组合优化

Rongfan Li

Abstract

Notes on combination optimal.

Contents

1 Linear programming

1.1 单纯形法/对偶单纯形法

1. 化成标准型。非规范形式可反号或者添加两个 x 解决

$$\max z=\sum c_j x_j \\ \text{s.t.}\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i(i=1,2,\cdots,m)\\ \quad x_j\geq 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)\end{array}\right. \tag{1}$$

2. 化成对偶问题。注意非规范形式
3. 单纯形法/对偶单纯形法
4. 互补松弛性。在已知 P 的最优解的时候，可以用来求 D 的最优解
5. 人工变量法，两种思路

记号，原问题 P，对偶问题 D

$$\begin{array}{llll}\text{Max}\, Z=CX & \text{Min}\, W=Yb \\ \text{s.t.}\quad AX\leq b & \text{s.t.}\quad YA\geq C \\ \quad X\geq 0 & Y\geq 0\end{array} \tag{2}$$

Theorem: 对偶的对偶就是原问题
Theorem: 若 X 和 Y 分别是可行解，则 $CX\leq YAX\leq Yb$，P 的任意目标函数值是 D 的最优值的下界。若 P 有最优解，则 D 也有最优解，当等号取到，则分别为最优解，PD 的最优解的值是相同的。
Theorem: 若 P 无有限的最优解（无界），则 D 无可行解。
除了上面两种情况，还有一种是两个都无可行解

1.2 整数规划 IP–决策变量是整数

1. 割平面法，添加一个切割方程，p26，不断加约束直到 b 全为整数
2. 分支定界法。画图辅助理解问题。对原问题的最优解，按照变量 12 分两支进行整数约束，求出新的最优解，若是整数解则停止，若不是则递归

2 Others

2.1 DP

三个重要性质：最优子结构，重叠子问题，马氏性

2.2 背包问题 KP

1. 分支定界法，标准化后的 KP 是一个整数规划问题
2. DP

2.3 指派问题，匈牙利法

对同一工作所有人的效率同时变化不影响最优分配。对同一人的所有工作效率同时变化也不影响最优分配。

2.4 装箱问题

最优解的下界：全部都恰好装入了箱子中。下面全是近似算法
1. NF/Next Fit。将 J_1 放入 B_1 后，如果 J_2 放不下，则直接封闭 B_1 并将 J_2 放入 B_2。特点：封箱快，不需要全部物品装好后才能封箱搬运，适合场地小的安装。$O(n)$
2. FF/First Fit。对于 J_i 依次检查前面的全部 B，放入第一个能装下 J_i 的箱子，若都放不下则启用空箱子。$O(n\log n)$
3. BF/Best Fit。J_i 放入使得这个箱子剩余空间最小的那个箱子中。$O(n\log n)$
4. FFD/BFD, 先按长度从大到小排序再按 FF/BF 处理 $O(n\log n)$
FFD 需要全部物品到了才能排序，不能用于在线装箱

2.5 作业调度问题

t 是处理需要花费的时间，w 是单位时间的损失，C 是逗留时间，$C_{\max}$ 是时间表长/全体完工时间，d 是限定的工期，L 是延误时间
1. 单机调度
$1\|\sum w_jC_j$，总消耗最小最佳调度，t/w 按照升序排列就是最佳调度。如果只考虑逗留时间，不考虑消耗，则视 w=1
$1\|L_{\max}$，最大的延误时间最小，EDD 最早工期优先，按 d 升序。
$1\|\sum U$，延误的任务最少，按照 EDD 先排序，将延误任务和前面的全部任务中 t 最大的任务放最后。
2. 平行机调度 PMS-m 个机器并行
$Pm\|C_{\max}$，最早完工时间，是 NP-hard 的，只有近似算法
LS 算法, 将每一个 J 分给最早空闲的机器。适合在线调度
LPT 算法, 按照加工时间 t 从大到小排列, 再用 LS(因而无法在线)
3. 车间作业调度, 多类型机
$Fm\|C_{\max}$,m 个机器流水线作业/每个作业有 m 道工序, 共 n 个作业
$F2\|C_{\max}$,Johnson/SPT-LPT 算法, 先将全部作业按照工序 1 花费时间是否比 2 少来分成两个集合, 少的在 J1 中, 按照工序 1 不减排列,J2 集合中按照工序 2 不增排列。见 eg.12

2.6 最大流问题

s 源点,t 汇点,c 容量,f 流量, 截集: 两个不相容的点集之间的弧
增广路径: 从 s 到 t 的无向弧集 (前向和后向)，并且都不饱和
Theorem: 最大流的流值和最小截的容量相同
Theorem: f 是最大流 $\iff$ D 中没有 f 的增广路径