离散数学

集合论

4.5 等价关系与偏序关系

4.5 等价关系与偏序关系

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应
- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

等价关系的定义与实例

- 定义 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若$\langle x,y\rangle\in R$, 称 x 等价于y, 记做 $x\sim y$.

- 实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系 R:

  $$R = \{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x \pmod 3 \equiv y \pmod 3 \}$$

  其中 $x \pmod 3 \equiv y \pmod 3$ 叫做 x 与 y 模3相等, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

- 例如 4(mod 3)=7(mod3) 3(mod 3)=6(mod3)

  R={<1,1>,<1,4>, <1,7>,<2,2>,<2,5>,<2,8>, <3,3>,<3,6>, <4,1>, <4,4>,<4,7>,<5,2>,<5,5>,<5,8>, <6,3>,<6,6>,<7,1>, <7,4>,<7,7>, <8,2>, <8,5>, <8,8>}

等价关系的验证

验证模 3 相等关系 R 为 A上的等价关系, 因为

$\forall x \in A$, 有$x(\text{mod } 3) \equiv x(\text{mod } 3)$

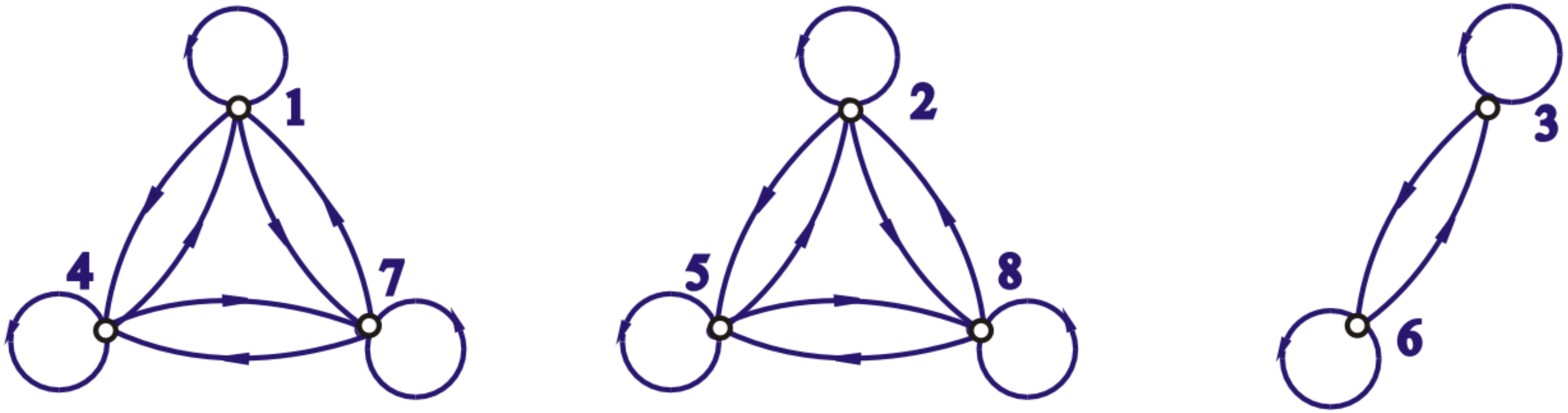
$\forall x, y \in A$, 若 $x\ (\text{mod } 3) \equiv y(\text{mod } 3)$, 则有 $y\ (\text{mod } 3) \equiv x(\text{mod } 3)$

$\forall x, y, z \in A$, 若$x\ (\text{mod } 3) \equiv y(\text{mod } 3)$, $y\ (\text{mod } 3) \equiv z(\text{mod } 3)$, 则有 $x\ (\text{mod } 3) \equiv z(\text{mod } 3)$

自反性、对称性、传递性得到验证

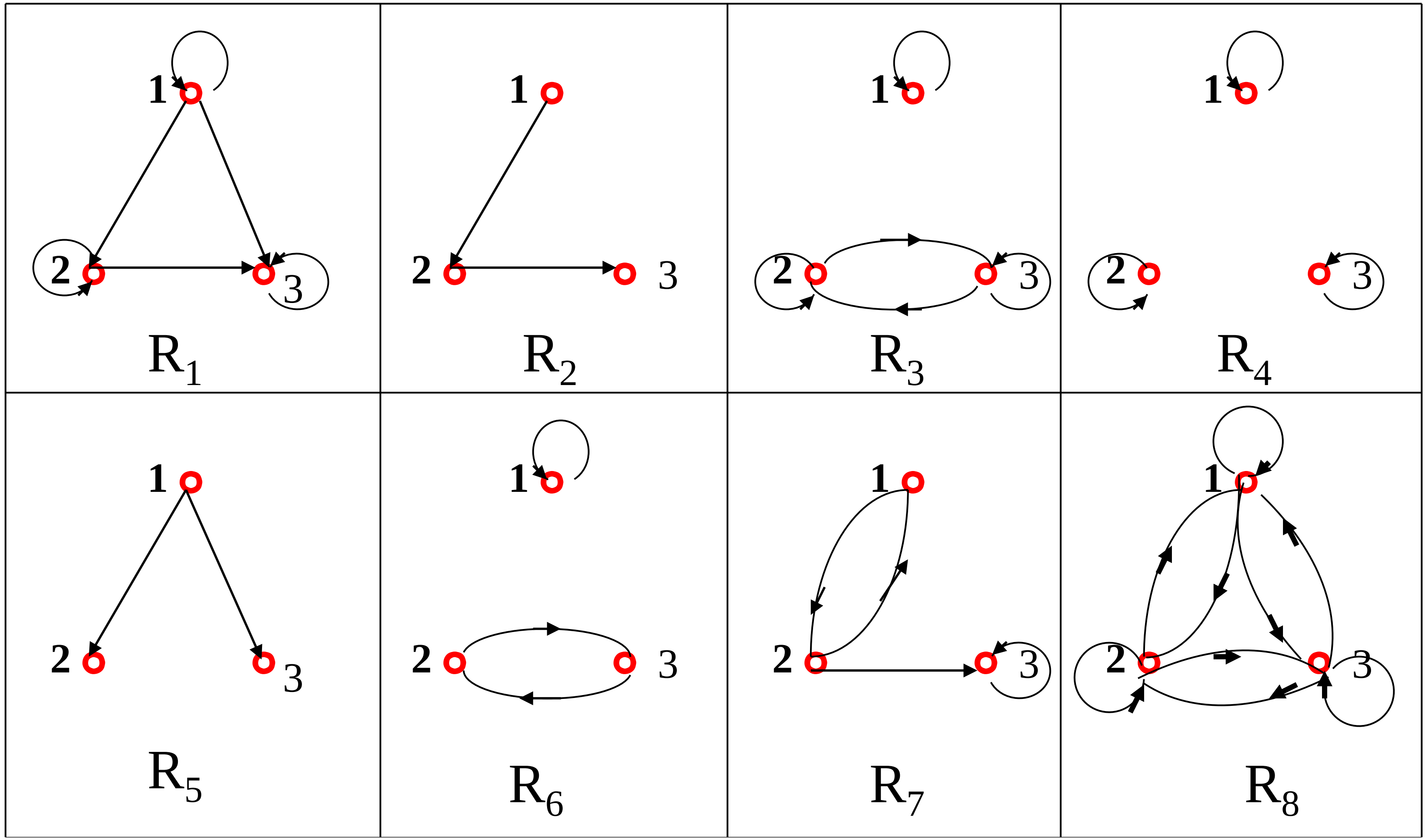
A上模3等价关系的关系图

- 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$,
  $R=\{ <x,y>| \ x,y \in A \wedge x \equiv y (\bmod 3) \}$



- 从关系图可看出，R是自反、对称、传递的关系，所以R是等价关系。
- 等价关系R的有向图可能由若干个独立子图（R图的一部分）构成的，每个独立子图都是完全关系图。
- 上述关系R图就是由三个独立的完全图构成的。

- 下面给出A={1,2,3}中的八个关系，根据等价关系有向图的特点，判断哪些是等价关系



等价类

- 定义　设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$， 令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \land xRy \}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于R 的等价类, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$.

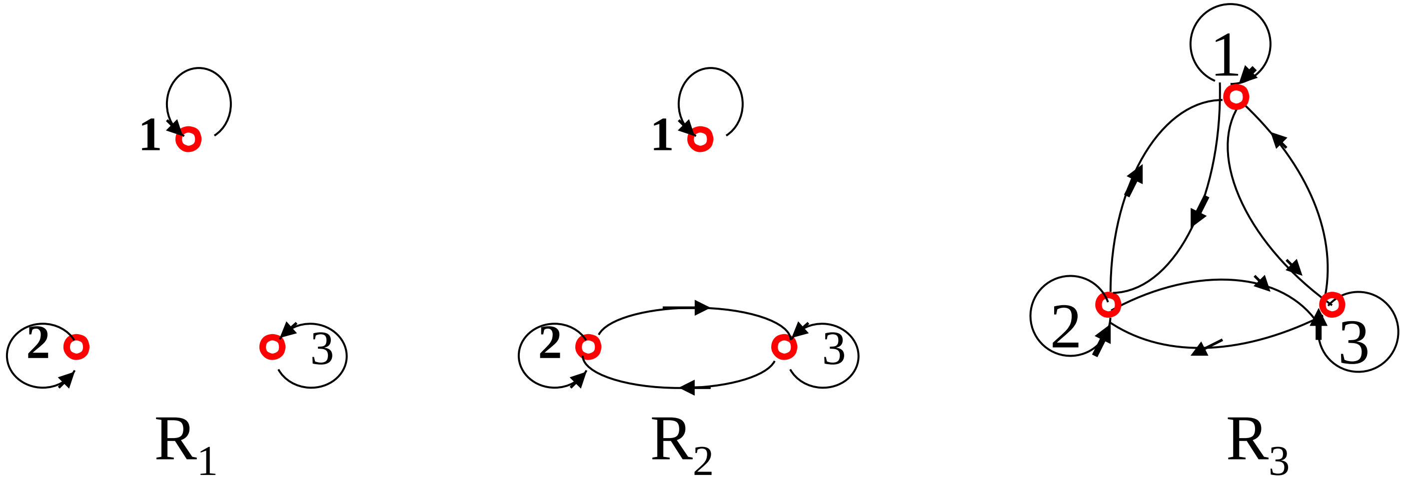
- 实例　A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

  [1]=[4]=[7]={1,4,7}

  [2]=[5]=[8]={2,5,8}

  [3]=[6]={3,6}

- 由等价关系图求等价类：R图中每个独立子图上的结点，构成一个等价类。不同的等价类个数=独立子图个数



- 上述三个等价关系各有几个等价类？说出对应的各个等价类
- 从上述模3同余关系例子中，可以归纳出等价类的性质：任何两个等价类要么相等，要么交集为空；那么在什么情况下相等？那么在什么情况下交集为空？

等价类的性质

- 定理1　设R是非空集合A上的等价关系, 则

  (1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是A的非空子集.

  (2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x\,R\,y$, 则 $[x]=[y]$.

  (3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R\, y$, 则 $[x]$与$[y]$不交.

  (4) $\cup\{\, [x] \mid x \in A\}=A$，即所有等价类的并集就是$A$.

- 证明∀x, y∈A, 如果 x R y, 则 [x]=[y].
- 证明：若x R y ，则任何a∈[x]，有<x, a>∈R，
- 由对称性得<y, x>∈R，再由传递性得<y, a>∈R, ∴a∈[y]，所以[x]⊆[y]。

  类似可证[y]⊆[x] ∴ [x]=[y]。

- 证明∀x, y∈A, 如果 x $\not R$ y, 则 [x]与[y]不交.

证明:设<x,y>∉R，假设[x]∩[y]≠Φ,则存在a∈[x]∩[y]，

∴ a∈[x]∧a∈[y],

∴ <x, a>∈R ,<y, a>∈R,由R对称得 <a, y>∈R

又由R传递得<x, y>∈R,产生矛盾。

实例

A={ 1, 2, … , 8 }上模 3 等价关系的等价类:

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$,

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$,

$[3]=[6]=\{3,6\}$

以上3 类两两不交，且$\{1,4,7\}\cup\{2,5,8\}\cup\{3,6\} = \{1,2, \ldots ,8\}$

商集

- 定义　设R为非空集合A上的等价关系, 以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记做A/R, $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$
- 实例 $A=\{1,2,\ldots,8\}$,

A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{ \{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\} \}$$

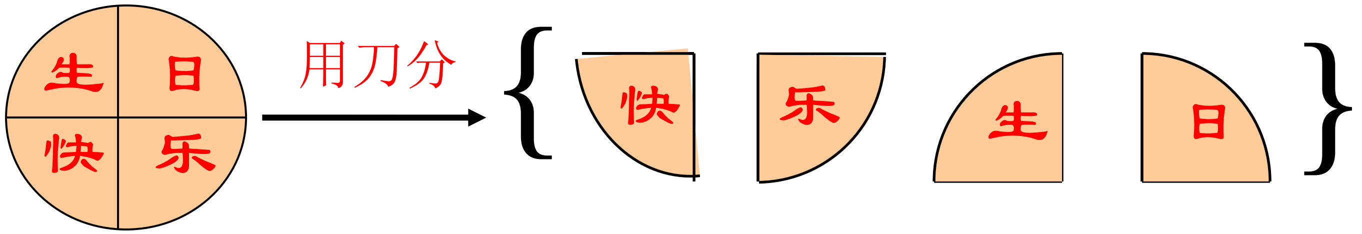
A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{ \{1\},\{2\}, \ldots ,\{8\}\}$$

$$A/E_A = \{ \{1, 2, \ldots ,8\} \}$$

- “商”和除法有关，比如把一块蛋糕平均分成四份，从两种不同的角度看这件事：
- 从算术角度看：1用4除,每份1/4,这就是“商”,于是:

  1=1/4+1/4+1/4+1/4
- 从集合角度看：



- 集合A用模3同余关系R划分，得到三个等价类，所以

  $A \xrightarrow{\text{用R分}} \{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}=\{[1]_R,[2]_R,[3]_R\}$----商集

集合的划分

定义 设A为非空集合，若A的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$ 满足下面条件：

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) $\forall x\forall y\,(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup\pi=A$

则称π是A的一个**划分**，称π中的元素为A的**划分块**.

例题

例1 设$A=\{a, b, c, d\}$,

给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下：

$\pi_1 = \{ \{a, b, c\}, \{d\} \}$， $\pi_2 = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d\} \}$

$\pi_3 = \{ \{a\}, \{a, b, c, d\} \}$, $\pi_4 = \{ \{a, b\}, \{c\} \}$

$\pi_5 = \{ \varnothing, \{a, b\}, \{c, d\} \}$, $\pi_6 = \{ \{a, \{a\}\}, \{b, c, d\} \}$

哪个（哪些）是A的划分？

则π_1和π_2 是A的划分, 其他都不是 A 的划分.

等价关系与划分的一一对应

- 商集 A/R 就是 A 的一个划分
- 不同的商集对应于不同的划分
- 任给 A 的一个划分π, 如下定义 A 上的关系 R:

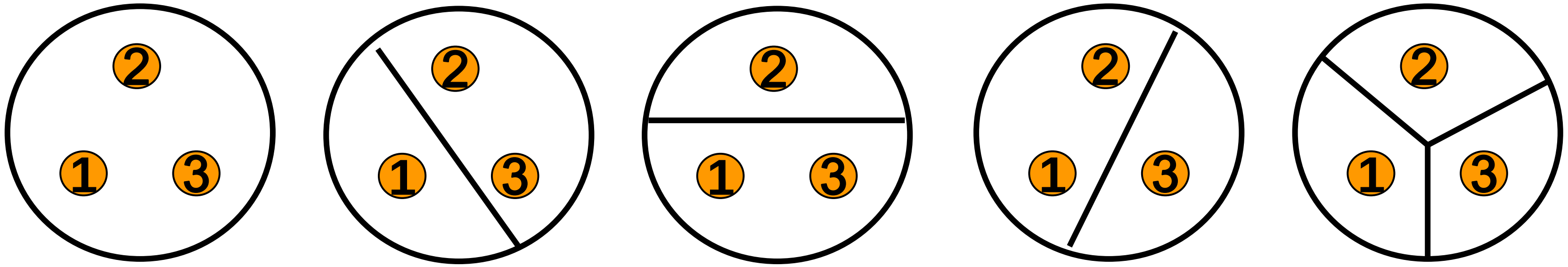
  $R = \{<x,y> \mid x,y \in A \wedge x$ 与 y 在π的同一划分块中$\}$

  则 R 为 A上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是π.

例2 给出$A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.

等价关系与划分之间的对应



π_1 π_2 π_3 π_4 π_5

- π_1对应于全域关系 E_A，π_5 对应于恒等关系 I_A
- π_2,π_3和π_3分别对应等价关系 R_2, R_3 和 R_4.

R_2={<2,3>,<3,2>}∪I_A，R_3={<1,3>,<3,1>}∪I_A

R_4={<1,2>,<2,1>}∪I_A

实例

例3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，在 $A\times A$上定义二元关系R:

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解 $A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>,$

$<2,3>,<2,4>,<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>,$

$<4,2>, <4,3>, <4 ,4>\}$

实例（续）

根据 $\langle x,y\rangle$ 的 $x + y = 2,3,4,5,6,7,8$ 将$A\times A$划分成7个等价类：

$$(A\times A)/R=\{ \{\langle 1,1\rangle\}, \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\},$$
$$\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\},$$
$$\{\langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\},$$
$$\{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\},$$
$$\{\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}, \{\langle 4,4\rangle\} \}$$

次序关系

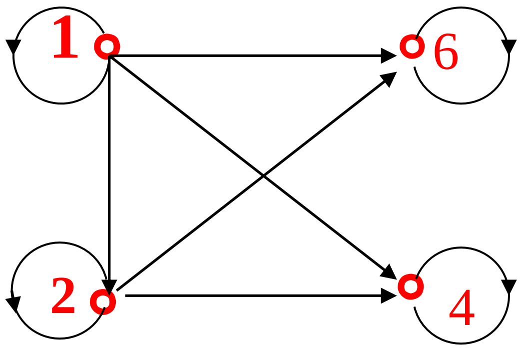
- 次序关系也是常遇到的重要关系，例如：
  数值的≤、＜、≥、＞关系；
  集合的⊆、⊂关系；
  图书馆的图书按书名的字母次序排序；
  词典中的字(词)的排序；
  计算机中文件按文件名排序；
  程序按语句次序执行；.......
- 接下来讨论几种次序关系。

偏序关系

定义 非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作≼. 设≼为偏序关系, 如果$<x, y>\in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作x"小于或等于" y. 注意!!"≼"不是"小于或等于"的含义

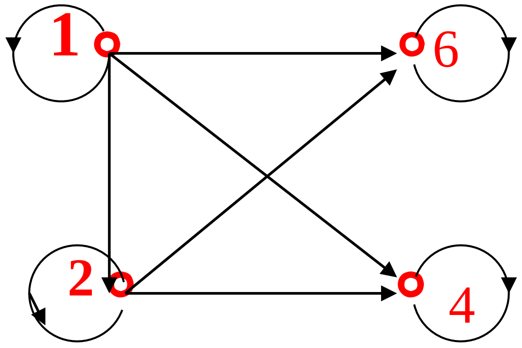
- 实例
  - 集合A上的恒等关系 I_A 是A上的偏序关系.
  - 小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

例 A={1,2,4,6}, ≼是A中的整除关系，其关系图如下图显然≼是自反、反对称和传递的，即它是个偏序关系。



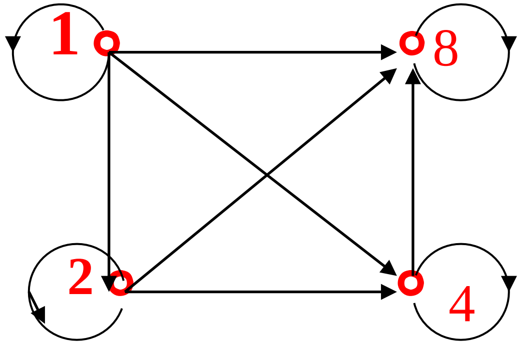
相关概念

- x与 y 可比：设R为非空集合A上的偏序关系，
  $x,y\in A$，x与y可比 $\Leftrightarrow x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$.
- 结论：任取两个元素x和y, 可能有下述情况：
  $x\prec y$ (或$y\prec x$), $x=y$, x与y不是可比的
- 上例中1,2,4或1,2,6间是可比较的。而4与6间是不可比较的



全序关系

- R为非空集合A上的偏序, $\forall x,y\in A$, x与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或 线序）



- 实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

  整除关系不是正整数集合上的全序关系
- 例 B={1,2,4,8}, ≼表示整除关系，则≼是全序关系，如图：
- 全序关系一定是偏序关系，但是偏序不一定是全序。

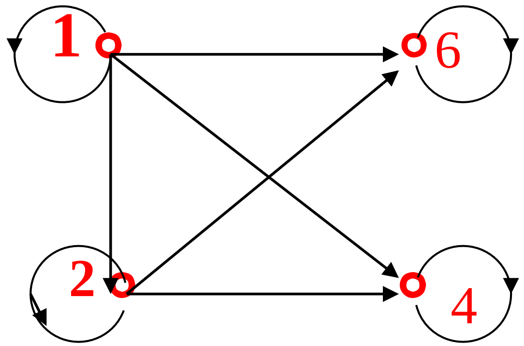
相关概念（续）

- 覆盖：设R为非空集合A上的偏序关系，$x, y \in A$, 如果 $x \prec y$且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖x.
- 实例：{ 1, 2, 4, 6 }集合上的整除关系,

  2 覆盖 1,

  4 和 6 覆盖 2.

  4 不覆盖 1.



- 偏序关系的有向图，不能直观地反映出元素之间的次序，所以下面介绍另外一种图---哈斯图。通过这个图，就能够清晰地反映出元素间的层次。

偏序集与哈斯图

- 哈斯图：利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图
- 特点：每个结点没有环，两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前，具有覆盖关系的两个结点之间连边

- 定义 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集, 记作 $<A,\preccurlyeq>$.
  实例：整数集和小于等于关系构成偏序集$<Z,\leq>$，幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$<P(A),R_{\subseteq}>$.

偏序集哈斯图的画法

令<A, $\preccurlyeq$ >是偏序集，

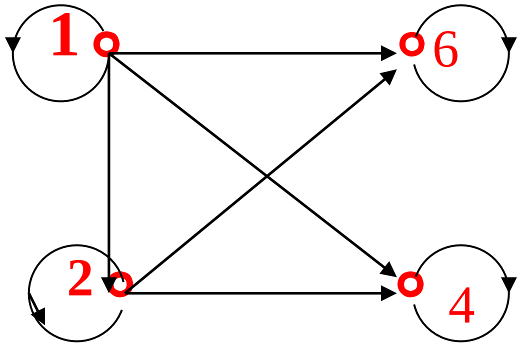
1.用“。”表示A中元素。

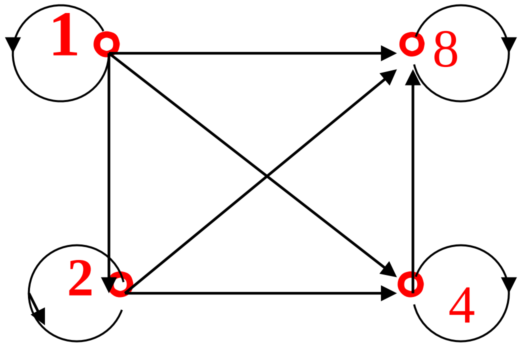
2.如果x $\preccurlyeq$ y,且x≠y，则结点y要画在结点x的上方。

3. 如果x $\preccurlyeq$ y,且y盖住x，x与y之间连一直线。

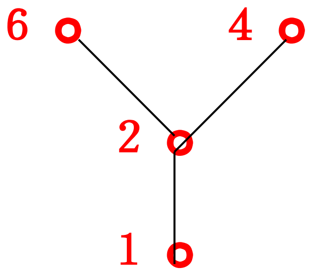
4. 一般先从最下层结点(全是射出的边与之相连(不考虑环))，逐层向上画，直到最上层结点(全是射入的边与之相连)。(采用抓两头，带中间的方法)

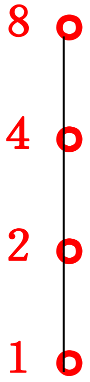
- 例如，前边两个例子：





- 它们的哈斯图分别如下：



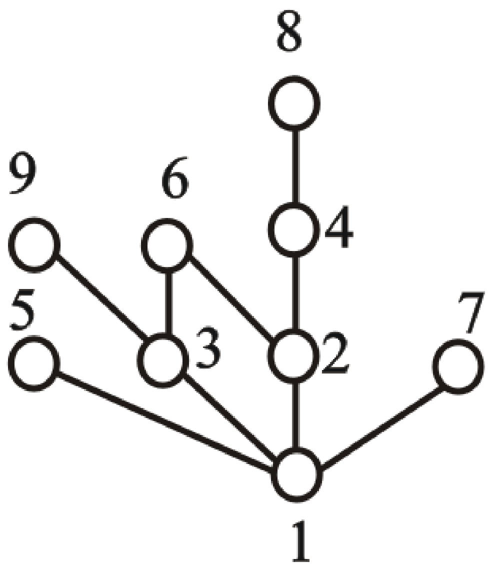


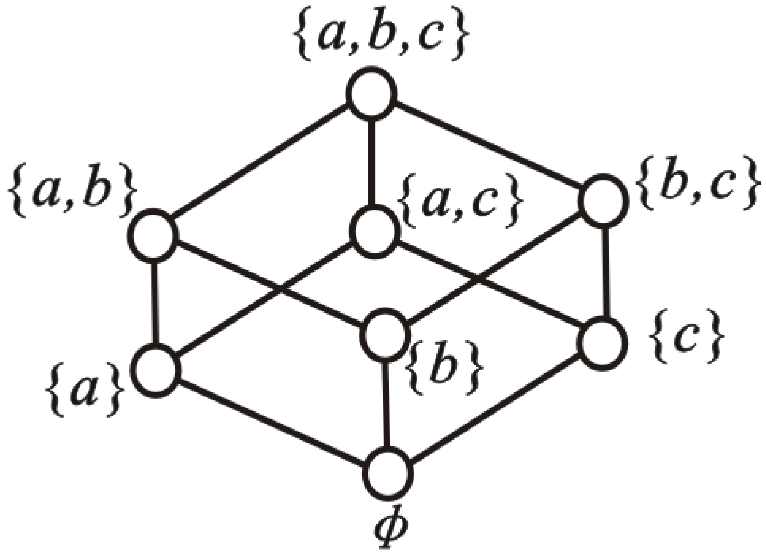
- 可见右图，是全序，它的哈斯图是一条直线，所以全序也叫线序，或链，是从它的哈斯图得名

哈斯图实例

- 例4　<{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, $R_{整除}$>

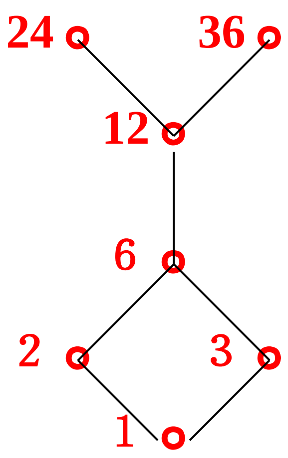
  <$P(\{a, b, c\})$, $R_{\subseteq}$>



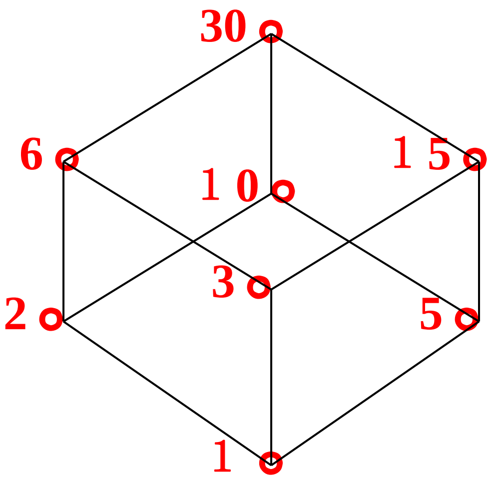


练习

C={1,2,3,6,12,24,36}，D={1,2,3,5,6,10,15,30}，≼是C、D上整除关系。
请画出<C, ≼ >, <D, ≼ >的哈斯图



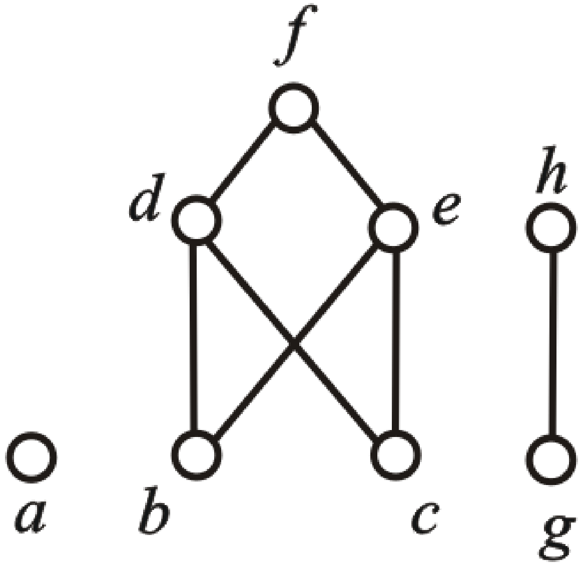
<C, ≼ >



<D, ≼ >

哈斯图实例（续）

- 例5
- 已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如右图所示，试求出集合A和关系R的表达式.



$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

偏序集的特定元素

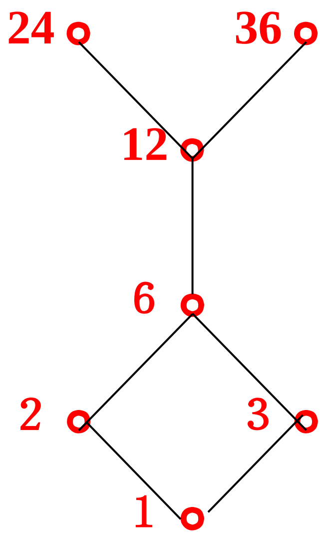
- 定义　设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元.（y比B中所有元素都小）

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.（y比B中所有元素都大）

(3) 若$\neg\exists x\ (x\in B\wedge x\prec y)$ 成立, 则称 y 为B的极小元. (在B中没有比y更小的元素了)

(4) 若$\neg\exists x\ (x\in B\wedge y\prec x)$ 成立, 则称 y 为B的极大元. (在B中没有比y更大的元素了)



子集B	极小元	极大元
{2,3}		
{1,2,3}		
{6,12,24}		
C		

子集B	最小元	最大元
{2,3}		
{1,2,3}		
{6,12,24}		
C		

举例，给定<A, ≼ >的哈斯图如图所示：

- 从哈斯图找极小(大)元：子集中处在最下(上)层的元素是极小(大)元。
- 从哈斯图找最小(大)元：子集中如果只有唯一的极小(大)元，则这个极小(大)元，就是最小(大)元。否则就没有最小(大)元

特殊元素的性质

- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集的特定元素(续)

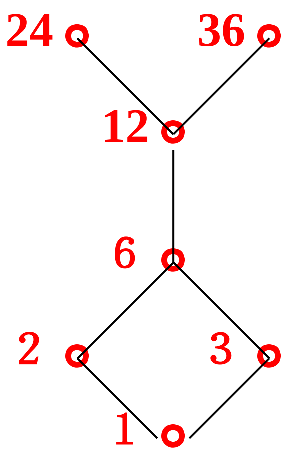
- 定义　设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为B的上界. (上界y是A中元素， 该元素比B中所有元素都大)

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为B的下界. (上界y是A中元素， 该元素比B中所有元素都小)

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, 则称C的最小元为B的最小上界 或 上确界. (上界y是A中元素， 该元素比B中所有元素都大)

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, 则称D的最大元为B的最大下界 或 下确界. (上界y是A中元素， 该元素比B中所有元素都小)



子集B	上界	上确界	下界	下确界
{2,3}				
{1,2,3}				
{6,12,24}				
C				

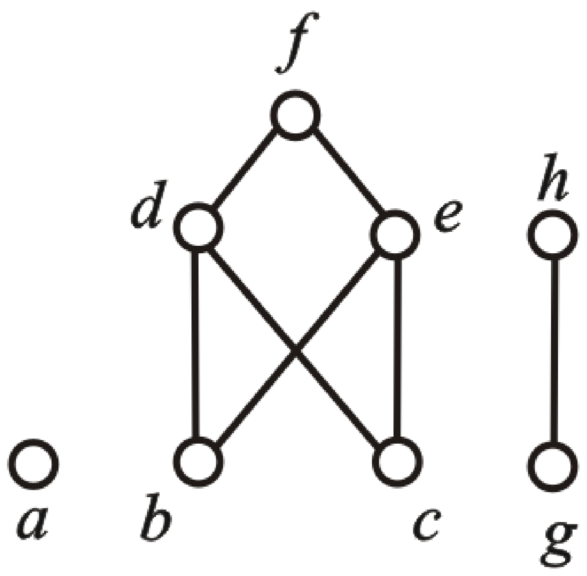
- **举例**，给定<A, ≼ >的哈斯图如图所示：
- 从哈斯图找上(下)界、上(下)确界：注意是在A中找！

特殊元素的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

实例

- 例6 设偏序集<A,≼>如下图所示，求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设 B={b,c,d}, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.
- 极小元：a, b, c, g;
- 极大元：a, f, h;
- 没有最小元与最大元.
- B的下界和下确界都不存在,
- 上界有d 和 f
- 上确界为 d



作业

- P116
- 4.16(2)
- 4.24

问题？