Raccolta di problemi interessanti per il sottoscritto

Filippo $\mathcal{L}$. Troncana

A partire dall'A.A. 2024/2025

Indice

Introduzione

Non ha senso che io faccia un LaTeX per ciascun problema mi sembri interessante, li raccolgo tutti qui e buona così.

Notazione 0.0.1

Useremo le seguenti convenzioni:

- Generalmente un insieme X è assunto non vuoto.
- Dato un insieme X, indicheremo con 2^X il suo insieme delle parti.
- Dato un insieme X e un sottoinsieme $E \subset X$, indicheremo con E^c il suo complementare $X \setminus E$.
- Dato un insieme X e una sua famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} \subset 2^X$, la notazione $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{F}$ rappresenta una funzione $\varphi : I \to \mathbb{F}$ che a ciascun indice mappa un insieme di $\mathbb{F}$ e indichiamo:

$$\cup_I E_i := \bigcup_{i\in I} E_i \qquad , \qquad \cap_I E_i := \bigcap_{i\in I} E_i \qquad \text{e} \qquad \Pi_I E_i := \prod_{i\in I} E_i$$

  In particolare, quest'ultimo è definito se I è finito (non ci occuperemo di prodotti cartesiani infiniti) e se $E_i = E_j = E$ per ogni i, j, allora $\Pi_I E_i := E^{\#I}$

- Dato un campo K e una successione di elementi del campo $\{a_i\}_{i\in I} \subset K$, indichiamo

$$\Sigma_I a_i := \sum_{i\in I} a_i \qquad \text{e} \qquad \Pi_I a_i := \prod_{i\in I} a_i$$

  Almeno a livello formale, indipendentemente dalla loro esistenza o definizione.

Capitolo 1

(APERTO) Dimostrazione più gentile della formula dell'area

Uno dei più importanti risultati della teoria geometrica della misura è la formula dell'area, strumento fondamentale per il calcolo delle misure di sottovarietà regolare di $\mathbb{R}^n$ e degli integrali su di esse.
La dimostrazione classica, ad esempio quella riportata in citeEvansGariepy1991 fa uso di diverse stime estremamente tecniche, ma credo[1] che fare un giro leggermente più largo possa portare a una dimostrazione meno traumatica.
Alcune fondamentali idee, come quella di considerare spazi misurabili "migliorati" (che noi chiameremo rinforzati), ovvero dotati di una famiglia di insiemi considerati trascurabili o nulli, per un'idea più "naturale" di equivalenza quasi ovunque vengono da citeFremlin2000.
In questa tesi vengono presentati dei risultati di teoria della misura sviluppati con un approccio simile a quello usato per lo studio della topologia generale e successivamente questi vengono applicati allo studio dell'integrale di funzioni composte e alla formula dell'area.

1.1 Teoria astratta della misura indotta

Le definizioni di teoria della misura usate si riferiscono a quelle date in citeDelladio2023, meno che alcune che riportiamo qui, con opportuna motivazione

Definizione 1.1.1: Funzione misurabile

Siano $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ due spazi misurabili e sia $f : X \to Y$ una funzione.
f si dice ***misurabile*** se per ogni $E \in \mathcal{B}$ vale $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

In citeDelladio2023 le funzioni misurabili sono definite analogamente, ma l'ambiente di arrivo è uno spazio topologico e si richiede che la controimmagine di ogni aperto sia misurabile, in modo da poter usare alcuni strumenti di topologia dotando l'insieme di arrivo della σ-algebra Boreliana.
Tuttavia, ai fini della nostra trattazione sarà meglio usare la definizione più generale riportata qui sopra, che quindi è quella che adottiamo.

1.1.1 σ-algebre e misure esterne indotte da funzioni

Analogamente alle costruzioni di topologia iniziale e finale, definiamo

Definizione 1.1.2: σ-algebre indotte

Siano X e Y due insiemi, sia $f : X \to Y$ una funzione, sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra su X e sia $\mathcal{B}$ una σ-algebra su Y.
Definiamo le seguenti famiglie:

$$f_\sharp\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\} \qquad \text{e} \qquad f_\flat\mathcal{B} := \{f^{-1}(E) \in 2^X : E \in \mathcal{B}\}$$

Esse si dicono rispettivamente ***σ-algebra finale e iniziale*** di f rispetto a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Dimostrazione

La dimostrazione che queste siano effettivamente delle σ-algebre segue banalmente dalla commutatività tra operatori insiemistici, immagine e preimmagine.

□

[1] o meglio, spero

Valgono questi risultati che ci permettono di calcolare in modi più agevoli le nostre σ-algebre

Proposizione 1.1.1

La σ-algebra finale di f rispetto a $\mathcal{A}$ è la più grande σ-algebra Ω tale che $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \Sigma)$ sia misurabile.
La σ-algebra iniziale di f rispetto a $\mathcal{B}$ è la più piccola σ-algebra Σ tale che $f : (X, \Sigma) \to (Y, \mathcal{B})$ sia misurabile.

Dimostrazione

Sia $\Omega \subset 2^Y$ tale che $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \Omega)$ sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni $E \in \Omega$, abbiamo che $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, dunque $\Omega \subset f_\sharp \mathcal{A}$.
Sia $\Sigma \subset 2^X$ tale che $f : (X, \Sigma) \to (Y, \mathcal{B})$ sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni $E \in f_\flat \mathcal{B}$ si ha che $E = f^{-1}(F)$ con $F \in B$ e quindi che $E \in \Sigma$, dunque $f_\flat \mathcal{B} \subset \Sigma$.

$\square$

Definizione 1.1.3: Misure esterne indotte

Siano X e Y due insiemi, siano μ e ν due misure esterne rispettivamente su X e su Y e sia $f : X \to Y$ una funzione.
La ***misura esterna finale*** di f rispetto a μ è la funzione

$$f_\sharp \mu : 2^Y \to [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f_\sharp \mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

La ***misura esterna iniziale*** di f rispetto a ν è la funzione

$$f_\flat \nu : 2^X \to [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f_\flat \nu(E) := \nu(f(E))$$

Dimostrazione

Dimostriamo che queste sono effettivamente misure esterne.
Verifichiamo i tre assiomi di misura esterna per $f_\sharp \mu$:

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \Rightarrow f_\sharp \mu(\varnothing) = 0$.
2. Siano $E \subset F \subset Y$, allora $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$, dunque la monotonia di $f_\sharp \mu$ segue dalla monotonia di μ.
3. Siano $A, B \subset Y$, allora $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ e la subaddittività segue da quella di μ

Ora per $f_\flat \nu$:

1. $f(\varnothing) = \varnothing \Rightarrow f_\flat(\varnothing) = 0$.
2. Siano $E \subset F \subset X$, allora $f(E) \subset f(F)$, dunque la monotonia di $f_\flat \nu$ segue dalla monotonia di ν.
3. Siano $A, B \subset X$, allora $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ e la subaddittività segue da quella di ν.

$\square$

Proposizione 1.1.2: Bidualità delle misure esterne indotte

Nella situazione della definizione 1.1.3, $f_\flat f_\sharp \mu \geq \mu$ e $f_\sharp f_\flat \nu \leq \nu$. In particolare, se f è iniettiva vale $f_\flat f_\sharp \mu = \mu$ e se f è suriettiva vale $f_\sharp f_\flat \nu = \nu$ e se f è biettiva valgono entrambe le uguaglianze.

Dimostrazione

Abbiamo che $f_\flat f_\sharp \mu(E) = f_\sharp \mu(f(E)) = \mu(f^{-1}(f(E))) \geq \mu(E)$ per monotonia di μ.
Allo stesso modo, $f_\sharp f_\flat \nu(E) = f_\flat \nu(f^{-1}(E)) = \nu(f(f^-1(E))) \leq \nu(E)$
L'uguaglianza nei casi particolari segue banalmente.

$\square$

Analogamente alle costruzioni topologiche, usiamo questa teoria per parlare di sottospazi misurabili

1.1.2 Sottospazi misurabili

Definizione 1.1.4: Sottospazio misurabile

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e $Z \subset X$. Allora, definita la famiglia $\mathcal{A}|_Z := \{E \cap Z \in 2^X : E \in \mathcal{A}\}$, $(Z, \mathcal{A}|_Z)$ si dice ***sottospazio misurabile*** di X.

Dimostrazione

Banalmente è uno spazio misurabile.

$\square$

Proposizione 1.1.3: Misurabili iniziali rispetto all'inclusione

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, sia $Z \subset X$ un suo sottoinsieme e sia $i : Z \to X$ l'inclusione canonica. Allora $\mathcal{A}|_Z = i_\flat \mathcal{A}$.

Dimostrazione

Per $E \in i_\flat \mathcal{A}$ vale se e solo se $E = i^{-1}(F)$ per qualche $F \in \mathcal{A}$, ma per ogni $F \in 2^X$ vale $i^{-1}(F) = F \cap Z$, dunque $E = F \cap Z$ per qualche $F \in \mathcal{A}$ e quindi $E \in \mathcal{A}|_Z$.

$\square$

Definizione 1.1.5: Sottomisura esterna

Sia X un insieme, $Z \subset X$ un suo sottoinsieme, $i : Z \to X$ l'inclusione canonica e sia $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ una misura esterna su X.
Allora $i_\flat \mu$ si dice ***sottomisura esterna*** su Z rispetto a X.

Notiamo che è effettivamente una misura esterna come visto in 1.1.3, adesso curiamoci di trovare un modo di calcolarla magari

Proposizione 1.1.4: Sottomisura esterna e restrizione

Nella situazione della definizione 1.1.5, vale $i_\flat \mu = \mu|_{2^Z} = \mu \cdot \chi_Z$.

Dimostrazione

Per definizione, per ogni $E \subset X$ si ha $i_\flat \mu(E) = \mu(i^{-1}(E)) = \mu(E \cap Z) = \mu(E) = \mu|_{2^Z}(E)$.

$\square$

1.1.3 Spazi misurabili prodotto

A onor di completezza, sarebbe possibile trattare anche i prodotti da questo punto di vista, ma si tratta di costruzioni complesse e

Definizione 1.1.6: Spazio misurabile prodotto

Siano $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ due spazi misurabili, $X \times Y$ il prodotto cartesiano dei due insiemi e $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ le proiezioni canoniche.
Lo ***spazio misurabile prodotto*** $(X, \mathcal{A}) \otimes (X, \mathcal{B})$ è lo spazio $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ dove $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ è la più piccola σ-algebra che contenga gli insiemi della forma $A \times B$ con $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, in altre parole, definiamo in questo modo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \langle \{A \times B \in 2^{X \times Y} : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \rangle$.

Osservazione 1.1.1

Siano $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ due spazi misurabili, $X \times Y$ il prodotto cartesiano dei due insiemi e $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ le proiezioni canoniche.
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ è la più piccola σ-algebra che renda misurabili sia π_X che π_Y.

Dimostrazione

Notiamo che la tesi può essere riscritta come $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\subset\langle\pi_{X\flat}\mathcal{A}\cup\pi_{Y\flat}\mathcal{B}\rangle$, in quanto una σ-algebra che renda misurabili le proiezioni deve necessariamente contenere l'unione delle σ-algebre iniziali[a], ma quindi per l'ipotesi di minimalità di $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ possiamo semplicemente richiedere $\{A\times B : A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}\subset\langle\pi_{X\flat}\mathcal{A}\cup\pi_{Y\flat}\mathcal{B}\rangle$.
Notiamo che in generale, $A\times B=(A\times Y)\cap(X\times B)$, rispettivamente elementi di $\pi_{X\flat}\mathcal{A}$ e $\pi_{Y\flat}\mathcal{B}$, quindi deve appartenere alla σ-algebra generata dalla loro unione.

□

[a]Notiamo che $\pi_{X\flat}\mathcal{A}=\{A\times Y\in 2^{X\times Y} : A\in\mathcal{A}\}$

Definizione 1.1.7: Misura esterna prodotto

Siano X, Y due insiemi rispettivamente con misure esterne $\mu : X\to[0,+\infty]$ e $\nu : Y\to[0,+\infty]$. Una ***misura prodotto*** di μ e ν è una misura esterna $\mu\otimes\nu$ su $X\times Y$ tale che $(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$

1.1.4 Spazi misurabili rinforzati

Un concetto fondamentale in teoria della misura è quello proprietà valide μ-quasi ovunque, ma sorge il problema della scelta di una misura. In realtà è possibile "indebolire" questo requisito, specificando la famiglia degli insiemi nulli di uno spazio misurabile e imponendo un requisito di "fedeltà" per le misure che vorremo definire su di esso.

Definizione 1.1.8: σ-ideale

Sia X un insieme e $I\subset 2^X$ una famiglia di insiemi tale che:

1. $\varnothing\in I$.
2. Se $N\in I$ e $M\subset N$ allora $M\in I$.
3. Se $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset I$ allora $\cup_{\mathbb{N}}N_i\in I$.

Allora I si dice ***σ-ideale*** su X. In particolare, se $X\notin I$, allora I si dice ***σ-ideale proprio***, altrimenti improprio[a].

[a]In quanto avremmo $I=2^X$, non particolarmente utile nel migliore dei casi.

Definizione 1.1.9: Spazio fortemente misurabile

Sia X un insieme, $\mathcal{M}$ una σ-algebra su X e $\mathcal{N}$ un σ-ideale su X tale che $\mathbb{N}\subset\mathcal{M}$.
Allora $(X,\mathcal{M},\mathcal{N})$ si dice ***spazio fortemente misurabile*** e gli insiemi di $\mathcal{N}$ si dicono ***nulli*** o trascurabili. La coppia $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ è detta ***struttura fortemente misurabile***.

Ovviamente ogni spazio misurabile rinforzato è uno spazio misurabile e una misura esterna μ su un insieme X induce su di esso una struttura fortemente misurabile allo stesso modo in cui induce una normale struttura misurabile, con la coppia $(\mathcal{M}_\mu,\mathcal{N}_\mu)$ dove $\mathcal{N}_\mu:=\{E\in\mathcal{M} : \mu(E)=0\}$.

Definizione 1.1.10: Validità quasi ovunque

Sia $(X,\mathcal{M},\mathcal{N})$ uno spazio fortemente misurabile.
Una proprietà P sugli elementi di X si dice ***valida quasi ovunque*** se $\{x\in X : \neg P(x)\}\in\mathcal{N}$ e scriviamo $\forall_{\mathcal{N}}x\in X, P(x)$.

Notiamo che se $\mathcal{N}=\mathcal{N}_\mu$ per una misura μ, questa diventa la definizione di validità μ-quasi ovunque

Notazione 1.1.1

Sia $(X,\mathcal{M},\mathcal{N})$ uno spazio fortemente misurabile e siano $f, g : X\to\mathbb{R}$. Allora $=_{\mathbb{N}}$, $\geq_{\mathcal{N}}$, $>_{\mathcal{N}}$, $\leq_{\mathcal{N}}$ e $<_{\mathcal{N}}$ si riferiscono alle stesse relazioni intese quasi ovunque.
Se $\mathcal{N}=\mathcal{N}_\mu$ per qualche misura esterna, invece di scrivere $\mathcal{N}$ al pedice scriveremo μ.

1.2 Teoria dell'integrazione

1.2.1 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{A},\mu) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & (Y, f_\sharp\mathcal{A}, f_\sharp\mu) \arrow[d, "g"] \\
& (\mathbb{R},\mathcal{M}_\mathcal{L},\mathcal{L})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{B},\nu) \arrow[d, "g"] & (X, f_\flat\mathcal{B}, f_\flat\nu) \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "g\circ f"] \\
(\mathbb{R},\mathcal{M}_\mathcal{L},\mathcal{L}) &
\end{tikzcd}$$

Dove $\mathcal{L}$ è la misura di Lebesgue sui numeri reali.

Teorema 1.2.1: Integrazione indotta

Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio con misura, sia Y un insieme, sia $f : X \to Y$ una funzione biettiva e sia $g : (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{L}^1)$ una funzione $f\mathcal{A}$-misurabile.
Allora g è $f\mu$-integrabile se e solo se $g\circ f$ è μ-integrabile, e vale l'identità

$$\int g \,\mathrm{d}f\mu = \int g\circ f \,\mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione

Assumiamo che g sia $f\mu$-integrabile. Allora vale

$$\int g \,\mathrm{d}f\mu = \int_* g \,\mathrm{d}f\mu = \sup\{I_{f\mu}(\varphi) : \varphi\in\Sigma_-(g)\} = \sup\left\{\sum_i a_i f\mu(\varphi^{-1}(\{a_i\})) : \varphi\in\Sigma_-(g)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_i a_i \mu(f^{-1}(\varphi^{-1}(\{a_i\}))) : \varphi\in\Sigma_-(g)\right\} = \sup\left\{\sum_i a_i \mu((\varphi\circ f)^{-1}(\{a_i\})) : \varphi\circ f\in\Sigma_-(g\circ f)\right\}$$

$$\text{con } \psi := \varphi\circ f, \quad \int_* g \,\mathrm{d}f\mu = \sup\{I_\mu(\psi) : \psi\in\Sigma_-(g\circ f)\} = \int_* g\circ f \,\mathrm{d}\mu$$

La dimostrazione è assolutamente analoga per l'integrale superiore e nella direzione opposta assumendo l'integrabilità di $g\circ f$. Le varie uguaglianze seguono dalla biettività di f.

□

Osservazione 1.2.1: Girotondone per il TFA

L'obiettivo di questo scherzetto è dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate, ovvero

$$\int g \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g\circ f)\cdot J_f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Ma c'è un problema: noi abbiamo dimostrato un risultato dalla forma leggermente diversa, ovvero

$$\int g \,\mathrm{d}f\mu = \int g\circ f \,\mathrm{d}\mu$$

Osservando il TFA ci aspettiamo che la nostra $\mathrm{d}f\mu$ corrisponda a $J_f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n$, dunque dobbiamo fare un piccolo giretto usando la biettività di f:

$$\int g \,\mathrm{d}\lambda = \int g\circ f\circ f^{-1} \,\mathrm{d}\lambda = \int g\circ f \,\mathrm{d}f^{-1}\lambda$$

In questo modo ci basta riuscire a far corrispondere $J_f \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n$ a $\mathrm{d}f^{-1}\mathcal{L}^n$

1.3 Derivata di Radòn-Nikodym

Teorema 1.3.1: Teorema di Radòn-Nikodym

Sia $(X,\mathcal{A})$ uno spazio misurabile e siano ν,μ misure su $(X,\mathcal{A})$ tali che μ sia σ-finita e ν sia assolutamente continua rispetto a μ. Allora esiste una funzione $\mathcal{A}$-misurabile $f : X \to [0,+\infty[$ tale che per ogni $E\in\mathcal{A}$ si abbia

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

E per una funzione ν-integrabile $g : (X, \mathcal{A}, \nu) \to \mathbb{R}$ vale

$$\int g \, \mathrm{d}\nu = \int g \cdot f \, \mathrm{d}\mu$$

Definizione 1.3.1: Derivata di Radòn-Nikodym

Nella situazione precedente, la funzione f si dice ***derivata di Radòn-Nikodym*** di ν rispetto a μ e si indica con

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$$

Definizione 1.3.2: Funzioni R-N

Siano $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ due spazi con misure σ-finite.
Una funzione $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B}, \nu)$ si dice ***funzione R-N*** se:

1. f è misurabile
2. Per ogni $E \in \mathcal{B}$ tale che $\nu(E) = 0$ si ha $\mu(f^{-1}(E)) = 0$

Osservazione 1.3.1: Categoria degli spazi con misure σ-finite e delle funzioni R-N

La classe degli spazi con misure σ-finite con la classe delle funzioni R-N e l'usuale composizione di funzioni è una categoria, che chiamiamo $\mathbf{Mea}_{R-N}$.

Dimostrazione

Controlliamo le varie proprietà:

- Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura σ-finita. La funzione identità id_X è evidentemente una funzione R-N.
- Siano $f : (X, \mathcal{A}, \lambda) \to (Y, \mathcal{B}, \mu)$ e $g : (Y, \mathcal{B}, \mu) \to (Z, \mathcal{C}, \nu)$ due funzioni R-N. Notiamo che per ogni $E \in \mathcal{C}$ tale che $\nu(E) = 0$ si ha $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(E))$ e $\mu(g^{-1}(E)) = 0$, dunque $\lambda((g \circ f)^{-1}(E)) = 0$.
- La composizione eredita l'associatività dalla composizione di funzioni in $\mathbf{Set}$.

$\square$

Proposizione 1.3.1: Derivata di R-N per Lipschitziane

Sia (X, d, μ) uno spazio metrico di dimensione $n \in \mathbb{Z}_+$ con una misura μ di Radòn (rispetto alla σ-algebra Boreliana indotta dalla metrica) invariante per traslazioni (ovvero, $\mu(B_r(x)) = \mu(B_r(y))$ per ogni x, y in X)[a] e sia $F : X \to X$ una funzione biettiva di Lipschitz con costante di Lipschitz $L > 0$.
Allora $F^{-1}\mu \ll \mu$ e L^n e la derivata di Radòn-Nikodym di $F^{-1}\mu$ rispetto a μ è maggiorata μ-quasi ovunque da L^n.

Dimostrazione

È sufficiente dimostrarlo sulle palle aperte, dato che queste costituiscono una base della topologia e dunque della σ-algebra Boreliana.
Per ogni $r > 0$ e ogni $x \in X$ abbiamo che $F(B_r(x)) \subset B_{Lr}(F(x))$ che implica $\mu(F(B_r(x))) \leq \mu(B_{Lr}(F(x))) = L^n \mu(B_r(F(x)))$ il che implica che per ogni insieme, $F^{-1}(E) \leq \mu(E)$, dunque sappiamo che deve esistere $g : (X, d, \mu) \to [0, +\infty[$ tale che

$$F^{-1}\mu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$$

Ancora una volta lavoriamo sulle palle

$$\forall r > 0, \forall x \in X, 0 \leq \int_{B_r(x)} g(y) \, \mathrm{d}\mu(y) \leq \int_{B_r(x)} L^n \, \mathrm{d}\mu(y) \Rightarrow g \leq_\mu L^n$$

□

[a]Onestamente non so se questa "uniformità" vada codificata come una proprietà dello spazio o della misura, dato che il nostro fine è quello di applicarlo alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ non ci poniamo troppi problemi in quanto $\mathbb{R}^n$ è tutto piatto e $\mathcal{L}^n$ è invariante per traslazioni.

1.4 Il viaggio verso il TFA

Cercheremo di dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate ***lineari*** con la speranza di estendere questo ragionamento a cambiamenti di coordinate ***differenziabili***, ovvero localmente lineari. Per fare questo, ci permetteremo di sostituire i plurirettangoli nella definizione della misura di Lebesgue ai pluriparallelogrammi

Lemma 1.4.1: Misura indotta da un cambiamento di coordinate lineare

Sia $F : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_\mathcal{L}, \mathcal{L}^n) \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare invertibile.
Allora $F^{-1}\mathcal{L}^n = |\det F| \cdot \mathcal{L}^n$ e dunque

$$F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det F| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione

Sia $E \in F\mathcal{M}_\mathcal{L}$. Per definizione di misura indotta, abbiamo che $F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(F(E))$ e che, come visto nel corso di Geometria A è uguale a $|\det F| \cdot \mathcal{L}^n(E)$.

□

Teorema 1.4.1: TFA per cambiamenti di coordinate lineari

Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare invertibile e sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n$-integrabile. Vale il seguente fatto:

$$\int g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g \circ F) \cdot |\det F| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Teorema 1.4.2: Derivata R-N di una misura finale di diffeomorfismi

Sia $\varphi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_\mathcal{L}, \mathcal{L}^n) \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo locale e sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}\mathcal{L}^n}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n} = |\det D_\varphi|$$

Nel senso della definizione 1.3.1 della derivata di Radòn-Nikodym.

Dimostrazione

Il fatto che $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \ll \mathcal{L}^n$ segue dalla proposizione 1.3.1, infatti se φ è un diffeomorfismo è almeno localmente lipschitziana e in ogni insieme limitato V ha costante di Lipschitz $\sup_V |\det D_\varphi|$.
Poniamo $|\det D_\varphi(x)| =: J(x)$.
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Localmente la trasformazione φ agisce come una trasformazione lineare D_φ, dunque in intorni V_i sufficientemente piccoli di punti $x_i \in E$ indicizzati su un insieme numerabile I applichiamo il lemma **??** e abbiamo $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \sim D_\varphi\mathcal{L}^n = J(x) \cdot \mathcal{L}^n$. Dunque posti possiamo scrivere

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \sum_{i \in I} \int_{V_i} J(x_i) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \sum_{i \in I} \int_E J(x_i)\chi_{V_i}(y) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(y)$$

Facendo una *mossa alla Gottinga* riconosciamo una regolarità sufficiente ad applicare uno strano genere di integrale di Riemann rendendo sempre più piccoli i nostri intorni aumentando il loro numero e otteniamo

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E J \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_E |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

□

Teorema 1.4.3: TFA

Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo locale e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n$-integrabile. Vale

$$\int g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g \circ \varphi) \cdot |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione

La dimostrazione è banale combinando i non banali teoremi 1.2.1, 1.3.1 e **??**.

$\square$

Capitolo 2

(APERTO) Tentativi disperati di mettere una bella misura su Zariski

2.1 Definizioni preliminari

Definizione 2.1.1: Misura esterna

Sia X un insieme e sia 2^X il suo insieme delle parti. Una ***misura esterna*** su X è una funzione $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ tale che:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Se $E \subset F$ allora $\mu(E) \leq \mu(F)$
3. Per ogni $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vale
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Teorema 2.1.1: Le misure di Radòn funzionano male su Zariski

Sia (X, τ) uno spazio topologico Noetheriano, sia $\mathcal{B}$ la famiglia dei suoi boreliani e sia $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ una misura di Radòn su X. Valgono i seguenti

1. $\mu(X) < +\infty$
2. Se V è un chiuso irriducibile, $\mu(V) = 0$
3. Se A è un aperto, $\mu(A) = \mu(X)$

Dimostrazione

1. Dato che in uno spazio topologico Noetheriano tutti i sottoinsiemi sono compatti, vale banalmente.

Capitolo 3

(APERTO) Congettura di Calabri

Definizione 3.0.1: Numeri binari

Sia $n \in \mathbb{Z}_+$, questo si dice ***numero binario in base*** b se

$$n = \sum_{i \in I} b^i$$

Con $I \subset \mathbb{N}$ finito. Chiamiamo ***rango*** di n il valore $\mathrm{rk}(n) := \max I$
Alternativamente possiamo definire l'insieme B_b dei numeri binari per induzione

$$\frac{}{1}[B_b 0] \qquad \frac{n}{bn}[B_b 1] \qquad \frac{n}{bn+1}[B_b 2]$$

Osservazione 3.0.1

Tutti i numeri binari in base b rappresentati in base b hanno come cifre solo 0 e 1.

Definizione 3.0.2: Funzione conta divisori

Definiamo la funzione

$$D : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+ \qquad \text{come} \qquad D(n) = \#\{d \in \mathbb{Z}_+ : d|n\}$$

Lemma 3.0.1: Parità di D

Abbiamo che $D(n)$ è dispari se e solo se n è un quadrato perfetto.

Dimostrazione

Automaticamente, $D(n) = 1 \Leftrightarrow n = 1$, quindi poniamo $n > 1$.
Per il teorema fondamentale dell'aritmetica possiamo scrivere n come

$$n = \prod_{i \in I} p_i^{q_i} \qquad \text{dove } p_i \text{ è primo per ogni } i \in I$$

E dato che D è evidentemente moltiplicativa sui coprimi, abbiamo:

$$D(n) = \prod_{i \in I} D(p_i^{q_i}) = \prod_{i \in I} \{p^0, ..., p^{q_i}\} = \prod_{i \in I} (q_i + 1)$$

Dato che un prodotto di interi è dispari se e solo se tutti i fattori sono dispari, abbiamo che ogni q_i deve essere $2k_i$ per qualche k, ovvero

$$n = \prod_{i \in I} p_i^{2k_i} = \left(\prod_{i \in I} p_i^{k_i} \right)^2 = m^2 \qquad \text{per qualche } m \in \mathbb{Z}_+$$

Teorema 3.0.1: Congettura di Calabri I

Sia $n \in B_{10}$ tale che $n \cong 1 \mod 2$. Allora $D(n) \cong 0 \mod 2$.

Assumiamo che $n \in B_{10}$ sia un controesempio della congettura di Calabri, dunque $D(n)$ è dispari, e sappiamo già che n deve essere dispari; ricordando che un quadrato è dispari se e solo se la sua radice è dispari, abbiamo che $n = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}_+$.
A questo punto possiamo notare che $n - 1 = 4(k^2 + k)$ dunque $4|n - 1$ e al contempo $10|n - 1$, perciò vale $100|n - 1$ e perciò $25|k^2 + k$. Automaticamente possiamo vedere che i casi sono due:

1. $$k \cong 0 \mod 25 \Rightarrow k = 25x \Rightarrow n = 4((25x)^2 + 25x) \Rightarrow n = 100(25x^2 + x)$$

2. $$k \cong -1 \mod 25 \Rightarrow k = 25x - 1 \Rightarrow n = 4((25x - 1)^2 + 25x - 1) \Rightarrow n = 100(25x^2 - x)$$

Dato che $n - 1 \in B_{10}$, dobbiamo indagare i numeri binari della forma $25x^2 \pm x$. Osserviamo che devono essere necessariamente pari, in quanto
$$25x^2 \pm x \cong x^2 \pm x \cong x(x \pm 1) \cong 0 \mod 2$$
Allora $x = 2y$ per qualche y e dunque $n - 1 = 100(100y^2 + 2y)$ e quindi $n = (100y)^2 + 2(100y) + 1 = (100y + 1)^2$. Abbiamo dunque l'uguaglianza
$$n = (2k+1)^2 = (100y + 1)^2 \Rightarrow k = 50y \qquad \text{per l'iniettività di } m \mapsto (m+1)^2 \text{ su } \mathbb{Z}_+$$
Abbiamo quindi che $\frac{n-1}{100} \in B_{10}$ e inoltre $\frac{n-1}{100} \cong 0 \mod 2$, dunque $1000|n - 1$, perciò Abbiamo

Teorema 3.0.2: Congettura di Calabri II

Gli unici numeri binari in base 10 che sono anche quadrati perfetti sono della forma 10^{2n}.

Osserviamo che la congettura 3.0.2 implica la 3.0.1