

# Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo Troncana, dalle note della professoressa A. Defranceschi con l'aiuto del collega D. Borra

A.A. 2022/2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>I</b>	<b>Modulo 1</b>	<b>2</b>
1.1	Irrazionalità di radice di 2 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Funzioni in generale</b>	<b>2</b>
2.1	Funzione . . . . .	2
2.2	Immagine di una funzione . . . . .	2
2.3	Grafico di una funzione . . . . .	2
2.4	Funzione iniettiva, suriettiva e bijectiva . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Insiemi numerici</b>	<b>3</b>
3.1	Disuguaglianza di Bernoulli . . . . .	3
3.2	Densità di $\mathbb{Q}$ . . . . .	3
3.3	Proprietà Archimedeana . . . . .	3
3.4	Destra e sinistra . . . . .	3
3.5	Assioma di Dedekind . . . . .	3
3.6	Completezza di $\mathbb{R}$ . . . . .	3
3.7	Caratterizzazione di sup e inf . . . . .	3
3.8	<b>Radici ennesime dei complessi</b> . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Proprietà locali di funzioni <math>\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math></b>	<b>4</b>
4.1	Limite . . . . .	4
4.2	Unicità del limite . . . . .	4
4.3	Limitatezza locale . . . . .	4
4.4	Permanenza del segno . . . . .	4
4.5	Teorema del confronto . . . . .	4
4.6	Limite di funzioni composte . . . . .	5
4.7	<b>Esistenza del limite per funzioni monotone</b> . . . . .	5
4.8	Continuità . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Teoremi fondamentali sui limiti</b>	<b>6</b>
5.1	. . . . .	6

## 1 Introduzione

Per l'esame orale di Analisi Matematica A è richiesta la conoscenza di tutti gli enunciati e tutte le definizioni visti a lezione, oltre che la capacità di dimostrare i teoremi più importanti.

In questa trattazione sono presenti tutte le definizioni e i teoremi richiesti, e nell'indice sono evidenziati i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione, gli unici di cui essa è allegata per garantire una trattazione più snella e orientata allo studio per l'esame.

## Parte I

# Modulo 1

### 1.1 Irrazionalità di radice di 2

**Teorema.**  $\sqrt{2}$  è irrazionale, ovvero  $\nexists m, n \in \mathbb{Z} : MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$ . Allora  $m^2 = 2n^2$ , dunque  $m^2$  è pari e automaticamente  $m$  è pari.

Sia  $m = 2k$ , allora  $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$ , dunque anche  $n$  è pari.

Ma allora  $MCD(m, n) \geq 2$ , assurdo, dunque non esistono tali  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

## 2 Funzioni in generale

### 2.1 Funzione

**DEF** (Funzione). Dati due insiemi  $X, Y$ , una **funzione**  $f : X \rightarrow Y$  è una qualsiasi legge che ad ogni elemento  $x \in X$  associa un unico elemento  $y \in Y$ , e scriviamo  $y = f(x)$ .

$X$  si dice **dominio** di  $f$ ,  $Y$  si dice **codominio** di  $f$ .

### 2.2 Immagine di una funzione

**DEF** (Immagine). Dati due insiemi  $X, Y$  e una funzione  $f : X \rightarrow Y$ , essa induce una **funzione immagine** che indichiamo con lo stesso nome:

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$A \mapsto \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

### 2.3 Grafico di una funzione

**DEF** (Grafico). Dati due insiemi  $X, Y$  e una funzione  $f : X \rightarrow Y$ , il **grafico** di  $f$  è l'insieme:

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

## 2.4 Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva

**DEF.** (Iniettività, suriettività e biiettività) Dati due insiemi  $X, Y$  e una funzione  $f : X \rightarrow Y$ , essa si dice:

**Iniettiva** se  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

**Suriettiva** se  $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

**Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

## 3 Insiemi numerici

### 3.1 Disuguaglianza di Bernoulli

**Proposizione 3.1** (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $x \geq -1$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Allora vale:*

$$x^n \geq 1 + n(x - 1)$$

### 3.2 Densità di $\mathbb{Q}$

**Proposizione 3.2** (Densità di  $\mathbb{Q}$ ). *Siano  $x, y \in \mathbb{R}$  tali che  $x < y$ . Allora  $\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$ .*

### 3.3 Proprietà Archimedeana

**Proposizione 3.3** (Proprietà Archimedeana). *Siano  $x, y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ . Allora  $\exists n \in \mathbb{N} : y \leq nx$ .*

### 3.4 Destra e sinistra

**DEF** (Destra e sinistra). Dati  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  si dice che  $A$  sta **a sinistra** di  $B$  se

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$$

Analogamente, diciamo che  $B$  sta **a destra** di  $A$ .

### 3.5 Assioma di Dedekind

**Assioma 1.** (Dedekind) *Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  non vuoti tali che  $A$  stia a sinistra di  $B$ . Allora esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che:*

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$$

.

### 3.6 Completezza di $\mathbb{R}$

**Teorema** (Completezza di  $\mathbb{R}$ ). *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto. Se  $A$  è limitato superiormente, allora  $\exists \sup A \in \mathbb{R}$ . Se  $A$  è limitato inferiormente, allora  $\exists \inf A \in \mathbb{R}$ .*

### 3.7 Caratterizzazione di sup e inf

**Proposizione 3.4** (Caratterizzazione di sup e inf). *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e limitato superiormente. Allora  $\sup A$  è il più piccolo dei maggioranti di  $A$ .*

*Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e limitato inferiormente. Allora  $\inf A$  è il più grande dei minoranti di  $A$ .*

### 3.8 Radici ennesime dei complessi

**Teorema.** Siano  $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ .

Se  $w = 0$ , l'unica radice di  $w$  di qualsiasi ordine è 0.

Altrimenti,  $w$  ha esattamente  $n$  radici  $n$ -esime distinte, ciascuna identificata da un numero naturale  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , e sono date da:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left[ \cos\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

*Dimostrazione.* Se  $w = 0 \Rightarrow z^n = 0 \Leftrightarrow |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .

Altrimenti, supponiamo  $w \neq 0$ .

Riscriviamo  $z$  e  $w$  in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} z^n = w &\Leftrightarrow |z|^n [\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)] = |w| [\cos(\arg w) + i \sin(\arg w)] \\ &\Leftrightarrow |z|^n = |w| \wedge n \arg z = \arg w + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \wedge \arg z = \frac{\arg w + 2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Prendendo  $1 \leq k < n$ , abbiamo le  $n$  radici distinte.

QED

## 4 Proprietà locali di funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### 4.1 Limite

**DEF** (Limite). Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punto di accumulazione per  $A$ .

Allora  $l \in \mathbb{R}$  è il **limite** di  $f$  per  $x \rightarrow x_0$  se:

$$\forall I_l, \exists I_{x_0} : x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \in I_l$$

### 4.2 Unicità del limite

**Teorema** (Unicità del limite). Se  $f$  ha limite  $l$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora  $l$  è unico.

### 4.3 Limitatezza locale

**Teorema** (Limitatezza locale). Se  $f$  ha limite  $l$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora  $\exists I_{x_0} : f(I_{x_0})$  è limitato.

### 4.4 Permanenza del segno

**Teorema** (Permanenza del segno). Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , allora esiste un intorno di  $x_0$  in cui  $f$  ha lo stesso segno di  $l$ .

### 4.5 Teorema del confronto

**Teorema** (Teorema del confronto). Siano  $f, g, h : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $\forall x \in I(x_0), f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  un punto di accumulazione per  $X$ . Allora si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

## 4.6 Limite di funzioni composte

**Teorema** (Limite di funzioni composte). Siano  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(X) \subseteq Y$ . Sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $X$ . Allora se esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$$

e  $f(x) \neq y_0$  in un intorno di  $x_0$  (ipotesi non necessaria se  $y_0 \in Y$  e  $g(y_0) = l$ ), allora si ha  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l$ .

## 4.7 Esistenza del limite per funzioni monotone

**Teorema.** Sia  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monotona e  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Se  $f$  è crescente in  $X$  e  $x_0$  è un punto di accumulazione sinistro per  $X$ , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{< x_0}} f$$

Se  $f$  è crescente in  $X$  e  $x_0$  è un punto di accumulazione destro per  $X$ , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{> x_0}} f$$

Analogamente per  $f$  decrescente.

*Dimostrazione.* Basta dimostrare la prima proposizione, il resto è analogo.

Sia  $l = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{< x_0}} f$ , che esiste per completezza di  $\mathbb{R}$ .

Supponiamo  $l \in \mathbb{R}$ . Per definizione di sup si ha :

$$\forall x \in X \cap \mathbb{R}_{< x_0}, f(x) \leq l$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X \cap \mathbb{R}_{< x_0} : l - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$$

Allora fissato  $\varepsilon > 0$  qualsiasi,  $\forall x \in ]x_\varepsilon, x_0[ \cap X, l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq l \leq l + \varepsilon$ .

Abbiamo quindi che  $\forall x \in ]x_\varepsilon, x_0[ \cap X, |f(x) - l| < \varepsilon$ , ovvero la tesi.

Supponiamo ora  $l = +\infty$ . In tal caso  $f$  non è limitata superiormente su  $X$  e in quanto monotona crescente il suo limite è  $+\infty = l$ . QED

## 4.8 Continuità

**DEF** (Continuità). Sia  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in X$ . Allora:

Se  $x_0$  è un punto isolato,  $f$  è continua in  $x_0$ ;

Se  $x_0$  è un punto di accumulazione,  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**Teorema** (Ponte). Siano  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}^*$  con  $x_0$  punto di accumulazione per  $X$ . Allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  se e solo se per ogni successione  $(x_n)_n \subset X$  convergente a  $x_0$  si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$ .

## 5 Teoremi fondamentali sui limiti

### 5.1

## Parte II

## Modulo 2