

Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo Troncana, dalle note della professoressa A. Defranceschi con l'aiuto del collega D. Borra

A.A. 2022/2023

Indice

| | | |
|-----------|--|----------|
| 1 | Introduzione | 2 |
| I | Modulo 1 | 2 |
| 2 | Irrazionalità di $\sqrt{2}$ | 2 |
| 3 | Funzioni in generale | 2 |
| 3.1 | Funzione | 2 |
| 3.2 | Immagine di una funzione | 2 |
| 3.3 | Grafico di una funzione | 2 |
| 3.4 | Funzione iniettiva, suriettiva e bijectiva | 3 |
| 4 | Insiemi numerici | 3 |
| 4.1 | Disuguaglianza di Bernoulli | 3 |
| 4.2 | Densità di \mathbb{Q} | 3 |
| 4.3 | Proprietà Archimedeana | 3 |
| 4.4 | Destra e sinistra | 3 |
| 4.5 | Assioma di Dedekind | 3 |
| 4.6 | Completezza di \mathbb{R} | 3 |
| 4.7 | Caratterizzazione di sup e inf | 3 |
| 5 | Radici n-esime in \mathbb{C} | 4 |
| 6 | Proprietà locali di funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | 4 |
| 6.1 | Limite | 4 |
| 6.2 | Unicità del limite | 4 |
| 6.3 | Limitatezza locale | 4 |
| 6.4 | Permanenza del segno | 4 |
| II | Modulo 2 | 4 |

1 Introduzione

Per l'esame orale di Analisi Matematica A è richiesta la conoscenza di tutti gli enunciati e tutte le definizioni visti a lezione, oltre che la capacità di dimostrare i teoremi più importanti.

In questa trattazione sono presenti tutte le definizioni e i teoremi richiesti, e nell'indice sono evidenziati i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione, gli unici di cui essa è allegata per garantire una trattazione più snella e orientata allo studio per l'esame.

Parte I

Modulo 1

2 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Teorema. $\sqrt{2}$ è irrazionale, ovvero $\nexists m, n \in \mathbb{Z} : MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m^2}{n^2} = 2$. Allora $m^2 = 2n^2$, dunque m^2 è pari e automaticamente m è pari.

Sia $m = 2k$, allora $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, dunque anche n è pari.

Ma allora $MCD(m, n) \geq 2$, assurdo, dunque non esistono tali $m, n \in \mathbb{Z}$.

3 Funzioni in generale

3.1 Funzione

DEF (Funzione). Dati due insiemi X, Y , una **funzione** $f : X \rightarrow Y$ è una qualsiasi legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y \in Y$, e scriviamo $y = f(x)$.

X si dice **dominio** di f , Y si dice **codominio** di f .

3.2 Immagine di una funzione

DEF (Immagine). Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, essa induce una **funzione immagine** che indichiamo con lo stesso nome:

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$A \rightarrow \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

3.3 Grafico di una funzione

DEF (Grafico). Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, il **grafico** di f è l'insieme:

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

3.4 Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva

DEF. (Iniettività, suriettività e biiettività) Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, essa si dice:

Iniettiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Suriettiva se $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

Biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

4 Insiemi numerici

4.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Proposizione 4.1 (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora vale:*

$$x^n \geq 1 + n(x - 1)$$

4.2 Densità di \mathbb{Q}

Proposizione 4.2 (Densità di \mathbb{Q}). *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Allora $\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$.*

4.3 Proprietà Archimedeana

Proposizione 4.3 (Proprietà Archimedeana). *Siano $x, y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Allora $\exists n \in \mathbb{N} : y \leq nx$.*

4.4 Destra e sinistra

DEF (Destra e sinistra). Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si dice che A sta **a sinistra** di B se

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$$

Analogamente, diciamo che B sta **a destra** di A .

4.5 Assioma di Dedekind

Assioma 1. (Dedekind) *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti tali che A stia a sinistra di B . Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$$

.

4.6 Completezza di \mathbb{R}

Teorema (Completezza di \mathbb{R}). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Se A è limitato superiormente, allora $\exists \sup A \in \mathbb{R}$. Se A è limitato inferiormente, allora $\exists \inf A \in \mathbb{R}$.*

4.7 Caratterizzazione di sup e inf

Proposizione 4.4 (Caratterizzazione di sup e inf). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti di A .*

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente. Allora $\inf A$ è il più grande dei minoranti di A .

5 Radici n -esime in \mathbb{C}

Teorema. Siano $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Se $w = 0$, l'unica radice di w di qualsiasi ordine è 0.

Altrimenti, w ha esattamente n radici n -esime distinte, ciascuna identificata da un numero naturale $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, e sono date da:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left[\cos\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

Dimostrazione. Se $w = 0 \Rightarrow z^n = 0 \Leftrightarrow |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Altrimenti, supponiamo $w \neq 0$.

Riscriviamo z e w in forma trigonometrica:

$$z^n = w \Leftrightarrow |z|^n [\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)] = |w| [\cos(\arg w) + i \sin(\arg w)]$$

$$\Leftrightarrow |z|^n = |w| \wedge n \arg z = \arg w + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \wedge \arg z = \frac{\arg w + 2k\pi}{n}$$

Prendendo $1 \leq k < n$, abbiamo le n radici distinte.

QED

6 Proprietà locali di funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

6.1 Limite

DEF (Limite). Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A .

Allora $l \in \mathbb{R}$ è il **limite** di f per $x \rightarrow x_0$ se:

$$\forall I_l, \exists I_{x_0} : x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \in I_l$$

6.2 Unicità del limite

Teorema (Unicità del limite). Se f ha limite l per $x \rightarrow x_0$, allora l è unico.

6.3 Limitatezza locale

Teorema (Limitatezza locale). Se f ha limite l per $x \rightarrow x_0$, allora $\exists I_{x_0} : f(I_{x_0})$ è limitato.

6.4 Permanenza del segno

Teorema (Permanenza del segno). **Parte II**

Modulo 2