

离散数学

第二章 一阶逻辑 复习 习题课

第二章 一阶逻辑 小结

本章重点掌握内容：

- 1.各基本概念清楚。
- 2.会命题符号化。
- 3.熟练掌握等价公式和永真蕴涵式。
- 4.会写前束范式。

第二章 习题课

一. 命题符号化

- a) 所有教练员是运动员
- b) 某些运动员是大学生
- c) 某些教练是年老的，但是健壮的
- d) 金教练既不老但也不健壮
- e) 不是所有运动员都是教练
- f) 某些大学生运动员是国家选手
- g) 没有一个国家选手不是健壮的
- h) 所有老的国家选手都是运动员
- i) 没有一位女同志既是国家选手又是家庭妇女
- j) 有些女同志既是教练员又是国家运动员
- k) 所有运动员都倾佩某些教练
- l) 有些大学生不倾佩运动员

- a) $\forall x (J(x) \rightarrow L(x))$ b) $\exists x (L(x) \wedge S(x))$
- c) $\exists x (J(x) \wedge O(x) \wedge V(x))$ d) $J(j) \wedge \neg O(j) \wedge \neg V(j)$
- e) $\neg \forall x (L(x) \rightarrow J(x))$ 或者 $\exists x (L(x) \wedge \neg J(x))$
- f) $\exists x (S(x) \wedge L(x) \wedge C(x))$
- g) $\neg \exists x (C(x) \wedge \neg V(x))$ 或者 $\forall x (C(x) \rightarrow V(x))$
- h) $\forall x ((C(x) \wedge O(x)) \rightarrow L(x))$
- i) $\neg \exists x (W(x) \wedge C(x) \wedge H(x))$
- j) $\exists x (W(x) \wedge J(x) \wedge C(x))$
- k) $\forall x (L(x) \rightarrow \exists y (J(y) \wedge A(x, y)))$
- l) $\exists x (S(x) \wedge \forall y (L(y) \rightarrow \neg A(x, y)))$

二、令 $P(x)$, $L(x)$, $R(x, y, z)$, $E(x, y)$ 分别表示“ x 是一个点”，“ x 是一条直线”，“ z 通过 x 和 y ”和“ $x=y$ ”。符号化下面的句子：

对每两个点有且仅有一条直线通过该两点。

解： $\forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x, y))$
 $\rightarrow \exists z (L(z) \wedge R(x, y, z) \wedge \forall t ((L(t) \wedge R(x, y, t)) \rightarrow E(t, z))))$

三、利用谓词公式翻译下列命题。

a) 对于每一个实数 x , 存在一个更大的实数 y 。

b) 存在实数 x , y 和 z , 使得 x 与 y 之和大于 x 与 z 之积。

a) 设 $R(x)$: x 是实数, $G(x, y)$: $x > y$

$$\forall x (R(x) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge G(y, x)))$$

b) 设 $R(x)$: x 是实数, $G(x, y)$: $x > y$

$$f(x, y) = x + y \quad g(x, y) = xy$$

$$\exists x \exists y \exists z (R(x) \wedge R(y) \wedge R(z) \wedge G(f(x, y), g(x, z)))$$

$$\text{或者 } \exists x \exists y \exists z (R(x) \wedge R(y) \wedge R(z) \wedge G(x+y, xz))$$

*补充题:

1. 每个人的叔叔都是他父亲的弟弟。

设: $P(x)$: x 是人, $U(x, y)$: y 是 x 的叔叔, $B(x, y)$: x 是 y 的弟弟,
 $f(x)$ = x 的父亲

$$\forall x (P(x) \rightarrow \forall y (U(x, y) \rightarrow B(y, f(x))))$$

2. 下面是判定一个年号是否为闰年的命题:

“年号能被4整除并且不能被100整除的为闰年, 或者年号能被400整除的也是闰年.”

设 $Y(x)$: x 是年号; $D(x, y)$: x 可整除 y ; $R(x)$: x 是闰年

$$\forall x (Y(x) \rightarrow ((D(4, x) \wedge \neg D(100, x)) \rightarrow R(x)) \vee (D(400, x) \rightarrow R(x)))$$

- 寻求下列式子的真假值

$\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$, 其中 $P: 2 > 1$, $Q(x): x \leq 3$, $R(x): x > 5$, $a: 5$, 论域是 $\{-2, 3, 6\}$

解:

$$\forall x(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a) \Leftrightarrow (P \rightarrow \forall x Q(x)) \vee R(a)$$

$$\Leftrightarrow (P \rightarrow (Q(-2) \wedge Q(3) \wedge Q(6))) \vee R(5)$$

$$\Leftrightarrow (T \rightarrow (T \wedge T \wedge F)) \vee F$$

$$\Leftrightarrow (T \rightarrow F) \vee F \Leftrightarrow F \vee F \Leftrightarrow F$$

例：对下列谓词公式中的约束变元进行换名。

$$\forall x (P(x) \rightarrow (R(x) \vee Q(x))) \wedge \exists x R(x) \rightarrow \exists z S(x, z)$$

解： $\forall x (P(x) \rightarrow (R(x) \vee Q(x))) \wedge \exists x R(x) \rightarrow \exists z S(x, z)$

$$\Leftrightarrow \forall \mathbf{y} (P(\mathbf{y}) \rightarrow (R(\mathbf{y}) \vee Q(\mathbf{y}))) \wedge \exists \mathbf{t} R(\mathbf{t}) \rightarrow \exists \mathbf{u} S(x, \mathbf{u})$$

例：对下列谓词公式中的自由变元进行代入。

$$(\exists y A(x, y) \rightarrow \forall x B(x, z)) \wedge \exists x \forall z C(x, y, z)$$

解： $(\exists y A(x, y) \rightarrow \forall x B(x, z)) \wedge \exists x \forall z C(x, y, z)$

$$\Leftrightarrow (\exists y A(\mathbf{u}, y) \rightarrow \forall x B(x, \mathbf{v})) \wedge \exists x \forall z C(x, \mathbf{w}, z)$$

问题？

