Pagani Modulo 1

Filippo Troncana, dalle note di Erica

A.A. 2025/2026

Indice

1 Fondamenti della meccanica classica

Definizione 1.1: Assiomi per lo spaziotempo

Chiamiamo $\mathbb{V}_4$ lo ***spaziotempo della meccanica classica***. Esso rispetta i seguenti assiomi:

1. $\mathbb{V}_4$ è uno spazio topologico omeomorfo a $\mathbb{R}^4$.
2. $\mathbb{V}_4$ è un fibrato su $\mathbb{R}$, ovvero esiste una mappa $T : \mathbb{V}_4 \to \mathbb{R}$ continua e suriettiva detta ***tempo assoluto*** tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} \Sigma_t := T^{-1}(\{t\}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "T"] & \{t\} \times \mathbb{E}^3 \arrow[dl, "\pi_1"] \\ \{t\} & \end{tikzcd}$$

   Le fibre Σ_t si dicono ***spazio (di simultaneità) al tempo*** t. La ***vita*** di un punto materiale P è una curva continua e iniettiva $t \mapsto P(t)$.

3. L'isomorfismo $\Sigma_t \cong \mathbb{E}^3$ è anche un isomorfismo di spazi euclidei orientati, e a ciascun Σ_t è associato uno spazio vettoriale modellatore V_t

Chiamiamo ***vettore funzione del tempo*** v una mappa $t \mapsto v(t) \in V_t$.

Osservazione 1.1

Per $t \neq t'$ non esiste un isomorfismo *canonico* $\Sigma_t \cong \Sigma_{t'}$.

Definizione 1.2: Sistemi di riferimento

Una terna materiale[a] (O, e_1, e_2, e_3) determina con la sua vita in $\mathbb{V}_4$ un evento $t \mapsto O(t)$ detto ***riferimento*** e tre versori $e_i(t)$. che si dicono ***solidali*** al riferimento.
L'introduzione di un sistema di riferimento determina una famiglia di isomorfismi $\Sigma_t \cong \Sigma_{t'}$ e un'operazione di ***derivazione temporale*** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_O$ *non canonica* di versori dipendenti dal tempo che soddisfa i seguenti assiomi:

1. Linearità, ovvero
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O (\lambda v + \mu w) = \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O v + \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O w$$
2. Regola di Leibniz, ovvero
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O (v \wedge w) = v \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O w + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O v \wedge w$$
3. Costanza sui versori, ovvero
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O e_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O e_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_O e_3 = 0$$

Estendiamo anche questa derivazione a funzioni scalari con:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_O f := f'$$

E dunque scrivendo $v(t) = v^i(t)e_i(t)$ otteniamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_O v(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_O (v^i(t)e_i(t)) = \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_O v^i(t)\right) e_i(t)$$

[a] Quattro punti materiali linearmente indipendenti.

Proposizione 1.1: Cambiamento di coordinate

Siano $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ due sistemi di riferimento con le rispettive terne $(e_i(t))_i$ e $(e'_i(t))_i$ e mappa di cambiamento di coordinate $R(t) : V_t \to V_t$ vale

$$e'_i(t) = \sum_{k=1}^{3} R_{ik}(t)e_k(t) \quad \text{e dunque} \quad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_I e'_i(t) = \sum_{k=1}^{3} \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} R_{ik}(t)\right) e_k(t)$$

Definizione 1.3: Velocità angolare

Siano $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ due sistemi di riferimento con le rispettive terne $(e_i(t))_i$ e $(e'_i(t))_i$.
Definiamo la ***velocità angolare di*** $\mathcal{I}'$ ***rispetto a*** $\mathcal{I}$ il vettore

$$\omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \left(e'_i(t) \wedge \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} e'_i(t)\right)$$

Teorema 1.1: Formule di Poisson

Nella situazione della definizione 1.3 vale la relazione

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} e'_i(t) = \omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge e'_i(t)$$

Dimostrazione

Useremo i seguenti fatti:

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c, \qquad e_i(t) \cdot e_k(t) = \delta_{i,k}$$

E dunque omettendo le dipendenze temporali

$$\omega_{\mathcal{I}'/\mathcal{I}} \wedge e'_i = \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(e'_k \wedge \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} e'_k\right)\right] \wedge e'_i = e'_i \wedge \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} e'_k\right) \wedge e'_k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[\underbrace{(e'_i \cdot e'_k)}_{\delta_{i,k}} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} e'_k - \left(e'_i \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} e'_k\right) e'_k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} e'_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left[\underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{I}} (e'_i \cdot e'_k)}_{0} - \right]$$