Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure esterne, definizione e prime proprietà

Definizione 1.1.0.1: Misura esterna

Una "misura esterna" sull'insieme X è una mappa $\varphi : \mathbb{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che

[label=)]$\varphi(\varnothing) = 0$; $\varphi(E) \leq \varphi(F)$, se $E \subset F \subset X$; $\varphi(\cup_j E_j) \leq \sum_j \varphi(E_j)$, se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X.

Esempio 1.1.0.1:

$\neq \varnothing$ e

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \varnothing \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che se X contiene almeno due elementi a, b, allora

$$\varphi(\{a\} \cup \{b\}) = \varphi(\{a\}) = \varphi(\{b\}) = 1$$

In particolare φ non è additiva (vale $\varphi(\{a\} \cup \{b\}) < \varphi(\{a\}) + \varphi(\{b\})$).

Esempio 1.1.0.2:

$\neq \varnothing$ e $(x_0 \in X)$

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin E \\ 1 & \text{se } x_0 \in E \end{cases}$$

Esempio 1.1.0.3:

$\neq \varnothing$ e $\varphi(E) := \#(E)$.

Osservazione 1.1.0.1: L

"misura superiore di Peano-Jordan", la "misura inferiore di Peano-Jordan" e la "misura di Peano-Jordan" non sono misure esterne.

Dimostrazione

Prima di procedere avremo bisogno di un po' di notazione: diciamo intervallo in $\mathbb{R}^2$ un sottoinsieme della forma

$$I = [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[$$

che avrà misura elementare $m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Definiamo inoltre la somma delle misure

$$S(\{I_j\}_{j=1}^n) := \sum_{j=1}^n m(I_j).$$

Consideriamo un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$.

- **Misura inferiore di Peano-Jordan:** Definiamo innanzitutto l'insieme

$$\mathcal{I}_-(A) := \left\{ \{I_j\}_{j=1}^n \,\middle|\, {}^{n\in\mathbb{N}^*,\ \ I_j \text{ intervalli}}_{\bigcup_{j=1}^n I_j \subset A,\ \ I_i\cap I_j=\varnothing\forall i,j} \right\};$$

allora la misura inferiore di Peano-Jordan di A è data da

$$J_-(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{I}_-(A) = \varnothing \\ \sup_{\mathcal{I}_-(A)} S & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che la richiesta $I_i \cap I_j = \varnothing \forall i, j$ serve a fare in modo che la misura non esploda sempre a $+\infty$. Verifichiamo ora gli assiomi di misura esterna:

[i]$\mathcal{I}_-(\varnothing) = \varnothing \implies J_-(\varnothing) = 0$; Siano $E \subset F \subset \mathbb{R}^2$, allora si hanno due casi:

2. – Se $\mathcal{I}_-(E) = \varnothing$, la tesi è banale.
   – Se $\mathcal{I}_-(E) \neq \varnothing$, allora $\mathcal{I}_-(E) \subset \mathcal{I}_-(F)$, quindi l'estremo superiore calcolato su un insieme più grande è necessariamente maggiore o uguale.
3. **Controesempio:** Consideriamo $E_1 = \mathbb{Q}^2 \cap]0, 1[^2$ e $E_1 =]0, 1[^2 \backslash E_1$. Allora banalmente $J_-(E_1) = J_-(E_2) = 0$ ma $J_-(E_1 \cup E_2) = J_-(]0, 1[^2) > 0$ in quanto, ad esempio, $[12, 1[^2 \subset]0, 1[$ e $S(\{[12, 1[^2\}) = 14$.

- **Misura superiore di Peano-Jordan:** Definiamo innanzitutto l'insieme

$$\mathcal{I}_+(A) := \left\{ \{I_j\}_{j=1}^n \,\middle|\, {}^{n\in\mathbb{N}^*,\ \ I_j \text{ intervalli}}_{\bigcup_{j=1}^n I_j \supset A} \right\};$$

osserviamo che tale insieme è non vuoto per ogni A limitato, infatti per un insieme illimitato non esiste un unione finita di intervalli in grado di contenerlo. Per un insieme **limitato** definiamo quindi

$$J_+^*(A) := \inf_{\mathcal{I}_+(A)} S.$$

Possiamo quindi generalizzare la misura al caso illimitato ponendo

$$J_+(A) := \begin{cases} J_+^*(A) & A \text{ limitato,} \\ \lim_{\rho\to+\infty} J_+^*(A \cap B_\rho(0)) & A \text{ illimitato.} \end{cases}$$

Rimane da verificare l'esistenza del limite: per il teorema di esistenza del limite per funzioni monotone, è sufficiente provare che $\rho \mapsto J_+^*(A \cap B_\rho(0))$ è crescente. Siano $0 < \rho_1 < \rho_2$, allora $B_{\rho_1}(0) \subset B_{\rho_2}(0)$, da cui $A \cap B_{\rho_1}(0) \subset A \cap B_{\rho_2}(0)$. Da questo possiamo affermare che $\mathcal{I}_+(A \cap B_{\rho_1}(0)) \supset \mathcal{I}_+(A \cap B_{\rho_2}(0))$ in quanto se un'unione di intervalli ricopre $A \cap B_{\rho_2}(0)$, essa ricoprirà anche $A \cap B_{\rho_1}(0)$. Ora, passando agli estremi inferiori, poiché stiamo calcolando l'estremo su un insieme più grosso, il segno della disuguaglianza si inverte, e otteniamo la tesi.

Occupiamoci infine degli assiomi di misura esterna:

[i]$J_+(\varnothing) = 0$ in quanto $\varnothing \in \mathcal{I}_+(\varnothing)$. Siano $E \subset F \subset \mathbb{R}^2$. Fissato $\rho > 0$, $E \cap B_\rho(0) \subset F \cap B_\rho(0)$, quindi $\mathcal{I}_+(E \cap B_\rho(0)) \supset \mathcal{I}_+(F \cap B_\rho(0))$ e, passando agli estremi inferiori, $\inf_{\mathcal{I}_+(E\cap B_\rho(0))} S \leq \inf_{\mathcal{I}_+(F\cap B_\rho(0))} S$. Dall'arbitrarietà di $\rho > 0$, segue la tesi. **Controesempio:** Osserviamo che $J_+(\mathbb{Q} \cap]0, 1[) > 0$, mentre (identificando $\mathbb{Q} \cap]0, 1[= \{q_j\}_{j=0}^{+\infty}$) $\sum_j J_+(\{q_j\}) = 0$.

- **Misura di Peano-Jordan:** Definiamo innanzitutto la famiglia $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \,|\, J_-(A) = J_+(A)\} \subsetneq \mathbb{P}(\mathbb{R}^2);$$

allora si dice misura di Peano-Jordan la mappa

$$JD[0, +\infty]AJ_-(A) = J_+(A).$$

Anche in questo caso non abbiamo costruito una misura esterna in quanto il dominio di definizione

Definizione 1.1.0.2: U

insieme $E \in \mathbb{P}(X)$ è detto "misurabile (rispetto alla misura esterna φ su X)" se

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi\left(A \cap E^c\right) \tag{1.1}$$

per ogni $A \in \mathbb{P}(X)$. La famiglia degli insiemi misurabili rispetto a φ è indicata con $\mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.1.0.2: G

azie a (iii) di Definizione **??**, la (**??**) si può sostituire con

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi\left(A \cap E^c\right)$$

Esempio 1.1.0.4: N

gli esempi 1.1, 1.2, 1.3 si ha rispettivamente

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\varnothing, X\}, \quad \mathcal{M}_\varphi = \mathbb{P}(X), \quad \mathcal{M}_\varphi = \mathbb{P}(X)$$

[$* * *$| Fondamentale sui Misurabili] Per una misura esterna φ su X valgono i seguenti fatti:

[label=(0)]$\mathcal{M}_\varphi$ è c-chiusa; se $E \in \mathbb{P}(X)$ è tale che $\varphi(E) = 0$, allora $E \in \mathcal{M}_\varphi$, in particolare $\varnothing \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $X \in \mathcal{M}_\phi$); se $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}_\phi$ allora $\bigcap_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\phi$ (quindi anche $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\phi$); se $\{E_j\}_j^{num}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti, allora $S := \bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\phi$. Inoltre si ha $\forall A \in \mathbb{P}(X)$

$$\phi(A) \geq \sum_j \phi(A \cap E_j) + \phi(A \cap S^c); \tag{$*$}$$

(σ-additività) se $\{E_j\}_j^{num}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti, si ha $\phi\left(\bigcup_j E_j\right) = \sum_j \phi(E_j)$.

Dimostrazione

[label=(0)]Sia $E \in \mathcal{M}_\phi$, allora $\forall A \in \mathbb{P}(X)$ verifichiamo lo spezzamento rispetto a E^c

$$\phi(A \cap E^c) + \phi(A \cap (E^c)^c) = \phi(A \cap E) + \phi(A \cap E^c) = \phi(A)$$

in quanto questo è esattamente lo spezzamento rispetto ad E. Di conseguenza per definizione, $E^c \in \mathcal{M}_\phi$. Sia $E \subset X$ tale che $\phi(E) = 0$, allora $\forall A \in \mathbb{P}(X)$ si ha $\phi(\underbrace{A \cap E}_{\subset E}) + \phi(A \cap E^c) \leq \phi(E) + \phi(A) = \phi(A)$ di conseguenza per la σ-subadditività segue la tesi. Sia $\{E_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{M}_\phi$ $(n \geq 2)$, allora $\forall A \in \mathbb{P}(X)$ si ha

$$\phi(A) \overset{(i)}{=} \underline{\phi(A \cap E_1)} + \phi(A \cap E_1^c) \overset{(ii)}{=} \phi(A \cap E_1 \cap E_2) + \underbrace{\phi(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \phi(A \cap E_1^c)}_{(\dagger)}$$

Siccome $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\phi$, spezzo prima su E_1 (i) e poi su E_2 (ii). Ora applichiamo la σ-subadditività a $(\dagger)$ e otteniamo

$$\begin{aligned}(\dagger) &\geq \phi\left((A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup (A \cap E_1^c)\right) = \varphi(A \cap [(E_1 \cap E_2^c) \cup E_1^c]) = \\ &= \phi(A \cap [\underbrace{(E_1 \cup E_1^c)}_{X} \cap (E_1^c \cup E_2^c)]) = \phi(A \cap (E_1 \cap E_2)^c) \qquad .\end{aligned}$$

Di conseguenza otteniamo che $\phi(A) \geq \phi(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \phi(A \cap (E_1 \cap E_2)^c)$ e iterando il procedimento si ottiene la tesi. Iniziamo provando $(*)$. Sia $A \in \mathbb{P}(X)$, allora

$$\phi(A) = \phi(A \cap E_1) + \phi(A \cap E_1^c) = \phi(A \cap E_1) + \phi(A \cap \underline{E_1^c \cap E_2}) + \phi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) =$$

Siccome $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_2 \subset E_1^c \implies E_1^c \cap E_2 = E_2$

$$= \phi(A \cap E_1) + \phi(A \cap E_2) + \phi(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

Iterando questo argomento otteniamo quindi

$$\phi(A) = \sum_{j=1}^n \phi(A \cap E_j) + \phi\left(A \cap \left[\bigcup_{j=1}^n E_j\right]^c\right) \overset{(\ddagger)}{\geq} \sum_{j=1}^n \phi(A \cap E_j) + \phi(A \cap S^c).$$

(‡) in quanto $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \subset S \implies \left[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right]^c \supset S^c \implies A \cap \left[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right]^c \supset A \cap S^c$ quindi per la monotonia di ϕ, si ha $\phi\left(A \cap \left[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right]^c\right) \geq \phi(A \cap S^c)$. Poiché gli addendi della sommatoria sono non negativi, il limite delle somme parziali esiste. Passando quindi al limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\phi(A) \geq \sum_j \phi(A \cap E_j) + \phi(A \cap S^c)$$

E questo conclude la dimostrazione di $(*)$. Ora proviamo che $S \in \mathcal{M}_\phi$. Sia $A \in \mathbb{P}(X)$. Inizialmente osserviamo che $A \cap S = A \cap \left(\bigcup_j E_j\right) = \bigcup_j (A \cap E_j)$. Di conseguenza per la σ subadditività di ϕ

$$\phi(A \cap S) + \phi(A \cap S^c) \leq \sum_j \phi(A \cap E_j) + \phi(A \cap S^c) \overset{(*)}{\leq} \phi(A)$$

Usando $(*)$ con $A = S$

$$\phi\left(\bigcup_i E_i\right) = \phi(S) \geq \sum_j \underbrace{\phi(S \cap E_j)}_{\bigcup_i E_i \cap E_j = E_j} + \phi(\underbrace{S \cap S^c}_{\varnothing}) = \sum_j \phi(E_j) \overset{(\bullet)}{\geq} \phi\left(\bigcup_j E_j\right).$$

$(\bullet)$ per la σ-subadditività. Di conseguenza $\phi\left(\bigcup_j E_j\right) = \sum_j \phi(E_j)$.

3. □

Osservazione 1.1.0.3:

Sia data una misura esterna φ su X e sia $\{E_j\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Poniamo $E_1^* := E_1$ e

$$E_n^* := E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Allora $\{E_j^*\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti e si ha

$$\bigcup_{j=1}^{n} E_j^* = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \ \ (\text{per ogni } n), \quad \bigcup_j E_j^* = \bigcup_j E_j.$$

In particolare, ricordando il punto (4) di Teorema **??**, si ha $\bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$.

Definizione 1.1.0.3:

Una famiglia non vuota $\Sigma \subset \mathbb{P}(X)$ è detta "σ-algebra (in X)" se gode delle seguenti proprietà:

[label=()]Se $E \in \Sigma$, allora $E^c \in \Sigma$; *Se* $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Σ, si ha $\cup_j E_j \in \Sigma$.

Osservazione 1.1.0.4: I

Definizione **??** l'assioma (ii) può venir sostituito da

[label=$(^*)$, start=2]Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Σ, si ha $\cap_j E_j \in \Sigma$.

Esempio 1.1.0.5: S

a X un qualsiasi insieme. Allora $\mathbb{P}(X)$ e $\{\varnothing, X\}$ sono entrambe σ-algebre in X. Se Σ è una qualsiasi σ-algebra in X, si ha $\{\varnothing, X\} \subset \Sigma \subset \mathbb{P}(X)$.

Esempio 1.1.0.6:

$:= \left\{E \in 2^{[0,1]} \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\right\}$ è una σ-algebra.

Esempio 1.1.0.7: L

famiglia $\Sigma := \{E \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \mid \#(E) < \infty \text{ oppure } \#(E^c) < \infty\}$ è c-chiusa ma non è chiusa rispetto all'unione numerabile. Quindi Σ non è una σ-algebra.

Per Teorema **??** e Osservazione **??**, vale quindi il seguente risultato.

Proposizione 1.1.0.1:

Se φ è una misura esterna su X, allora $\mathcal{M}_\varphi$ è una σ-algebra.

Dimostrazione

Verifichiamo gli assiomi di σ-algebra:

[label=)]**Non vuota** in quanto per il Teorema **??**.(2), $\varnothing, X \in \mathcal{M}_\phi$; **c-chiusa** per il Teorema **??**.(1); **Stabile per unione numerabile**. Per il Teorema **??**.(4), M_ϕ è chiusa per unione numerabile di insiemi disgiunti. Proviamo che chò vale anche se gli insiemi non sono a due a due disgiunti: Sia $\{E_j\}_j \subset M_\phi$ una famiglia finita. Poniamo $E_1^* = E_1$ e $\forall k \geq 2$ definiamo $E_k^* := E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j = E_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right)^c$, ovvero tutti gli elementi che stanno in E_k ma non nei precedenti componenti della famiglia. Per il Teorema **??**, si ha che $\forall k,\ E_k \in M_\phi$, quindi possiamo affermare la seguente equivalenza, in cui il membro di destra soddisfa le ipotesi del Teorema **??**.(4), ovvero è unione di insiemi disgiunti.

$$\bigcup_{k=1}^{N} E_k = \bigcup_{k=1}^{N} E_k^*.$$

Poiché l'uguaglianza rimane verificata anche per $N \to +\infty$ (passando all'unione arbitraria numerabile), si ha che per il Teorema **??**.(4), $\bigcup_j E_j = \bigcup_j E_j^* \in M_\phi$.

$\square$

[**] Se ϕ è una misura esterna si X, valgono le seguenti proprietà:

[label=(0)](Continuità dal basso) Se $\{E_j\}_j$ è una famiglia numerabile e crescente di insiemi misurabili, si ha $\phi\left(\bigcup_j E_j\right) = \lim_j \phi(E_j)$; (Continuità dall'alto) Se $\{E_j\}_j$ è una famiglia numerabile e decrescente di insiemi misurabili con $\phi(E_1) < \infty$, si ha $\phi\left(\bigcap_j E_j\right) = \lim_j \phi(E_j)$;

Dimostrazione

[label=(0)](Continuità dal basso) Poniamo $E_1^* = E_1$ e $\forall j \geq 2$ definiamo $E_j^* := E_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} E_k = E_j \setminus E_{j-1} \in M_\phi$. Osserviamo che (†) $\bigcup_{j=1}^n E_j^* = \bigcup_{j=1}^n E_j = E_n$ quindi $\bigcup_j E_j^* = \bigcup_j E_j$.

$$\implies \phi\left(\bigcup_j E_j\right) = \phi\left(\bigcup_j E_j^*\right) \overset{\sigma\text{-add}}{=} \sum_j \phi(E_j) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \phi(E_j^*) =$$

per definizione di serie. È possibile applicare la σ-additività poiché gli insiemi E_j^* sono disgiunti.

$$= \lim_{n\to+\infty} \phi\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j^*\right) \overset{(\dagger)}{=} \lim_{n\to+\infty} \phi(E_n)$$

(Continuità dall'alto) Poniamo $\forall j,\ F_j = E_1 \setminus E_j = E_1 \cap E_j^c \in \mathcal{M}\phi$. Osserviamo inoltre che $E_j \supset E_{j+1} \implies E_j^c \subset E_{j+1}^c \implies E_1 \cap E_j^c \subset E_1 \cap E_{j+1}^c$ da cui $F_j \subset F_j + 1$, ovvero $\{F_j\}_j$ soddisfa le ipotesi di (1), per cui ($\triangle$) $\phi\left(\bigcup_j F_j\right) = \lim_j \phi(F_j)$. Osserviamo ora che

$$\phi(F_j) = \phi(E_1 \setminus E_j) = \phi(E_1) - \phi(E_j) \tag{$\bullet$}$$

in quanto per il buon spezzamento ($E_j \in M_\phi, E_j \subset E_1$)

$$\phi(E_1) = \phi(E_1 \cap E_j) = \phi(E_1 \setminus E_j) = \phi(E_j) + \phi(E_1 \setminus E_j)$$

Allora poiché $\phi(E_1) < \infty$, $\phi(F_j) = \phi(E_1) - \phi(E_j) < +\infty$. Abbiamo quindi

$$\lim_{j\to+\infty} \phi(F_j) = \phi(E_1) - \lim_{j\to+\infty} \phi(E_j) \tag{$*$}$$

Analizziamo ora $\phi\left(\bigcup_j F_j\right)$

$$\phi\left(\bigcup_j F_j\right) = \phi\left(\bigcup_j (E_1 \cap E_j^c)\right) = \phi\left(E_1 \cap \left(\bigcup_j E_j^c\right)\right) \overset{De\ M.}{=} \phi\left(E_1 \cap \left(\bigcap_j E_j\right)^c\right) =$$
$$= \phi\left(E_1 \setminus \left(\bigcap_j E_j\right)\right) \overset{\text{come }(\bullet)}{=} \cdots = \phi(E_1) - \phi\left(\bigcap_j E_j\right)$$

Abbiamo quindi provato che

$$\phi\left(\bigcup_j F_j\right) = \phi(E_1) - \phi\left(\bigcap_j E_j\right) \tag{$**$}$$

Sostituendo quindi $(*)$ e $(**)$ in $(\triangle)$ otteniamo

$$\cancel{\phi(E_1)} - \phi\left(\bigcap_j E_j\right) = \cancel{\phi(E_1)} - \lim_{j\to+\infty} \phi(E_j)$$

$$\implies \quad \phi\left(\bigcap_j E_j\right) = \lim_{j\to+\infty} \phi(E_j)$$

2. $\square$

Osservazione 1.1.0.5: S

in (2) di Teorema **??** non si assume l'ipotesi $\varphi(E_1) < \infty$, la tesi può fallire. Per esempio, se $X := \mathbb{N}$ con $\varphi(E) := \#(E)$, possiamo considerare la famiglia degli $E_j := \{j, j+1, \dots\} \in \mathcal{M}_\varphi = \mathbb{P}(X)$. In tal caso si ha $\bigcap_j E_j = \varnothing$ e quindi $\varphi\left(\bigcap_j E_j\right) = 0$, mentre $\varphi(E_j) = \infty$ per ogni j.

1.2 Misure esterne metriche, Boreliane, Borel-regolari, di Radón

Definizione 1.2.0.1: U

a misura esterna su uno spazio metrico (X, d) è detta "di Carathéodory" (oppure "metrica") se

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

per ogni coppia di insiemi $A, B \in \mathbb{P}(X)$ tale che

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0$$

[$* * *$| Carathéodory] Sia φ una misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico (X, d). Allora ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile.

Dimostrazione

Sia $C \subset X$ chiuso, $A \in \mathbb{P}(X)$ chiuso. Vogliamo dimostrare il buon spezzamento, ovvero $\phi(A) \geq \phi(A \cap C) + \phi(A \cap C^c)$ (poiché il $\leq$ è garantito dalla σ-subadditività). Se $\phi(A) = +\infty$, la tesi è banale; sia quindi A tale che $\phi(A) < +\infty$. Per ogni $h \in \mathbb{N}^*$ poniamo

$$C_h := \left\{x \in X \,\middle|\, \operatorname{dist}(\{x\}, C) \leq \frac{1}{h}\right\}$$

e osserviamo che è chiuso poiché controimmagine di un chiuso $[0, \frac{1}{h}]$ mediante la funzione distanza che è continua. Segue quindi che

$$(i)\ \operatorname{dist}(A\cap C, A\cap C_h^c) = \frac{1}{h} \quad e \quad (ii)\ A\cap C \cup (A\cap C_h^c) \subset A$$

quindi per (ii) e monotonia di ϕ si ha

$$\phi(A) \geq \phi((A\cap C)\cup(A\cap C_h^c)) = \phi(A\cap C) + \phi(A\cap C_h^c)$$

per la metricità di ϕ. Per ottenere la tesi è quindi sufficiente provare che

$$\lim_{n\to+\infty} \phi(A\cap C_h^c) = \phi(A\cap C^c).$$

Per prima cosa notiamo che il limite esiste per monotonia. Osserviamo ora che

$$C_h = \{x\in X \mid \operatorname{dist}(\{x\},X)=0\} \sqcup \left\{x\in X \;\middle|\; \operatorname{dist}(\{x,C\}) \in \left]0,\frac{1}{h}\right]\right\} =$$
$$= C \sqcup \bigcup_{j=h}^{+\infty} \underbrace{\left\{x\in X \;\middle|\; \operatorname{dist}(\{x\},X) \in \left]\frac{1}{j+1},\frac{1}{j}\right]\right\}}_{S_j}$$

$$\Leftrightarrow\ C = C_h \setminus \bigcup_{j=h}^{+\infty} S_j = C_h \cap \left(\bigcup_{j=h}^{+\infty} S_j\right)^c,$$

quindi che per le leggi di De Morgan l'identità precedente può essere riscritta come

$$C_h^c \subset C^c = C_h^c \cup \bigcup_{j=h}^{+\infty} S_j \quad\Longrightarrow\quad A\cap C_h^c \subset A\cap C^c = (A\cap C_h^c)\cup\left(\bigcup_{j=n}^{+\infty}(A\cap S_j)\right)$$

di conseguenza per monotonia di ϕ e per la σ-subadditività

$$\phi(A\cap C_h^c) \leq \phi(A\cap C^c) = \phi\Big((A\cap C_h^c)\cup\Big(\bigcup_{j=h}^{+\infty}(A\cap S_j)\Big)\Big) \leq \phi(A\cap C_h^c) + \sum_{j=h}^{+\infty}\phi(A\cap S_j)$$

Se ora proviamo che $(\bullet)\ \lim_{h\to+\infty}\sum_{j=h}^{+\infty}\phi(A\cap S_j) = 0$, otteniamo che $\phi(A\cap C_\infty^c) \leq \phi(A\cap C^c) \leq \phi(A\cap C_\infty^c)$, ovvero che le due quantità sono uguali.
Poiché $(\bullet)$ è il resto h-esimo della serie $\sum_j \phi(A\cap S_j)$, equivale a dire che la suddetta serie converge. Poiché si tratta di una serie a termini positivi, la successione delle somme parziali è crescente quindi il limite esiste. Per provare la convergenza della serie è quindi sufficiente provare che la successione delle somme parziali è limitata. Osserviamo che

$$\sum_{j=1}^{N}\phi(A\cap S_j) = \sum_{\substack{j\leq N\\ j \text{ dispari}}} \phi(A\cap S_j) + \sum_{\substack{j\leq N\\ j \text{ pari}}}\phi(A\cap S_j)$$

poichié $\operatorname{dist}(S_j,S_k) > 0\ \forall j,k$ entrambi pari o entrambi dispari e ϕ è metrica

$$\phi(A\cap S_1) + \phi(A\cap S_3) = \phi((A\cap S_2)\cup(A\cap S_3))$$

quindi generalizzando

$$\sum_{j=1}^{N}\phi(A\cap S_j) = \phi\Big(\underbrace{\bigcup_{\substack{j\leq N\\ j \text{ dispari}}} A\cap S_j}_{\subset A}\Big) + \phi\Big(\underbrace{\bigcup_{\substack{j\leq N\\ j \text{ pari}}} A\cap S_j}_{\subset A}\Big) \overset{monot.}{\leq} 2\phi(A) < +\infty$$

per ipotesi iniziale. Di conseguenza per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone, la serie converge.

$\square$

Osservazione 1.2.0.1: S

può provare che vale anche il "viceversa" di Teorema **??**: Se φ è una misura esterna su uno spazio metrico (X, d) e se ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile, allora φ è di Carathéodory ([12, Theorem 1.7]).

Proposizione 1.2.0.1:

Sia dato $\mathcal{I} \subset \mathbb{P}(X)$ e indichiamo con $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ la famiglia delle σ-algebre in X contenti $\mathcal{I}$. Allora

$$\Sigma(\mathcal{I}) := \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}} \Sigma$$

è una σ-algebra in X, detta "la σ-algebra generata da $\mathcal{I}$". Se $\mathcal{I}$ è una σ-algebra allora $\Sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$. Inoltre la mappa $\mathcal{I} \mapsto \Sigma(\mathcal{I})$ è monotona crescente, i.e., $\Sigma(\mathcal{I}_1) \subset \Sigma(\mathcal{I}_2)$ ogni volta che $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \mathbb{P}(X)$.

Dimostrazione

- $\Sigma(I) \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$**:** Osserviamo prima di tutto che banalmente $\mathcal{I} \in \Sigma(\mathcal{I})$, in quanto $\forall \Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} \subset \Sigma$. Verifichiamo ora gli assiomi di σ-algebra:

  [label=(0)]Sia $E \in \Sigma(\mathcal{I}) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}} \Sigma$. Allora $\forall \Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, $E \in \Sigma$ e poiché Σ è una σ-algebra, $E^c \in \Sigma$. Di conseguenza $E^c \in \Sigma(\mathcal{I})$. Analogamente, si ha la chiusura rispetto all'unione numerabile: Sia $\{E_j\}_j \subset \Sigma(\mathcal{I}) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}} \Sigma$ numerabile. Allora $\forall \Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}, \forall j$, $E_j \in \Sigma$ e poiché Σ è una σ-algebra, $\bigcup_j E_j \in \Sigma$. Di conseguenza $\bigcup_j E_j \in \Sigma(\mathcal{I})$

  Siccome $\Sigma(\mathcal{I})$ è una σ-algebra e contiene $\mathcal{I}$, allora $\Sigma(\mathcal{I}) \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$.

- **Stabilità**: Sia $\mathcal{I}$ una σ-algebra, proviamo che $\Sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$. Ovviamente $\mathcal{I} \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}$, quindi (per il punto precedente)

$$\Sigma(\mathcal{I}) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}} \Sigma \subset \mathcal{I} \subset \Sigma(I) \implies \Sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$$

- **Monotonia:** Siano $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subset \mathbb{P}(X)$ con $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$. Si ha subito che $\mathcal{A}_{\mathcal{I}_1} \supset \mathcal{A}_{\mathcal{I}_2}$ poiché $\Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}_2} \Rightarrow \mathcal{I}_2 \subset \Sigma \Rightarrow \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \Sigma \Rightarrow \Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}_1}$. Segue quindi che $\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}_1}} \Sigma \subset \bigcap_{\mathcal{A}_{\mathcal{I}_2}} \Sigma$ in quanto nel primo caso stiamo intersecando gli stessi insiemi che ci sono nel secondo più degli altri, che vanno quindi a restringere l'intersezione. Di conseguenza $\Sigma(\mathcal{I}_1) \subset \Sigma(\mathcal{I}_2)$.

$\square$

Proposizione 1.2.0.2:

Sia X uno spazio topologico e indichiamo con $\mathcal{K}, \mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, rispettivamente, la famiglia degli insiemi compatti, la famiglia degli insiemi chiusi e la famiglia degli insiemi aperti di X. Allora:

1. Si ha $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$;
2. Se X è uno spazio di Hausdorff, vale l'inclusione $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma(\mathcal{F})$;
3. Se (X, d) è uno spazio metrico separabile, si ha $\Sigma(\mathcal{K}) = \Sigma(\mathcal{G})$ (dimostrato nel caso particolare dello spazio Euclideo; per una trattazione del caso generale si può vedere [13])[a].

[a]NdR. In realtà questa proprietà non è vera in generale, in quanto sono possibili controesempi in spazi metrici separabili di dimensione infinita. Tuttavia rimane valida nel caso dello spazio euclideo, quindi nei casi presi in esame in questo corso è vera.

Dimostrazione

[label=(0)]Per la Proposizione **??**, $\mathcal{F} \in \Sigma(\mathcal{F})$. Allora $\forall G \in \mathcal{G}$, si ha $G^c \in \mathcal{F} \subset \Sigma(\mathcal{F})$. Di conseguenza per l'assioma di c-chiusura, $G \in \Sigma(\mathcal{F})$. Per l'arbitrarietà gi G, $\mathcal{G} \subset \Sigma(\mathcal{F})$. Segue quindi per monotonia che $\Sigma(\mathcal{G}) \subset \Sigma(\Sigma(\mathcal{F})) = \Sigma(\mathcal{F})$ per stabilità. Analogamente si dimostra che $\Sigma(\mathcal{F}) \subset \Sigma(\mathcal{G})$. Segue quindi dalla doppia inclusione che $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$. Poiché X è uno spazio di Hausdorff, si ha che $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, quindi $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma(\mathcal{F})$ per monotonia. [Dimostrazione in $\mathbb{R}^n$, facilmente adattabile] Poiché X è uno spazio metrico, allora X è di Hausdorff, quindi $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, per cui $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$. Proviamo che

$\Sigma(\mathcal{G}) \subset \Sigma(\mathcal{K})$. È quindi sufficiente provare che $\mathcal{G} \subset \Sigma(\mathcal{K})$. Sia quindi $G \in \mathcal{G}$ qualsiasi, proviamo che $G \in \Sigma(\mathcal{K})$. **Notazione:** Indichiamo con $\mathcal{B} = \{\overline{B_r(Q)} \,|\, r \in \mathbb{Q}^+, Q \in \mathbb{Q}^n, \overline{B_r(Q)} \subset G\}$ la famiglia delle palle chiuse di raggio e centro razionali contenute in G. Osserviamo che è possibile definire una mappa iniettiva $\mathcal{B} \ni \overline{B_r(Q)} \mapsto (r, Q) \in \mathbb{Q}^{n+1}$, per cui $\mathcal{B}$ è numerabile. Proviamo quindi che $\bigcup_{D\in\mathcal{B}} D = G$. Per costruzione è banale che $\bigcup_{D\in\mathcal{B}} D \subset G$. Sia ora $x \in G$, proviamo che $\exists D \in \mathcal{B}: \ x \in D$. Sia $R > 0$ tale che $B_r(x) \subset G$. Consideriamo $r \in \mathbb{Q} : 0 < r < \frac{R}{2}$. Sia inoltre $Q \in \mathbb{Q}$ tale che $\|Q - x\| \leq r$, allora $x \in \overline{B_r(Q)}$. Rimane quindi da provare che $\overline{B_r(Q)} \in \mathcal{B}$, ovvero che $\overline{B_r(Q)} \subset G$, o meglio che $\overline{B_r(Q)} \subset B_R(x)$. Sia quindi $y \in B_R(Q)$ qualsiasi, per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$\|y - x\| \leq \underbrace{\|y - Q\|}_{\leq r} + \underbrace{\|Q - x\|}_{\leq r} \leq 2r < R \qquad \Longrightarrow \overline{B_r(Q)} \in \mathcal{B}$$

Abbiamo così provato che $G = \bigcup_{D\in\mathcal{B}} D$. Poiché $D \in \mathcal{K}$, e $\mathcal{B}$ è numerabile, segue per stabilità rispetto all'unione numerabile che $G \in \Sigma(\mathcal{K})$.

3. $\square$

Osservazione 1.2.0.2: I

uno spazio topologico che non sia metrico e separabile può effettivamente accadere che $\Sigma(\mathcal{K}) \neq \Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$. Si consideri per esempio $[0,1]$ con la topologia discreta e cioè $\mathcal{G} := 2^{[0,1]}$. Osserviamo che $\mathcal{K}$ coincide con la famiglia dei sottoinsiemi finiti di $[0,1]$. Se consideriamo la σ-algebra

$$\Sigma_0 := \left\{E \in 2^{[0,1]} \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#\left(E^c\right) \leq \aleph_0\right\}$$

introdotta in Esempio 1.6, si ha $\Sigma(\mathcal{K}) \subset \Sigma_0 \subset 2^{[0,1]}$. Inoltre, evidentemente, vale $\Sigma_0 \neq 2^{[0,1]} = \mathcal{G} = \Sigma(\mathcal{G})$.

Definizione 1.2.0.2: S

ano X uno spazio topologico, φ una misura esterna su X e $\mathcal{M}_\varphi$ la σ-algebra degli insiemi misurabili rispetto a φ. Allora:

[label=()]La σ-algebra $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{G})$ viene indicata con $\mathcal{B}(X)$ e i suoi elementi sono detti "insiemi Boreliani"; φ è detta "Boreliana" (oppure "di Borel") se $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\varphi$; φ è detta "Borel regolare" se è Boreliana e se inoltre per ogni insieme $A \in \mathbb{P}(X)$ esiste $B \in \mathcal{B}(X)$ tale che $B \supset A$ e $\varphi(B) = \varphi(A)$. L'insieme B prende il nome di "involucro Boreliano" di A; φ è detta "di Radón" se è Borel regolare e se $\varphi(K) < \infty$ per ogni insieme compatto K in X.

Da Teorema **??** segue subito il seguente risultato.

Corollario 1.2.0.1: O

ni misura esterna di Carathéodory su uno spazio metrico è Boreliana.

Dimostrazione

Sia (X, d) uno spazio metrico e $\phi : \mathbb{P}(X) \to [0, +\infty]$ una misura esterna metrica. Allora per il Teorema **??**, $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_\phi$. Di conseguenza per monotonia e per stabilità $\Sigma(\mathcal{F}) = \Sigma(\mathcal{M}_\phi) = \mathcal{M}_\phi$. Di conseguenza $\mathcal{B}(X) = \Sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{M}_\phi$, ovvero è boreliana.

3. $\square$

Valgono i seguenti due interessanti risultati di approssimazione, che qui enunciamo senza dimostrazione. Per una dimostrazione del primo rimandiamo a [5, Theorem 4.17]). Il secondo è un corollario piuttosto facile del primo, cfr. [5, Corollary 4.18]).

Sia φ una misura esterna Boreliana su uno spazio metrico (X, d) e sia $B \in \mathcal{B}(X)$. Si verificano i seguenti fatti:

1. Se $\varphi(B) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset B$ e $\varphi(B \setminus F) \leq \varepsilon$.

2. Se $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi\left(V_j\right) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset B$ tale che $\varphi(G \setminus B) \leq \varepsilon$.

Sia φ una misura esterna Borel regolare su uno spazio metrico (X, d) e sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$. Si verificano i seguenti fatti:

1. Se $\varphi(E) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso F tale che $F \subset E$ $e\varphi(E \setminus F) \leq \varepsilon$.

2. Se $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, dove i V_j sono insiemi aperti tali che $\varphi(V_j) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $G \supset E$ tale che $\varphi(G \setminus E) \leq \varepsilon$.

1.2.1 Misura esterna di Lebesgue

[∗ ∗ ∗| Lebesgue - grande] Si consideri la funzione $\mathcal{L}^n : \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ definita da

$$\mathcal{L}^n(E) = \begin{cases} \inf\{\sum_j v(I_j) \,|\, \{I_j\}_j \in \mathcal{R}(E)\} & \text{se } E \neq \varnothing \\ 0 & \text{se } E = \varnothing \end{cases} \qquad (E \subset \mathbb{R}^n)$$

dove $\mathcal{R}(E)$ indica la famiglia dei ricoprimenti numerabili di E costituiti di intervalli aperti di $\mathbb{R}^n$, metre $v(I_j)$ denota la misura elementare dell'intervallo I_j. Allora $\mathcal{L}^n$ è una misura esterna metrica ed è di Radón. Con intervallo aperto di $\mathbb{R}^n$ si intende il prodotto cartesiano di n intervalli aperti di $\mathbb{R}$, $I =]a_1, b_1[\times]a_n, b_n[$, e la sua misura elementare è $v(I) := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Dimostrazione

[label=**0.**, ref=**(0)**]**Misura esterna:**[label=)]

1. (a) $\mathcal{L}^n \varnothing = 0$ per definizione;

   (b) **Monotonia:** Sia $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$. $\boxed{\text{TESI: } \mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(F)}$
   Se $E = \varnothing$, banalmente $\mathcal{L}^n(E) = 0 \leq \mathcal{L}^n(F)$. Supponiamo quindi $E \neq \varnothing$ ($\implies$ $F \neq \varnothing$). Osserviamo che $\mathcal{R}(F) \subset \mathcal{R}(E)$, poiché se una famiglia è un ricoprimento di F lo è anche di E. Conseguentemente $\inf_{\mathcal{R}(E)} S \leq \inf_{\mathcal{R}(F)} S$ in quanto stiamo calcolando l'inf su un insieme più grosso, quindi è possibile che esso contenga un elemento minore. L'ultima scrittura è quindi equivalente alla tesi $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(F)$.

   (c) **σ-subadditività:** $\boxed{\text{TESI: } \mathcal{L}^n\left(\bigcup_j E_j\right) \leq \sum_j \mathcal{L}^n(E_j)}$

   Se $\mathcal{L}^n\left(\bigcup_j E_j\right) = 0$ o $\sum_j \mathcal{L}^n(E_j) = +\infty$, la tesi è banale, per cui supponiamo $\mathcal{L}^n\left(\bigcup_j E_j\right) \neq 0$ (ovvero $\bigcup_j E_j \neq \varnothing$) e $\sum_j \mathcal{L}^n(E_j) < +\infty$.
   Definiamo $J^* := \{j \in J \,|\, E_j \neq \varnothing\} \neq \varnothing$ e osserviamo che

$$\bigcup_{j \in J} E_j = \bigcup_{j \in J^*} \qquad e \qquad \sum_{j \in J} \mathcal{L}(E_j) = \sum_{j \in J^*} \mathcal{L}(E_j)$$

   Allora la tesi può essere riscritta come $\boxed{\text{TESI 2: } \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j \in J^*} E_j\right) \leq \sum_{j \in J^*} \mathcal{L}^n(E_j)}$

   Sia ora $\epsilon > 0$ arbitrario, allora $\forall j \in J^*$, $\exists \{I_i^j\}_i \in \mathcal{R}(E_j)$ tale che

$$\sum_i v(I_i^j) < \mathcal{L}^n(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \tag{1.2}$$

   per definizione di $\mathcal{L}^n(E_j)$ come estremo inferiore[a]. Osserviamo ora che $\{I_i^j\}_{i,j \in J^*}$ è una famiglia numerabile di aperti che ricopre $\bigcup_{j \in J^*} E_j$, ovvero

$$\{I_i^j\}_{i,j \in J^*} \in \mathcal{R}\Big(\bigcup_{j \in J^*} E_j\Big) \quad \implies$$

$$\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{j \in J^*} E_j\Big) \leq \sum_{i,j \in J^*} v(I_i^j) = \sum_{j \in J^*} \sum_i v(I_i^j) \underset{(??)}{<} \sum_{j \in J^*} \Big(\mathcal{L}^n(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}\Big) =$$
$$= \sum_{j \in J^*} \mathcal{L}^n(E_j) + \underbrace{\sum_{j \in J^*} \frac{\epsilon}{2^j}}_{\leq \sum_j \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon} \leq \sum_{j \in J^*} \mathcal{L}^n(E_j) + \epsilon$$

   quindi

$$\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{j \in J^*} E_j\Big) \leq \sum_{j \in J^*} \mathcal{L}^n(E_j) + \epsilon$$

   per cui, siccome non vi è dipendenza da ϵ, per $\epsilon \to 0$ si ha la tesi.

2. **Di Carathéodory:** Siano $A, B \in \mathcal{P}(R^n) \setminus \{\varnothing\} : \text{dist}(A, B) = d > 0.$
$\boxed{\text{TESI: } \mathcal{L}^n(A \cup B) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B)}$
Per la σ-subadditività, il $\leq$ è banale. $\boxed{\text{TESI 2: } \mathcal{L}^n(A \cup B) \geq \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B)}$
Se $\mathcal{L}^n(A \cup B) = +\infty$, la tesi è banale. Supponiamo quindi $\mathcal{L}^n(A \cup B) < +\infty$.
Sia $\epsilon > 0$ arbitrario. Allora per definizione di $\mathcal{L}^n(A \cup B)$ come estremo inferiore $\exists \{I_j\}_j \in \mathcal{R}(A \cup B)$ tale che

$$\sum_j v(I_j) < \mathcal{L}^n(A \cup B) + \varepsilon \tag{1.3}$$

Ora $(*)$, $\forall j$ definiamo $\{I_i^j\}_{i=1}^{N_j < +\infty} \in \mathcal{R}(I_j)$ tale che $\forall i,\ \text{diam}(I_i^j) < d$ e

$$\sum_{i=1}^{N_j} v(I_i^j) < v(I_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \tag{1.4}$$

quindi $\{I_i^j\}_{i,j}$ è una famiglia numerabile di aperti che ricopre $A \cup B$, ovvero $\{I_i^j\}_{i,j} \in \mathcal{R}(A \cup B)$. Per semplicità **cambiamo notazione:** $\{I_i^j\}_{ji} = \{J_h\}_{h \in H}$ con H numerabile.
$(*)$
Inizialmente abbiamo utilizzato un ricoprimento $\{I_j\}_j$ di $A \cup B$ con intervalli aperti. Ora vogliamo fare un ricoprimento più fine in modo che riusciamo a separare i due insiemi. Il problema è che non possiamo semplicemente tagliuzzare il ricoprimento precedente perché altrimenti perderemmo i punti delle linee di taglio, per cui il nuovo ricoprimento dovrà essere generaoto mediante una leggera espansione dei rettangolini prodotti tagliuzzando il ricoprimento $\{I_j\}_j$.

[a]Siccome $\mathcal{L}^n(E_j)$ è l'inf dei possibili ricoprimenti di E_j, se mi sposto arbitrariamente a destra di δ esiste un ricoprimento con misura elementare tra $\mathcal{L}^n(E_j)$ e $\mathcal{L}^n(E_j) + \delta$.

□

Definizione 1.2.1.1: L

misura esterna $\mathcal{L}^n$ definita in Teorema **??** è detta "misura esterna di Lebesgue n-dimensionale".

Il seguente risultato elenca alcune proprietà della misura esterna di Lebesgue.
[$**$| Lebesgue - piccolo] Valgono i seguenti fatti:

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}^n$, si ha $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$;
2. Se I è un intervallo aperto in $\mathbb{R}^n$, si ha $\mathcal{L}^n(I) = v(I)$;
3. Per ogni $E \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\}$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ si ha:
   (a) $\mathcal{L}^n(E + \tau) = \mathcal{L}^\setminus(E)$;
   (b) Se $E \in M_{\mathcal{L}^n}$, allora $E + \tau \in M_{\mathcal{L}^n}$;
4. Per ogni $E \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\}$ e per ogni $\rho \in]0, +\infty[$ si ha:
   (a) $\mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E)$;
   (b) Se $E \in M_{\mathcal{L}^n}$, allora $\rho E \in M_{\mathcal{L}^n}$;

□

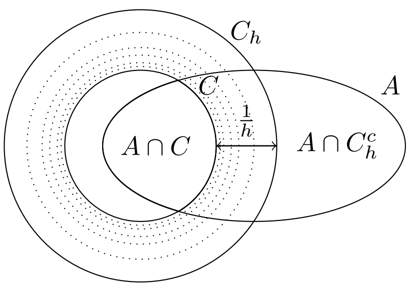


Figura 1.1: Gli insiemi utilizzati per la dimostrazione

Provare le seguenti identità:

$$(E+\tau)^c = E^c + \tau, \quad (A+\tau)\cap(B+\tau) = (A\cap B)+\tau$$
$$(\rho E)^c = \rho E^c, \quad (\rho A)\cap(\rho B) = \rho(A\cap B).$$

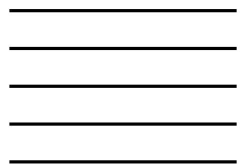
Esempio 1.2.1.1: S

ha $\mathcal{L}^n\left(\mathbb{Q}^n\right) = 0$. L'insieme $\mathbb{Q}^n$ è misurabile.

Osservazione 1.2.1.1: U

ilizzando l'insieme di Cantor si può provare che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono misurabili rispetto a $\mathcal{L}^1$ ma non sono Boreliani: sia $\{C_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ la successione di insiemi definita ricorsivamente ponendo $C_0 := [0,1]^n$ e C_{j+1} è l'insieme ottenuto da C_j rimuovendo tutti i terzi medi (aperti) di lunghezza 13^j. L'insieme di Cantor è definito quindi come $C := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_j$.

Possiamo osservare innanzitutto che l'insieme di Cantor è ottenuto come intersezione (numerabile) di chiusi, per cui è a sua volta un chiuso. Essendo limitato è inoltre un compatto. Inoltre la successione dei $\{C_j\}$ è decrescente e costituita da misurabili, quindi possiamo applicare il teorema di continuità dall'alto ottenendo che



$$\lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^1(C_j) = \mathcal{L}^1(C).$$

In particolare, ogni C^j è dato dall'unione disgiunta di 2^j segmenti di lunghezza 13^j, per cui

$$\mathcal{L}^1(C) = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{L}^1(C_j) = \lim_{j\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = 0$$

In particolare, per monotonia $\mathbb{P}(C) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}$.
Verifichiamo ora che $\text{card}(C) = \text{card}(\mathbb{R})$: al fine di questa dimostrazione, identifichiamo i numeri reali con il loro allineamento decimale in base 3. Allora l'operazione di rimozione che abbiamo effettuato consiste, al primo passo, a rimuovere tutto ciò che ha 1 come prima cifra decimale, al secondo tutto ciò che ha 1 come seconda cifra decimale e così via. Dobbiamo solo prestare attenzione ai decimali limitati, in quanto quelli che terminano con 1 sono l'estremo inferiore dei segmenti che stiamo eliminando, e devono rimanere nell'insieme finale: per evitare questo problema è tuttavia sufficiente interpretare $0,1 = 0,0\bar{2}$ e così via. Iterando questo procedimento rimaniamo alla fine con numeri che hanno allineamenti decimali contenenti le sole cifre 0 e 2: sostituendo i simboli mediante la legge $0 \mapsto 0$ e $2 \mapsto 1$ possiamo interpretare questi numeri come allineamenti decimali in base 2 e osservare che in questo modo stiamo riscrivendo in un'altra base lo stesso intervallo $[0,1]$.
Come diretta conseguenza di questa trattazione abbiamo quindi che

$$\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(C) < \text{card}\left(\mathbb{P}(C)\right) \leq \text{card}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}\right)$$

A questo punto la conclusione segue subito dal fatto che $\text{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \text{card}(\mathbb{R})$, per la dimostrazione del quale rimandiamo a [**15**].

Esempio 1.2.1.2: C

nsideriamo la seguente relazione di equivalenza in $[0,1]: x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Grazie all'assioma della scelta possiamo poi "costruire" un insieme $E \subset [0,1]$ di rappresentanti delle classi di equivalenza. Se $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, poniamo infine $E_j = E + q_j$: allora $\mathcal{L}^1(E_j) = \mathcal{L}^1(E)$ e $\forall j, E_j \subset [-1,2]$.

- Verifichiamo inizialmente che $[0,1] \subset \bigcup_j E_j$: fissato $x \in [0,1]$, deve esistere un $e \in E$ tale che $x - e \in \mathbb{Q}$ (in particolare, poiché $x, e \in [0,1]$, $x - e \in [-1,1]$). Di conseguenza deve esistere un j tale che $x - e = q_j$, per cui $x = e + q_j \in E + q_j = E_j$.
- Osserviamo quindi che gli $\{E_j\}_j$ sono a-2-a-2 disgiunti: siano infatti $i \neq j$, supponiamo per assurdo che esista $x \in E_i \cap E_j$. Si avrebbe quindi $x = e_1 + q_i = e_2 + q_j$ con $e_1, e_2 \in E$, da cui $e_1 - e_2 = q_j - q_i \in \mathbb{Q}$. Questo implicherebbe $e_1 \sim e_2$, ovvero $e_1 = e_2$ per costruzione di E, da cui $q_i = q_j$ e $i = j$, assurdo.

Proviamo infine che E non è misurabile: supponiamo per assurdo che lo sia, allora per il Piccolo Teorema di Lebesgue tutti gli E_j avrebbero la sua stessa misura, da cui

$$1 = \mathcal{L}^1([0,1]) \leq \mathcal{L}^1(\textstyle\bigcup_j E_j) \leq \mathcal{L}^1([-1,2]) = 3. \tag{$*$}$$

In particolare, per σ-additività, avremmo

$$\mathcal{L}^1(\textstyle\bigcup_j E_j) = \sum_j \mathcal{L}^1(E_j) = \sum_j \mathcal{L}^1(E).$$

A questo punto si configurano due casi: se $L^1(E) = 0$, la serie ha somma nulla (quando per $(*)$ dovrebbe essere maggiore di 1); se $L^1(E) > 0$ la serie diverge in quanto la successione degli addendi e positiva e non infinitesma (quando per $(*)$ dovrebbe essere limitata). In entrambe le situazioni si configura un assurdo, per cui E non può essere misurabile.

[1]Provare che se $i \neq j$ allora $E_i \cap E_j = \varnothing$.

Osservazione 1.2.1.2: S

nza l'assioma della scelta è impossibile provare l'esistenza di insiemi non misurabili (Solovay, 1970).

1.2.2 Misura esterna di Hausdorff

[$*$| Premisura di Hausdorff] Dati $E \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ e $\delta > 0$, indichiamo con $\mathcal{R}_\delta(E)$ la famiglia dai ricoprimenti numerabili $\{C_j\}_j$ di E tali che $0 < \operatorname{diam} C_j \leq \delta \ \forall j$. Per $s \in [0, +\infty[$, poniamo anche

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}, \qquad \Gamma(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1}\, \mathrm{d}x.$$

Allora la funzione $\mathcal{H}^s_\delta : \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ definita da

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \begin{cases} \inf \left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \,\middle|\, \{C_j\}_j \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\} & \text{se } E \neq \varnothing \\ 0 & \text{se } E = \varnothing \end{cases}$$

è una misura esterna

Osservazione 1.2.2.1: S

può provare che $\alpha(n) = \mathcal{L}^n\left(B_1^{(n)}\right)$, dove $B_1^{(n)}$ è la palla unitaria di $\mathbb{R}^n$. Per una dimostrazione di questo fatto, si veda per esempio [16, Ch. 2, Exercise 14].

Dimostrazione

Verifichiamo gli assiomi di misura esterna:

[label=)]Il primo assioma di misura esterna ($\mathcal{H}^s_\delta(\varnothing) = 0$) è verificato per definizione. Siano $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$, vogliamo dimostrare che $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s_\delta(F)$.
Se $E = \varnothing$ è banale, altrimenti $\mathcal{R}_\delta(E) \supset \mathcal{R}_\delta(F)$, dunque $\inf_{\mathcal{R}_\delta(E)} S \leq \inf_{\mathcal{R}_\delta(F)} S$ e perciò $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s_\delta(F)$.
Sia $\{E_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ numerabile, vogliamo dimostrare la σ-subaddittività.
Se $\sum_{j\in J} \mathcal{H}^s_\delta(E_j) = +\infty$ la tesi è banale, come nel caso in cui $\bigcup_{j\in J} E_j = \varnothing$, supponiamo dunque che la somma sia finita e la famiglia non vuota con almeno un insieme non vuoto.
Sia $J^* := \{j \in J | E_j \neq \varnothing\}$ che per ipotesi è non vuoto, la nostra nuova tesi diventa $\mathcal{H}^s_\delta(\bigcup_{j\in J^*} E_j) \leq \sum_{j\in J^*} \mathcal{H}^s_\delta(E_j)$, somma che abbiamo già assunto finita (e perciò la misura di ogni singolo insieme nella famiglia è finita).
Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$, abbiamo che $\forall j \in J^*, \exists \{C^j_i\}_{i\in I_j} \in \mathcal{R}_\delta(E_j)$ tale che

$$S(\{C^j_i\}_{i\in I_j}) \leq \mathcal{H}^s_\delta(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Osserviamo quindi che $\{C^j_i\}_{i\in I_j, j\in J^*} \in \mathcal{R}_\delta(\bigcup_{j\in J^*} E_j)$ e perciò

$$\mathcal{H}^s_\delta\Big(\bigcup_{j\in J^*} E_j\Big) \leq S(\{C^j_i\}_{i\in I_j, j\in J^*}) = \sum_{j\in J^*} S(\{C^j_i\}_{i\in I_j}) \leq \varepsilon + \sum_{j\in J^*} \mathcal{H}^s_\delta(E_j).$$

Quini, per $\epsilon \to 0$, si ha la tesi.

3. □

Verificare col calcolo diretto che: $\alpha(0) = 1, \quad \alpha(1) = 2, \quad \alpha(2) = \pi, \quad \alpha(3) = \frac{4\pi}{3}$.
[$**$| Hausdorff] Sia $s \in [0, +\infty[$ e $E \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Allora la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ è monotona decrescente, quindi esiste

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

[1]Già incluso nell'Esempio, NdR

La mappa $\mathcal{H}^s : \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ è una misura esterna metrica e Borel regolare. Essa è detta misura di Hausdorff s-dimensionale (in $\mathbb{R}^n$).

Provare che se X è uno spazio metrico, allora per ogni sottoinsieme C di X si ha $\operatorname{diam} C = \operatorname{diam} \bar{C}$.

Alcune ulteriori proprietà della misura esterna di Hausdorff sono raccolte in questo teorema di cui non proviamo il punto (2) e lasciamo per esercizio le parti dei punti (3) e (4) che replicano quasi identicamente gli argomenti usati per provare le corrispondenti asserzioni in Teorema **??**. La dimostrazione del punto (2) è un argomento (basato sulla disuguaglianza isodiametrica) che non abbiamo tempo di affrontare. Gli interessati possono consultare, per esempio, [**3**, **11**].

[∗| Hausdorff - piccolo] Si ha:

1. $\mathcal{H}^0 = \#$ (misura del conteggio);
2. $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ (in $\mathbb{R}^n$) - non lo dimostriamo;
3. Per ogni insieme non vuoto $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ si ha:
   - $\mathcal{H}^s(E + \tau) = \mathcal{H}^s(E)$
   - Se $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$ allora $E + \tau \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$;
4. Per ogni insieme non vuoto $E \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\rho \in \mathbb{R}^+$si ha:
   - $\mathcal{H}^s(\rho E) = \rho^s \mathcal{H}^s(E)$;
   - Se $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$ allora $\rho E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}$;

Dimostrazione

1. - Se $E = \varnothing$, la tesi segue banalmente.
   - Se $E = \{p\} \in \mathbb{R}^n$, si ha che $\forall \delta > 0$ vale

     $$\mathcal{H}^0_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_j \alpha(0) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^0 \middle| \{C_j\}_j \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\} = \inf\{\#\{C_j\}_j | \{C_j\}_j \in \mathcal{R}_\delta(E)\}$$

     Dato che $E \neq \varnothing$ abbiamo $\forall \{C_j\}_j \in \mathcal{R}_\delta(E), \#\{C_j\}_j \geq 1$, quindi $\mathcal{H}^0_\delta(E) \geq 1$.
     Inoltre, $\operatorname{diam}(B_{\delta/3}(p)) = \frac{2\delta}{3} < \delta \Rightarrow B_{\delta/3}(p) \in \mathcal{R}_\delta(E)$, dunque $1 \leq \mathcal{H}^0_\delta(E) \leq S(B_{\delta/3}(p)) \leq 1 \Rightarrow \forall \delta > 0, \mathcal{H}^0_\delta(E) = 1 \Rightarrow \mathcal{H}^0(E) = 1$.
   - Sia E finito. Allora $E = \bigcup_j \{p_j\}$ con $\forall i \neq j, d(p_i, p_j) > 0$ e dal teorema di ***Carathéodory*** segue $\mathcal{H}^0(E) = \sum_j \mathcal{H}(p_j) = \sum_j 1 = \#E$.
   - Sia E un insieme infinito. Allora $\forall N > 0, \exists F \subset E | \#F = N \Rightarrow \mathcal{H}^0(E) > \mathcal{H}^0(F) = \#F = N \Rightarrow \mathcal{H}^0(E) = +\infty$.
2. La dimostrazione del secondo punto viene omessa.
3. Sia $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e $\tau \in \mathbb{R}^n$.
   Posto $\delta > 0$ si ha $\{C_j\}_j \in \mathcal{R}_\delta(E) \Rightarrow \{C_j + \tau\}_j \in \mathcal{R}_\delta(E + \tau)$ dunque

   $$\mathcal{H}^s_\delta(E + \tau) = \inf_{\mathcal{R}_\delta(E+\tau)} S \leq S(\{C_j + \tau\}_j) = S(\{C_j\}_j) \Rightarrow \mathcal{H}^s_\delta(E + \tau) \leq \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

   . Ora, $\mathcal{H}^s_\delta(E) = \mathcal{H}^s_\delta((E + \tau) - \tau) \leq \mathcal{H}^s_\delta(E + \tau)$, dunque $\forall \delta > 0, \mathcal{H}^s_\delta(E) = \mathcal{H}^s_\delta(E + \tau) \Rightarrow \mathcal{H}^s(E + \tau) = \mathcal{H}^s(E + \tau)$.
   La dimostrazione del secondo punto di questo terzo punto è analoga a quella per la misura di Lebesgue (Teorema **??**).
4. Sia $\varnothing \neq E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e siano $\rho, \delta \in]0, +\infty[$. Si ha che $\{C_j\}_j \in \mathcal{R}_\delta(E) \Rightarrow \{\rho C_j\}_j \in \mathcal{R}_{\rho\delta}(\rho E)$ e quindi

   $$\mathcal{H}^s_{\rho\delta}(\rho E) \leq S(\{\rho C_j\}_j) = \rho^s S(\{C_j\}_j) \Rightarrow \mathcal{H}^s_{\rho\delta}(\rho E) \leq \rho^s \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

   Abbiamo anche

   $$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \mathcal{H}^s_{\frac{1}{\rho}\rho\delta}(E) \leq \frac{1}{\rho^s} \mathcal{H}^s_{\rho\delta}(\rho E)$$

   E quindi $\mathcal{H}^s_{\rho\delta}(\rho E) = \rho^s \mathcal{H}^s_\delta(E)$. Mandando δ a 0 segue la tesi.
   La dimostrazione del secondo punto di questo quarto punto è analoga a quella per la misura di Lebesgue (Teorema **??**).

□

Relativamente a Teorema **??**:

- Provare che, per ogni $C \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $\rho \in \mathbb{R}^+$, si ha $\operatorname{diam}(\rho C) = \rho \operatorname{diam}(C)$;
- Provare il secondo punto di (3) ed il secondo punto di (4).

Attraverso le proprietà della misura di Hausdorff si può definire una nozione di dimensione per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.2.2.1:

Se $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$, con $E \subset \mathbb{R}^n$ e $s \geq 0$, allora $\mathcal{H}^t(E) = 0$ per ogni $t > s$. Inoltre, per ogni $t > n$ si ha $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$. Conseguentemente, per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$, l'insieme

$$R(E) := \left\{ t \in [0, +\infty) \mid \mathcal{H}^t(E) = 0 \right\}$$

è una semiretta destra che include $(n, +\infty)$. La "dimensione di Hausdorff" dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è definita come il numero

$$\dim_H(E) := \inf R(E) \leq n$$

Dimostrazione

- Siano $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), s \in [0, +\infty[$ tali che $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ e sia $t > s$. Per la dimostrazione precedente, con $\delta > 0$ si ha $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s(E) < +\infty$, dunque $\exists \{C_j\}_j \in \mathcal{R}_\delta(E)$:

$$\sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s < \mathcal{H}^s_\delta(E) + 1 \leq \mathcal{H}^s(E) + 1 < +\infty$$

  . Allora si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \sum_j \alpha(t) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^t &= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^{t-s} \leq \\ &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} (\mathcal{H}^s(E) + 1) \end{aligned}$$

  Dunque mandando δ a 0 otteniamo $\mathcal{H}^t(E) \leq 0 \Rightarrow \mathcal{H}^t(E) = 0$.
- Sia $t > n$. Osserviamo che $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=0}^{+\infty} B_j(0)$ e ovviamente $\mathcal{H}^n(B_j(0)) = \mathcal{L}^n(B_j(0)) = \mathcal{L}^n(\bar{B}_j(0)) < +\infty$, dunque la $\forall j \in \mathbb{N}, \mathcal{H}^t(B_j(0)) = 0$ e per la σ-subadditività della misura di Hausdorff si ha $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$
- Sia $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e siano $s \in R(E)$ e $t > s$. Per quanto appena detto, $\mathcal{H}^t(E) = 0$, dunque $t \in R(E)$.
- Sia $t > n$, allora $t \in R(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), t \in R(E)$.
- Dai punti seguenti segue che $n = \inf]n, +\infty[\geq \inf R(E) = \dim_{\mathcal{H}} E$

$\square$

Corollario 1.2.2.1:

La misura esterna di Haudorff $\mathcal{H}^s$ in $\mathbb{R}^n$ non è di Radón, eccetto che per $s \geq n$.

Dimostrazione

[label=()]$\mathcal{H}^s$ è di Radón in quanto coincide con $\mathcal{L}^n$. Se $t > n$, $\mathcal{H}^t$ è di Radón in quanto $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$, quindi per monotonia $\mathcal{H}^t(E) = 0 \ \forall E \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Sia $s < n$, verifichiamo che $\mathcal{H}^s$ non è di Radón fornendo un controesempio: supponiamo per assurdo che $\mathcal{H}^s([0, 1]) < +\infty$, allora per la proposizione precedente $\mathcal{H}^n([0, 1]^n) = 0$, quindi $0 = \mathcal{H}^n([0, 1]^n) = \mathcal{L}^n([0, 1]^n) = 1$. Assurdo.

3. $\square$

Esempio 1.2.2.1: S

a C l'insieme di Cantor. Non è facile verificare che esiste s tale che $\mathcal{H}^s(C) \in]0, +\infty[$, ma se proviamo a supporre che esista allora troviamo facilmente che deve essere $s = \dim_H(C) = \ln 2 \ln 3$. Questo ci consente di "scommettere" che C abbia effettivamente dimensione di Hausdorff pari a $\ln 2 / \ln 3$.

Osserviamo inizialmente che $C_2 = (13C_1) \cup (13C_1 + 23)$ e che, in generale, $C_{k+1} = (13C_k) \cup (13C_k + 23)$. Questo ci porta a scrivere quindi la relazione $C = (13C) \cup (13C + 23)$, dove $13C$ e $13C + 23$ sono insiemi a distanza positiva. In particolare, ricordando che $\mathcal{H}^s$ è metrica e supponendo (non è detto che ciò sia vero, lo proveremo successivamente) che esista un s tale per cui $\mathcal{H}^s(C) \in]0, +\infty[$,

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3}C\right) + \mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C).$$

Siccome abbiamo supposto $\mathcal{H}^s(C) \neq 0$, possiamo dividere, ottenendo

$$1 = \frac{2}{3^s} \implies s = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Se tale s esiste, quindi, vale $\ln 2 \ln 3$: rimane da provare che effettivamente le ipotesi che abbiamo fatto sono giustificate, ovvero che $\mathcal{H}^s(C) \in]0, +\infty[$. Calcolando la misura di Hausdorff dell'insieme di Cantor, otteniamo infatti

$$\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C) = \alpha\left(\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)$$

per cui la misura di Hausdorff di C è effettivamente $\dim_H(C) = \ln 2 \ln 3$.
Per una dimostrazione più completa si faccia riferimento, per esempio, a [4, Theorem 1.14] oppure a [16, Ch. 7, Theorem 2.1].

Definizione 1.2.2.1: S

a X un insieme e $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X. Allora, una "misura su $\mathcal{A}$ " è una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che:

[label=()]$\mu(\varnothing) = 0$; se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi in $\mathcal{A}$ a-due-a-due disgiunti, allora $\mu\left(\cup_j E_j\right) = \sum_j \mu\left(E_j\right)$.

La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è detta "spazio con misura".

Come conseguenza di Teorema **??** e Proposizione **??**, otteniamo subito il seguente risultato.

Proposizione 1.2.2.2:

Se φ è una misura esterna sull'insieme X, allora $\left(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}\right)$ è uno spazio con misura.

Dimostrazione

[label=()]$\phi(\varnothing) = 0$ per assioma di misura esterna; se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi in $\mathcal{M}_\phi$ a-due-a-due disgiunti, allora $\phi\left(\cup_j E_j\right) = \sum_j \mu\left(E_j\right)$ per il Teorema **??**.

2. $\square$

Esempio 1.2.2.2: L

"misura di Lebesgue" $\mathcal{L}^n|_{\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}}$ e la "misura di Hausdorff" $\mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}}$. Per semplicità esse sono indicate con $\mathcal{L}^n$ and $\mathcal{H}^s$, rispettivamente.

Osservazione 1.2.2.2: C

si può chiedere se una misura provenga sempre da una misura esterna nel modo indicato in Proposizione **??**. Una risposta quasi affermativa è data dal seguente risultato (vedasi [5, Theorem 4.47]):

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio con misura, allora esiste una misura esterna φ su X tale che $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\varphi$ e $\varphi|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Capitolo 2

Funzioni misurabili e integrale

Capitolo 3

Spazi L^p e serie di Fourier

Capitolo 4

Successioni e serie di funzioni

Capitolo 5

Complementi

Appendice A

Complementi sulle serie

Appendice B

Tabella dei Teoremi

Bibliografia

[label=[0]]H. Brezis: Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori Editore 1986. L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116, 135-157 (1966). L.C. Evans, R.F. Gariepy: Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions. (Studies in Advanced Math.) CRC Press 1992. K.J. Falconer: The geometry of fractal sets. (Cambridge Tracts in Math. 85.) Cambridge University Press 1985. R.F. Gariepy, W.P. Ziemer: Modern real analysis. PSW Publishing Company 1995. M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 3; strutture lineari e metriche, continuità. Pitagora Ed. Bologna 2000. M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 4; funzioni di più variabili. Pitagora Ed. Bologna 2005. M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 5; funzioni di più variabili (ulteriori sviluppi). Pitagora Ed. Bologna 2005. E. Giusti: Analisi matematica 2. Bollati Boringhieri 2003. E. Giusti: Esercizi e complementi di analisi matematica, volume secondo. Bollati Boringhieri 2000. J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J.T. Tyson: Sobolev spaces on metric measure spaces. New Math. Monogr. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. S.G. Krantz, H.R. Parks: The geometry of domains in space. Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser 1999. P. Mattila: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge University Press 1995. W. Rudin: Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill 1976. S.M. Srivastava: A course on Borel sets. Graduate Texts in Mathematics 180, Springer Verlag 1998. E.M. Stein, R. Shakarchi: Real analysis (measure theory, integration and Hilbert spaces). Princeton Lectures in Analysis III, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005. http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass