Repaso álgebra lineal

A. M. Alvarez-Meza, Ph.D.
amalvarezme@unal.edu.co

Departamento de ingeniería eléctrica, electrónica y computación
Universidad Nacional de Colombia-sede Manizales

Conceptos básicos

- Matriz $\Rightarrow$ arreglo rectangular de datos (dimensión $m \times n$)
- Una matriz $\mathbf{A}$ tiene elementos A_{ij}, donde i indexa las filas y j indexa las columnas
- Vector $\Rightarrow$ caso especial de matriz (dimensión $n \times 1$)
- De forma general, usaremos letras mayúsculas para referirnos a matrices y letras minúsculas para referirnos a vectores
- Se debe tener en cuenta el indexado (p.ej.: Matlab y R indexan desde la posición 1, C (y variantes) y Python indexan desde la posición 0)

Operaciones básicas de matrices I

- Suma de matrices ($\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ matrices de iguales dimensiones)
- Multiplicación de matrices por escalares ($\boldsymbol{A}b = b\boldsymbol{A}$ cumple la propiedad conmutativa)
- Multiplicación de matrices por vectores ($\boldsymbol{Ab} \neq \boldsymbol{bA}$ no cumple la propiedad conmutativa)
- Multiplicación entre matrices ($\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ no cumple la propiedad conmutativa, $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ sí cumple la propiedad asociativa)
- $\mathbf{I}_N$ denota la matriz identidad de dimensión $N \times N$. Si no hay ambigüedad, se usa $\mathbf{I}$

Operaciones básicas de matrices II

- La matriz traspuesta $\mathbf{A}^\top$ tiene elementos $(\mathbf{A}^\top)_{ij} = A_{ji}$
- Se cumple que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$$

Operaciones básicas de matrices III

- La matriz inversa de $\mathbf{A}$, denotada como $\mathbf{A}^{-1}$, satisface $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$
- De lo anterior se puede demostrar que

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- También se tiene

$$(\mathbf{A}^{\top})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\top}$$

Dependencia lineal

- Un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de los vectores puede ser escrito como combinación lineal de los restantes.
- Dado un conjunto de vectores $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ se dice que estos vectores son linealmente independientes si existen números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ donde la ecuación

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0$$

se satisface sólo cuando $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sean todos cero

Ejercicios Laboratorio

En un cuaderno (notebook) de jupyter responda a las siguientes preguntas con ejemplos concretos de implementación sobre Python 3. Envie su notebook al correo `amalvarezme@unal.edu.co`.

- Consultar en qué consiste la descomposición en valores singulares.
- Consultar en qué consiste la descomposición en valores propios.
- Qué es el número de condición de una matrix y cómo se estima?
- Qué es el rango de una matrix?

Referencias I

Minka, Thomas P. (2000).
Old and New Matrix Algebra Useful for Statistics.
http://research.microsoft.com/en-us/um/people/minka/papers/matrix/minka-matrix.pdf

Petersen, Karen B. (2007).
The Matrix Cookbook.
https://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/matrixcookbook.pdf

Brookes, Mike (2011).
The Matrix Reference Manual.
http://www.ee.imperial.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/intro.html