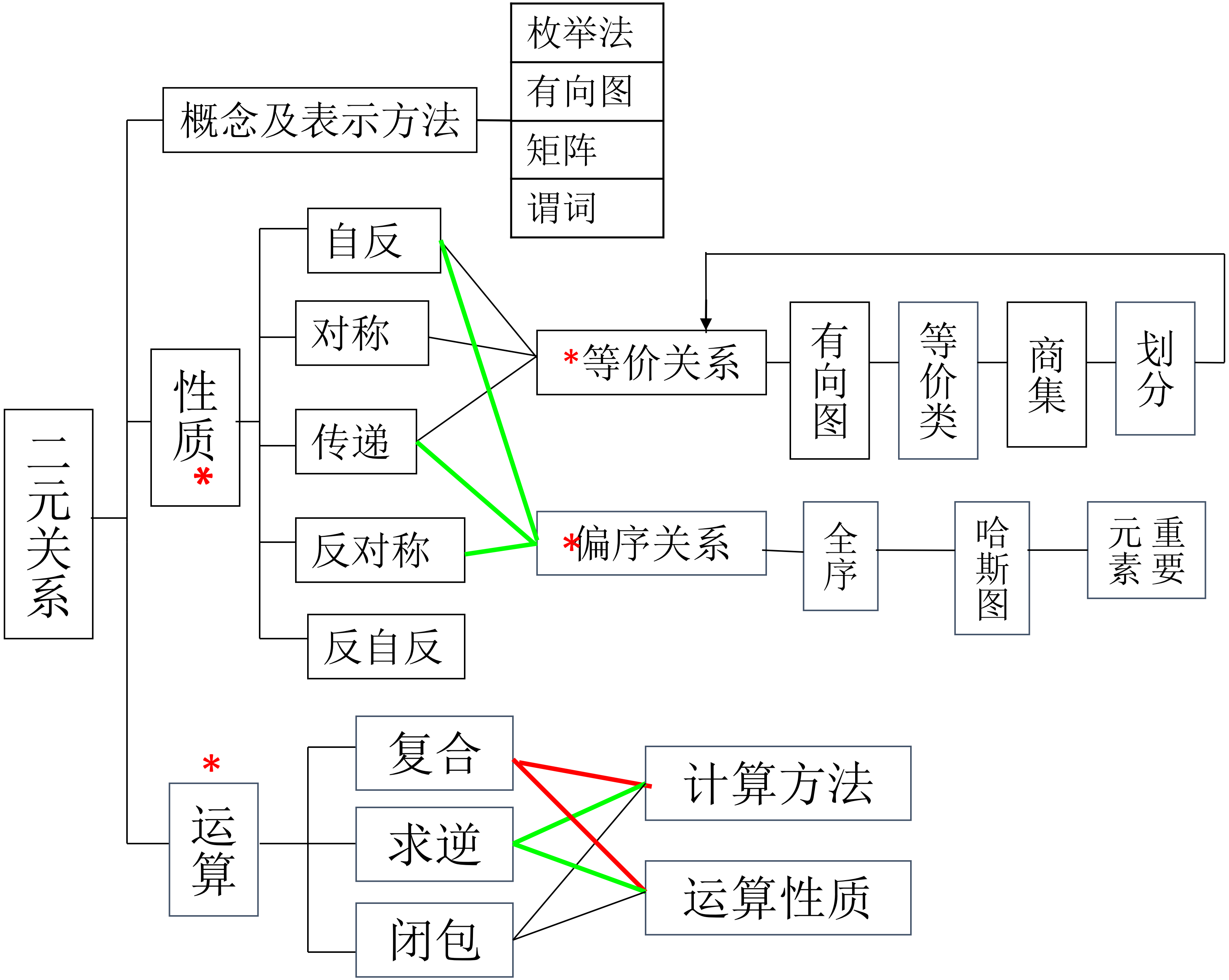
离散数学

集合论
习题课

本章小结



二元关系
概念及表示方法
枚举法
有向图
矩阵
谓词
性质*
自反
对称
传递
反对称
反自反
*等价关系
有向图
等价类
商集
划分
*偏序关系
全序
哈斯图
重要元素
*
运算
复合
求逆
闭包
计算方法
运算性质

1、A={0,1} B={1,2} 求$A^2 \times B$。

$A\times B=\{<x,y> | x\in A \wedge y\in B\}$

$A^2 = A \times A=\{<0,0>,<0,1>,<1,0>,<1,1>\}$

$A^2 \times B=\{<<0,0>,1>,<<0,1>,1>,<<1,0>,1>,<<1,1>,1>,$

$<<0,0>,2>,<<0,1>,2>,<<1,0>,2>,<<1,1>,2>\}$

2、$X=\{a,b,c\}$ $Y=\{s\}$ 列出X到Y的所有关系。

$X \times Y=\{<a,s>,<b,s>,<c,s>\}$

$X \times Y$的任何一个子集都是一个 从X到Y的关系。如果$|X|=m$ $|Y|=n$ 则有2^{mn}个从X到Y的关系, 故,有$2^3=8$个关系:

$R_0=\Phi$

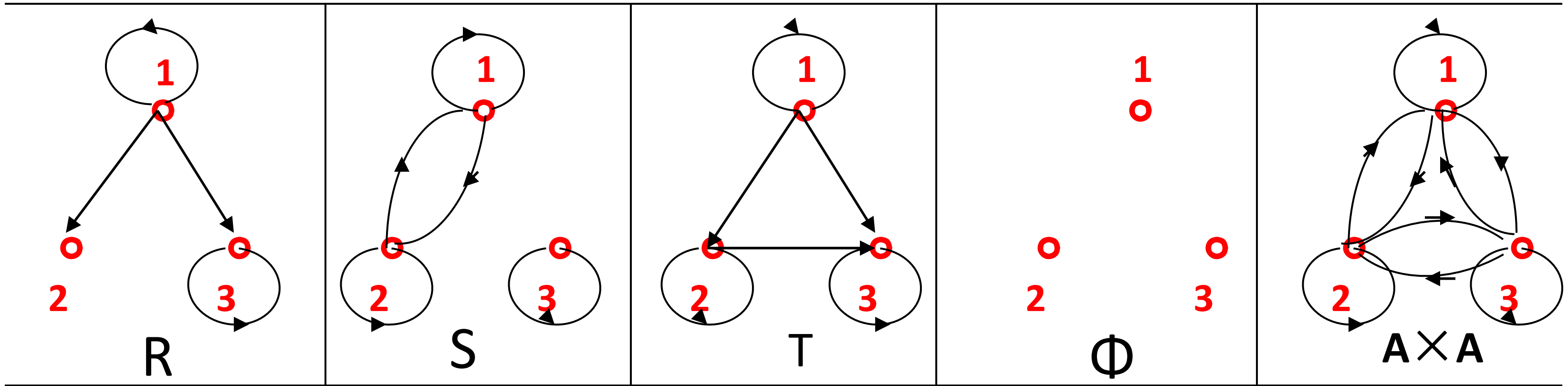
$R_1=\{<a,s>\}$ $R_2=\{<b,s>\}$ $R_3=\{<c,s>\}$

$R_4=\{<a,s>,<b,s>\}$ $R_5=\{<a,s>,<c,s>\}$ $R_6=\{<b,s>,<c,s>\}$

$R_7=\{<a,s>,<b,s>,<c,s>\}$

3、A={1,2,3}，A上五个关系如下。这五个关系中，哪些是等价关系？如果是等价关系，求其商集。

哪些是偏序关系？如是偏序关系,画哈斯图,并求A的极小(大)元、最小(大)元、上界与下界、上确界和下确界。



	自反	反自反	对称	反对称	传递
R	N	N	N	Y	Y
S	Y	N	Y	N	Y
T	Y	N	N	Y	Y
Φ	N	Y	Y	Y	Y
A×A	Y	N	Y	N	Y

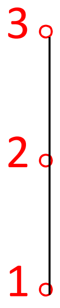
等价关系：S和A×A，对应的商集分别是：

$A/S=\{\{1,2\},\{3\}\}$　$A/A\times A=\{\{1,2,3\}\}$

偏序关系：T

A的极小元、最小元、下界、下确界都是：1

A的极大元、最大元、上界、上确界都是：3

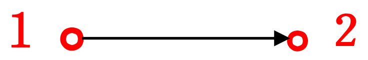


4、R和S都是A上关系，

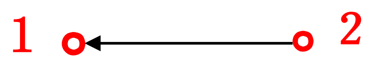
a) **R和S都自反，R∘S 一定自反。**

因为任取$a\in A$, 由于R和S都自反， 所以$<a,a>\in R$ 及$<a,a>\in S$ 故 $<a,a>\in R\circ S$ $\therefore R\circ S$自反，

b) **R和S都反自反，R∘S不一定反自反。**



R

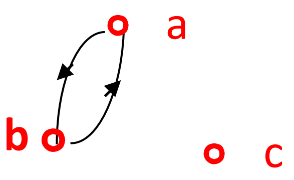


S

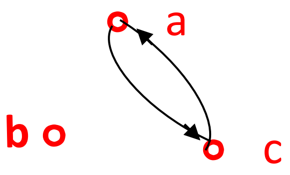
R∘S

c) **R和S都对称，R∘S不一定对称。**

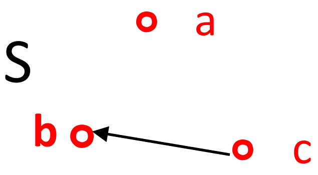
R



S

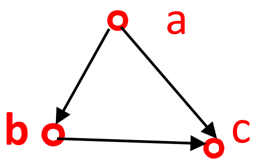


R∘S

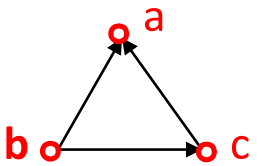


d) **R和S都传递，R∘S不一定传递。**

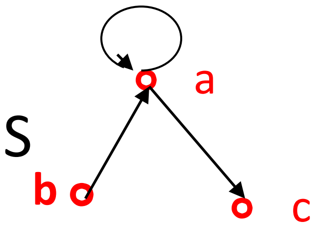
S



R



R∘S



5、S是X上关系。

a)证明S传递，当且仅当$S \circ S \subseteq S$ (可用此定理判定传递)

证明：充分性，已知任取$x,y,z \in X$, 且有$\langle x,y\rangle \in S, \langle y,z\rangle \in S$,

根据关系的复合得$\langle x,z\rangle \in S \circ S \subseteq S$,由已知得$\langle x,z\rangle \in S$,所以S传递。

必要性，已知S传递，任取$\langle x,y\rangle \in S \circ S$,根据关系的复合得

$\exists z(z \in X \wedge \langle x,z\rangle \in S \wedge \langle z,y\rangle \in S)$,由S传递得$\langle x,y\rangle \in S$

所以$S \circ S \subseteq S$

b)证明S自反，当且仅当$I_X \subseteq S$。(可用此定理判定自反)

证明：充分性，已知$I_X \subseteq S$，

任取$x \in X$, 有$\langle x,x\rangle \in I_X$, 由已知得$\langle x,x\rangle \in S$, 所以S自反。

必要性，已知S自反，

任取$\langle x,y\rangle \in I_X$，得$x=y$，而S自反，所以$\langle x,y\rangle \in S$ $\therefore I_X \subseteq S$

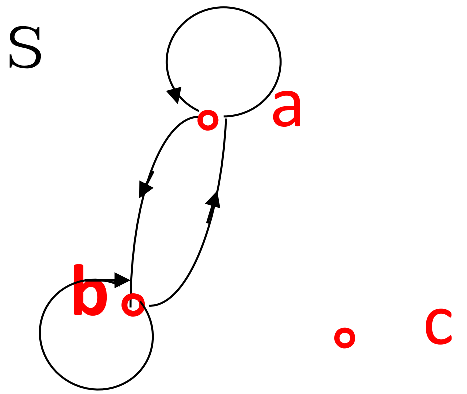
c) S 是 X 上关系，证明 S 是自反和传递，则 $S\circ S=S$。其逆为真吗?

证明: 由5 a)得 S 传递，则 $S\circ S\subseteq S$，只证明 $S\subseteq S\circ S$

任取$<x,y>\in S$, 又已知 S 自反，所以$<x,x>\in S$,于是$<x,x>\in S\wedge<x,y>\in S$，由关系的复合得$<x,y>\in S\circ S$

所以有 $S\subseteq S\circ S$,最后得 $S\circ S = S$ 。

其逆不一定为真。例如S如图所示:



它满足 $S\circ S = S$，但 S 不自反。

关系性质证明方法

设R是A上关系，

一. 证明R的自反性：

方法1　用自反定义证：任取 $x\in A$, 证出 $\langle x,x\rangle\in R$.

方法2　用恒等关系 I_A 证：证出 $I_A\subseteq R$.

方法3　用自反闭包证：证出 $r(R)=R$, 即 $R\cup I_A=R$.

二. 证明R的反自反性：

方法1　用反自反定义证：任取 $x\in A$, 证出 $\langle x,x\rangle\notin R$.

三. 证明R的对称性：

方法1　用对称定义证：任取 $x,y\in A$, 设 $\langle x,y\rangle\in R$, 证出 $\langle y,x\rangle\in R$.

方法2　用求逆关系证：证出 $R^c=R$.

方法3　用对称闭包证：证出 $s(R)=R$, 即 $R\cup R^c=R$.

四. 证明R的反对称性：

方法1 用定义1证：任取 x, y∈A, 设<x, y>∈R, <y, x>∈R. 证出x=y。

方法2 用定义2证：任取 x, y∈A, x≠y, 设<x, y>∈R, 证出<y, x>∉R.

方法3 用定理证：证出 $R \cap R^c \subseteq I_A$.

五. 证明R的传递性：

方法1 用传递定义证：任取x, y, z∈A, 设<x, y>∈R, <y, z>∈R, 证出 <x, z>∈R.

方法2 用传递闭包证：证出t(R)=R, 即 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... = R$.

方法3 用定理证：证出 $S \circ S \subseteq S$

6、R和S都A上是自反、对称、传递的，求证$R\cap S$也是自反、对称和传递的。

证明：1. 证明$R\cap S$的自反性

方法1　用自反定义证：任取 $x\in A$，　（证出$\langle x,x\rangle\in R\cap S$）

因R和S都自反，所以有$\langle x,x\rangle\in R$，$\langle x,x\rangle\in S$，于是有$\langle x,x\rangle\in R\cap S$，所以$R\cap S$也自反。

方法2　用恒等关系I_A证：（证出$I_A\subseteq R\cap S$）

因R和S都自反，所以$I_A\subseteq R$，$I_A\subseteq S$，所以$I_A\subseteq R\cap S$，所以$R\cap S$也自反。

方法3　用自反闭包证：（证出$r(R\cap S)=R\cap S$，　即 $(R\cap S)\cup I_A= R\cap S$）

因R和S都自反，所以$r(R)=R$，$r(S)=S$，

$r(R\cap S)=(R\cap S)\cup I_A = (R\cup I_A)\cap(S\cup I_A)= r(R)\cap r(S)=R\cap S$

所以$R\cap S$也自反。

2. 证明$R\cap S$的对称性：

方法1　用对称定义证：任取 $x, y\in A$, 设$\langle x, y\rangle\in R\cap S$，（证出 $\langle y, x\rangle\in R\cap S$）

则$\langle x, y\rangle\in R$，$\langle x, y\rangle\in S$，因为R和S对称，所以有$\langle y, x\rangle\in R$，$\langle y, x\rangle\in S$，于是 $\langle y, x\rangle\in R\cap S$。∴$R\cap S$对称。

方法2　用求逆关系证：（证出 $(R\cap S)^c=R\cap S$）

因为R和S对称，所以有$R^c=R$，$S^c=S$，而$(R\cap S)^c=R^c\cap S^c= R\cap S$ ，　∴$R\cap S$对称。

方法3　用对称闭包证：（证出 $s(R\cap S)=R\cap S$，　即$(R\cap S)\cup(R\cap S)^c =R\cap S$.）

因为R和S对称，所以$s(R)=R$, $s(S)=S$

$$\begin{aligned} s(R\cap S) &= (R\cap S)\cup(R\cap S)^c =(R\cap S)\cup(R^c\cap S^c) \\ &=(R\cup R^c)\cap(R\cup S^c)\cap(S\cup S^c)\cap(S\cup R^c) \\ &=(s(R)\cap(R\cup S^c))\cap(s(S)\cap(S\cup R^c)) \\ &=(R\cap(R\cup S^c))\cap(S\cap(S\cup R^c))=R\cap S \qquad \text{(吸收律)} \end{aligned}$$

∴$R\cap S$对称。

三、证明R的传递性：

方法1　用传递定义证：任取 $x, y, z \in A$, 设 $\langle x, y\rangle \in R\cap S$, $\langle y, z\rangle \in R\cap S$, （证出$\langle x, z\rangle \in R\cap S$）

$\langle x, y\rangle \in R\cap S \wedge \langle y, z\rangle \in R\cap S$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S$

$\Leftrightarrow (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R) \wedge (\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle y, z\rangle \in S)$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in S$　　　（因为R、S传递）

$\Leftrightarrow \langle x, z\rangle \in R\cap S$　　　所以$R\cap S$传递。

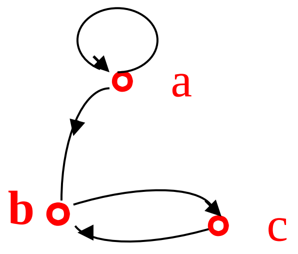
方法2　用传递闭包证：证出 $t(R\cap S)=R\cap S$,

即　$(R\cap S)\cup(R\cap S)^2\cup(R\cap S)^3\cup\ldots=R\cap S$.

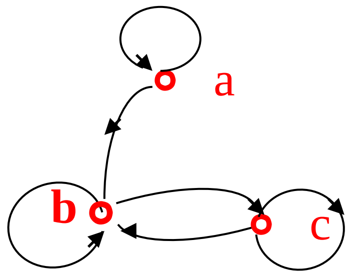
方法3　用定理证：证出 $S\circ S\subseteq S$

用方法2、方法3证明此题的传递性有很大难度。

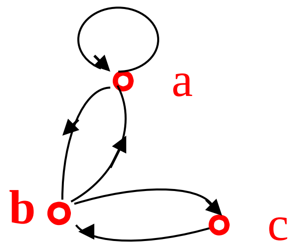
8、R的有向图如图所示，求r(R)、s(R)、t(R)。



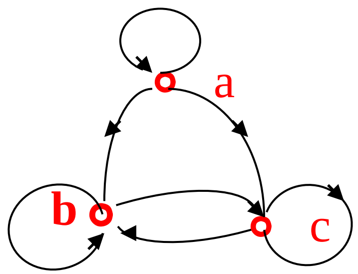
R



r(R)



s(R)



t(R)

9、R_1和R_2是A上关系，且$R_2 \subseteq R_1$，求证

a) $r(R_2) \subseteq r(R_1)$， b) $s(R_2) \subseteq s(R_1)$， c) $t(R_2) \subseteq t(R_1)$。

证明：a) $r(R_2)=R_2 \cup I_A \subseteq R_1 \cup I_A = r(R_1)$,

b) $s(R_2)= R_2 \cup (R_2)^c \subseteq R_1 \cup (R_1)^c = s(R_1)$,

（因为$R_2 \subseteq R_1$ ，所以 $(R_2)^c \subseteq (R_1)^c$ ）

c) 先用归纳法证明$(R_2)^i \subseteq (R_1)^i$ ，

(1)i=1时， $R_2 \subseteq R_1$ 显然结论成立

(2)假设i≤k时，结论成立，即$(R_2)^i \subseteq (R_1)^i$ ；

(3)i=k+1时， $(R_2)^{k+1}= (R_2)^k \circ R_2 \subseteq (R_1)^k \circ R_1 = (R_1)^{k+1}$ ，

$t(R_2) = R_2 \cup (R_2)^2 \cup ... \cup (R_2)^k \cup ...$

$\subseteq R_1 \cup (R_1)^2 \cup ... \cup (R_1)^k \cup \cdots = t(R_1)$。

10、X是集合，且|X|=4，X有多少个不同的划分？

解.

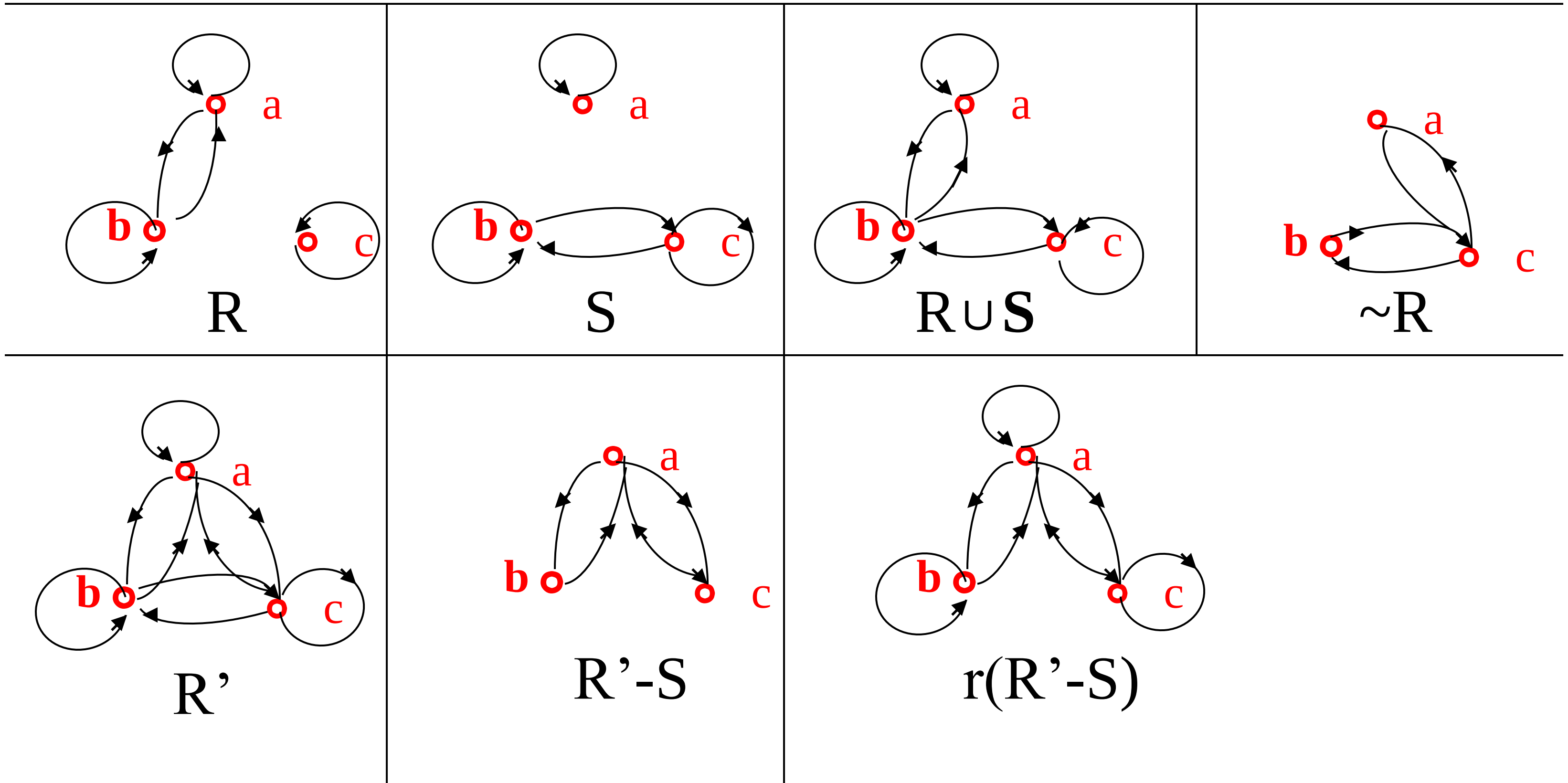
<table>
<tr><th>划分块数</th><th colspan="4">各块元素个数</th><th>相应划分个数</th><th>总数</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="4">4</td><td>$C_4^4 = 1$</td><td rowspan="5">15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">3</td><td>$C_4^1 = 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td>$\frac{1}{2} C_4^2 = 3$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">2</td><td>$C_4^2 = 6$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>$C_4^4 = 1$</td></tr>
</table>

11、R和S都是A上等价关系,下面哪个是A上等价关系?证明或举反例说明.

a) R∪S　　　b) R∩S　　　c) ~R (即A×A-R)

d) R-S　　　e)R^2　　　f) r(R-S)

解.a) c) d) f)不是。请看反例:



b). $R \cap S$是等价关系，前面已经证明过

e). ①证R^2自反，任取$a \in A$，因为R自反，所以$\langle a, a\rangle \in R$，根据关系的复合得，$\langle a, a\rangle \in R \circ R$，即$\langle a, a\rangle \in R^2$，所以$R^2$自反。

②证R^2对称，$(R^2)^c = (R^c)^2 = R^2$ （由R对称得$R^c = R$） ∴R^2对称

③证R^2传递，任取$a, b, c \in A$，设有$\langle a, b\rangle \in R^2$，$\langle b, c\rangle \in R^2$，

根据关系的复合得，

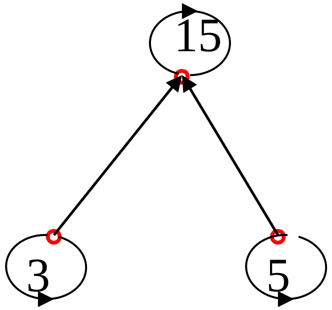
$(\exists d \in A \wedge \langle a, d\rangle \in R \wedge \langle d, b\rangle \in R) \wedge (\exists e \in A \wedge \langle b, e\rangle \in R \wedge \langle e, c\rangle \in R)$，

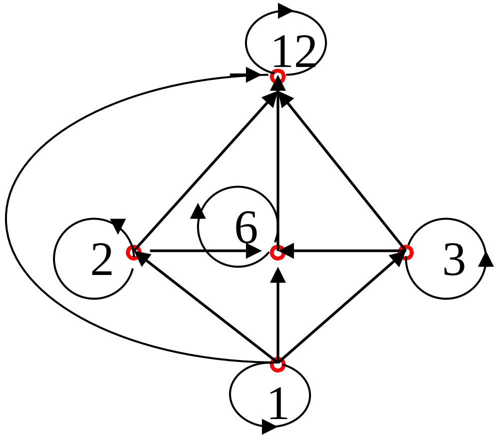
由于R传递，所以有$\langle a, b\rangle \in R$，$\langle b, c\rangle \in R$， ∴$\langle a, c\rangle \in R^2$

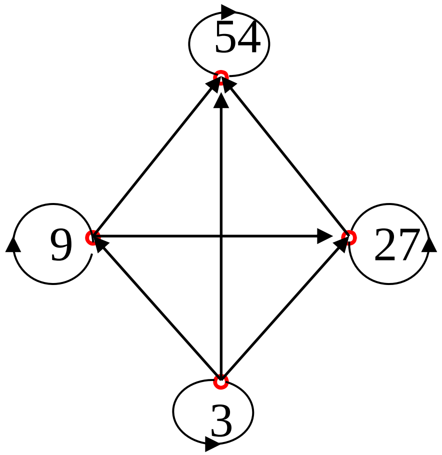
所以R^2传递。

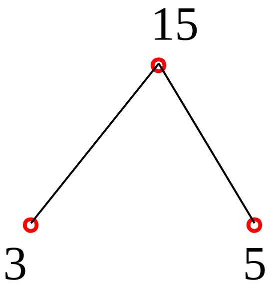
最后得R^2是等价关系。

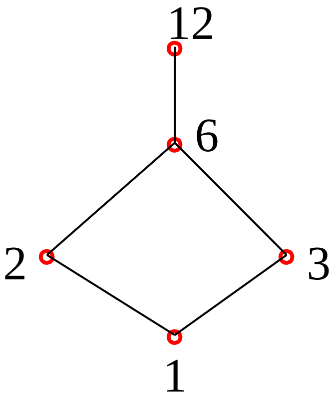
11、给定集合{3,5,15}，{1,2,3,6,12}，{3,9,27,54}， ≼为整除关系，分别画出上述集合上的≼的关系图，哈斯图，并指出哪些是全序关系。

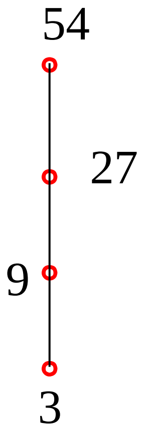




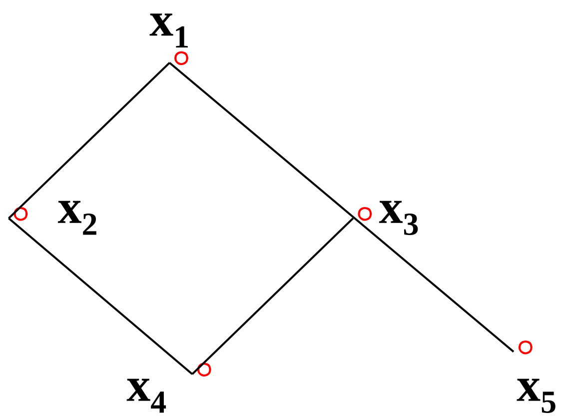








12、P={x_1,x_2, x_3, x_4, x_5}, P上偏序关系的哈斯图如图所示，求子集 {x_1,x_2, x_3}，{x_2, x_3, x_4}，{x_3, x_4, x_5}和P的极小(大)元、最小(大)元、上界、下界、最小上界和最大下界(上确界和下确界)。



子　　集	极小元	极大元	最小元	最大元	上界	下界	上确界	下确界
{x_1,x_2, x_3}	x_2, x_3	x_1	无	x_1	x_1	x_4	x_1	x_4
{x_2,x_3, x_4}	x_4	x_2, x_3	x_4	无	x_1	x_4	x_1	x_4
{x_3, x_4 ,x_5}	x_4, x_5	x_3	无	x_3	x_1, x_3	无	x_3	无
P	x_4, x_5	x_1	无	x_1	x_1	无	x_1	无

问题？