

Západočeská Univerzita v Plzni
Fakulta Aplikovaných Věd



**FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI**

Semestrální práce z předmětu URM

Filip Jašek, David Žahour

Předmět: KKY/URM (Úvod do Robotiky a Mechatroniky)

Přednášející: Ing. Martin Švejda, Ph.D.

Cvičící: Ing. Arnold Jáger

Datum: 8. června 2022

Obsah

1 Glóbus	2
1.1 Zadání	2
1.2 Postup řešení	2
1.2.1 Zobrazení špendlíku	3
1.2.2 Výpočet cesty	4
1.2.3 Výpočet nejkratší cesty	4
1.3 Výsledky	5
1.4 Závěr	5
2 Přímý a inverzní geometrický model	6
2.1 Zadání	6
2.2 Postup řešení	6
2.2.1 Geometrický popis	6
2.2.2 DGM	7
2.2.3 IGM	8
2.2.4 Model	9
2.3 Výsledky	10
2.4 Závěr	10
3 Kinematický popis manipulátoru	11
3.1 Zadání	11
3.2 Postup řešení	11
3.2.1 IOKÚ	12
3.3 Výsledky	12
3.4 Závěr	12
4 Generátor trajektorie	13
4.1 Zadání	13
4.2 Postup řešení	18
4.2.1 Kloubové souřadnice a jejich derivace (ACS)	19
4.3 Výsledky	19
4.4 Závěr	22
5 Singulární polohy manipulátoru	23
5.1 Zadání	23
5.2 Postup řešení	23
5.3 Výsledky	25
5.4 Závěr	26
6 Orientace koncového efektoru	28
6.1 Zadání	28
6.2 Postup řešení	29
6.2.1 Lineární interpolace	29
6.2.2 Kvadratická interpolace	32
6.3 Závěr	33

1 Glóbus

1.1 Zadání

Na glóbusu vykreslete cestu ze Singapuru do New Yorku. Do obou měst zapíchněte špendlík který bude vycházet ze středu zeměkoule. Souřadnice destinací jsou následující.

Město (letiště)	Délka	Šířka
Singapur (SIN)	103.986306°	1.351652°
New York (EWR)	-74.168944°	40.690093°

1.2 Postup řešení

Využijeme toho že zeměpisnou délku a šířku lze považovat za výchylku vůči 0 poledníku a rovníku. K samotnému výpočtu využijeme skládání homogenních transformačních matic. Pro usnadnění výpočtů budeme brát poloměr zeměkoule roven 1.

Listing 1: Použité funkce v MATLABu

```
1 %rotace kolem osy Z
2 function Rz = rotZ(x)
3 Rz = [ cos(x) , -sin(x) , 0;
4 sin(x) , cos(x) , 0;
5 0 , 0 , 1];
6 end
7
8 %rotace kolem osy Y
9 function Ry = rotY(x)
10 Ry = [ cos(x) , 0 , sin(x) ;
11 0 , 1 , 0 ;
12 -sin(x) , 0 , cos(x) ];
13 end
14
15 %translace v ose X
16 function Tx = translX(x)
17 Tx = [ 1 , 0 , 0 , x ;
18 0 , 1 , 0 , 0 ;
19 0 , 0 , 1 , 0 ;
20 0 , 0 , 0 , 1 ];
21 end
```

Po zavolení těchto funkcí dostaneme k dispozici jednotlivé rotační matice které následně přenásobíme a vznikne nám následující homogenní transformační matice.

$$T_v^0 = \text{rotZ}(\alpha) * \text{rotY}(-\beta) * \text{translX}(r)$$

Po dosazení a vypočtení dostaneme následující matici, ze které vyčteme až poslední sloupec který nám udává kartézské souřadnice měst.

$$T_v^0 = \begin{bmatrix} R & \begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(2)

1.2.1 Zobrazení špendlíku

K vykreslení špendlíku použijeme následující kód.

Listing 2: Výpočet a vykreslení špendlíku.

```
1 %% vykresleni [Singapuru, NewYorku]
2 delka = [103.986306, -74.168944];
3 sirka = [1.351652, 40.690093];
4 polomer = 1;
5 %vytvoreni prazdne transformacni matice bez deformaci a zmeny velikosti
6 transfMAT = zeros(4);
7 transfMAT(end, end) = 1;
8 for i=1:2
9 %vypocet matice rotace
10 R2 = rotZ(delka(i))*rotY(-sirka(i));%*transY(polomer)
11 %vypocet translacni matice
12 translMAT = translX(polomer);
13 % doplneni do vysledne transformacni matice
14 Tv = transfMAT;
15 Tv(1:3, 1:3) = R2;
16 Tvsave = Tv;
17 Tv = Tv*translMAT;
18
19 %docasne ulozeni pocatecnich souradnic spendliku
20 vectX=[Tv(1,4), 0];
21 vectY=[Tv(2,4), 0];
22 vectZ=[Tv(3,4), 0];
23
24 % posunuti kvuli vektoru spendliku
25 % vektor spendliku je dlouhy 1/4 polomeru spendliku
26 translMAT = translX(polomer/4);
27 Tv = Tv*translMAT;
28
29 % docasne ulozeni koncovych souradnic spendliku, kde se zaroven
30 % nachazi hlavicka spendliku
31 vectX(2) = Tv(1,4);
32 vectY(2) = Tv(2,4);
33 vectZ(2) = Tv(3,4);
34
35 % vykresleni spendliku
36 plot3([vectX(1) vectX(2)], [vectY(1) vectY(2)], [vectZ(1) vectZ(2)], 'Color', 'k',
       'LineWidth', 2.5)
37 plot3(Tv(1,4), Tv(2,4), Tv(3,4), 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 9)
38 end
```

1.2.2 Výpočet cesty

K výpočtu rozdělíme cestu z počáteční nulové polohy do výsledné pozice dané zeměpisnými souřadnicemi na 100 kroků a pro každý krok vypočteme výsledek následujícího kódu pro zadanou polohu. Získáme tak 100 bodů ve 3D prostoru jejímž spojením dosáhneme výsledné cesty.

Listing 3: Výpočet polohy na globu v souřadnicích x, y, z

```
1 function [Gx,Gy,Gz] = pointOnGlobe(d,s,r)
2 % d - zemepisna delka
3 % s - zemepisna sirka
4 % r - polomer modelu zemekoule
5 % vytvoreni prazdne transformacni matice, ktera nedeformuje perspektivu a
6 % zachovava velikost
7 transfMAT = zeros(4);
8 transfMAT(end,end) = 1;
9 % vytvoreni matice rotace postupnou rotaci kolem osy Z a potom kolem osy Y
10 % tzn: nejdrive nastaveni zemepisne sirky a pote delky
11 R2 = rotZ(d)*rotY(-s);
12 %vypocet translacni matice pro pozdejsi nasobeni a ziskani souradnic na
13 %povrchu Zemekoule
14 translMAT = translX(r);
15 % doplneni do vysledne transformacni matice
16 Tv = transfMAT;
17 Tv(1:3,1:3) = R2;
18 Tv = Tv*translMAT;
19 Gx = Tv(1,4);
20 Gy = Tv(2,4);
21 Gz = Tv(3,4);
22 end
```

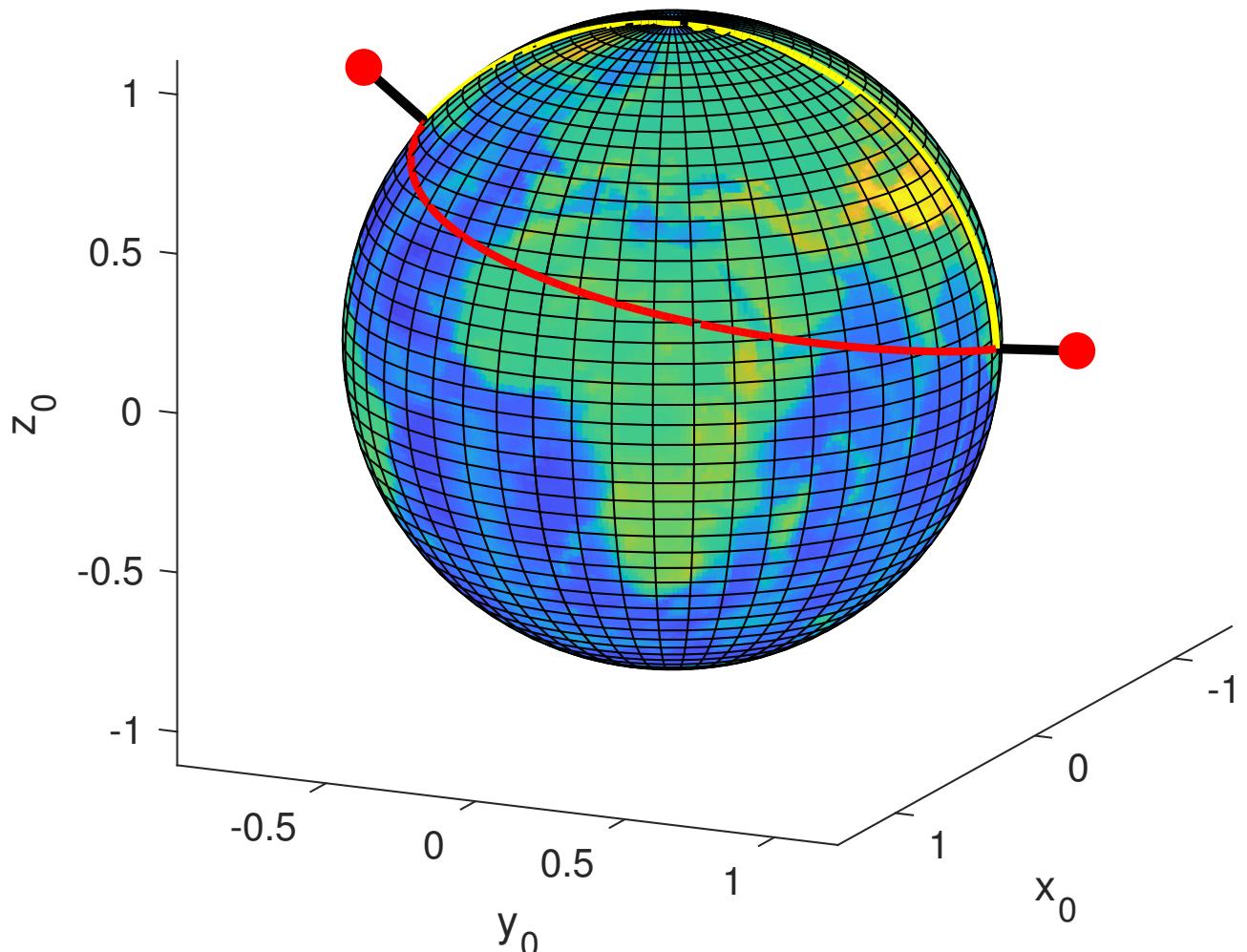
1.2.3 Výpočet nejkratší cesty

K výpočtu nejkratší cesty využijeme příkaz `gcwaypts` které nám opět vrátí diskretizované body cesty v zeměpisných souřadnicích, které funkcí 3 transformujeme na souřadnice ve 3D prostoru.

Příkaz `gcwaypts` hledá nejkratší cestu na kulovém povrchu nalezením kružnice se středem totožným se středem koule s oběma body náležící této kružnici. Menší část obvodu kružnice mezi dvěma zadanými body je hledanou nejkratší cestou.

1.3 Výsledky

Globus s vyznačenou trajektorií



Obrázek 1: Aproximovaný model Zeměkoule s vykreslenými špendlíky v místech zadaných měst spolu s cestami pomocí skládání homogenních transformačních matic (červeně) a nejkratší cestou (žlutě).

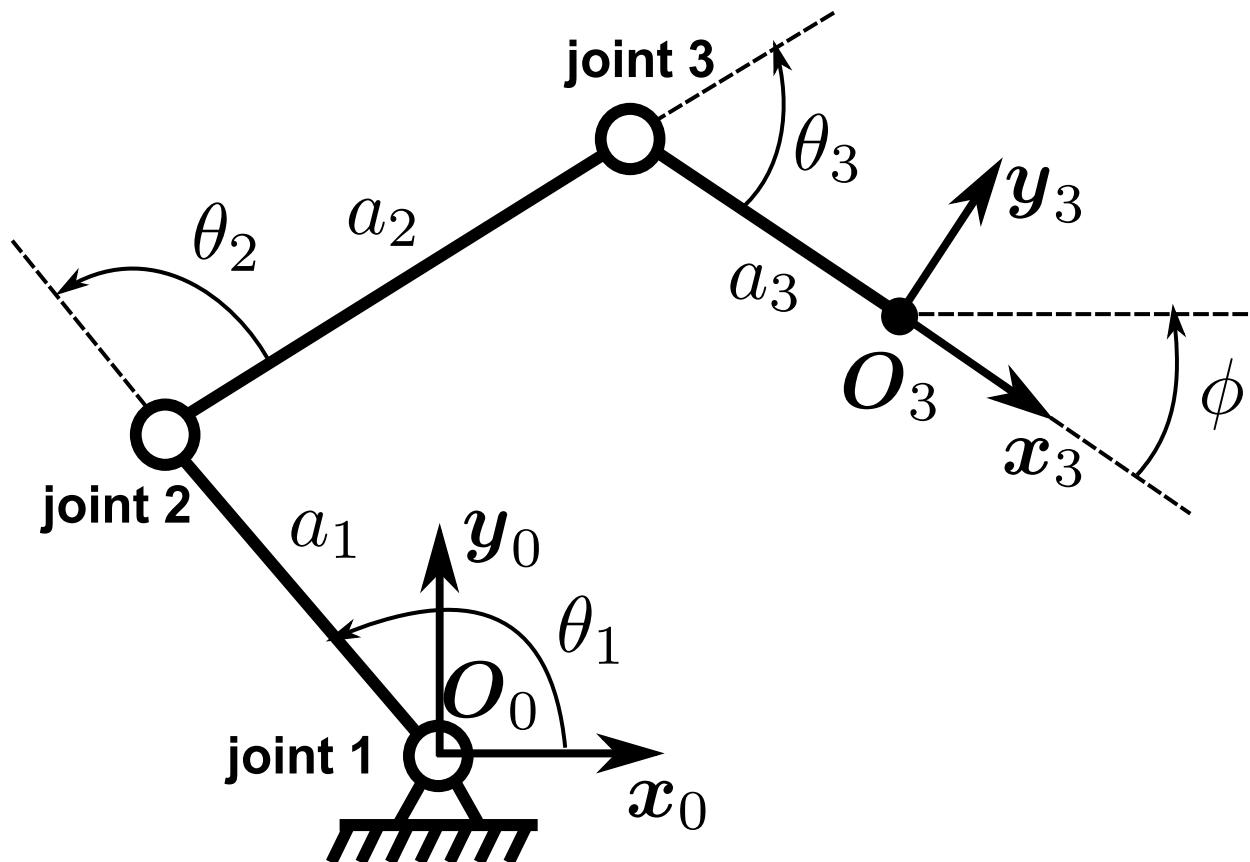
1.4 Závěr

Byli jsme schopní využít transformačních matic k převodu zeměpisných souřadnic do kartézských souřadnic a zároveň vypočítat cestu mezi dvěma body na zeměkouli zadanými zeměpisnými souřadnicemi.

2 Přímý a inverzní geometrický model

2.1 Zadání

Máme za úkol pomocí Denavit Hartenbergovy úmluvy vytvořit geometrický model manipulátoru. Dále pomocí geometrického modelu vyřešit přímou geometrickou úlohu **DGM** (z natočení kloubů manipulátoru získat polohu koncového efektoru). Dále vyřešit inverzní geometrickou úlohu **IGM**, kdy z polohy konc. ef. zjistíme nastavení kloubů rámén. Toto vše vytvořit jako model v prostředí simulink. S možností ověření jak DGM tak IGM.



Obrázek 2: Model manipulátoru

2.2 Postup řešení

2.2.1 Geometrický popis

Pro popsání manipulátoru se využije D-H úmluva která má pouze 4 parametry pro přechody mezi souřadnicovými soustavami manipulátoru. D-H úmluva má výhodu v tom, že jí lze algoritmizovat.

Kloub	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1	a_1	0
2	0	θ_2	a_2	0
3	0	θ_3	a_3	0

Tabulka 1: D-H pro zadaný manipulátor.

Záznamy jednotlivých parametrů:

1. a_i - Kolmá vzdálenost os z_i a z_{i-1} .
2. d_i - Kolmá vzdálenost os x_i a x_{i-1} .
3. α_i - Úhel natočení mezi osy z_i a z_{i-1} .
4. θ_i - Úhel natočení mezi osy x_i a x_{i-1} .

2.2.2 DGM

D-H parametry nám dívají možnost vytvoření transformačních matic kdy transformační matice z kloubu $i-1$ do i bude mít tuto podobu.

$$T_i^{i-1} = T_{rot_z} \cdot T_{trans_x} \quad (3)$$

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Po dosazení našich parametrů dostaneme:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pro zjednodušení zápisu využíváme:

$$\begin{aligned} s_i &= \sin(\theta_i) \\ c_i &= \cos(\theta_i) \end{aligned} \quad (6)$$

Chceme-li získat pozici koncového efektoru, tak je potřeba transformační matice vynásobit.

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \quad (7)$$

Po vynásobení a zjednodušení matice dostaváme tuto podobu:

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

(9)

DGM lze chápat jako funkci kloubových souřadnic \mathbb{Q} a vektor délek ramen ξ

$$\mathbb{X} = \mathbb{F}(\mathbb{Q}), \quad (10)$$

$$\text{resp. } \mathbb{X} = \mathbb{F}(\mathbb{Q}, \xi) \quad (11)$$

Cílem DGM je z pozice natočení jednotlivých kloubů získat finální pozici a natočení koncového efektoru ten získáme z posledního sloupce matice T_3^0 . Úhel natočení je roven součtu všech kloubových souřadnic z transformační matice ho získáme pomocí funkce $\arctan2$.

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ \arctan2(s_{123}, c_{123}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Toto nám představuje řešení DGM

2.2.3 IGM

Inverzní geometrická úloha, jak říká název, představuje snahu ze zadané pozice koncového efektoru získat úhly pro jednotlivá ramena manipulátoru.

$$\text{resp. } \mathbb{Q} = \mathbb{F}^{-1}(\mathbb{X}, \xi)$$

z předchozí části víme

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Po úpravách dostaneme

$$(x - a_3c_{123})^2 + (y - a_3s_{123})^2 = a_2^2 + 2a_1a_2c_2 + a_1^2 \quad (14)$$

,stále platí

$$\begin{aligned} c_{123} &= c_\varphi = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ s_{123} &= s_\varphi = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (15)$$

Následně ze vztahů vyjádříme jednu ze složek vektoru \mathbb{Q} konkrétně θ_2 . Nejdříve získáme výraz $\cos(\theta_2)$ a pro tu následně dokážeme získat i hodnotu $\sin(\theta_2)$. Pomocí těchto 2 složek následně získáme hodnotu θ_2 kde k tomu využijí funkce $\arctan2$.

$$\cos(\theta_2) = \frac{(x - a_3c_{123})^2 + (y - a_3s_{123})^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} \quad (16)$$

$$\sin(\theta_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_2)} \quad (17)$$

$$\theta_{21} = \arctan2(+\sin(\theta_2), \cos(\theta_2)) \quad (18)$$

$$\theta_{22} = \arctan2(-\sin(\theta_2), \cos(\theta_2)) \quad (19)$$

Jak můžeme vidět dostáváme dvě řešení rovnice. dále potřebujeme získat zbývající 2 složky vektoru \mathbb{Q} . Pro jejich získání upravíme původní soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x - a_3c_{123} &= a_2(c_1c_2 - s_1s_2) + a_1c_1 \\ x - a_3s_{123} &= a_2(s_1c_2 + s_2c_1) + a_1s_1, \end{aligned} \quad (20)$$

což lze zapsat maticově jako

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -a_2s_2 & a_2c_2 + a_1 \\ a_2c_2 + a_1 & a_2s_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ c_1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x - a_3c_{123} \\ y - a_3s_{123} \end{bmatrix}}_b \quad (21)$$

Z tohoto zápisu lze získat

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{X} &= b \\ \mathbb{X} &= \mathbb{A}^{-1} \cdot b \\ \mathbb{X} &= \mathbb{A}^{-1} \cdot b \end{aligned} \quad (22)$$

Z toho plyne, že výraz θ_1 lze získat pomocí souřadnic vektoru \mathbb{X} . V těchto souřadnicích se nacházejí složky $\cos(\theta_1)$ a $\sin(\theta_1)$, ze kterých získáme hodnotu θ_1 .

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} s_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\theta_1 = \arctan 2(s_1, c_1) = \arctan 2(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) \quad (24)$$

Poslední složkou je nyní θ_3 . Vzhledem k tomu, že známe ostatní 2 složky θ_2 a θ_1 společně s jejich součtem φ , můžeme zbývající složku vyjádřit právě pomocí nich. Nesmíme zapomenout že máme z předchozího kroku dva výsledky pro dvojici θ_1 a θ_2 .

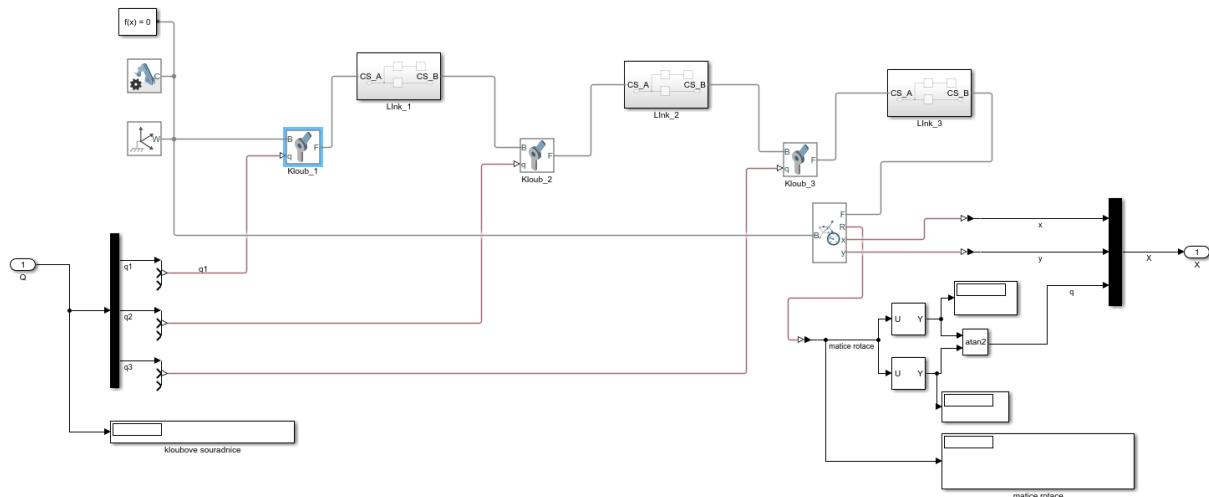
$$\theta_{31} = \varphi - \theta_{11} - \theta_{21} \quad (25)$$

$$\theta_{32} = \varphi - \theta_{12} - \theta_{22} \quad (26)$$

Díky tomu dostáváme dvě možnosti řešení IGM pro tento manipulátor zobrazené na obrázku ??.

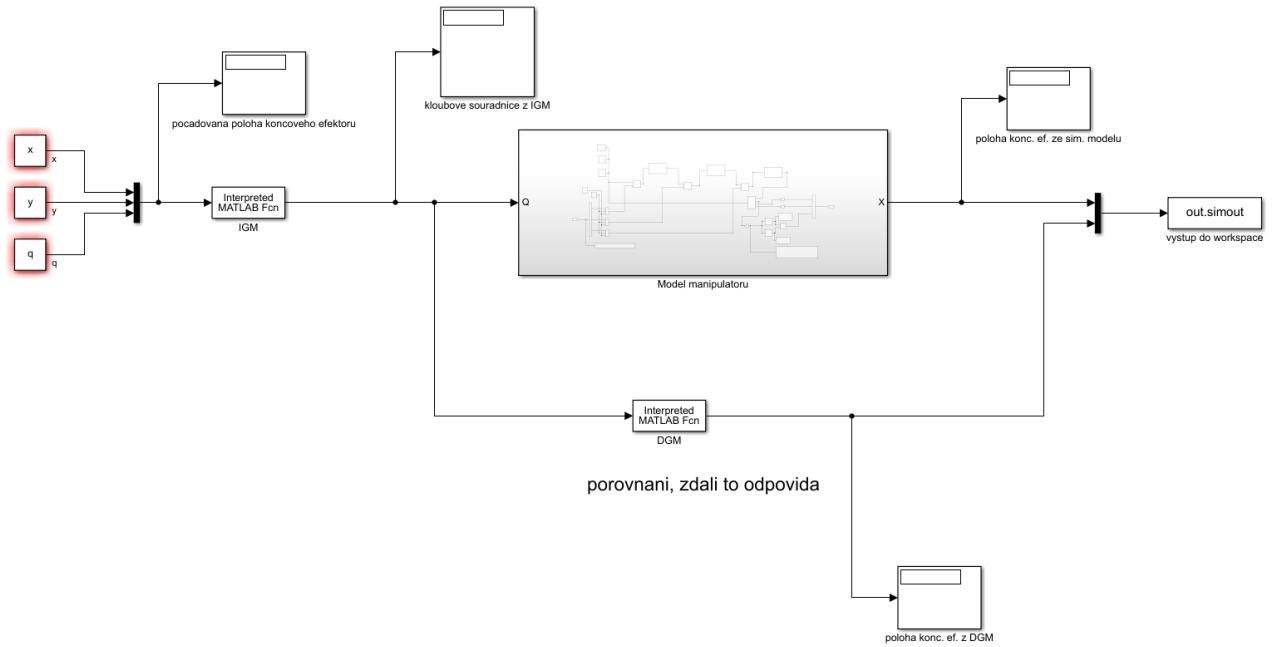
2.2.4 Model

Primární část modelu byla vytvořena pomocí bloků ze sady Simscape. Po zadefinování globálních souřadnic využíváme blok revolute joint jako kloub, který manipuluje s objektem brick solid. V tomto duchu jsme pokračovali dále, aby jsme měli všechna 3 ramena zapojena. Ovládání primárního modelu je přes vektor úhlu \mathbb{Q}



Obrázek 3: Model manipulátoru sestavený v Simulinku pomocí bloků Simscape.

Následující model na obrázku 4 obsahuje mimo výše vyobrazený model manipulátoru (Obrázek 3) výpočet kloubových souřadnic a polohy koncového efektoru pomocí funkcí DGM a IGM, aby mohlo být prováděno jejich porovnání a validace vůči modelu.



Obrázek 4: Celkový model kde dochází i k porovnání DGM a IGM

2.3 Výsledky

Podarilo se nám pomocí D-H úmluvy odvodit geometrický model manipulátoru bez větších problémů. Dále jsme pomocí D-H parametrů vyřešili přímou geometrickou úlohu díky vytvoření a přenásobení transformačních matic. Následně jsme vzali přímý geometrický model a vytvořili inverzní geometrický model, který nám umožňuje získávat nastavení hodnot kloubových souřadnic pro jednotlivá ramena z kartézských souřadnic koncového efektoru. Pro porovnání vůči modelu jsme předem určili požadovaný stav koncového efektoru v podobě souřadnic x , y a úhlu natočení φ (v modelu proměnná q)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (27)$$

přičemž vygenerované souřadnice kloubových souřadnic byly

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7219 \\ -1.5078 \\ 1.2860 \end{bmatrix} \quad (28)$$

podle kterých manipulátor nastavil polohu koncového efektoru na souřadnice

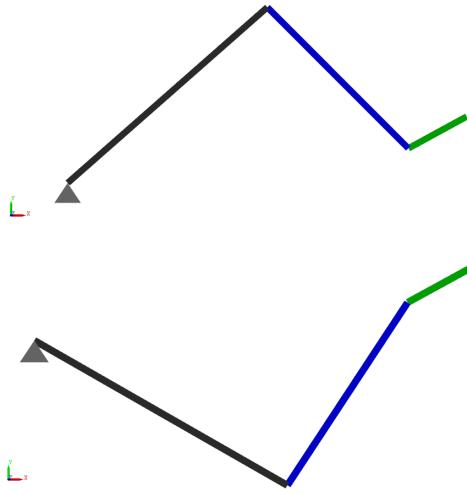
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad (29)$$

což odpovídá požadované poloze a můžeme tak tvrdit, že jak model v Simscape, tak funkce IGM a DGM pracují v součinnosti, podávají očekávané výsledky a tudíž fungují správně.

2.4 Závěr

Vyřešili a ověřili jsme jak přímou tak inverzní geometrickou úlohu což by nám v praxi umožnilo vypočítávat nastavení a ovládání manipulátoru.

Zjistili jsme, že při řešení IGM získáváme dva možné výsledky graficky zobrazené na obrázku 2.4.



Obrázek 5: Dvě možné polohy manipulátoru pro požadovanou polohu koncového efektoru uvedenou v rovnici 29.

3 Kinematický popis manipulátoru

3.1 Zadání

Sestavte kinematický popis manipulátoru - tzn. řešení přímé okamžité kinematické úlohy (*POKÚ*) a inverzní okamžité kinematické úlohy (*IOKÚ*) pro rychlosť i zrychlení.

1. Vypočtěte symbolicky analyticky (= *kinematický*) jakobián a jeho derivaci přímou derivací polohových závislostí a sestavte algoritmus pro výpočet *POKÚ*.
2. Sestavte algoritmus pro výpočet *IOKÚ* a diskutujte problémy při řešení *IOKÚ*.

3.2 Postup řešení

Nejprve je potřeba získat analytický jakobián k tomu nejdříve musíme znát derivaci zobecněných souřadnic koncového efektoru \mathbb{X} . Z předchozí práce víme že tento vektor je výsledek **DGM** zároveň také známe vztah:

$$\dot{\mathbb{X}} = \mathbb{J}(\mathbb{Q})\dot{\mathbb{Q}} \quad (30)$$

Pokud za \mathbb{X} dosadíme a zderivujeme, získáme vektor:

$$\dot{\mathbb{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3s_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - a_2s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - a_1s_1\dot{\theta}_1 \\ a_3c_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + a_2c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + a_1c_1\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Pokud analogicky určíme i vektor $\dot{\mathbb{Q}}$, můžeme pomocí znalosti předchozího vztahu získat zbývající matici $\mathbb{J}(\mathbb{Q})$, jíž je sám *jakobián*.

$$\dot{\mathbb{Q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_3s_{123} - a_2s_{12} - a_1s_1 & -a_3s_{123} - a_2s_{12} & -a_3s_{123} \\ a_3c_{123} + a_2c_{12} + a_1c_1 & a_3c_{123} + a_2c_{12} & a_3c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbb{J}(\mathbb{Q})} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Zjištěný vektor $\dot{\mathbb{X}}$ nám představuje derivaci polohy koncového efektoru, jinými slovy jeho **rychlosť**. Její derivací je poté **zrychlení** reprezentované vektorem $\ddot{\mathbb{X}}$.

$$\ddot{\mathbb{X}} = \mathbb{J}(\dot{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \cdot \dot{\mathbb{Q}} + \mathbb{J}(\mathbb{Q}) \cdot \ddot{\mathbb{Q}} \quad (34)$$

V rámci *POKÚ* tedy budeme chtít získat pro vstupní souřadnicové úhly a jejich derivace (matice složená z vektorů $[\mathbb{Q} \quad \dot{\mathbb{Q}} \quad \ddot{\mathbb{Q}}]$) patřičnou **polohu**, **rychlosť** a **zrychlení** reprezentované v matici $[\mathbb{X} \quad \dot{\mathbb{X}} \quad \ddot{\mathbb{X}}]$.

$$[\mathbb{X} \quad \dot{\mathbb{X}} \quad \ddot{\mathbb{X}}] = \text{POKÚ}([\mathbb{Q} \quad \dot{\mathbb{Q}} \quad \ddot{\mathbb{Q}}], \xi) \quad (35)$$

$$\mathbb{X} = \text{DGM}(\mathbb{Q}, \xi) \quad (10)$$

$$\dot{\mathbb{X}} = \mathbb{J}(\mathbb{Q})\dot{\mathbb{Q}} \quad (30)$$

$$\ddot{\mathbb{X}} = \mathbb{J}(\dot{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \cdot \dot{\mathbb{Q}} + \mathbb{J}(\mathbb{Q}) \cdot \ddot{\mathbb{Q}} \quad (34)$$

Pokud z rovnice (33) určíme jakobián jako

$$\mathbb{J}(\mathbb{Q}) = \begin{bmatrix} -a_3s_{123} - a_2s_{12} - a_1s_1 & -a_3s_{123} - a_2s_{12} & -a_3s_{123} \\ a_3c_{123} + a_2c_{12} + a_1c_1 & a_3c_{123} + a_2c_{12} & a_3c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

můžeme poté tvrdit, že jeho derivace je

$$\mathbb{J}(\dot{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) = \begin{bmatrix} a_3c_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - a_1c_1\dot{\theta}_1 - a_2c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -a_2c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - a_3c_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & -a_3c_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ -a_2s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - a_1s_1\dot{\theta}_1 - a_3s_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & -a_2s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - a_3s_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & -a_3s_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

(38)

Po dosazení do jakobiánu hodnoty kloubových souřadnic jsme schopni pomocí výše uvedených rovnic vektor rychlosti $\dot{\mathbb{X}}$. Stejně tak jsme dopočítat hodnotu derivace jakobiánu a z toho následně získat vektor zrychlení. Díky tomu máme sestavený celkový algoritmus *POKÚ*.

3.2.1 IOKÚ

V rámci inverzní okamžité kinematické úlohy potřebujeme naopak získat rychlosť jednotlivých kloubů z kartézských souřadnic zrychlení a rychlosti.

$$[\mathbb{Q} \quad \dot{\mathbb{Q}} \quad \ddot{\mathbb{Q}}] = \text{POKÚ}([\mathbb{X} \quad \dot{\mathbb{X}} \quad \ddot{\mathbb{X}}], \xi) \quad (39)$$

Stejně jako u *POKÚ* využijeme toho že jsme již pracovali s *IGM* Tedy:

$$\mathbb{Q} = \text{IGM}(\mathbb{X}, \xi) \quad (40)$$

Z toho nám vychází že vektor $\dot{\mathbb{Q}} = \mathbb{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbb{X}}$ Ekvivalentně jsme z toho vyjádřili $\dot{\mathbb{Q}} = \mathbb{J}^{-1} \cdot (\ddot{\mathbb{X}} - \mathbb{J}(\dot{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \cdot \dot{\mathbb{Q}})$

Pokud \mathbb{J} není regulární, nelze zjistit inverzi a výpočet výše selže. Tento fakt ukazuje na tzv. singulární polohy manipulátoru, v jejichž blízkém okolí dosahují vypočtené kloubové rychlosti limitně až nekonečných hodnot. Singulární jakobián \mathbb{J} tedy implikuje singulární polohu manipulátoru a tím jeho problematické chování.

3.3 Výsledky

Pro výpočet jednotlivých složek *IOKÚ* využijeme stejný algoritmický postup jako v případě *POKÚ*. Nejprve budeme muset využít funkci *IGM* získat vektor \mathbb{Q} který potřebujeme k výpočtu jakobiánu a jeho derivaci které poté za pomocí vektoru \mathbb{X} a jeho derivací do sadíme do výše uvedených rovnic čímž získáme pozici rychlosť a zrychlení jednotlivých kloubů.

3.4 Závěr

U metody *POKÚ* jsme použili funkci *DGM* z předchozí úlohy. Pro výpočet první a druhé derivace \mathbb{X} , jsme vytvořili Jakobián a jeho derivaci. Při algoritmizaci tohoto úkolu by nedošlo chybě ani při záměně pořadí rovnic, závisí pouze na parametrech a vstupních hodnotách. Metoda *POKÚ* má jednoznačné výstupy. U metody *IOKÚ* jsme použili funkci *IGM* z předchozí úlohy. Pro výpočet první derivace jsme potřebovali znát vypočtené \mathbb{Q} a inverzní Jakobián. Pro výpočet druhé derivace jsme potřebovali výsledky z obou předchozích rovnic. Tato metoda se nazývá iterativní, z důvodu jejího postupného výpočtu následujících derivací. Metoda *IOKÚ* má více řešení, které plynou z více řešení funkce *IGM*. Jestliže funkce *IGM* má n řešení, bude mít i metoda *IOKÚ* n řešení.

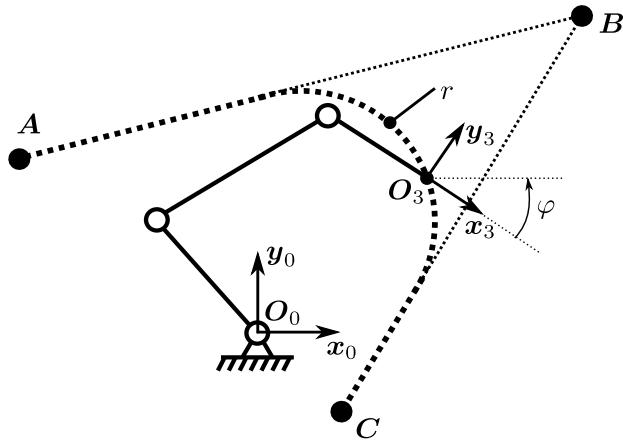
4 Generátor trajektorie

4.1 Zadání

Vytvořte generátor trajektorie manipulátoru na základě schématu (Obrázek 6). Manipulátor se bude pohybovat pouze v osách x a y , protože nedochází k rotaci kolem osy x , bude souřadnice koncového efektoru $z = 0$. Trajektorie určující pohyb koncového efektoru je dána body **A**, **B**, **C**, poloměrem r a skládá se ze dvou přímkových a jedné kružnicové dráhy. Vyřešte generátor trajektorie manipulátoru dle uvedeného schématu, viz Obrázek 6:

- Trajektorie se skládá přímkové a kružnicové dráhy, která určuje translační složku pohybu koncového efektoru (souřadnice $x_3, y_3, z_3 = 0$ bodu **O₃**), složka orientace (souřadnice φ) bude volena konstantní pro celý pohyb.
- Trajektorie je určena třemi body **A**, **B**, **C** a poloměrem kružnice r . Napojení přímkových úseků obloukem o poloměru r umožňuje hladké projednání celé trajektorie (spojitost 1. derivace dle parametru trajektorie).
- Pohyb koncového efektoru po trajektorii bude s konstantní rychlostí v_{max} .

Parametry generátoru trajektorie: $\mathbf{A} = [2, 0.5]^T$, $\mathbf{B} = [0, 1]^T$, $\mathbf{C} = [2, 2.5]^T$, $r = 0.3$, $v_{max} = 1$



Obrázek 6: Schéma požadovaného generování trajektorie.

1. Vytvořte simulační model v prostředí Matlab/Simulink/Simcape(Multibody)

- Rozšiřte model z předchozí úlohy 2 o rychlosť a zrychlení. Subsystém modelu bude mít na vstupu matici

$$\mathbf{ACS} = [\mathbf{Q} \quad \dot{\mathbf{Q}} \quad \ddot{\mathbf{Q}}],$$

kde $\dot{\mathbf{Q}} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$, $\ddot{\mathbf{Q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T$ a $\ddot{\mathbf{Q}} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$. Na výstupu subsystému bude matice

$$\mathbf{MCS} = [\mathbf{X} \quad \dot{\mathbf{X}} \quad \ddot{\mathbf{X}}],$$

kde $\dot{\mathbf{X}} = [x \quad y \quad \varphi]^T$, $\ddot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{\varphi}]^T$ a $\ddot{\mathbf{X}} = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{\varphi}]^T$.

- Vytvořte blok (funkci) generátoru trajektorie, který bude poskytovat časové závislosti polohy, rychlosti a zrychlení konc. efektoru (zobecněné souřadnice). Vstupem bude vektor $[s \quad v \quad a]^T$ T udávající aktuální hodnoty požadované polohy, rychlosti a zrychlení koncového efektoru podél trajektorie. Výstupem bude matice obsahující požadované zobecněné souřadnice a příslušné rychlosti a zrychlení

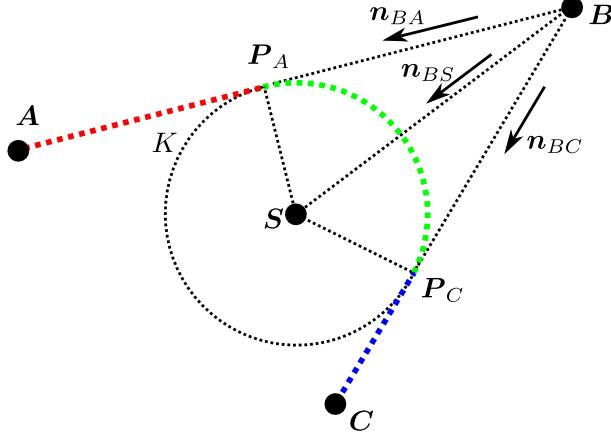
$$\mathbf{MCS*} = [\mathbf{X*} \quad \dot{\mathbf{X}*} \quad \ddot{\mathbf{X}*}].$$

- Ověřte funkce POKU, IOKU vůči modelu vytvořenému v Simscape.

2. Vykreslete časové průběhy zobecněných souřadnic generované generátorem trajektorie (x a y) a jejich příslušné časové derivace.
3. Vykreslete příslušné kloubové souřadnice a jejich derivace. Translační souřadnice x a y využijte z generátoru trajektorie, souřadnici φ volte konstantní $\varphi = 0$.
4. Konstantní absolutní hodnotu v_{max} translační rychlosti koncového efektoru ověřte z výstupu modelu manipulátoru.

Odvození parametrizace trajektorie

Jak bylo určeno v zadání, trajektorie se skládá ze tří úseků. Jak je znázorněno na obrázku 1 jsou jimi úsečka $\overline{AP_A}$, kruhový oblouk $\overline{P_AP_C}$ a úsečka $\overline{P_C B}$.



Obrázek 1: Generovaná trajektorie

K plné parametrizaci trajektorie je třeba definovat další vektory a body. Jejich grafické znázornění je také zobrazeno na obrázku 1.

- Parametrizace dílčích trajektorií (přímky, kružnice):

- Směrové vektory přímek:

$$\mathbf{n}_{BA} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{B}}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|}, \quad \mathbf{n}_{BC} = \frac{\mathbf{C} - \mathbf{B}}{\|\mathbf{C} - \mathbf{B}\|} \quad (1)$$

- Střed \mathbf{S} kružnice K a body dotyku $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_C$:

Střed kružnice \mathbf{S} leží zřejmě na ose úhlu \mathbf{ABC} , tzn. lze vyjádřit v závislosti na parametru l jako:

$$\mathbf{S} = \mathbf{B} + \mathbf{n}_{BS} \cdot l, \quad \text{kde } \mathbf{n}_{BS} = \frac{\mathbf{n}_{BA} + \mathbf{n}_{BC}}{\|\mathbf{n}_{BA} + \mathbf{n}_{BC}\|} \quad (2)$$

Bod \mathbf{P}_A leží na přímce p_{AB} a jeho souřadnice lze vyjádřit v závislosti na parametru k následovně:

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{A} - \mathbf{n}_{BA} \cdot k \quad (3)$$

\mathbf{P}_A je zřejmě tečným bodem kružnice $K \Rightarrow p_{AB} \perp \overrightarrow{SP_A}$, tedy platí:

$$\mathbf{n}_{BA}^T \cdot (\mathbf{P}_A - \mathbf{S}) = 0 \quad (4)$$

Dosazením (3) do (4) lze vyjádřit parametr k (platí, že $\mathbf{n}_{BA}^T \cdot \mathbf{n}_{BA} = \|\mathbf{n}_{BA}\|^2 = 1$, protože \mathbf{n}_{BA} je směrový vektor, jehož velikost je rovna jedné):

$$\mathbf{n}_{BA}^T \cdot (\mathbf{P}_A - \mathbf{S}) = \mathbf{n}_{BA}^T (\mathbf{A} - \mathbf{S}) - \mathbf{n}_{BA}^T \cdot \mathbf{n}_{BA} \cdot k = 0 \Rightarrow k = \mathbf{n}_{BA}^T (\mathbf{A} - \mathbf{S}) \quad (5)$$

a rovnice tečného bodu \mathbf{P}_A lze psát po dosazení za parametr k jako:

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{A} - \mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T (\mathbf{A} - \mathbf{S}) \quad (6)$$

Z podmínky známého poloměru r kružnice K , lze napsat podmínu na vzd. mezi \mathbf{P}_A a středem kružnice \mathbf{S} :

$$\|\mathbf{P}_A - \mathbf{S}\| = r \Rightarrow (\mathbf{P}_A - \mathbf{S})^T \cdot (\mathbf{P}_A - \mathbf{S}) = r^2 \quad (7)$$

Dosazením parametrického vyjádření pro střed \mathbf{S} z rovnice (2) a pro tečný bod \mathbf{P}_A z rovnice (6) dostáváme vztah pro $(\mathbf{P}_A - \mathbf{S})$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_A - \mathbf{S}) &= \mathbf{A} - \mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T \mathbf{n}_{BS} \cdot l - \mathbf{B} - \mathbf{n}_{BS} \cdot l \\ (\mathbf{P}_A - \mathbf{S}) &= \underbrace{\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B})}_{0} + l \cdot (\mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T \mathbf{n}_{BS} - \mathbf{n}_{BS}) \\ (\mathbf{P}_A - \mathbf{S}) &= l \cdot \mathbf{K}_1, \quad \text{kde } \mathbf{K}_1 = (\mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T \mathbf{n}_{BS} - \mathbf{n}_{BS}) \end{aligned} \quad (8)$$

Neboť pro člen $-\mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B})$ platí:

$$-\mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -\mathbf{n}_{BA} \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{B})^T}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|} (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = -\mathbf{n}_{BA} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = -(\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

Dosazením $(\mathbf{P}_A - \mathbf{S}) = l \cdot \mathbf{K}_1$ do podmínky (7) dostáváme:

$$l \cdot \mathbf{K}_1^T \cdot l \cdot \mathbf{K}_1 = r \Rightarrow l = \frac{r}{\pm \sqrt{\mathbf{K}_1^T \cdot \mathbf{K}_1}} \quad (9)$$

Za předpokladu, že hledaný střed kružnice leží uvnitř konvexního útvaru (trojúhelníku) \mathbf{ABC} a z definice směrového vektoru \mathbf{n}_{BS} a parametrického vyjádření $\mathbf{S} = \mathbf{B} + \mathbf{n}_{BS} \cdot l$, lze určit kladné řešení pro parametr l , tedy, po dosazení dostáváme přímo souřadnice středu hledané kružnice:

$$\mathbf{S} = \mathbf{B} + \mathbf{n}_{BS} \cdot \frac{r}{\sqrt{\mathbf{K}_1^T \cdot \mathbf{K}_1}} \quad (10)$$

kde $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{n}_{BA} \mathbf{n}_{BA}^T \mathbf{n}_{BS} - \mathbf{n}_{BS})$, $\mathbf{n}_{BS} = \frac{\mathbf{n}_{BA} + \mathbf{n}_{BC}}{\|\mathbf{n}_{BA} + \mathbf{n}_{BC}\|}$

Souřadnice tečného bodu \mathbf{P}_A lze nyní snadno určit z rovnice (6) a díky symetrii lze tečný bod \mathbf{P}_C spočítat jako:

$$\mathbf{P}_C = \mathbf{B} + \|\mathbf{P}_A - \mathbf{B}\| \cdot \mathbf{n}_{BC} \quad (11)$$

Nyní máme tedy k dispozici všechny parametry a lze tak napsat parametrické vyjádření jednotlivých dlíčích trajektorií¹

Pro pohyb po přímce p_{AB} platí:

$$\mathbf{X}_{trans} = \mathbf{A} - k_1 \cdot \mathbf{n}_{BA}, \quad k_1 \in \langle 0, \|\mathbf{AP}_A\| \rangle \quad (12)$$

Pro pohyb po kružnici K platí:

$$\mathbf{X}_{trans} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi) \\ r \cdot \sin(\phi_{P_A} + dir \cdot \phi) \end{bmatrix} + \mathbf{S}, \quad \phi \in \langle 0, \Delta\phi \rangle \quad (13)$$

kde $\phi_{P_A} = \text{atan2}((\mathbf{P}_A - \mathbf{S})[2], (\mathbf{P}_A - \mathbf{S})[1])$ a směr otáčení po kružnici $dir = \pm 1$ (musí se točit od \mathbf{P}_A do \mathbf{P}_C) a $\Delta\phi \in \langle 0, \pi \rangle$ (vnitřní úhel \mathbf{ABC} , lze s výhodou počítat ze skalárního součinu: $\Delta\phi = \arccos\left(\frac{(\mathbf{P}_C - \mathbf{S})^T \cdot (\mathbf{P}_A - \mathbf{S})}{r^2}\right)$).

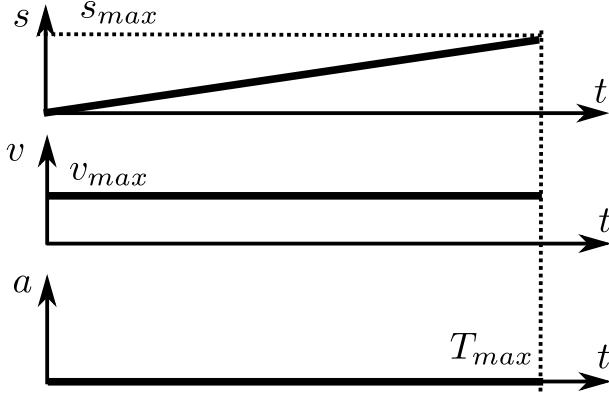
Pro pohyb po přímce p_{BC} platí:

$$\mathbf{X}_{trans} = \mathbf{P}_C + k_2 \cdot \mathbf{n}_{BC}, \quad k_2 \in \langle 0, \|\mathbf{P}_C \mathbf{C}\| \rangle \quad (14)$$

¹ $\mathbf{X}_{trans} = [x, y]^T$ reprezentuje pouze translační pohyb konc. ef.

- Výpočet „feedrate“, neboli: Jak generovat parametry parametrizací k_1 , k_2 , ϕ , aby se bod po trajektorii pohyboval s konstantní rychlostí v_{max} :

- celková dráha ujetá po přímce p_{AB} $s_1 = \|\mathbf{P}_A - \mathbf{A}\|$, po přímce p_{BC} $s_2 = \|\mathbf{P}_C - \mathbf{C}\|$ a po kružnici K $s_K = r \cdot \Delta\phi$.
- požadovaný profil ujeté dráhy po výsledné trajektorii lze graficky vyjádřit, viz Obrázek 2, celkově ujetá dráhy $s_{max} = s_1 + s_2 + s_K$ a $T_{max} = \frac{s_{max}}{v_{max}}$



Obrázek 2: Generovaná trajektorie

- nyní známe požadovaný profil ujeté dráhy $s(t) = v_{max}t$, rychlosti $v(t) = v_{max}$ a zrychlení $a(t) = 0$ a můžeme tedy generovat polohu, rychlosť a zrychlení příslušných parametrů parametrizací.

Pozn.: požadovaný profil ujeté dráhy po trajektorii $s(t)$ lze volit libovolně!

$$\begin{aligned} \text{Pro } 0 \leq s(t) < s_1: \quad & k_1(t) = s(t), \dot{k}_1(t) = v(t), \ddot{k}_1(t) = a(t) \\ \text{Pro } s_1 \leq s(t) < s_1 + s_K: \quad & \phi(t) = \frac{s(t)-s_1}{r}, \dot{\phi}(t) = \frac{v(t)}{r}, \ddot{\phi}(t) = \frac{a(t)}{r} \\ \text{Pro } s_1 + s_K \leq s(t) < s_1 + s_K + s_2: \quad & k_2(t) = s(t) - s_1 - s_K, \dot{k}_2(t) = v(t), \ddot{k}_2(t) = a(t) \end{aligned}$$

- Parametrizace trajektorie:

- Pro $0 \leq s(t) < s_1$:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A} - k_1(t)\mathbf{n}_{BA}, \dot{\mathbf{X}} = -\dot{k}_1(t)\mathbf{n}_{BA}, \ddot{\mathbf{X}} = -\ddot{k}_1(t)\mathbf{n}_{BA}$$

- Pro $s_1 \leq s(t) < s_1 + s_K$:

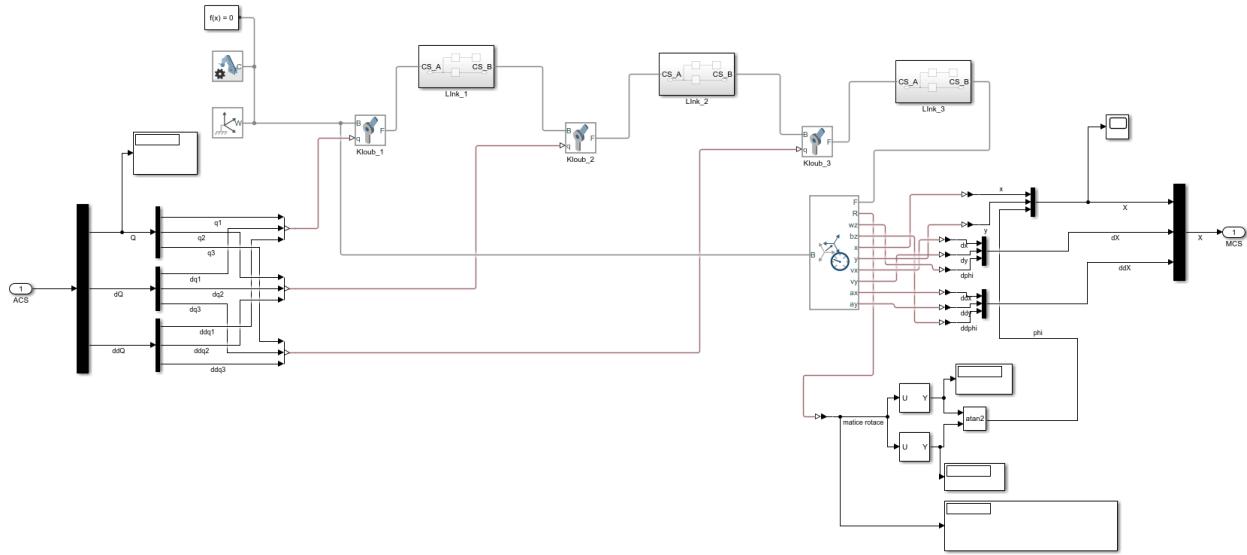
$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= r \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_{PA} + dir \cdot \phi(t)) \\ \sin(\phi_{PA} + dir \cdot \phi(t)) \end{bmatrix} + \mathbf{S}, \dot{\mathbf{X}} = r \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi_{PA} + dir \cdot \phi(t)) \\ \cos(\phi_{PA} + dir \cdot \phi(t)) \end{bmatrix} \cdot dir \cdot \dot{\phi}(t), \\ \ddot{\mathbf{X}} &= r \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\phi_{PA} + dir \cdot \phi(t)) \\ -\sin(\phi_{PA} + dir \cdot \phi(t)) \end{bmatrix} \cdot \dot{\phi}^2(t) + r \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi_{PA} + dir \cdot \phi(t)) \\ \cos(\phi_{PA} + dir \cdot \phi(t)) \end{bmatrix} \cdot dir \cdot \ddot{\phi}(t) \end{aligned}$$

- Pro $s_1 + s_K \leq s(t) < s_1 + s_K + s_2$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}_C + k_2(t)\mathbf{n}_{BC}, \dot{\mathbf{X}} = \dot{k}_2(t)\mathbf{n}_{BC}, \ddot{\mathbf{X}} = \ddot{k}_2(t)\mathbf{n}_{BC}$$

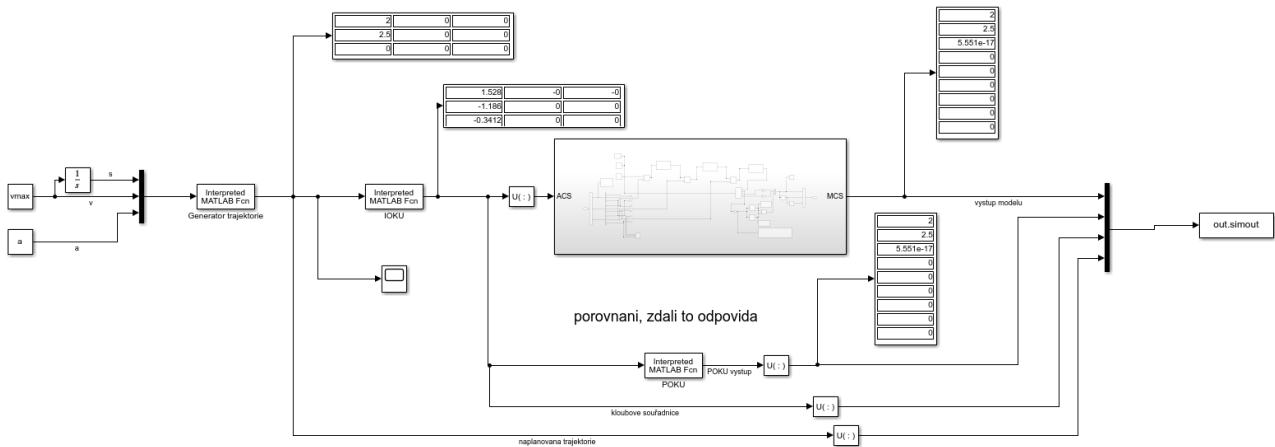
4.2 Postup řešení

V prostředí Simscape jsme vytvořili model již v předchozím zadání 2, který jsme však museli upravit pro rychlosti a zrychlení jednotlivých kloubových souřadnic na vstupu a rozšířit také výstup o jeho první dvě derivace viz následující obrázek 7.



Obrázek 7: Rozšířený model v Simscape o první dve derivace vstupu a výstupu.

Za použití výpočtů z vypracovaného zadání 3 jsme vytvořili funkce **IOKU.m** a **POKU.m** se strukturou popsanou v zadání a zapojili do struktury zobrazenou na obrázku 8.



Obrázek 8: Zapojení modelu a funkcí **IOKÚ** a **POKÚ** do simulačního schématu.

Na vytvoření funkce generátoru trajektorie byl sestaven algoritmus na základě poskytnutého Odvození parametrizace trajektorie (viz. předchozí tři stránky), který přebírá jako vstupní parametry vektor $[s \ v \ a]^T$ specifikovaný v zadání. V našem případě rychlosť $v = v_{max} = 1$, zrychlení $a = 0$ a poloha je dána integrací rychlosť $s = \int v(t)dt$, roste tedy lineárně v daném čase.

Výstupem funkce **GENtraj.m** je matice požadovaných zobecněných souřadnic koncového efektoru **MCS***. Použitím funkce **IOKU** na získanou matici spolu s parametry manipulátoru par reprezentující v našem případě délky ramen, získáme matici **ACS** kloubových souřadnic a jejich prvních dvou derivací pro vstup manipulátoru.

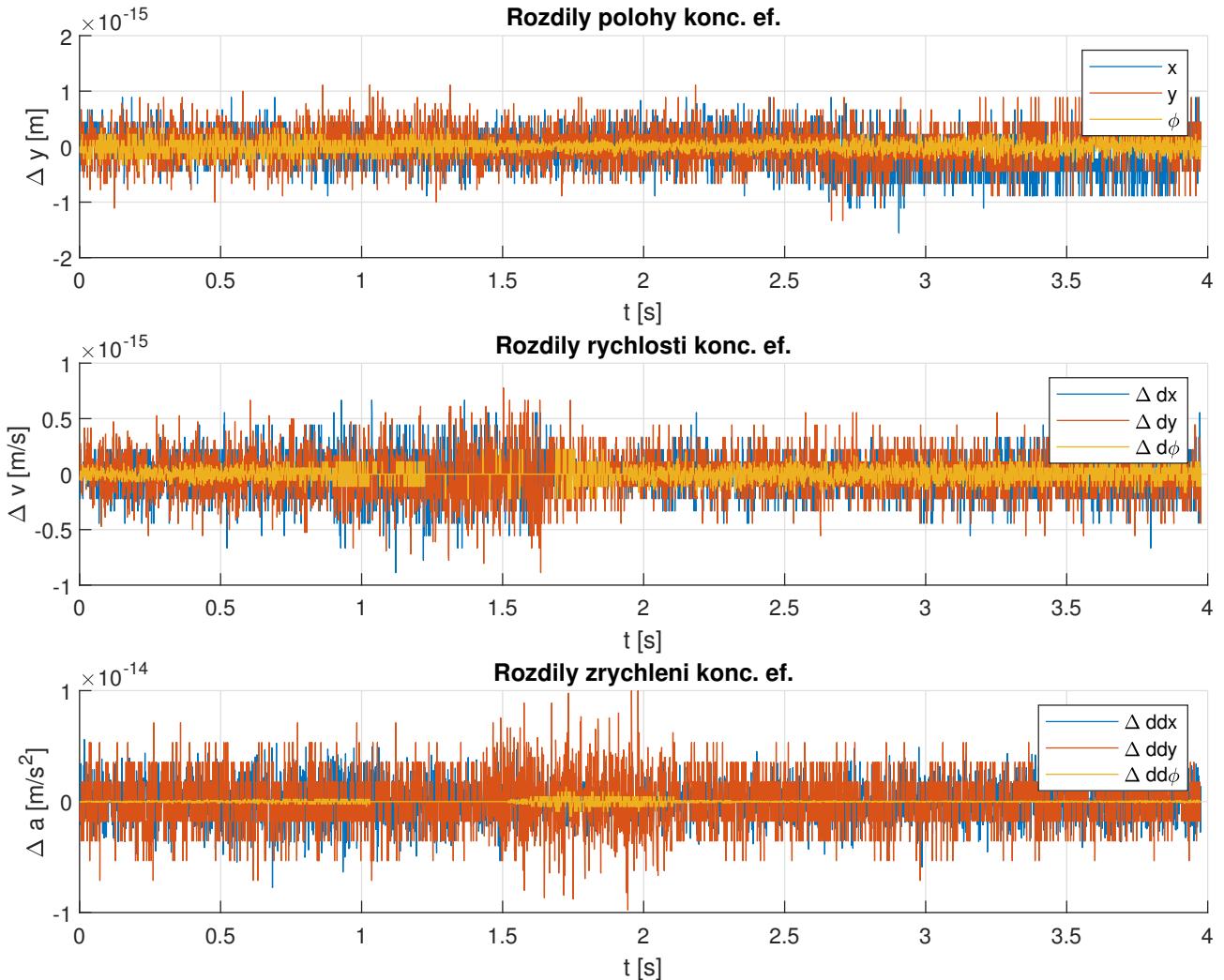
Pokud stejná vstupní data poskytneme také funkci **POKÚ** spolu s parametry par měli bychom dostat stejné zobecněné souřadnice z modelu i ze zmíněného **POKÚ** viz. obrázek 9.

4.2.1 Kloubové souřadnice a jejich derivace (ACS)

Vypočtené kloubové souřadnice z vygenerovaných dat **MCS*** zaznamenaných na výstupu funkce **IOKÚ** je možné vidět na obrázku 11.

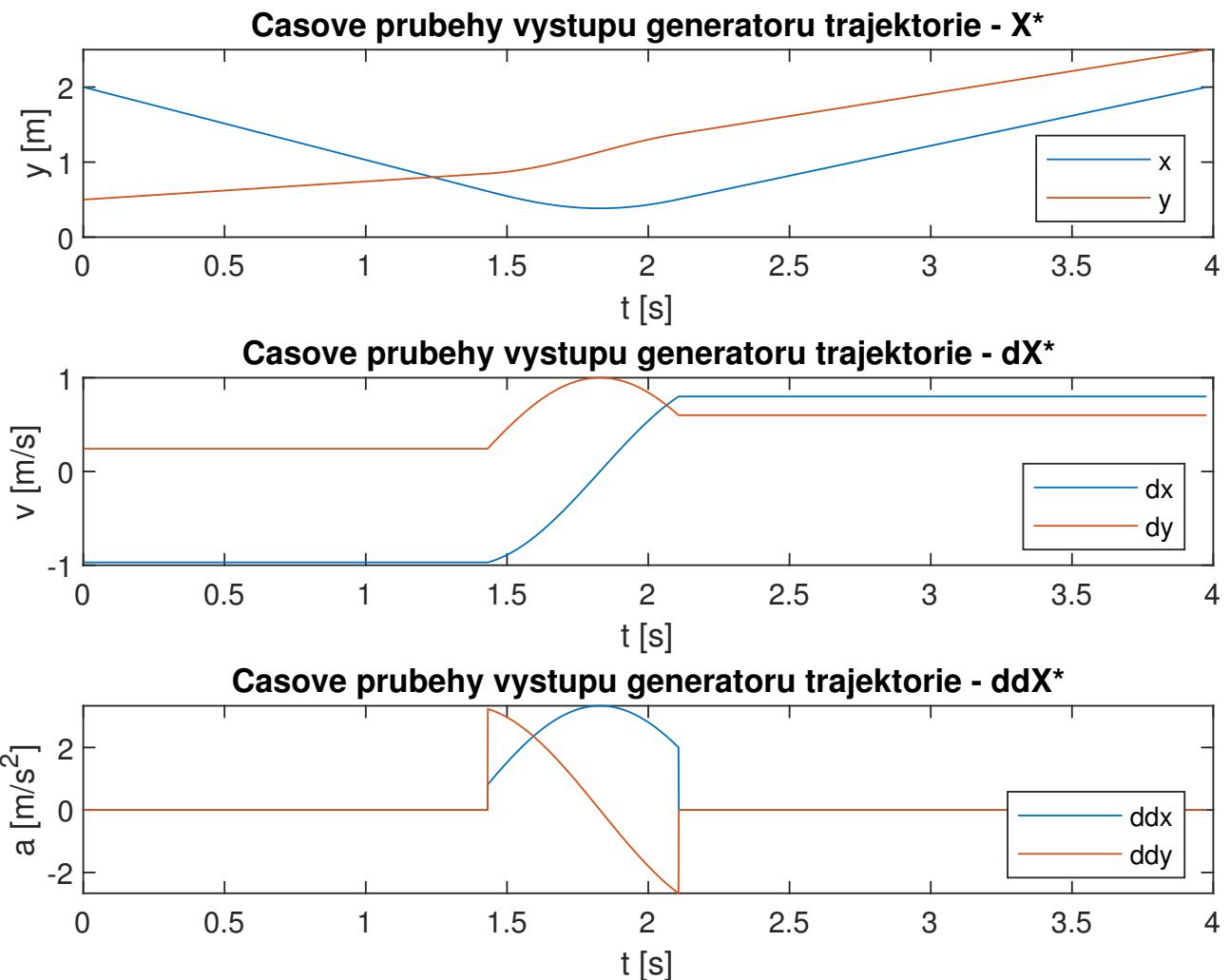
4.3 Výsledky

Na obrázku 9 lze pozorovat mírné odchylky rozdílů modelu a výstupu **POKÚ**, které však jsou velmi malé a můžeme rozhodnout, že funkce **POKÚ** a **IOKÚ** pracují vůči modelu vytvořenému v Simscape správně.



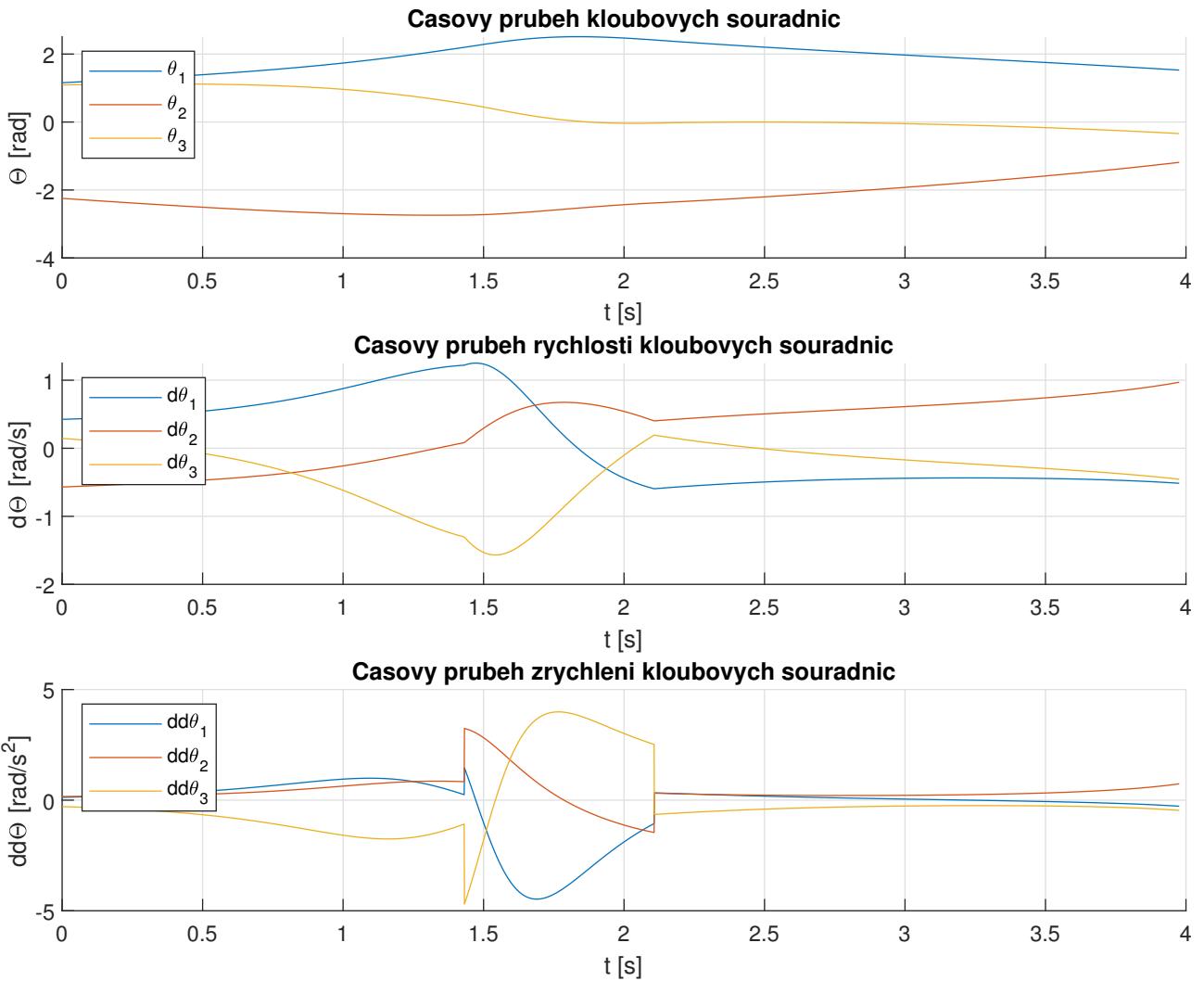
Obrázek 9: Ověření správnosti funkce **POKU**, **IOKU** vůči modelu vytvořenému v Simscape.

Z průběhu generátoru trajektorie koncového efektoru **MCS*** lze vypozorovat plánovaný pohyb daný body **A**, **B**, **C** a poloměrem r . Na obrázku 10 je zřetelně vidět změna průběhu souřadnice x , ježíž vrchol je přibližně středem kruhové části trajektorie. Při pohledu na rychlosť a zrychljení v témže obrázku je zřejmé z výkyní grafů, kde konkrétně se efektor pohybuje po kružnici, protože pro lineární pohyb po přímkách zůstávají derivace konstantní. Vykreslená data tedy odpovídají našemu předpokladu.



Obrázek 10: Časové průběhy zobecněných souřadnic generované generátorem trajektorie s jejich derivacemi.

Manipulátor však pro uskutečnění požadované trajektorie potřebuje kloubové souřadnice a jejich derivace, které nám poskytne na základě **MCS*** funkce **IOKÚ** v podobě matice **ACS**. Její průběh je v obrázku 11 a jako u výstupu generátoru lze pozorovat podobné chování ve stejných fázích simulace. Můžeme tedy tvrdit, že průběh kloubových souřadnic je geometricky správný s odvoláním i na graf výstupu modelu (viz obrázek 9).

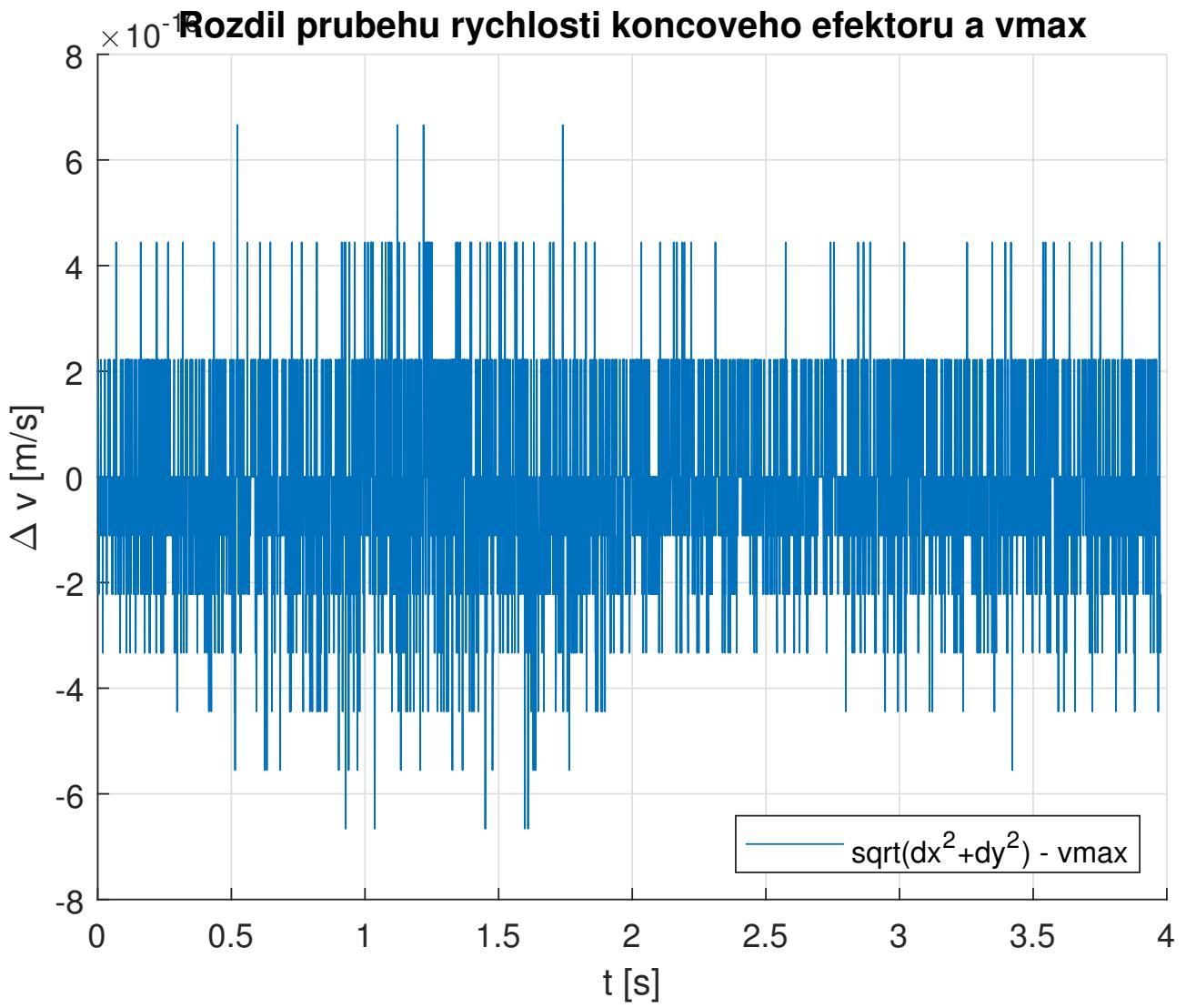


Obrázek 11: Průběh kloubových souřadnic při volbě konstantního $\varphi = 0$.

Za použití vzorečku

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

získáme rychlosť pohybu koncového efektoru po požadované dráze, ktorá je vykreslena v obrázku 12 ako rozdiel $v - v_{max}$, kde $v_{max} = 1$. Jak lze vidieť, odchylyky sú veľmi malé a podmínku dodrženie konštantnej maximálnej rychlosťi sme zde splnili.



Obrázek 12: Ověření rychlosti koncového efektoru vůči požadovanému v_{max} .

4.4 Závěr

Na základě poskytnutého odvození parametrizace trajektorie se nám podařilo úspěšně sestavit generátor trajektorie, který poskytuje geometricky správné hodnoty. Použitím funkcí **IOKÚ** a **POKÚ** z předchozího zadání v sekci 3 se nám povedlo rozhýbat manipulátor, který se pohyboval správně podle vygenerované trajektorie s minimálními odchylkami viz. Výsledky.

5 Singulární polohy manipulátoru

5.1 Zadání

Následující úkoly řešte pro manipulátor zadaný v úloze 2

1. Vypočtěte podmínku pro kloubové souřadnice manipulátoru pro robot nacházející se v singulární poloze a diskutujte geometrické uspořádání robotu v této poloze.
2. Znázorněte singulární polohu manipulátoru v prac. prostoru - rovině xy parametrizované zobecněnou souřadnicí Φ .

5.2 Postup řešení

Ze znalosti podmínky singulární polohy

$$\det(J) = 0, \quad (41)$$

kde J je analytický (kinematický) jakobián. Získáme ho parciální derivací jako

$$J(Q) = \frac{\delta F(Q)}{\delta Q} \quad (42)$$

kde

$$F(Q) = X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (43)$$

a

$$Q = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Jinými slovy lze mluvit o vektoru zobecněných souřadnic koncového efektoru X a kloubovými souřadnicemi Q . Vektor X lze získat snadno pomocí metody **DGM** a skládání homogenních transformačních matic podle D-H úmluvy. Po dosazení nulových hodnot namísto posunu v ose z , natočení kolem osy x a vyjádření zobecněných souřadnic získáme obecně vyjádřený vektor

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + a_1 \cos(\Theta_1) + a_3 \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) + a_1 \sin(\Theta_1) + a_3 \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ \text{atan2}(\sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3), \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)) \end{bmatrix}, \quad (45)$$

kde vektor $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ obsahuje parametry manipulátoru, což jsou dle D-H úmluvy posuny v osách x neboli parametry a_i .

Nyní již pouze dle výše zmíněných parciálních derivací $F(Q)$ podle vypočteme jakobián viz rovnice ((36))

$$J = \begin{bmatrix} -a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) - a_1 \sin(\Theta_1) - \sigma_1 & -a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) - \sigma_1 & -\sigma_1 \\ a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + a_1 \cos(\Theta_1) + \sigma_2 & a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + \sigma_2 & \sigma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad . \quad (46)$$

$$\sigma_1 = a_3 \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)$$

$$\sigma_2 = a_3 \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)$$

Nyní vypočteme

$$\det(J) = a_1 a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) \cos(\Theta_1) - a_1 a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) \sin(\Theta_1) \quad (47)$$

a po zjednodušení goniometrických funkcí dostaneme výraz

$$\det(J) = a_1 a_2 \sin(\Theta_2) \quad (48)$$

a dále jen položíme roven nule, abychom zjistili, pro jaké hodnoty existují singulární polohy. Jelikož a_1 a a_2 jsou konstantní parametry manipulátoru, singulární polohy definuje kloubový úhel Θ_2 . Ze znalosti funkce \sin víme, že

$$\sin(\Theta_2) = 0 \text{ pro } \Theta_2 = 0 + k \cdot \pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}. \quad (49)$$

Pokud Θ_2 manipulátoru fixujeme v singulární poloze a za předpokladu požadovaného $\varphi = 0$ koncového efektoru, zbývá nám jediný volitelný úhel Θ_1 . Při této znalosti dosadíme do předpisu polohy koncového efektoru a jelikož je $\varphi = (\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)$ konstantní, nebude se měnit a výraz se zjednoduší na dvě rovnice.

$$\begin{aligned} x &= a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + a_1 \cos(\Theta_1) + a_3 \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ y &= a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) + a_1 \sin(\Theta_1) + a_3 \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \end{aligned} \quad (50)$$

Po úpravě rovnic a dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} x &= a_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + a_1 \cos(\Theta_1) + a_3 \cos(\varphi) \\ y &= a_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) + a_1 \sin(\Theta_1) + a_3 \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (51)$$

Protože Θ_2 nabývá hodnoty $0 + k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, můžeme výraz dále zjednodušit dosazením. Pokud je $\Theta_2 = 0$ nebo jeho 2π násobkům, hodnota funkcií \sin a \cos nebude záviset na daném úhlu Θ_2 . Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned} x &= a_2 \cos(\Theta_1) + a_1 \cos(\Theta_1) + a_3 \cos(\varphi) \\ y &= a_2 \sin(\Theta_1) + a_1 \sin(\Theta_1) + a_3 \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (52)$$

Při dosazení $\Theta_2 = \pi$ nebo jeho 2π násobků již dochází k permanentnímu posunu na jednotkové kružnici o π , kde po přičtení druhého úhlu Θ_1 získáme opačné hodnoty funkcií \sin a \cos . Při této znalosti však můžeme výraz zjednodušit vypuštěním úhlu Θ_2 a přidáním znaménka – před související goniometrické funkce. Hodnoty rovnic se tak pro dané Θ_2 nezmění a budou mít tvar

$$\begin{aligned} x &= -a_2 \cos(\Theta_1) + a_1 \cos(\Theta_1) + a_3 \cos(\varphi) \\ y &= -a_2 \sin(\Theta_1) + a_1 \sin(\Theta_1) + a_3 \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (53)$$

Protože obě soustavy se liší pouze ve znaménkách, budeme je nadále upravovat společně. Vytkneme

$$\begin{aligned} x &= (a_1 \pm a_2) \cos(\Theta_1) + a_3 \cos(\varphi) \\ y &= (a_1 \pm a_2) \sin(\Theta_1) + a_3 \sin(\varphi), \end{aligned} \quad (54)$$

osamostatníme jednotlivé goniometrické funkce

$$\begin{aligned} x - a_3 \cos(\varphi) &= (a_1 \pm a_2) \cos(\Theta_1) \\ y - a_3 \sin(\varphi) &= (a_1 \pm a_2) \sin(\Theta_1) \end{aligned} \quad (55)$$

a nakonec umocníme na druhou jednotlivé rovnice, sečteme a upravíme do výsledného tvaru

$$(x - a_3 \cos(\varphi))^2 + (y - a_3 \sin(\varphi))^2 = (a_1 \pm a_2)^2. \quad (56)$$

Získali jsme tak rovnici kružnice se středem v bodě $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \cos(\varphi) \\ a_3 \sin(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5m \\ 0 \end{bmatrix}$ a poloměr, který závisí na zvoleném Θ_2 .

Pro $\Theta_2 = 0 + k \cdot \pi ; k \in \mathbb{Z}$ je poloměr $r = a_1 + a_2 = 2m + 1.5m = 3.5m$.

Pro $\Theta_2 = \pi + k \cdot \pi ; k \in \mathbb{Z}$ je poloměr $r = a_1 - a_2 = 2m - 1.5m = 0.5m$.

Vzniklé kružnice nám vyjadřují singulární polohy pro měnící se jediný volný parametr Θ_1 a konstantní $\varphi = 0$. Jelikož jsou výsledkem dvě kružnice, které mají stejný střed v bodě S a rozdílný poloměr, můžeme je vykreslit jako soustředné kružnice $k1$ a $k2$.

Pokud by jsme hodnotu φ změnili na jiný úhel než 0 došlo by u rovnice 56 ke změně polohy středů soustředných kružnic, jejichž velikost by se však nezměnila, protože poloměry jsou dány fyzickými parametry manipulátoru (zde rameny a_1 a a_2).

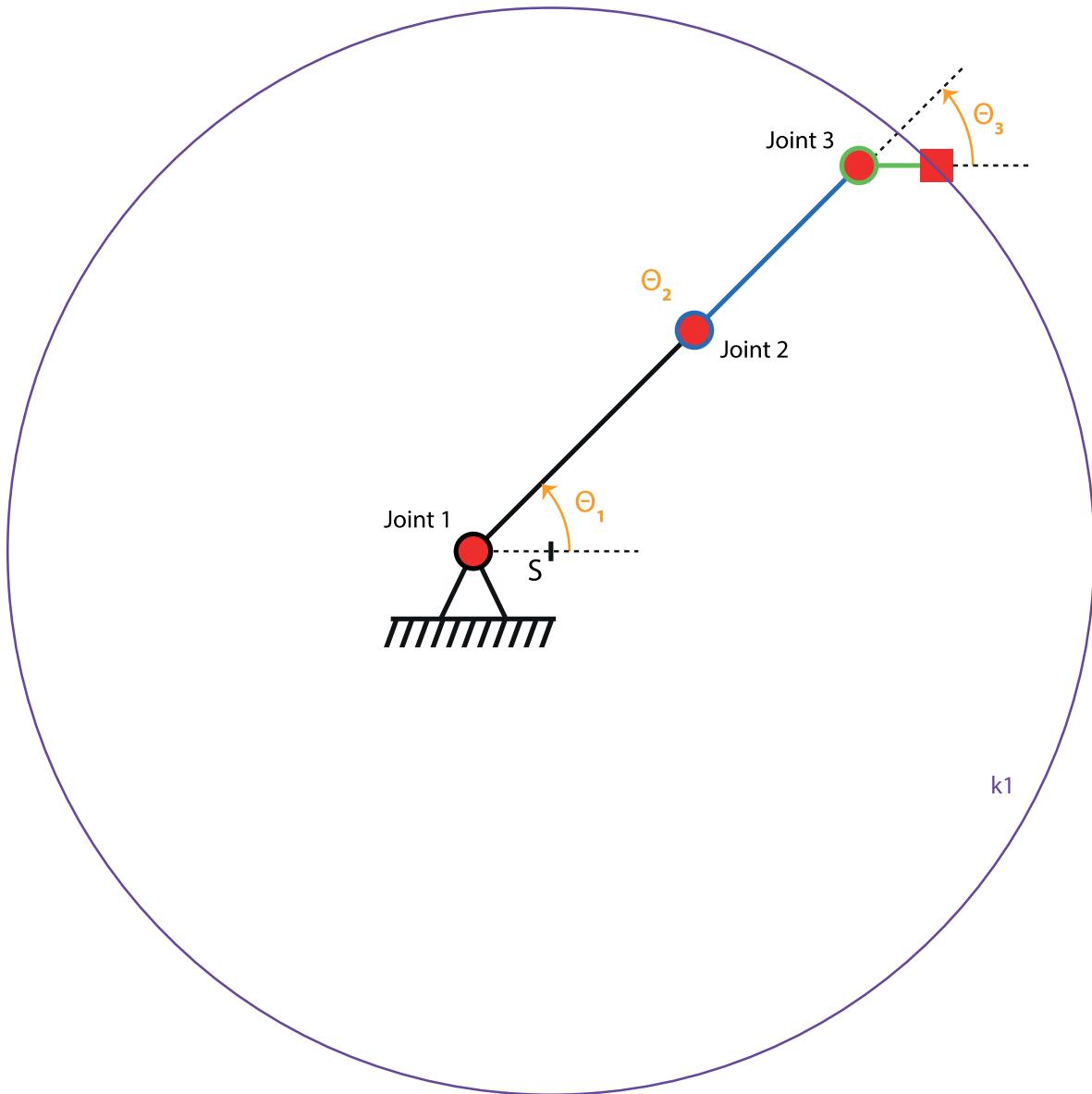
5.3 Výsledky

Když se podíváme na obrázek 13, kde je vykreslen manipulátor pro $\Theta_2 = 0$, můžeme vidět, že jedna singularita nastává při úplném natažení prvních dvou ramen. Bude tak působit problémy zejména při pohybu koncového efektoru daleko báze manipulátoru.

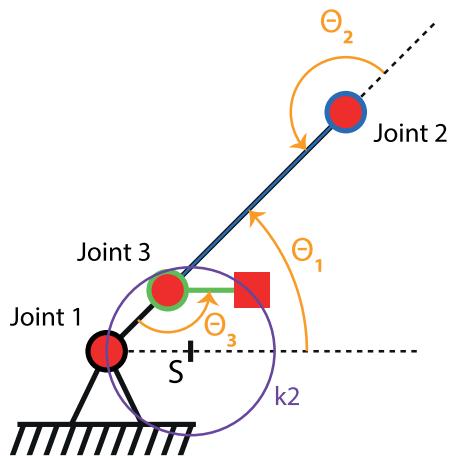
Druhá možnost uspořádání je pro $\Theta_2 = 0$ vyobrazena jako složená první dvě ramena na obrázku 14. Z toho můžeme usoudit, že problematická bude manipulace velmi blízko bázi. Další možnosti úhlu Θ_2 dle výše popsané rovnice budou vést na tyto dvě pozice, kdy jsou první dvě ramena rovnoběžná buď ve složeném stavu a nebo plně nataženém.

Díky nalezeným singularitám lze zpětně vidět na již vykreslených grafech z předešlých zadání, že při blízkosti Θ_2 jedné ze singulárních poloh mají rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic větší výkyvy než kdyby tomu tak nebylo (viz následující zadání).

Na následujících obrázcích 13 a 14 můžeme vidět uspořádání ramen manipulátoru v singulárních polohách a jejich odpovídající kružnice singularit $k1$ a $k2$ pro případ, kdy $\varphi = 0$.



Obrázek 13: Manipulátor v singulární poloze pro $\Theta_2 = 0 + k \cdot 2\pi ; k \in \mathbb{Z}$.



Obrázek 14: Manipulátor v singulární poloze pro $\Theta_2 = \pi + k \cdot 2\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

5.4 Závěr

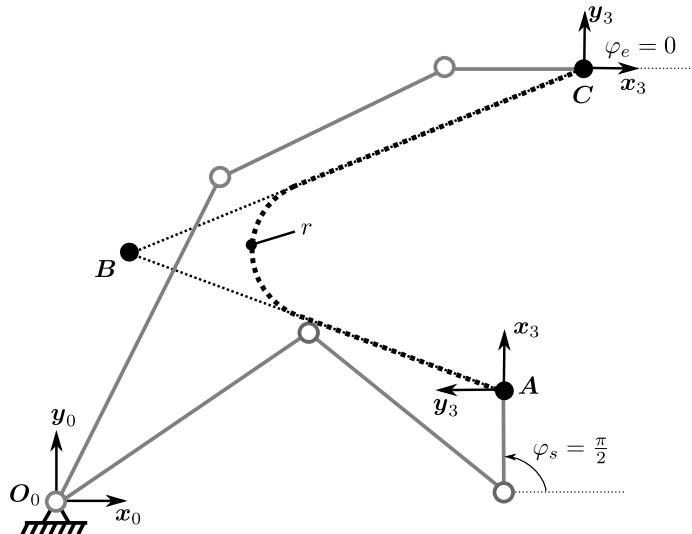
Pro zadaný manipulátor jsme byli schopni díky podmínce singularity určit, že nastává pro $\Theta_2 = 0 + k \cdot \pi ; k \in \mathbb{Z}$ a identifikovat tak problém předchozí úlohy, kdy docházelo k velkým výkyvům v rychlostech a zrychlení kloubových souřadnic. Po zafixování jsme získali rovnice pro dvě soustředné kružnice popisující polohu singulárních poloh v prostoru manipulátoru.

6 Orientace koncového efektoru

6.1 Zadání

6 Orientace koncového efektoru

Nyní předpokládejte, že konc. efektor manipulátoru reprezentuje pracovní nástroj (např. šroubovák), který na počátku a na konci pohybu má utáhnout šroub, tedy orientace konc. efektoru je jednoznačně určena počátečním úhlem $\varphi_s = \frac{\pi}{2}$ (na začátku trajektorie pohybu) a koncovým úhlem $\varphi_e = 0$ (na konci trajektorie pohybu), viz Obrázek 1.

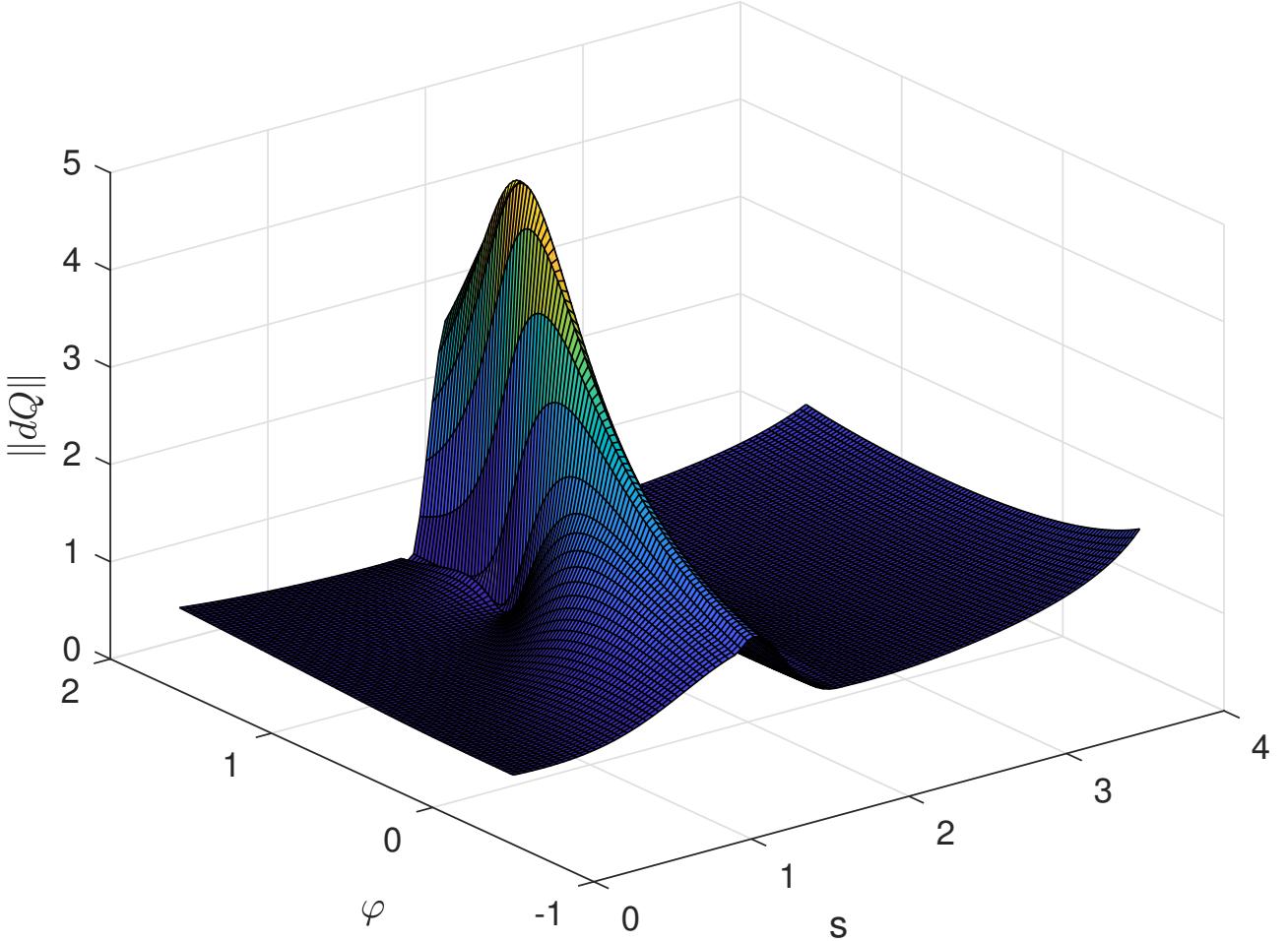


Obrázek 1: Požadovaná trajektorie manipulátoru včetně počáteční a koncové orientace konc. efektoru

1. Graficky znázorněte chování normy vektoru rychlostí kl. souřadnic, tzn. $\|\dot{Q}\|$, podél trajektorie $s \in (0, s_{max})$ pro hodnoty orientace konc. efektoru v intervalu $\varphi_s \in \langle -0.5, \frac{\pi}{2} \rangle$, viz Obrázek 2.
2. Upravte generátor trajektorie z úlohy 4 tak, aby se na místo konstantní orientace konc. efektoru jeho orientace měnila lineárně podél trajektorie z hodnoty φ_s do hodnoty φ_e , tzn. generovaný průběh zobecněné souřadnice φ je dán Obrázkem 3(a). Znázorněte tento průběh do grafu z předchozího bodu a dále znázorněte graficky časové průběhy zobecněných a kloubových souřadnic (vč. derivací).
3. Diskutujte závislosti singulární polohy manipulátoru se získanými výsledky (časové průběhy kl. souřadnice) a problémy, které v tomto důsledku mohou nastat při řízení reálného systému.
4. Vzhledem k faktu, že nás zajímá pouze počáteční φ_s a koncová orientace φ_e konc. efektoru, navrhněte kvadratickou interpolaci, zobec. souřadnice φ tak, abyste zajistili plynulý pohyb manipulátoru (vyvarování se projetí v blízkosti sing. polohy), tzn. generovaný průběh zobecněné souřadnice φ je dán Obrázkem 3(b), kde $[s_c, \varphi_c]$ je vhodně zvolený interpolační bod. Opět znázorněte interpolovanou křivku do grafu, viz Obrázek 2 a znázorněte graficky časové průběhy zobecněných a kloubových souřadnic. Porovnejte výsledky pro lineární a kvadratickou interpolaci úhlu φ , včetně absolutních hodnot rychlostí a zrychleních kl. souřadnic.

6.2 Postup řešení

Vzorec pro normu vektoru rychlostí je $\dot{Q} = \sqrt{\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2}$. V následujícím grafu na obrázku 15 můžeme vidět 3D graf generovaný pro jednotlivé konstantní úhly φ koncového efektoru po celé dráze pohybu efektoru s . Vzniká zde viditelná nerovnost v podobě vysokých rychlostí kloubových souřadnic signalizující blízkost singulární polohy.



Obrázek 15: Norma vektoru \dot{Q} pro konstantní úhly $\varphi \in \langle -0.5, \frac{\pi}{2} \rangle$ pro dráhu pohybu $s \in \langle 0, s_{max} \rangle$.

6.2.1 Lineární interpolace

Požadavek na orientaci efektoru byl doposud konstantní úhel. V tomto bodu máme za úkol tento úhel lineárně měnit mezi dvěma předem zadanými úhly. Pro výpočet jsme použili následující rovnice

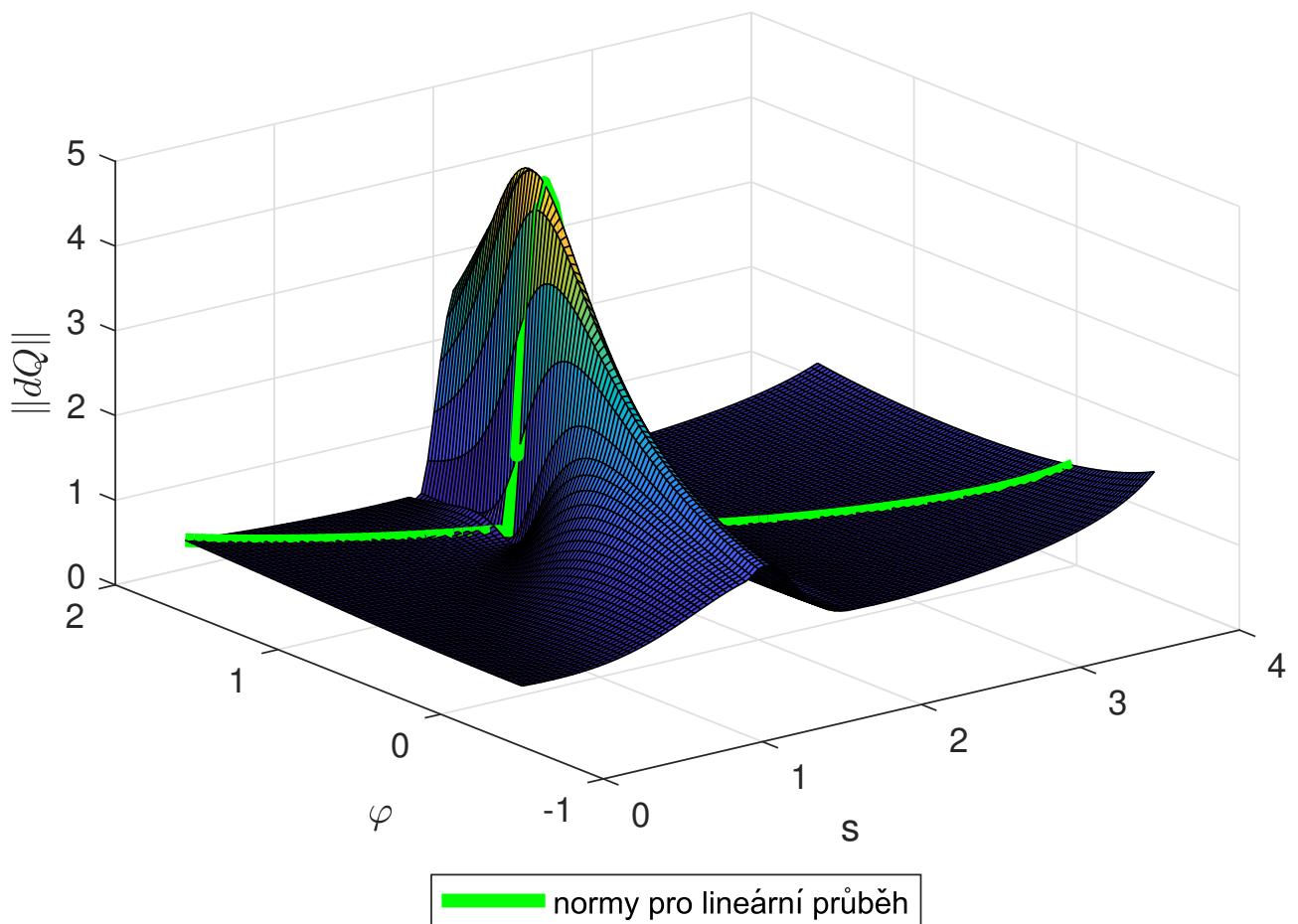
$$\varphi(t) = \varphi_s + \frac{s(t)}{s_{max}} \cdot (\varphi_e - \varphi_s) \quad (57)$$

dále platí

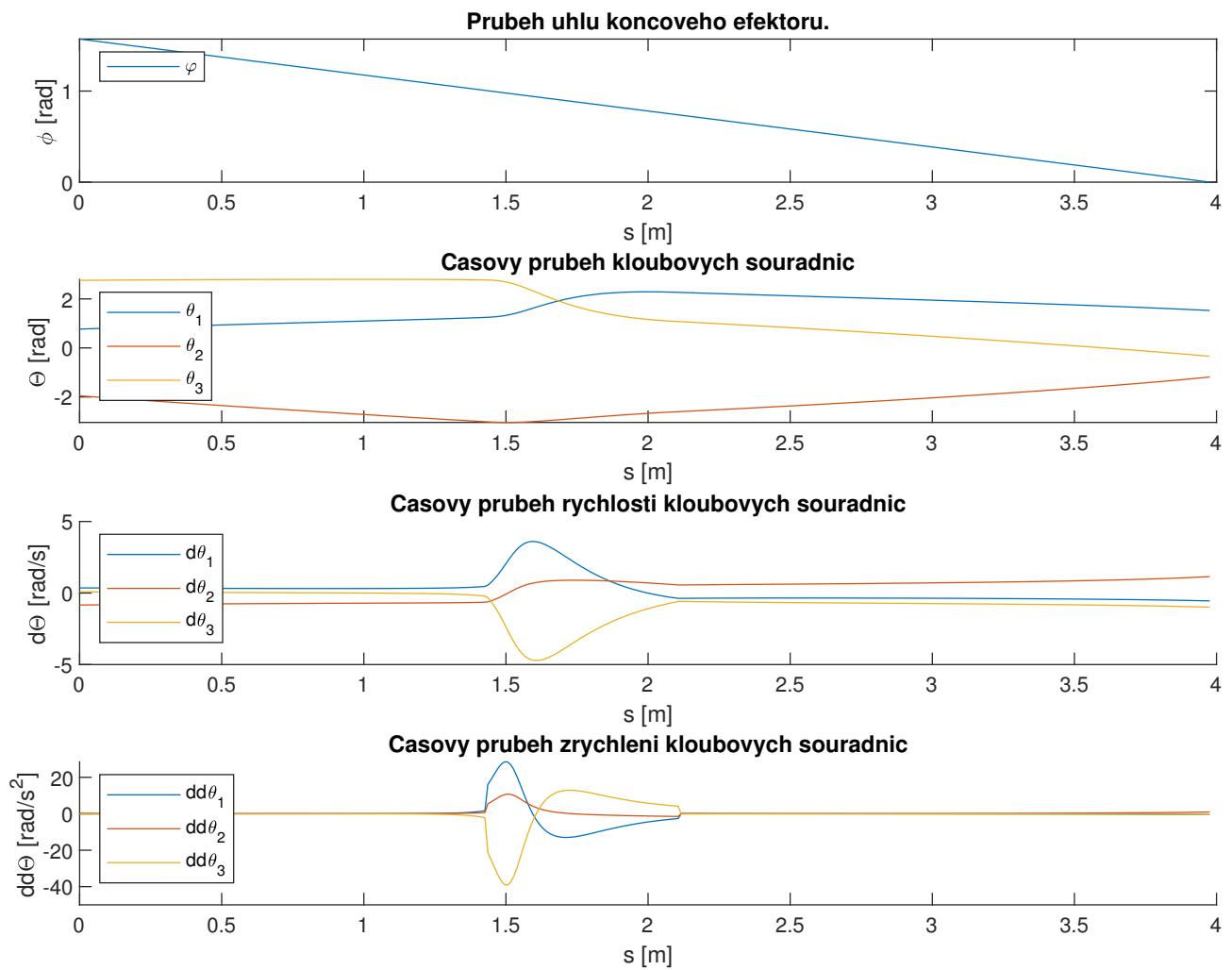
$$\dot{\varphi}(t) = \varphi_s + \frac{v(t)}{s_{max}} \cdot (\varphi_e - \varphi_s) \quad (58)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \varphi_s + \frac{a(t)}{s_{max}} \cdot (\varphi_e - \varphi_s) \quad (59)$$

Na následujícím obrázku 16 lze vidět, jak vypadá průběh normy rychlostí kloubových souřadnic pro lineární změnu φ od úhlu $\frac{\pi}{2}$ až do 0. Při průběhu z počátečního úhlu do koncového je však manipulátor vystaven vysokým rychlostem kloubových souřadnic díky pohybu blízko singulární poloze. Pokud by se celý průběh v prostoru posunul do místa s nižšími hodnotami norem rychlostí, omezili bychom tak namáhání manipulátoru a výkonostní požadavky na motory. Naštěstí lze změnit průběh úhlu φ tak aby se vyhnulo právě oblastem s vyššími hodnotami norem viz níže.



Obrázek 16: Norma vektoru \mathbb{Q} pro lineárně definované φ .



Obrázek 17: Matice ACS pro lineárně definovaný úhel φ .

6.2.2 Kvadratická interpolace

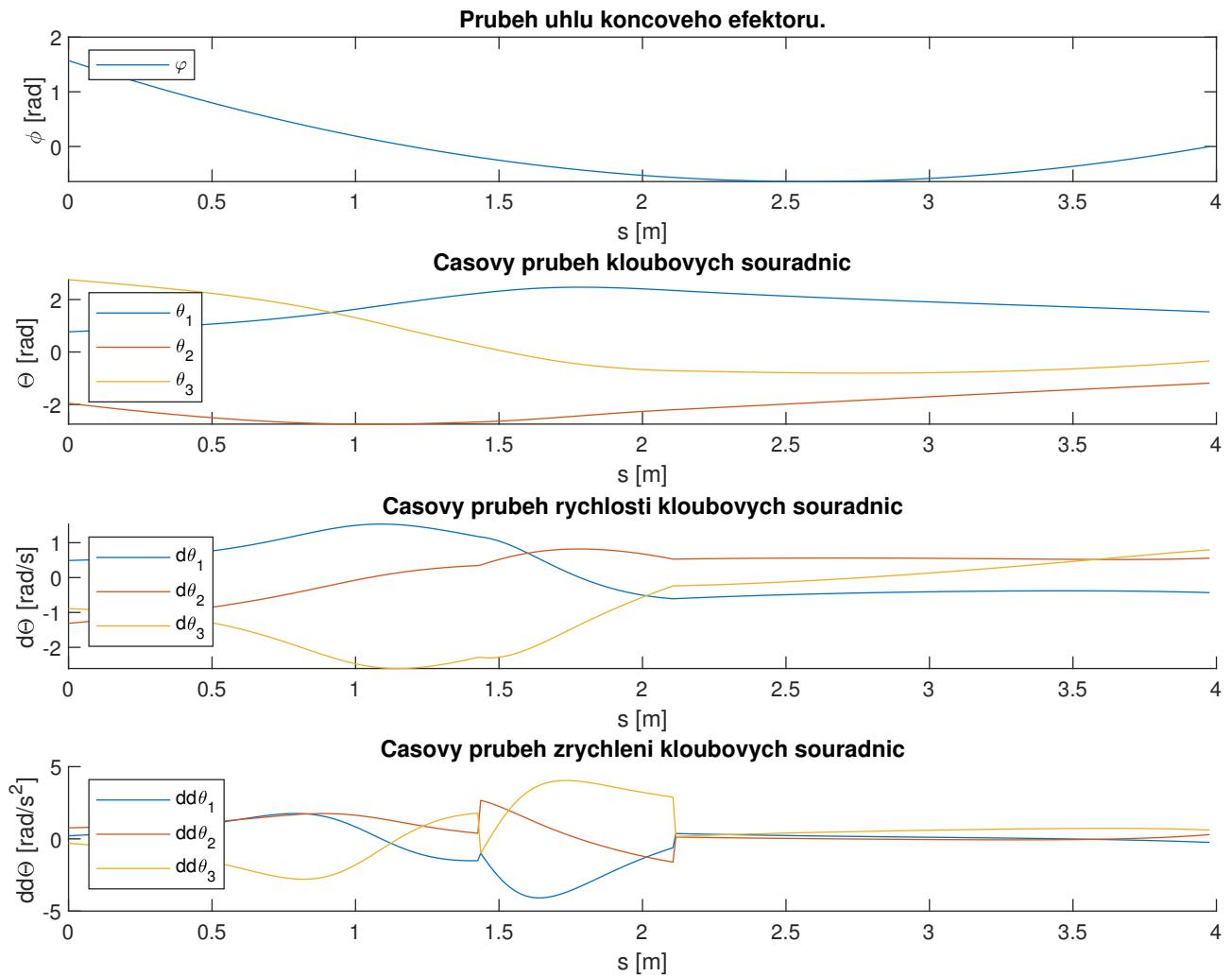
Abychom zabránili neplynulému pohybu, který je způsobený singulárními polohami a vyhnuli se tak oblastem s vysokými hodnotami norem rychlostí, navrhli jsme kvadratickou interpolaci. Při tomto postupu se nám podaří zachovat startovní a koncový úhel beze změny, pouze pohyb mezi nimi nebude probíhat po lineární, ale kvadratické křivce, která je popsána následujícími rovnicemi

$$\varphi = a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \quad (60)$$

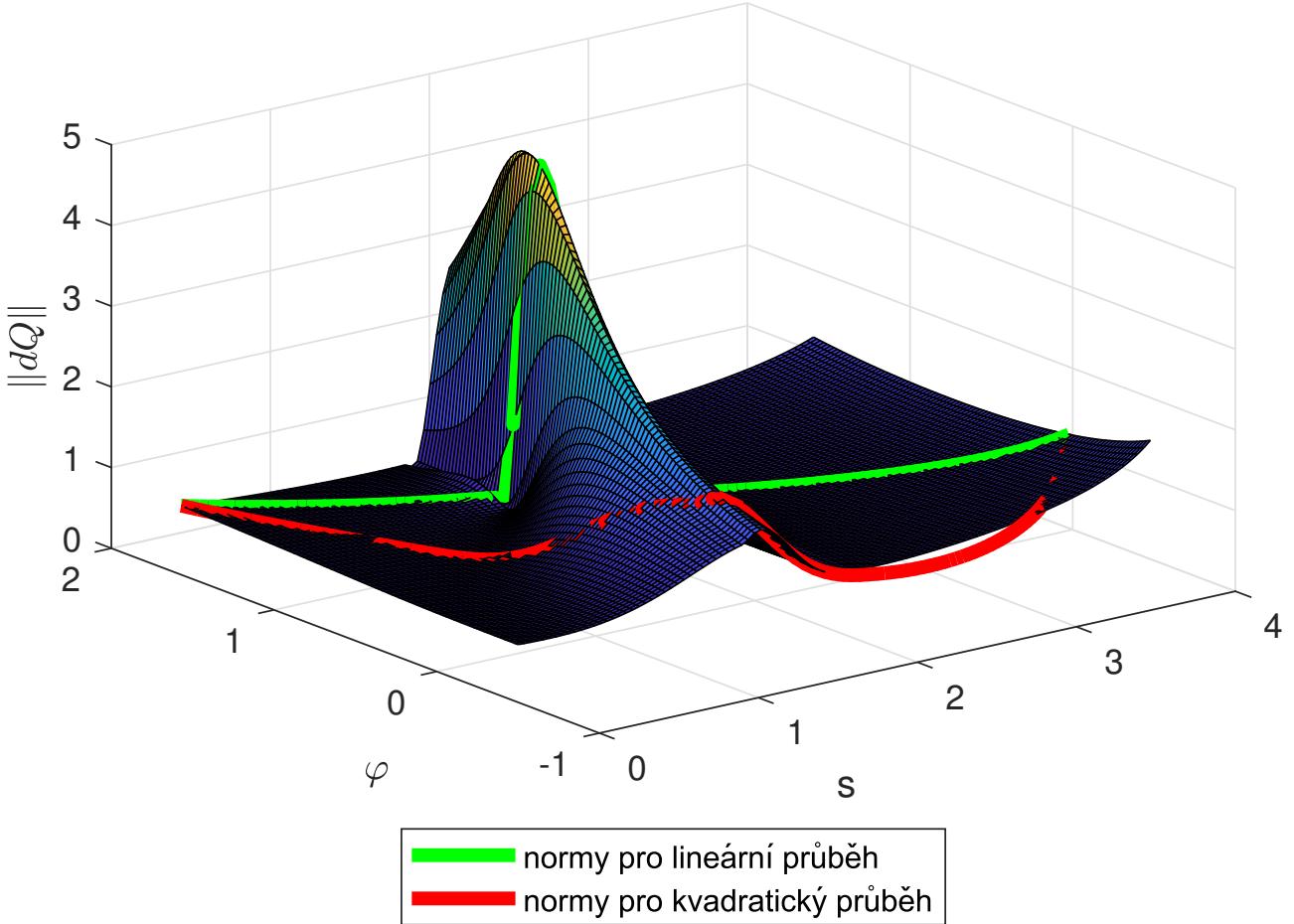
$$\dot{\varphi} = 2a_1 s + a_2 \quad (61)$$

$$\ddot{\varphi} = 2a_1 \quad (62)$$

Koeficienty polynomu jsme matematicky vyjádřili, což nám umožňuje flexibilitu ve volbě středového průběžného bodu, kterým křivka bude procházet. Průběžný bod jsme zvolili v polovině délky celkové dráhy pohybu koncového efektoru a o velikosti úhlu rovný násobku $-\frac{1}{3}$ startovního úhlu. Dosáhli jsme tak výrazného snížení požadavků na rychlosti pohybu kloubových motorů, což je vidět z průběhu kloubových souřadnic na obrázku 18. Zároveň jsme se tak vyhnuli vysokým normám rychlostí volbou vhodnějšího průběhu z počátečního do koncového úhlu než při lineární změně viz. obrázek 19.



Obrázek 18: Matice ACS pro kvadratický model



Obrázek 19: Porovnání průběhu norem rychlosí v okolí singulárního bodu při lineárním a kvadratickém průběhu φ

6.3 Závěr

Hodnota normy nám ukázala že v rozsahu $<0, s_{max}>$ při úhlu otáčení $\varphi \in (-0.5, \frac{\pi}{2})$ dochází k největší změně úhlových rychlosí přibližně ve vteřině a půl. Tento bod je přibližně střed trajektorie ze zadání, kde jsme také zvolili průběžný bod pro kvadratickou interpolaci.

Z grafů lze vidět že při přiblížení k singulární poloze dojde k prudkému nárůstu zrychlení v kloubech. Toto je pro reálný manipulátor nepřípustné, jelikož by mohlo dojít k jeho nadměrnému namáhání případně poškození. Tento jev jsme eliminovali pomocí kvadratické interpolace. Z grafů lze vidět zásadní zlepšení průběhu rychlosí i zrychlení při zachování stejných počátečních a koncových úhlů natočení konc. ef., což by v praxi mělo za následek lepší chování manipulátoru a jeho větší životnost.