# Fondamenti di Fisica Matematica - Modulo 2

Filippo $\mathcal{L}$. Troncana
Trascrizione in LaTeXdel riassunto di Matilde Calabri delle note di Nicolò Drago

A.A. 2023/2024

## Indice



# 1 Lezione 1

**Definizione 1.0.1: Supporto**

Sia $X$ uno spazio topologico e $f : X \to \mathbb{C}$ una mappa.
Si dice ***supporto*** di $f$ l'insieme $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ e lo indichiamo come $\text{supp}(f)$

**Notazione**

Sia $X$ uno spazio topologico e $A \subset X$ un aperto. Denotiamo con $\bar{A}$ la chiusura di $A$.

**Osservazione 1.0.1**

$x \in \text{supp}(f) \Rightarrow f(x) \neq 0$.

**Definizione 1.0.2: Funzione differenziabile**

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione e sia $x_0 \in \Omega$.
$f$ si dice ***differenziabile*** in $x_0$ se esiste una mappa lineare $L_{x_0} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ tale che:

$$\lim_{||h||_n \to 0} \frac{||f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)||_m}{||h||_n} = 0$$

**Osservazione 1.0.2**

Sia $\{e_i\}_1^n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Ponendo $h = e_j$, la differenziabilità di $f$ in $x_0$ implica l'esistenza della derivata parziale di $f$ lungo la direzione $e_j$ in $x_0$ e che $L_{x_0} = \nabla f(x_0)$.

**Osservazione 1.0.3**

Al contrario, l'esistenza delle derivate parziali non implica la differenziabilità.

**Proposizione 1.0.1**

Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione tale che esistano e siano continue le derivate parziali in $x_0 \in \Omega$.
Allora $f$ è differenziabile in $x_0$

**Definizione 1.0.3: $\mathcal{C}^k$-differenziabilità**

Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$.
$f$ è $\mathcal{C}^k(\Omega)$, o $\mathcal{C}^k$***-differenziabile*** su $\Omega$ se esistono continue tutte le derivate miste di ordine $k$ su $\Omega$.

**Notazione**

Indichiamo con $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^k$-differenziabili a supporto compatto.

**Osservazione 1.0.4**

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ e $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

**Definizione 1.0.4**

Le funzioni contenute in $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap \mathcal{C}^k(\Omega)$ sono dette funzioni lisce (a supporto compatto se il loro supporto è compatto).

**Definizione 1.0.5: Differenziabilità su un chiuso**

Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia $\bar{\Omega}$ la sua chiusura.
Una funzione $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ si dice $\mathcal{C}^k$***-differenziabile*** su $\bar{\Omega}$ se le derivate di ordine $k$ sono estendibili con continuità a $\bar{\Omega}$.

# 2 Lezione 2

**Definizione 2.0.1: Operatore differenziale semilineare del secondo ordine**

Un operatore $D : \mathcal{C}^2(\Omega) \to \mathcal{C}^0(\Omega)$ si dice ***semilineare del secondo ordine*** se può essere scritto come $(Du)(x) = A(x) \times H_u(x) + \Phi(x, u(x), \nabla u(x))$ per qualsiasi $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, dove $A(x)$ è una matrice simmetrica che dipende con continuità da $x \in \Omega$ e $\Phi$ dipende con continuità dai suoi parametri.

**Definizione 2.0.2: Equazione differenziale alle derivate parziali semilineare**

Si dice ***equazione differenziale alle derivate parziali semilineare*** un'equazione con incognita $u$ della forma $Du = f$ dove $D$ è un operatore differenziale semilineare dato e $f$ è una funzione data.

**Osservazione 2.0.1**

La definizione di operatore differenziale semilineare del secondo ordine si può generalizzare in due modi:

- a funzioni a valori vettoriali, anche complessi, ma richiediamo che $A$ e $\Phi$ abbiano comunque valore reale.
- a ordini $k$ arbitrari sostituendo a $H_u$ e $\nabla u$ rispettivamente il tensore derivata[a] di ordine $k$ e i tensori derivata fino all'ordine $k-1$.

Nel caso in cui $\Phi$ dovesse essere dipendente in modo lineare da $u$ e $\nabla u$, l'operatore si direbbe ***lineare*** come l'equazione associata.
Si può anche parlare di operatori quasilineari, in cui $A = A(x, u(x), \nabla u(x))$, e delle equazioni associate.
Vale la pena notare che questi operatori siano tutti locali, e che non dipendano da proprietà globali della funzione come ad esempio il suo integrale su $\Omega$.

[a] Semplicemente, il tensore in cui l'elemento di multi-indice $\alpha = (i, ..., j)$ corrisponde alla derivata mista delle direzioni $x_i, ..., x_j$

**Definizione 2.0.3: Diffeomorfismo**

Dati due aperti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$, si dice ***diffeomorfismo*** di ordine $k$ una funzione $f : \Omega \to \Omega'$ $k$-differenziabile e invertibile con inversa $k$-differenziabile.

**Teorema 2.0.1: Invertibilità locale**

Siano $\Omega$ e $\Omega$ due aperti di $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \Omega'$ una funzione $k$-differenziabile con $\det J_f \neq 0$ su $\Omega$.
Allora $f$ è un $k$-diffeomorfismo tra $\Omega$ e $\Omega'$.

**Corollario 2.0.1**

Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione $k$-differenziabile tale che $\det J_f \neq 0$ su $\Omega$.
Allora $f(\Omega)$ è un aperto e se $f$ è iniettiva allora è un $k$-diffeomorfismo.

**Lemma 2.0.1**

Sia $D : \mathcal{C}^2(\Omega) \to \mathcal{C}^0(\Omega)$ un operatore differenziale del secondo ordine semilineare e sia $\tilde{x} : \Omega \to \tilde{\Omega}$ un diffeomorfismo e per ogni $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ sia $\tilde{u} := u \circ \tilde{x} \in \mathcal{C}^2(\tilde{\Omega})$. Allora:

- $Du = 0 \Rightarrow \tilde{D}\tilde{u} = 0$, dove $\tilde{D}$ è definito come $D(\tilde{x}^{-1} \circ \tilde{u})$.

**Osservazione 2.0.2**

Sotto cambiamenti di coordinate come nel lemma precedente, abbiamo che $A$ si trasforma in modo tensoriale, a differenza di $\Phi$, per questo sarà detto ***simbolo principale*** di $D$.

**Definizione 2.0.4: Operatori ellittici, iperbolici e parabolici**

Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^m$ $D : \mathcal{C}^2(\Omega) \to \mathcal{C}^0(\Omega)$ un operatore differenziale semilineare del secondo ordine e sia $A$ il suo simbolo principale. Siano $(n_+, n_-, n_0)$ i numeri rispettivamente degli elementi positivi, negativi e nulli sulla diagonale di $A$ (assumiamo $\Omega$ abbastanza piccolo perchè questi siano costanti).

- Se $n_+ = m$ o $n_- = m$, $D$ si dice ***ellittico***.
- Se $n_0 = 0$, $D$ si dice ***iperbolico***.
- Se $n_+ = 1$ e $n_- = m - 1$ oppure $n_+ = m - 1$ e $n_- = 1$, allora $D$ si dice ***normalmente iperbolico***.
- Se $n_0 \neq 0$ e $n_+ = m - n_0$ oppure $n_- = m - n_0$, allora $D$ si dice ***parabolico***
- Se è parabolico e $n_0 = 1$, allora si dice ***normalmente parabolico***.

Lo stesso vale per le equazioni associate.

# 3 Lezione 3: Esempi di operatori differenziali del secondo ordine semilineari

**Esempio 3.0.1: Operatore delle onde, o di D'Alembert**

Consideriamo funzioni a valori reali di un vettore $x$ di $n$ coordinate spaziali e del tempo $t$.
L'operatore delle onde (a cui è associata l'equazione delle onde):

$$D(u) := \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)u \quad \text{dove} \quad \Delta_x u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Ha simbolo principale non-zero solo sulla diagonale, che ha la forma $(c^{-2}, -1, ..., -1, )$, dunque è iperbolico.

**Esempio 3.0.2: Operatore di Helmholtz**

Dall'equazione delle onde, assumiamo una soluzione $u(t, x)$ della forma $e^{i\omega t}v(x)$
Allora l'operatore $e^{i\omega t}(\lambda + \Delta)$ è un operatore ellittico con $\lambda > 0$ ed è detto operatore di Helmholtz.

**Esempio 3.0.3: Operatore di Laplace normale e massivo**

Come visto sopra, l'operatore di Laplace:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Ha diagonale $(1, ..., 1)$, come l'operatore di Laplace massivo $(\Delta - \eta^2)$, dunque è ellittico.

**Esempio 3.0.4: Operatore del calore**

L'operatore del calore:

$$\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$$

È un operatore parabolico avendo diagonale $(0, -1, ..., -1)$

# 4 Lezione 4: un poco di geometria differenziale

**Definizione 4.0.1: Ipersuperficie $k$-regolare**

Sia $\Sigma$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.
$\Sigma$ si dice ***ipersuperficie regolare*** di ordine $k$ se è localmente luogo di zeri di funzioni $k$-differenziabili con gradiente non-nullo.