

离散数学

集合论

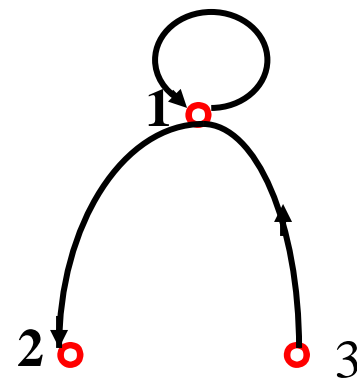
4.4 关系的闭包

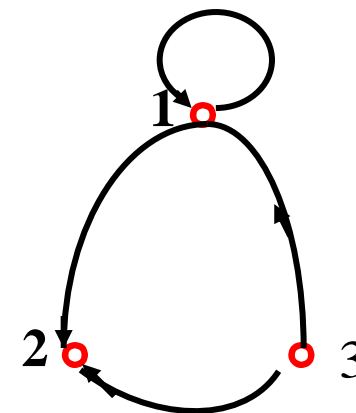
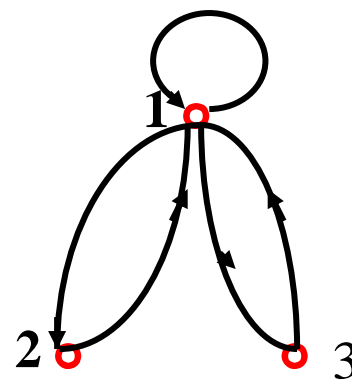
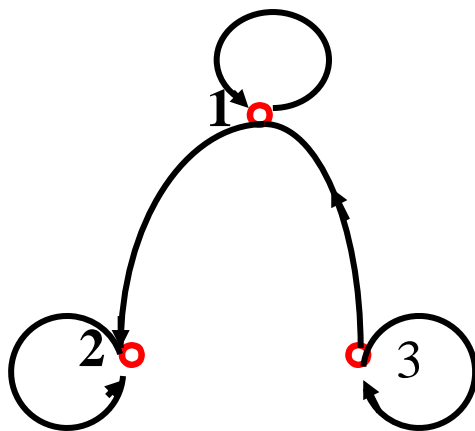
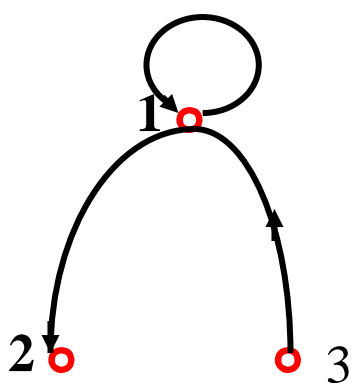
4.4 关系的闭包

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
 - 集合表示
 - 矩阵表示
 - 图表示
- 闭包的性质

关系的闭包运算

- 关系的自反闭包、对称闭包和传递闭包。
- 给定 A 中关系 R ，如图所示，分别求 A 上另一个关系 R' ，使得它是包含 R 的“最小的”（有序对尽量少）分别具有自反（对称、传递）性的关系。这个 R' 就分别是 R 的自反（对称、传递）闭包。





- 这三个关系图分别是 R 的自反、对称、传递闭包。

闭包定义

- **定义** 设 R 是非空集合 A 上的关系, R 的**自反 (对称或传递) 闭包**是 A 上的关系 R' ,使得 R' 满足以下条件:
 - (1) R' 是自反的 (对称的或传递的)
 - (2) $R \subseteq R'$
 - (3) 对 A 上任何包含 R 的自反 (对称或传递) 关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.
- 一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$. (**r**eflexive、**s**ymmetric、**t**ransitive)
- 实际上 $r(R)$ 、($s(R)$ 、 $t(R)$) 就是包含 R 的“最小”的自反(对称、传递)关系。

闭包的构造方法

• **定理1** 设 R 为 A 上的关系, 则有

$$(1) \ r(R) = R \cup R^0$$

$$(2) \ s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$(3) \ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

• 说明:

- 对于有穷集合 A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n .
- 若 R 是自反的, 则 $r(R)=R$; 若 R 是对称的, 则 $s(R)=R$; 若 R 是传递的, 则 $t(R)=R$.

闭包的构造方法（续）

- 设关系 R , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系矩阵分别为 M , M_r , M_s 和 M_t , 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

- E 是和 M 同阶的单位矩阵, M' 是 M 的转置矩阵.
- 注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法（续）

- 设关系 $R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别记为 G, G_r, G_s, G_t , 则 G_r, G_s, G_t 的顶点集与 G 的顶点集相等. 除了 G 的边以外, 以下述方法添加新边:
- 考察 G 的每个顶点, 如果没有环就加上一个环, 最终得到 G_r .
- 考察 G 的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在 G 中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边, 最终得到 G_s .
- 考察 G 的每个顶点 x_i , 找从 x_i 出发的每一条路径, 如果从 x_i 到路径中任何结点 x_j 没有边, 就加上这条边, 当检查完所有的顶点后就得到图 G_t .

实例

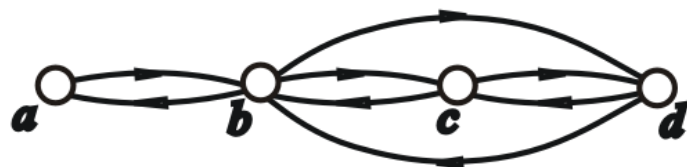
- 例1 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>\}$, R 和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图如下图所示.



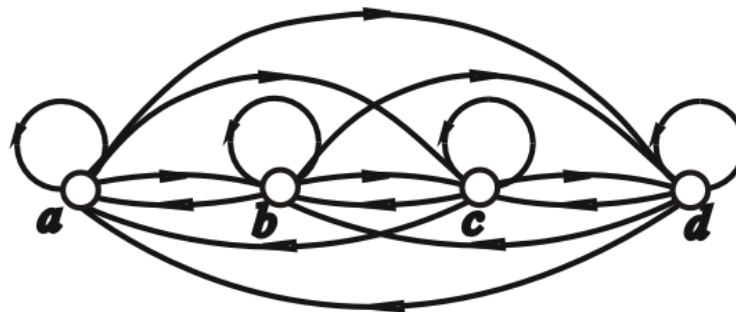
R



$r(R)$



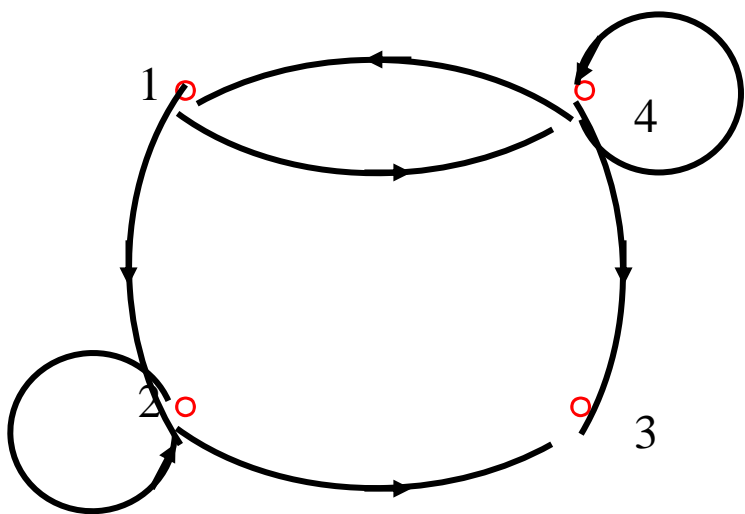
$s(R)$

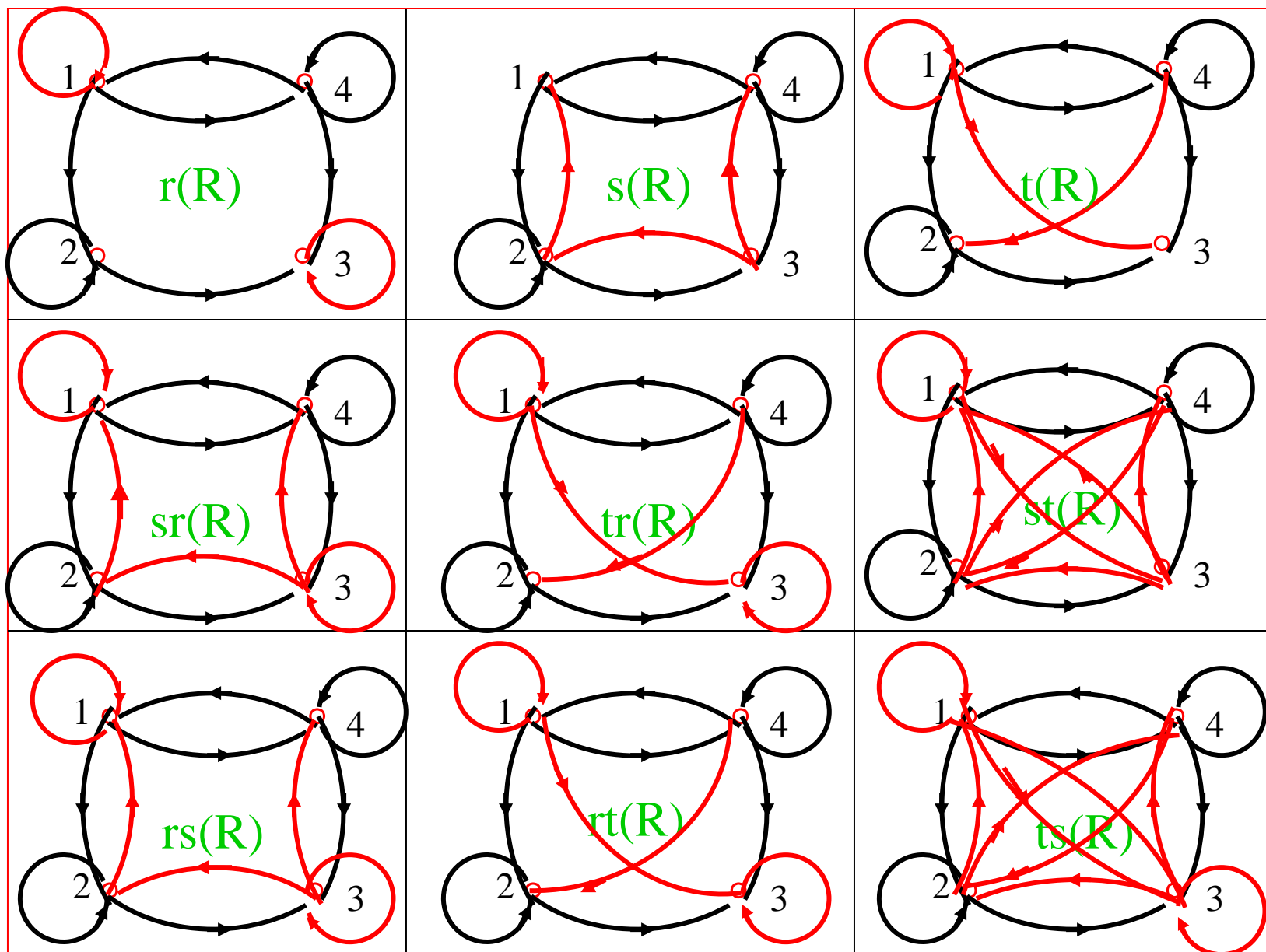


$t(R)$

练习

- 补充：给定A中关系R如图所示： 分别画出
 - $r(R)$ 、 $s(R)$ 、 $t(R)$ 的图
 - $sr(R)$ 、 $rs(R)$ 、 $tr(R)$ 、 $rt(R)$ 、 $st(R)$ 、 $ts(R)$ 的图。





作业

- P116
- 4.14

问题？

