

# Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo Troncana, dalle note della professoressa A. Defranceschi con l'aiuto del collega D. Borra

A.A. 2022/2023

## Indice

I	Modulo 1	1
1	Irrazionalità di $\sqrt{2}$	1
2	Funzioni in generale	1
II	Modulo 2	2

## Parte I

### Modulo 1

#### 1 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

**Teorema.**  $\sqrt{2}$  è irrazionale, ovvero  $\nexists m, n \in \mathbb{Z} : MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $m, n \in \mathbb{Z}$  tali che  $MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m^2}{n^2} = 2$ . Allora  $m^2 = 2n^2$ , dunque  $m^2$  è pari e automaticamente  $m$  è pari.

Sia  $m = 2k$ , allora  $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$ , dunque anche  $n$  è pari.

Ma allora  $MCD(m, n) \geq 2$ , assurdo, dunque non esistono tali  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

#### 2 Funzioni in generale

**DEF.** Dati due insiemi  $X, Y$ , una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è una qualsiasi legge che ad ogni elemento  $x \in X$  associa un unico elemento  $y \in Y$ , e scriviamo  $y = f(x)$ .

**DEF.** Dati due insiemi  $X, Y$  e una funzione  $f : X \rightarrow Y$ , essa induce una **funzione immagine** che indichiamo con lo stesso nome:

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$
$$A \rightarrow \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

Parte II  
Modulo 2