

Západočeská Univerzita v Plzni
Fakulta Aplikovaných Věd



Sytém dvou spojených nádrží

Filip Jašek a Andrea Kadlecová

Předmět: LS1

Přednášející: Ing. Martin Goubej Ph.D.

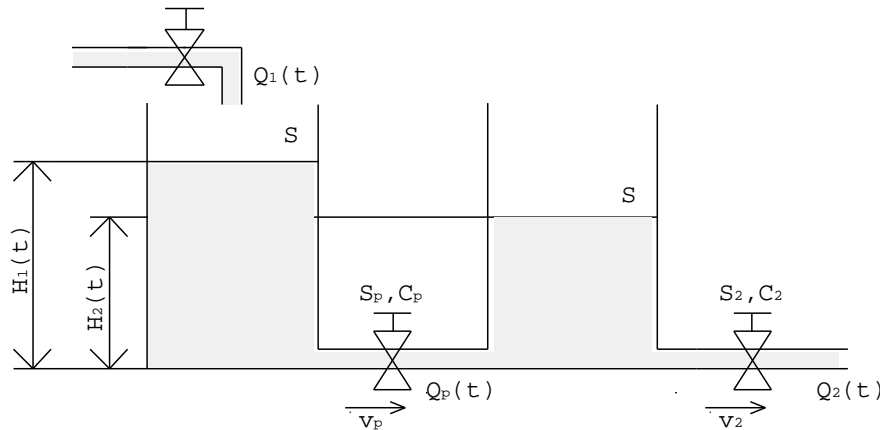
Cvičící: Ing Martin Čech Ph.D.

Obsah

1 První část zadání	4
1.1 Výpočet přepouštěcího a výtokového ventilu	4
1.2 Určení linearizovaného modelu	4
1.3 Simulace modelů pro různé hodnoty vstupu	7
1.4 Určení přenosu	11
1.5 Stavová reprezentace	13
2 Druhá část zadání (advanced models)	17
2.1 Stavový model rozšířené soustavy	17
2.2 Řízení hladiny H2	18
2.3 Experimentální stabilizace systému	18
2.4 Experimentální hledání kritického zesílení	25
2.5 Odvození parametrů PI regulátoru	28
2.6 Dopravní zpoždění	31

LINEÁRNÍ SYSTÉMY 1 - ZADÁNÍ REFERÁTU

1. Určete stavový popis spojitých nádob s řízeným přítokem kapaliny do 1. nádoby a s volným odtokem kapaliny z 2. nádoby (nelineární model systému).



- (a) Při konstantním přítoku $Q_{10} = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ vypočtěte potřebné nastavení přepouštěcího ventilu S_p a výtokového ventilu S_2 tak, aby výšky hladin v nádobách při ustáleném stavu byly $H_{10} = \text{ m}$ a $H_{20} = \text{ m}$ (tzv. pracovní bod). Hodnoty známých parametrů: $S = 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ (plocha dna nádob), $c_p = c_2 = 0.6$
- (b) Určete linearizovaný stavový model v daném pracovním bodě a v pracovním bodě, který by odpovídal 20% zvýšení přítoku Q_{10} .
- (c) Simulujte chování nelineárního modelu a linearizovaných modelů pro různé hodnoty konstantního vstupu (přítoku Q_{10}) a snažte se o porovnání chování nelineárního a linearizovaných modelů v okolí pracovního bodu. Považujte výšky hladin $y_1(t) = H_1(t)$, $y_2(t) = H_2(t)$ za výstupní veličiny a zakreslete statické a přechodové charakteristiky nelineárního a linearizovaných modelů, přičemž se snažte o porovnání charakteristik vždy v rámci jednoho grafu.
- (d) Určete oba přenosy $F_1(p) = \frac{Y_1(p)}{Q_1(p)}$ a $F_2(p) = \frac{Y_2(p)}{Q_1(p)}$, stanovte jejich nuly, póly, časové konstanty a statické zesílení. Přenos $F_2(p)$ rozložte na parciální zlomky a vypočtěte impulsní a přechodovou funkci a porovnejte je s experimentálně naměřenými křivkami.
- (e) K přenosu $F_2(p)$ linearizovaného systému určete stavovou reprezentaci ve Frobeniově a Jordanově tvaru. Simulací ověřte jejich ekvivalenci ve smyslu stejného vstupně-výstupního chování. Analyzujte stabilitu, říditelnost a pozorovatelnost linearizovaného systému a jeho ekvivalentních stavových reprezentací.

2. Uvažujte první linearizovaný model systému a předpokládejte, že přítok vody $Q_1(t)$ do nádob bude realizovat vodní čerpadlo, poháněné stejnosměrným el. motorem. Chování čerpadla s motorem budeme pro jednoduchost aproximovat chováním aperiodického členu 1.řádu s časovou konstantou $T = 0.5\text{s}$ a se statickým zesílením $K_s = Q_{10}$.

- (a) Určete stavový model celé soustavy a přenosové funkce od napětí na kotvě stejnosměrného el. motoru $u(t) = U_K(t)$ na jednotlivé výšky hladin $y_1(t) = H_1(t)$, $y_2(t) = H_2(t)$. Při jeho odvození vycházejte ze stavového modelu samotných nádobek.
- (b) V dalším se budeme zabývat problémem řízení výšky hladiny $H_2(t)$ na požadovanou konstantní hodnotu $H_{2z} = \text{konst}$ pomocí PI regulátoru, který bude připojen k dané soustavě a jehož přenos má tvar

$$F_{reg}(p) = \frac{U_k(p)}{E(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right),$$

kde $E(p)$ je obraz regulační odchylky: $E(p) = H_{2z}(p) - H_2(p)$.

- (c) Na základě experimentů nastavte parametry PI regulátoru K a T_I tak, aby uzavřený systém byl stabilní. Stabilitu ověřte podle Hurwitzova a Nyquistova kritéria stability. Porovnejte výstup regulované a neregulované soustavy a zakreslete také výstup regulátoru.
 - Využitím SIMULINKU identifikujte 4 různé body frekvenční charakteristiky otevřené regulační smyčky při vhodně zvolených frekvencích a srovnajte s Nyquistovou křivkou.
 - Zakreslete Bodeho charakteristiky a určete bezpečnost v zesílení, ve fázi a ve stabilitě.
 - Zakreslete přechodovou charakteristiku uzavřeného systému a zhodnot'te charakter přechodového děje.
- (d) Určete experimentálně přibližnou hodnotu zesílení K , při které dojde v uzavřeném regulačním obvodu k netlumenému kmitání ($K = K_{\text{krit.}}$ - kritické zesílení).
 - Zakreslete rozložení nul a pólů otevřeného a uzavřeného regulačního obvodu pro tuto hodnotu K .
 - Zakreslete pro tuto situaci opět Bodeho charakteristiky!
- (e) Použijte metodu GMK pro odvození parametrů PI regulátoru na základě vhodného umístění pólů uzavřené smyčky. Z tvaru GMK pro daný model systému odvoďte vhodné umístění nuly zavedené PI regulátorem v kombinaci se zesílením v otevřené smyčce. Porovnejte výsledky s regulátorem naladěným experimentálně v předchozím úkolu.
- (f) Uvažujte nyní případ, že řízený systém bude obsahovat jisté dopravní zpoždění. Pro vybrané nastavení parametrů PI regulátoru určete velikost dopravního zpoždění, při kterém by se uzavřený regulační obvod dostal právě na mez asymptotické stability.

1 První část zadání

1.1 Výpočet přepouštěcího a výtokového ventilu

Přítoky do první a druhé nádoby jsou definovány vztahy

$$Q_p(t) = c_p S_p v_p(t)$$

$$Q_2(t) = c_2 S_2 v_2(t)$$

Z Bernoulliho rovnice pro průtokový ventil si vyjádříme v_p .

$$p_0 + \rho g H_1(t) = p_0 + \rho g H_2(t) + \frac{\rho v_p^2(t)}{2}$$
$$v_p = \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$$

Po dosazení za $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $H_1 = 0,6 \text{ m}$ a $H_2 = 0,4 \text{ m}$ vyjde

$$v_p = \sqrt{2 \cdot 10(0,6 - 0,4)} = \sqrt{20 \cdot 0,2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Pro výtokový ventil se opět použije Bernoulliho rovnice

$$p_0 + \rho g H_2(t) = p_0 + \frac{\rho v_p^2(t)}{2},$$

ze které se opět vyjádří v_2 , což je $v_2 = \sqrt{2gH_2}$. Po dosazení vyjde $v_2 = 2\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Díky tomu, že známe rychlosti průtoků, tak si můžeme z rovnic pro přítoky vyjádřit S_p a S_2 . Také známe hodnotu Q_1 . Jelikož chceme udržet hladiny v rovině, tak $Q_p = Q_2 = Q_1 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

$$S_p = \frac{Q_p}{c_p v_p} = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{0,6 \cdot 2} = \frac{1,5}{12000}$$

$$S_2 = \frac{Q_2}{c_2 v_2} = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{0,6 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1,5}{12000\sqrt{2}}$$

1.2 Určení linearizovaného modelu

Systém popíšeme dvěma nelineárními diferenciálními rovnicemi. Dostali jsme je z výše uvedených vztahů v části jedna, kde jsme si vyjádřili rychlosti průtoků a vztahy pro přítoky.

$$Q_p(t) = c_p S_p v_p(t)$$

$$Q_2(t) = c_2 S_2 v_2(t)$$

$$v_p = \sqrt{2 \cdot 10(0,6 - 0,4)} = \sqrt{20 \cdot 0,2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v_2 = \sqrt{2gH_2} = 2\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Tyto vztahy jsme dosadili do rovnic, které reprezentují rozdíl přítoku a přepouštěcího ventilu a přepouštěcího ventilu s výtokovým ventilem, které se rovnají derivacím objemů nádob podle času a derivaci hladiny podle času násobenou celkovou plochou nádrže.

$$Q_1(t) - Q_p(t) = \frac{dV_1(t)}{dt} = S \frac{dH_1(t)}{dt}$$

$$Q_p(t) - Q_2(t) = \frac{dV_2(t)}{dt} = S \frac{dH_2(t)}{dt}$$

Po dosazení za $Q_p(t)$, $Q_1(t)$ a $Q_2(t)$ vyjdou dvě nelineární diferenciální rovnice.

$$\frac{dH_1(t)}{dt} = -\frac{c_p S_p \sqrt{2g(H_1(t) - H_2(t))}}{S} + \frac{Q_1(t)}{S}$$

$$\frac{dH_2(t)}{dt} = \frac{c_p S_p \sqrt{2g(H_1(t) - H_2(t))}}{S} - \frac{c_2 S_2 \sqrt{2gH_2(t)}}{S}$$

Tyto dvě rovnice musíme linearizovat. Po linearizaci vzniknou tyto dvě rovnice, ze kterých pak uděláme matice **A**, **B**, **C** a **D** a vytvoříme stavový popis mechanismu.

lineární model

$$\frac{d\Delta H_1(t)}{dt} = -\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_1(t) + \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_2(t) + \frac{\Delta Q_1(t)}{S}$$

$$\frac{d\Delta H_2(t)}{dt} = \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_1(t) - \left(\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} + \frac{c_2 S_2 \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_2}} \right) \Delta H_2(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$$

stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta H_1(t)} \\ \dot{\Delta H_2(t)} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \Delta Q_1(t)$$

$$\Delta y(t) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D} \Delta Q_1(t)$$

Vypočítáme jednotlivé matice **A**, **B**, **C** a **D** pomocí již známých hodnot.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} & \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \\ \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} & -\left(\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} + \frac{c_2 S_2 \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_2}} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1,5\sqrt{5}}{50\sqrt{0,2}} & \frac{1,5\sqrt{5}}{50\sqrt{0,2}} \\ \frac{1,5\sqrt{5}}{50\sqrt{0,2}} & -\left(\frac{1,5\sqrt{5}}{50\sqrt{0,2}} - \frac{1,5\sqrt{5}}{5\sqrt{0,8}} \right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = 0$$

stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta H_1(t)} \\ \dot{\Delta H_2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1,5\sqrt{5}}{50\sqrt{0,2}} & \frac{1,5\sqrt{5}}{50\sqrt{0,2}} \\ \frac{1,5\sqrt{5}}{50\sqrt{0,2}} & -\left(\frac{1,5\sqrt{5}}{50\sqrt{0,2}} - \frac{1,5\sqrt{5}}{5\sqrt{0,8}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta Q_1(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$$

Následně je zadáno, že se má vytvořit lineární model, pokud se přítok zvýší o 20%. Zvolili jsme, že hladiny nádrží zůstanou stejné a změni se obsah průtokového a výtokového ventilu. Zvýšený průtok je roven $Q = 1,5 \cdot 120 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Jak jsme psali výše, zvolili jsme, že výška hladin zůstane stejná a vypočítáme nové hodnoty pro průtokový a výtokový ventil. Použijeme již vypočítané rychlosti ventilů. $v_p = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v_2 = 2\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$S_p = \frac{Q(t)}{c_v p(t)} = \frac{Q}{c_p \sqrt{2g(H_1-H_2)}} = \frac{1,5 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 2} = \frac{1,5 \cdot 120 \cdot 10^{-6}}{1,2}$$

$$S_2 = \frac{Q(t)}{c_2 v_2(t)} = \frac{Q}{c_2 \sqrt{2gH_2}} = \frac{1,5 \cdot 120 \cdot 10^{-6}}{0,6 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1,5 \cdot 120 \cdot 10^{-6}}{1,2\sqrt{2}}$$

Vypočtené hodnoty obsahů dosadíme do linearizovaného modelu a vypočteme matice **A**, **B**, **C** a **D**.

lineární model

$$\frac{d\Delta H_1(t)}{dt} = -\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_1(t) + \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_2(t) + \frac{\Delta Q_1(t)}{S}$$

$$\frac{d\Delta H_2(t)}{dt} = \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_1(t) - \left(\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} + \frac{c_2 S_2 \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_2}} \right) \Delta H_2(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$$

stavový popis

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} & \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \\ \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} & -\left(\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} + \frac{c_2 S_2 \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_2}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,18 & 0,18 \\ 0,18 & -0,27 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = 0$$

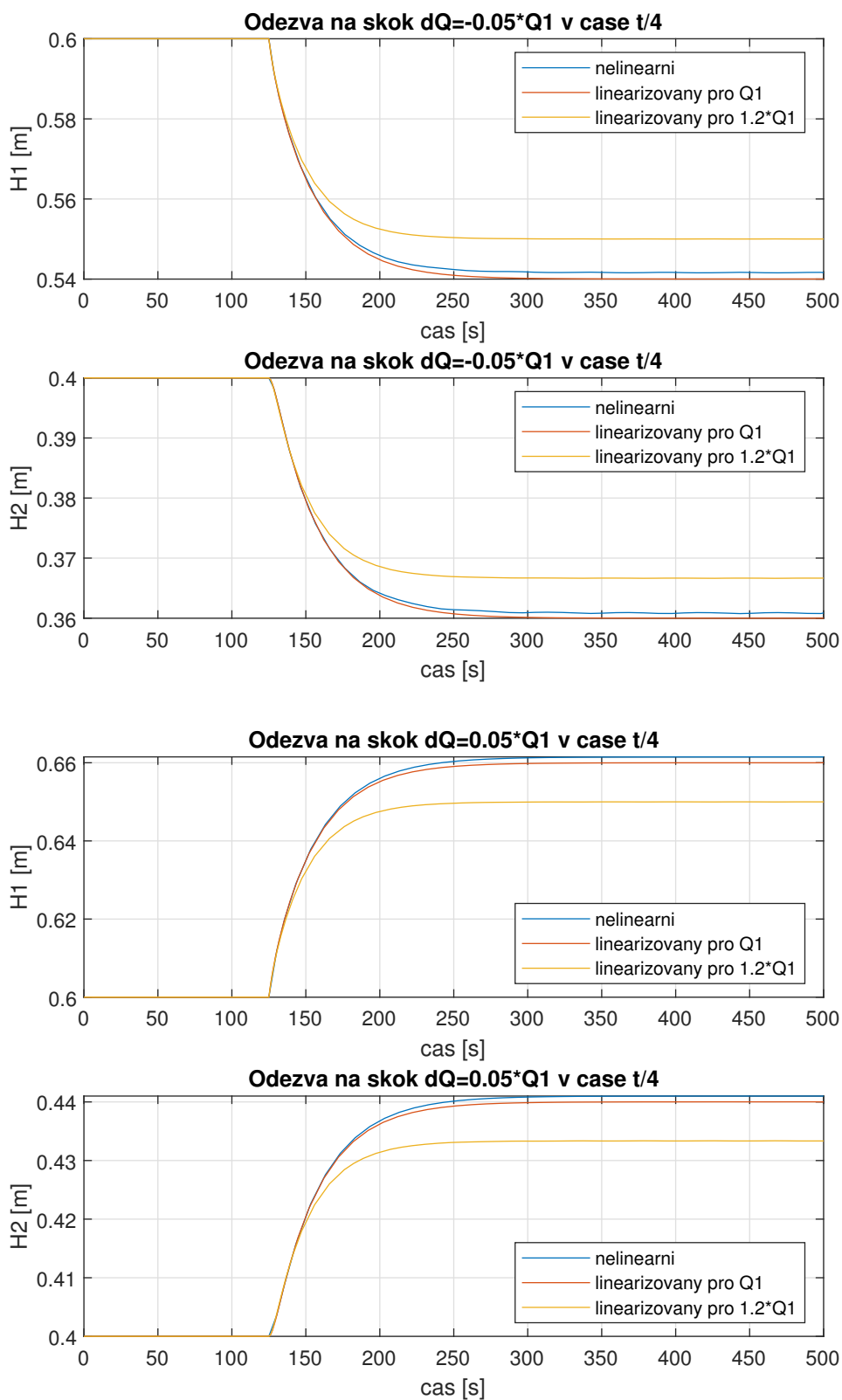
stavový popis s určenými maticemi \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D}

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{H}_1(t) \\ \Delta \dot{H}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,18 & 0,18 \\ 0,18 & -0,27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta Q_1(t)$$

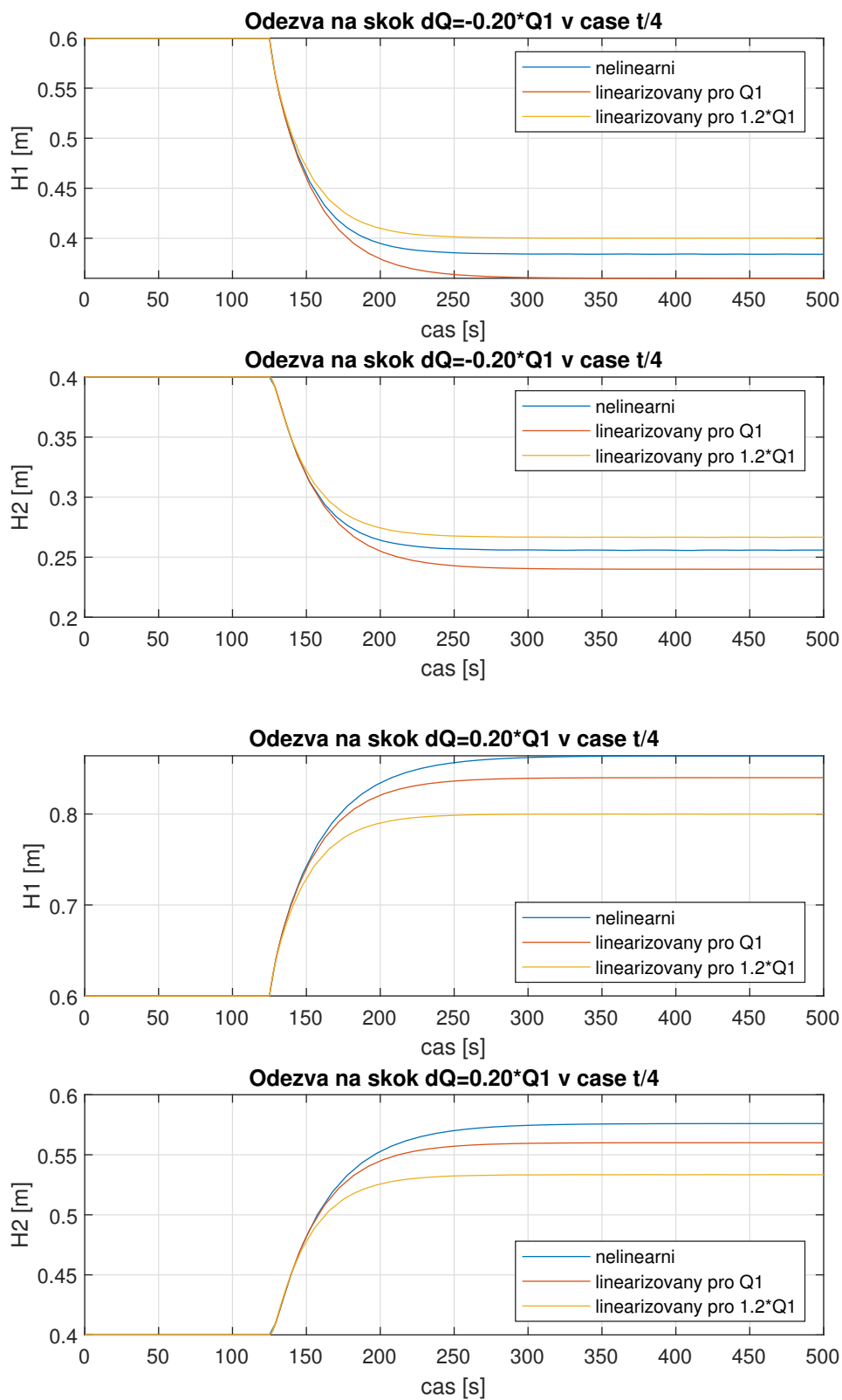
$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{bmatrix}$$

1.3 Simulace modelů pro různé hodnoty vstupu

Simulace provádíme s přítokem $Q_1 = 1.5 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ a graficky porovnáváme chování jednotlivých systémů.

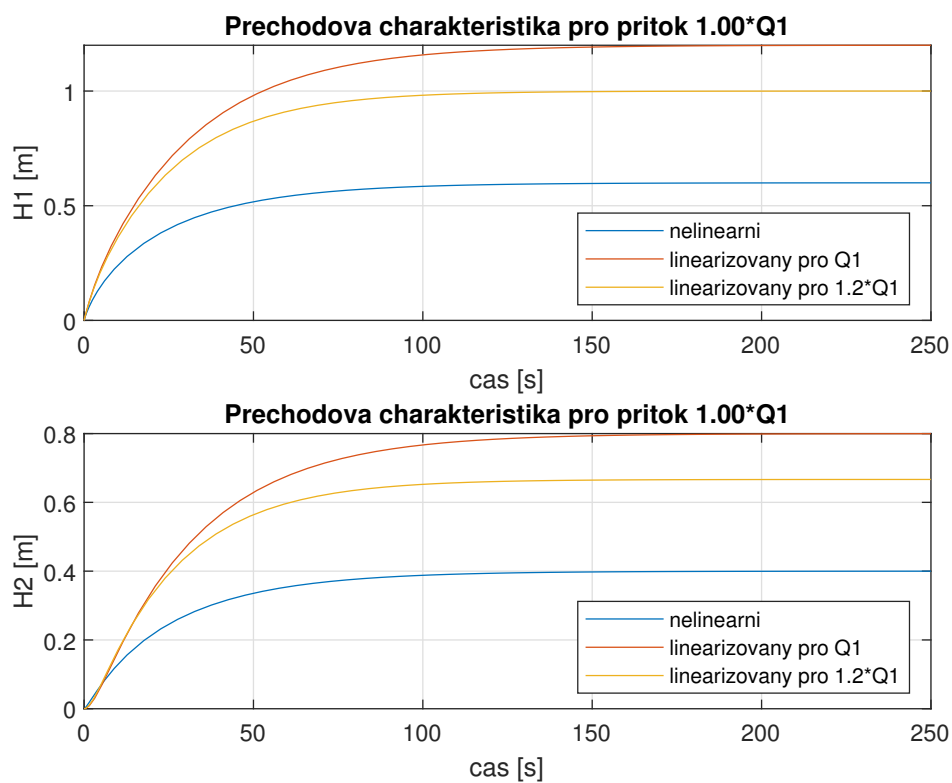


Obrázek 1: Chování systémů v okolí pracovního bodu po skokové změně pří toku velikosti dQ jen málo odlišné od Q_1 .

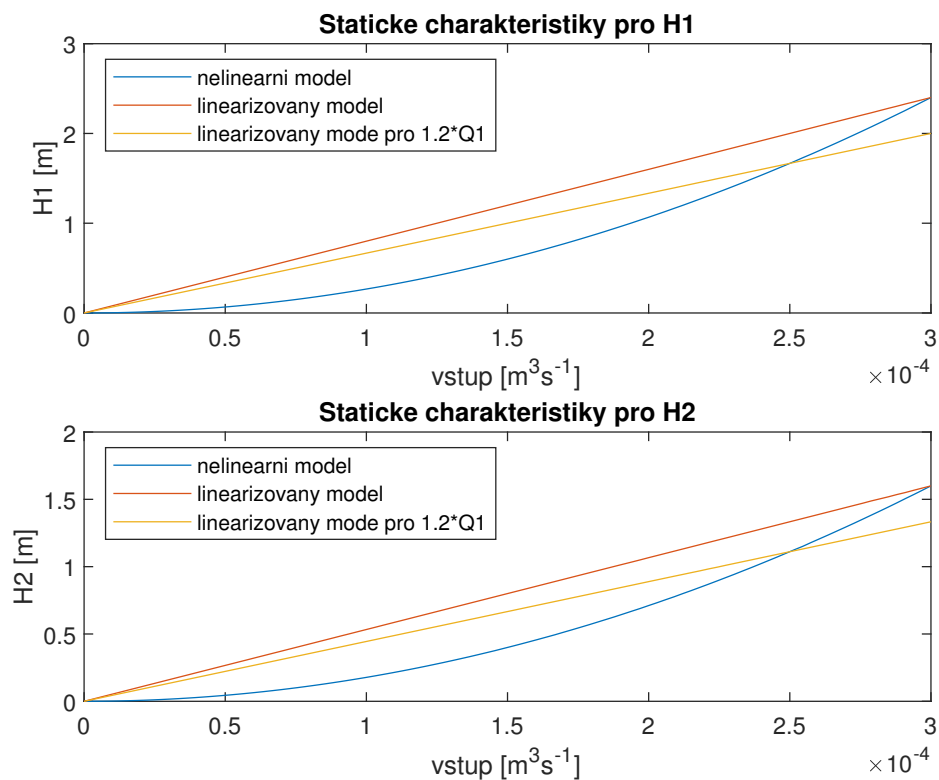


Obrázek 2: Chování systémů v okolí pracovního bodu po skokové změně přítoku velikosti dQ , kde se přítok zvětší až na hodnotu $1.2 \cdot Q_1$.

V předchozích grafech můžeme vidět, že pokud se hodnota vstupu skokově odliší jen málo od původního průtoku Q_1 (Obrázek 1), pak se nelineárnímu modelu blíží více linearizovaný model pro průtok Q_1 . Když se však skok odliší více, lze pozorovat (Obrázek 2), že se nelineárnímu modelu začíná více blížit druhý linearizovaný model, který byl spočten pro průtok roven $1.2 \cdot Q_1$

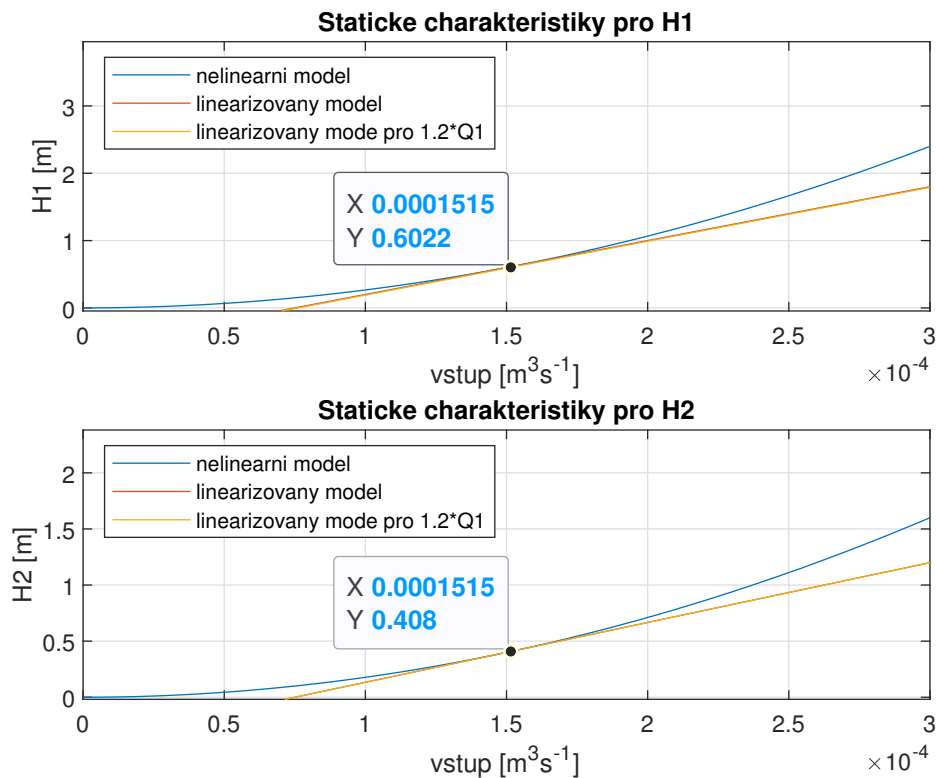


Obrázek 3: Přechodové charakteristiky vzniklé působením skokového průtoku o velikosti Q_1



Obrázek 4: Statické charakteristiky

V z obrázku 4 můžeme vidět, že křivky (přímky) linearizovaných modelů jsou sečnami křivky nelineárního modelu. Posuneme je tedy tak, aby byly tečnou křivky nelineárního modelu. Zde narazíme na problém, že linearizovaný model pro zvýšený průtok se stále odchyluje a jeho tečný bod zcela nesedí s požadovanou ustálenou hodnotou. Děje se to proto, že linearizovaný model je navržen pro průtok $1.2 \cdot Q_1$ zatímco v obrázku 4 jsme statickou charakteristiku všech systémů vytvořili pro stejný průtok. Opravu tedy učiníme tak, že při vykreslování statické charakteristiky budeme vstup do systému navrženého pro zvýšený průtok násobit 1.2. Tím dostaneme upravenou statickou charakteristiku, kde se statické charakteristiky linearizovaných systémů budou překrývat a tvořit tečnu charakteristiky nelineárního systému přesně v bodě, pro který jsme nastavili pracovní bod (výšky hladin).



Obrázek 5: Upravené statické charakteristiky, kde linearizované systémy tvoří téměř totožnou tečnu nelineární statické charakteristiky v pracovních bodech nastavených pro jednotlivé hladiny.

1.4 Určení přenosu

Z prvního vypočteného linearizovaného modelu určíme přenosy

$$F_1(p) = \frac{Y_1(p)}{Q_1(p)} \quad \text{a} \quad F_2(p) = \frac{Y_2(p)}{Q_1(p)},$$

kde $Y_1(p) = H_1(p)$ a $Y_2(p) = H_2(p)$. Hledáme tedy přenosovou funkci pro popsání přenosu signálu ze vstupu (přítok Q_1) na výstup, čímž jsou výšky hladin v jednotlivých nádržích. Podle příkladu ve skriptech (str. 44) využijeme znalost, že přenos

$$F(p) = C(pI - A)^{-1}B$$

a určíme požadované přenosy dosazením za A , B a C . Vektor C volíme podle toho, který přenos chceme právě zjistit. Pokud přenos F_1 pak $C = [1 \quad 0]$ a pokud F_2 , tak $C = [0 \quad 1]$. Výpočet lze provést i ručně, my však použijeme v programu Matlab jeden řádek kódu $Fp = C \cdot \text{inv}(p \cdot \text{eye}(2) - A) \cdot B$, který nám vypočte potřebné přenosy.

Za C jsme dosadili matici $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ čímž nám do proměnné Fp uloží přímo oba přenosy, kde první se bude vázat k výšce hladiny v první nádobě díky prvnímu řádku matice C a druhý k výšce hladiny ve druhé nádobě. Z vypočteného přenosu

$$F_1(p) = \frac{400p + 90}{p^2 + 0,375p + 0,01125}$$

určíme nuly přenosu tak, že čítec položíme roven nule

$$400p + 90 = 0$$

a dopočteme kořeny polynomu, tak aby rovnost platila a označíme je jako nuly přenosu.

$$z_1 = -\frac{90}{400} = -0,225$$

Abychom zjistili póly přenosu položíme jmenovatel roven nule

$$p^2 + 0.375 \cdot p + 0.01125 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice dostanu její kořeny

$$p_1 = \frac{-15 + 3 \cdot \sqrt{17}}{80} \approx -0.0329 \quad p_2 = \frac{-15 - 3 \cdot \sqrt{17}}{80} \approx -0.3421,$$

což jsou zároveň póly přenosu. Statické zesílení a časové konstanty budou zřejmé z upraveného tvaru přenosu:

$$F_1(p) = \frac{400p + 90}{p^2 + 0.375p + 0.01125} = \frac{90 \cdot (\frac{400}{90}p + 1)}{0.01125(\frac{1}{0.01125}p^2 + \frac{0.375}{0.01125}p + 1)}$$

Časové konstanty: $T_1 = \sqrt{\frac{1}{0.01125}} = 9.428090416$, $T_2 = \frac{400}{90} = \frac{40}{9}$

Statické zesílení: $K = \frac{90}{0.01125} = 8000$

Pro přenos

$$F_2(p) = \frac{60}{p^2 + 0.375 \cdot p + 0.01125}$$

použijeme stejný postup jako u předchozího přenosu a zjistíme, že nulu nemá přenos žádnou a póly jsou totožné. Zesílení zde bude $K = \frac{60}{0.01125} = 5333.33$. Časovou konstantu má přenos pouze jednu $T_1 = \sqrt{\frac{1}{0.01125}} = \frac{20\sqrt{2}}{3} = 9.428090416$

Přenos $F_2(p)$ rozložíme na parciální zlomky, aby se lépe prováděla inverzní Laplaceova transformace, a vyjádříme $Y_2(p)$.

$$F_2(p) = \frac{Y_2(p)}{Q_1(p)} \rightarrow Y_2(p) = Q_1(p) \cdot \left(-\frac{194.0285}{p + 0.3421}\right) + Q_1(p) \cdot \left(\frac{194.0285}{p + 0.0329}\right)$$

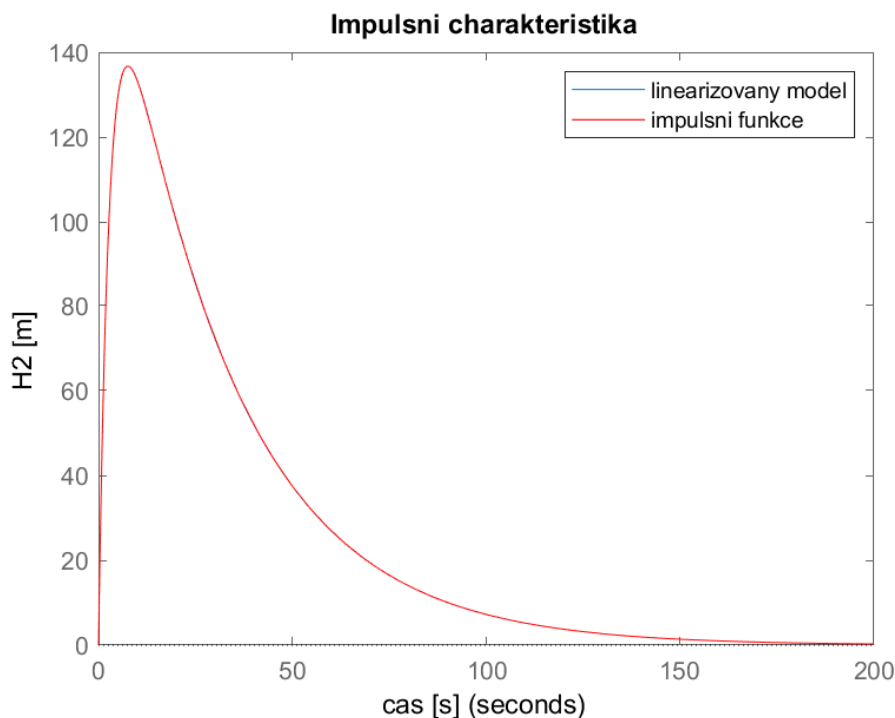
Nyní vypočtu impulsní funkci tak, že za $Q_1(p)$ dosadím Diracův puls v Laplaceově transformaci, kde má hodnotu 1. Provedu inverzní Laplaceovu transformaci a získám tak impulsní funkci v časové oblasti pro přenos $F_2(p)$ jako

$$y_2(t) = 194.0285 \cdot (-e^{-0.3421 \cdot t} + e^{-0.0329 \cdot t}).$$

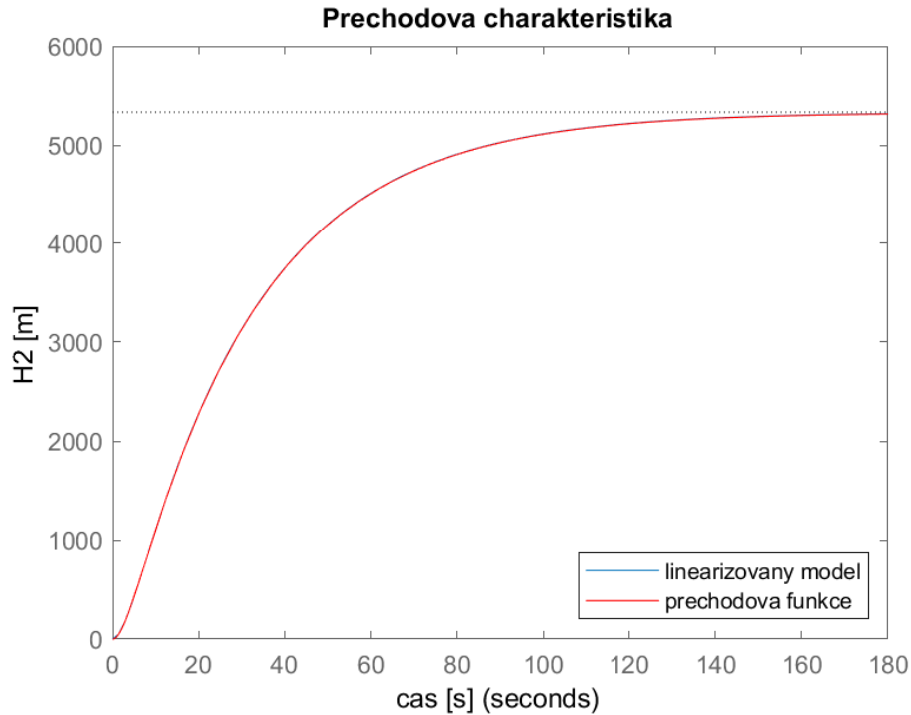
Podobně získáme i přechodovou charakteristiku, kde však dosadíme za $Q_1(p)$ Heavisidovu funkci v Laplaceově transformaci, což je $\frac{1}{p}$. Po inverzní Laplaceově transformaci dostaneme přechodovou funkci ve tvaru

$$y_2(t) = -\frac{194.0285}{0.3421} \cdot (1 - e^{-0.3421 \cdot t}) + \frac{194.0285}{0.0329} \cdot (1 - e^{-0.0329 \cdot t}).$$

Pro overení správnosti vypočtených funkcí si je necháme vykreslit spolu s naším dříve odvozeným linearizovaným modelem.



Obrázek 6: Graf zobrazující impulsní charakteristiku prvního linearizovaného modelu a vypočtené impulsní funkce



Obrázek 7: Graf zobrazující přechodovou charakteristiku prvního linearizovaného modelu a vypočtené přechodové funkce

Na linearizovaný model jsme použili funkci pro přechodovou charakteristiku `step()` a pro impulsní `impulse()`. Z grafů na obrázcích 6 a 7 můžeme vidět, že se téměř překrývají a z toho můžeme usoudit, že funkce jsou vypočtené správně, protože se chovají téměř stejně.

1.5 Stavová reprezentace

Přenos $F_2(p)$ vyjádříme dále pomocí Frobeniovy a Jordanovy stavové reprezentace.

Frobeniova reprezentace

Nejprve převedeme přenos na požadovaný tvar

$$F(p) = K + \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0},$$

abychom pomocí koeficientů K, b_1, b_0, a_1, a_0 mohli sestavit Frobeniovu stavovou reprezentaci ve tvaru

$$\bar{S}_{frob} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_0 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + K u(t).$$

Z přenosu $F_2(p) = \frac{60}{p^2 + 0,375p + 0,01125}$ určíme koeficienty $a_1 = 0,375, a_0 = 0,01125$, dosadíme je do požadovaného přenosu

$$[F_2(p) = K + \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + 0,375p + 0,01125},$$

převedeme na společného jmenovatele

$$[F_2(p) = \frac{Kp^2 + (0,375K + b_1)p + (0,01125K + b_0)}{p^2 + 0,375p + 0,01125}$$

a porovnáním jednotlivých koeficientů s původním přenosem zjistíme koeficienty

$$K = 0$$

$$0,375K + b_1 = 0 \rightarrow b_1 = 0$$

$$0,01125K + b_0 = 60 \rightarrow b_0 = 60.$$

Dosadíme je do Frobeniovy stavové reprezentace a získáme systém ve tvaru

$$\bar{S}_{frob} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,01125 & -0,375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 60 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t).$$

Jordanovu stavovou reprezentaci vyjádříme ze stavového modelu přenosu $F_2(p)$

$$\begin{pmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.15 \\ 0.15 & -0.225 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta Q_1(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta H_1(t) \\ \Delta H_2(t) \end{pmatrix}$$

Ze sbírky příkladů víme, že potřebujeme získat transformační matici T_{Jord} podle vztahu

$$T_{Jord} = V^{-1},$$

kde V je matice vlastních vektorů matice A našeho původního systému. Postupujeme tak, že zjistíme vlastní čísla a vlastní vektory matice A s pomocí příkazu v Matlabu `eig()`, který nám najde naše vlastní čísla i vektory pomocí zadáním v následujícím tvaru: `[vVektory,Aspektralni]=eig(A)`. Do proměnné `vVektory` se nám uloží matice vlastních vektorů a do `Aspektralni` spektrální matice s vlastními čísly na diagonále matice, což je naše nová matice \bar{A}_J . Získanou matici vlastních vektorů můžeme zapsat do proměnné V , aby byla zachována analogie s dříve zmíněným vztahem. Transformační matici T_J dostaneme pak inverzí matice vlastních vektorů V a dopočteme matice \bar{B}_J, \bar{C}_J za pomoci následujících výpočtů:

$$T_J = V^{-1}$$

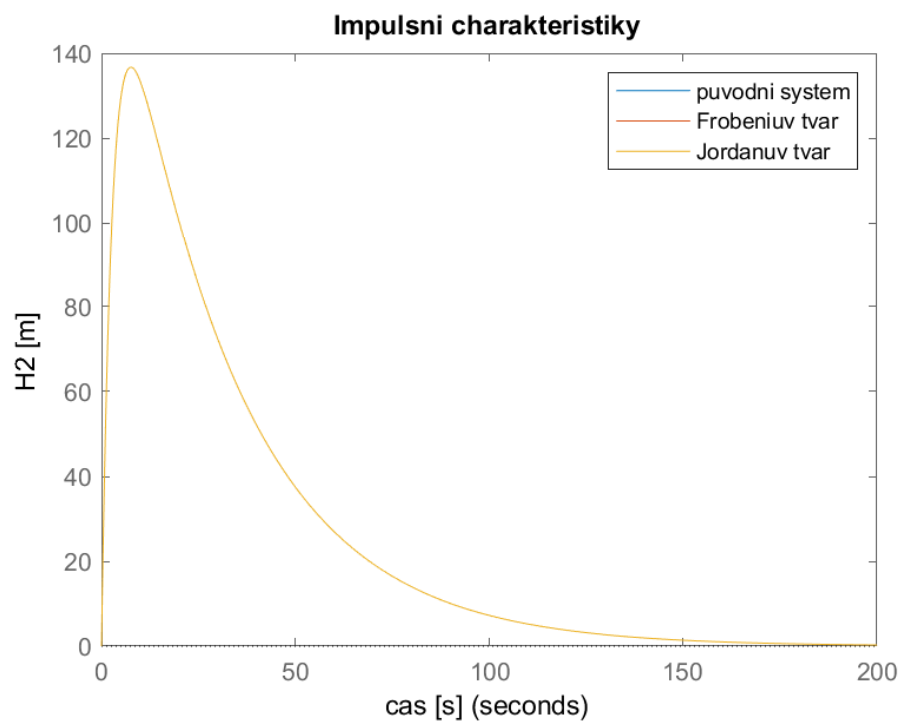
$$\bar{A}_J = \begin{bmatrix} -0,3421 & 0 \\ 0 & -0,0329 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_J = T_J B = \begin{bmatrix} -0,6154 & 0,7882 \\ -0,7882 & -0,6154 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -246,1649 \\ -315,2822 \end{bmatrix}$$

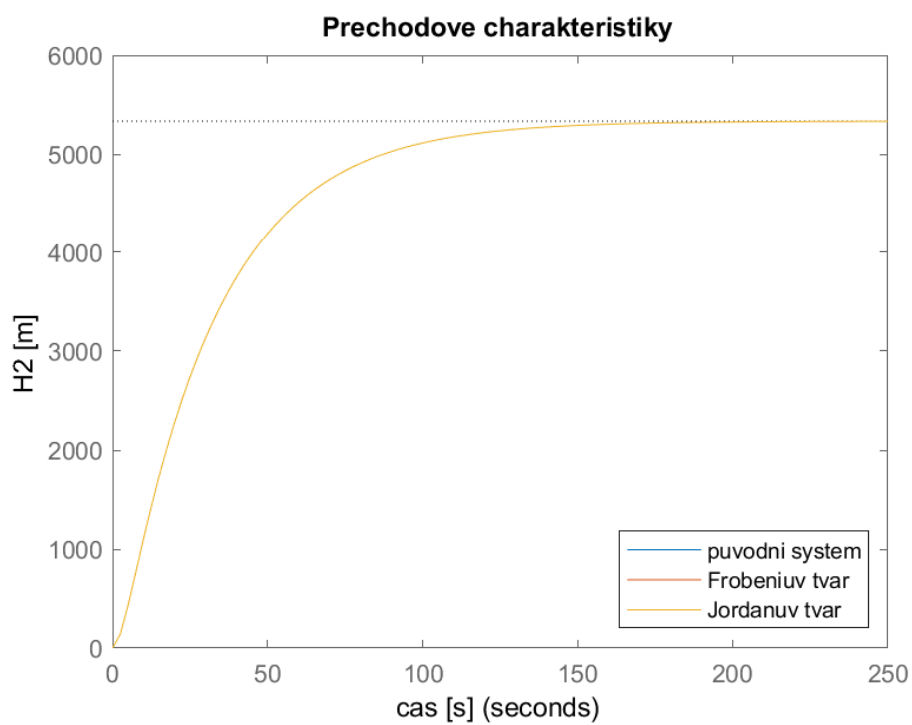
$$\bar{C}_J = C T_J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,6154 & -0,7882 \\ 0,7882 & -0,6154 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7882 & -0,6154 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_J = D = 0$$

V následujících grafech můžeme pozorovat jak všechny tři systémy reagují na Diracův puls a jednotkový skok. Z grafů je patrné, že všechny tři systému jsou z pohledu vstupně-výstupního chování totožné. To jen potvrzuje správnost našeho výpočtu a teorii, že jeden systém lze popsat různými stavovými modely.



Obrázek 8: Impulsní charakteristiky všech tří systémů.



Obrázek 9: Přechodové charakteristiky všech tří systémů.

Ověření stability

Začneme zkoumáním vnitřní stability a tedy polohy pólů přenosu původní stavové reprezentace a vlastních čísel matice \bar{A}_{Frob} a \bar{A}_{Jord} , které zjistíme pomocí příkazu $\text{eig}()$ a nebo ručně hledáním kořenů polynomu $\det(\lambda I - A) = 0$.
Původní reprezentace přenosem:

$$F_2(p) = \frac{60}{p^2 + 0,375p + 0,01125} = \frac{60}{(p + 0,3421)(p + 0,0329)}$$

Z tvaru jmenovatele je zřejmé, že reálné části pólů leží v záporné polorovině \Rightarrow systém je vnitřně stabilní Frobeniova stavová reprezentace:

$$\bar{A}_{Frob} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,01125 & -0,375 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -0,0329, \lambda_2 = -0,3421$$

Obě vlastní čísla (jejich reálné složky) leží v záporné polorovině \Rightarrow systém je vnitřně stabilní.
Jordanova stavová reprezentace: (Zde se vlastní čísla nachází přímo na diagonále matice A)

$$\bar{A}_J = \begin{bmatrix} -0,3421 & 0 \\ 0 & -0,0329 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -0,3421, \lambda_2 = -0,0329$$

Vlastní čísla se opět nachází v záporné polorovině a tedy \Rightarrow systém je vnitřně stabilní.

Jelikož vnitřní stabilita implikuje vnější stabilitu, jsou zmíněné tři reprezentace jak vnitřně stabilní, tak BIBO stabilní.

Ověření říditelnosti a pozorovatelnosti

Říditelnost a pozorovatelnost systémů ověřím díky porovnání hodnot matice A s maticí říditelnosti a pozorovatelnosti. Pokud má některá matice hodnot jinou než matice A pak systém nesplňuje podmínky říditelnosti nebo pozorovatelnosti podle toho, která matice danou podmínku nesplňuje. Matici říditelnosti Q_r vypočítáme jako

$$Q_r = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]$$

A matici pozorovatelnosti Q_p jako

$$Q_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}$$

Původní stavová reprezentace

$$Q_r = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 400 & -60 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(Q_r)=2=n \Rightarrow$ systém je říditelný

$$Q_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = [0,00000, 1500 - 0,2250]$$

$\text{rank}(Q_p)=2=n \Rightarrow$ systém je pozorovatelný

Frobeniova reprezentace

$$Q_r = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,3750 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(Q_r)=2=n \Rightarrow$ systém je říditelný

$$Q_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(Q_p)=2=n \Rightarrow$ systém je pozorovatelný

Jordanova reprezentace

$$Q_r = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} -246,1649 & 84,2171 \\ -315,2822 & 10,3676 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(Q_r)=2=n \Rightarrow$ systém je říditelný

$$Q_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1500 & -0,2250 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(Q_p)=2=n \Rightarrow$ systém je pozorovatelný

2 Druhá část zadání (advanced models)

Nyní v druhé části se budeme věnovat modelu, který rozšíříme o elektrické čerpadlo, které nám bude poskytovat přítok do systému. Ze zadání víme, že je popsáno aperiodickým členem 1. řádu s časovou konstantou $T = 0,5s$ a statickým zesílením $K_s = Q_1 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot s^{-1}$. Přenos čerpadla od napětí na kotvě motoru k výtoku kapaliny je tedy

$$F_{cerp} = \frac{Q_1}{Tp+1} = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{0,5p+1} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{p+2}.$$

2.1 Stavový model rozšířené soustavy

Aby se dal určit stavový model celé soustavy, potřebujeme z přenosu čerpadla získat diferenciální rovnici pomocí zpětné Laplaceovy transformace následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} F_{cerp}(p) &= \frac{3 \cdot 10^{-4}}{p+2} \\ \frac{Y(p)}{U(p)} &= \frac{3 \cdot 10^{-4}}{p+2} \\ pY(p) + 2Y(p) &= 3 \cdot 10^{-4}U(p) \quad / \mathcal{L}^{-1}\{\} \\ \dot{y}(t) + 2y(t) &= 3 \cdot 10^{-4}u(t) \end{aligned}$$

Jelikož je výstup této diferenciální rovnice ($y(t)$) zároveň vstupem do našeho původního linearizovaného systému, přejmenujeme ho na $q(t)$ a vstup diferenciální rovnice ($u(t)$) na $U_K(t)$ (napětí na kotvě motoru čerpadla). Pro lepší názornost přepíšeme do původních diferenciálních rovnic.

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta H_1(t)}{dt} &= -\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_1(t) + \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_2(t) + \frac{\Delta q(t)}{S} \\ \frac{d\Delta H_2(t)}{dt} &= \frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} \Delta H_1(t) - \left(\frac{c_p S_p \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_1-H_2}} + \frac{c_2 S_2 \sqrt{2g}}{2S\sqrt{H_2}} \right) \Delta H_2(t) \\ \frac{d\Delta q(t)}{dt} &= -2\Delta q + 3 \cdot 10^{-4} U_K(t) \end{aligned}$$

Nyní vypočteme matice lineárního modelu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,15 & 0,15 & 400 \\ 0,15 & -0,225 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\mathbf{D} = 0$$

a dosadíme do stavového popisu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{H}_1(t) \\ \dot{H}_2(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,15 & 0,15 & 400 \\ 0,15 & -0,225 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} U_K(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} H_1(t) \\ H_2(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nyní dopočteme přenosové funkce nového linearizovaného systému od napětí na kotvě na jednotlivé výšky hladin pomocí dříve použitého vztahu

$$F(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

jeho zadáním do Matlabu a tvaru matice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nám rovnou vrátí naše hledané přenosové funkce

$$F_1(p) = \frac{H_1(p)}{U_K(p)} = \frac{0,12p + 0,027}{p^3 + 2,375p^2 + 0,7612p + 0,0225}$$

$$F_2(p) = \frac{H_2(p)}{U_K(p)} = \frac{0,018}{p^3 + 2,375p^2 + 0,7612p + 0,0225}.$$

2.2 Řízení hladiny H2

Dále se zabýváme tím, že se snažíme udržet hladinu $H_2(t)$ na konstantní hodnotě H_{2z} pomocí PI regulátoru, který bude připojen k naší soustavě. Sestrojíme zpětnovazební zapojení, které má přenos ve tvaru

$$F = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)}.$$

Přenos PI regulátoru je dán vztahem

$$F_R(p) = \frac{U_k(p)}{E(p)} = K(1 + \frac{1}{T_i p}).$$

$E(p)$ je obraz regulační odchylky, což je $E(p) = H_{2z}(p) - H_2(p)$. Přenos systému druhé nádrže je vyjádřen

$$F_S(p) = \frac{H_2(p)}{U_k(p)} = \frac{0,018}{p^3 + 2,375p^2 + 0,7612p + 0,0225}.$$

Tyto dva vztahy dosadíme do vztahu pro přenos v uzavřené smyčce.

$$F = \frac{F_S(p)F_R(p)}{1 + F_S(p)F_R(p)} = \frac{\frac{H_2(p)}{U_k(p)} \frac{U_k(p)}{E(p)}}{1 + \frac{H_2(p)U_k(p)}{U_k(p)E(p)}} = \frac{\frac{H_2(p)}{E(p)}}{\frac{E(p) + H_2(p)}{E(p)}} = \frac{H_2(p)}{E(p) + H_2(p)} = \frac{H_2}{H_{2z}(p) - H_2(p) + H_2(p)} = \frac{H_2(p)}{H_{2z}(p)}$$

Vznikl nám přenos systému zpětnovazebního řízení

$$F = \frac{H_2(p)}{H_{2z}(p)} = \frac{0,018K(T_i p + 1)}{T_i p(p^3 + 2,375p^2 + 0,7612p + 0,0225) + (T_i p + 1)0,018K}.$$

2.3 Experimentální stabilizace systému

Pomocí experimentů stanovíme hodnoty PI regulátoru $K = 4$ a $T_i = 50$. Nyní zkontrolujeme volbu parametrů pomocí kritérií stability.

Hurwitzovo kritérium stability

Po dosažení experimentálně stanovených parametrů můžeme určit přenos otevřené smyčky

$$F_o = F_r \cdot F_s,$$

kde F_r je přenos řízení (PI regulátoru) a F_s přenos systému od napětí na kotvě motoru čerpadla až na výšku hladiny H2. Dopočtením získáme

$$F_o = \frac{3,6p + 0,072}{50p^4 + 118,8p^3 + 38,06p^2 + 1,125p}$$

Pro ověření Hurwitzovo kritériem však potřebujeme uzavřený systém, který vypočteme jako

$$F_u = \frac{F_o}{1 + F_o} = \frac{F_o}{F_o(\frac{1}{F_o+1})} = \frac{1}{\frac{1}{F_o} + 1} = \frac{1}{\frac{50p^4 + 118,8p^3 + 38,06p^2 + 1,125p}{3,6p + 0,072} + 1} = \frac{3,6p + 0,072}{50p^4 + 118,8p^3 + 38,06p^2 + 4,725p + 0,072}$$

Z polynomu ve jmenovateli nyní vyčteme potřebné koeficienty a

$$a_4 = 50, a_3 = 118,8, a_2 = 38,06, a_1 = 4,725, a_0 = 0,072$$

a dosadíme do Hurwitzovo matice.

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118.8 & 4.725 & 0 & 0 \\ 50 & 38.06 & 0.072 & 0 \\ 0 & 118.8 & 4.725 & 0 \\ 0 & 50 & 38.06 & 0.072 \end{bmatrix}$$

Hlavní diagonální minory (Hurwitzovo determinanty):

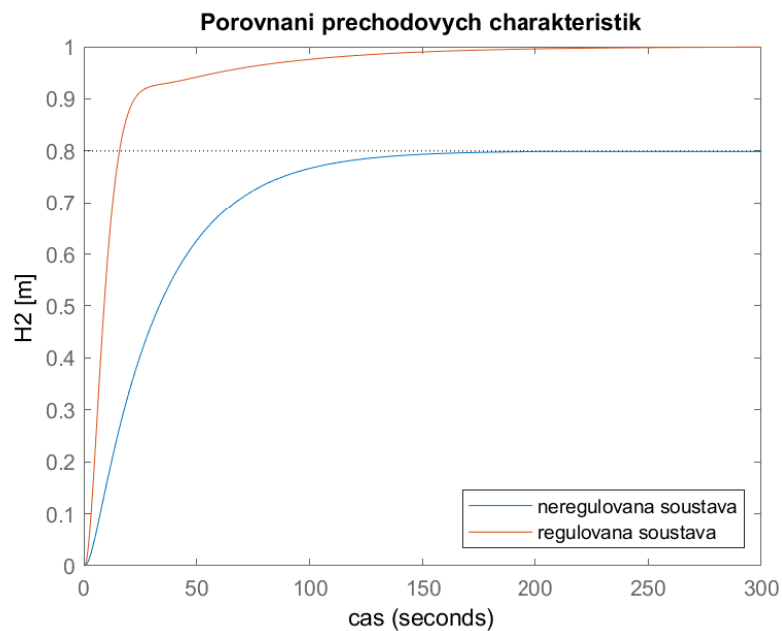
$$H_1 = 118.8, H_2 = 4285.3, H_3 = 19232, H_4 = 1384.7$$

všechny diagonální minory jsou $>0 \Rightarrow$ systém je stabilní

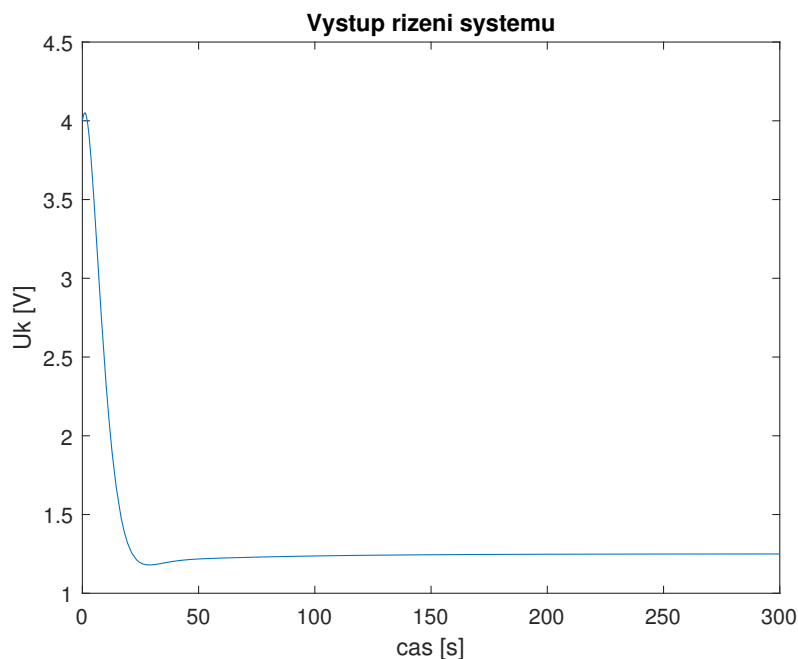
Nyquistovo kritérium stability

F_o nemá žádné nestabilní póly (všechny leží v záporné polorovině) a počet obkroužení bodu $(-1, j0) = 0 \Rightarrow$ systém je stabilní.

Na následujícím obrázku 10 můžeme vidět porovnání mezi regulovaným a neregulovaným systémem. Je z něj patrné, že díky regulátoru dosáhne systém požadované hodnoty 1 zatímco bez něj požadované hodnoty nedosáhne vůbec.



Obrázek 10: Odezva regulovaného a neregulovaného systému na jednotkový skok.



Obrázek 11: Výstupní signál regulátoru přiváděný na kotvu motoru čerpadla při odezvě na jednotkový skok (Obrázek 10).

Nyní si stanovíme 4 různé body frekvenční charakteristiky (resp. harmonické frekvence) a dopočteme jejich polohu v komplexní rovině ze změřených hodnot odezvy systému.

Bod 1 $\omega = 0.01 \text{ rad/s}$

Perioda harm. vstupu: $T_{in} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.01} = 200\pi = 628.3185$

Perioda výstupu: $T_{out} = 2 \cdot (4385 - 4070) = 630$

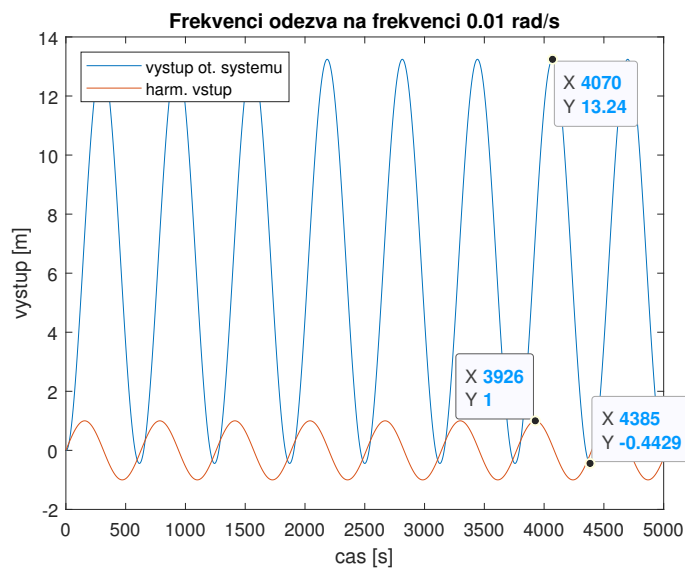
Fázový posun: $\varphi = \frac{(3926 - 4070)}{T_{in}} = \frac{-144}{628.3185} = -0.229183 \text{ rad} \rightarrow \varphi^\circ = -82.506^\circ$

Zesílení: $K = \frac{13.24 + 0.4429}{2 \cdot A_{in}} = \frac{13.6829}{2} = 6.84145$ $A_{in} \dots$ amplituda vstupního signálu

Souřadnice v komplexní rovině:

$B1_{Re} = K \cdot \cos(\varphi) = 6.84145 \cdot \cos(-82.506) = 0.892278$

$B1_{Im} = K \cdot \sin(\varphi) = 6.84145 \cdot \sin(-82.506) = -6.783014$



Obrázek 12: Frekvenční odezva na harmonický signál o frekvenci 0.01 rad/s .

Bod 2 $\omega = 0.05 \text{ rad/s}$

Perioda harm. vstupu: $T_{in} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.05} = 40\pi = 125.6637$

Perioda výstupu: $T_{out} = 2 \cdot (879.1 - 816.2) = 125.8$

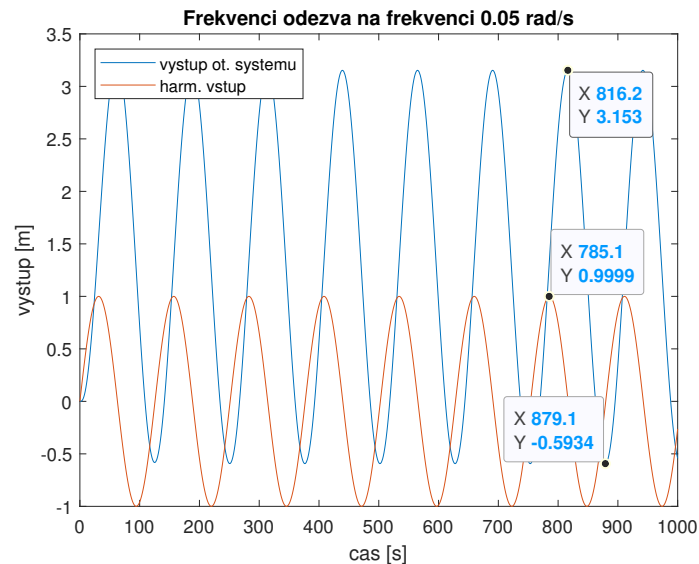
Fázový posun: $\varphi = \frac{(785.1 - 816.2)}{T_{in}} = \frac{-31.1}{125.6637} = -0.247486 \text{ rad} \rightarrow \varphi^\circ = -89.09496^\circ$

Zesílení: $K = \frac{3.153 + 0.5934}{2 \cdot A_{in}} = \frac{3.7464}{2} = 1.8732$ $A_{in} \dots$ amplituda vstupního signálu

Souřadnice v komplexní rovině:

$B1_{Re} = K \cdot \cos(\varphi) = 1.8732 \cdot \cos(-89.09496) = 0.029588$

$B1_{Im} = K \cdot \sin(\varphi) = 1.8732 \cdot \sin(-89.09496) = -1.872966$



Obrázek 13: Frekvenční odezva na harmonický signál o frekvenci 0.05 rad/s .

Bod 3 $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$

Perioda harm. vstupu: $T_{in} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.1} = 20\pi = 62.8319$

Perioda výstupu: $T_{out} = 2 \cdot (441.5 - 411.2) = 60.6$

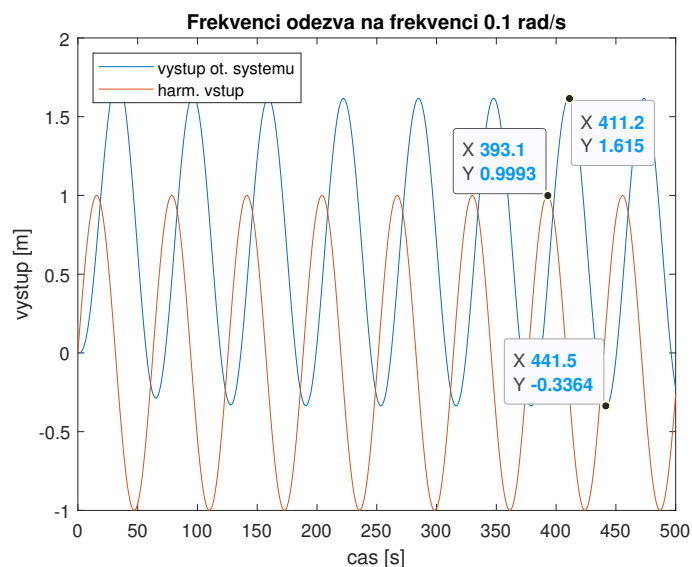
Fázový posun: $\varphi = \frac{(393.1 - 411.2)}{T_{in}} = \frac{-18.1}{62.8319} = -0.288070 \text{ rad} \rightarrow \varphi^\circ = -103.7052^\circ$

Zesílení: $K = \frac{1.615 + 0.3364}{2 \cdot A_{in}} = \frac{1.9514}{2} = 0.9757$ $A_{in} \dots$ amplituda vstupního signálu

Souřadnice v komplexní rovině:

$B1_{Re} = K \cdot \cos(\varphi) = 0.9757 \cdot \cos(-103.7052) = -0.231169$

$B1_{Im} = K \cdot \sin(\varphi) = 0.9757 \cdot \sin(-103.7052) = -0.947920$



Obrázek 14: Frekvenční odezva na harmonický signál o frekvenci 0.1 rad/s .

Bod 4 $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$

Perioda harm. vstupu: $T_{in} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi = 12.566371$

Perioda výstupu: $T_{out} = 2 \cdot (90.64 - 84.33) = 12.62$

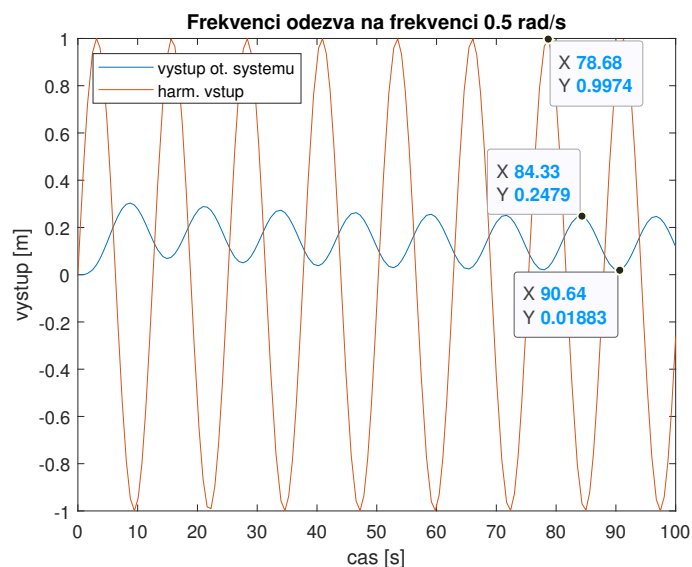
Fázový posun: $\varphi = \frac{(78.68 - 84.33)}{T_{in}} = \frac{-5.65}{12.566371} = -0.449613 \text{ rad} \rightarrow \varphi^\circ = -161.8607^\circ$

Zesílení: $K = \frac{0.2479 - 0.01883}{2 \cdot A_{in}} = \frac{0.22907}{2} = 0.114535$ $A_{in} \dots$ amplituda vstupního signálu

Souřadnice v komplexní rovině:

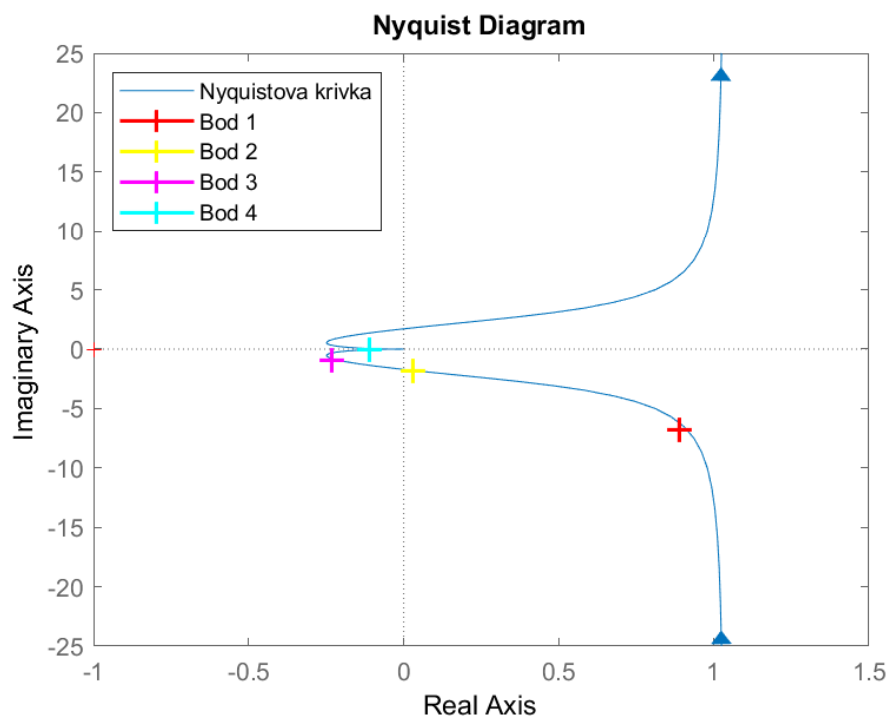
$B1_{Re} = K \cdot \cos(\varphi) = 0.114535 \cdot \cos(-161.8607) = -0.108843$

$B1_{Im} = K \cdot \sin(\varphi) = 0.114535 \cdot \sin(-161.8607) = -0.035658$

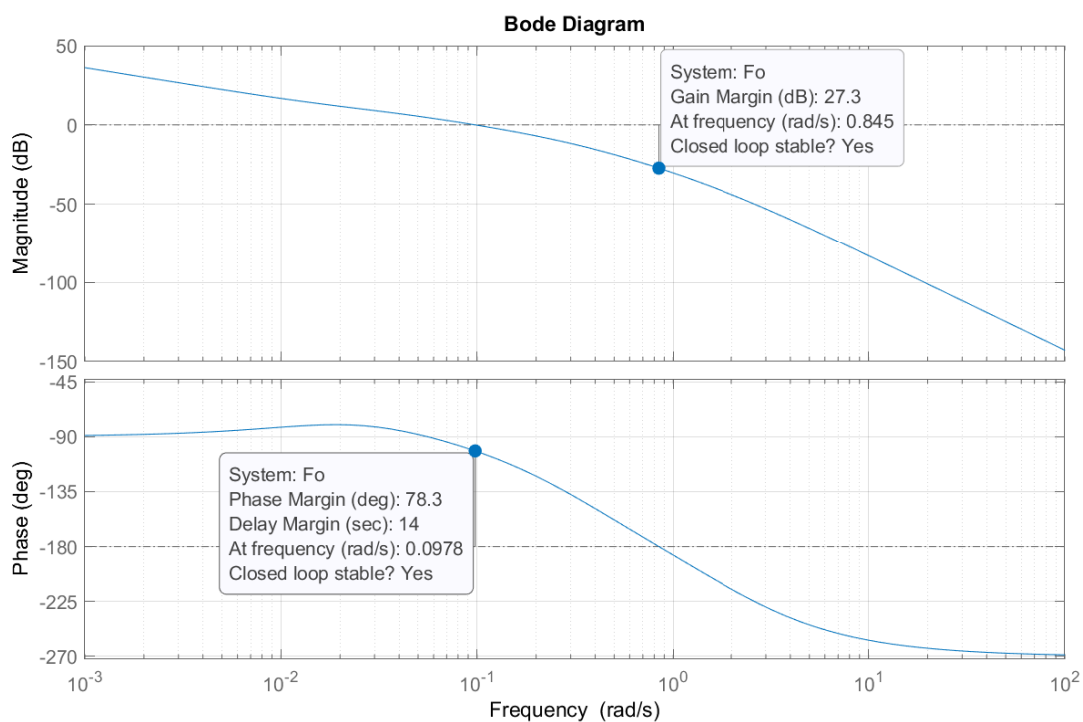


Obrázek 15: Frekvenční odezva na harmonický signál o frekvenci 0.5 rad/s .

Necháme si vykreslit v Matlabu Nyquistovu křivku pomocí příkazu `nyquist(Fo)`, kde `Fo` je otevřený regulační obvod našeho systému. Do vykresleného grafu (Obrázek 16) si ještě zaneseme naše vypočtené čtyři body pomocí měření frekvenčních charakteristik. Odchyly ručně měřených bodů nemají takovou přesnost, přibližně ale potvrzují průběh Nyquistovy křivky našeho otevřeného regulačního obvodu.



Obrázek 16: Nyquistova křivka vykreslená pro otevřený regulační obvod včetně zakreslených 4 bodů ručně vypočtených



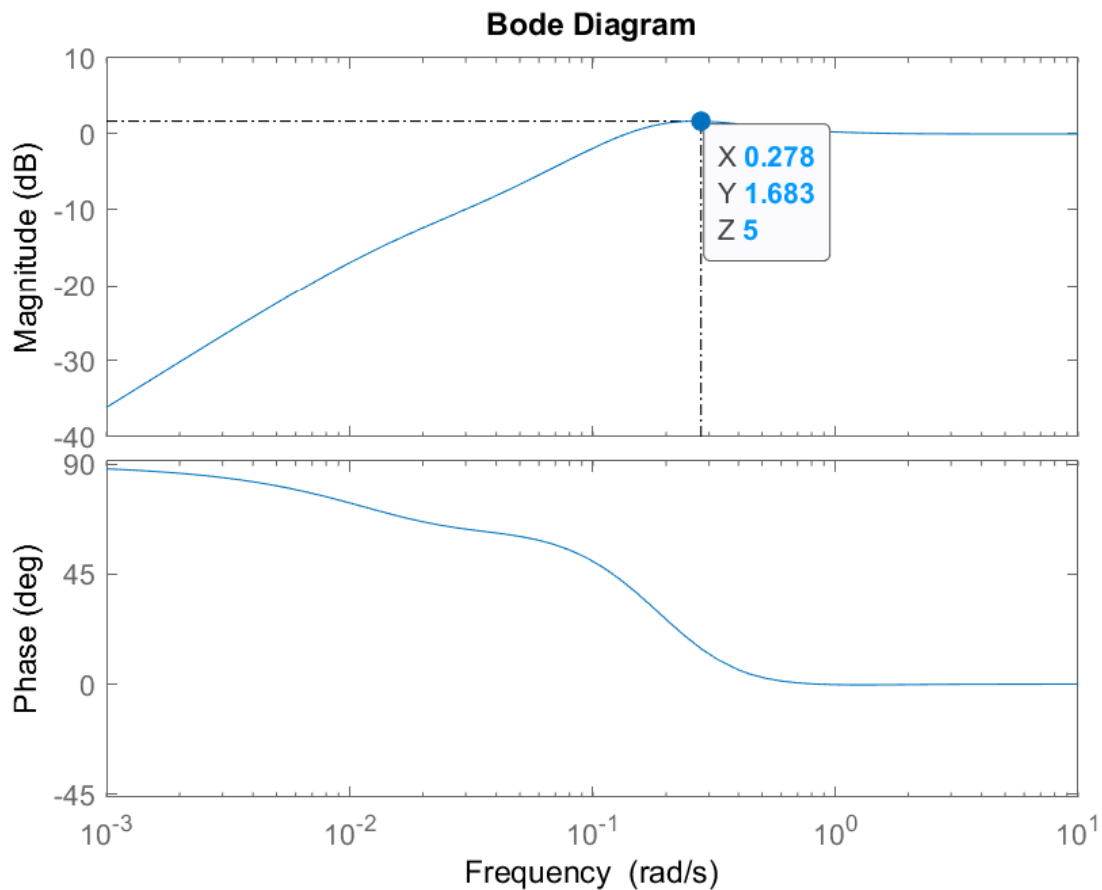
Obrázek 17: Bodeho charakteristiky otevřeného regulačního obvodu.

Z Bodeho charakteristik na obrázku 17 můžeme přímo vyčíst bezpečnost v zesílení a ve fázi. Bezpečnost ve stabilitě

určíme z citlivostní funkce ve tvaru

$$S = \frac{1}{1 + F_o} = \frac{50p^4 + 118.8p^3 + 38.06p^2 + 1.125p}{50p^4 + 118.8p^3 + 38.06p^2 + 4.725p + 0.072}.$$

Po vykreslení Bodeho charakteristiky pro citlivostní funkci S můžeme zjistit její maximální zesílení přímo z obrázku 18.



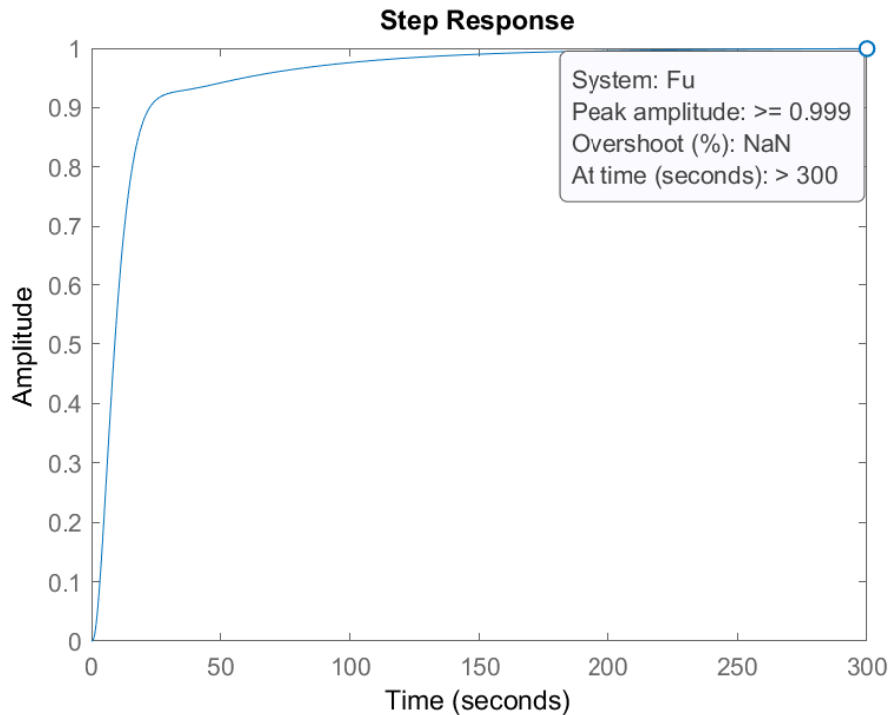
Obrázek 18: Bodeho charakteristiky citlivostní funkce S .

Maximální zesílení citlivostní funkce nám udává bezpečnost ve stabilitě odečtu tuto hodnotu z grafu na obrázku 18. Protože jsou charakteristiky v logaritmických souřadnicích, převedeme je.

$$1.683 = 20 \cdot \log(S_{max})$$

$$S_{max} = 1.2138$$

Pro zhodnocení práce regulátoru si vykreslíme přechodovou charakteristiku uzavřeného systému do obrázku 19.



Obrázek 19: Přechodová charakteristika uzavřeného systému.

Přechodový děj probíhá velice pomalu a při snaze zvolit parametry regulátoru tak, aby nedošlo k překmitu došlo k tomu, že se systém ustálí až po delší době ($>300s$). Je tedy velmi pomalý, ale po dostatečně dlouhé době se ustálí na požadované hodnotě.

2.4 Experimentální hledání kritického zesílení

Pomocí Hurwitzova kritéria stability zjistíme zesílení, při kterém dojde v uzavřeném obvodu k netlumenému kmitání. Hledáme kritické zesílení K_{krit} . To zjistíme pomocí charakteristické rovnice. Koeficienty dáme do Hurwitzovy matice a Hurwitzovo determinant H_{n-1} se musí rovnat nule.

charakteristická rovnice

Za T_i dosadíme 0,5.

$$0,5p^4 + 1,1875p^3 + 0,3806p^2 + (0,01125 + 0,009K)p + 0,018K = 0$$

Dosadíme koeficienty charakteristického polynomu

$$\begin{bmatrix} 1,1875 & 0,01125 + 0,009K & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,3806 & 0,018K & 0 \\ 0 & 1,1875 & 0,01125 + 0,009K & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,3806 & 0,018K \end{bmatrix}$$

Ted' vypočítáme Hurwitzovy determinanty.

$$H_1 = |1,1875| = 1,1875$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1,1875 & 0,01125 + 0,009K \\ 0,5 & 0,3806 \end{vmatrix} = \frac{-360K + 35707}{80000}$$

$$H_4 = a_0 H_3$$

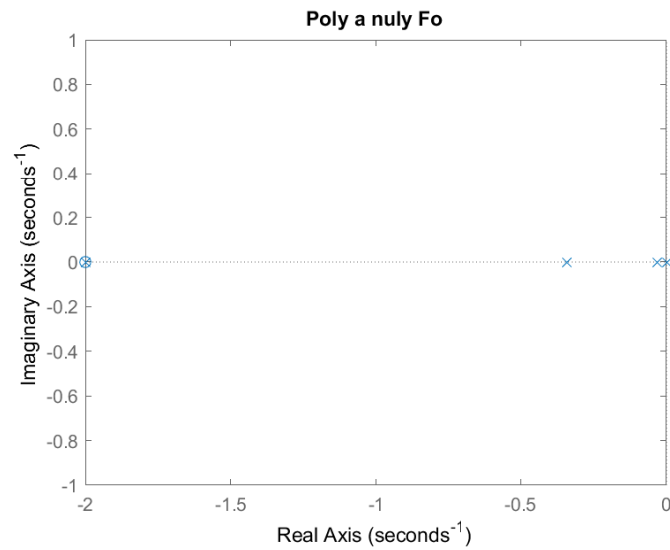
$$H_3 = \begin{vmatrix} 1,1875 & 0,01125 + 0,009K & 0 \\ 0,5 & 0,3806 & 0,018K \\ 0 & 1,1875 & 0,01125 + 0,009K \end{vmatrix} = \frac{-12960K^2 - 6853248K + 1606815}{320000000}$$

Podmínka: $H_{n-1} = H_3 = 0$. Známe H_3 a z toho vypočítáme zesílení K , když determinant položíme rovno nule.

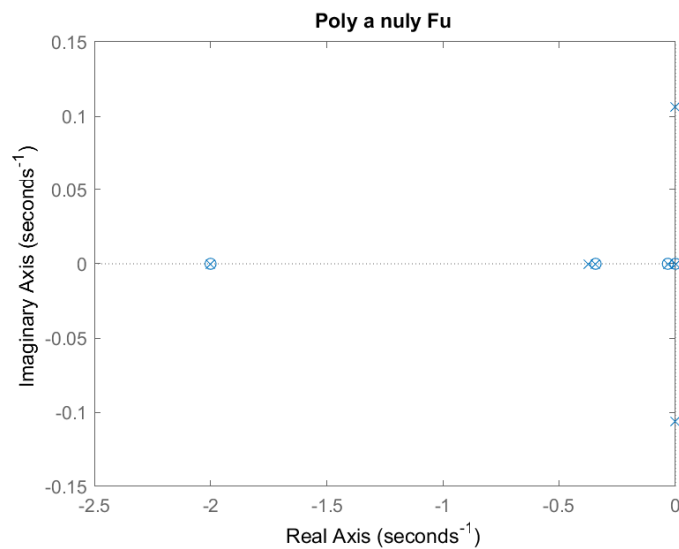
$$\frac{-12960K^2 - 6853248K + 1606815}{320000000} = 0$$

Podmínka pro zesílení je $K > 0$.

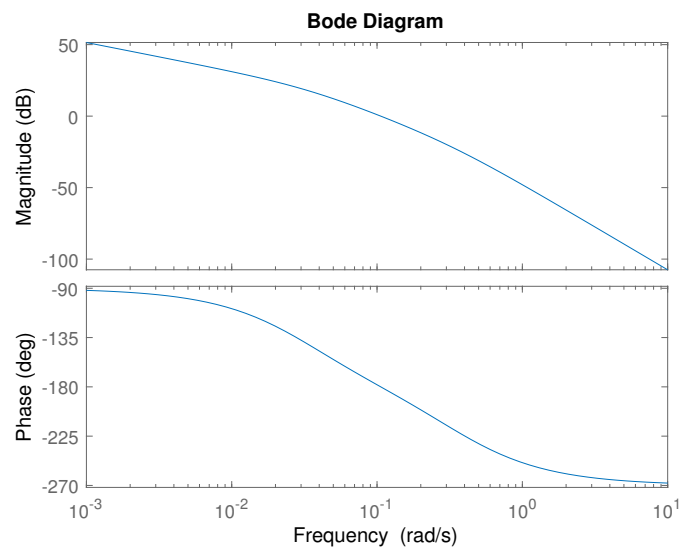
$$K = K_{krit} = 0,234356497581$$



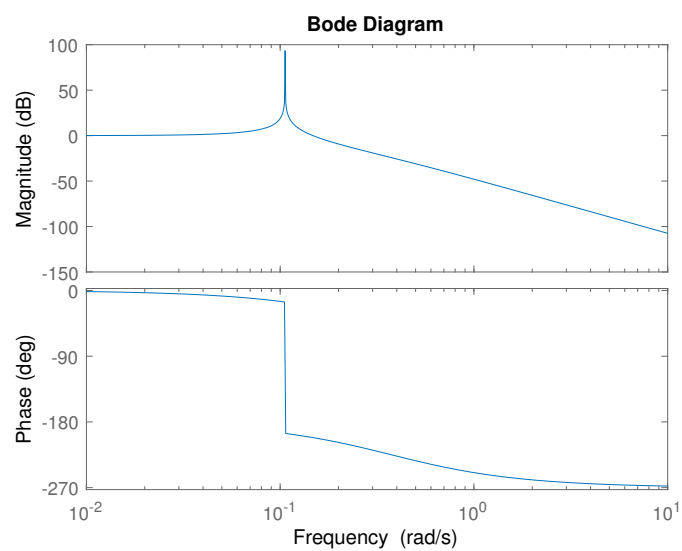
Obrázek 20: Nuly a póly otevřené smyčky.



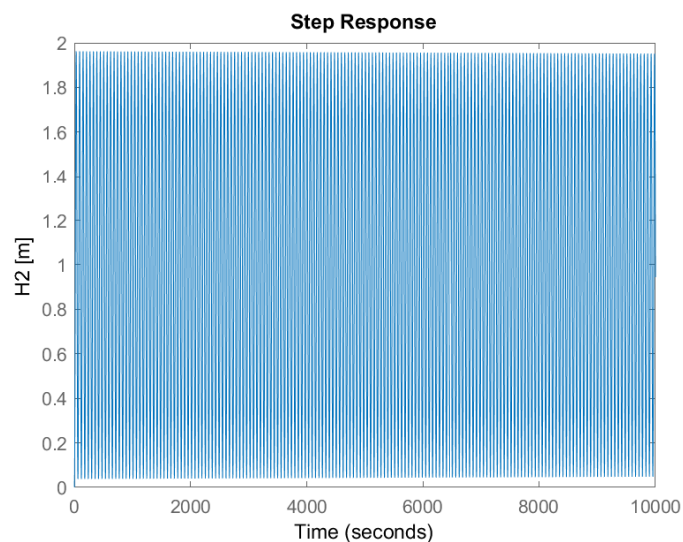
Obrázek 21: Nuly a póly uzavřené smyčky.



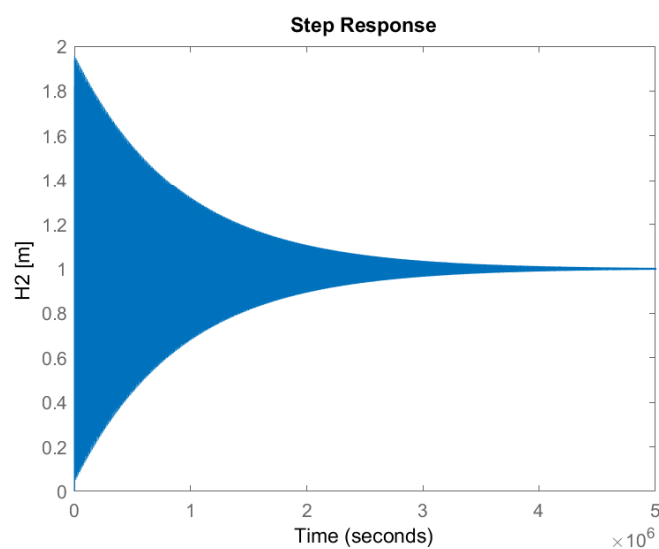
Obrázek 22: Bodeho charakteristika otevřené smyčky.



Obrázek 23: Bodeho charakteristika uzavřené smyčky.



Obrázek 24: Přechodová charakteristika pro systém s nastaveným zesílením $K = K_{krit}$ pro omezenou délku trvání simulace.



Obrázek 25: Přechodová charakteristika pro systém s nastaveným zesílením $K = K_{krit}$.

V obrázcích 24 a 25 lze vidět, že při kritickém zesílení dochází ke kmitání výstupu, ale z druhého obrázku je patrné, že se po delší době ustálí. To může být způsobeno chybou ve výpočtu nebo zaokrouhlením.

2.5 Odvození parametrů PI regulátoru

V tomto bodě budeme odvozovat pomocí GMK parametry PI regulátoru. Opět budeme pracovat s přenosem uzavřené smyčky.

$$F = \frac{0,018K(T_i p + 1)}{T_i p(p^3 + 2,375p^2 + 0,7612p + 0,0225) + (T_i p + 1)0,018K}$$

Rozložíme čitatele i jmenovatel na součin.

$$F = \frac{0,018KT_i(p + \frac{1}{T_i})}{T_i p(p^3 + 2,375p^2 + 0,7612p + 0,0225) + (T_i p + 1)0,018K}$$

Pro tento přenos zvolíme vhodné umístění pólů, ze kterých vypočítáme parametry PI regulátoru. Systém má jednu nulu, $m = 1$, $z_1 = -\frac{1}{T_i}$, a čtyři póly, $n = 4$, $p_1 = -2,0015$, $p_2 = -0,3721$, $p_3 = -0,0007 + 0,1149i$, $p_4 = -0,0007 - 0,1149i$. GMK má tři asymptoty. Pro tento přenos odpovídají parametry regulátoru těmito hodnotám $\rightarrow T_i = 0,86$ a $K = 0,47$. Z toho plyne, že nula $z_1 = -\frac{50}{43}$. Systém vypadá takto

$$F = \frac{0,0072756(p + \frac{50}{43})}{(p + 2,0015)(p + 0,3721)(p + 0,0007 + 0,1149i)(p + 0,0007 - 0,1149i)}.$$

Jelikož je splněna podmínka $n - m \geq 2$, znamená to, že součet pólů otevřené smyčky se rovná součtu pólů uzavřené smyčky.

Vypočítáme bod, kde se potkávají všechny asymptoty.

$$q = \frac{\sum_i p_i - \sum_j z_j}{n-m} = \frac{-2,0015 - 0,3721 - 0,0007 + 0,1149i - 0,0007 - 0,1149i + \frac{50}{43}}{3} = -0,6667$$

Ted' vypočítáme asymptoty, které jsou tři. $l = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}\alpha_l &= \frac{\pi + (l-1)2\pi}{n-m} \\ \alpha_1 &= \frac{\pi}{3} = 60^\circ \\ \alpha_2 &= \frac{\pi + 2\pi}{3} = \pi = 180^\circ \\ \alpha_3 &= \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 300^\circ\end{aligned}$$

Nakonec vypočítáme body, kdy větve přechází na reálnou osu.

$$\sum_i \frac{1}{p-p_i} - \sum_j \frac{1}{p-z_j} = 0$$

$$\frac{1}{p+2,0015} + \frac{1}{p+0,3721} + \frac{1}{p+0,0007-0,114i} + \frac{1}{0,0007+0,1149i} - \frac{1}{p+\frac{50}{43}} = 0$$

Vyjdou nám 4 kořeny.

$$\begin{aligned}p_1 &= -0,017197222107058621890968543792558 \\ p_2 &= -0,23639720257288979616816068858502 \\ p_3 &= -1,4400632527763048607378772442763 - 0,45514565317143789661943736324585i \\ p_4 &= -1,4400632527763048607378772442763 + 0,45514565317143789661943736324585i\end{aligned}$$

Systém neprotíná imaginární osu, a tudíž nemá žádné kritické zesílení.

Vytvoříme přenos systému pro otevřenou smyčku, který má tvar $F(p) = F_R(p)F_S(p)$.

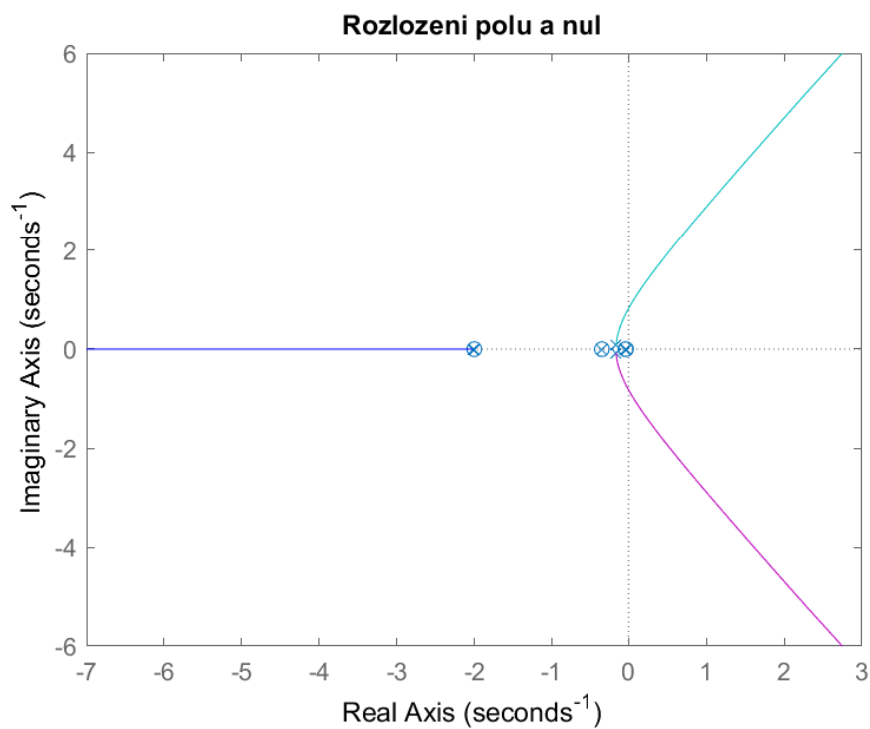
$$F(p) = F_R(p)F_S(p) = K(1 + \frac{1}{T_i p}) \frac{0,018}{p^3 + 2,375p^2 + 0,7612p + 0,0225} = \frac{0,018KT_i p + 0,018K}{T_i p(p^3 + 2,375p^2 + 0,7612p + 0,0225)} =$$

$$\frac{0,018KT_i(p + \frac{1}{T_i})}{T_i p(p + 0,0328862422062)(p + 2,00003066251)(p + 0,342083095279)}$$

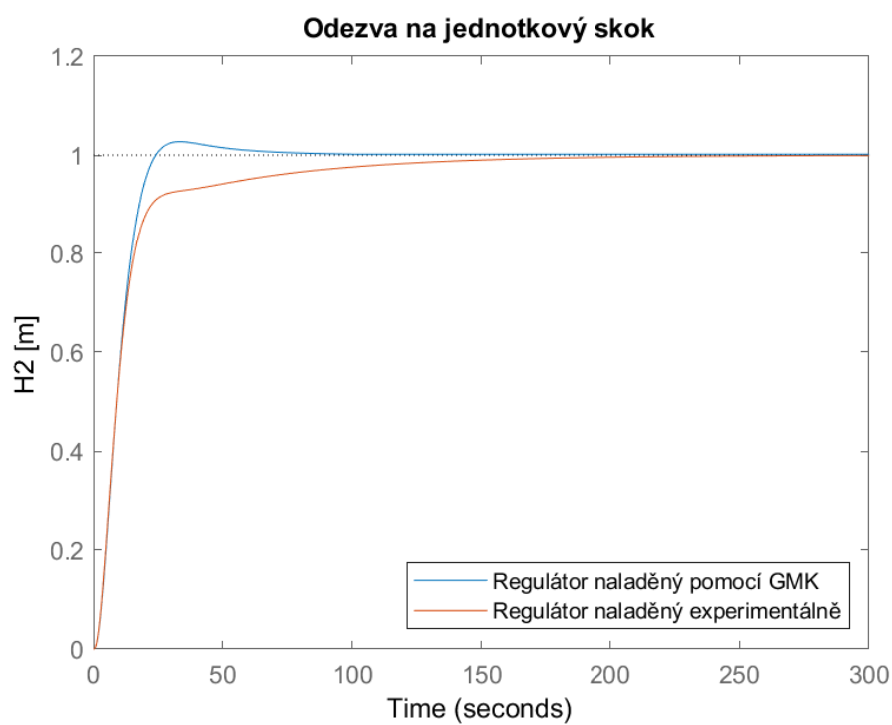
Tento systém má $m = 1$ nul, $z_1 = -\frac{1}{T_i}$ jako uzavřený systém a počet pólů je taky stejný, jak už jsme uvedli výše. $n = 4$, $p_1 = 0$, $p_2 = -0,0328862422062$, $p_3 = -2,00003066251$, $p_4 = -0,342083095279$.

Dosadíme výše zmíněné zesílení $K = 0,47$ a časovou konstantu $T_i = 0,86$. Vyjde nám, že nula systému je opět $z_1 = -\frac{50}{43}$.

Regulátor z předchozího příkladu měl kritické zesílení $K_{krit} = 0,234356497581$ a regulátor vypočítaný v tomto úkolu žádné kritické zesílení nemá.

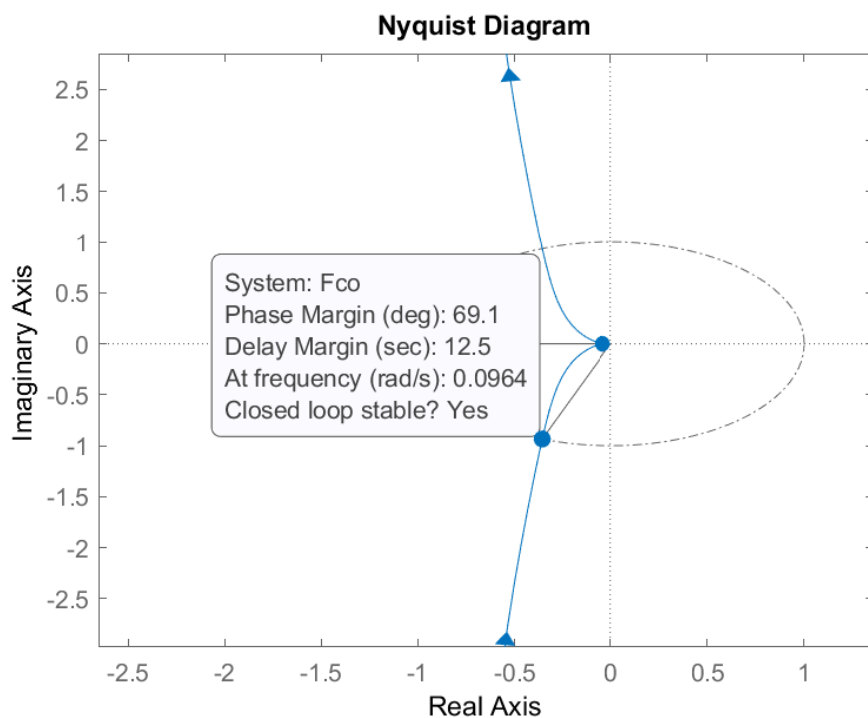


Obrázek 26: GMK s dodatečně přidaným pólem v bodě $[0;0,j]$ a nulou nastavenou podle zakřivení křivek.

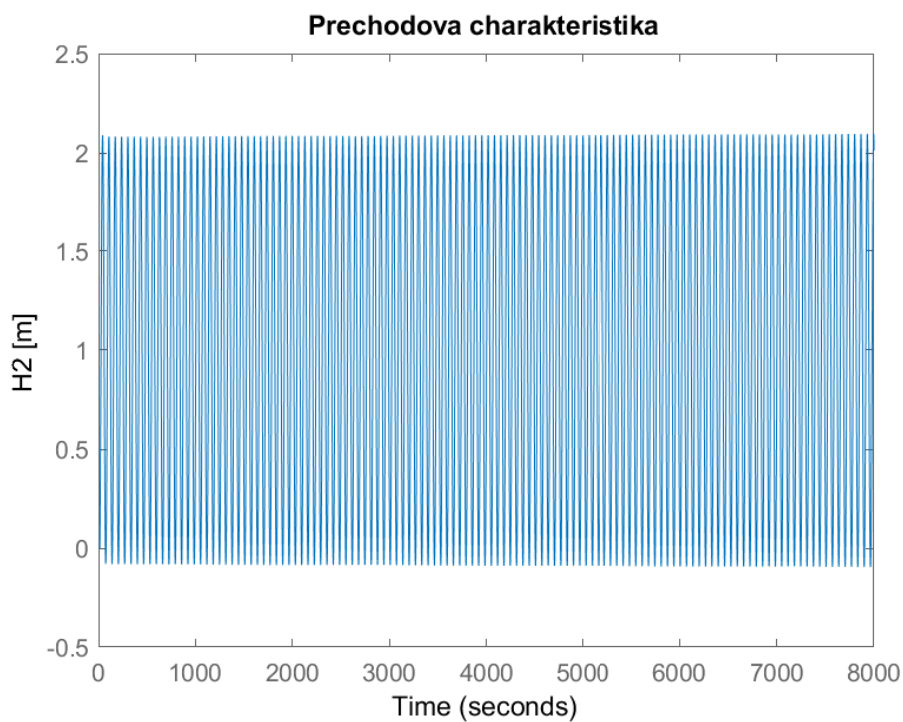


Obrázek 27: Porovnání systémů s regulátorem nastaveným experimentálně a pomocí GMK.

2.6 Dopravní zpoždění



Obrázek 28: Nyquistova charakteristika otevřeného regulačního obvodu, z které je patrné mezní dopravní zpoždění.



Obrázek 29: Přechodová charakteristika systému s regulátorem naladěným podle GMK s dopravním zpožděním $D = 12.518$

Posledním úkolem je uvažovat, že řízený systém má dopravní zpoždění. V příkladu výše jsme pracovali se zesílením $K = 0,47$ a časovou konstantu $T_i = 0,86$. Máme určit takové dopravní zpoždění, aby se náš systém dostal na mez asymptotické stability. Přenos dopravního zpoždění je

$$F = e^{-Dp}.$$

Ze systému

$$F = \frac{0,0072756(p + \frac{50}{43})}{(p + 2,0015)(p + 0,3721)(p + 0,0007 + 0,1149i)(p + 0,0007 - 0,1149i)}$$

vytvoříme uzavřenou smyčku s dopravním zpožděním. Výsledný systém bude vypadat

$$F = \frac{\frac{0,0072756(p + \frac{50}{43})}{(p + 2,0015)(p + 0,3721)(p + 0,0007 + 0,1149i)(p + 0,0007 - 0,1149i)} e^{-Dp}}{1 + \frac{0,0072756(p + \frac{50}{43})}{(p + 2,0015)(p + 0,3721)(p + 0,0007 + 0,1149i)(p + 0,0007 - 0,1149i)} e^{Dp}} = \frac{0,0072756(p + \frac{50}{43})}{(p + 2,0015)(p + 0,3721)(p + 0,0007 + 0,1149i)(p + 0,0007 - 0,1149i)e^{Dp} + 0,0072756(p + \frac{50}{43})}$$

D bude dopravní zpoždění.

Systém bude na mezi asymptotické stability, pokud se reálné části pólů budou rovnat nule.

charakteristický polynom

$$(p + 2,0015)(p + 0,3721)(p + 0,0007 + 0,1149i)(p + 0,0007 - 0,1149i)e^{Dp} + 0,0072756(p + \frac{50}{43}) = 0$$

Náš systém se nikdy nemůže dostat na mez asymptotické stability, jelikož pro $p = 0$ nezáleží na dopravním zpoždění D .