

Categorie per il matematico disoccupato

Filippo L. Troncana, per il corso "Strumenti Informatici per la Matematica"

A.A. 2023/2024

1 Introduzione e prime definizioni

Durante la seconda metà del XX secolo la profondissima (sebbene apparentemente banale) osservazione del fatto che in fondo tutta la matematica è fatta di *così*¹ e frecce tra *così* ha motivato l'introduzione del concetto di Categoria.

Informalmente parlando una categoria è fatta da oggetti che condividono un certo senso di struttura e delle frecce che li collegano, che preservano questo tipo di struttura. Un esempio classico è la categoria **Set**, ovvero gli insiemi e le funzioni tra essi, oppure la categoria **Top** degli spazi topologici le cui frecce sono le funzioni continue. Procediamo a dare una definizione un po' più rigorosa.

Definizione 1.1. Una categoria \mathcal{C} consiste nelle seguenti:

- Una classe $\text{ob}(\mathcal{C})$ i cui elementi sono detti oggetti di \mathcal{C} .
- Una classe $\text{mor}(\mathcal{C})$ i cui elementi sono detti morfismi di \mathcal{C} . Ogni morfismo f ha un unico oggetto sorgente A e un unico oggetto di destinazione B , e si denota con $f : A \rightarrow B$. La classe dei morfismi tra due oggetti nella stessa categoria si indica con $\text{mor}(A, B)$.
- Per ogni terna di oggetti $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$, è definita una legge di composizione tra morfismi, che a un morfismo $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ associa un unico morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$. La composizione di morfismi deve rispettare le seguenti proprietà:
 - L'associatività: per qualsiasi terna di morfismi $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$ vale $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
 - L'esistenza del morfismo identità: per ogni oggetto $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ esiste un morfismo $\text{id}_X : X \rightarrow X$ tale che per ogni morfismo $f : A \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow B$ valgono $\text{id}_X \circ f = f$ e $g \circ \text{id}_X = g$.

Osservazione 1.1. Dato che per ogni oggetto esiste un unico (la dimostrazione dell'unicità è banale) morfismo identità, una categoria risulta essere univocamente determinata dai suoi morfismi, e pertanto è possibile definire le categorie semplicemente in base alla classe dei morfismi.

Arricchiamo leggermente il nostro linguaggio

Definizione 1.2. Sia \mathcal{C} una categoria.

Se $\text{mor}(\mathcal{C})$ è un insieme (e dunque per l'osservazione precedente lo è anche $\text{ob}(\mathcal{C})$), allora \mathcal{C} si dice piccola, altrimenti si dice grande.

Una categoria in cui una volta fissati due $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ allora $\text{mor}(A, B)$ è un insieme si dice localmente piccola.

Definizione 1.3. Sia \mathcal{C} una categoria e sia $f : A \rightarrow B$ un morfismo. Esso si dice:

- Endomorfismo se $A = B$
- Isomorfismo se $\exists f' : B \rightarrow A$ tale che $f \circ f' = \text{id}_B$ e $f' \circ f = \text{id}_A$
- Automorfismo se è contemporaneamente endomorfismo e isomorfismo.

Al lettore dotato di un qualsivoglia $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere di familiarità con l'algebra astratta, la definizione di categoria risulterà analoga a quella di monoide. In effetti un monoide $(M, +)$ non è altro che una categoria piccola con un unico oggetto (l'insieme M) e i cui morfismi corrispondono alle traslazioni degli elementi di M sugli altri elementi di M .

Inoltre, quasi sempre, quando si esprime l'unicità di qualcosa in teoria delle categorie la si considera a meno di isomorfismo, come vedremo più avanti.

¹termine tecnico

²Occasionalmente, scriveremo $A \in \mathcal{C}$ invece di $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ con un lieve abuso di notazione

2 Diagrammi commutativi

Ai *cat-boys*³ piace molto esprimere qualsiasi proprietà attraverso cosiddetti diagrammi commutativi, utili strumenti per esprimere le relazioni fra oggetti e morfismi in una categoria

Definizione 2.1. Un diagramma commutativo è un grafo diretto in cui i nodi sono costituiti da oggetti e i cui archi sono costituiti da morfismi tra essi in modo tale che percorrere un arco corrisponda ad applicare il morfismo a esso associato.

Ad esempio, i diagrammi commutativi possono essere usati per riformulare in modo visualmente intuitivo alcuni teoremi.

Teorema 2.1. Sia $\mathbb{K} \in \mathbf{Fld}$, siano $V, W \in \mathbf{Vec}(\mathbb{K})$ e sia $f \in \text{mor}(V, W)$. Allora $\exists! \phi \in \text{mor } V/\ker(f), \text{Im}(f)$ tale che ϕ sia un isomorfismo e si abbia $f = i \circ \phi \circ \pi$. Equivalentemente, $\exists! \phi \in \text{mor } V/\ker(f), \text{Im}(f)$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi & & \uparrow i \\ V/\ker(f) & \xrightarrow{\phi} & \text{im}(f) \\ & \xleftarrow{\phi^{-1}} & \end{array}$$

3 Funtori e trasformazioni naturali

3.1 Funtori

Abbiamo parlato di oggetti e frecce tra oggetti. Ma se volessimo parlare di frecce tra le frecce?

Definizione 3.1. Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} due categorie.

Un Funtore covariante è una mappa $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tale che:

- $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \exists! F(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$
- $\forall f : A \rightarrow B \in \text{mor}(\mathcal{C}), \exists! F(f) : F(A) \rightarrow F(B) \in \text{mor}(\mathcal{D})$

Un Funtore controvariante è una mappa G da \mathcal{C} a \mathcal{D} tale che:

- $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), \exists! G(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$
- $\forall f : A \rightarrow B \in \text{mor}(\mathcal{C}), \exists! G(f) : G(B) \rightarrow G(A) \in \text{mor}(\mathcal{D})$

Un Funtore (covariante o controvariante) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deve rispettare le seguenti proprietà:

- $\forall X \in \text{ob}(\mathcal{C}), F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$
- $\forall f, g \in \text{mor}(\mathcal{C}), F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

La situazione che stiamo immaginando si traduce dunque in questo diagramma commutativo (dove F e G sono come nella definizione)

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & & & F(Y) \\ & \uparrow F & & \uparrow F & \\ & \parallel & & \parallel & \\ & f & \xrightarrow{\quad} & & Y \\ & \downarrow G & & \downarrow G & \\ G(X) & \xleftarrow{G(f)} & G(Y) & & \\ & \uparrow \text{id}_{G(X)} & \uparrow G(g) & & \\ & G(X) & \xleftarrow{G(g \circ f)} & G(Z) & \\ & \uparrow G & & \uparrow G & \\ & \parallel & & \parallel & \\ & g \circ f & \xrightarrow{\quad} & & Z \\ & \downarrow F & & \downarrow F & \\ F(X) & \xrightarrow{F(g \circ f)} & & & F(Z) \end{array}$$

$\text{id}_{F(X)} \leftarrow F = \text{id}_X = G \Rightarrow \text{id}_{G(X)} \quad G(g) \leftarrow G = g = F \Rightarrow F(g)$

Vediamo degli esempi che ci permettano di chiarire:

³Teorici delle categorie

- La mappa $S : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ che ad un gruppo $(G, +)$ associa l'insieme G è un funtore covariante, detto funtore dimenticante⁴. Esistono numerosi (infiniti, in effetti) funtori smemorati, ad esempio da **Fld** a $\mathbf{Vec}(\mathbb{K})$, da $\mathbf{Vec}(\mathbb{K})$ a \mathbf{Grp} , da **Top** a \mathbf{Set} e così via, da qualsiasi categoria i cui oggetti siano quelli della categoria in arrivo con una struttura più regolare.
- La mappa $\pi_1 : \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Grp}$ che a uno spazio topologico con un punto fissato associa il suo gruppo fondamentale è un funtore covariante, in particolare è il primo (definito come tale) incontrato dalla maggior parte degli studenti.
- La mappa $*$: $\mathbf{Vec}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{Vec}(\mathbb{K})$ che ad uno spazio vettoriale V associa il suo spazio duale V^* , ovvero lo spazio vettoriale dei morfismi $V \rightarrow \mathbb{K}$ (dove \mathbb{K} è visto come oggetto in $\mathbf{Vec}(\mathbb{K})$), è un funtore controvariante.
- La mappa $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Graph}^*$ (dove \mathbf{Graph}^* è la categoria dei grafi diretti) che ad una famiglia di oggetti e morfismi rappresentati da un insieme di indici associa un diagramma commutativo è un funtore⁵.

È interessante notare che in una data categoria la classe dei morfismi tra due oggetti può possedere una struttura notevole: per esempio fissato un $V \in \text{ob}(\mathbf{Vec}(\mathbb{K}))$, l'insieme $\text{mor}(V, V)$ è un'algebra associativa su \mathbb{K} , al cui studio è dedicato tutto il primo semestre del corso di Geometria A. Ma se volessimo fissare due categorie e parlare dei funtori tra di esse, come potremmo procedere?

3.2 Trasformazioni naturali

Definizione 3.2. Siano $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ due funtori dalla categoria \mathcal{A} alla categoria \mathcal{B}

Si dice trasformazione naturale una collezione $\{\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)\}$ di morfismi in \mathcal{B} indicizzati da oggetti di \mathcal{A} tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccc} X & & F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\ | & & | & & | \\ f & & F(f) & & G(f) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & & F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) \end{array}$$

Ovvero, tale che per ogni oggetto X e ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ di \mathcal{A} si abbia $\alpha_Y \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_X$.

Possiamo dunque immaginare una trasformazione naturale come una specie di funtore tra funtori dunque, in un diagramma commutativo di questo tipo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow F & \swarrow G \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\alpha} & \\ & \searrow \alpha(F) & \swarrow \alpha(F) \\ & [\alpha(F)](X) & \xrightarrow{[\alpha(F)](f)} & [\alpha(F)](Y) \end{array}$$

4 Proprietà universali

Uno dei principali punti di forza della teoria delle categorie è il permettere di formulare delle cosiddette "proprietà universali" di una costruzione. Partiamo con un esempio

Teorema 4.1. \mathbb{R} è l'unico campo completo totalmente ordinato, a meno di isomorfismo.

Le possibili costruzioni dei numeri reali sono molte, le più famose sono quelle per classi di equivalenza di successioni di Cauchy o per sezioni di Dedekind a partire da \mathbb{Q} , ma come facciamo a dimostrare che una nuova bizzarra costruzione che ci è appena venuta in mente sia effettivamente una costruzione dei numeri reali? È semplice, basta dimostrare che con le opportune operazioni, che idealmente dovrebbero emergere in modo naturale dalla nostra costruzione, questo oggetto costituisca un campo totalmente ordinato e completo, e dal teorema precedente avremo la garanzia che sia \mathbb{R} (o almeno, che sia isomorfo a esso). Dunque c'è un senso in cui questa è una proprietà che è "universale" rispetto alle costruzioni dei numeri reali.

Esaminiamo un altro caso.

Definizione 4.1. Siano X, Y oggetti in una categoria \mathcal{C} . Si dice prodotto di X e Y un oggetto $X \amalg Y$ di \mathcal{C} fornito di una coppia di morfismi $\pi_X : X \amalg Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \amalg Y \rightarrow Y$ suriettivi tale che per qualsiasi morfismo $f : Z \rightarrow X \amalg Y$

⁴nonostante "dimenticante" sia il termine utilizzato in letteratura, l'autore preferisce "smemorato"

⁵Sì, sostanzialmente qualsiasi cosa è un funtore

esistano unici $f_X : Z \rightarrow X$ e $f_Y : Z \rightarrow Y$ tali per cui il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & \swarrow & \downarrow f & \searrow & \\
 A & \xleftarrow{\pi_X} & X \amalg Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y
 \end{array}$$

In questo modo, generalizziamo le idee di prodotto cartesiano in **Set**, prodotto topologico in **Top** o prodotto tensoriale in **Vec**(\mathbb{K}): qualsiasi tipo di "prodotto" tra due strutture dello stesso tipo è completamente caratterizzato dalle proiezioni alle sue componenti.

5 Conclusione

In conclusione, il formalismo della teoria delle categorie fornisce una sorta di "grande teoria unificata" delle varie branche della matematica