《多元函数微分学》检测题

班级________ 学号______________ 姓名_________ 成绩______

一、选择题（15 分）

，

1. 下列二元函数在$(0,0)$处可微的是（ ）

$A.\ f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ $B.\ f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

$C.\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ $D.\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(A). (B). (C). (D).

2. 设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi_y(x,y)\neq 0$，已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，下列选项正确的是(　　)

(A)若$f_x(x_0,y_0)=0$，则$f_y(x_0,y_0)=0$;

(B)若$f_x(x_0,y_0)=0$，则$f_y(x_0,y_0)\neq 0$;

(C)若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y(x_0,y_0)=0$;

(D)若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y(x_0,y_0)\neq 0$.

3．设函数$u=x^2-xy+y^2$，点M（1，1），则$\mathrm{grad}u(M)=$（　　）.

A．$\vec{i}+\vec{j}$； B．$2\vec{i}+\vec{j}$； C．$\vec{i}-\vec{j}$； D．$2\vec{i}-\vec{j}$.

4．已知函数$f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，则$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$（　　）.

A．$2x-2y$； B．$2x+2y$； C．$x+y$； D．$x-y$.

5．已知曲面$z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$，则切点P的坐标是（　　）.

A．（1，-1，2）； B．（-1，1，2）； C．$(1,\ 1,\ 2)$； D．（-1，-1，2）.

二、填空题（15 分）

1．设a为常数，计算$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$__________________.

2．曲面$z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点$(1,0,1)$处的切平面方程____________________.

3．设$u=xf\left(x,\ \dfrac{y}{x}\right)$，$f$具有二阶连续偏导数，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$____________________.

4．设$z=(1+x^2)^{\sin x}$，则$\dfrac{dz}{dx}=$______________________________.

5．曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=45\\ x^2+2y^2-z=0\end{cases}$上点$M$（$-2$，1，6）处的切线方程是____________________.

三、（8 分）设函数 $f(u)$ 具有连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$.
若 $f(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

四、（8 分）设 $z(x,y)$ 是由方程组 $\begin{cases}x=(t+1)\cos z,\\ y=t\sin z\end{cases}$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

五、（10 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，证明：（1） $f(x,y)$ 在（0,0）点连续；
（2） $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 存在；（4） $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在（0,0）点不连续；
（4） $f(x,y)$ 在（0,0）点可微.

六、（8 分）在曲面 $2x^2+y^2-z^2-2xy+1=0$ 上求一点，使它到原点的距离最小.

七、（8 分）设 $z=f(x+y,xe^{y})$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

八、（8 分）设 $F(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，求证：曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任一点处的切平面都通过一定点（其中 a、b、c 为常数）.

九、（8 分）已知 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 有二阶连续偏导数,且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$, 试求 $u(x,y)$.

十、（12 分）设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$. 证明：对任意常数 c, $f(x,y)=c$ 为一条直线的充分必要条件是

$$\left(f_y\right)^2 f_{xx}-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}\left(f_x\right)^2=0.$$