Západočeská Univerzita v Plzni
Fakulta Aplikovaných Věd

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Stochastické procesy a stacionarita

Semestrální práce č. 2

Filip Jašek

Předmět: KKY/STP (Stochastické Systémy a Procesy)
Přednášející: Doc. Ing. Straka Ondřej, Ph.D.
Cvičící: Ing. Kost Oliver
Datum: 27. června 2022

1 Zadání

Stochastické procesy a stacionarita

Zadání semestrální práce č. 2

Příklad č. 1

Uvažujte Gauss-Markovův diskrétní proces generovaný vztahem

$$X_{k+1} = e^{-bT} X_k + W_k,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde W_k je bílý šum, $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, Q(1-e^{-2bT})\}$, počáteční podmínka je $p(X_0) = \mathcal{N}\{X_0; 0, Q\}$, $Q = 3$, $b = 0.5$ a $T = 1$. Vygenerujte $M = 10^4$ realizací Gauss-Markova procesu pro N=100 časových okamžiků. Vypočítejte odhad autokovarinanční funkce $\widehat{\mathsf{COV}[X_k, X_{k+\tau}]}$ pro $\tau \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $k \in \{0, 1, 2, \dots, 94\}$. Vykreslete a porovnejte tyto odhady s teoreticky vypočítanou autokovariančnční funkcí $\mathsf{COV}[X_k, X_{k+\tau}]$. Určete, zda je proces stacionární v širším smyslu.

Příklad č. 2

Hodnotu Wienerova procesu v diskrétních časových okamžicích lze generovat pomocí vztahu

$$X_{k+1} = X_k + W_k,\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde počáteční podmínka je $X_0 = 0$, interval mezi časovými okamžiky je roven jedné a W_k je bílý šum a $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, 1\}$.Vygenerujte $M = 10^4$ realizací Wienerova procesu pro N=100 časových okamžiků. Vykreslete 8 realizací a všimněte si nestacionarity procesu. Vypočítejte teoretickou hodnotu autokovarianční funkce procesu $\mathsf{COV}[X_{k+\tau}, X_k]$ a její odhad $\widehat{\mathsf{COV}[X_{k+\tau}, X_k]}$ pro $\tau \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $k \in \{0, 1, 2, \dots, 94\}$ vypočítaný z realizací. Obojí vykreslete s porovnejte.

Příklad č. 3

Uvažujte následující Gauss-Markovův model systému

$$X_{k+1} = 0.95 X_k + 0.5 W_k$$
$$Z_k = 5 X_k + V_k,$$

kde $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, 3\}$ a $p(V_k) = \mathcal{N}\{V_k; 0, 2\}$ jsou bílé šumy vzájemně nezávislé a nezávislé na počáteční podmínce $p(X_0) = \mathcal{N}\{X_0; 1, 5\}$. Vygenerujte $M = 10^4$ realizací modelu pro N=100 časových okamžiků. Vypočítejte teoretickou střední hodnotu procesů $\mathsf{E}[X_k]$, $\mathsf{E}[Z_k]$, jejich odhadů $\widehat{\mathsf{E}[X_k]}$, $\widehat{\mathsf{E}[Z_k]}$ pro $k \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ a ustálené hodnoty $\mathsf{E}[X_k]$, $\mathsf{E}[Z_k]$ pro $k \to \infty$. Výsledky vykreslete s porovnejte. Vypočítejte teoretickou hodnotu variance procesů $\mathsf{VAR}[X_k]$, $\mathsf{VAR}[Z_k]$, jejich odhadů $\widehat{\mathsf{VAR}[X_k]}$, $\widehat{\mathsf{VAR}[Z_k]}$ pro $k \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ a ustálené hodnoty $\mathsf{VAR}[X_k]$, $\mathsf{VAR}[Z_k]$ pro $k \to \infty$. Výsledky opět vykreslete s porovnejte.

2 Příklad č. 1

2.1 Teoretický výpočet kovarianční funkce

Pro zjištění obecné kovarianční funkce je potřeba určit několik prvních kovariancí. Pro následující výpočty bude užitečný vztah

$$VAR[X_k] = E[X_k^2] + E[X_k]^2,$$

přičemž známe ze zadání hodnotu $E[X_k]^2 = 0$, pak tedy známe

$$E[X_k^2] = VAR[X_k] = Q.$$

První kovariance:

$$COV[X_{k+1}, X_{k+1}] = VAR[X_{k+1}] = VAR[e^{-bT} \cdot X_k + W_k] \tag{1}$$
$$COV[X_{k+1}, X_{k+1}] = e^{-2bT} VAR[X_k] + VAR[W_k] \tag{2}$$
$$COV[X_{k+1}, X_{k+1}] = Q \cdot e^{-2bT} + Q \cdot (1 - e^{-2bT}) \tag{3}$$
$$COV[X_{k+1}, X_{k+1}] = Q \cdot (e^{-2bT} + 1 - e^{-2bT}) \tag{4}$$
$$COV[X_{k+1}, X_{k+1}] = Q = 3 \tag{5}$$

Druhá kovariance:

$$COV[X_k, X_{k+1}] = E[X_k \cdot X_{k+1}] + E[X_k] \cdot E[X_{k+1}] = E[e^{-bT} \cdot X_k^2 + X_k \cdot W_k] \tag{6}$$
$$COV[X_k, X_{k+1}] = e^{-bT} E[X_k^2] + E[X_k \cdot W_k] \tag{7}$$
$$COV[X_k, X_{k+1}] = Q \cdot e^{-bT} \tag{8}$$

A analogicky další:

$$COV[X_k, X_{k+2}] = Q \cdot e^{-2bT} \tag{9}$$
$$COV[X_k, X_{k+3}] = Q \cdot e^{-3bT} \tag{10}$$

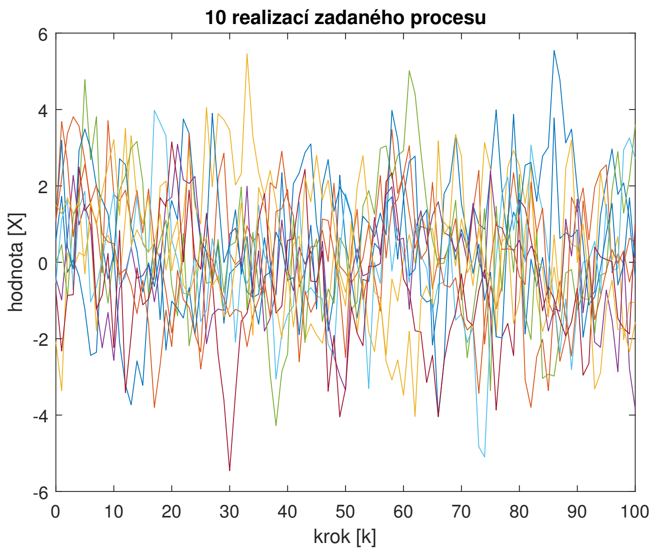
Výsledná teoreticky dopočtená kovarianční funkce

$$COV[X_k, X_{k+\tau}] = Q \cdot e^{-\tau bT} \tag{11}$$

2.2 Odhad kovarianční funkce

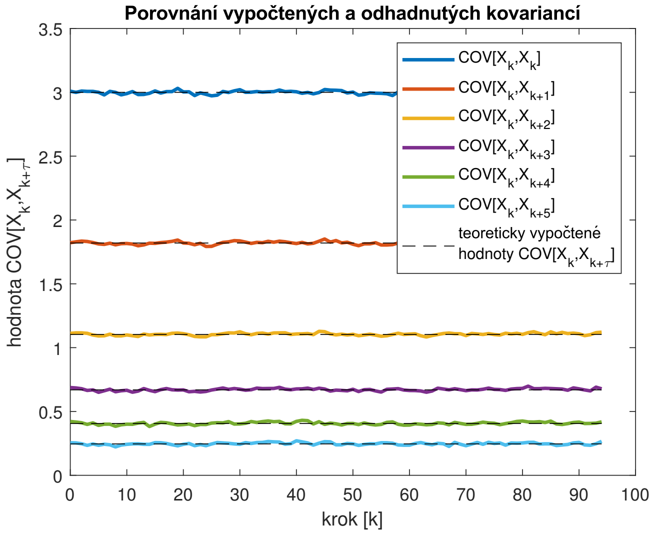
Z vygenerovaných realizací Markovského procesu na obrázku 1 lze odhadnout kovarianci pomocí vztahu

$$\overline{COV}[X_k, X_{k+\tau}] = \frac{1}{n-\tau} \sum_{n=1}^{n-\tau} (X_i(n) - \overline{E}[X_k]) \cdot (X_{i+\tau}(n) - \overline{E}[X_{k+\tau}].) \tag{12}$$



Obrázek 1: Prvních 10 z celkových $M = 10^4$ realizací zadaného Markovského procesu.

Z rovnice 12 vypočteme odhad kovarianční funkce pro jednotlivé hodnoty τ a veškeré realizace M. Získané výsledky srovnáme s teoreticky vypočtenými hodnotami a z grafu 2 je vidět, že se odhadnuté kovariance liší jen málo od teoretických výsledků. Odchylky jsou dány vygenerovaným počtem realizací a pro jejich další zmenšení by bylo nutné zvýšit počet realizací M.



Obrázek 2: Srovnání vypočtených kovariancí s odhadnutými na základě $M = 10^4$ realizací procesu.

2.3 Ověření stacionarity procesu

Aby byl proces stacionární v širším smyslu, musí splňovat následující kritéria:

Střední hodnota procesu $E[X(t)]$ musí být konstantní pro $\forall t$.
Ze zadání známe $E[X_0] = 0$ a po dopočtení následujících hodnot

$$E[X_1] = e^{-bT} \cdot E[X_0] = 0$$

$$E[X_2] = e^{-bT} \cdot E[X_1] = 0$$

zjistíme, že střední hodnota pro zadaný proces je konstantní s následující hodnotou.

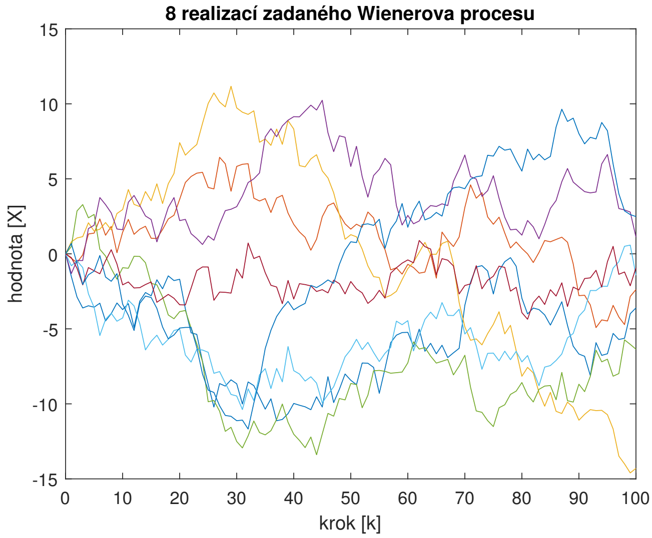
$$E[X_k] = 0; \forall k$$

Kovarianční funkce musí záviset pouze na rozdílu kroků τ, což bylo odvozeno a potvrzeno v předešlém úkolu.

Zadaný proces tedy splňuje podmínky stacionarity v širším smyslu.

3 Příklad č. 2

Nyní budeme pracovat s Wienerovým procesem, vygenerujeme jeho 8 realizací a zobrazíme do grafu 3



Obrázek 3: 8 vykreslených realizací zadaného Wienerova procesu.

3.1 Teoretický výpočet kovariance

Jelikož ze zadání neznáme variance a střední hodnoty procesu, které jsou pro výpočet kovariance potřeba, nejprve je vypočteme.

$$
\begin{aligned}
VAR[X_0] &= E[X_0^2] + E[X_0]^2 = E[0^2] + E[0]^2 = 0 && (13)\\
VAR[X_1] &= VAR[X_0 + W_0] = VAR[X_0] + VAR[W_0] = 0 + 1 = 1 && (14)\\
VAR[X_2] &= VAR[X_1 + W_1] = VAR[X_1] + VAR[W_1] = 1 + 1 = 2 && (15)\\
& && (16)\\
VAR[X_k] &= k && (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X_0] &= 0 && (18)\\
E[X_1] &= E[X_0 + W_0] = E[X_0] + E[W_0] = 0 + 0 = 0 && (19)\\
E[X_2] &= E[X_1] + E[W_1] = 0 + 0 = 0 && (20)\\
& && (21)\\
E[X_k] &= 0 && (22)
\end{aligned}
$$

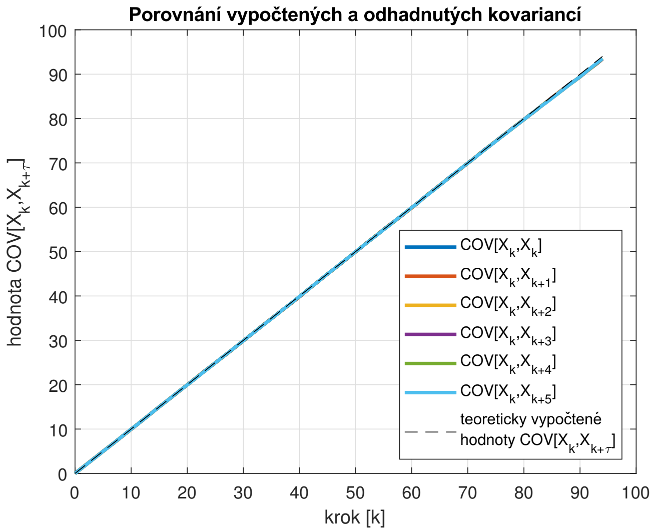
Nyní dopočteme kovariance pro pár prvních hodnot τ a určíme kovarianční funkci.

$$
\begin{aligned}
COV[X_k, X_k] &= VAR[X_k] = k && (23)\\
COV[X_k, X_{k+1}] &= E[X_k \cdot X_{k+1}] + E[X_k] \cdot E[X_{k+1}] = E[X_k^2 + X_k \cdot W_k] + 0 = E[X_k^2] + 0 = k && (24)\\
& && (25)\\
COV[X_k, X_{k+\tau}] &= E[X_k^2] = k && (26)
\end{aligned}
$$

Z kovarianční funkce lze poznat, že záleží pouze na kroku a nejedná se tedy o stacionární proces, což potvrzuje chování na obrázku 3 a informace v zadání.

3.2 Odhad kovarianční funkce

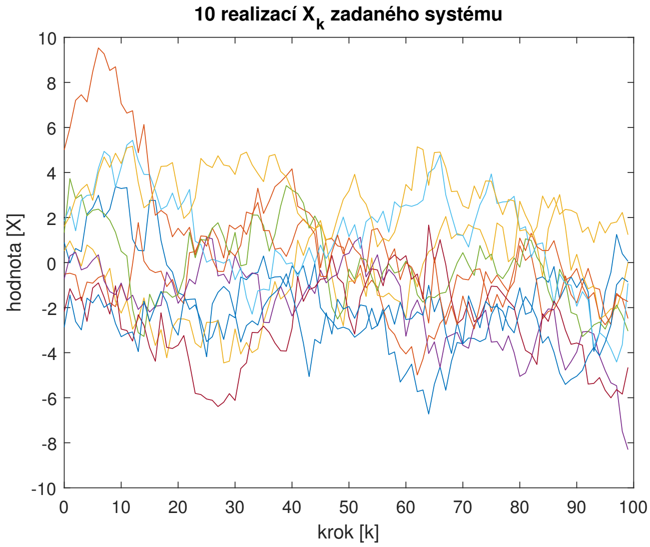
Použitím vztahu 12 získáme kovarianční funkci. Vykreslením odhadnuté funkce spolu s teoreticky vypočtenou získáme graf 4



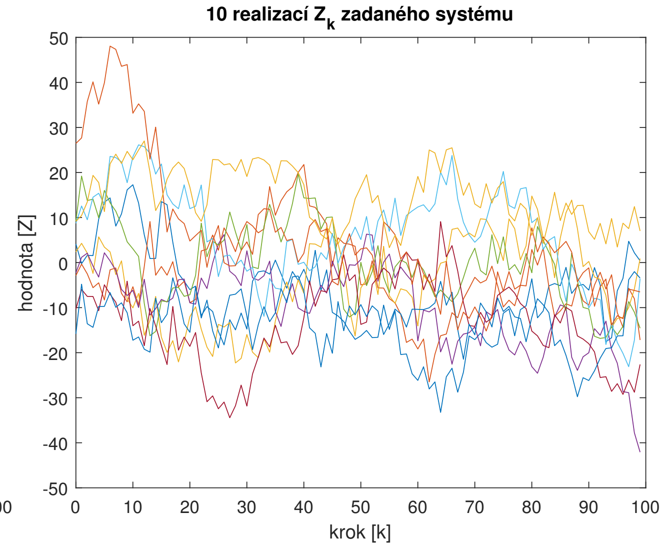
Obrázek 4: 8 vykreslených realizací zadaného Wienerova procesu.

4 Příklad č. 3

Následující výpočty budou uvažovat se zadaným Gauss-Markovým systémem.



(a) Proces X_k.



(b) Proces Z_k.

Obrázek 5: Prvních 10 z celkových $M = 10^4$ realizací zadaného Gauss-Markova systému.

4.1 Střední hodnoty

Střední hodnoty pro X_k

$$\begin{aligned}
E[X_0] =& 1 && (27)\\
E[X_1] =& E[0.95 \cdot X_0 + 0.5 \cdot W_0] = 0.95 \cdot E[X_0] + 0.5 \cdot E[W_0] = 0.95 + 0 = 0.95 && (28)\\
E[X_2] =& E[0.95 \cdot X_1 + 0.5 \cdot W_1] = 0.95 \cdot E[X_1] + 0.5 \cdot E[W_1] = 0.95 \cdot 0.95 + 0 = 0.95^2 && (29)\\
E[X_3] =& E[0.95 \cdot X_2 + 0.5 \cdot W_2] = 0.95 \cdot E[X_2] + 0.5 \cdot E[W_2] = 0.95 \cdot 0.95^2 + 0 = 0.95^3 && (30)\\
& && (31)\\
E[X_k] =& 0.95^k && (32)
\end{aligned}$$

Ustálená hodnota $\lim_{k\to\infty} E[X_k] = \lim_{k\to\infty} 0.95^k = 0$
Střední hodnoty pro Z_k

$$\begin{aligned}
E[Z_0] =& E[5 \cdot X_0 + V_0] = 5 \cdot E[X_0] + E[V_0] = 5 \cdot 1 + 0 = 5 && (33)\\
E[Z_1] =& E[5 \cdot X_1 + V_1] = 5 \cdot E[X_1] + E[V_1] = 5 \cdot 0.95 + 0 = 5 \cdot 0.95 && (34)\\
E[Z_2] =& E[5 \cdot X_2 + V_2] = 5 \cdot E[X_2] + E[V_2] = 5 \cdot 0.95^2 + 0 = 5 \cdot 0.95^2 && (35)\\
& && (36)\\
E[Z_k] =& 5 \cdot 0.95^k && (37)
\end{aligned}$$

Ustálená hodnota $\lim_{k\to\infty} E[Z_k] = \lim_{k\to\infty} 5 \cdot 0.95^k = 0$

4.2 Variance

Variance pro X_k

$$\begin{aligned}
VAR[X_0] =& 5 & (38)\\
VAR[X_1] =& VAR[0.95 \cdot X_0 + 0.5 \cdot W_0] = 0.95^2 \cdot VAR[X_0] + 0.5^2 \cdot VAR[W_0] = 0.95^2 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 = 6.25 & (39)\\
VAR[X_2] =& VAR[0.95 \cdot X_1 + 0.5 \cdot W_1] = 0.95^2 \cdot VAR[X_1] + 0.5^2 \cdot VAR[W_1] = 0.95^4 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot (0.95^2 + 1) & (40)\\
VAR[X_3] =& VAR[0.95 \cdot X_2 + 0.5 \cdot W_2] = 0.95^2 \cdot VAR[X_2] + 0.5^2 \cdot VAR[W_2] = 0.95^6 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot (0.95^4 + 0.95^2 + 1) & (41)\\
& & (42)\\
VAR[X_k] =& 0.95^{2k} \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \sum_{n=0}^{k-1} 0.95^{2n} & (43)
\end{aligned}$$

Ustálená hodnota $\lim_{k\to\infty} VAR[X_k] = \lim_{k\to\infty} \left(0.95^{2k} \cdot 5\right) + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k-1} 0.95^{2n}\right) = 0 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k-1} 0.95^{2n}\right)$
Pro výpočet druhé limity si však musíme uvědomit, že se jedná o limitu součtu geometrické řady. Zjistíme tedy kvocient

$$q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{0.95^{2\cdot 1}}{0.95^{2\cdot 0}} = 0.95^2$$

a jelikož kvocient $q = 0.95^2 < 1$ geometrická řada konverguje a ustálenou hodnotu dopočteme jako

$$\lim_{k\to\infty} VAR[X_k] = 0 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k-1} 0.95^{2n}\right) = 0 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \frac{a_0}{1-q} = 0.5^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1 - 0.95^2} \approx 7.6923$$

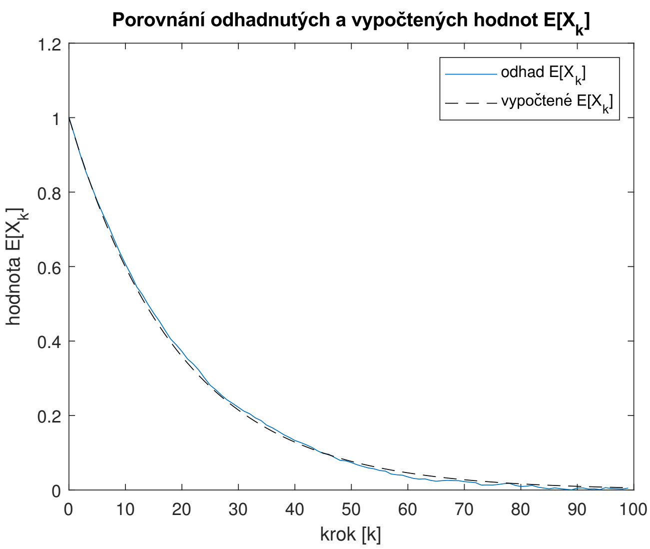
Variance pro Z_k

$$\begin{aligned}
VAR[Z_0] =& VAR[5 \cdot X_0 + V_0] = 5^2 \cdot VAR[X_0] + VAR[V_0] = 5^2 \cdot 5 + 2 = 127 & (44)\\
& & (45)\\
VAR[Z_k] =& 5^2 \cdot VAR[X_k] + VAR[V_k] & (46)
\end{aligned}$$

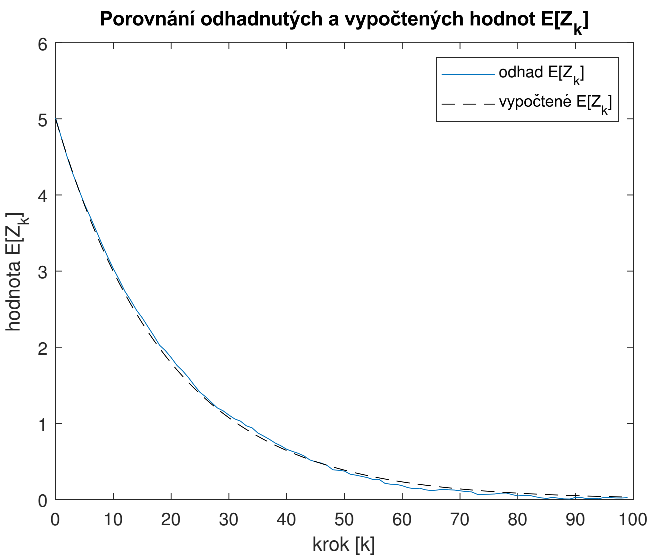
Ustálená hodnota $\lim_{k\to\infty} VAR[Z_k] = 5^2 \cdot \lim_{k\to\infty} VAR[X_k] + \lim_{k\to\infty} VAR[V_k] =\approx 5^2 \cdot 7.6923 + 2 \approx 194.3075$

4.3 Porovnání s odhadnutými parametry

Na následujících grafech můžeme pozorovat mírné odchylky odhadnutých parametrů od teoreticky vypočtených.

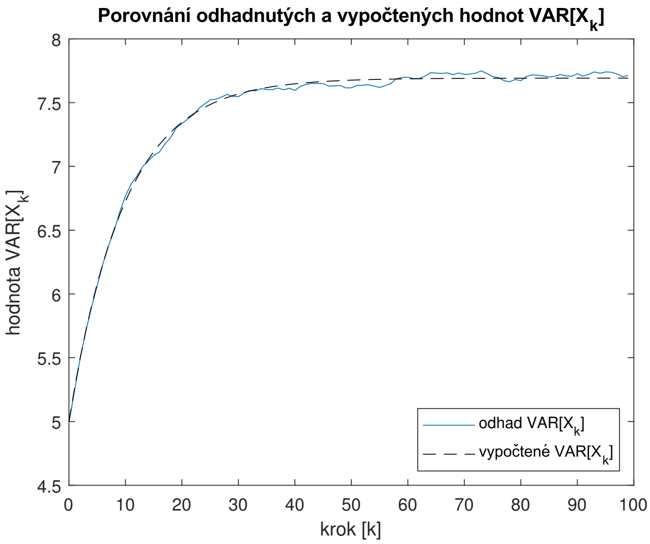


(a) Průběh $E[X_k]$.

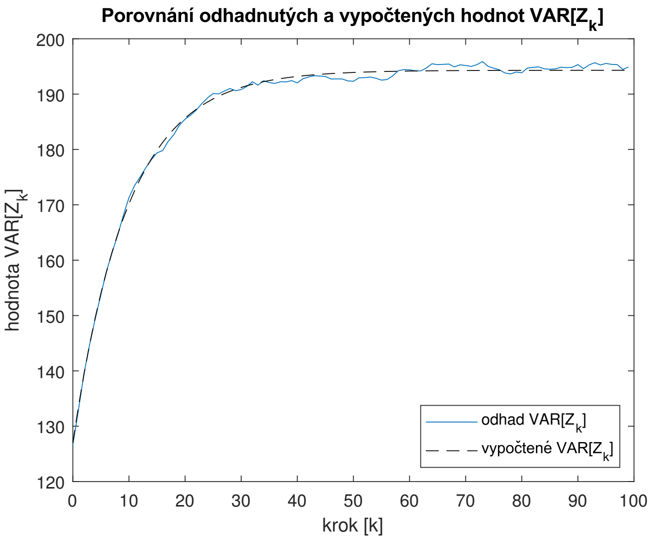


(b) Průběh $E[Z_k]$.

Obrázek 6: Porovnání průběhů středních hodnot.



(a) Průběh $VAR[X_k]$.



(b) Průběh $VAR[Z_k]$.

Obrázek 7: Porovnání průběhů variancí.

U vykreslených grafů 6 a 7 si lze všimnout, že se odhadnuté parametry lehce odlišují od teoreticky vypočítaných hodnot. To je však způsobeno počtem realizací a pro eliminaci nepřesností by muselo být M realizací velmi mnoho (limitně až ∞).

5 Závěr

Vzorce byly čerpány z přednášek a výpočty byly provedeny za pomoci softwaru Matlab. Samotné vypracování práce mi pomohlo lépe pochopit Stochastické procesy, jejich fungování a díky vizualizaci lépe pochopit pojem stacionarita.