Categorie per il matematico disoccupato

Filippo L. Troncana, per il corso "Strumenti Informatici per la Matematica"

A.A. 2023/2024

1 Introduzione e prime definizioni

Durante la seconda metà del XX secolo la profondissima (sebbene apparentemente banale) osservazione del fatto che in fondo tutta la matematica è fatta di $cosi^1$ e frecce tra cosi ha motivato l'introduzione del concetto di Categoria.

Informalmente parlando una categoria è fatta da oggetti che condividono un certo senso di struttura e delle frecce che li collegano, che preservano questo tipo di struttura. Un esempio classico è la categoria **Set**, ovvero gli insiemi e le funzioni tra essi, oppure la categoria **Top** degli spazi topologici le cui frecce sono le funzioni continue. Procediamo a dare una definizione un po' più rigorosa.

Definizione 1.1. Una categoria C consiste nelle seguenti:

- Una classe ob(C) i cui elementi sono detti oggetti di C^2 .
- Una classe mor(C) i cui elementi sono detti morfismi di C. Ogni morfismo f ha un unico oggetto sorgente A e un unico oggetto di destinazione B, e si denota con $f:A\to B$. La classe dei morfismi tra due oggetti nella stessa categoria si indica con mor(A,B).
- Per ogni terna di oggetti A, B, C ∈ ob(C), è definita una legge di composizione tra morfismi, che a un morfismo f : A → B e g : B → C associa un unico morfismo g ∘ f : A → C. La composizione di morfismi deve rispettare le seguenti proprietà:
 - -L'associatività: per qualsiasi terna di morfismi $f: A \to B, g: B \to C$ e $h: C \to D$ vale $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
 - L'esistenza del morfismo identità: per ogni oggetto $X \in ob(\mathcal{C})$ esiste un morfismo id $_X: X \to X$ tale che per ogni morfismo $f: A \to X$ e $g: X \to A$ valgano id $_X \circ f = f$ e $g \circ id_X = g$.

Osservazione 1.1. Dato che per ogni oggetto esiste un unico (la dimostrazione dell'unicità è banale) morfismo identità, una categoria risulta essere univocamente determinata dai suoi morfismi, e pertanto è possibile definire le categorie semplicemente in base alla classe dei morfismi.

Arricchiamo leggermente il nostro linguaggio

Definizione 1.2. Sia C una categoria.

Se mor(C) è un insieme (e dunque per l'osservazione precedente lo è anche ob(C)), allora C si dice piccola, altrimenti si dice grande.

Una categoria in cui una volta fissati due $A, B \in ob(\mathcal{C})$ allora mor(A, B) è un insieme si dice localmente piccola.

Definizione 1.3. Sia C una categoria e sia $f: A \to B$ un morfismo. Esso si dice:

- \bullet Endomorfismo se A=B
- Isomorfismo se $\exists f': B \to A \text{ tale che } f \circ f' = \mathrm{id}_B \land f' \circ f = \mathrm{id}_A$
- Automorfismo se è contemporaneamente endomorfismo e isomorfismo.

Al lettore dotato di un qualsivoglia $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere di familiarità con l'algebra astratta, la definizione di categoria risulterà analoga a quella di monoide. In effetti un monoide (M, +) non è altro che una categoria piccola con un unico oggetto (l'insieme M) e i cui morfismi corrispondono alle traslazioni degli elementi di M sugli altri elementi di M.

Inoltre, quasi sempre, quando si esprime l'unicità di qualcosa in teoria delle categorie la si considera a meno di isomorfismo, come vedremo più avanti.

¹termine tecnico

²Occasionalmente, scriveremo $A \in \mathcal{C}$ invece di $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ con un lieve abuso di notazione

2 Diagrammi commutativi

Ai cat-boys³ piace molto esprimere qualsiasi proprietà attraverso cosiddetti diagrammi commutativi, utili strumenti per esprimere le relazioni fra oggetti e morfismi in una categoria

Definizione 2.1. Un diagramma commutativo è un grafo diretto in cui i nodi sono costituiti da oggetti e i cui archi sono costituiti da morfismi tra essi in modo tale che percorrere un arco corrisponda ad applicare il morfismo a esso associato.

Ad esempio, i diagrammi commutativi possono essere usati per riformulare in modo visualmente intuitivo alcuni teoremi.

Teorema 2.1. Sia $\mathbb{K} \in Fld$, siano $V, W \in Vec(\mathbb{K})$ e sia $f \in mor(V, W)$. Allora $\exists ! \phi \in mor V / ker(f), Im(f)$ tale che ϕ sia un isomorfismo e si abbia $f = i \circ \phi \circ \pi$. Equivalentemente, $\exists ! \phi \in mor V / ker(f), Im(f)$ tale che il sequente diagramma commuti:

$$V \xrightarrow{f} \longrightarrow W$$

$$\downarrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \downarrow \downarrow$$

$$V/\ker(f) \xrightarrow{\phi} \xrightarrow{\phi^{-1}} \operatorname{im}(f)$$

3 Funtori e trasformazioni naturali

3.1 Funtori

Abbiamo parlato di oggetti e frecce tra oggetti. Ma se volessimo parlare di frecce tra le frecce?

Definizione 3.1. Siano C, D due categorie.

Un Funtore covariante è una mappa $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tale che:

- $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \exists ! F(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$
- $\forall f: A \to B \in \text{mor}(\mathcal{C}), \exists ! F(f): F(A) \to F(B) \in \text{mor}(\mathcal{D})$

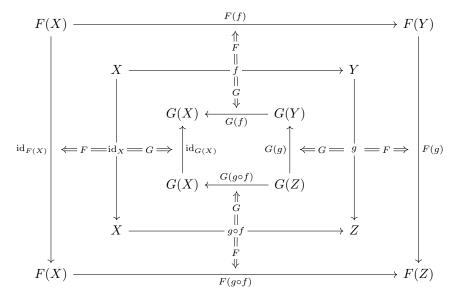
Un Funtore controvariante è una mappa G da C a D tale che:

- $\forall X \in ob(\mathcal{C}), \exists ! G(X) \in ob(\mathcal{D})$
- $\forall f: A \to B \in \operatorname{mor}(\mathcal{C}), \exists ! G(f): G(B) \to G(A) \in \operatorname{mor}(\mathcal{D})$

Un Funtore (covariante o controvariante) $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deve rispettare le seguenti proprietà:

- $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), F(\text{id}_X = \text{id}_{F(X)})$
- $\forall f, g \in \operatorname{mor}(\mathcal{C}), F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

La situazione che stiamo immaginando si traduce dunque in questo diagramma commutativo (dove F e G sono come nella definizione)



Vediamo degli esempi che ci permettano di chiarire:

³Teorici delle categorie

- La mappa $S : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ che ad un gruppo (G, +) associa l'insieme G è un funtore covariante, detto funtore dimenticante⁴. Esistono numerosi (infiniti, in effetti) funtori smemorati, ad esempio da \mathbf{Fld} a $\mathbf{Vec}(\mathbb{K})$, da $\mathbf{Vec}(\mathbb{K})$ a \mathbf{Grp} , da \mathbf{Top} a \mathbf{Set} e così via, da qualsiasi categoria i cui oggetti siano quelli della categoria in arrivo con una struttura più regolare.
- La mappa $\pi_1 : \mathbf{Top}^* \to \mathbf{Grp}$ che a uno spazio topologico con un punto fissato associa il suo gruppo fondamentale è un funtore covariante, in particolare è il primo (definito come tale) incontrato dalla maggior parte degli studenti.
- La mappa $*: \mathbf{Vec}(\mathbb{K}) \to \mathbf{Vec}(\mathbb{K})$ che ad uno spazio vettoriale V associa il suo spazio duale V^* , ovvero lo spazio vettoriale dei morfismi $V \to \mathbb{K}$ (dove \mathbb{K} è visto come oggetto in $\mathbf{Vec}(\mathbb{K})$), è un funtore controvariante.
- La mappa **Set** → **Graph*** (dove **Graph*** è la categoria dei grafi diretti) che ad una famiglia di oggetti e morfismi rappresentati da un insieme di indici associa un diagramma commutativo è un funtore⁵.

È interessante notare che in una data categoria la classe dei morfismi tra due oggetti può possedere una struttura notevole: per esempio fissato un $V \in \text{ob}(\mathbf{Vec}(\mathbb{K}))$, l'insieme mor(V, V) è un'algebra associativa su \mathbb{K} , al cui studio è dedicato tutto il primo semestre del corso di Geometria A. Ma se volessimo fissare due categorie e parlare dei funtori tra di esse, come potremmo procedere?

3.2 Trasformazioni naturali

Definizione 3.2. Siano $F, G : A \to \mathcal{B}$ due funtori dalla categoria A alla categoria \mathcal{B} Si dice trasformazione naturale una collezione $\{\alpha_X : F(X) \to G(X)\}$ di morfismi in \mathcal{B} indicizzati da oggetti di A tale che il sequente diagramma commuti:

$$\begin{array}{cccc} X & F(X) & \longrightarrow \alpha_X & \longrightarrow G(X) \\ & & & & | & & | \\ f & & F(f) & & G(f) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & F(Y) & \longrightarrow \alpha_X & \longrightarrow G(Y) \end{array}$$

Ovvero, tale che per ogni oggetto X e ogni morfismo $f: X \to Y$ di A si abbia $\alpha_X \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_X$.

Possiamo dunque immaginare una trasformazione naturale come una specie di funtore tra funtori dunque, in un diagramma commutativo di questo tipo:

4 Proprietà universali

Uno dei principali punti di forza della teoria delle categorie è il permettere di formulare delle cosiddette "proprietà universali" di una costruzione. Partiamo con un esempio

Teorema 4.1. \mathbb{R} è l'unico campo completo totalmente ordinato, a meno di isomorfismo.

Le possibili costruzioni dei numeri reali sono molte, le più famose sono quelle per classi di equivalenza di successioni di Cauchy o per sezioni di Dedekind a partire da \mathbb{Q} , ma come facciamo a dimostrare che una nuova bizzarra costruzione che ci è appena venuta in mente sia effettivamente una costruzione dei numeri reali? È semplice, basta dimostrare che con le opportune operazioni, che idealmente dovrebbero emergere in modo naturale dalla nostra costruzione, questo oggetto costituisca un campo totalmente ordinato e completo, e dal teorema precedente avremo la garanzia che sia \mathbb{R} (o almeno, che sia isomorfo a esso). Dunque c'è un senso in cui questa è una proprietà che è "universale" rispetto alle costruzioni dei numeri reali.

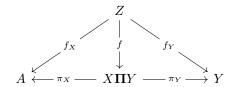
Esaminiamo un altro caso.

Definizione 4.1. Siano X, Y oggetti in una categoria C. Si dice prodotto di X e Y un oggetto X Π Y di C fornito di una coppia di morfismi $\pi_X: X\Pi Y \to X$ e $\pi_Y: X\Pi Y \to Y$ suriettivi tale che per qualsiasi morfismo $f: Z \to X\Pi Y$

 $^{^4}$ nonostante "dimenticante" sia il termine utilizzato in letteratura, l'autore preferisce "smemorato"

 $^{^5\}mathrm{Si},$ sostanzialmente qualsiasi cosa è un funtore

esistano unici $f_X:Z\to X$ e $f_Y:Z\to Y$ tali per cui il seguente diagramma commuti:



In questo modo, generalizziamo le idee di prodotto cartesiano in \mathbf{Set} , prodotto topologico in \mathbf{Top} o prodotto tensoriale in $\mathbf{Vec}(\mathbb{K})$: qualsiasi tipo di "prodotto" tra due strutture dello stesso tipo è completamente caratterizzato dalle proiezioni alle sue componenti.

5 Conclusione

In conclusione, il formalismo della teoria delle categorie fornisce una sorta di "grande teoria unificata" delle varie branche della matematica