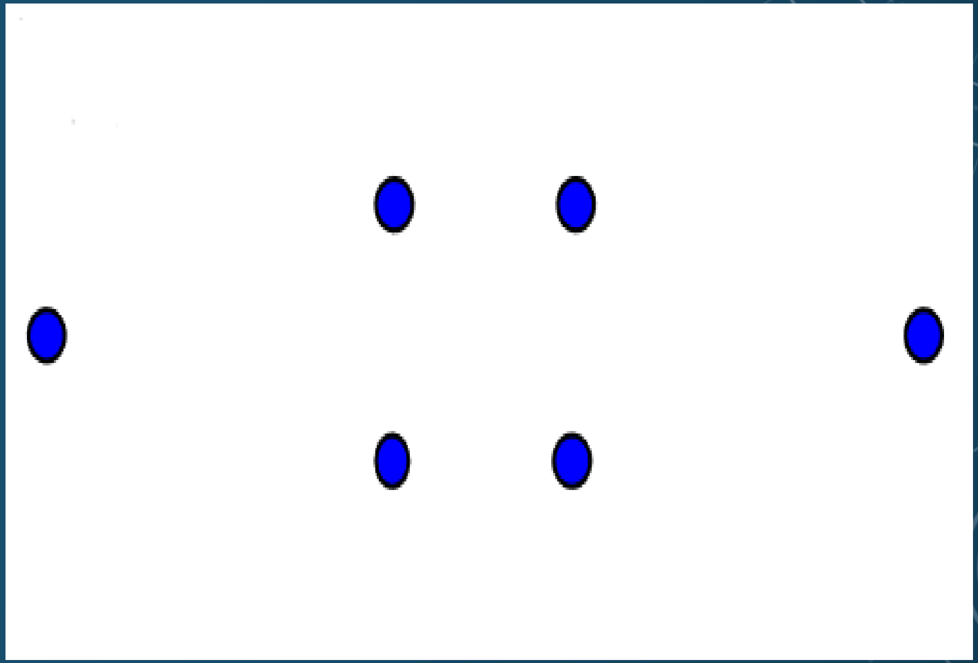
哈密顿图的判定-必要条件-例2



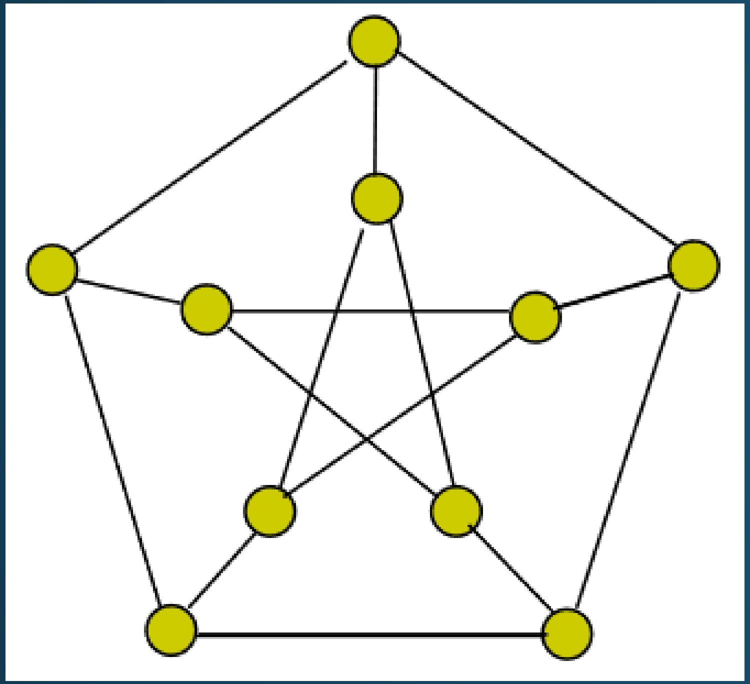


哈密顿图的判定-必要条件-例3





哈密顿图的判定-必要条件-说明



- **反例** Petersen图满足上述必要条件，但不是哈密尔顿图
- **说明：**
  - 定理中的条件是哈密顿图的必要条件, 但不是充分条件
  - 可利用该定理判断某些图不是哈密顿图

哈密顿图的判定-例

- **例：设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.**
- **回顾：什么是割点？什么是桥？**
- **证：**

1. **设v为割点, 则$p(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$. 根据定理, G不是哈密顿图。**
2. **若G是K_2(K_2有桥), 它显然不是哈密顿图。 除K_2外, 其他的有桥连通图均有割点. 由(1), 得证G不是哈密顿图。**

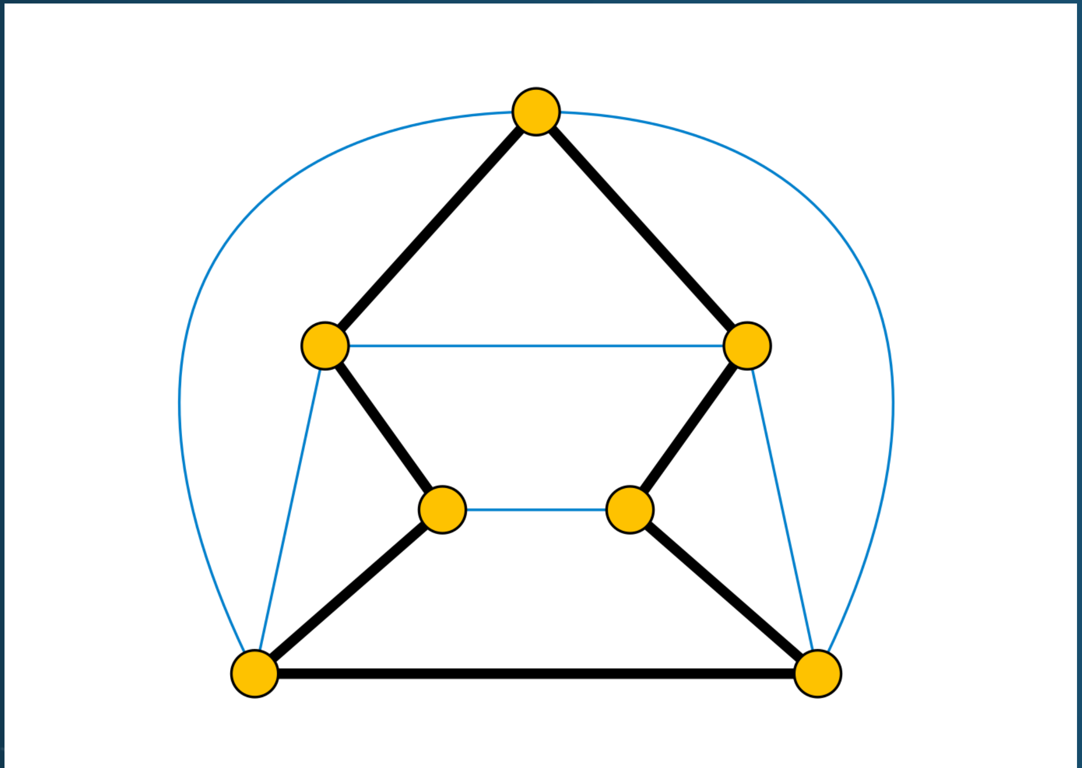
哈密顿图的判定-充分条件

- **Dirac定理（1952）** G是无向简单图，当$|G|=n\geq 3$时，若$\delta(G)\geq n/2$，则G中存在哈密顿回路。

- **Ore定理 (1960)** 当$|G|=n\geq 3$时，若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n，则G中存在哈密顿回路。

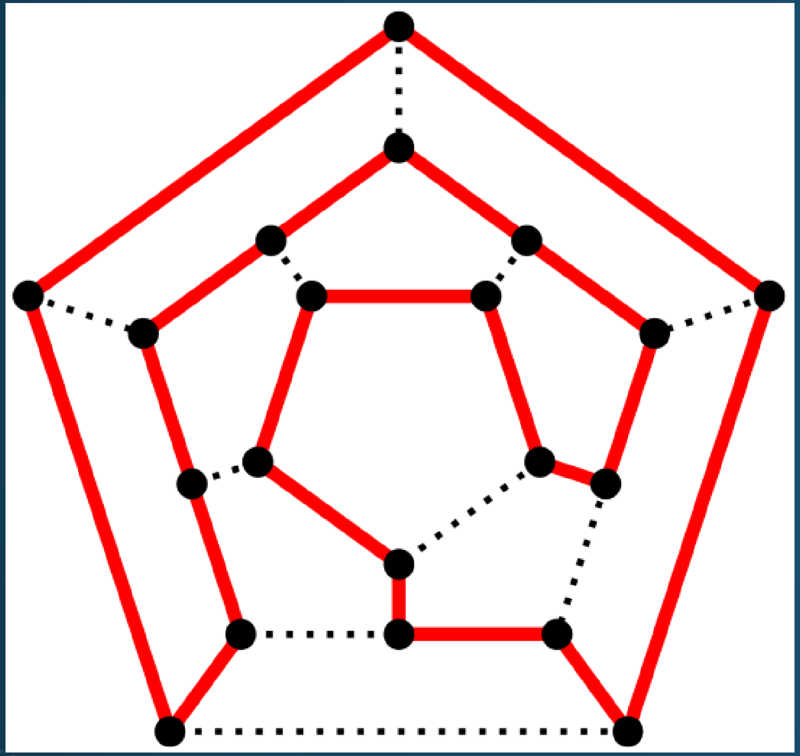
- **推论** 设G是n阶无向简单图，若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于$n-1$，则G中存在哈密顿通路。

哈密顿图的判定-充分条件-例



- 判定思路：
  - G中顶点数量为7
  - 任意两个不相邻的顶点度数和至少为7
  - 满足**Ore**定理要求
  - G为哈密顿图

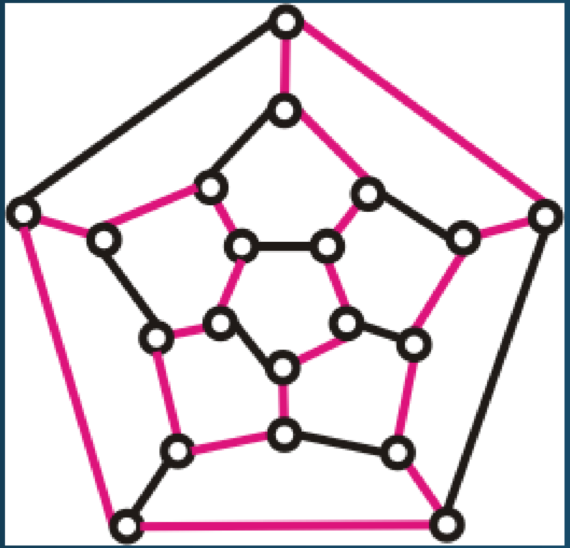
哈密顿图的判定-充分条件-反例

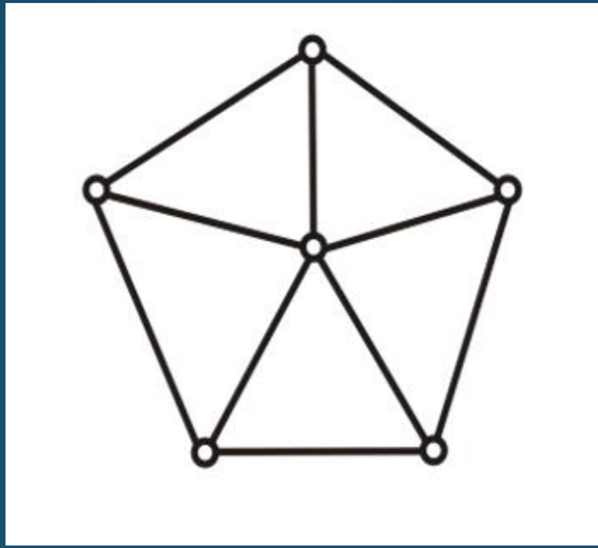


反例1

- 反例2：$n(\geq 5)$个顶点的圈是哈密顿图, 不满足条件。
- 定理中的条件是充分条件，但不是必要条件。

哈密顿图的判定-可行方法





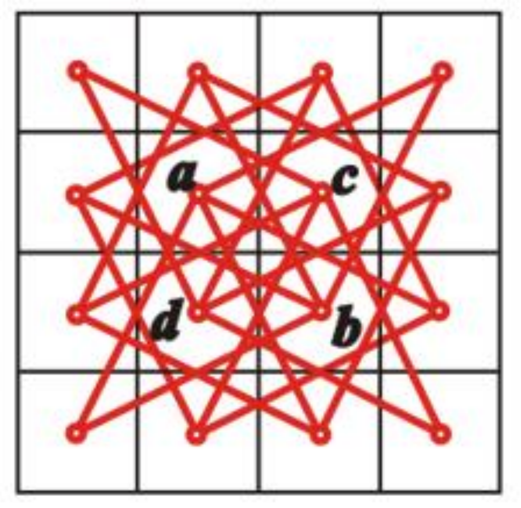
1. **观察法：** 观察出一条哈密顿回路。

2.**满足充分条件：** 任何两个不相邻顶点的度数之和大于等于顶点个数（6），所以它是哈密顿图

哈密顿图的判定-可行方法

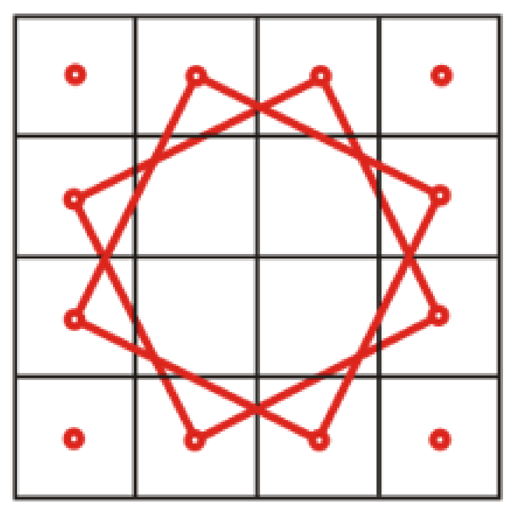
3. 不满足必要条件

- **例** 4×4国际象棋盘上的骑士巡游问题：骑士是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处?



- **解** 取$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则$p(G-V_1) = 6 > |V_1|$

  由定理, 图中无哈密顿回路, 故问题无解。



- **在8×8国际象棋盘上, 骑士巡游问题是否有解?**

应用实例-分配问题

例 某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈?

1. 对问题进行抽象转化
2. 对转化后图性质的判定
3. 得出结论，或进一步构造可行解

应用实例-分配问题

某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈?

解：

1. 抽象问题：作无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中$V=\{v|v$为与会者$\}$，$E=\{(u,v) \mid u,v\in V$, u与v有共同语言, 且$u\neq v\}$。G为简单图。

2. 判定性质：根据条件, $\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$。于是，$\forall u,v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$。由Ore定理可知G为哈密顿图。

3. 构造解：服务员在G中找一条哈密顿回路C，按C中相邻关系安排座位即可。

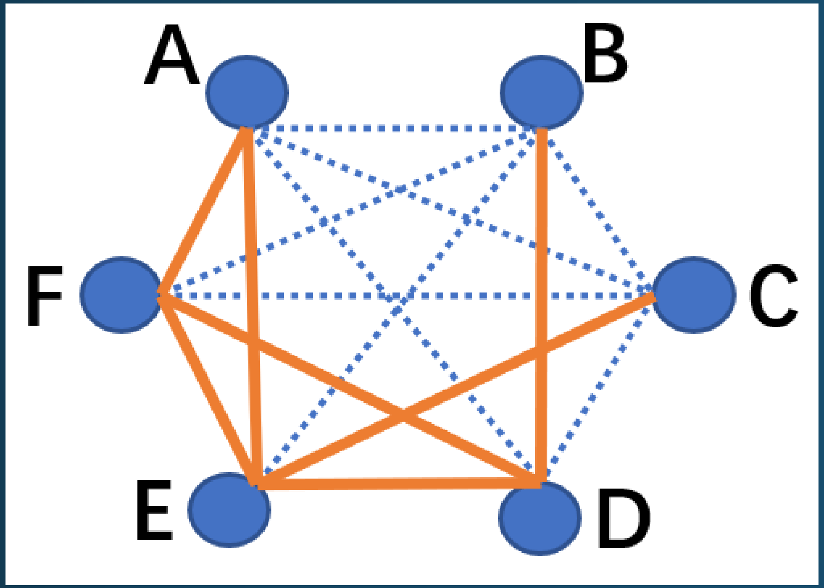
应用实例-分配问题-练习

- 计算机学院在6天里需要安排6门课（A,B,C,D,E,F）的考试，每天考1门。假设学生选课情况可归为四类，分别选课：ACD，BCF，BE，AB。请问应该如何安排日程，才能使得没有人必须连续两天都有考试?
- 思考：
  - 如何抽象问题？将什么抽象为顶点？什么抽象为边？

应用实例-分配问题-练习

- 计算机学院在6天里需要安排6门课（A,B,C,D,E,F）的考试，每天考1门。假设学生选课情况可归为四类，分别选课：ACD，BCF，BE，AB。请问应该如何安排日程，才能使得没有人必须连续两天都有考试?
- 解：
  - 以课程为顶点，对应可连续安排的考试添加边得图G
  - 在图G中寻找哈密顿路径

应用实例-分配问题-练习

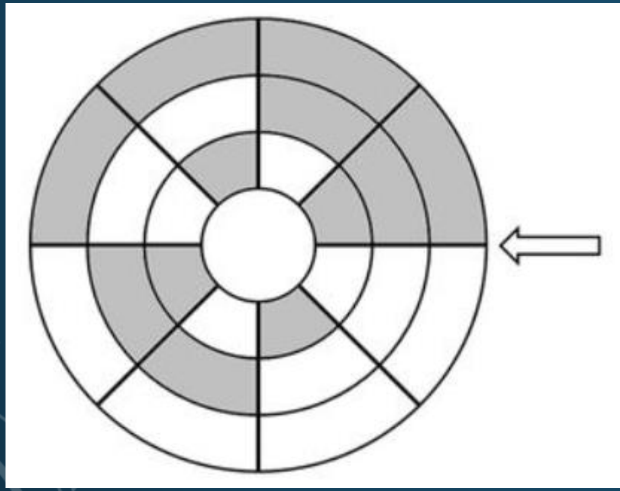


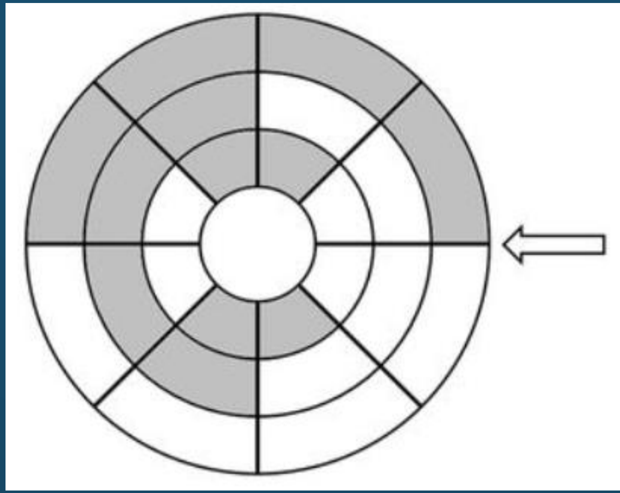
解：

- 以课程为顶点，对应可连续安排的考试添加边得图G
- 在图G中寻找哈密顿路径
- 对应哈密顿路径，如CEAFDB，安排考试日期

应用实例-格雷码

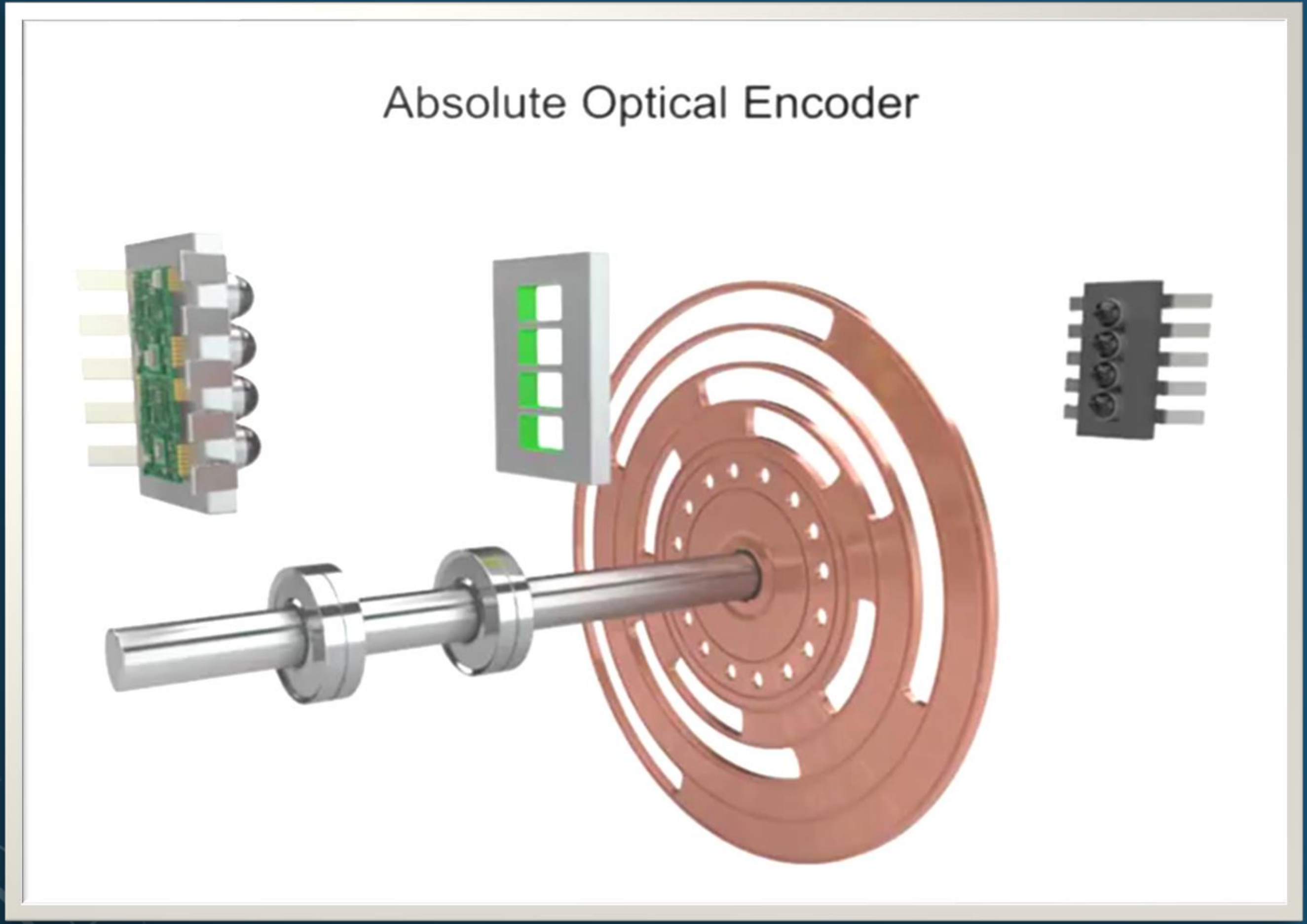
- 数字系统、机械工具、汽车制动等系统中，常用编码盘将模拟信号转化为数字信号。
- 当触点靠近两个扇面边界时，可能会带来误差。如何将转化带来的误差降到最低？

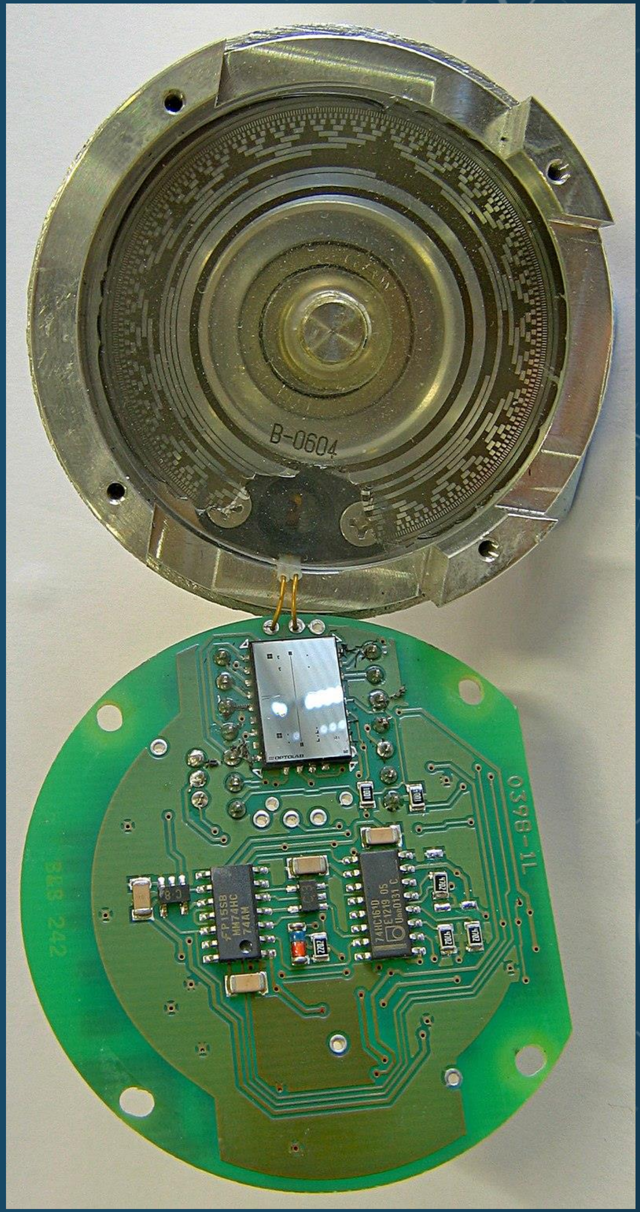




缩小相邻位置所对应数码的差别！

应用实例-格雷码





应用实例-格雷码

- **格雷码**:将2^n个长为n的二进制串组成一个序列，使得将序列按圆形排列时一对相邻的二进制串只有一位不同。
  - 例如，000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100是一个格雷码

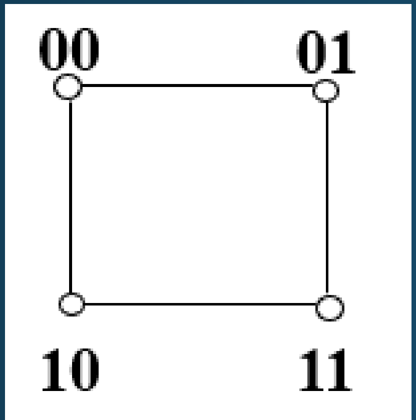
- 如何设计格雷码？

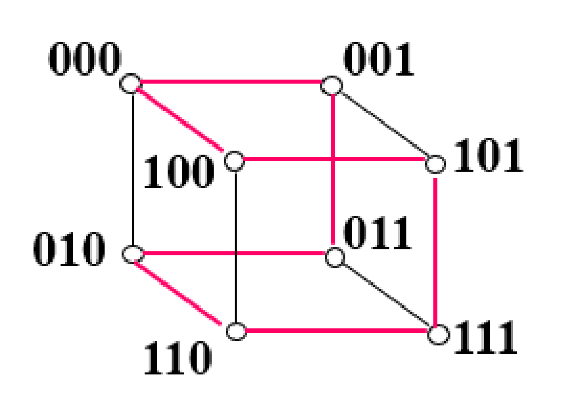
应用实例-格雷码

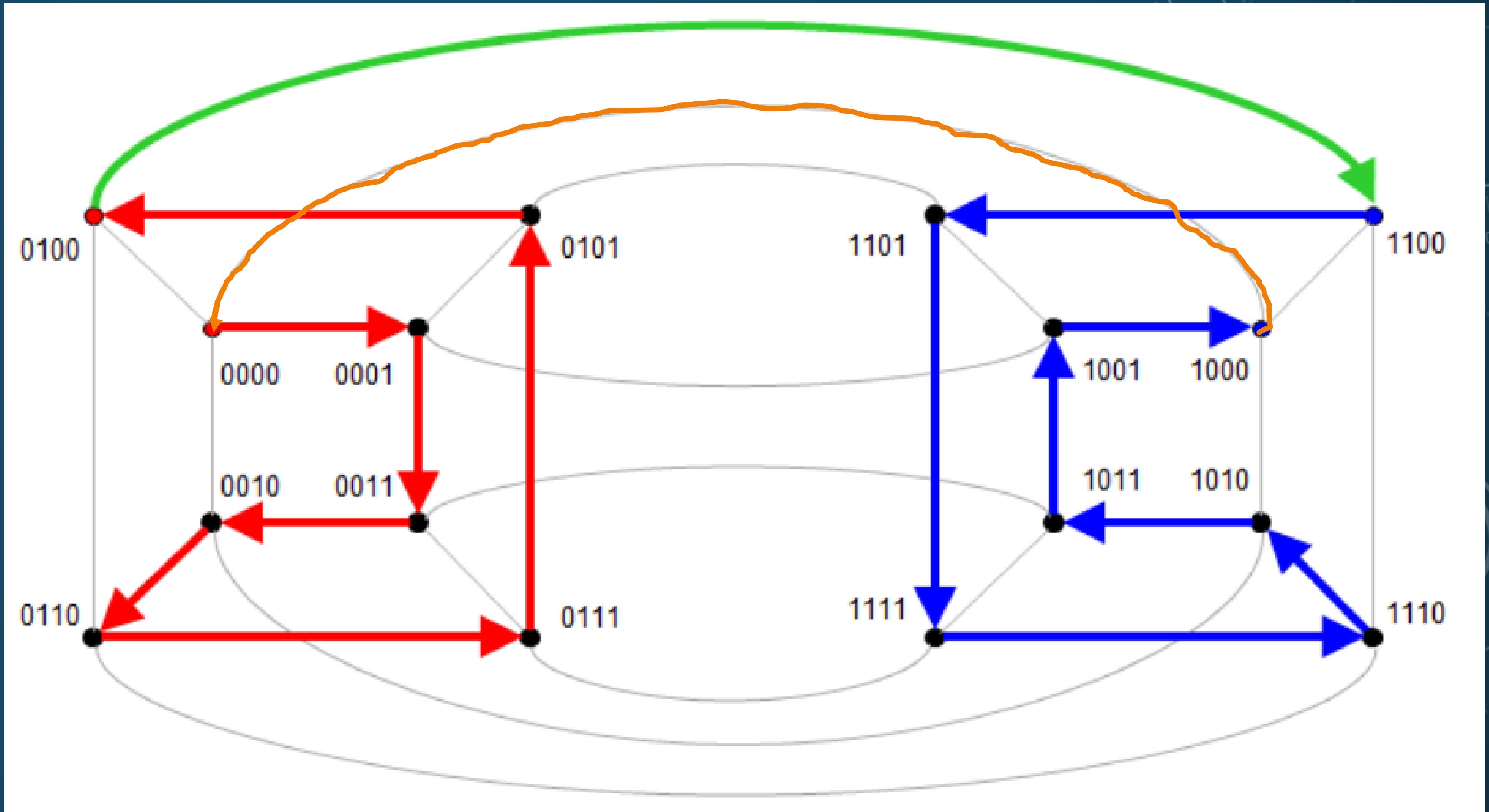
- 如何设计格雷码?

1. 抽象问题:
   - 构造n维立方体图: 2^n个顶点, 每个顶点表示一个n位串, 两个顶点之间有一条边当且仅当它们的n位串仅相差一位。
   - n位格雷码对应n维立方体图中的一条哈密顿回路
2. 判定性质:
   - 当$n \geq 2$时, 图中一定存在哈密顿回路
3. 构造哈密顿回路

应用实例-格雷码


00
01
10
11


000
001
100
101
010
011
110
111


0100
0101
1101
1100
0000
0001
1001
1000
0010
0011
1011
1010
0110
0111
1111
1110

总结

- 哈密顿“环游世界”
- 哈密顿图的判定
  - 必要条件
  - 充分条件
- 应用和拓展
  - 分配问题
  - 格雷码

作业

- P154/6.15, 6.16