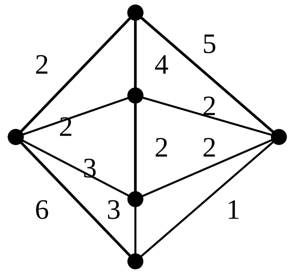
图论作业 2

一、填空题

1. 图 G 的顶点数为 n 且 7 连通，则其边数至少为________。
2. 彼得森图的点连通度和边连通度分别为_______和________。
3. 非平凡树的点连通度和边连通度分别为_______和_______。
4. 长度为 n ($n\geq3$)的圈的 2 宽直径为________。
5. 完全图 K_n ($n\geq5$)的 3 宽直径为__________。
6. 设图 G 是具有 k 个奇度顶点，则在 G 中最少添加_______条边才能使 G 具有欧拉回路。
7. 完全偶图 $K_{m,n}$ ($m, n\geq2$ 且均为偶数)，则在其最优欧拉环游中共含________条边。
8. 下图的最优欧拉环游的权值为________。



9. 具有 5 个点的度极大非哈密尔顿图族为______和_______。

二、不定项选择题

1. 下列说法正确的是(　　　)

(A) 有割边的图一定有割点；

(B) 有割点的图一定有割边；

(C) 割点至少属于图的两个块；

(D) 割边不在图的任一圈中；

(E) 图的割点也是子图的割点。

2. 设 $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$分别表示图 G 的点连通度、边连通度和最小度。下面说法错误的是(　　)

(A) 存在图 G，使得 $\kappa(G)=\lambda(G)=\delta(G)$；

(B) 存在图 G，使得 $\kappa(G)<\lambda(G)<\delta(G)$；

(C) 设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G)\geq n/2$，则 G 连通且 $\lambda(G)=\delta(G)$；

(D) 图 G 是 k 连通的，则 $\kappa(G)=k$；

(E) 若图 G 是 k 连通的，则 $\lambda(G)\geq k$。

3. 下面说法正确的是(　　　)

(A) 没有割点的非平凡连通图一定是 2 连通图；

(B) 2 连通图一定没有割边；

(C) 完全图一定没有割边；

(D) 完全图一定没有割点；

(E) 非平凡树一定有割边；

(F) 非平凡树一定有割点。

4. 下面说法正确的是(　　　)

(A) 若图 G 是 k 连通的，则 G 中必存在 k 点割；
(B) 若图 G 是 k 连通的，则 G 也是 k 边连通的；
(C) 若图 G 是 k 边连通的，则 G 也是 k 连通的；
(D) 存在最小度为 3 的 4 连通图；
(E) 存在具有 n 个点、m 条边的$[2m/n+1]$连通图。

5. 设图 G 是一个块，下列说法错误的是(　　)
(A) 图中一定有圈；
(B) 图中一定无环；
(C) 图中一定无割边；
(D) 图中一定无割点；
(E) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中任意两点必位于某一圈上；
(F) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中任意两条边必位于某一圈上；
(G) 若 G 的阶数大于等于 3，则 G 中没有割边。

6. 下面说法错误的是(　　)
(A) 顶点度数为偶数的图一定是欧拉图；
(B) 欧拉图一定没有割点；
(C) 欧拉图一定没有割边；
(D) 非平凡欧拉图中一定有圈；
(E) 至少具有 2 个点的无环欧拉图一定是 2 边连通的。

7. 关于哈密尔顿图，下列命题错误的是(　　)
(A) 若 G 是哈密尔顿图，则对于 V 的每个非空顶点真子集 S，均有$\omega(G-S)\le|S|$；
(B) 设 G 是阶数为 n $(n\ge3)$的简单图，若其最小度 $\delta\ge n/2$，则 G 是哈密尔顿图；
(C) 设 G 是 n $(n\ge3)$阶简单图，若 G 中任意两个不邻接点 u 与 v，满足 $d(u)+d(v)\ge n$，则 G 是哈密尔顿图；
(D) 哈密尔顿图一定没有割边；
(E) 哈密尔顿图一定没有割点。

8. 关于哈密尔顿图，下列命题正确的是(　　)
(A) 设 n $(n\ge3)$阶简单图的最小度满足 $\delta\ge n/2$，则其闭包一定为完全图；
(B) 设 n $(n\ge3)$阶简单图的任意两个不邻接顶点 u 与 v 满足 $d(u)+d(v)\ge n$，则其闭包一定为完全图；
(C) 设 n $(n\ge3)$阶简单图 G 满足度序列判定定理的条件，则其闭包一定为完全图；
(D) 若 n $(n\ge3)$阶简单图 G 的闭包不是完全图，则它一定是非哈密尔顿图；
(E) 若 n $(n\ge3)$阶简单图 G 的闭包是完全图，则图 G 是哈密尔顿图。

9. 关于哈密尔顿图，下列命题错误的是(　　)
(A) 设 G 是阶数为 n $(n\ge3)$的非哈密尔顿简单图，则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$图；
(B) 图 G 是哈密尔顿图当且仅当其闭包是完全图；
(C) 若(n, m)简单图 G 的边数

$$m>\binom{n-1}{2}+1,$$

且 $n\ge3$，则 G 是哈密尔顿图；
(D) 若图 G 的闭包是哈密尔顿图，则其闭包一定是完全图；
(E) 设 G 是阶数为 n $(n\ge3)$的哈密尔顿简单图，若 n 为奇数，则 G 一定不是偶图。

三、解答题

1. 证明：设简单图 G 是 k 边连通的，E'是 G 的某 k 条边构成的集合，则

$$\omega(G-E')\leq 2。$$

2. 证明：若 n 阶简单图 G 满足 $\delta(G)\geq n-2$，则 $\kappa(\mathrm{G})=\delta(\mathrm{G})$。

3. 在 8×8 黑白方格相间的棋盘上跳动一只马，这只马能否连续地完成每一种可能的跳动恰好一次？（一只马跳动一次是指从一个长为 3、宽为 2 的黑白方格组成的长方形的一个角跳到对角上；在同一个长方形的两个对角之间的相互跳动认为是同一跳动）

4. 证明：若 n 阶简单图 G 满足 $\delta(G)\geq(n-1)/2$，则 G 包含哈密尔顿路。

5. 亚瑟王在王宫中召见他的 $2n$ 位骑士，其中某些骑士之间互有怨仇。已知每个骑士的仇人不超过 $n-1$ 个，证明亚瑟王的谋士摩林能够让这些骑士围着圆桌坐下，使得每一个骑士不与他的仇人相邻。