

Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo Troncana, dalle note della professoressa A. Defranceschi con l'aiuto del collega D. Borra

A.A. 2022/2023

Indice

1	Introduzione	2
I	Modulo 1	2
2	Irrazionalità di $\sqrt{2}$	2
3	Funzioni in generale	2
3.1	Funzione	2
3.2	Immagine di una funzione	2
3.3	Grafico di una funzione	2
3.4	Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva	3
4	Insiemi numerici	3
4.1	Disuguaglianza di Bernoulli	3
4.2	Densità di \mathbb{Q}	3
4.3	Proprietà Archimedeana	3
4.4	Destra e sinistra	3
4.5	Assioma di Dedekind	3
4.6	Completezza di \mathbb{R}	3
4.7	Caratterizzazione di sup e inf	3
5	Radici n-esime in \mathbb{C}	4
6	Proprietà locali di funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	4
6.1	Limite	4
6.2	Unicità del limite	4
6.3	Limitatezza locale	4
6.4	Permanenza del segno	4
6.5	Teorema del confronto	4
6.6	Limite di funzioni composte	5
7	Esistenza del limite per funzioni monotone	5
II	Modulo 2	5

1 Introduzione

Per l'esame orale di Analisi Matematica A è richiesta la conoscenza di tutti gli enunciati e tutte le definizioni visti a lezione, oltre che la capacità di dimostrare i teoremi più importanti.

In questa trattazione sono presenti tutte le definizioni e i teoremi richiesti, e nell'indice sono evidenziati i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione, gli unici di cui essa è allegata per garantire una trattazione più snella e orientata allo studio per l'esame.

Parte I

Modulo 1

2 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Teorema. $\sqrt{2}$ è irrazionale, ovvero $\nexists m, n \in \mathbb{Z} : MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m^2}{n^2} = 2$. Allora $m^2 = 2n^2$, dunque m^2 è pari e automaticamente m è pari.

Sia $m = 2k$, allora $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, dunque anche n è pari.

Ma allora $MCD(m, n) \geq 2$, assurdo, dunque non esistono tali $m, n \in \mathbb{Z}$.

3 Funzioni in generale

3.1 Funzione

DEF (Funzione). Dati due insiemi X, Y , una **funzione** $f : X \rightarrow Y$ è una qualsiasi legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y \in Y$, e scriviamo $y = f(x)$.

X si dice **dominio** di f , Y si dice **codominio** di f .

3.2 Immagine di una funzione

DEF (Immagine). Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, essa induce una **funzione immagine** che indichiamo con lo stesso nome:

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$A \rightarrow \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

3.3 Grafico di una funzione

DEF (Grafico). Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, il **grafico** di f è l'insieme:

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

3.4 Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva

DEF. (Iniettività, suriettività e biiettività) Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, essa si dice:

Iniettiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Suriettiva se $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

Biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

4 Insiemi numerici

4.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Proposizione 4.1 (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora vale:*

$$x^n \geq 1 + n(x - 1)$$

4.2 Densità di \mathbb{Q}

Proposizione 4.2 (Densità di \mathbb{Q}). *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Allora $\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$.*

4.3 Proprietà Archimedeana

Proposizione 4.3 (Proprietà Archimedeana). *Siano $x, y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Allora $\exists n \in \mathbb{N} : y \leq nx$.*

4.4 Destra e sinistra

DEF (Destra e sinistra). Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si dice che A sta **a sinistra** di B se

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$$

Analogamente, diciamo che B sta **a destra** di A .

4.5 Assioma di Dedekind

Assioma 1. (Dedekind) *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti tali che A stia a sinistra di B . Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che:*

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$$

.

4.6 Completezza di \mathbb{R}

Teorema (Completezza di \mathbb{R}). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Se A è limitato superiormente, allora $\exists \sup A \in \mathbb{R}$. Se A è limitato inferiormente, allora $\exists \inf A \in \mathbb{R}$.*

4.7 Caratterizzazione di sup e inf

Proposizione 4.4 (Caratterizzazione di sup e inf). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti di A .*

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente. Allora $\inf A$ è il più grande dei minoranti di A .

5 Radici n -esime in \mathbb{C}

Teorema. Siano $w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Se $w = 0$, l'unica radice di w di qualsiasi ordine è 0.

Altrimenti, w ha esattamente n radici n -esime distinte, ciascuna identificata da un numero naturale $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, e sono date da:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left[\cos\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

Dimostrazione. Se $w = 0 \Rightarrow z^n = 0 \Leftrightarrow |z|^n = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Altrimenti, supponiamo $w \neq 0$.

Riscriviamo z e w in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} z^n = w &\Leftrightarrow |z|^n [\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)] = |w| [\cos(\arg w) + i \sin(\arg w)] \\ &\Leftrightarrow |z|^n = |w| \wedge n \arg z = \arg w + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \wedge \arg z = \frac{\arg w + 2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Prendendo $1 \leq k < n$, abbiamo le n radici distinte.

QED

6 Proprietà locali di funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

6.1 Limite

DEF (Limite). Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A .

Allora $l \in \mathbb{R}$ è il **limite** di f per $x \rightarrow x_0$ se:

$$\forall I_l, \exists I_{x_0} : x \in I_{x_0} \Rightarrow f(x) \in I_l$$

6.2 Unicità del limite

Teorema (Unicità del limite). Se f ha limite l per $x \rightarrow x_0$, allora l è unico.

6.3 Limitatezza locale

Teorema (Limitatezza locale). Se f ha limite l per $x \rightarrow x_0$, allora $\exists I_{x_0} : f(I_{x_0})$ è limitato.

6.4 Permanenza del segno

Teorema (Permanenza del segno). Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora esiste un intorno di x_0 in cui f ha lo stesso segno di l .

6.5 Teorema del confronto

Teorema (Teorema del confronto). Siano $f, g, h : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\forall x \in I(x_0), f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per X . Allora si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

6.6 Limite di funzioni composte

Teorema (Limite di funzioni composte). Siano $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(X) \subseteq Y$. Sia x_0 un punto di accumulazione per X . Allora se esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$$

e $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0 (ipotesi non necessaria se $y_0 \in Y$ e $g(y_0) = l$), allora si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l$.

7 Esistenza del limite per funzioni monotone

Teorema. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se f è crescente in X e x_0 è un punto di accumulazione sinistro per X , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{< x_0}} f$$

Se f è crescente in X e x_0 è un punto di accumulazione destro per X , allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{> x_0}} f$$

Analogamente per f decrescente.

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima proposizione, il resto è analogo.

Sia $l = \sup_{X \cap \mathbb{R}_{< x_0}} f$, che esiste per completezza di \mathbb{R} .

Supponiamo $l \in \mathbb{R}$. Per definizione di sup si ha :

$$\forall x \in X \cap \mathbb{R}_{< x_0}, f(x) \leq l$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X \cap \mathbb{R}_{< x_0} : l - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$$

Allora fissato $\varepsilon > 0$ qualsiasi, $\forall x \in]x_\varepsilon, x_0[\cap X, l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq l \leq l + \varepsilon$.

Abbiamo quindi che $\forall x \in]x_\varepsilon, x_0[\cap X, |f(x) - l| < \varepsilon$, ovvero la tesi.

Supponiamo ora $l = +\infty$. In tal caso f non è limitata superiormente e in quanto monotona il suo limite è $+\infty = l$. QED

Parte II

Modulo 2