离散数学

集合论
3.2 集合的基本运算

3.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

  $\cup$ $\cap$ $-$ $\sim$ $\oplus$
- 文氏图（**John Venn**）
- 例题
- 集合运算的算律
- 集合包含或恒等式的证明

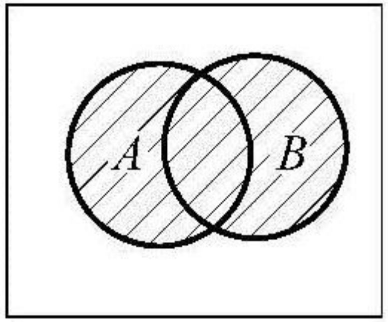
集合基本运算的定义

- 并　$A\cup B = \{\, x \mid x\in A \vee x\in B \,\}$
- 交　$A\cap B = \{\, x \mid x\in A \wedge x\in B \,\}$
- 相对补　$A-B = \{\, x \mid x\in A \wedge x\notin B \,\}$
- 对称差　$A\oplus B = \{x \mid (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$

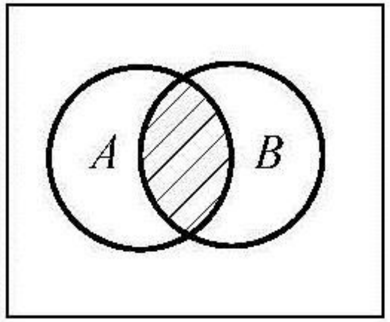
  $= (A-B)\cup(B-A)$

  $= (A\cup B)-(A\cap B)$
- 绝对补　$\sim A = E-A = \{x \mid x\in E\wedge x\notin A\} = \{x \mid x\notin A\}$

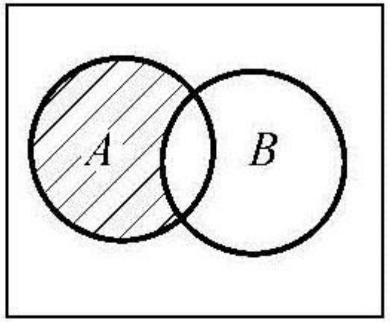
文氏图表示



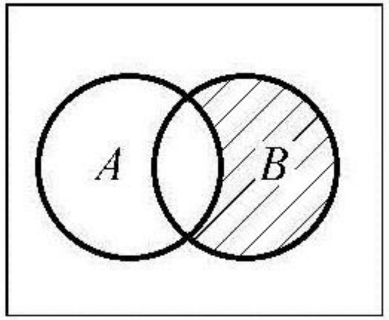
$A \cup B$



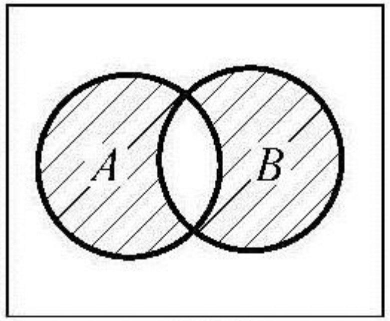
$A \cap B$



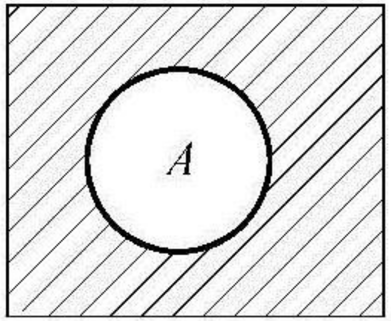
$A - B$



$B - A$



$A \oplus B$



$\sim A$

关于运算的说明

- 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$
- 某些重要结果

  $\varnothing \subseteq A - B \subseteq A$

  $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$（后面证明）

  $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$

例1

F:一年级大学生的集合　S：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合　M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合

L：爱好文学学生的集合　P：爱好体育运动学生的集合

- 所有计算机系二年级学生都选修离散数学
- 数学系一年级的学生都没有选修离散数学
- 数学系学生或爱好文学或爱好体育运动
- 只有一、二年级的学生才爱好体育运动
- 除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

- $T \subseteq (M \cup R) \cap S$
- $R \cap S \subseteq T$
- $(M \cap F) \cap T = \varnothing$
- $M \subseteq L \cup P$
- $P \subseteq F \cup S$
- $S - (M \cup R) \subseteq P$

例2

- 分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述那些集合相等。
- $S_1 = \{ 1, 2, \ldots, 8, 9 \}$, $S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$,
- $S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$, $S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$, 则 $X = S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4$, $X \cap S_2 = \varnothing$, 则 $X = S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$， $X \nsubseteq S_3$, 则 $X = S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$, 则 $X = S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$， $X \nsubseteq S_1$, 则 X 与 $S_1, \ldots, S_5$ 都不等

集合运算的算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合运算的算律

	$-$	$\sim$
$D.M$ 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- 证明 $X = Y$
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X \subseteq Y$

- 任取 x，

  $x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$

例3 证明$A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

任取x

$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B)$

任取x

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B)$

$\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

- 找到集合T 满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$，从而有$X \subseteq Y$

- 例4 $A-B \subseteq A \cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A-B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

反证法证 $X \subseteq Y$

欲证$X \subseteq Y$, 假设命题不成立，必存在 x 使得 $x \in X$ 且 $x \notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 假设 $A \cup B \subseteq C$ 不成立，

　　则 $\exists x\ (x \in A \cup B \wedge x \notin C)$

　　因此 $x \in A$ 或 $x \in B$，且 $x \notin C$

　　若 $x \in A$, 则与 $A \subseteq C$ 矛盾；

　　若 $x \in B$, 则与 $B \subseteq C$ 矛盾.

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X\subseteq Y \Rightarrow X\cap Z\subseteq Y\cap Z,\ X\cup Z\subseteq Y\cup Z$$

例7 证明 $A\cap C\subseteq B\cap C \wedge A-C\subseteq B-C \Rightarrow A\subseteq B$

证 $A\cap C\subseteq B\cap C$，$A-C \subseteq B-C$

上式两边求并，得

$(A\cap C)\cup(A-C) \subseteq (B\cap C)\cup(B-C)$

$\Rightarrow (A\cap C)\cup(A\cap\sim C) \subseteq (B\cap C)\cup(B\cap\sim C)$

$\Rightarrow A\cap(C\cup\sim C) \subseteq B\cap(C\cup\sim C)$

$\Rightarrow A\cap E \subseteq B\cap E$

$\Rightarrow A \subseteq B$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- 证明 $X=Y$
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证明$X=Y$

任取 x ,

$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

$x \in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in X$

或者

$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

例8 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$

等式替换证明$X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明$A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 (假设交换律、分配律、同一律、零律成立)

$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ 同一律

$=A\cap(E\cup B)$ 分配律

$=A\cap(B\cup E)$ 交换律

$=A\cap E$ 零律

$=A$ 同一律

反证法证明$X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 x 使得 $x\in X$且$x\notin Y$，或者存在 x 使得 $x\in Y$且$x\notin X$，然后推出矛盾.

例10 证明以下等价条件

$$\underset{(1)}{A\subseteq B} \Leftrightarrow \underset{(2)}{A\cup B=B} \Leftrightarrow \underset{(3)}{A\cap B=A} \Leftrightarrow \underset{(4)}{A-B=\varnothing}$$

证明顺序：

$$(1) \Rightarrow (2),\ (2) \Rightarrow (3),\ (3) \Rightarrow (4),\ (4) \Rightarrow (1)$$

(1) ⇒(2)

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x，

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述（2）得证.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

(1) (2) (3) (4)

(2) $\Rightarrow$(3)

$$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$$

（将$A \cup B$用B代入)

(3) $\Rightarrow$(4)

假设$A-B \neq \varnothing$, 即$\exists x \in A-B$，那么$x \in A$且$x \notin B$. 而$x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$.

从而与$A \cap B = A$矛盾.

(4) $\Rightarrow$(1)

假设$A \subseteq B$不成立，那么

$$\exists x\ (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A-B \Rightarrow A-B \neq \varnothing$$

与条件（4）矛盾.

集合运算法证明$X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$$X=Y \Rightarrow X\cap Z=Y\cap Z,\ X\cup Z=Y\cup Z，X-Z=Y-Z$$

例11 证明$A\cap C=B\cap C \land A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

证 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$ 得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C$

因此

$$A\oplus C=B\oplus C \Rightarrow (A\oplus C)\oplus C=(B\oplus C)\oplus C$$

$$\Rightarrow A\oplus(C\oplus C)=B\oplus(C\oplus C) \Rightarrow A\oplus\varnothing=B\oplus\varnothing \Rightarrow A=B$$

作业

- P74
- 3.13（3）（5）
- 3.14（4）
- 3.17（2）（4）

问题？