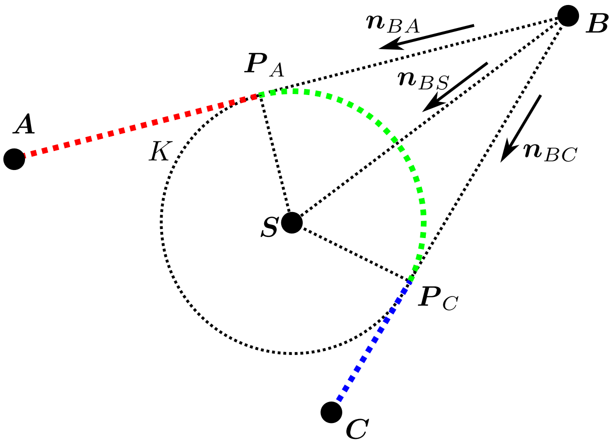
Odvození parametrizace trajektorie

Jak bylo určeno v zadání, trajektorie se skládá ze tří úseků. Jak je znázorněno na obrázku 1 jsou jimi úsečka AP_A, kruhový oblouk P_AP_C a úsečka P_CC.



Obrázek 1: Generovaná trajektorie

K plné parametrizaci trajektorie je třeba definovat další vektory a body. Jejich grafické znázornění je také zobrazeno na obrázku 1.

- Parametrizace dílčích trajektorií (přímky, kružnice):
  - Směrové vektory přímek:

$$\boldsymbol{n}_{BA} = \frac{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}}{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|}, \quad \boldsymbol{n}_{BC} = \frac{\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}}{\|\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\|} \tag{1}$$

  - Střed $\boldsymbol{S}$ kružnice K a body dotyku $\boldsymbol{P}_A$, $\boldsymbol{P}_C$:
    Střed kružnice $\boldsymbol{S}$ leží zřejmě na ose úhlu $\boldsymbol{ABC}$, tzn. lze vyjádřit v závislosti na parametru l jako:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{n}_{BS} \cdot l, \quad \text{kde } \boldsymbol{n_{BS}} = \frac{\boldsymbol{n}_{BA} + \boldsymbol{n}_{BC}}{\|\boldsymbol{n}_{BA} + \boldsymbol{n}_{BC}\|} \tag{2}$$

    Bod $\boldsymbol{P}_A$ leží na přímce p_{AB} a jeho souřadnice lze vyjádřit v závislosti na parametru k následovně:

$$\boldsymbol{P}_A = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{n}_{BA} \cdot k \tag{3}$$

    $\boldsymbol{P}_A$ je zřejmě tečným bodem kružnice $K \Rightarrow p_{AB} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{SP}_A}$, tedy platí:

$$\boldsymbol{n}_{BA}^T \cdot (\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S}) = 0 \tag{4}$$

    Dosazením (3) do (4) lze vyjádřit parametr k (platí, že $\boldsymbol{n}_{BA}^T \cdot \boldsymbol{n}_{BA} = \|\boldsymbol{n}_{BA}\|^2 = 1$, protože $\boldsymbol{n}_{BA}$ je směrový vektor, jehož velikost je rovna jedné):

$$\boldsymbol{n}_{BA}^T \cdot (\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{n}_{BA}^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}) - \boldsymbol{n}_{BA}^T \cdot \boldsymbol{n}_{BA} \cdot k = 0 \;\Rightarrow\; k = \boldsymbol{n}_{BA}^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}) \tag{5}$$

    a rovnice tečného bodu $\boldsymbol{P}_A$ lze psát po dosazení za parametr k jako:

$$\boldsymbol{P}_A = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{n_{BA}}\boldsymbol{n_{BA}^T}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}) \tag{6}$$

Z podmínky známého poloměru r kružnice K, lze napsat podmínku na vzd. mezi $\boldsymbol{P}_A$ a středem kružnice $\boldsymbol{S}$:

$$\|\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S}\| = r \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S})^T \cdot (\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S}) = r^2 \tag{7}$$

Dosazením parametrického vyjádření pro střed $\boldsymbol{S}$ z rovnice (2) a pro tečný bod $\boldsymbol{P}_A$ z rovnice (6) dostáváme vztah pro $(\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S})$:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S}) &= \boldsymbol{A} - \boldsymbol{n}_{BA}\boldsymbol{n}_{BA}^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{n}_{BA}\boldsymbol{n}_{BA}^T\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{BS}} \cdot l - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{n}_{BS} \cdot l \\
(\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S}) &= \underbrace{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{n}_{BA}\boldsymbol{n}_{BA}^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})}_{\boldsymbol{0}} + l \cdot (\boldsymbol{n}_{BA}\boldsymbol{n}_{BA}^T\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{BS}} - \boldsymbol{n}_{BS}) \\
(\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S}) &= l \cdot \boldsymbol{K}_1, \quad \text{kde } \boldsymbol{K}_1 = (\boldsymbol{n}_{BA}\boldsymbol{n}_{BA}^T\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{BS}} - \boldsymbol{n}_{BS})
\end{aligned} \tag{8}$$

Neboť pro člen $-\boldsymbol{n}_{BA}\boldsymbol{n}_{BA}^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$ platí:

$$-\boldsymbol{n}_{BA}\boldsymbol{n}_{BA}^T(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{n}_{BA}\frac{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^T}{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{BA}}\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\| = -(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$$

Dosazením $(\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S}) = l \cdot \boldsymbol{K}_1$ do podmínky (7) dostáváme:

$$l \cdot \boldsymbol{K}_1^T \cdot l \cdot \boldsymbol{K}_1 = r \;\Rightarrow\; l = \frac{r}{\pm\sqrt{\boldsymbol{K}_1^T \cdot \boldsymbol{K}_1}} \tag{9}$$

Za předpokladu, že hledaný střed kružnice leží uvnitř konvexního útvaru (trojúhelníku) $\boldsymbol{ABC}$ a z definice směrového vektoru $\boldsymbol{n}_{BS}$ a parametrického vyjádření $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{n}_{BS} \cdot l$, lze určit kladné řešení pro parametr1 l, tedy, po dosazení dostáváme přímo souřadnice středu hledané kružnice:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{n}_{BS} \cdot \frac{r}{\sqrt{\boldsymbol{K}_1^T \cdot \boldsymbol{K}_1}} \tag{10}$$

kde $\boldsymbol{K}_1 = (\boldsymbol{n}_{BA}\boldsymbol{n}_{BA}^T\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{BS}} - \boldsymbol{n}_{BS})$, $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{BS}} = \frac{\boldsymbol{n}_{BA} + \boldsymbol{n}_{BC}}{\|\boldsymbol{n}_{BA} + \boldsymbol{n}_{BC}\|}$
Souřadnice tečného bodu $\boldsymbol{P}_A$ lze nyní snadno určit z rovnice (6) a díky symetrii lze tečný bod $\boldsymbol{P}_C$ spočítat jako:

$$\boldsymbol{P}_C = \boldsymbol{B} + \|\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{B}\| \cdot \boldsymbol{n}_{BC} \tag{11}$$

Nyní máme tedy k dispozici všechny parametry a lze tak napsat parametrické vyjádření jednotlivých dílčích trajektorií[1]
Pro pohyb po přímce p_{AB} platí:

$$\boldsymbol{X}_{trans} = \boldsymbol{A} - k_1 \cdot \boldsymbol{n}_{BA}, \quad k_1 \in \langle 0, \|\boldsymbol{AP}_A\| \rangle \tag{12}$$

Pro pohyb po kružnici K platí:

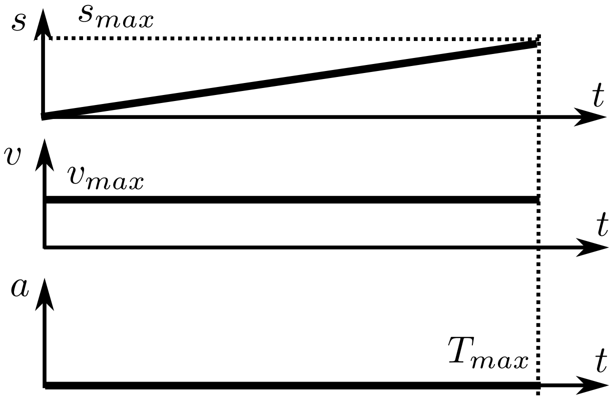
$$\boldsymbol{X}_{trans} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi) \\ r \cdot \sin(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi) \end{bmatrix} + \boldsymbol{S}, \quad \phi \in \langle 0, \Delta\phi \rangle \tag{13}$$

kde $\phi_{P_A} = \mathrm{atan2}\left((\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S})[2], (\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S})[1]\right)$ a směr otáčení po kružnici $dir = \pm 1$ (musí se točit od $\boldsymbol{P}_A$ do $\boldsymbol{P}_C$) a $\Delta\phi \in \langle 0, \pi \rangle$ (vnitřní úhel $\boldsymbol{ABC}$, lze s výhodou počítat ze skalárního součinu: $\Delta\phi = \arccos\left(\frac{(\boldsymbol{P}_C - \boldsymbol{S})^T \cdot (\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{S})}{r^2}\right)$.
Pro pohyb po přímce p_{BC} platí:

$$\boldsymbol{X}_{trans} = \boldsymbol{P}_C + k_2 \cdot \boldsymbol{n}_{BC}, \quad k_2 \in \langle 0, \|\boldsymbol{P}_C\boldsymbol{C}\| \rangle \tag{14}$$

[1] $\boldsymbol{X}_{trans} = [x, y]^T$ reprezentuje pouze translační pohyb konc. ef.

- Výpočet „feedrate", neboli: Jak generovat parametry parametrizací k_1, k_2, ϕ, aby se bod po trajektorii pohyboval s konstantní rychlostí v_{max}:
  - celková dráha ujetá po přímce p_{AB} $s_1 = \|\boldsymbol{P}_A - \boldsymbol{A}\|$, po přímce p_{BC} $s_2 = \|\boldsymbol{P}_C - \boldsymbol{C}\|$ a po kružnici K $s_K = r \cdot \Delta\phi$.
  - požadovaný profil ujeté dráhy po výsledné trajektorii lze graficky vyjádřit, viz Obrázek 2, celkově ujetá dráhy $s_{max} = s_1 + s_2 + s_K$ a $T_{max} = \frac{s_{max}}{v_{max}}$



Obrázek 2: Generovaná trajektorie

  - nyní známe požadovaný profil ujeté dráhy $s(t) = v_{max}t$, rychlosti $v(t) = v_{max}$ a zrychlení $a(t) = 0$ a můžeme tedy generovat polohu, rychlost a zrychlení příslušných parametrů parametrizací.
    Pozn.: požadovaný profil ujeté dráhy po trajektorii $s(t)$ lze volit libovolně!

    Pro $0 \leq s(t) < s_1$: $k_1(t) = s(t)$, $\dot{k}_1(t) = v(t)$, $\ddot{k}_1(t) = a(t)$
    Pro $s_1 \leq s(t) < s_1 + s_K$: $\phi(t) = \frac{s(t)-s_1}{r}$, $\dot{\phi}(t) = \frac{v(t)}{r}$, $\ddot{\phi}(t) = \frac{a(t)}{r}$
    Pro $s_1 + s_K \leq s(t) < s_1 + s_K + s_2$: $k_2(t) = s(t) - s_1 - s_K$, $\dot{k}_2(t) = v(t)$, $\ddot{k}_2(t) = a(t)$

- Parametrizace trajektorie:
  - Pro $0 \leq s(t) < s_1$:

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{A} - k_1(t)\boldsymbol{n}_{BA},\ \dot{\boldsymbol{X}} = -\dot{k}_1(t)\boldsymbol{n}_{BA},\ \ddot{\boldsymbol{X}} = -\ddot{k}_1(t)\boldsymbol{n}_{BA}$$

  - Pro $s_1 \leq s(t) < s_1 + s_K$:

$$\boldsymbol{X} = r \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi(t)\right) \\ \sin\left(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi(t)\right) \end{bmatrix} + \boldsymbol{S},\ \dot{\boldsymbol{X}} = r \cdot \begin{bmatrix} -\sin\left(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi(t)\right) \\ \cos\left(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi(t)\right) \end{bmatrix} \cdot dir \cdot \dot{\phi}(t),$$
$$\ddot{\boldsymbol{X}} = r \cdot \begin{bmatrix} -\cos\left(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi(t)\right) \\ -\sin\left(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi(t)\right) \end{bmatrix} \cdot \dot{\phi}^2(t) + r \cdot \begin{bmatrix} -\sin\left(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi(t)\right) \\ \cos\left(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi(t)\right) \end{bmatrix} \cdot dir \cdot \ddot{\phi}(t)$$

  - Pro $s_1 + s_K \leq s(t) < s_1 + s_K + s_2$

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{P}_C + k_2(t)\boldsymbol{n}_{BC},\ \dot{\boldsymbol{X}} = \dot{k}_2(t)\boldsymbol{n}_{BC},\ \ddot{\boldsymbol{X}} = \ddot{k}_2(t)\boldsymbol{n}_{BC}$$