TFA per cambiamenti di coordinate

Filippo $\mathcal{L}$. Troncana

A.A. 2023/2024

1 Misure e σ-algebre indotte

Definizione 1.1: σ-algebra finale

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, sia Y un insieme e sia $f : X \to Y$ una funzione.
La σ***-algebra*** finale indotta da f rispetto a $\mathcal{A}$ è la famiglia

$$f\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

La struttura di σ-algebra segue banalmente dalla commutatività tra operatori insiemistici e preimmagine.

Osservazione 1.1

La σ-algebra finale di f rispetto a $\mathcal{A}$ è la più grande σ-algebra Σ tale che $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \Sigma)$ sia misurabile.

Dimostrazione

Sia $\Sigma \subset 2^Y$ tale che $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \Sigma)$ sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni $E \in \Sigma$, abbiamo che $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, dunque $\Sigma \subset f\mathcal{A}$.

$\square$

Definizione 1.2: Misura esterna indotta

Siano X e Y due insiemi, sia μ una misura esterna su X e sia $f : X \to Y$ una funzione.
La ***misura indotta*** da f rispetto a μ è la funzione

$$f\mu : 2^Y \to [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

Proposizione 1.1

$f\mu$ è una misura esterna su Y.

Dimostrazione

Dimostriamo i tre assiomi di misura esterna.

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \Rightarrow f\mu(\varnothing) = 0$.
2. Siano $E \subset F \subset Y$, allora $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$, dunque la monotonia di $f\mu$ segue dalla monotonia di μ.
3. Siano $A, B \subset Y$, allora $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ e la subaddittività segue da quella di μ

$\square$

Proposizione 1.2

Se $f : (X, \mathcal{A}, f\mu) \to Y$ è una funzione biettiva, allora $\mathcal{M}_{f\mu} = f\mathcal{M}_{\mu}$.

Dimostrazione

Sia $E \in M_{f\mu}$ e sia $A \in 2^Y$.
Abbiamo che $f\mu(A) = f\mu(A \cap E) + f\mu A \cap E^c = \mu(f^{-1}(A \cap E)) + \mu(f^{-1}(A \cap E^c)) = \mu(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(E)) + \mu(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(E^c))$ dunque posto $B := f^{-1}(A)$ (possibile per ogni $B \in 2^X$ per biettività) vale che $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}_\mu \Rightarrow E \in f\mathcal{M}_\mu$.

$\square$

TODO: credo sia possibile definire una duale costruzione iniziale, ma per la nostra trattazione è sufficiente la versione finale.

Lemma 1.1: Isomorfismo di σ-algebre indotte

Siano $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, Y un insieme e $f : (X, \mathcal{A}) \to Y$ una funzione biettiva. Allora $f\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$.

Dimostrazione

Banale dimostrazione di insiemistica.

$\square$

2 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{A}, \mu) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \arrow[d, "g"] \\
& (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.1: Integrazione indotta

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura, sia Y un insieme, sia $f : X \to Y$ una funzione biettiva e sia $g : (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1)$ una funzione $f\mathcal{A}$-misurabile.
Allora g è $f\mu$-integrabile se e solo se $g \circ f$ è μ-integrabile, e vale l'identità

$$\int g \, \mathrm{d}f\mu = \int g \circ f \, \mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione

Assumiamo che g sia $f\mu$-integrabile. Allora vale

$$\int g \, \mathrm{d}f\mu = \int_* g \, \mathrm{d}f\mu = \sup \{ I_{f\mu}(\varphi) : \varphi \in \Sigma_-(g) \} = \sup \left\{ \sum_i a_i f\mu(\varphi^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \sum_i a_i \mu(f^{-1}(\varphi^{-1}(\{a_i\}))) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \sup \left\{ \sum_i a_i \mu((\varphi \circ f)^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \circ f \in \Sigma_-(g \circ f) \right\}$$

$$\text{con } \psi := \varphi \circ f, \quad \int_* g \, \mathrm{d}f\mu = \sup \{ I_\mu(\psi) : \psi \in \Sigma_-(g \circ f) \} = \int_* g \circ f \, \mathrm{d}\mu$$

La dimostrazione è assolutamente analoga per l'integrale superiore e nella direzione opposta assumendo l'integrabilità di $g \circ f$. Le varie uguaglianze seguono dalla biettività di f.

$\square$

Osservazione 2.1: Girotondone per il TFA

L'obiettivo di questo scherzetto è dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate, ovvero

$$\int g \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g \circ f) \cdot J_f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Ma c'è un problema: noi abbiamo dimostrato un risultato dalla forma leggermente diversa, ovvero

$$\int g \ \mathrm{d}f\mu = \int g \circ f \ \mathrm{d}\mu$$

Osservando il TFA ci aspettiamo che la nostra $\mathrm{d}f\mu$ corrisponda a $J_f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$, dunque dobbiamo fare un piccolo giretto usando la biettività di f:

$$\int g \ \mathrm{d}\lambda = \int g \circ f \circ f^{-1} \ \mathrm{d}\lambda = \int g \circ f \ \mathrm{d}f^{-1}\lambda$$

In questo modo ci basta riuscire a far corrispondere $J_f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$ a $\mathrm{d}f^{-1}\mathcal{L}^n$

3 Derivata di Radòn-Nikodym

Teorema 3.1: Teorema di Radòn-Nikodym

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e siano ν, μ misure su $(X, \mathcal{A})$ tali che μ sia σ-finita e ν sia assolutamente continua rispetto a μ. Allora esiste una funzione $\mathcal{A}$-misurabile $f : X \to [0, +\infty[$ tale che per ogni $E \in \mathcal{A}$ si abbia

$$\nu(A) = \int_A f \ \mathrm{d}\mu$$

E per una funzione ν-integrabile $g : (X, \mathcal{A}, \nu) \to \mathbb{R}$ vale

$$\int g \ \mathrm{d}\nu = \int g \cdot f \ \mathrm{d}\mu$$

Definizione 3.1: Derivata di Radòn-Nikodym

Nella situazione precedente, la funzione f si dice ***derivata di Radòn-Nikodym*** di ν rispetto a μ e si indica con

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$$

Definizione 3.2: Funzioni R-N

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ due spazi con misure σ-finite.
Una funzione $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B}, \nu)$ si dice ***funzione R-N*** se:

1. f è misurabile
2. Per ogni $E \in \mathcal{B}$ tale che $\nu(E) = 0$ si ha $\mu(f^{-1}(E)) = 0$

Osservazione 3.1: Categoria degli spazi con misure σ-finite e delle funzioni R-N

La classe degli spazi con misure σ-finite con la classe delle funzioni R-N e l'usuale composizione di funzioni è una categoria, che chiamiamo $\mathbf{Mea}_{R-N}$.

Dimostrazione

Controlliamo le varie proprietà:

- Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura σ-finita. La funzione identità id_X è evidentemente una funzione R-N.
- Siano $f : (X, \mathcal{A}, \lambda) \to (Y, \mathcal{B}, \mu)$ e $g : (Y, \mathcal{B}, \mu) \to (Z, \mathcal{C}, \nu)$ due funzioni R-N. Notiamo che per ogni $E \in \mathcal{C}$ tale che $\nu(E) = 0$ si ha $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(E))$ e $\mu(g^{-1}(E)) = 0$, dunque $\lambda((g \circ f)^{-1}(E)) = 0$.
- La composizione eredita l'associatività dalla composizione di funzioni in **Set**.

$\square$

Proposizione 3.1: Derivata di R-N per Lipschitziane

Sia (X, d, μ) uno spazio metrico di dimensione $n \in \mathbb{Z}_+$ con una misura μ di Radòn (rispetto alla σ-algebra Boreliana indotta dalla metrica) invariante per traslazioni (ovvero, $\mu(B_r(x)) = \mu(B_r(y))$ per ogni x, y in X)[a] e sia $F : X \to X$ una funzione biettiva di Lipschitz con costante di Lipschitz $L > 0$.
Allora $F^{-1}\mu \ll \mu$ e L^n e la derivata di Radòn-Nikodym di $F^{-1}\mu$ rispetto a μ è maggiorata μ-quasi ovunque da L^n.

Dimostrazione

È sufficiente dimostrarlo sulle palle aperte, dato che queste costituiscono una base della topologia e dunque della σ-algebra Boreliana.
Per ogni $r > 0$ e ogni $x \in X$ abbiamo che $F(B_r(x)) \subset B_{Lr}(F(x))$ che implica $\mu(F(B_r(x))) \leq \mu(B_{Lr}(F(x))) = L^n \mu(B_r(F(x)))$ il che implica che per ogni insieme, $F^{-1}(E) \leq \mu(E)$, dunque sappiamo che deve esistere $g : (X, d, \mu) \to [0, +\infty[$ tale che

$$F^{-1}\mu(E) = \int\limits_E g \, \mathrm{d}\mu$$

Ancora una volta lavoriamo sulle palle

$$\forall r > 0, \forall x \in X, 0 \leq \int\limits_{B_r(x)} g(y) \, \mathrm{d}\mu(y) \leq \int\limits_{B_r(x)} L^n \, \mathrm{d}\mu(y) \Rightarrow g \leq_\mu L^n$$

$\square$

[a] Onestamente non so se questa "uniformità" vada codificata come una proprietà dello spazio o della misura, dato che il nostro fine è quello di applicarlo alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ non ci poniamo troppi problemi in quanto $\mathbb{R}^n$ è tutto piatto e $\mathcal{L}^n$ è invariante per traslazioni.

4 Il viaggio verso il TFA

Cercheremo di dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate ***lineari*** con la speranza di estendere questo ragionamento a cambiamenti di coordinate ***differenziabili***, ovvero localmente lineari. Per fare questo, ci permetteremo di sostituire i plurirettangoli nella definizione della misura di Lebesgue ai pluriparallelogrammi

Lemma 4.1: Misura indotta da un cambiamento di coordinate lineare

Sia $F : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_\mathcal{L}, \mathcal{L}^n) \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare invertibile.
Allora $F^{-1}\mathcal{L}^n = |\det F| \cdot \mathcal{L}^n$ e dunque

$$F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int\limits_E |\det F| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione

Sia $E \in F\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Per definizione di misura indotta, abbiamo che $F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(F(E))$ e che, come visto nel corso di Geometria A è uguale a $|\det F| \cdot \mathcal{L}^n(E)$.

$\square$

Teorema 4.1: TFA per cambiamenti di coordinate lineari

Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare invertibile e sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n$-integrabile. Vale il seguente fatto:

$$\int g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g \circ F) \cdot |\det F| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Teorema 4.2: Derivata R-N di una misura finale di diffeomorfismi

Sia $\varphi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^n) \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo locale e sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}\mathcal{L}^n}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n} = |\det D_\varphi|$$

Nel senso della definizione 3.1 della derivata di Radòn-Nikodym.

Dimostrazione

Il fatto che $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \ll \mathcal{L}^n$ segue dalla proposizione 3.1, infatti se φ è un diffeomorfismo è almeno localmente lipschitziana e in ogni insieme limitato V ha costante di Lipschitz $\sup_V |\det D_\varphi|$.
Poniamo $|\det D_\varphi(x)| =: J(x)$.
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Localmente la trasformazione φ agisce come una trasformazione lineare D_φ, dunque in intorni V_i sufficientemente piccoli di punti $x_i \in E$ indicizzati su un insieme numerabile I applichiamo il lemma 4.1 e abbiamo $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \sim D_\varphi\mathcal{L}^n = J(x) \cdot \mathcal{L}^n$. Dunque posti possiamo scrivere

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \sum_{i \in I} \int_{V_i} J(x_i) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \sum_{i \in I} \int_E J(x_i)\chi_{V_i}(y) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(y)$$

Facendo una *mossa alla Gottinga* riconosciamo una regolarità sufficiente ad applicare uno strano genere di integrale di Riemann rendendo sempre più piccoli i nostri intorni aumentando il loro numero e otteniamo

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E J \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_E |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

$\square$

Teorema 4.3: TFA

Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo locale e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n$-integrabile. Vale

$$\int g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g \circ \varphi) \cdot |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione

La dimostrazione è banale combinando i non banali teoremi 2.1, 3.1 e **??**.

$\square$

5 Delirio categorico

Questa nostra costruzione può essere formalizzata come $\Phi : (X, \bullet) \times \mathrm{mor}(X, \star) \to \textsf{\textbf{Meable}}$ che mappa la coppia $((X, \mathcal{A}), f : X \to Y)$ in $(Y, f\mathcal{A})$, non credo sia più estensibile perchè è necessario che il supporto del primo spazio misurabile sia lo stesso insieme di partenza della funzione.