

# TFA per cambiamenti di coordinate

Filippo  $\mathcal{L}$ . Troncana

A.A. 2023/2024

## 1 Misure e $\sigma$ -algebre indotte

### Definizione 1.1: $\sigma$ -algebra finale

Sia  $(X, \mathcal{A})$  uno spazio misurabile, sia  $Y$  un insieme e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione biettiva. La  **$\sigma$ -algebra** finale indotta da  $f$  rispetto a  $\mathcal{A}$  è la famiglia

$$f\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

### Osservazione 1.1

La  $\sigma$ -algebra finale di  $f$  rispetto a  $\mathcal{A}$  è la più grande  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  tale che  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Sigma)$  sia misurabile.

#### Dimostrazione

Sia  $\Sigma \subset 2^Y$  tale che  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Sigma)$  sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni  $E \in \Sigma$ , abbiamo che  $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ , dunque  $\Sigma \subset f\mathcal{A}$ .

□

### Definizione 1.2: Misura esterna indotta

Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi, sia  $\mu$  una misura esterna su  $X$  e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione biettiva. La **misura indotta** da  $f$  rispetto a  $\mu$  è la funzione

$$f\mu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

### Proposizione 1.1

$f\mu$  è una misura esterna su  $Y$ .

#### Dimostrazione

Dimostriamo i tre assiomi di misura esterna.

1.  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Siano  $E \subset F \subset Y$ , allora  $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$ , dunque la monotonia di  $f\mu$  segue dalla monotonia di  $\mu$ .
3. Siano  $A, B \subset Y$ , allora  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  e la subaddittività segue da quella di  $\mu$

□

### Proposizione 1.2

Se  $f\mu$  è la misura indotta da  $f$  rispetto a  $\mu$ , allora  $\mathcal{M}_{f\mu} = f\mathcal{M}_\mu$ .

### Dimostrazione

TODO

□

TODO: è possibile definire una duale  $\sigma$ -algebra iniziale e una misura iniziale, ma per la nostra trattazione è sufficiente la versione finale.

## 2 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{array}{ccc}
(X, \mathcal{A}, \mu) & \xrightarrow{f} & (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \\
& \searrow g \circ f & \downarrow g \\
& & (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})
\end{array}$$

### Teorema 2.1: Integrazione indotta

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura, sia  $Y$  un insieme, sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione biettiva e sia  $g : (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1)$  una funzione  $f\mathcal{A}$ -misurabile.

Allora  $g$  è  $f\mu$ -integrabile se e solo se  $g \circ f$  è  $\mu$ -integrabile, e vale l'identità

$$\int g \, df\mu = \int g \circ f \, d\mu$$

### Dimostrazione

Assumiamo che  $g$  sia  $f\mu$ -integrabile. Allora vale

$$\begin{aligned}
\int g \, df\mu &= \int_* g \, df\mu = \sup \{I_{f\mu}(\varphi) : \varphi \in \Sigma_-(g)\} = \sup \left\{ \sum_i a_i f\mu(\varphi^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \\
&= \sup \left\{ \sum_i a_i \mu(f^{-1}(\varphi^{-1}(\{a_i\}))) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \sup \left\{ \sum_i a_i \mu((\varphi \circ f)^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \circ f \in \Sigma_-(g \circ f) \right\} \\
&\quad \text{con } \psi := \varphi \circ f, \quad \int_* g \, df\mu = \sup \{I_\mu(\psi) : \psi \in \Sigma_-(g \circ f)\} = \int_* g \circ f \, d\mu
\end{aligned}$$

La dimostrazione è assolutamente analoga per l'integrale superiore e nella direzione opposta assumendo l'integrabilità di  $g \circ f$ . Le varie uguaglianze seguono dalla biettività di  $f$ .

□

### Osservazione 2.1: Girotondone per il TFA

L'obiettivo di questo scherzetto è dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate, ovvero

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ f) \cdot J_f \, d\mathcal{L}^n$$

Ma c'è un problema: noi abbiamo dimostrato un risultato dalla forma leggermente diversa, ovvero

$$\int g \, df\mu = \int g \circ f \, d\mu$$

Osservando il TFA ci aspettiamo che la nostra  $df\mu$  corrisponda a  $J_f \, d\mathcal{L}^n$ , dunque dobbiamo fare un piccolo girotto usando la biettività di  $f$ :

$$\int g \, d\lambda = \int g \circ f \circ f^{-1} \, d\lambda = \int g \circ f \, df^{-1}\lambda$$

In questo modo ci basta riuscire a far corrispondere  $J_f \, d\mathcal{L}^n$  a  $df^{-1}\lambda$

### 3 Il viaggio verso il TFA

Cercheremo di dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate **lineari** con la speranza di estendere questo ragionamento a cambiamenti di coordinate **differenziabili**, ovvero localmente lineari.

#### Lemma 3.1: Cambiamenti di coordinate lineari e misura elementare dei plurirettangoli

Sia  $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$  la famiglia degli  $n$ -plurirettangoli aperti, sia  $e : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la misura elementare e sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa lineare invertibile.

Allora  $e(f(I)) = |\det f| \cdot e(I)$  per ogni  $I \in \mathcal{I}$ .

#### Dimostrazione

Qualsiasi plurirettangolo  $I$  è biunivocamente corrispondente a un segmento di  $\mathbb{R}^n$  visto come spazio affine con la mappa

$$]a[$$

□