南京工业大学 <u>概 率 统 计</u> 试题( )卷

标 准 答 案

2020—2021 学年第一学期　使用班级 <u>19 级本科生</u>

一、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1、$\frac{3}{4}$； 2、$\frac{5}{9}$； 3、1, $\frac{1}{2}$； 4、$N(0,1)$； 5、(64.02,65.98).

二、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1、(B); 2、(A); 3(C); 4、(D); 5、(C) .

三(10 分)、解：设 A={考试及格}，$\overline{A}$= {考试不及格}，B={按时交作业}。

(1) 由题意，$P(B|A)=0.8, P(B|\overline{A})=0.3, P(A)=0.8, P(\overline{A})=0.2$ (4 分)

由全概率公式 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.8\times0.8+0.2\times0.3=0.7$ (7分)

(2) 由条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.8\times0.8}{0.7}=0.9143.$$ (10 分)

四(12 分)解记 X 为取出两个球中包含的红球的个数，则 X 可取值为 0,1,2. (2 分)

$$P\{X=0\}=\frac{C_5^0C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6}, P\{X=1\}=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}=\frac{5}{9}, P\{X=2\}=\frac{C_5^2C_4^0}{C_9^2}=\frac{5}{18};$$

即

$$\therefore X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{9} & \frac{5}{18}\end{pmatrix}$$ (6 分)

(2) $$X\sim F(x)==\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{6}, & 0\le x<1,\\ \frac{13}{18}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$ (9 分)

(3) $$EX=1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{5}{18}=\frac{10}{9}, EX^2=\frac{5}{3}, DX=EX^2-(EX)^2=\frac{35}{81},$$
$$D(3X+6)=9DX=5.$$ (12 分)

五(8 分)、解 X,Y 的密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ (2 分)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

显然仅当$\begin{cases}0<x<1\\ 0<z-x<1\end{cases}$即$\begin{cases}0<x<1\\ x<z<x+1\end{cases}$，上述积分不等于零，故 (4 分)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z dx=z, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z, & 1\le z<2,\\ 0, & z\ge 2.\end{cases}$$ (8

分)

六 (8 分)、解 设可以装 n 箱，X_i 表示第 i(i=1,2,⋯,n) 箱的重量，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，总重量$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，显然，$EX_i=50,\ DX_i=5^2, EX=50n, DX=25n$， (4 分)

(2) 故由 L-L 中心极限定理得

$$P\{X\le 5000\}=P\left\{\frac{X-50n}{5\sqrt{n}}\le\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}})>0.977=\Phi(2).$$

(8 分)

于是，$\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，解得n<98. 019, 即最多装98箱可以使卡车不超载的概率大于0. 977.

七（12分）解(1)$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^x 1dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^1 dx=1+y, & -1<y<0\\ \int_y^1 dx=1-y & 0<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因为$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$,所以X,Y不独立. (4分)

((2)$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^x xdy=\dfrac{2}{3}$,

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty} dx\int_{-x}^x x^2dy=\dfrac{1}{2}$,

$DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{1}{18}$。同理，$EY=0$，$DY=\dfrac{1}{6}$, (10 分)

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^x xydy=0$。

故 $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0-\dfrac{2}{3}\cdot 0=0$。

(3)DZ=D(X+2Y)=DX+4DY+4Cov(X,Y)=$\dfrac{13}{18}$. (12 分)

八(10 分)、解： $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$

总体 X 的数学期望 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_1^{+\infty} x\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}dx=\dfrac{\theta}{\theta-1}$

令 $\dfrac{\theta}{\theta-1}=\overline{X}$，则得未知参数θ的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$ (5 分)

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相应于的样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\theta^n/(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta+1},\ x_i>1(i=1,2,\cdots,n).$$

$$\ln L=n\ln\theta-(\theta+1)(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i),\ \frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$, 解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=n\ /(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)$.

从而得 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=n/(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)$. （10 分）

九(10 分)、解: (1) 待验假设 H_0: μ=1000，H_1: $\mu\neq$1000 选取检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-1000}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$.

由 α=0.05 $\Rightarrow t_{\alpha/2}=t_{0.025}(8)=2.306$，又由 $\overline{x}=998$、s=30，可算得统计量观测值 t 为

$$t=\frac{\overline{x}-1000}{30/\sqrt{9}}=\frac{998-1000}{30/\sqrt{9}}=-0.2$$

因 $|t|=0.2<t_{0.025}(8)=2.306$，故可以认为平均每袋产品的净重为 1000g （5 分）

(2) 待验假设为 H_0': $\sigma^2\le 15^2$ ，H_1': $\sigma^2>15^2$。选取检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{15^2}\sim\chi^2(n-1)$.

由 α=0.05 $\Rightarrow \chi^2{}_{\alpha}(n-1)=t_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2=\dfrac{(9-1)\cdot 30^2}{15^2}=32>15.507.$，故拒绝 H_0'，即可以认为机器生产不正常. （10 分）