

离散数学

命题逻辑

1.4范式

范式

- 析取范式与合取范式
- 主析取范式与主合取范式

范式

- 范式就是命题公式形式的规范形式。这里约定在范式中只含有联结词 \neg 、 \vee 和 \wedge 。
- **文字**:命题变项及其否定的总称
- **简单析取式**:有限个文字构成的析取式, 如 $p, \neg q, p \vee \neg q, p \vee q \vee r, \dots$
- **简单合取式**:有限个文字构成的合取式, 如 $p, \neg q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r, \dots$
- **析取范式**:由有限个简单合取式组成的析取式 $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_r$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_r 是简单合取式
- **合取范式**:由有限个简单析取式组成的合取式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_r$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_r 是简单析取式

析取范式与合取范式

- 公式 A 的析取范式: 与 A 等值的析取范式
- 公式 A 的合取范式: 与 A 等值的合取范式
- 说明: 单个文字既是简单析取式, 又是简单合取式。
- $p \wedge \neg q \wedge r, \neg p \vee q \vee \neg r$, 是析取范式, 还是合取范式?

命题公式的范式

- **定理** 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.
- 求公式A的范式的步骤:
 - (1) 消去A中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$ (若存在)
 - (2) 否定联结词 \neg 的内移或消去
 - (3) 使用分配律
 - \wedge 对 \vee 分配 (析取范式)
 - \vee 对 \wedge 分配 (合取范式)
- 公式的范式存在, 但不惟一

求公式的范式举例

例 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $A = (p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

解 $(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \quad (\text{消去} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r \quad (\text{结合律})$$

- 这既是A的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是A的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

求公式的范式举例(续)

(2) $B = (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$

解 $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \rightarrow r \quad (\text{消去第一个} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{消去第二个} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \quad (\text{否定号内移——德·摩根律})$$

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续: $(p \wedge q) \vee r$

$$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{分配律})$$

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

主析取范式与主合取范式

- 一个公式的析取范式与合取范式的形式是不唯一的，因此不能作为同一真值函数所对应的命题公式的标准形式。
- 定义形式唯一的主析取范式与主合取范式。
- **定义** 在含有 n 个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，称这样的简单合取式(简单析取式)为**极小项(极大项)**。
- 例如，有两个变元的极小项：
 $P \wedge Q$ 、 $P \wedge \neg Q$ 、 $\neg P \wedge Q$ 、 $\neg P \wedge \neg Q$

极小项与极大项

- n 个命题变项产生 2^n 个极小项和 2^n 个极大项
- 2^n 个极小项（极大项）均互不等值
- 在极小项和极大项中，文字均按下标或字母顺序排列
- 用 m_i 表示第 i 个极小项，其中 i 是该极小项成真赋值的十进制表示。
用 M_i 表示第 i 个极大项，其中 i 是该极大项成假赋值的十进制表示，
 $m_i(M_i)$ 称为极小项(极大项)的名称。
- m_i 与 M_i 的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$, $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

极小项与极大项(续)

- 由 p, q 两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

m_i 与 M_i 的关系: $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

- 由 p, q, r 三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式与主合取范式

- **主析取范式**: 由极小项构成的析取范式
- **主合取范式**: 由极大项构成的合取范式
- 例如, $n=3$, 命题变项为 p, q, r 时,

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$ 是主析取范式

$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_5$ 是主合取范式

- **A的主析取范式**: 与A等值的主析取范式
- **A的主合取范式**: 与A等值的主合取范式

主析取范式与主合取范式(续)

- **定理** 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的。
- 主析取范式的求法
- **方法1: 列真值表**
 - (1) 列出给定公式的真值表。
 - (2) 找出真值表中每个“T”对应的极小项。(如何根据一组指派写对应的为“T”的项: 如果变元P被指派为T, P在极小项中以P形式出现; 如变元P被指派为F, P在极小项中以 $\neg P$ 形式出现(因要保证该极小项为T))
 - (3) 用“ \vee ”联结上述极小项, 即可。

例 求 $P \rightarrow Q$ 和 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q &\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \\ &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow m_0 \vee m_3 \\ &\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \end{aligned}$$

思考题: 永真式的主析取范式是什么样 ?

课堂练习

1. 已知 $A(P, Q, R)$ 的真值表如图：
求它的主析取和主合取范式。

P	Q	R	$A(P, Q, R)$
F	F	F	T
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	T
T	T	T	T

2. 已知 $A(P, Q, R)$ 的主析取范式中含有下面极小项 m_1, m_3, m_5, m_7 求它的主合取范式。

练习答案

1. $A(P, Q, R)$ 的主析取范式:

$$A(P, Q, R) \Leftrightarrow m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$A(P, Q, R)$ 的主合取范式:

$$A(P, Q, R) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_2 \wedge M_5$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

$$2. A(P, Q, R) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

方法2：用公式的等值变换

- (1)先写出给定公式的析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ 。
- (2)为使每个 A_i 都变成小项，对缺少变元的 A_i 补全变元，比如缺变元 R ，就用 \wedge 联结永真式 $(R \vee \neg R)$ 形式补 R 。
- (3)用分配律等公式加以整理。

例 $P \rightarrow Q$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

例 求公式 $A=(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$ 的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r, \quad (\text{析取范式}) \quad \textcircled{1}$$

$$(p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_6 \vee m_7, \quad \textcircled{2}$$

r

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \quad \text{③}$$

②, ③代入①并排序, 得

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad (\text{主析取范式})$$

(2) 求A的主合取范式

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \\ \Leftrightarrow & (p \vee r) \wedge (q \vee r), \quad (\text{合取范式}) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p \vee r \\ \Leftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg q) \vee r \\ \Leftrightarrow & (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \\ \Leftrightarrow & M_0 \wedge M_2, \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & q \vee r \\ \Leftrightarrow & (p \wedge \neg p) \vee q \vee r \\ \Leftrightarrow & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\ \Leftrightarrow & M_0 \wedge M_4 \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

②, ③代入①并排序, 得

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \quad (\text{主合取范式})$$

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$, 其成真赋值为001, 011, 101, 110, 111, 其余的赋值 000, 010, 100为成假赋值。

类似地, 由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值。

(2) 判断公式的类型

• 设 A 含 n 个命题变项, 则

A 为重言式 $\Leftrightarrow A$ 的主析取范式含 2^n 个极小项 $\Leftrightarrow A$ 的主合取范式为1.

A 为矛盾式 $\Leftrightarrow A$ 的主析取范式为0 $\Leftrightarrow A$ 的主合取范式含 2^n 个极大项

A 为非重言式的可满足式 $\Leftrightarrow A$ 的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项 $\Leftrightarrow A$ 的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

主范式的用途(续)

(3) 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \wedge q) \rightarrow r$

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

解 $p \rightarrow (q \rightarrow r) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \wedge q) \rightarrow r = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$(p \rightarrow q) \rightarrow r = m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

故(1)中的两公式等值, 而(2)的不等值.

主范式的用途(续)

例 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习。选派必须满足以下条件：

- (1) 若赵去，钱也去；
- (2) 李、周两人中至少有一人去；
- (3) 钱、孙两人中有一人去且仅去一人；
- (4) 孙、李两人同去或同不去；
- (5) 若周去，则赵、钱也去。

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国？

例 (续)

解此类问题的步骤为：

- ① 将简单命题符号化
- ② 写出各复合命题
- ③ 写出由②中复合命题组成的合取式
- ④ 求③中所得公式的主析取范式

例 (续)

解 ① 设 p : 派赵去, q : 派钱去, r : 派孙去,
 s : 派李去, u : 派周去.

② (1) $(p \rightarrow q)$

(2) $(s \vee u)$

(3) $((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

(4) $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

(5) $(u \rightarrow (p \wedge q))$

③ (1) ~ (5)构成的合取式为

$$A = (p \rightarrow q) \wedge (s \vee u) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \wedge (u \rightarrow (p \wedge q))$$

$$A = (p \rightarrow q) \wedge (s \vee u) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \wedge (u \rightarrow (p \wedge q))$$

$$\textcircled{4} \quad A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

结论：由④可知， A 的成真赋值为00110与11001，因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、周去（孙、李不去）。

A 的演算过程如下：

$$\begin{aligned} A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge \\ ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) \quad (\text{交换律}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \\ &\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \quad (\text{分配律}) \end{aligned}$$

$$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u)) \quad (\text{分配律})$$

$$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \\ \vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$$

$$\text{再令 } B_3 = ((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$$

$$\text{得 } A \Leftrightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$$

注意：在以上演算中多次用矛盾律

要求：自己演算一遍

例

- 安排课表，教语言课的教师希望将课程安排在第一或第三节；
教数学课的教师希望将课程安排在第二或第三节；
教原理课的教师希望将课程安排在第一或第二节。

如何安排课表，使得三位教师都满意。

- 解

令 L_1 、 L_2 、 L_3 分别表示语言课排在第一、第二、第三节。

M_1 、 M_2 、 M_3 分别表示数学课排在第一、第二、第三节。

P_1 、 P_2 、 P_3 分别表示原理课排在第一、第二、第三节。

三位教师都满意的条件是： $(L_1 \vee L_3) \wedge (M_2 \vee M_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$ 为真。

将上式写成析取范式(用分配律)得：

$$((L_1 \wedge M_2) \vee (L_1 \wedge M_3) \vee (L_3 \wedge M_2) \vee (L_3 \wedge M_3)) \wedge (P_1 \vee P_2)$$

$$\Leftrightarrow (L_1 \wedge M_2 \wedge P_1) \vee (L_1 \wedge M_3 \wedge P_1) \vee (L_3 \wedge M_2 \wedge P_1) \vee (L_3 \wedge M_3 \wedge P_1) \vee$$

$$(L_1 \wedge M_2 \wedge P_2) \vee (L_1 \wedge M_3 \wedge P_2) \vee (L_3 \wedge M_2 \wedge P_2) \vee (L_3 \wedge M_3 \wedge P_2)$$

可以取 $(L_3 \wedge M_2 \wedge P_1)$ 、 $(L_1 \wedge M_3 \wedge P_2)$ 为T，得到两种排法。

作业

- P33
- 1.12(3)
- 1.13(1)

问题？

