Pagani Modulo 1

Filippo Troncana, dalle note di Erica

A.A. 2025/2026

Indice

1 Fondamenti della meccanica classica

Spaziotempo della meccanica classica

Definizione 1.1: Assiomi per lo spaziotempo

Chiamiamo $\mathbb{V}_4$ lo ***spaziotempo della meccanica classica***. Esso rispetta i seguenti assiomi:

1. $\mathbb{V}_4$ è uno spazio topologico omeomorfo a $\mathbb{R}^4$.
2. $\mathbb{V}_4$ è un fibrato su $\mathbb{R}$, ovvero esiste una mappa $T : \mathbb{V}_4 \to \mathbb{R}$ continua e suriettiva detta ***tempo assoluto*** tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_t := T^{-1}(\{t\}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "T"] & \{t\} \times \mathbb{E}^3 \arrow[dl, "\pi_1"] \\
\{t\} &
\end{tikzcd}$$

   Le fibre Σ_t si dicono ***spazio (di simultaneità) al tempo*** t. La ***vita*** di un punto materiale P è una curva continua e iniettiva $t \mapsto P(t)$.

3. L'isomorfismo $\Sigma_t \cong \mathbb{E}^3$ è anche un isomorfismo di spazi euclidei orientati, e a ciascun Σ_t è associato uno spazio vettoriale modellatore V_t

Chiamiamo ***vettore funzione del tempo*** v una mappa $t \mapsto v(t) \in V_t$.

Osservazione 1.1

Per $t \neq t'$ non esiste un isomorfismo *canonico* $\Sigma_t \cong \Sigma_{t'}$.

1.1 Cinematica

Sistemi di riferimento, velocità angolare e formule di Poisson

Definizione 1.2: Sistemi di riferimento

Una terna materiale[a] (O, e_1, e_2, e_3) determina con la sua vita in $\mathbb{V}_4$ un evento $t \mapsto O(t)$ detto ***riferimento*** e tre versori $e_i(t)$. che si dicono ***solidali*** al riferimento.
L'introduzione di un sistema di riferimento determina una famiglia di isomorfismi $\Sigma_t \cong \Sigma_{t'}$ e un'operazione di ***derivazione temporale*** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_O$ *non canonica* di versori dipendenti dal tempo che soddisfa i seguenti assiomi:

1. Linearità, ovvero
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O (\lambda v + \mu w) = \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O v + \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O w$$
2. Regola di Leibniz, ovvero
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O (v \wedge w) = v \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O w + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O v \wedge w$$
3. Costanza sui versori, ovvero
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O e_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O e_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O e_3 = 0$$

Estendiamo anche questa derivazione a funzioni scalari con:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O f := f'$$

E dunque scrivendo $v(t) = v^i(t) e_i(t)$ otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O (v^i(t) e_i(t)) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O v^i(t) \right) e_i(t)$$

[a] Quattro punti materiali linearmente indipendenti.

Proposizione 1.1: Cambiamento di coordinate

Siano $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ due sistemi di riferimento con le rispettive terne $(e_i(t))_i$ e $(e_i'(t))_i$ e mappa di cambiamento di coordinate $R(t) : V_t \to V_t$ vale

$$e_i'(t) = \sum_{k=1}^{3} R_{ik}(t) e_k(t) \quad \text{e dunque} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_I e_i'(t) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} R_{ik}(t) \right) e_k(t)$$

Definizione 1.3: Velocità angolare

Siano $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ due sistemi di riferimento con le rispettive terne $(e_i(t))_i$ e $(e_i'(t))_i$.
Definiamo la ***velocità angolare di*** $\mathcal{I}'$ ***rispetto a*** $\mathcal{I}$ il vettore

$$\omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(e_i'(t) \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e_i'(t) \right)$$

Teorema 1.1: Formule di Poisson

Nella situazione della definizione 1.3 vale la relazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e_i'(t) = \omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge e_i'(t)$$

Dimostrazione

Useremo i seguenti fatti:
$$a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c, \qquad e_i(t) \cdot e_k(t) = \delta_{i,k}$$

E dunque omettendo le dipendenze temporali

$$\omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge e'_i = \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(e'_k \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_k\right)\right] \wedge e'_i = e'_i \wedge \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_k\right) \wedge e'_k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[\underbrace{(e'_i \cdot e'_k)}_{\delta_{i,k}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_k - \left(e'_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_k\right) e'_k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_i - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} (e'_i \cdot e'_k)}_{0} - \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_i\right) \cdot e'_k\right) e'_k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_i\right) \cdot e'_k\right) e'_k\right] = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_i + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} e'_i$$

Corollario 1.1: Linearità della formula di Poisson

Per linearità del prodotto vettoriale segue che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} v'(t) = \omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge v'(t)$$

1.1.1 Posizione, velocità e accelerazione rispetto a riferimenti

Definizione 1.4

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$ la sezione corrispondente alla vita di un punto materiale e due sistemi di riferimento $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ con rispettive origini le sezioni $O : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$ e $O' : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$.
Definiamo la ***posizione*** di P rispetto a $\mathcal{I}$ all'istante t come il vettore di V_t

$$x_{P,\mathcal{I}}(t) := P(t) - O(t)$$

E vediamo facilmente che $x_{P,\mathcal{I}}(t) = x_{P,\mathcal{I}'}(t) + (O'(t) - O(t)) = x_{P,\mathcal{I}'}(t) + x_{O',\mathcal{I}}(t)$.
Definiamo allo stesso modo la ***velocità*** di P rispetto a $\mathcal{I}$ come il vettore di V_t

$$v_{P,\mathcal{I}}(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} x_{P,\mathcal{I}}(t)$$

Si dimostra con qualche conto che

$$v_{P,\mathcal{I}}(t) = v_{P,\mathcal{I}'}(t) + \omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}}(t) \wedge x_{P,\mathcal{I}'}(t) + v_{O',\mathcal{I}}(t)$$

Infine definiamo l'***accelerazione*** similmente

$$a_{P,\mathcal{I}} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} v_{P,\mathcal{I}}(t)$$

E si dimostra con altrettanti conti che

$$a_{P,\mathcal{I}} = a_{P,\mathcal{I}'} + 2\omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge v_{P,\mathcal{I}'} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{\mathcal{I}} \omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}}\right) \wedge x_{P,\mathcal{I}'} + \omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge \left(\omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge x_{P,\mathcal{I}'}\right) + a_{O',\mathcal{I}}$$

Proposizione 1.2: Composizione di velocità

Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$ la sezione corrispondente alla vita di un punto materiale e tre sistemi di riferimento $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$ e $\mathcal{I}''$ con rispettive origini le sezioni $O : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$, $O' : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$ e $O'' : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$.
Ancora una volta con tanti contacci terribili si dimostra che

$$v_{P,\mathcal{I}} = v_{P,\mathcal{I}''} + \left(\omega_{\mathcal{I}''/\mathcal{I}'} + \omega\mathcal{I}'/\mathcal{I}\right) \wedge x_{P,\mathcal{I}''} + v_{O'',\mathcal{I}}$$

1.1.2 Angoli di Eulero

Una trasformazione di sistemi di riferimento è individuata da una traslazione $O \mapsto O'$ e da una rotazione $\{e_1, e_2, e_3\} \mapsto \{e_1', e_2', e_3'\}$ determinata da una matrice $R \in \mathrm{SO}(3)$, in particolare richiedere che una matrice di $R \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(3)$ mandi terne ortonormali in terne ortonormali è equivalente a richiedere che questa sia simmetrica, ovvero che $RR^T = I_3$. Questa condizione pone sei vincoli indipendenti sulle entrate della matrice R, dunque questa è individuata da tre parametri[1].

Una possibile scelta di questi parametri sono gli angoli di Eulero $(\varphi, \vartheta, \psi)$, definiti nel seguente modo:

Teorema 1.2: Angoli di Eulero

Siano $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e_1''', e_2''', e_3'''\}$ due terne ortonormali.
La matrice $R : e_i \mapsto e_i'''$ è scomponibile come $R = R_\psi R_\vartheta R\varphi$, dove:

- La matrice $R_\varphi : e_i \mapsto e_i'$ che fissa $e_3' = e_3$ come asse ed esprime una rotazione di $\varphi \in [0, 2\pi]$ radianti, detto ***angolo di precessione***, rispetto ad esso.
- La matrice $R_\vartheta : e_i' \mapsto e_i''$ che fissa $e_1'' = e_1'$ come asse ed esprime una rotazione di $\vartheta \in]0, \pi[$ radianti, detto ***angolo di nutazione***, rispetto ad esso.
- La matrice $R_\psi : e_i'' \mapsto e_i'''$ che fissa $e_3''' = e_3''$ come asse ed esprime una rotazione di $\psi \in [0, 2\pi]$ radianti, detto ***angolo di rotazione propria***, rispetto ad esso.

Si ha allora

$$\begin{cases} \omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} = \dot\varphi e_3 = \dot\varphi e_3' \\ \omega_{\mathcal{I}''/\mathcal{I}'} = \dot\vartheta e_1' = \dot\vartheta e_1'' \\ \omega_{\mathcal{I}'''/\mathcal{I}''} = \dot\psi e_3'' = \dot\psi e_3''' \end{cases} \quad \Rightarrow \Omega_{\mathcal{I}'''/\mathcal{I}} = \dot\varphi e_3 + \dot\vartheta e_1' + \dot\psi e_3''$$

Questa quantità può essere rappresentata in termini degli angoli sulla terna e_1''', e_2''', e_3''' come

$$\Omega_{\mathcal{I}'''/\mathcal{I}} = \dot\varphi(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\psi e_1''' + \operatorname{sen}\vartheta \cos\psi e_2''' + \cos\vartheta e_3''') + \dot\vartheta(\cos\psi e_1''' - \operatorname{sen}\psi e_2''') + \dot\psi e_3'''$$

1.2 Elementi di meccanica del corpo rigido

Osservazione 1.2: Distribuzione delle velocità dei punti di un corpo rigido

Sia β un corpo rigido, $\mathcal{I}$ un sistema di riferimento inerziale e $\mathcal{I}'$ un sistema di riferimento solidale a β con origine la sezione $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$.
Allora per ogni $P \in \beta$ vale $v_{P,\mathcal{I}'} = 0$ e

$$v_{P,\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge x_{P,\mathcal{I}'} + v_{Q,\mathcal{I}}$$

1.2.1 Momento della quantità di moto di un corpo rigido

Definizione 1.5: Momento della quantità di moto di un corpo rigido

Sia β un corpo rigido come nell'osservazione precedente e sia $A : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^4$ una sezione che diremo ***polo***.
Definiamo il ***momento angolare in $\mathcal{I}$ della quantità di moto di β rispetto ad*** A all'istante t il vettore di V_t definito da

$$L_{A,\mathcal{I}}(t) := \int_\beta (P(t) - A(t)) \wedge v_{P,\mathcal{I}} \,\mathrm{d}m(P)$$

Dove, interpretando Σ_t come $\mathbb{R}^3$ abbiamo la misura della massa

$$m(U) = \int_U m \,\mathrm{d}\mathcal{L}^3$$

Specializziamo la definizione in due casi, omettendo la dipendenza da $\mathcal{I}$ e quella temporale:

A appartiene a β: in questo caso, l'espressione di sopra diventa

$$L_A = m(\beta)(G - A) \wedge v_A + I_A(\omega) \qquad \text{con} \qquad I_A(\omega) = \int_\beta (P - A) \wedge (\omega \wedge (P - A)) \,\mathrm{d}m(P)$$

[1]In altri termini, SO(3) è un gruppo di Lie di dimensione 3.

Dove G è il centro di massa del corpo. Questo segue dall'osservazione 1.2.

A **non appartiene a** β**:** in questo caso invece l'espressione di sopra diventa

$$L_A = m(\beta)(G-A) \wedge v_G + I_G(\omega) \qquad \text{con} \qquad I_G(\omega) = \int_\beta (P-G) \wedge (\omega \wedge (P-G))\ \mathrm{d}m(P)$$

1.2.2 Operatori e matrici d'inerzia

Nelle definizioni del momento angolare sono coinvolti i due operatori lineari $I_A, I_G : V_t \to V_t$ detti ***operatori lineari d'inerzia di*** β ***rispetto ad*** A ***o a*** G.
Dato che V_t eredita la struttura di spazio euclideo da Σ_t, ha senso porsi la domanda della loro simmetria.

Proposizione 1.3: Simmetria degli operatori d'inerzia

I_A e I_G sono operatori lineari simmetrici definiti positivi.

Dimostrazione

Per dimostrare la simmetria, prendiamo $v, w \in V_t$. Allora

$$v \cdot I_a(w) = v \cdot \int_\beta (P-A) \wedge (w \wedge (P-A))\ \mathrm{d}m(P) = \int_\beta v \cdot [(P-A) \wedge (w \wedge (P-A))]$$

Ma usando il fatto che $a \cdot (b \wedge c) = (a \wedge b) \cdot c$ otteniamo

$$v \cdot I_a(w) = \int_\beta [v \wedge (P-A)] \cdot [w \wedge (P-A)]\ \mathrm{d}m(P)$$

Che è un'espressione simmetrica in v e w.
Per dimostrare la positività prendiamo un versore u e notiamo che

$$u \cdot I_A(u) = \int_\beta [u \wedge (P-A)]^2\ \mathrm{d}m(P) = \int_\beta \|u \wedge (P-A)\|^2\ \mathrm{d}m(P) \geq 0$$

In realtà abbiamo dimostrato che sono semidefiniti positivi, in effetti sono definiti positivi a meno di corpi rigidi puntiformi o filiformi rettilinei.

□

2 Calcolo tensoriale

Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensioni finite n, m e duali $V^\vee, W^\vee$.
Notiamo che (scelte basi $\{e_i\}$ e f_i) una mappa bilineare $\eta : V \times W \to \mathbb{K}$ è definita da nm numeri $\eta(e_k, f_a) := \eta_{ka}$, infatti si ha che

$$\eta(v, w) = \eta(v^k e_k, w^a f_a) = v^k w^a \eta(e_k, f_a) = v^k w^a \eta_{ka}$$

Definizione 2.1: Prodotto tensoriale

Definiamo il ***prodotto tensoriale*** $V^\vee \otimes W^\vee$ come l'insieme $\{\eta : V \times W \to \mathbb{K} : \eta \text{ bilineare}\}$ dotato della naturale struttura di spazio vettoriale.
I suoi elementi sono detti ***tensori***. Consideriamo $\varphi := \varphi_k e^{\vee k} \in V^\vee$ e $\psi := \psi_a f^{\vee a} \in W^\vee$. Il loro prodotto tensoriale è il funzionale bilineare

$$(\varphi \otimes \psi) : (v, w) \mapsto \varphi(v)\psi(w) \in \mathbb{K}$$

Notiamo che il prodotto tensoriale è un operatore bilineare $V^* \times W^* \to V^* \otimes W^*$.