Západočeská Univerzita v Plzni
Fakulta Aplikovaných Věd

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Markovské řetězce

Semestrální práce č. 1

Filip Jašek

Předmět: KKY/STP (Stochastické Systémy a Procesy)
Přednášející: Doc. Ing. Straka Ondřej, Ph.D.
Cvičící: Ing. Kost Oliver

Datum: 22. června 2022

1 Zadání

ZČU v Plzni – Katedra kybernetiky — Stochastické systémy a procesy

Markovské řetězce

Zadání semestrální práce č. 1

Zvolte si grafy prezentující Markovské řetězce, jehož uzly značí stavy a hrany určují pravděpodobnosti přechodu $p_{i,j}$ z uzlu i do uzlu j, tak aby měl 6 uzlů a aby platilo že

Příklad č. 1

Markovský řetězec je homogenní a regulární. Pro tento řetězec určete:

- M – střední počet kroků, které jsou třeba k (prvnímu) dosažení stavu j za předpokladu, že se vycházelo ze stavu i,
- a – finální pravděpodobnosti.

Příklad č. 2

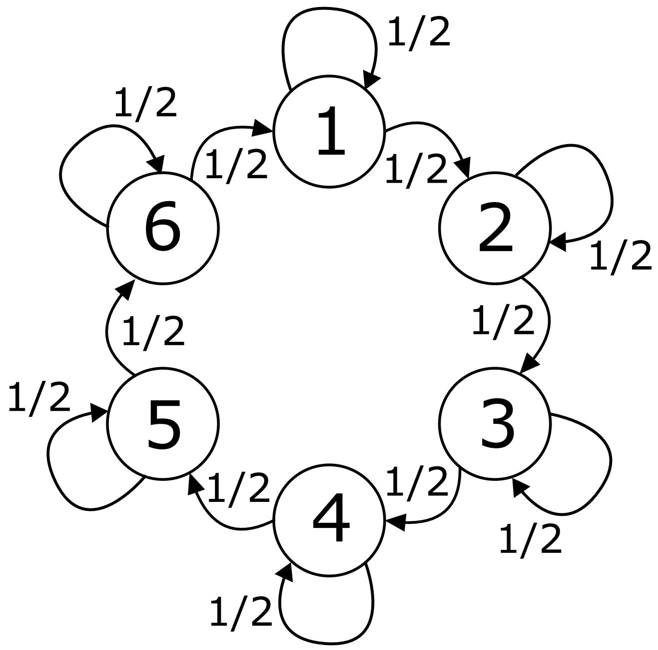
Markovský řetězec je homogenní a absorpční se dvěma absorpčními stavy. Pro tento řetězec určete:

- T – střední počet průchodů stavem j, pokud se vychází ze stavu i, do té doby, než dojde k pohlcení (pokud $j = i$, výchozí stav se započítává za první průchod),
- t – dobu pobytu v tranzientním stavu,
- d – pravděpodobnost, že Markovský řetězec vycházející ze stavu i skončí v daném absorpčním stavu.

2 Příklad č. 1

Pro zadaná kritéria byl vytvořen homogenní regulární Markovský řetězec zobrazen na obrázku 1 s přechodovou maticí

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



Obrázek 1: Graf zvoleného Markovského řetězce.

2.1 Střední počet kroků ze stavu i do j

Pro zjištění středního počtu kroků k dosažení stavu j za předpokladu vycházení ze stavu i lze použít vztah

$$m_{ij} = \sum_{s=1}^{\infty} p_{is} \cdot m_{sj} + 1$$

nebo jeho maticový zápis

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\overline{\mathbf{M}} + \mathbf{E},$$

kde matice $\mathbf{M}$ je matice prvků m_{ij}, $\overline{\mathbf{M}}$ je matice $\mathbf{M}$, kde na hlavní diagonále (pozice $i = j$) jsou nuly a $\mathbf{E}$ je matice s jedničkami na všech pozicích.

Za pomoci symbolického výpočtu v Matlabu jsme docílili následujícího výsledku.

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\overline{\mathbf{M}} + \mathbf{E} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & 0 & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & 0 & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 0 & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & 0 & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 6 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 & 6 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}
$$

2.2 Finální pravděpodobnost

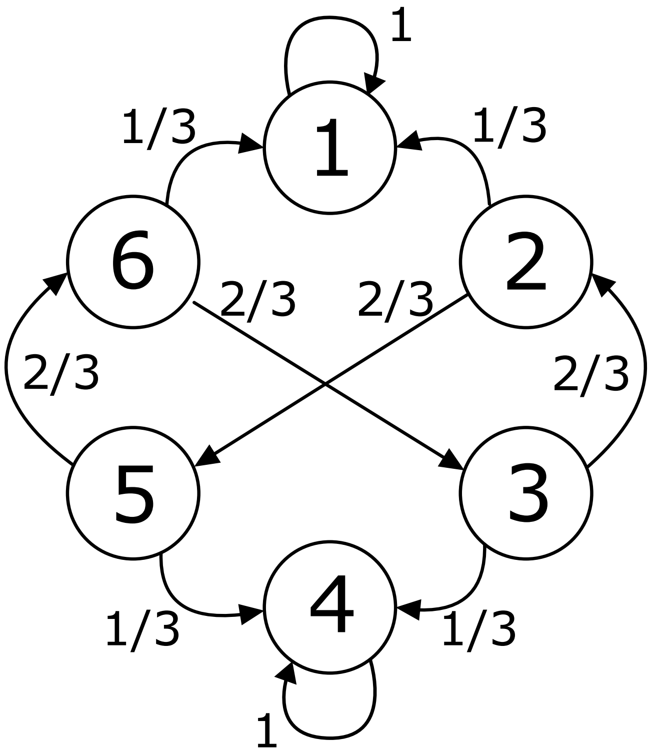
Finální pravděpodobnost se získá limitou mocniny přechodové matice do ∞.

$$
\mathbf{P}_{final} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{P}^k = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix}
$$

3 Příklad č. 2

Pro následující výpočty byl vytvořen nový homogenní absorpční Markovský řetězec s dvěma absorpčními stavy zakreslený na obrázku 2, popsaný maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Obrázek 2: Graf druhého zvoleného Markovského řetězce s dvěma absorpčními stavy.

3.1 Střední počet průchodů stavem j

Při startu ze stavu i spočteme střední počet průchodů tranzientním stavem j před pohlcením vztahem

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1},$$

kde $\mathbf{Q}$ získáme z matice $\mathbf{P}$ vynecháním řádků a sloupců odpovídající absorpčním stavům a I jako jednotkovou matici.

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2462 & 0.3692 & 0.8308 & 0.5538 \\ 0.8308 & 1.2462 & 0.5538 & 0.3692 \\ 0.3692 & 0.5538 & 1.2462 & 0.8308 \\ 0.5538 & 0.8308 & 0.3692 & 1.2462 \end{bmatrix}$$

3.2 Doba pobytu v tranzientním stavu

Dobu pobytu v tranzientím stavu zjistíme za pomoci vztahu

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E},$$

kde **T** je matice středního počtu průchodů vypočtená v předchozím příkladu a **E** je vektor jedniček.

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1.2462 & 0.3692 & 0.8308 & 0.5538 \\ 0.8308 & 1.2462 & 0.5538 & 0.3692 \\ 0.3692 & 0.5538 & 1.2462 & 0.8308 \\ 0.5538 & 0.8308 & 0.3692 & 1.2462 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3.3 Pravděpodobnost konce v absorpčním stavu

Pravděpodobnost konce v jednom z absorpčních stavů je dána vztahem

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R},$$

kde **T** je již vypočtená matice středního počtu průchodů a **R** je část matice přechodu **P**. **R** tedy bude obsahovat řádky bez absorpčních stavů a sloupce pouze absorpčních stavů.

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.2462 & 0.3692 & 0.8308 & 0.5538 \\ 0.8308 & 1.2462 & 0.5538 & 0.3692 \\ 0.3692 & 0.5538 & 1.2462 & 0.8308 \\ 0.5538 & 0.8308 & 0.3692 & 1.2462 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

4 Závěr

Vzorce byly čerpány z přednášek a výpočty byly provedeny za pomoci softwaru Matlab. Samotné vypracování práce mi pomohlo lépe pochopit Markovské řetězce a jejich parametry.