Categorie per il matematico disoccupato

Filippo L. Troncana, per il corso "Strumenti Informatici per la Matematica"

A.A. 2023/2024

1 Introduzione e prime definizioni

Durante la seconda metà del XX secolo la profondissima (sebbene apparentemente banale) osservazione del fatto che in fondo tutta la matematica è fatta di *cosi*[1] e frecce tra *cosi* ha motivato l'introduzione del concetto di Categoria.

Informalmente parlando una categoria è fatta da oggetti che condividono un certo senso di struttura e delle frecce che li collegano, che preservano questo tipo di struttura. Un esempio classico è la categoria **Set**, ovvero gli insiemi e le funzioni tra essi, oppure la categoria **Top** degli spazi topologici le cui frecce sono le funzioni continue. Procediamo a dare una definizione un po' più rigorosa.

Definizione 1.1: Categorie

Una ***categoria*** $\mathcal{C}$ consiste nelle seguenti:

- Una classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ i cui elementi sono detti ***oggetti*** di $\mathcal{C}$[a].
- Una classe $\mathrm{mor}(\mathcal{C})$ i cui elementi sono detti ***morfismi*** di $\mathcal{C}$. Ogni morfismo f ha un unico oggetto sorgente A e un unico oggetto di destinazione B, e si denota con $f : A \to B$. La classe dei morfismi tra due oggetti nella stessa categoria si indica con $\mathrm{mor}(A, B)$.
- Per ogni terna di oggetti $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, è definita una ***legge di composizione*** tra morfismi, che a un morfismo $f : A \to B$ e $g : B \to C$ associa un unico morfismo $g \circ f : A \to C$. La composizione di morfismi deve rispettare le seguenti proprietà:
  - L'***associatività***: per qualsiasi terna di morfismi $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ vale $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
  - L'esistenza del morfismo ***identità***: per ogni oggetto $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ esiste un morfismo $\mathrm{id}_X : X \to X$ tale che per ogni morfismo $f : A \to X$ e $g : X \to A$ valgano $\mathrm{id}_X \circ f = f$ e $g \circ \mathrm{id}_X = g$.

[a] Occasionalmente, scriveremo $A \in \mathcal{C}$ invece di $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ con un lieve abuso di notazione

Osservazione 1.1: Morfismi identità

Dato che per ogni oggetto esiste un unico (la dimostrazione dell'unicità è banale) morfismo identità, una categoria risulta essere univocamente determinata dai suoi morfismi, e pertanto è possibile definire le categorie semplicemente in base alla classe dei morfismi, a cui associare a posteriori gli oggetti.

Arricchiamo leggermente il nostro linguaggio

Definizione 1.2: Categorie grandi e piccole

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.
Se $\mathrm{mor}(\mathcal{C})$ è un insieme (e dunque per l'osservazione precedente lo è anche $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$), allora C si dice ***piccola***, altrimenti si dice ***grande***.
Una categoria in cui una volta fissati due $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ allora $\mathrm{mor}(A, B)$ è un insieme si dice ***localmente piccola***.

Molte categorie che usiamo spesso, come **Set** o **Top** sono grandi (come ci insegna il paradosso di Russel, non si può avere l'insieme di tutti gli insiemi) ma localmente piccole.

[1] termine tecnico

Definizione 1.3: Tipo di morfismo

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $f : A \to B$ un morfismo. Esso si dice:

- ***Endomorfismo*** se $A = B$
- ***Isomorfismo*** se $\exists f' : B \to A$ tale che $f \circ f' = \mathrm{id}_B \wedge f' \circ f = \mathrm{id}_A$
- ***Automorfismo*** se è contemporaneamente endomorfismo e isomorfismo.

Al lettore dotato di un qualsivoglia $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere di familiarità con l'algebra astratta, la definizione di categoria risulterà analoga a quella di monoide. In effetti un monoide $(M, +)$ non è altro che una categoria piccola con un unico oggetto (l'insieme M) e i cui morfismi corrispondono alle traslazioni degli elementi di M sugli altri elementi di M.
Inoltre, quasi sempre, quando si esprime l'unicità di qualcosa in teoria delle categorie la si considera a meno di isomorfismo, come vedremo più avanti.

2 Diagrammi commutativi

Ai *cat-boys*[2] piace molto esprimere qualsiasi proprietà attraverso cosiddetti diagrammi commutativi, utili strumenti per esprimere le relazioni fra oggetti e morfismi in una categoria

Definizione 2.1: Diagrammi commutativi

Un ***diagramma commutativo*** è un grafo diretto in cui i nodi sono costituiti da oggetti e i cui archi sono costituiti da morfismi tra essi in modo tale che percorrere un arco corrisponda ad applicare il morfismo a esso associato.

Ad esempio, i diagrammi commutativi possono essere usati per riformulare in modo visualmente intuitivo alcuni teoremi.

Teorema 2.1: Isomorfismo

Sia $\mathbb{K} \in \textbf{Fld}$, siano $V, W \in \textbf{Vec}(\mathbb{K})$ e sia $f \in \mathrm{mor}(V, W)$.
Allora $\exists! \varphi \in \mathrm{mor}\, V/\ker(f), \mathrm{Im}(f)$ tale che φ sia un isomorfismo e si abbia $f = i \circ \varphi \circ \pi$.
Equivalentemente, $\exists! \varphi \in \mathrm{mor}\, V/\ker(f), \mathrm{Im}(f)$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\pi"] & & W \\ V/\ker(f) \arrow[rr, shift left, "\varphi"] & & \mathrm{im}(f) \arrow[u, "i"] \arrow[ll, shift left, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

La stessa definizione di categoria può essere ridata attraverso i diagrammi commutativi.

Definizione 2.2: Categorie (con diagrammi)

Una ***Categoria*** $\mathcal{C}$ è formata da:

- Una classe di oggetti denotata $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$.
- Una classe di morfismi denotata $\mathrm{mor}(\mathcal{C})$ in cui ogni morfismo f ha un oggetto A di partenza (detto dominio) e B di arrivo (detto codominio) e si denota con $f : A \to B$.
- Una legge di composizione $(g, f) \mapsto gf$ tale che i seguenti diagrammi commutino.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "\mathrm{id}_X"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[rr, "fh"] \arrow[dr, "h"] & & Y \arrow[dr, "g"] & \\ & X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"] & & Z \end{tikzcd}$$

[2] Teorici delle categorie

3 Funtori e trasformazioni naturali

3.1 Funtori

Abbiamo parlato di oggetti e frecce tra oggetti. Ma se volessimo parlare di frecce tra le frecce?

Definizione 3.1: Funtori

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie.
Un ***Funtore covariante*** è una mappa $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tale che:

- $\forall X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}), \exists! F(X) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$
- $\forall f : A \to B \in \mathrm{mor}(\mathcal{C}), \exists! F(f) : F(A) \to F(B) \in \mathrm{mor}(\mathcal{D})$

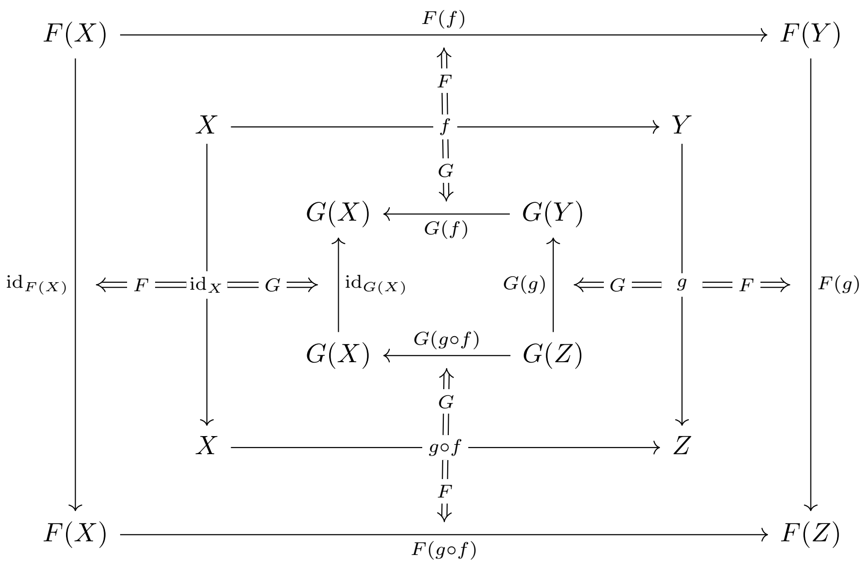
Un ***Funtore controvariante*** è una mappa G da C a D tale che:

- $\forall X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}), \exists! G(X) \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$
- $\forall f : A \to B \in \mathrm{mor}(\mathcal{C}), \exists! G(f) : G(B) \to G(A) \in \mathrm{mor}(\mathcal{D})$

Un Funtore (covariante o controvariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deve rispettare le seguenti proprietà:

- $\forall X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}), F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$
- $\forall f, g \in \mathrm{mor}(\mathcal{C}), F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

La situazione che stiamo immaginando si traduce dunque in questo diagramma commutativo (dove F e G sono come nella definizione)



Vediamo degli esempi che ci permettano di chiarire:

Esempio 3.1: Funtore smemorato

La mappa S : **Grp** $\to$ **Set** che ad un gruppo $(G, +)$ associa l'insieme G è un funtore covariante, detto funtore dimenticante[a]. Esistono numerosi (infiniti, in effetti) funtori smemorati, ad esempio da **Fld** a **Vec**$(\mathbb{K})$, da **Vec**$(\mathbb{K})$ a **Grp**, da **Top** a **Set** e così via, da qualsiasi categoria i cui oggetti siano quelli della categoria in arrivo con una struttura più regolare.

[a] nonostante "dimenticante" sia il termine utilizzato in letteratura, l'autore preferisce "smemorato"

Esempio 3.2: Gruppo fondamentale

La mappa π_1 : **Top**$_c^*$ $\to$ **Grp** che a uno spazio topologico connesso per archi con un punto fissato associa il suo gruppo fondamentale è un funtore covariante, in particolare è il primo (definito come tale) incontrato dalla maggior parte degli studenti.

Esempio 3.3: Spazio vettoriale duale

La mappa $\vee : \textsf{Vec}(\mathbb{K}) \to \textsf{Vec}(\mathbb{K})$ che ad uno spazio vettoriale V associa il suo spazio duale $V^\vee$, ovvero lo spazio vettoriale dei morfismi $V \to \mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K}$ è visto come oggetto in $\textsf{Vec}(\mathbb{K})$), è un funtore controvariante.

Esempio 3.4: Diagramma commutativo

La mappa $\textsf{Set} \to \textsf{Graph}^*$ (dove $\textsf{Graph}^*$ è la categoria dei grafi diretti) che ad una famiglia di oggetti e morfismi rappresentati da un insieme di indici associa un diagramma commutativo è un funtore[a].

[a] Sì, sostanzialmente qualsiasi cosa è un funtore

Esempio 3.5: Morfuntore

In una categoria localmente piccola $\mathcal{C}$, fissato un oggetto X, la mappa $\mathrm{mor}(X, -) : \mathcal{C} \to \textsf{Set}$ manda un oggetto Y nell'insieme $\mathrm{mor}(X, Y)$ (o viceversa) è un funtore particolarmente importante, detto *morfuntore*[a].

[a] Traduzione casalinga dell'espressione inglese *hom-functor*

È interessante notare che in una data categoria la classe dei morfismi tra due oggetti può possedere una struttura notevole: per esempio fissato un $V \in \mathrm{ob}(\textsf{Vec}(\mathbb{K}))$, l'insieme $\mathrm{mor}(V, V)$ è un'algebra associativa su $\mathbb{K}$, al cui studio è dedicato tutto il primo semestre del corso di Geometria A. Ma se volessimo fissare due categorie e parlare dei funtori tra di esse, come potremmo procedere?

3.2 Trasformazioni naturali

Definizione 3.2: Trasformazioni naturali

Siano $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ due funtori dalla categoria $\mathcal{A}$ alla categoria $\mathcal{B}$
Si dice ***trasformazione naturale*** una collezione $\{\alpha_X : F(X) \to G(X)\}$ di morfismi in $\mathcal{B}$ indicizzati da oggetti di $\mathcal{A}$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
Y & F(Y) \arrow[r, "\alpha_X"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Ovvero, tale che per ogni oggetto X e ogni morfismo $f : X \to Y$ di $\mathcal{A}$ si abbia $\alpha_X \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_X$.

Possiamo dunque immaginare una trasformazione naturale come una specie di funtore tra funtori dunque, in un diagramma commutativo di questo tipo:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[dl, Rightarrow, "F"'] & Y \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha(F)"] & \\
F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) & & {[\alpha(F)](X)} \arrow[r, "{[\alpha(F)](f)}"] & {[\alpha(F)](Y)}
\end{tikzcd}$$

L'idea di trasformazione naturale ci serve a definire un altro concetto fondamentale, l'aggiunzione tra categorie.

Definizione 3.3: Aggiunzioni

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie localmente piccole[a].
Si dice ***aggiunzione*** tra una coppia di funtori $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tale che ci sia un isomorfismo naturale $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(L(-), -) \cong \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(-, R(-))$.
Il funtore L si dice ***aggiunto sinistro*** mentre R si dice ***aggiunto destro***.

[a] Potremmo farlo in modo più generale su categorie grandi, ma non sono sicuro di come funzioni il concetto di isomorfismo su cose che non sono insiemi (anche se dovrebbe essere abbastanza tranquilla come cosa)

L'aggiunzione ci da un senso di equivalenza "debole" o "locale" per le categorie, dato che estendere una nozione di isomorfismo sarebbe troppo stringente in μ-quasi tutti i casi interessanti (un po' come il concetto di equivalenza omotopica contro il concetto di omeomorfismo tra spazi topologici).

4 Proprietà universali

Uno dei principali punti di forza della teoria delle categorie è il permettere di formulare delle cosiddette "proprietà universali" di una costruzione. Partiamo con un esempio[8]

Teorema 4.1: Unicità del campo completo ordinato

$\mathbb{R}$ è l'unico campo completo totalmente ordinato, a meno di isomorfismo.

Le possibili costruzioni dei numeri reali sono molte, le più famose sono quelle per classi di equivalenza di successioni di Cauchy o per sezioni di Dedekind a partire da $\mathbb{Q}$, ma come facciamo a dimostrare che una nuova bizzarra costruzione che ci è appena venuta in mente sia effettivamente una costruzione dei numeri reali? È semplice, basta dimostrare che con le opportune operazioni, che idealmente dovrebbero emergere in modo naturale dalla nostra costruzione, questo oggetto costituisca un campo totalmente ordinato e completo, e dal teorema precedente avremo la garanzia che sia $\mathbb{R}$ (o almeno, che sia isomorfo a esso). Dunque c'è un senso in cui questa è una proprietà che è "universale" rispetto alle costruzioni dei numeri reali.
Esaminiamo un altro caso.

Definizione 4.1: Prodotto

Siano X, Y oggetti in una categoria $\mathcal{C}$. Si dice ***prodotto*** di X e Y un oggetto $X\boldsymbol{\Pi}Y$ di $\mathcal{C}$ fornito di una coppia di morfismi $\pi_X : X\boldsymbol{\Pi}Y \to X$ e $\pi_Y : X\boldsymbol{\Pi}Y \to Y$ suriettivi tale che per qualsiasi morfismo $f : Z \to X\boldsymbol{\Pi}Y$ esistano unici $f_X : Z \to X$ e $f_Y : Z \to Y$ tali per cui il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "f_X"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_Y"] & \\
A & X\boldsymbol{\Pi}Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

In questo modo, generalizziamo le idee di prodotto cartesiano in **Set**, prodotto topologico in **Top** o prodotto tensoriale in **Vec**($\mathbb{K}$): qualsiasi tipo di "prodotto" tra due strutture dello stesso tipo è completamente caratterizzato dalle proiezioni alle sue componenti.
Questa è quella che si dice la proprietà universale del prodotto. Dare una definizione più formale di proprietà universale è molto complicato, dunque ho deciso di assecondare la mia pigrizia e non curarmi di farlo.

5 Conclusione

In conclusione, il formalismo della teoria delle categorie fornisce una sorta di "grande teoria unificata" delle varie branche della matematica e conferisce a chi ne impara il linguaggio la capacità di guardare qualcosa, dire "ma certo, è un funtore" e rifiutarsi di elaborare ulteriormente accarezzandosi i baffi.
Sono sicuro che questo documento sia ***pieno*** di errori madornali e imprecisioni, ma è giusto un'espressione[3] del mio interesse per l'argomento.

6 Off topic

Durante il mio ***spulciare*** l'amplissima libreria di texlive, mi sono imbattuto nel pacchetto `rpgicons` che è semplicemente stupendo, permette di fare cose come 20

Proposizione 6.1: Barzelletta

Tre logici entrano in un bar. Il barista chiede "Birra per tutti?"
Il primo guarda gli altri due e fa spallucce.
Il secondo guarda gli altri due e dice "Boh?".
Il terzo guarda gli altri due, sorride ed esclama "Sì grazie!".
Il barista decide che ne ha avuto abbastanza e li caccia fuori tutti e tre.
Morale della favola: non uscire con i logici.

[3] Estremamente limitata e imprecisa, casalinga oserei dire

7 Teorema segreto

Riportiamo questo teorema per la sua notevole importanza, omettendone tuttavia la dimostrazione per motivi di spazio.[2]

Teorema 7.1: Segreto

$\mathbb{R}$ è il più piccolo insieme con cardinalità strettamente maggiore a quella di $\mathbb{N}$.

Riferimenti bibliografici

[1] F. S. Puttini, «Spazi Uber-Sconnessi,» 2099.

[2] D. Menegolli, «An ill-logic approach to Lebesgue Theory,» 2024.

[3] T.-D. B. et al, *Topology: a Categorical Approach*. The MIT Press, 2020, ISBN: 9780262539357.

[4] M. Andreatta, *La forma delle cose. L'alfabeto della geometria* (Intersezioni. Raccontare la matematica). Il Mulino, 2019, ISBN: 9788815280091. indirizzo: `https://books.google.it/books?id=t734vgEACAAJ`.

[5] S. Awodey, *Category Theory*, 2nd. USA: Oxford University Press, Inc., 2010, ISBN: 0199237182.

[6] C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 1980, ISBN: 9780521298643. indirizzo: `https://books.google.it/books?id=vvU3AAAAIAAJ`.

[7] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician (2nd ed)* (Graduate Texts in Mathematics). Springer, 1978, ISBN: 0-387-98403-8.

[8] E. V. Huntington, «Complete Sets of Postulates for the Theory of Real Quantities,» *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 4, n. 3, pp. 358–370, 1903, ISSN: 00029947. indirizzo: `http://www.jstor.org/stable/1986269`.