图论作业 3

一、填空题

1. 完全图 K_{2n} 共有_______个不同的完美匹配。
2. 超方体 Q_6 的最小覆盖包含的点数为________。
3. 图 $K_{m,n}$ $(m\leq n)$的最小覆盖包含的点数为________。
4. 完全图 K_{60} 能分解为_______个边不重的一因子之并。
5. 完全图 K_{61} 能分解为_______个边不重的二因子之并。
6. 假设 G 是具有 n 个点、m 条边、k 个连通分支的无圈图，则 G 的荫度为_______。
7. 图 G 是由 3 个连通分支 K_1, K_2, K_4 组成的平面图，则其共有_______个面。
8. 设图 G 与 K_5 同胚，则至少从 G 中删掉_________条边才可能使其成为可平面图。
9. 设连通平面图 G 具有 5 个顶点，9 条边，则其面数为_______。
10. 若图 G 是 10 阶极大平面图，则其面数等于________。
11. 若图 G 是 10 阶极大外平面图，其内部面共有_______个。

二、不定项选择题

1. 关于非平凡树 T，下面说法错误的是(　　　)

(A) T 至少包含一个完美匹配；
(B) T 至多包含一个完美匹配；
(C) T 的荫度大于 1；
(D) T 是只有一个面的平面图；
(E) T 的对偶图是简单图。

2. 下列说法正确的是(　　　)

(A) 三正则的偶图存在完美匹配；
(B) 无割边的三正则图一定存在完美匹配；
(C) 有割边的三正则图一定没有完美匹配；
(D) 有完美匹配的三正则图一定没有割边；
(E) 三正则哈密尔顿图存在完美匹配。

3. 下列说法正确的是(　　　)

(A) 在偶图中，最大匹配包含的边数等于最小覆盖包含的点数；
(B) 任一非平凡正则偶图包含完美匹配；
(C) 任一非平凡正则偶图可以 1-因子分解；
(D) 偶度正则偶图可以 2-因子分解；
(E) 非平凡偶图的最大匹配是唯一的。

4. 下列说法中错误的是(　　　)

(A) 完全图 K_{101} 包含 1-因子；
(B) 完全图 K_{101} 包含 2-因子；
(C) 完全图 K_{102} 包含 1-因子；
(D) 完全图 K_{102} 包含 2-因子；
(E) 图 G 的一个完美匹配实际上就是它的一个 1 因子；
(F) 图 G 的一个 2-因子实际上就是它的一个哈密尔顿圈。

5. 下列说法正确的是(　　　)

(A) 方体 Q_n 可以 1-因子分解；
(B) 非平凡树可以 1-因子分解；

(C) 无割边的 3 正则图可以 1-因子分解；
(D) 有割边的 3 正则图一定不可以 1-因子分解；
(E) 可 1-因子分解的 3 正则图一定是哈密尔顿图。
6. 下列说法正确的是(　　　)
(A) 完全图 K_{2n}是 $2n$-1 个完美匹配的并；
(B) 完全图 K_{2n}是 n 个哈密尔顿圈的并；
(C) 完全图 K_{2n}是 1 个完美匹配与 n-1 个哈密尔顿圈的并；
(D) 若图 G 是 $2k$ 正则连通图，则 G 可以分解为 k 个二因子的并；
(E) 无割边的 3 正则图可以分解为是一个 1-因子与一个 2-因子的并。
7. 下列说法正确的是(　　　)
(A) 完全图 K_n的荫度为[n/2]，符号[ ]代表向上取整；
(B) 完全二部图 $K_{a,b}$的荫度为[$ab/(a+b-1)$]，符号[ ]代表向上取整；
(C) 非平凡树的荫度为 1；
(D) 具有 m 条边的 n 阶无环图可以分解为 m 个生成森林的并；
(E) 假设 H 是图 G 的子图，则 $\sigma(H)\leq\sigma(G)$。
8. 下列说法错误的是(　　　)
(A) 任何平面图都只有一个外部面；
(B) 简单平面图中一定有度数不超过 5 的顶点；
(C) 平面图的各个面的次数之和可能为奇数；
(D) 只有一个面的连通平面图一定是树；
(E) 存在一种方法，总可以把平面图的任意一个内部面转化为外部面。
9. 下列说法正确的是(　　　)
(A) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含割点；
(B) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含割边；
(C) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其一定不包含只属于一个面的边；
(D) 若无环图 G 是 2 连通的平面图，则其每个面的边界均为圈。
10. 下列说法错误的是(　　　)
(A) 若(n, m)图 G 是极大平面图且 $n\geq3$，则 $m=3n-6$；
(B) 若(n, m)图 G 是极大外平面图且 $n\geq3$，则 $m=2n-3$；
(C) 阶数至少为 3 的极大平面图的每个面均是三角形；
(D) 阶数至少为 3 的极大外平面图的每个面均是三角形；
(E) 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是哈密尔顿图。
11. 关于平面图 G 和其对偶图 G*的关系，下列说法中错误的是(　　　)
(A) G*是连通平面图；
(B) G 的面数等于 G*的顶点数；
(C) G 的边数等于 G*的边数；
(D) G 的点数等于 G*的面数；
(E) $G\cong(G^*)^*$；
(F) 若 $G_1\cong G_2$，则 $G_1^*\cong G_2^*$。
三、解答题
1. 共有 n 位男士和 n 位女士参加一次舞会，已知每位男士至少认识两位女士，而每位女士至多认识两位男士。能否将男士和女士分配为 n 对，使得每对中的男士和女士彼此相识？

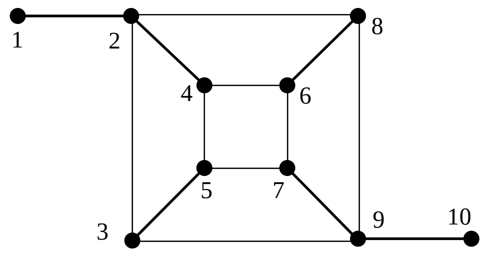
2. 由于在考试中获得好成绩，6 名学生将获得下列书籍的奖励，分别是：代数学(a)、微积分(c)、微分方程(d)、几何学(g)、数学史(h)、规划学(p)、拓扑学(t)。每门科目只有 1 本书，而每名学生对书的喜好是：

A：d, h, t；B：h, t；C：c, d, g, p；D：d, h；E：d, t；F：a, c, d。

每名学生是否都可以得到他喜欢的书？为什么？(用图论方法求解)

3. 假定 G 是具有 m 条边的简单二部图，顶点的最大度为 Δ。证明：G 包含一个至少有 m/Δ 条边的匹配。

4. 有一个街区如下图所示，其中所有街道都是直线段。 为了在巷战中能控制所有的街道，需要在街口处修筑碉堡，其中一个碉堡可以控制与其关联的所有街道。问最少需要多少个碉堡？并给出一种具体修建的位置。(用图论方法解答)



5. 证明：完全图 K_{6n-2}可以 3-因子分解。

6. 设简单图 G 有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点，其余顶点度数均为 7。求 7 度顶点的最大数目，使得 G 保持其可平面性。

7. 设 G^*是具有 k ($k \geq 2$)个连通分支的平面图 G 的对偶图，已知 G 的边数为 10，面数为 3，求 G^*的面数。

8. 富勒烯图(Fullerene graph)是一种只包含五边形面和六边形面的三正则平面图。试求富勒烯图的五边形面的个数。