

Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo Troncana, dalle note della professoressa A. Defranceschi con l'aiuto del collega D. Borra

A.A. 2022/2023

Indice

1	Introduzione	1
I	Modulo 1	1
2	Irrazionalità di $\sqrt{2}$	2
3	Funzioni in generale	2
3.1	Funzione	2
3.2	Immagine di una funzione	2
3.3	Grafico di una funzione	2
3.4	Funzione iniettiva, suriettiva e bijectiva	2
4	Insiemi numerici	3
4.1	Disuguaglianza di Bernoulli	3
4.2	Densità di \mathbb{Q}	3
4.3	Proprietà Archimedeana	3
II	Modulo 2	3
1	Introduzione	

Per l'esame orale di Analisi Matematica A è richiesta la conoscenza di tutti gli enunciati e tutte le definizioni visti a lezione, oltre che la capacità di dimostrare i teoremi più importanti.

In questa trattazione sono presenti tutte le definizioni e i teoremi richiesti, e nell'indice sono evidenziati i teoremi di cui è richiesta la dimostrazione, gli unici di cui essa è allegata per garantire una trattazione più snella e orientata allo studio per l'esame.

Parte I

Modulo 1

2 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Teorema. $\sqrt{2}$ è irrazionale, ovvero $\nexists m, n \in \mathbb{Z} : MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $MCD(m, n) = 1 \wedge \frac{m}{n} = \sqrt{2}$. Allora $m^2 = 2n^2$, dunque m^2 è pari e automaticamente m è pari.

Sia $m = 2k$, allora $4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, dunque anche n è pari.

Ma allora $MCD(m, n) \geq 2$, assurdo, dunque non esistono tali $m, n \in \mathbb{Z}$.

3 Funzioni in generale

3.1 Funzione

DEF (Funzione). Dati due insiemi X, Y , una **funzione** $f : X \rightarrow Y$ è una qualsiasi legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un unico elemento $y \in Y$, e scriviamo $y = f(x)$.
 X si dice **dominio** di f , Y si dice **codominio** di f .

3.2 Immagine di una funzione

DEF (Immagine). Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, essa induce una **funzione immagine** che indichiamo con lo stesso nome:

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$A \rightarrow \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

3.3 Grafico di una funzione

DEF (Grafico). Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, il **grafico** di f è l'insieme:

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

3.4 Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva

DEF. (Iniettività, suriettività e biiettività) Dati due insiemi X, Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, essa si dice:

Iniettiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Suriettiva se $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

Biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva.

4 Insiemi numerici

4.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Proposizione 4.1 (Disuguaglianza di Bernoulli). *Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora vale:*

$$x^n \geq 1 + n(x - 1)$$

4.2 Densità di \mathbb{Q}

Proposizione 4.2 (Densità di \mathbb{Q}). *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Allora $\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y$.*

4.3 Proprietà Archimedeana

Proposizione 4.3 (Proprietà Archimedeana). *Siano $x, y \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Allora $\exists n \in \mathbb{N} : y \leq nx$.*

Parte II

Modulo 2