

Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo Troncana, dalle note della professoressa A. Defranceschi con l'aiuto del collega D. Borra

A.A. 2022/2023

Indice

1 Introduzione

Per l'esame orale di Analisi Matematica A è richiesta la conoscenza di tutti gli enunciati e tutte le definizioni visti a lezione, oltre che la capacità di dimostrare i teoremi più importanti.

In questa trattazione sono presenti tutte le definizioni e i teoremi richiesti, e nell'indice sono evidenziati i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione, gli unici di cui essa è allegata per garantire una trattazione più snella e orientata allo studio per l'esame.

Parte I

Modulo 1

1.1 Irrazionalità di radice di 2

Teorema. $\sqrt{2}$ è irrazionale, ovvero $\nexists m; n \in \mathbb{Z} : MCD(m; n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Siano $m; n \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(m; n) = 1 \wedge \frac{m^2}{n^2} = 2$. Allora $m^2 = 2n^2$, dunque m^2 è pari e automaticamente m è pari.

Sia $m = 2k$, allora $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, dunque anche n è pari.

Ma allora $MCD(m; n) \geq 2$, assurdo, dunque non esistono tali $m; n \in \mathbb{Z}$.

2 Funzioni in generale

2.1 Funzione

DEF (Funzione). Dati due insiemi $X; Y$, una **funzione** $f : X \rightarrow Y$ è una qualsiasi legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y \in Y$, e scriviamo $y = f(x)$.

X si dice **dominio** di f , Y si dice **codominio** di f .

2.2 Immagine di una funzione

DEF (Immagine). Dati due insiemi $X; Y$ e una funzione $f : X \rightarrow Y$, essa induce una **funzione immagine** che indichiamo con lo stesso nome:

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$
$$A \mapsto \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

2.3 Grafico di una funzione

DEF (Grafico). Dati due insiemi $X; Y$ e una funzione $f : X \rightarrow Y$, il **grafico** di f è l'insieme:

$$G_f = \{(x; y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

2.4 Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva

DEF. (Iniettività, suriettività e biiettività) Dati due insiemi $X; Y$ e una funzione $f : X \rightarrow Y$, essa si dice:

Iniettiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Suriettiva se $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

Biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

3 Insiemi numerici

3.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Proposizione 3.1 (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora vale:*

$$x^n \geq 1 + n(x - 1)$$

3.2 Densità di \mathbb{Q}

Proposizione 3.2 (Densità di \mathbb{Q}). *Siano $x; y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Allora $\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$.*

3.3 Proprietà Archimedeana

Proposizione 3.3 (Proprietà Archimedeana). *Siano $x; y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Allora $\exists n \in \mathbb{N} : y \leq nx$.*

3.4 Destra e sinistra

DEF (Destra e sinistra). Dati $A; B \subseteq \mathbb{R}$ si dice che A sta **a sinistra** di B se

$$\forall a \in A; \forall b \in B; a \leq b$$

Analogamente, diciamo che B sta **a destra** di A .

3.5 Assioma di Dedekind

Assioma 1. (Dedekind) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti tali che A stia a sinistra di B . Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall a \in A; \forall b \in B; a \leq c \leq b$$

.

3.6 Completezza di \mathbb{R}

Teorema (Completezza di \mathbb{R}). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Se A è limitato superiormente, allora $\exists \sup A \in \mathbb{R}$. Se A è limitato inferiormente, allora $\exists \inf A \in \mathbb{R}$.

3.7 Caratterizzazione di sup e inf

Proposizione 3.4 (Caratterizzazione di sup e inf). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti di A .

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente. Allora $\inf A$ è il più grande dei minoranti di A .

3.8 Radici ennesime dei complessi

Teorema. Siano $w \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Se $w = 0$, l'unica radice di w di qualsiasi ordine è 0.

Altrimenti, w ha esattamente n radici n -esime distinte, ciascuna identificata da un numero naturale $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$, e sono date da:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} [\cos(\frac{\arg w + 2k}{n}) + i \sin(\frac{\arg w + 2k}{n})]$$

Dimostrazione. Se $w = 0 \Rightarrow z^n = 0 \Leftrightarrow |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Altrimenti, supponiamo $w \neq 0$.

Riscriviamo z e w in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} z^n = w &\Leftrightarrow |z|^n [\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)] = |w| [\cos(\arg w) + i \sin(\arg w)] \\ &\Leftrightarrow |z|^n = |w| \wedge n \arg z = \arg w + 2k \\ &\Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \wedge \arg z = \frac{\arg w + 2k}{n} \end{aligned}$$

Prendendo $1 \leq k < n$, abbiamo le n radici distinte.

QED

4 Proprietà locali di funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

4.1 Limite

DEF (Limite). Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A .

Allora $l \in \mathbb{R}$ è il **limite** di f per $x \rightarrow x_0$ se:

$$\forall l; \exists I_{x_0} : x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \in I_l$$

4.2 Unicità del limite

Teorema (Unicità del limite). *Se f ha limite l per $x \rightarrow x_0$, allora l è unico.*

4.3 Limitatezza locale

Teorema (Limitatezza locale). *Se f ha limite l per $x \rightarrow x_0$, allora $\exists l_{x_0} : f(l_{x_0})$ è limitato.*

4.4 Permanenza del segno

Teorema (Permanenza del segno). *Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora esiste un intorno di x_0 in cui f ha lo stesso segno di l .*

4.5 Teorema del confronto

Teorema (Teorema del confronto). *Siano $f, g, h : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\forall x \in I(x_0); f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X . Allora si ha che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

4.6 Limite di funzioni composte

Teorema (Limite di funzioni composte). *Siano $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(X) \subseteq Y$. Sia x_0 un punto di accumulazione per X . Allora se esistono i limiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0; \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$$

e $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0 (ipotesi non necessaria se $y_0 \in Y$ e $g(y_0) = l$), allora si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l$.

4.7 Esistenza del limite per funzioni monotone

Teorema. *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Se f è crescente in X e x_0 è un punto di accumulazione sinistro per X , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{X \cap \mathbb{R} < x_0} f$$

Se f è crescente in X e x_0 è un punto di accumulazione destro per X , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{X \cap \mathbb{R} > x_0} f$$

Analogamente per f decrescente.

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima proposizione, il resto è analogo.

Sia $l = \sup_{X \cap \mathbb{R} < x_0} f$, che esiste per completezza di \mathbb{R} .

Supponiamo $l \in \mathbb{R}$. Per definizione di sup si ha :

$$\forall x \in X \cap \mathbb{R} < x_0; f(x) \leq l$$

$$\forall \epsilon > 0: \exists x_\epsilon \in X \cap \mathbb{R}_{< x_0} : l - \epsilon < f(x_\epsilon)$$

Allora fissato $\epsilon > 0$ qualsiasi, $\forall x \in]x_\epsilon; x_0[\cap X: l - \epsilon < f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq l \leq l + \epsilon$.

Abbiamo quindi che $\forall x \in]x_\epsilon; x_0[\cap X: |f(x) - l| < \epsilon$, ovvero la tesi.

Supponiamo ora $l = +\infty$. In tal caso f non è limitata superiormente su X e in quanto monotona crescente il suo limite è $+\infty = l$. QED

4.8 Continuità

DEF (Continuità). Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x_0 \in X$. Allora:

Se x_0 è un punto isolato, f è continua in x_0 ;

Se x_0 è un punto di accumulazione, f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema (Ponte). Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; l \in \mathbb{R}^*$ con x_0 punto di accumulazione per X . Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ se e solo se per ogni successione $(x_n)_n \subset X$ convergente a x_0 si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$.

5 Teoremi fondamentali sui limiti

5.1 Teorema di esistenza degli zeri

Teorema. Sia $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora $\exists c \in]a; b[$ tale che $f(c) = 0$. Se f è strettamente monotona, c è unico.

Dimostrazione. Supponiamo $f(a) < 0; f(b) > 0$ senza perdita di generalità e procediamo iterativamente:

Chiamiamo $a_0 := a; b_0 := b; c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$, ovvero il punto medio.

Se $f(c_0) = 0$ abbiamo finito.

Se $f(c_0) < 0$, allora $a_1 := c_0; b_1 = b_0$

Se $f(c_0) > 0$, allora $a_1 := a_0; b_1 = c_0$.

Dunque le ipotesi del teorema sono soddisfatte in entrambi i casi.

Per il passo numero i definiamo $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$. Come sopra:

Se $f(c_i) = 0$ abbiamo finito.

Se $f(c_i) < 0$, allora $a_{i+1} := c_i; b_{i+1} = b_i$

Se $f(c_i) > 0$, allora $a_{i+1} := a_i; b_{i+1} = c_i$

Abbiamo dunque le ipotesi del teorema su $[a_i; b_i]$ con $b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i}$.

Al limite avremo tre successioni: $(a_n)_n$ monotona crescente, $(b_n)_n$ monotona decrescente e $(c_n)_n$ tali che $\forall i; a_i \leq c_i \leq b_i$. Dato che $b_i - a_i$ tende a 0, le successioni hanno lo stesso limite, che chiamiamo c . Dimostriamo $f(c) = 0$:

Abbiamo $0 \leq f(b_\infty) = f(a_\infty) \leq 0$, dunque è evidente che $f(c) = 0$. QED

5.2 Teorema dei valori intermedi

Teorema. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualsiasi e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua su I . Allora f assume in I tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.

Dimostrazione. Se $\inf_I f = \sup_I f$ la funzione è costante e la tesi è ovvia.

Altrimenti, sia $y \in \mathbb{R}$ tale che $\inf_I f < y < \sup_I f$. Per definizione di estremi inferiori e superiori, abbiamo che esistono $\exists a, b \in I : f(a) < y < f(b)$.

Definiamo $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ come $h(x) = f(x) - y$. Per il teorema di esistenza degli zeri, h deve avere uno zero in $]a; b[$, e in particolare $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$, dunque f assume il valore di y da qualche parte in I . Per l'arbitrarietà nella scelta di y , abbiamo la tesi. QED

Corollario 1. *Una funzione continua manda un intervallo in un intervallo (caso particolare del fatto che le funzioni continue mandino compatti in compatti).*

6 Calcolo differenziale a una variabile

6.1 Derivata

DEF (Derivata). Sia $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}; x_0 \in]a; b[$. Si dice derivata prima di f in x_0 il limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

. Se questo limite esiste, f si dice derivabile in x_0 .

6.2 Teorema di Fermat

Teorema. *Sia $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}; x_0 \in]a; b[$ con f derivabile in x_0 . Se x_0 è un punto di estremo locale per f , allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. **Parte II**

Modulo 2