南京工业大学<u> 概 率 统 计 </u>试题(A)卷

标 准 答 案

2019—2020 学年第一学期 使用班级<u>18 级</u>

一、填空题(每题 3 分，共 21 分)

1、$\dfrac{1}{15}$。 2、0.7。 3、1。 4、1。 5、57。 6、0. 7、$t(3)$。

二、选择题(每题 3 分，共 12 分)

1、(B)。2、(C)。3、(B)。4、(D)。

三(8 分)、解： 设 A={甲河流泛滥}，B= {乙河流泛滥}。

(1) 由题意，该地区遭受水灾可表示为 $A\cup B$，于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)$$
$$=0.1+0.2-0.1\cdot 0.3=0.27 \qquad 4$$

(2) 乙河流泛滥时甲河流泛滥的概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.1\cdot 0.3}{0.2}=0.15. \qquad 8$$

四(12 分)、(1) $\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 ax^b dx=\dfrac{a}{b+1}$； $0.75=EX=\int_0^1 x\cdot ax^b dx=\dfrac{a}{b+2}$。

$\therefore a=3,b=2$，故 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$ 3

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$ 6

(3) $P\{\frac{1}{2}<X<1\}=1-F(\frac{1}{2})=\frac{7}{8}$。 9

(4) $EX^2=\int_0^1 x^2 3x^2 dx=\dfrac{3}{5}$，故 $DX=\dfrac{3}{5}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{3}{80}$ 12

五(6 分)、设 X 表示餐厅每天的营业额，X_i 表示第 i(i=1,2,…,400)位顾客的消费额，则 $X_i\sim U(20,100)$，所以，$EX_i=60,\ DX_i=\dfrac{80^2}{12}=\dfrac{1600}{3}$，且 $X=\sum\limits_{i=1}^{400}X_i$。

(1) 该餐厅每天的平均营业额为

$$EX=E(\sum_{i=1}^{400}X_i)=\sum_{i=1}^{400}EX_i=60\times 400=24000\ （元） \qquad 2$$

(2) 由于 $DX=D(\sum\limits_{i=1}^{400}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{400}DX_i=\dfrac{1600}{3}\times 400=\dfrac{640000}{3}$，故由中心极限定理得

$$P\{24000-760<X<24000+760\}=P\{-760<X-24000<760\}$$

$$=P\left\{\frac{-760}{\sqrt{\frac{640000}{3}}}<\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\le\frac{760}{\sqrt{\frac{640000}{3}}}\right\}\approx 2\Phi(1.645)-1=0.9 \qquad 6$$

六(15分)、(1) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

显然仅当$0<x<z-x$，即$0<2x<z$时，上述积分不等于零，故

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^{z/2} xe^{-(z-x)}dx=e^{-z}+(\frac{z}{2}-1)e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$ 5

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^x x\cdot xe^{-y}dx=2$；

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^x x^2\cdot xe^{-y}dx=6$；

$DX=EX^2-(EX)^2=2$。同理，$EY=3$，$DY=3$； 9

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^x xy\cdot xe^{-y}dx=8$。

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=8-2\cdot 3=2$。

于是，$\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\dfrac{2}{\sqrt{2\times 3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 14

由于$\rho_{XY}\ne 0$，故X与Y不独立。 15

七(10分)、解： 总体X的数学期望$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\theta-1}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

令$\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X}$，则得未知参数θ的矩估计量为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$. 5

设x_1，x_2，…x_n是X_1，X_2，…, X_n相应于的样本值，则似然函数为

$L(\theta)=\theta^{\frac{n}{2}}(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\sqrt{\theta}-1}$，$0<x_i<1.(i=1，2，…，n)$，

$\ln L=\dfrac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)$, $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{2\theta}+\dfrac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$,

令$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$, 解得θ的极大似然估计值为$\hat{\theta}=n^2/(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)$.

从而得θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=n^2/(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)$. 10

八(6分)、解： 由题设得到

$$\bar{x}=\frac{1}{10}(74+95+\cdots+67)=71.2，\ s^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=245.51。$$

又由置信度为$1-\alpha=1-0.05=0.95$得临界值$t_{0.025}(9)=2.2622$。

故置信区间为$[71.2-2.2622\sqrt{\dfrac{245.51}{10}}, 71.2+2.2622\sqrt{\dfrac{245.51}{10}}]=[59.99, 82.41]$。 6

九(10分)、解： (1) 待验假设H_0：$\mu=1000$，H_1：$\mu\ne 1000$

由$\alpha=0.05\Rightarrow t_{\alpha/2}=t_{0.025}(15)=2.1315$，又由$\bar{x}=946$、$s=120$，可算得统计量观测值$t$为

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{s^2/n}}=\frac{946-1000}{\sqrt{120^2/16}}=-1.8$$

因$|t|=1.8<t_{0.025}(15)=2.1315$，故可以认为这批灯泡的平均寿命与标准值的差异不显著。 5

(2) 待验假设为H_0'：$\mu\ge 1000$，H_1'：$\mu<1000$。

由 $\alpha=0.05\Rightarrow t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(15)=1.7531$， 而统计量观测值亦同(1)，即$t=-1.8$，因$t=-1.8<-t_{0.05}(15)=-1.7531$，故拒绝$H_0$，即可以认为这批灯泡不合格。 10