自测 1

一、假设 $\ln R_y(z)$ 与 $g(l)$ 是一对 z 变换对，$a<|z|<1/a$，包含单位圆，$R_y(e^{jw})=|Y(e^{jw})|^2$，证明 $R_y(z)$ 可分解为如下形式：$R_y(z)=G^2H_{\min}(z)H^*_{\min}(1/z^*)$。（14 分）

证明：$\because R_y(e^{jw})=|Y(e^{jw})|^2$，所以 $R_y(e^{jw})$ 是实、非负的函数，则 $\ln R_y(e^{jw})$ 是实函数，

则 $g(l)$ 共轭对称：$g(l)=g^*(-l)$（3 分）

$$R_y(z)=\exp[\sum g(l)z^{-l}]=\exp[\sum_{l=-\infty}^{-1}g(l)z^{-l}+\sum_{1}^{+\infty}g(l)z^{-l}+g(0)]$$

$$=\exp[g(0)]\cdot\exp[\sum_{1}^{+\infty}g(l)z^{-l})]\cdot\exp[\sum_{-1}^{-\infty}g(l)z^{-l}] \qquad (6\text{ 分})$$

$$=G^2\exp[\sum_{1}^{+\infty}g(l)z^{-l})]\cdot\exp[\sum_{1}^{\infty}g*(l)z^{l}]$$

设 $H(z)=\exp[\sum_{1}^{+\infty}g(l)z^{-l})],|z|>a$，则该系统是因果稳定的，它的逆系统 $H_{\mathrm{inv}}(z)=\exp[-\sum_{1}^{+\infty}g(l)z^{-l})],|z|>a$ 存在也是因果稳定，则该系统是最小相位系统。（3 分）

$\because H^*(1/z^*)=[\exp[\sum_{1}^{+\infty}g(l)z^{*l})]]^*=\exp[\sum_{1}^{+\infty}g^*(l)z^{l})]$，所以得证。（2 分）

二、设 $x(n)=\cos(0.1\pi n+\phi_1)+2\sin(1.5n+\phi_2)$，$\phi_1,\phi_2$ 是相互独立的随机变量，在[0，2π]间均匀分布，求 x 的均值、自相关函数、功率谱密度。（14 分）

答:

解：$E[x(n)]=E[\cos(0.1\pi n+\phi_1)+2\sin(1.5n+\phi_2)]=E[\cos(0.1\pi n+\phi_1)]+2E[\sin(1.5n+\phi_2)]$，两个信号分别为[-1，1]之间均匀分布，所以 $E[x(n)]=0$（4 分）

$$R_x(m)=E[x(n)x(n+m)]$$

$$=E\{[\cos(0.1\pi n+\phi_1)+2\sin(1.5n+\phi_2)]\cdot[\cos(0.1\pi(n+m)+\phi_1)+2\sin(1.5(n+m)+\phi_2)]\}\ (3\text{ 分})$$

$$=0.5\cos(0.1\pi m)+2\cos(1.5m)\ (4\text{ 分})$$

$$P_x(e^{jw})=2\pi[\delta(w-1.5)+\delta(w+1.5)]+\pi/2[\delta(w-0.1\pi)+\delta(w+0.1\pi)]\ (3\text{ 分})$$

三、直接法估计自相关函数是否一致估计。并证明。（14 分）

解：是一致估计。（1 分）

1.偏差：$E[\hat{R}_x(m)] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x_n x_{n+m}] = \frac{N-|m|}{N}R_x(m)$ （3 分）

$N \to \infty, E[\hat{R}_x(m)] = R_x(m)$,渐进无偏。

2方差：$Var[\hat{R}_x(m)] = E[\hat{R}_x^2(m)] - E^2[\hat{R}_x(m)]$

$\because E[\hat{R}_x(m)] = \frac{N-|m|}{N}R_x(m)$, $E[\hat{R}_x^2(m)] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-|m|-1}\sum_{j=0}^{N-|m|-1} E[x_i x_{i+m} x_j x_{j+m}]$

对零均值高斯变量有： （6 分）

$E[x_i x_{i+m} x_j x_{j+m}] = E[x_i x_{i+m}]E[x_j x_{j+m}] + E[x_i x_j]E[x_{i+m} x_{j+m}] + E[x_i x_{j+m}]E[x_j x_{i+m}]$

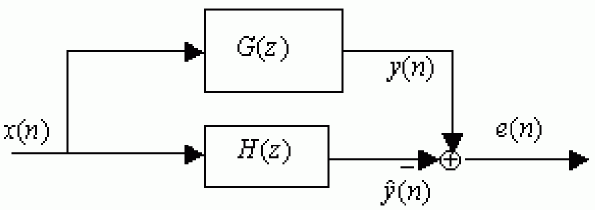
$= R_x^2(m) + R_x^2(i-j) + R_x(i-j+m)R_x(i-j-m)$

$\therefore Var[\hat{R}_x(m)] = \frac{1}{N^2}\sum_{l=-(N-|m|-1)}^{N-|m|-1}(N-|m|-|l|)[R_x^2(l) + R_x(l+m)R_x(l-m)]$ （4 分）

$= \frac{1}{N}\sum_{l=-(N-|m|-1)}^{N-|m|-1}\frac{(N-|m|-|l|)}{N}[R_x^2(l) + R_x(l+m)R_x(l-m)]$

N 无穷大时，方差趋于零。得证。

四、如下图所示系统均为因果系统，输入 x 为零均值、方差为 σ_x^2 的白噪，已知 $G(z) = \frac{0.05 - 0.4z^{-1}}{1 - 1.1314z^{-1} + 0.25z^{-2}}$，$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}$。利用最小均方误差求 a，b。（16 分）



解：$E[e^2(n)] = E[y^2(n)] + E[\hat{y}^2(n)] - 2E[y(n)\hat{y}(n)]$ （2 分）

$E[y^2(n)] = \sigma_x^2\sum_{m=0}^{+\infty} g^2(m)$；（2 分） $E[\hat{y}^2(n)] = \sigma_x^2\sum_{m=0}^{+\infty} h^2(m) = \sigma_x^2\frac{b^2}{1-a^2}$；（2 分）

$E[y(n)\hat{y}(n)] = \sigma_x^2\sum_{m=0}^{+\infty} g(m)h(m) = \sigma_x^2 bG(z)\big|_{z^{-1}=a}$ （2 分）

$E[e^2(n)] = \sigma_x^2\sum_{m=0}^{+\infty} g^2(m) - 2\sigma_x^2 bG(z)\big|_{z^{-1}=a} + \sigma_x^2\frac{b^2}{1-a^2}$ （2 分）

对 a，b 分别求偏导等于零，解两个方程得到三对解：（2 分）

a=[0.906，-0.519，1.659]；b=[-0.311，0.114，-5.69]；（2 分）代入均方误差得到 E=[0.203，0.724，19.23]；最后一对解舍去，第一对解是全局最小解，第二对解是局部最小解。（2 分）

五、用 L-D 算法计算三阶前向预测误差系统函数。已知输入信号的自相关为：R（0）=3，R（1）=2，R（2）=1， R（3）=0.5。（14 分）

解：1阶：$a=-2/3, E1=5/3$（3分）；二阶：$a=\begin{bmatrix}-4/5\\1/5\end{bmatrix}, E2=8/5$（4分）

三阶：$a=\begin{bmatrix}-13/16\\1/4\\-1/16\end{bmatrix}, E3=51/32$（5分）

系统函数：$H(z)=1-13/16z^{-1}+1/4z^{-2}-1/16z^{-3}$（2分）

六、已知 $x(n)=ax(n-1)+w(n)$，$|a|<1$，w 为零均值、方差为 σ_w^2 的白噪，求用 $x(n)(n=0,1\cdots N-1)$ 估计的均值 $\hat{u}_x$ 的方差。（14分）

答:

解：$x(n)=ax(n-1)+w(n)$ 可以推导出 $R_x(m)=a^{|m|}\dfrac{\sigma_w^2}{1-a^2}$（4分）

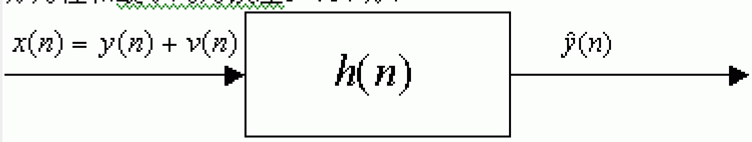
$\hat{u}_x=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)$，$VAR[\hat{u}_x]=E[\hat{u}^2_x]-E^2[\hat{u}_x]=E[\hat{u}^2_x]$（2分）

$=E[\dfrac{1}{N^2}\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)\sum\limits_{m=0}^{N-1}x(m)]=\dfrac{1}{N^2}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{m=0}^{N-1}E[x(n)x(m)]$（2分）

$=\dfrac{1}{N^2}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{m=0}^{N-1}R_x(m-n)=\dfrac{1}{N^2}\sum\limits_{l=-N+1}^{N-1}(N-|l|)R_x(l)$（4分）

$=\dfrac{\sigma_w^2}{(1-a^2)N^2}\sum\limits_{l=-N+1}^{N-1}(N-|l|)a^{|l|}$（2分）

七、下图中，已知 $R_y(l)=0.6^{|l|}$，$R_v(l)=\delta(l)$，y 与 v 不相关，设计一个因果 IIR 维纳滤波器，并写出差分方程和最小均方误差。（14分）



答:

解：$R_{yy}(z)=\dfrac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$ （2 分）

$$R_{xx}(z)=\frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}+1=1.8\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z)}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$ （2 分）

由于 $R_{xx}(z)=\sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1})$，容易找到最小相位系统和白噪声方差

$$B(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-0.6z^{-1}},\quad B(z^{-1})=\frac{1-\frac{1}{3}z}{1-0.6z},\quad \sigma_{w_1}^2=1.8$$ （2 分）

$H_{opt}(z)=\dfrac{[R_{yy}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)}=\dfrac{4/9}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$，（4 分）差分方程：$\hat{y}(n)=\frac{4}{9}x(n)+\frac{1}{3}\hat{y}(n-1)$ （2 分）

最小均方误差为：$E\left[e^2(n)\right]_{\min}=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c[R_{yy}(z)-H_{opt}(z)R_{yy}(z^{-1})]\dfrac{dz}{z}$ =4/9（2 分）

自测 2:

二、一个一阶递归滤波器，输入是零均值、方差为 1 的白噪声，滤波方程是

$$y_n=ay_{n-1}+bx_n \qquad |a|<1$$

证明：$P_y(e^{j\omega})=\dfrac{b^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$；

求 $R_y(m)$。（14 分）

解：

$P_y(e^{j\omega})=P_x(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2$，（2 分）对滤波方程求传递函数：$H(z)=\dfrac{b}{1-az^{-1}}$，则

$\left|H(e^{j\omega})\right|^2=\dfrac{b^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$，（4 分）而 $P_x(e^{j\omega})=1$，所以得证：$P_y(e^{j\omega})=\dfrac{b^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$ （2 分）

$R_y(m)=R_x(m)*h(-m)*h(m)$，而 $R_x(m)=\delta(m)$，$h(m)=ba^m u(m)$，$h(-m)=ba^{-m}u(-m)$ （3 分）

$$R_y(m)=b^2a^m u(m)*a^{-m}u(-m)=b^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{m-n}u(m-n)a^{-n}u(-n)=b^2a^m\sum_{n=-\infty}^{0}a^{-2n}u(m-n)$$

$$=b^2a^m\sum_{n=+\infty}^{0}a^{2n}u(m+n)=\begin{cases}m\ge 0,b^2a^m\sum\limits_{n=+\infty}^{0}a^{2n}=b^2a^m/(1-a^2)\\ m<0,b^2a^m\sum\limits_{n=+\infty}^{-m}a^{2n}=b^2a^{-m}/(1-a^2)\end{cases}=\frac{b^2}{1-a^2}a^{|m|}$$ （3 分）

三、估计 N 点长的、零均值、实序列 $x(n)$ 的功率谱 $\hat{S}_x(\omega)$，用 Welch 法过程如下：

x(n)N点长分成k段L点长的小段，$x_i(n)\times w(n)$加窗，补零至M点长，为2的幂次，然后FFT，得到$X_i(\omega)$，$S_i(\omega)=\frac{1}{M}|X_i(\omega)|^2$；$\hat{S}_x(\omega)=\frac{1}{kU}\sum_{i=1}^{k}S_i(\omega)$.

证明：如果各段数据互相独立，则 Welch 法谱估计的均值是 $E[\hat{S}_x(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S_x(\lambda)W(\omega-\lambda)d\lambda$，

其中 $W(\omega)=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-j\omega n}\right|^2$；（8 分）

归一因子 U 的作用是使得估计的均值渐进无偏，即当 M 不断增加时有 $E[\hat{S}_x(\omega)]=S_x(\omega)$。

证明：U=$\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}w^2(n)$。（8 分）

证明：

$$E[\hat{S}_x(\omega)]=E[\frac{1}{kU}\sum_{i=1}^{k}S_i(\omega)]=\frac{1}{U}E[S_i(\omega)]=\frac{1}{MU}E[\left|\sum_{n=0}^{M-1}x_i(n)w(n)e^{-j\omega n}\right|^2]$$

$$=\frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1}E[x_i(n)x_i(m)]w(n)w(m)e^{-j\omega(n-m)}$$

由于 x 是零均值的，所以 $E[x_i(n)x_i(m)]=R_x(n-m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S_x(\eta)e^{j\omega(n-m)}d\eta$，代入上式

$$E[\hat{S}_x(\omega)]=\frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1}w(n)w(m)e^{-j\omega(n-m)}\times[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S_x(\eta)e^{j\eta(n-m)}d\eta]\quad（4 分）$$

$$=\frac{1}{2\pi MU}\int_{-\pi}^{+\pi}S_x(\eta)[\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-jn(\omega-\eta)}]\times[\sum_{m=0}^{M-1}w(m)e^{jm(\omega-\eta)}]d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi U}\int_{-\pi}^{+\pi}S_x(\eta)[\frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-jn(\omega-\eta)}\right|^2]d\eta$$

定义 $W(\omega)=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-j\omega n}\right|^2$，则 $E[\hat{S}_x(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S_x(\eta)W(\omega-\eta)d\eta$（4 分）

证明：

当 M 逐渐增加时窗 W（w）的宽度逐渐减少，趋于冲击相应，此时 $E[\hat{S}_x(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}S_x(\eta)W(\omega-\eta)d\eta$

$=S_x(\omega)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}W(\omega-\eta)d\eta$，欲使均值渐进无偏，则后半部分应等于 1：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}W(\omega)d\eta=1$，即

$$\frac{1}{2\pi MU}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-j\omega n}\right|^2d\omega=1\quad（4 分）$$

$$\frac{1}{2\pi MU}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-j\omega n}\right|^2d\omega=\frac{1}{2\pi MU}\int_{-\pi}^{+\pi}[\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-jn\omega}]\times[\sum_{m=0}^{M-1}w(m)e^{jm\omega}]d\omega$$

$=\frac{1}{2\pi MU}\int_{-\pi}^{+\pi}[\sum_{n=0}^{M-1}w^2(n)+\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{\substack{m=0\\n\neq m}}^{M-1}w(n)w(m)e^{-j\omega(n-m)}]d\omega$，后一项正交积分为零，

$=\frac{1}{2\pi MU}\int_{-\pi}^{+\pi}[\sum_{n=0}^{M-1}w^2(n)]d\omega=\frac{1}{MU}\sum_{n=0}^{M-1}w^2(n)=1$，所以 U=$\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}w^2(n)$（4 分）

五、设 x=s+n，s 与 n 统计独立，信号 x 的自相关的 z 变换为 $R_{xx}(z)=1.6\frac{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$，噪声 n 的自相关的 z 变换为 1，设计一个因果的维纳预测器估计 s(n+1)，并求最小均方误差。（14 分）

答:

解:

由于 $R_{xx}(z)=\sigma_{w_1}^2 B(z)B(z^{-1})$，容易找到最小相位系统和白噪声方差

$B(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}},0.8<|z|$，$B(z^{-1})=\frac{1-0.5z}{1-0.8z},|z|<1.25$，$\sigma_{w_1}^2=1.6$

$R_{ss}(z)=R_{xx}(z)-R_n(z)=1.6\frac{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}-1=\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$ （2 分）

N＝1，

$$H_{opt}(z)=\frac{[zR_{xs}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)}=\frac{[zR_{ss}(z)/B(z^{-1})]_+}{\sigma_{w_1}^2 B(z)}$$

$$=\frac{1-0.8z^{-1}}{1.6(1-0.5z^{-1})}\left[\frac{0.36z}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\right]_+$$ （4 分）

对括号里面求 z 反变换，注意括号内的收敛域为 $0.8<|z|<2$，

$$Z^{-1}\left[\frac{0.36z}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\right]=0.48(0.8)^n u(n)+1.2(2)^n u(-n-1)$$

取因果部分，也就是第一项，所以

$$\left[\frac{0.36z}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)}\right]_+=0.48\frac{1}{1-0.8z^{-1}}$$ （2 分）

$$H_{opt}(z)=\frac{1-0.8z^{-1}}{1.6(1-0.5z^{-1})}\left[\frac{0.48}{(1-0.8z^{-1})}\right]=\frac{0.3}{1-0.5z^{-1}}，\quad h(n)=0.3(0.5)^n,n\ge 0$$

把上式写成差分方程形式有：$\hat{s}(n+1)=0.3x(n)+0.5\hat{s}(n)$ （3 分）

最小均方误差为:

$$E\left[e^2(n)\right]_{\min}=\frac{1}{2\pi j}\oint_c[R_{ss}(z)-H_{opt}(z)z^{-1}R_{ss}(z^{-1})]\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\left[\frac{0.36}{(z-0.5)(1-0.8z)}\right]dz=0.6$$ （3 分）

自测 3:

关闭答案

一、假设有两个离散平稳随机过程 $x(n),y(n)$， $R_x(m)=0.6^{|m|}$， $R_y(m)=0.8^{|m|}$，它们统计独

随机过程的乘积的自相关函数和功率谱密度。（14 分）

答:

解:

设 z=xy,

$$R_z(m)=E[z(n)z(n+m)]=E[x(n)y(n)x(n+m)y(n+m)]=E[x(n)x(n+m)]E[y(n)y(n+m)]$$
$$=R_x(m)R_y(m)=0.48^{|m|}$$
（6 分）

$$P_z(e^{j\omega})=DTFT[R_z(m)]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}0.48^{|m|}e^{-j\omega m}$$ （4 分）

$$=\frac{0.7696}{1.2304-0.96\cos\omega}$$ （4 分）

三、简述横向结构的随机梯度法算法步骤。（14 分）

解答:

步骤 1：观察到p个值 $\vec{X}(T)=[x_T,x_{T-1},x_{T-2},\cdots x_{T-p+1}]'$（2 分）

步骤 2：计算 $\vec{W}(T+1)=\vec{W}(T)+2\mu e_T\vec{X}(T)$，初值W与 e_T 预先给出，μ 先给定。（4 分）

步骤 3：当有新观测值 x_{T+1} 后，令 $\vec{X}(T+1)=[x_{T+1},x_T,\cdots x_{T-p+2}]'$ （5 分）
计算新的误差：$e_{T+1}=d_{T+1}-\vec{W}(T+1)'\vec{X}(T+1)$

转入步骤 2，代入得到 W（T+2），e（T+2）……使得 W 接近最优解。（3 分）

四、利用 $A^{(p)}=\begin{bmatrix}A^{(p-1)}\\0\end{bmatrix}+\rho^{(p)}\begin{bmatrix}0\\A_{\text{inv}}^{(p-1)}\end{bmatrix}$ 推导 L-D 算法来解 Y-W 方程:

$0=R_{xx}(m)+\sum_{k=1}^{p}a_kR_{xx}(m-k)$ $\quad m>0$；$\sigma_w^2=R_{xx}(0)+\sum_{k=1}^{p}a_kR_{xx}(-k)$ $\quad m=0$。（16 分）

答:

解：

P 阶 Y-W 方程写成矩阵形式： $\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(p-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R(p) & R(p-1) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1^{\,p} \\ \vdots \\ a_p^{\,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{wp}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$， $R^{(p)} \cdot A^{(p)} = E^{(p)}$

p-1 阶方程： $\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p-1) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(p-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R(p-1) & R(p-2) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1^{\,p-1} \\ \vdots \\ a_{p-1}^{\,p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{w(p-1)}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，

$R^{(p-1)} \cdot A^{(p-1)} = E^{(p-1)}$，（2 分） $R^{(p-1)} \cdot A_{\mathrm{inv}}^{\,(p-1)} = E_{\mathrm{inv}}^{\,(p-1)}$（2 分）

$A^{(p)} = \begin{bmatrix} A^{(p-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \rho^{(p)} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{\mathrm{inv}}^{(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \rho^{(p)} \cdot 0 \\ a_1^{(p-1)} + \rho^{(p)} \cdot a_{p-1}^{(p-1)} \\ \vdots \\ 0 + \rho^{(p)} \end{bmatrix}$，所以有： $\begin{cases} a_k^{(p)} = a_k^{(p-1)} + \rho^{(p)} \cdot a_{p-k}^{(p-1)} \\ a_p^{(p)} = \rho^{(p)} \end{cases}$ （4 分）

$$R^{(p)} \cdot A^{(p)} = R^{(p)} \left\{ \begin{bmatrix} A^{(p-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \rho^{(p)} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{\mathrm{inv}}^{(p-1)} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} R^{(p-1)} & \begin{matrix} R(p) \\ \vdots \\ R(1) \end{matrix} \\ R(p) \cdots R(1) & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(p-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \rho^{(p)} \begin{bmatrix} R(0) & R(1) \cdots R(p) \\ \begin{matrix} R(1) \\ \vdots \\ R(p) \end{matrix} & R^{(p-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{\mathrm{inv}}^{(p-1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E^{(p-1)} \\ R(p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_k^{(p-1)} R(p-k) \end{bmatrix} + \rho^{(p)} \begin{bmatrix} R(p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_k^{(p-1)} R(p-k) \\ E_{\mathrm{inv}}^{(p-1)} \end{bmatrix} = E^{(p)}$$，（4 分）

由最后一行： $\rho^{(p)} = -\dfrac{R(p) + \sum_{k=1}^{p-1} a_k^{\,(p-1)} R(p-k)}{\sigma_{w(p-1)}^2}$ （2 分）

由第一行： $\sigma_{w(p)}^2 = \sigma_{w(p-1)}^2 [1 - (\rho^{(p)})^2]$，得到三个推导式。（2 分）

五、有一信号 $s(n)$，其自相关函数 $R_s(m) = 0.7^{|m|}, m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$，被一零均值，方差为 0.4 的白噪 $n(n)$ 所淹没，$s(n)$ 与 $n(n)$ 统计独立。设计一个长度等于 3 的 FIR 数字滤波器，其输出 $y(n)$ 使得 $E[(y(n) - s(n))^2]$ 最小化。（14 分）

解：根据均方误差最小准则得到 W-H 方程：

$R_{xs}(j)=\sum_{m=0}^{N-1}h_{opt}(m)R_{xx}(j-m) \qquad j=0,1,2,\cdots,N-1$，其中 x=s+n，表示输入信号，

因为 N=3，且 $R_{xx}(m)=R_s(m)+R_n(m)$，

$R_{xs}(m)=E[x(n)s(n+m)]=E[(s(n)+n(n))s(n+m)]=R_s(m)$，代入 W-H 方程得：

$R_s(j)=\sum_{m=0}^{2}h_{opt}(m)[R_s(j-m)+R_n(j-m)] \qquad j=0,1,2$（4 分）

把 $R_s(m)=0.7^{|m|}, m=0,\pm1,\pm2\cdots$，$R_n(m)=0.4\delta(m)$ 代入上式得三个方程：

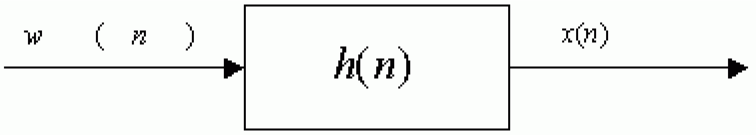
$$\begin{cases} j=0: 1=\sum_{m=0}^{2}h_{opt}(m)[0.7^{|-m|}+0.4\delta(-m)] \\ j=1: 0.7=\sum_{m=0}^{2}h_{opt}(m)[0.7^{|1-m|}+0.4\delta(1-m)] \\ j=2: 0.7^2=\sum_{m=0}^{2}h_{opt}(m)[0.7^{|2-m|}+0.4\delta(2-m)] \end{cases}$$（4 分）

$$\begin{vmatrix} 1.4 & 0.7 & 0.7^2 \\ 0.7 & 1.4 & 0.7 \\ 0.7^2 & 0.7 & 1.4 \end{vmatrix}\begin{bmatrix} h_{opt}(0) \\ h_{opt}(1) \\ h_{opt}(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.7 \\ 0.7^2 \end{bmatrix}$$

解得：$\begin{bmatrix} h_{opt}(0) \\ h_{opt}(1) \\ h_{opt}(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.6121 \\ 0.1681 \\ 0.0517 \end{bmatrix}$（4 分）

所以设计的滤波器的传递函数为：$H(z)=0.6121+0.1681z^{-1}+0.0517z^{-2}$（2 分）

六、如何用 AR 法进行谱估计？为什么 AR 谱估计需要的数据比古典法短？（14 分）



解：（2 分）

在上图模型中，输入输出的功率谱关系为：$P_x(e^{j\omega})=\sigma_w^2\left|H(e^{j\omega})\right|^2$（3 分）

以AR建模为例 $H(z)=\dfrac{1}{1+\sum_{l=1}^{p}a_l^{(p)}z^{-l}}$ 代入

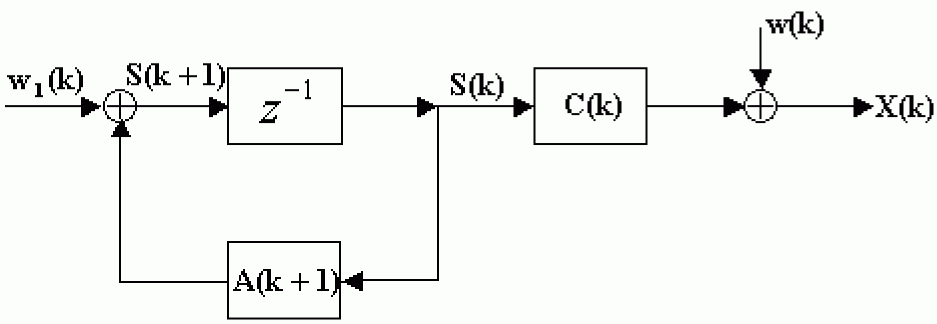
（5 分）

$$\Rightarrow P_x(e^{j\omega})=\frac{\sigma_w^2}{\left|1+\sum_{l=1}^{p}a_l^{(p)}e^{-j\omega l}\right|^2}$$

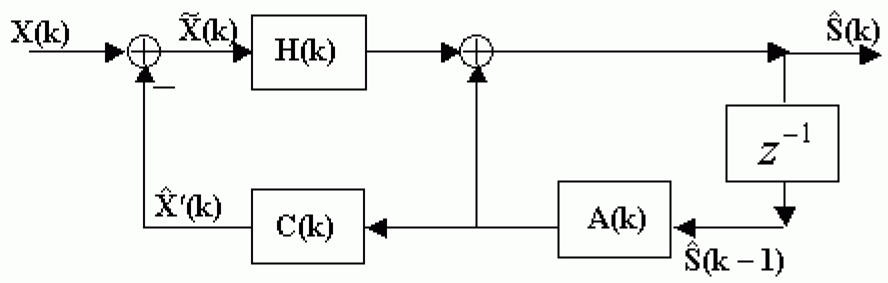
古典法是通过 DFT 法计算得到功率谱估计的，DFT 是把数据看成是周期重复的假设下做出的；AR 谱则是对延迟 p 范围外的自相关函数做预测延伸取得的，因而数据的有效范围宽得多。（4 分）

七、画出卡尔曼滤波的信号模型和一步递推法模型图。（14 分）

解：信号模型：（7 分）



一步递推法模型：（7 分）



六、对于一个随机信号，可以对它进行频谱估计，叙述 AR 谱法和周期图法相比的优点。（14 分）

解答：

两法原理区别，（2 分）、平滑（3 分）、需要较短数据即可（3 分）、频率分辨率高（3 分）、峰值包络线的好估计（3 分）等。

七、画出自适应噪声抵消的框图，并证明滤波后的输出将在最小均方意义下抵消噪声，同时，抵消后的结果将在最小均方意义下逼进信号。（14 分）

解答：

因为 $E(s(n)-e(n))^2 = E(y(n)-n(n))^2$ （2 分）

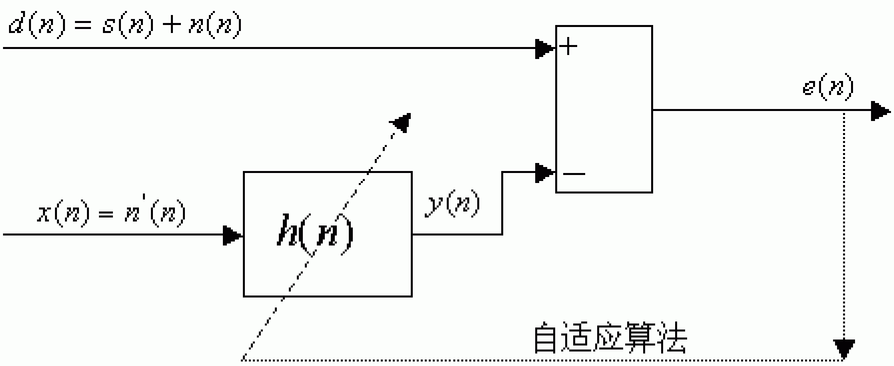
$$E(s(n)-e(n))^2 = E(s(n))^2 + E(e(n))^2 - 2E(s(n)e(n))$$

$$= -E(s(n))^2 + E(e(n))^2 - 2E(s(n)n(n)) + 2E(y(n)s(n))$$

$$= -E(s(n))^2 + E(e(n))^2$$ （4 分）

所以当均方误差最小时，s 与 e 最逼近，同时 y 与 n 也最逼近。即滤波后的输出 y 将在最小
抵消噪声 n，同时，抵消后的结果 e 将在最小均方意义下逼进信号 s。（2 分）

框图：



（6 分）

四、设已知 $R_x(m) = \frac{14}{11}(0.8^{|m|}) - \frac{3}{11}(0.4^{|m|}), m = 0, \pm1, \pm2\cdots$，用 L-D 算法为此信号估计 p=
AR 模型的系数和激励白噪的功率。（14 分）

解答：

计算自相关函数：$R_s(0)=\frac{14}{11}-\frac{3}{11}=1$

$R_s(1)=\frac{14}{11}0.8-\frac{3}{11}0.4=0.9091$

$R_s(2)=\frac{14}{11}0.64-\frac{3}{11}0.16=0.7709$

$R_s(3)=\frac{14}{11}0.512-\frac{3}{11}0.064=0.6342$，（4 分）

下面为了简写，省略下标 s。

按照 L-D 算法得初始功率和系数为：$E_0=R_s(0)=1, a_0=1$（2 分）

P=1：$\begin{array}{l} a_1(1)=-R(1)/E_0=-0.9091 \\ E_1=E_0[1-a_1^2(1)]=0.1736 \end{array}$ （2 分）

P=2：$\begin{cases} a_2(2)=\dfrac{-R(2)-a_1(1)R(1)}{E_1}=0.32 \\ a_2(1)=a_1(1)[1+a_2(2)]=-1.2 \end{cases}$ （3 分）

$E_2=E_1[1-a_2^2(2)]=0.1558$

P=3：$\begin{cases} a_3(3)=\dfrac{-R(3)-a_2(1)R(2)-a_2(2)R(1)}{E_2}\approx 0 \\ a_3(1)=a_2(1)+a_3(3)a_2(2)=-1.2 \\ a_3(2)=a_2(2)+a_3(3)a_2(1)=0.32 \end{cases}$ （3 分）

$E_3=E_2[1-a_3^3(2)]=0.1558$

关闭答案

一、 x_n是零均值，方差为σ_x^2的白噪过程，把它先送入一个平均器，得 $y_n=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$，然后

给一个差分器$z_n=y_n-y_{n-1}$，求z_n的均值、方差、自相关函数和功率谱密度。（14 分）

解答：

$$z_n = y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1}) - \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-2})$$ （2 分）

$$E(z_n) = E(\frac{1}{2}(x_n - x_{n-2})) = 0$$ （2 分）

$$\sigma_z^2 = E(z_n^2) - E^2(z_n) = E[\frac{1}{4}(x_n - x_{n-2})^2] = E[\frac{1}{4}(x_n^2 - 2x_n x_{n-2} + x_{n-2}^2)] = \sigma_x^2/2 = R_{z_n}(0)$$

$$R_{z_n}(1) = E(z_n z_{n+1}) = E[\frac{1}{4}(x_n - x_{n-2})(x_{n+1} - x_{n-1})] = 0$$

$$R_{z_n}(2) = E(z_n z_{n+2}) = E[\frac{1}{4}(x_n - x_{n-2})(x_{n+2} - x_n)] = -\sigma_x^2/4$$

当|m|>=3，自相关都为 0。

$$R_{z_n}(m) = \frac{1}{2}\sigma_x^2[\delta(m) - \frac{1}{2}\delta(m-2) - \frac{1}{2}\delta(m+2)]$$ （6 分）

$$P_{z_n}(w) = \frac{1}{2}\sigma_x^2[1 - \frac{1}{2}e^{-jw2} - \frac{1}{2}e^{jw2}] = \frac{1}{2}\sigma_x^2[1 - \cos 2w]$$ （2 分）

二、一个一阶递归滤波器，输入是零均值、方差为 1 的白噪声，滤波方程是

$$y_n = ay_{n-1} + bx_n \qquad |a| < 1$$

证明：$P_y(e^{j\omega}) = \dfrac{b^2}{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$；

求 $R_y(m)$。（14 分）

解：

$P_y(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2$，（2 分）对滤波方程求传递函数：$H(z) = \dfrac{b}{1 - az^{-1}}$，则

$|H(e^{j\omega})|^2 = \dfrac{b^2}{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$，（4 分）而 $P_x(e^{j\omega}) = 1$，所以得证：$P_y(e^{j\omega}) = \dfrac{b^2}{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$ （2 分）

$R_y(m) = R_x(m) * h(-m) * h(m)$，而 $R_x(m) = \delta(m)$，$h(m) = ba^m u(m)$，$h(-m) = ba^{-m}u(-m)$ （3 分）

$$R_y(m) = b^2 a^m u(m) * a^{-m}u(-m) = b^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{m-n}u(m-n)a^{-n}u(-n) = b^2 a^m \sum_{n=-\infty}^{0} a^{-2n}u(m-n)$$

$$= b^2 a^m \sum_{n=+\infty}^{0} a^{2n}u(m+n) = \begin{cases} m \ge 0, b^2 a^m \sum\limits_{n=+\infty}^{0} a^{2n} = b^2 a^m/(1-a^2) \\ m < 0, b^2 a^m \sum\limits_{n=+\infty}^{-m} a^{2n} = b^2 a^{-m}/(1-a^2) \end{cases} = \frac{b^2}{1-a^2}a^{|m|}$$ （3 分）