

Calcolo delle Variazioni

Filippo \mathcal{L} Troncana

dalle lezioni del prof. Marco Bonacini dell'omonimo corso per il corso di laurea in Matematica

A.A. 2024/2025

Indice

Introduzione

Il calcolo delle variazioni è quella branca della matematica che affronta il problema di trovare in una data famiglia (di funzioni, superfici, curve...) l'oggetto o gli oggetti che minimizzano una certa grandezza ad essi associata, ad esempio il problema della brachistocrona è uno degli esempi più classici

Esempi introduttivi

Metodi classici: funzioni reali

Supponiamo di avere una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ della quale vogliamo trovare i punti di minimo. Se la nostra funzione è differenziabile su $]a, b[$ possiamo usare il teorema di Fermat che ci dà una condizione **necessaria ma non sufficiente** affinché un punto $x_0 \in]a, b[$ sia un punto di massimo, ovvero $f'(x_0) = 0$.

Se la nostra funzione è doppiamente differenziabile, possiamo ottenere un'altra condizione necessaria, ovvero che $f'(x_0) = 0$ e che $f''(x_0) \geq 0$; inoltre sempre lavorando sulla derivata seconda otteniamo quella che è una condizione **sufficiente ma non necessaria**, ovvero che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$.

Scartando l'ipotesi di doppia derivabilità, possiamo sostituirla con l'ipotesi di convessità, rendendo $f'(x_0) = 0$ una condizione sufficiente per la minimalità di x_0 .

I metodi classici (o indiretti) si basano sulla generalizzazione di questo approccio a spazi di funzioni, come vediamo ora.

Metodi classici: integrale di Dirichlet

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto a chiusura compatta con frontiera $\partial\Omega$ regolare e sia $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo il nostro spazio X e il nostro funzionale $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ come:

$$X = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = g\}, \quad F(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, d\mathcal{L}^n, \quad \text{inoltre assumiamo che esista } u_0 = \arg \min_{u \in X} F(u).$$

Analogamente a quanto visto per le funzioni reali, quali condizioni necessarie o sufficienti possiamo identificare per il nostro punto di minimo u_0 ? Ragionando sull'approccio del teorema di Fermat, possiamo formulare la condizione al primo ordine della nostra funzione reale come

$$0 = f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

Consideriamo lo spazio $C_c^1(\Omega)$ delle funzioni differenziabili a supporto compatto contenuto in Ω e per una $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$ definiamo la funzione $u_t := u_0 + t\varphi$, che appartiene a X per ogni $t \in \mathbb{R}^1$. Usiamo la nostra φ a mo' di "vettore della base canonica" come facevamo in \mathbb{R}^n :

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_t) - F(u_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\Omega} \|\nabla u_t\|^2 \, d\mathcal{L}^n - \int_{\Omega} \|\nabla u_0\|^2 \, d\mathcal{L}^n \right)$$

Sviluppando i quadrati e usando la linearità dell'integrale otteniamo

$$\frac{1}{t} \left(\int_{\Omega} \|\nabla u_t\|^2 \, d\mathcal{L}^n - \int_{\Omega} \|\nabla u_0\|^2 \, d\mathcal{L}^n \right) = \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_0\|^2}{t} + \frac{2t \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi}{t} + \frac{t^2 \|\nabla \varphi\|^2}{t} - \frac{\|\nabla u_0\|^2}{t} \, d\mathcal{L}^n \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2 \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi \, d\mathcal{L}^n.$$

Battezziamo questa quantità che abbiamo trovato **variazione prima di F rispetto a φ in u_0** e la indichiamo con $\delta F(u_0, \varphi)$, sarà analoga alla nostra derivata direzionale; inoltre, se avessimo qualche ragione di assumere che u_0 sia anche $C^2(\bar{\Omega})$ potremmo usare il teorema della divergenza per scrivere anche

$$0 = \delta F(u_0, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi \, d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} (-\Delta u_0) \varphi \, d\mathcal{L}^n + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{du_0}{d\nu} \, dS = 0$$

Sfruttando il lemma 1.1.1 otteniamo che

$$\int_{\Omega} (-\Delta u_0) \varphi \, d\mathcal{L}^n = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \Leftrightarrow -\Delta u_0 = 0$$

Perbacco! Assumendo che il nostro punto di minimo esista, abbiamo ottenuto che questo deve soddisfare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Ci sono due criticità tuttavia: abbiamo assunto tante cose belle sulla nostra u_0 (in primo luogo, che questa esista) e siamo arrivati a scrivere una PDE, oggetti che in generale non sono di facilissima trattazione e figuriamoci risoluzione. Per questo nel ventesimo secolo si sono sviluppati i cosiddetti metodi diretti.

¹Banalmente, in quanto $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$

Metodi diretti: teorema di Weierstrass

Tornando all'esempio della nostra funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, potremmo ricordarci che abbiamo un teorema che ci garantisce l'esistenza del minimo assumendo semplicemente la continuità di f , ovvero il teorema di Weierstrass, la cui dimostrazione si riassume in questi step:

1. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione minimizzante, ovvero tale che $f(x_n) \rightarrow \inf_{[a,b]} f$
2. L'intervallo $[a, b]$ è compatto, dunque esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ che converge a $\hat{x} \in [a, b]$.
3. Dato che f è continua, $f(\hat{x}) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$.

Notiamo che sarebbe bastata la semicontinuità inferiore di f , e che questo approccio dipende dalla topologia di $[a, b]$: i metodi diretti si basano proprio su questo, ovvero su una forma più generale del teorema di Weierstrass (sostituendo $[a, b]$ con uno spazio topologico sequenzialmente compatto) e scegliendo sulla nostra famiglia di oggetti la topologia adeguata.

Chiaramente abbiamo un piccolo trade-off: se la nostra topologia è molto fine (= tanti aperti), è facile dimostrare la continuità del nostro funzionale ma è difficile avere la compattezza della nostra famiglia; al contrario, con topologie meno fini abbiamo una compattezza più semplice da dimostrare ma una continuità più difficile, per questo è utile ridurre le ipotesi (ad esempio con la semicontinuità inferiore invece della continuità).

Esercizio 0.0.1: Dimostrare che esiste una successione minimizzante

Sia X un insieme non vuoto e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Si mostri che esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X tale che $f(x_n) \rightarrow \inf_X f$.

Soluzione

Sia $y_0 \in f(X)$. Se $y_0 = \inf_X f$, prendiamo una qualsiasi successione in $f^{-1}(y_0)$; altrimenti, e per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ prendiamo^a $y_{n+1} \in f(X) \cap]-\infty, y_n[$, fermandoci se dovessimo arrivare a $\inf_X f$.

Per ogni y_n scegliamo^b $x_n \in f^{-1}(y_n)$ e abbiamo ottenuto la nostra successione minimizzante.



^aProbabilmente c'è un modo per aggirare l'utilizzo di scelta dipendente ma non ho davvero voglia di pensarci.

^bIdem ma con scelta numerabile.

Cosa tratteremo?

Durante il corso tratteremo per lo più problemi unidimensionali in forma integrale, ovvero:

$$X = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ ammette una qualche } u'\}, \quad F(u) = \int_{[a,b]} f(x, u(x), u'(x)) \, d\mathcal{L}^1(x), \quad \text{con } f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Il nostro funzionale F spesso sarà chiamato **energia**, mentre la funzione f avrà spesso come variabili $f(x, s, p)$ e sarà chiamata **lagrangiana**; le sue derivate parziali saranno indicate con f_x, f_s, f_p .

Ulteriori esempi introduttivi

La brachistocrona

Problema di Didone, o isoperimetrico

Superfici di rivoluzione di area minima

Problema di Plateau, o delle superfici minime

Principio di minima azione

Si veda l'esercizio 1.1.1

Capitolo 1

Metodi classici

1.1 Le equazioni di Eulero–Lagrange

La situazione che analizziamo adesso è questa:

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \quad \text{con } a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a < b,$$

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, dx \quad \text{con } f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Supponiamo che F ammetta un punto di minimo $u_0 \in X$, fissiamo una $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]a, b[)$ e definiamo per $t \in \mathbb{R}$ la funzione $u_t = u_0 + t\varphi$, che chiaramente appartiene a X come visto nei primi esempi. Per ipotesi di minimalità, allora la funzione $g(t) := F(u_t)$ deve avere un punto stazionario in $t = 0$. Se g fosse \mathcal{C}^1 (cosa che vediamo sarà verificata grazie al prossimo teorema) potremmo applicare il teorema di Fermat per ottenere la condizione:

$$0 = g'(0) = \left. \frac{d}{dt} F(u_0 + t\varphi) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, u_0(x) + t\varphi(x), u_0'(x) + t\varphi'(x)) \, dx \right|_{t=0}.$$

Teorema 1.1.1: Derivazione sotto il segno di integrale

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $h : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

- $\forall t \in I$, la mappa $x \mapsto h(x, t)$ è \mathcal{L}^n -integrabile;
- $\forall x \in A$, la mappa $t \mapsto h(x, t)$ è derivabile;
- Esiste una funzione $H : A \rightarrow \mathbb{R}$ maggiorante essenziale \mathcal{L}^n -integrabile della mappa $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} h(x, t)$ per ogni $t \in I$.

Allora vale

$$\frac{d}{dt} \int_A h(x, t) \, d\mathcal{L}^n(x) = \int_A \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \, d\mathcal{L}^n(x).$$

Applicando il teorema alla nostra $h(x, t) = f(x, u_0(x) + t\varphi(x), u_0'(x) + t\varphi'(x))$ e facendo un po' di derivate otteniamo

Definizione 1.1.1: Variazione prima

Nella situazione 1.1, la quantità

$$\delta F(u, \varphi) := \int_a^b f_s(x, u(x), u'(x))\varphi(x) + f_p(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \, dx$$

è detta **variazione prima** in u del funzionale F lungo φ .

E quindi con quanto fatto finora abbiamo dimostrato

Proposizione 1.1.1: Equazione di Eulero–Lagrange debole

Nella situazione 1.1, se u_0 è un punto di minimo allora per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([a, b])$ soddisfa l'**equazione di Eulero–Lagrange debole**:

$$\delta F(u_0, \varphi) = 0 = \int_a^b f_s(x, u(x), u'(x))\varphi(x) + f_p(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \, dx.$$

Una funzione che soddisfa l'equazione si dice **estremale**.

Adesso supponiamo anche di sapere¹ che $f_p(x, u_0(x), u'_0(x))$ sia $\mathcal{C}^1([a, b])$ (ad esempio, se avessimo motivo di credere che f e u_0 siano \mathcal{C}^2); integrando per parti otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 = \delta F(u_0, \varphi) &= \int_a^b f_s(x, u_0(x), u'_0(x))\varphi(x) \, dx + \cancel{[f_p(x, u_0(x), u'_0(x))\varphi(x)]_a^b} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [f_p(x, u_0(x), u'_0(x))] \varphi(x) \, dx = \\ &= \int_a^b \left[f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{\partial}{\partial x} f_p(x, u_0(x), u'_0(x)) \right] \varphi(x) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Adesso useremo un piccolo lemma, ovvero:

Lemma 1.1.1: Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni

Sia $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([a, b])$ vale

$$\int_a^b v(x)\varphi(x) \, dx = 0,$$

allora v è identicamente nulla su $[a, b]$.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in]a, b[$ tale che $v(x_0) > 0$. Allora per continuità di v_0 esiste un intorno aperto I tale che per ogni $x \in I$ vale $v(x) \geq v(x_0)/2$; prendo una $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([a, b])$ tale che $\varphi > 0$ su I e $\varphi = 0$ su $]a, b[\setminus I$, allora vale

$$0 = \int_a^b v(x)\varphi(x) \, dx \geq \int_I \underbrace{v(x)\varphi(x)}_{>0} \, dx > 0,$$

assurdo, dunque $v \equiv 0$.

□

^aSe fosse sugli estremi varrebbe comunque un argomento assolutamente analogo.

^bWLOG

Allora possiamo applicare questo lemma alla relazione di prima per ottenere

Teorema 1.1.2: Equazioni di Eulero–Lagrange

Nella situazione 1.1, vale la proposizione 1.1.1.

Inoltre, se $f_p \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ vale anche

$$f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{\partial}{\partial x} f_p(x, u_0(x), u'_0(x)) = 0.$$

Questa condizione si dice **equazione di Eulero–Lagrange forte**.

Esercizio 1.1.1: Eulero–Lagrange per il moto

Sia $\gamma : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la legge oraria della traiettoria di un punto materiale di massa $m > 0$ sottoposto a un campo di forze $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conservativo, ovvero tale che esista $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $E = \nabla V$.

¹Per qualche motivo

Sappiamo che γ soddisfa le equazioni del moto

$$m\gamma''(t) = E(\gamma(t));$$

definiamo il funzionale **azione** come

$$S(\gamma) = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m(\gamma'(t))^2 - V(\gamma(t)) \, dt.$$

Si mostri (supponendo adeguate regolarità) che i minimi di S risolvono le equazioni del moto.

Soluzione

Risolveremo il caso unidimensionale, in quanto il caso tridimensionale è semplicemente un sistema di tre casi unidimensionali indipendenti tra loro.

Supponiamo che γ sia un minimo di S e osserviamo che la lagrangiana di S è data da:

$$f(x, s, p) = \frac{1}{2} mp^2 - V(s) \Rightarrow \begin{cases} f_s(x, s, p) = \nabla V(s) = E(s) \\ f_p(x, s, p) = mp \end{cases}.$$

Applicando il teorema 1.1.2 abbiamo dunque

$$E(\gamma(t)) - \frac{\partial}{\partial t} m\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow E(\gamma(t)) = m\gamma''(t).$$



Capitolo 2

Metodi diretti

Bibliografia

- [1] F. Angrisani, G. Ascione, C. Leone e C. Mantegazza, *Appunti di Calcolo delle Variazioni*. 2019.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 2011.
- [3] B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*. 2009.
- [4] M. Giaquinta e S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*. 2004.
- [5] G. Buttazzo, M. Giaquinta e S. Hildebrandt, *One-dimensional Variational Problems*. 1999.