Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo Troncana, dalle note della professoressa A. Defranceschi con l'aiuto del collega D. Borra

A.A. 2022/2023

Indice

Parte I
Modulo 1

1 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Teorema. $\sqrt{2}$ *è irrazionale, ovvero* $\nexists m, n \in \mathbb{Z} : MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m^2}{n^2} = 2$. Allora $m^2 = 2n^2$, dunque m^2 è pari e automaticamente m è pari.
Sia $m = 2k$, allora $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, dunque anche n è pari.
Ma allora $MCD(m, n) \geq 2$, assurdo, dunque non esistono tali $m, n \in \mathbb{Z}$.

2 Funzioni in generale

DEF. Dati due insiemi X, Y, una **funzione** $f : X \to Y$ è una qualsiasi legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y \in Y$, e scriviamo $y = f(x)$.
X si dice **dominio** di f, Y si dice **codominio** di f.

DEF. Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \to Y$, essa induce una **funzione immagine** che indichiamo con lo stesso nome:

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$$

$$A \to \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

Parte II
Modulo 2