

# Kratka predstavitev problema iskanja najdaljše plantaže

Ema Kozin in Filip Škrlj

december 2020

# 1 Opis problema

Tema najinega projekta je problem iskanja grafa na množici  $n$  točk  $P$  z najdaljšo dolžino, za katerega mora veljati, da je drevo in da se njegove povezave ne križajo med seboj. Temu grafu pravimo najdaljše *drevo v ravnini*, zaenkrat še ni znano, ali je naš problem rešljiv v polinomskem času. Osredotočili se bomo na računanje najdaljše *dvozzvezde*, tj. drevo, ki ima dve točki  $a$  in  $b$ , taki, da v drevesu obstaja povezava  $ab$  in je vsaka druga točka povezana z  $a$  ali z  $b$ . Če se torej omejimo le na dvozzvezdne grafe, postane problem rešljiv v polinomskem času z uporabo dinamičnega programiranja.

# 2 Reševanje problema

Uporabila bova naslednji algoritem za iskanje najdaljše dvozzvezde s korenoma  $a$  in  $b$ :

Brez škode za splošno lahko predpostavimo, da  $a$  in  $b$  ležita na vodoravni črti, kjer je  $a$  levo od  $b$ . Poleg tega lahko še predpostavimo, da vse druge točke ležijo nad to črto. Da lahko to rešimo preko dinamičnega programiranja, si pogledjmo naslednji podproblem, indeksiran z parom različnih točk  $p$  in  $q$ , kjer se povezavi  $ap$  in  $bq$  ne sekata. Vidimo, da povezave  $ap$ ,  $pq$ ,  $qb$  in  $ba$  tvorijo štirikotnik. Z  $Q(p, q)$  označimo predel tega štirikotnika pod vzporednico stranice  $ab$ , ki gre skozi  $y = \min(y(p), y(q))$ . Naj bo  $Z(p, q)$  dolžina najdaljše dvozzvezde s korenoma  $a$  in  $b$  na točkah znotraj  $Q(p, q)$ , brez upoštevanja dolžine  $ab$ . Če vsebuje vsaj štirikotnik  $Q(p, q)$  kakšno točko množice  $P$ , poiščemo najvišje ležečo točko in jo označimo s  $k_{p,q}$ , ki jo povežemo bodisi z  $a$  bodisi z  $b$ . Tako dobimo trikotnik  $L$  ali  $R$  ( $L$  dobimo, če  $k_{p,q}$  povežemo z  $a$ ,  $R$  pa, če povežemo z  $b$ ) ter tako v nadaljevanju postavimo  $k_{p,q}$  na mesto  $p$ -ja ali pa na mesto  $q$ -ja, odvisno od tega, kateri trikotnik opazujemo. Formalno dobimo naslednje:

$$Z(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{če v } Q(p, q) \text{ ni nobene točke iz } P; \\ \max \left\{ \begin{array}{l} Z(k_{p,q}, q) + \|ak_{p,q}\| + \sum_{l \in L_{p,q}} \|al\| \\ Z(p, k_{p,q}) + \|bk_{p,q}\| + \sum_{r \in R_{p,q}} \|br\| \end{array} \right\} & \text{sicer} \end{cases}$$

Če zgornje uporabimo za vsak primeren par  $(p, q)$ , najdemo najdaljšo dvozzvezdo s korenoma  $a$  in  $b$ . Uporabljeni algoritem se da izvesti v času  $O(n^2)$ .

### 3 Načrt nadaljnega dela

Kot programsko okolje sva si izbrala Python, ki se zaradi knjižnice Jupyter zdi primeren za generiranje in računanje večjih primerov. Najprej bova zgenerirala točke na specifičnih odsekih ravnine po vrsti:

- a) kvadrat
- b) kolobar
- c) zelo tanek pravokotnik

Na generiranih točkah bova nato z prej omenjenim algoritmom izračunala najdaljši dvozvezdni in zvezdni graf. Primerjala bova, kako blizu po dolžini sta si enozvezdna in dvozvezdna rešitev ter kolikšna je časovna diskrepanca med pristopoma.

Primere izračunanih grafov ter rezultate analize bova vizualizirala s knjižnico Matplotlib.