Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo Troncana, dalle note della professoressa A. Defranceschi con l'aiuto del collega D. Borra

A.A. 2022/2023

Indice

1 Introduzione **2**

I Modulo 1 **2**

1.1 **Irrazionalità di radice di 2** 2

2 Funzioni in generale **2**

2.1 Funzione 2
2.2 Immagine di una funzione 2
2.3 Grafico di una funzione 2
2.4 Funzione iniettiva, suriettiva e bijettiva 3

3 Insiemi numerici **3**

3.1 Disuguaglianza di Bernoulli 3
3.2 Densità di $\mathbb{Q}$ 3
3.3 Proprietà Archimedea 3
3.4 Destra e sinistra 3
3.5 Assioma di Dedekind 3
3.6 Completezza di $\mathbb{R}$ 3
3.7 Caratterizzazione di sup e inf 3
3.8 **Radici ennesime dei complessi** 4

4 Proprietà locali di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **4**

4.1 Limite 4
4.2 Unicità del limite 4
4.3 Limitatezza locale 4
4.4 Permanenza del segno 4
4.5 Teorema del confronto 4
4.6 Limite di funzioni composte 5
4.7 **Esistenza del limite per funzioni monotone** 5
4.8 Continuità 5

5 Teoremi fondamentali sui limiti **6**

5.1 **Teorema di esistenza degli zeri** 6
5.2 **Teorema dei valori intermedi** 6

II Modulo 2 **6**

1 Introduzione

Per l'esame orale di Analisi Matematica A è richiesta la conoscenza di tutti gli enunciati e tutte le definizioni visti a lezione, oltre che la capacità di dimostrare i teoremi più importanti.
In questa trattazione sono presenti tutte le definizioni e i teoremi richiesti, e nell'indice sono evidenziati i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione, gli unici di cui essa è allegata per garantire una trattazione più snella e orientata allo studio per l'esame.

Parte I
Modulo 1

1.1 Irrazionalità di radice di 2

Teorema. $\sqrt{2}$ *è irrazionale, ovvero* $\nexists m, n \in \mathbb{Z} : MCD(m,n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(m,n) = 1 \wedge \frac{m^2}{n^2} = 2$. Allora $m^2 = 2n^2$, dunque m^2 è pari e automaticamente m è pari.
Sia $m = 2k$, allora $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, dunque anche n è pari.
Ma allora $MCD(m,n) \geq 2$, assurdo, dunque non esistono tali $m, n \in \mathbb{Z}$.

2 Funzioni in generale

2.1 Funzione

DEF (Funzione)**.** Dati due insiemi X, Y, una **funzione** $f : X \to Y$ è una qualsiasi legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y \in Y$, e scriviamo $y = f(x)$.
X si dice **dominio** di f, Y si dice **codominio** di f.

2.2 Immagine di una funzione

DEF (Immagine)**.** Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \to Y$, essa induce una **funzione immagine** che indichiamo con lo stesso nome:

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$A \to \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

2.3 Grafico di una funzione

DEF (Grafico)**.** Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \to Y$, il **grafico** di f è l'insieme:

$$G_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

2.4 Funzione iniettiva, suriettiva e bijettiva

DEF. (Iniettività, suriettività e bijettività) Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \to Y$, essa si dice:
Iniettiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Suriettiva se $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$
Bijettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

3 Insiemi numerici

3.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Proposizione 3.1 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** *Sia* $x \in \mathbb{R}$ *tale che* $x \geq -1$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Allora vale:*

$$x^n \geq 1 + n(x - 1)$$

3.2 Densità di $\mathbb{Q}$

Proposizione 3.2 (Densità di $\mathbb{Q}$)**.** *Siano* $x, y \in \mathbb{R}$ *tali che* $x < y$. *Allora* $\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$.

3.3 Proprietà Archimedea

Proposizione 3.3 (Proprietà Archimedea)**.** *Siano* $x, y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. *Allora* $\exists n \in \mathbb{N} : y \leq nx$.

3.4 Destra e sinistra

DEF (Destra e sinistra)**.** Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si dice che A sta **a sinistra** di B se

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$$

Analogamente, diciamo che B sta **a destra** di A.

3.5 Assioma di Dedekind

Assioma 1. *(Dedekind) Siano* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoi tali che* A *stia a sinistra di* B. *Allora esiste* $c \in \mathbb{R}$ *tale che:*

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$$

.

3.6 Completezza di $\mathbb{R}$

Teorema (Completezza di $\mathbb{R}$)**.** *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto. Se* A *è limitato superiormente, allora* $\exists \sup A \in \mathbb{R}$. *Se* A *è limitato inferiormente, allora* $\exists \inf A \in \mathbb{R}$.

3.7 Caratterizzazione di sup e inf

Proposizione 3.4 (Caratterizzazione di sup e inf)**.** *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto e limitato superiormente. Allora* $\sup A$ *è il più piccolo dei maggioranti di* A.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto e limitato inferiormente. Allora* $\inf A$ *è il più grande dei minoranti di* A.

3.8 Radici ennesime dei complessi

Teorema. *Siano $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.*
Se $w = 0$, l'unica radice di w di qualsiasi ordine è 0.
Altrimenti, w ha esattamente n radici n-esime distinte, ciascuna identificata da un numero naturale $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, e sono date da:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}[cos(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}) + isin(\frac{\arg w + 2k\pi}{n})]$$

Dimostrazione. Se $w = 0 \Rightarrow z^n = 0 \Leftrightarrow |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
Altrimenti, supponiamo $w \neq 0$.
Riscriviamo z e w in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} z^n = w &\Leftrightarrow |z|^n[cos(n \arg z) + isin(n \arg z)] = |w|[cos(\arg w) + isin(\arg w)] \\ &\Leftrightarrow |z|^n = |w| \wedge n \arg z = \arg w + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \wedge \arg z = \frac{\arg w + 2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Prendendo $1 \leq k < n$, abbiamo le n radici distinte. QED

4 Proprietà locali di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

4.1 Limite

DEF (Limite)**.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A.
Allora $l \in \mathbb{R}$ è il **limite** di f per $x \to x_0$ se:

$$\forall I_l, \exists I_{x_0} : x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \in I_l$$

4.2 Unicità del limite

Teorema (Unicità del limite)**.** *Se f ha limite l per $x \to x_0$, allora l è unico.*

4.3 Limitatezza locale

Teorema (Limitatezza locale)**.** *Se f ha limite l per $x \to x_0$, allora $\exists I_{x_0} : f(I_{x_0})$ è limitato.*

4.4 Permanenza del segno

Teorema (Permanenza del segno)**.** *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora esiste un intorno di x_0 in cui f ha lo stesso segno di l.*

4.5 Teorema del confronto

Teorema (Teorema del confronto)**.** *Siano $f, g, h : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\forall x \in I(x_0), f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X. Allora si ha che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

4.6 Limite di funzioni composte

Teorema (Limite di funzioni composte)**.** *Siano* $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $f(X) \subseteq Y$. *Sia* x_0 *un punto di accumulazione per* X. *Allora se esistono i limiti*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \lim_{y \to y_0} g(y) = l$$

e $f(x) \neq y_0$ *in un intorno di* x_0 *(ipotesi non necessaria se* $y_0 \in Y$ *e* $g(y_0) = l$*), allora si ha* $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.

4.7 Esistenza del limite per funzioni monotone

Teorema. *Sia* $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monotona e* $x_0 \in \mathbb{R}$.
Se f *è crescente in* X *e* x_0 *è un punto di accumulazione sinistro per* X*, allora*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{<x_0}} f$$

Se f *è crescente in* X *e* x_0 *è un punto di accumulazione destro per* X*, allora*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{>x_0}} f$$

Analogamente per f *decrescente.*

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima proposizione, il resto è analogo.
Sia $l = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{<x_0}} f$, che esiste per completezza di $\mathbb{R}$.
Supponiamo $l \in \mathbb{R}$. Per definizione di sup si ha :

$$\forall x \in X \cap \mathbb{R}_{<x_0}, f(x) \leq l$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X \cap \mathbb{R}_{<x_0} : l - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$$

Allora fissato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, $\forall x \in]x_\varepsilon, x_0[\cap X, l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq l \leq l + \varepsilon$.
Abbiamo quindi che $\forall x \in]x_\varepsilon, x_0[\cap X, |f(x) - l| < \varepsilon$, ovvero la tesi.
Supponiamo ora $l = +\infty$. In tal caso f non è limitata superiormente su X e in quanto monotona crescente il suo limite è $+\infty = l$. QED

4.8 Continuità

DEF (Continuità)**.** Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in X$. Allora:
Se x_0 è un punto isolato, f è continua in x_0;
Se x_0 è un punto di accumulazione, f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema (Ponte)**.** *Siano* $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}^*$ *con* x_0 *punto di accumulazione per* X. *Allora* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *se e solo se per ogni successione* $(x_n)_n \subset X$ *convergente a* x_0 *si ha* $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

5 Teoremi fondamentali sui limiti

5.1 Teorema di esistenza degli zeri

Teorema. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora $\exists c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$. Se f è strettamente monotona, c è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo $f(a) < 0, f(b) > 0$ senza perdita di generalità e procediamo iterativamente:
Chiamiamo $a_0 := a, b_0 := b, c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$, ovvero il punto medio.
Se $f(c_0) = 0$ abbiamo finito.
Se $f(c_0) < 0$, allora $a_1 := c_0, b_1 = b_0$
Se $f(c_0) > 0$, allora $a_1 := a_0, b_1 = c_0$.
Dunque le ipotesi del teorema sono soddisfatte in entrambi i casi.
Per il passo numero i definiamo $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$. Come sopra:
Se $f(c_i) = 0$ abbiamo finito.
Se $f(c_i) < 0$, allora $a_{i+1} := c_i, b_{i+1} = b_i$
Se $f(c_i) > 0$, allora $a_{i+1} := a_i, b_{i+1} = c_i$
Abbiamo dunque le ipotesi del teorema su $[a_i, b_i]$ con $b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i}$.
Al limite avremo tre successioni: $(a_n)_n$ monotona crescente, $(b_n)_n$ monotona decrescente e $(c_n)_n$ tali che $\forall i, a_i \leq c_i \leq b_i$. Dato che $b_i - a_i$ tende a 0, le successioni hanno lo stesso limite, che chiamiamo c. Dimostriamo $f(c) = 0$:
Abbiamo $0 \leq f(b_\infty) = f(a_\infty) \leq 0$, dunque è evidente che $f(c) = 0$. QED

5.2 Teorema dei valori intermedi

Teorema. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualsiasi e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I. Allora f assume in I tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.*

Dimostrazione. Se $\inf_I f = \sup_I f$ la funzione è costante e la tesi è ovvia.
Altrimenti, sia $y \in \mathbb{R}$ tale che $\inf_I f < y < \sup_I f$. Per definizione di estremi inferiori e superiori, abbiamo che esistono $\exists a, b \in I : f(a) < y < f(b)$.
Definiamo $h : I \to \mathbb{R}$ come $h(x) = f(x) - y$. Per il teorema di esistenza degli zeri, h deve avere uno zero in $]a, b[$, e in particolare $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$, dunque f assume il valore di y da qualche parte in I. Per l'arbitrarietà nella scelta di y, abbiamo la tesi. QED

Parte II
Modulo 2