Domande Pagani FFM2

Filippo Troncana

A.A. 2024/2025

Indice

1 Classificazione delle PDE quasilineari del secondo ordine

Fissato $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, si dice ***equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine quasilineare*** con incognita $u \in \mathcal{C}^2(U)$ un'espressione della forma

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d$$

dove a, b, c, d sono funzioni della forma $f(x, y, u, u_x, u_y)$. Consideriamo una curva regolare $\gamma : I \to U$ con $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ e, con l'abuso di notazione $f|_\gamma := f \circ \gamma$, i dati iniziali

$$u|_\gamma = h(s), \quad u_x|_\gamma = \phi(x), \quad u_y|_\gamma = \psi(x)$$

Con h, ϕ, ψ funzioni date. Queste devono rispettare certi vincoli, infatti applicando la regola della catena otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}u|_\gamma}{\mathrm{d}s} = u_x|_\gamma \cdot x' + u_y|_\gamma \cdot y' \Leftrightarrow h' = \phi \cdot x' + \psi \cdot y'$$

Assumendo che una soluzione u esista e tutto sia sufficientemente regolare, consideriamo le sue derivate seconde

$$\frac{\mathrm{d}u_x|_\gamma}{\mathrm{d}s} = u_{xx}|_\gamma x' + u_{xy}|_\gamma y' = \phi', \quad \frac{\mathrm{d}u_y|_\gamma}{\mathrm{d}s} = u_{yx}|_\gamma x' + u_{yy}|_\gamma y' = \psi'$$

Quindi ricordando l'equazione iniziale, gli assunti di regolarità e componendo con γ otteniamo

$$a|_\gamma u_{xx}|_\gamma + 2b|_\gamma u_{xy}|_\gamma + c|_\gamma u_{yy}|_\gamma = d|_\gamma$$

Otteniamo un sistema lineare nelle derivate seconde di u:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a|_\gamma & 2b|_\gamma & c|_\gamma \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{xx}|_\gamma \\ u_{xy}|_\gamma \\ u_{yy}|_\gamma \end{pmatrix}}_{u''} = \underbrace{\begin{pmatrix} d|_\gamma \\ \phi' \\ \psi' \end{pmatrix}}_{k}$$

Denotando con $\Delta(s) := \det A(s)$ otteniamo tre casi:

- $\Delta \neq 0$ su tutta la curva, ovvero esiste ed è unico $u''(s)$ che soddisfa l'equazione.
- $\Delta = 0$ su tutta la curva ***in generale*** non ci dà una soluzione, ma solamente se $\text{rk}(A|k) = \text{rk}(A)$, che comunque non ci garantisce l'unicità; in particolare, calcolando esplicitamente il determinante, vediamo che equivale a dire:

  $$a|_\gamma \cdot (y')^2 - 2b|_\gamma \cdot x' \cdot y' + c|_\gamma \cdot (x')^2 = 0$$

  E in questo caso si dice che la curva γ è una ***curva caratteristica***. In particolare, rinominando la variabile s in t e assumendo che $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$ ottengo

  $$a|_\gamma \cdot (f')^2 - 2b|_\gamma \cdot f' + c|_\gamma = 0 \Rightarrow f' = \frac{2b|_\gamma \pm \sqrt{(2b|_\gamma)^2 - 4a|_\gamma \cdot c|_\gamma}}{2a|_\gamma}$$

  Questa condizione ci divide in tre casi:

  - $(2b|_\gamma)^2 - 4a|_\gamma \cdot c|_\gamma > 0$, detto ***iperbolico***, dove ho due derivate distinte e dunque due famiglie di curve caratteristiche.
  - $(2b|_\gamma)^2 - 4a|_\gamma \cdot c|_\gamma = 0$, detto ***parabolico***, in cui ho una sola famiglia di derivate e dunque di curve caratteristiche.
  - $(2b|_\gamma)^2 - 4a|_\gamma \cdot c|_\gamma > 0$, detto ***ellittico***, in cui non ho curve caratteristiche.
- Negli altri casi coi nostri strumenti non abbiamo considerazioni interessanti dal punto di vista fisico.

2 Superfici caratteristiche per PDC e teorema di Cauchy–Kovalevskaja

Assumendo che la curva caratteristica γ della nostra equazione sia della forma $(t, f(t))$ (o simmetricamente della forma $(f(t), t)$), proviamo a descrivere γ come luogo di zeri di una funzione $F(x, y)$. Sappiamo che

$$a|_\gamma (f')^2 - 2b|_\gamma f' + c|_\gamma = 0$$

Supponendo che $F(t, f(t)) = 0$ posso derivare totalmente e ottengo:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = F_x \cdot 1 + F_y f' \Rightarrow f' = -\frac{F_x}{F_y}$$

E dunque la condizione di cui sopra diventa (moltiplicando per $(F_y)^2$ per eliminare i denominatori)

$$a|_\gamma (F_x)^2 + 2b|_\gamma F_x F_y + c|_\gamma (F_y)^2 = 0$$

Questa condizione vale per le curve, ma in realtà si generalizza abbastanza facilmente a quello delle (iper)superfici in $\mathbb{R}^{n+1}$ grazie al teorema di invertibilità locale. Generalizziamo la nostra equazione ad una scrittura della forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,k} u_{i,j} = d$$

Dove $a^{i,k}$ e d sono funzioni in $(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_n)$; posta $F(x_1, ..., x_n)$ la funzione di cui ipotizziamo l'esistenza, otteniamo la condizione

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,k} F_i F_j = 0$$

E da questa una "trasmissione di regolarità" analoga a quanto visto per le curve.

Teorema 2.1: Teorema di Cauchy–Kovalevskaja

Data una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ regolare, a, b, c e d funzioni analitiche nelle variabili x, y, u_x, u_y e dati $u|_\gamma, u_x|_\gamma$ e $u_y|_\gamma$ analitici, esiste ed è unica in un intorno del supporto di γ una soluzione analitica u dell'equazione:

$$a \cdot \cdot u_{xx} + 2b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} = d$$

3 Ricavare da un modello fisico a scelta l'equazione delle onde. Scrivere la soluzione di d'Alembert per la retta e la semiretta con condizioni al bordo di Dirichlet e Von Neumann

3.1 Derivazione (onde trasversali ad una corda tesa)

Procediamo a derivare l'equazione delle onde per le vibrazioni trasversali su una corda tesa tra due punti $(0, 0)$ e $(L, 0)$ nel piano xu. Assumiamo che la posizione di ciascun punto della corda vari ortogonalmente alla corda stessa, permettendoci di descrivere lo spostamento di un punto x con la funzione $u = u(x, t)$, in modo che la curva $\gamma_t = (x, u(x, t))$ rappresenti la corda al momento t.
Posti due punti x_1, x_2 sulla corda, la quantità di moto tra i due è diretta lungo il versore $\hat{e}_u$ trasversale alla corda ed è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) u_t(\xi, t) \, \mathrm{d}\xi$$

Dove $\rho(\xi)$ è la densità della corda e $u_t(\xi, t)$ è la velocità del punto ξ lungo $\hat{e}_u$ al tempo t.
I versori tangenti alla corda nei due punti sono dati da:

$$T(x_i, t) = \frac{\hat{e}_x + \hat{e}_u u_x(x_i, t)}{\sqrt{1 + (u_x(x_i, t))}}$$

Possiamo fare tre considerazioni:

1. Chiamando A, B e C i tratti della corda rispettivamente precedente x_1, compreso tra x_1 e x_2 e successivo a x_2 e assumendo che la tensione τ sia costante, abbiamo che:
   - La forza di A su B in (x_1, t) è $-\tau T(x_1, t)$.
   - Analogamente, la forza di C su B in (x_2, t) è $\tau T(x_2, t)$

   E dunque la forza agente su B è $F(t) := \tau \left(T(x_2, t) - T(x_1, t)\right)$
2. Assumendo variazioni di piccola ampiezza, ovvero $u_x \ll 1$ abbiamo

$$F(t) \approx \tau \left(u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)\right) \hat{e}_u$$

3. Assumiamo che qualsiasi forza esterna agisca sulla corda lo faccia in B e sia della forma $f(\xi, t)\hat{e}_u$, dove f indica la "densità lineare" di forza agente al tempo t.

Consideriamo l'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ e applichiamo la forma integrale della seconda legge di Newton[1] per la variazione della quantità di moto p del tratto B nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) u_t(\xi, t_2) \, \mathrm{d}\xi - \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) u_t(\xi, t_1) \, \mathrm{d}\xi = \int_{t_1}^{t_2} \tau \left(u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)\right) \, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(\xi, t) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}t$$

Definiamo le funzioni integrali

$$\int_{t_1}^{t_2} u_{tt}(x, t) \, \mathrm{d}t = u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1), \qquad \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x, t) \, \mathrm{d}t = u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)$$

Per generalità di $[x_1, x_2]$ posso estendere le mie equazioni a tutto il dominio e sostituire ottenendo

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(\xi) u_{tt}(\xi, t) - \tau u_{xx}(\xi, t) - f(\xi, t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\xi \equiv 0 \Leftrightarrow \rho(x) u_{tt}(x, t) - \tau u_{xx}(x, t) \equiv f(x, t)$$

Dividendo tutto per $\rho(x)$ e ponendo $a^2 := \frac{\tau}{\rho(x)}$, termine che corrisponde alla velocità di propagazione, otteniamo l'equazione

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = \frac{f(x, t)}{\rho(x, t)}$$

Detta ***equazione delle onde***, una PDE del secondo ordine quasilineare iperbolica.

[1] $\Delta p = \int F \, \mathrm{d}t$

3.2 Soluzioni

3.2.1 Retta

Assumiamo una corda di lunghezza infinita, densità costante e con forze esterne nulle, otteniamo il problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & \forall x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Questa equazione ha come soluzione (ricavata usando le curve caratteristiche $x = \pm at$ come assi) la ***soluzione di D'Alembert***:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

3.2.2 Semiretta, condizioni di Dirichlet

Consideriamo il problema definito sulla semiretta $\mathbb{R}_{\geq 0}$ con la condizione al bordo di Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x \geq 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \forall x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Possiamo trattarlo come il problema definito sulla retta definendo i prolungamenti dispari delle condizioni, ignorando momentaneamente la condizione di Dirichlet:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

E procedendo come sopra con la formula di D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

Valutando la soluzione in $(0,t)$, dato che sia Φ che Ψ sono dispari, otteniamo

$$u(0,t) = \frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{-at}^{at} \Psi(\xi)\ \mathrm{d}\xi \equiv 0$$

3.2.3 Semiretta, condizioni di Neumann

Consideriamo il problema definito sulla semiretta $\mathbb{R}_{\geq 0}$ con la condizione al bordo di Neumann

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x \geq 0 \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \forall x \geq 0 \\ u_x(0,t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Possiamo trattarlo come il problema definito sulla retta definendo i prolungamenti pari delle condizioni, ignorando momentaneamente la condizione di Neumann:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

E procedendo come sopra con la formula di D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$

Adesso, deriviamo la soluzione:

$$u_x(x,t) = \frac{\Phi'(x+at)+\Phi'(x-at)}{2} + \frac{\Psi(x+at)-\Psi(x-at)}{2}$$

Dato che Φ e Ψ sono pari, dunque Φ' è dispari, otteniamo che valutando in $(0,t)$:

$$u_x(0,t) = \frac{\Phi'(at)+\Phi'(-at)}{2} + \frac{\Psi(at)-\Psi(-at)}{2} \equiv 0$$

4 Calore

4.1 Soluzione dell'equazione del calore sul segmento $[0, L]$ con assegnati dati iniziali e condizioni al bordo omogenee di Dirichlet; giustificare rigorosamente la serie formale che rappresenta la soluzione.

Consideriamo il problema di Dirichlet con condizioni al bordo omogenee per l'equazione del calore sul segmento $[0, L]$ con $L > 0$:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & \forall x \in (0,L), \forall t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in [0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Assumendo sufficiente regolarità per il dato $\varphi(x)$, calcoliamo i suoi coefficienti di Fourier per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$c_n := \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}\xi\right) \, d\xi, \quad \varphi_n(x) := c_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Dunque possiamo scrivere la nostra soluzione come

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} u_n(x,t), \quad \text{dove} \quad u_n(x,t) := c_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

A priori questa serie è puramente formale, dobbiamo verificare che abbia effettivo senso: osserviamo che possiamo derivare due volte, dato che assumendo $t \geq t_0$ con t_0 arbitrariamente piccolo e $x \in (0, L)$ valgono le seguenti stime sfruttando il termine esponenziale:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)\right| < |\varphi_n(x)| \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 a^2 e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t_0}, \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t)\right| < |\varphi_n(x)| \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t_0}$$

Possiamo assumere ragionevolmente che la temperatura iniziale non sia infinita e che quindi ogni φ_n sia limitata da un qualche $2M > 0$, dunque otteniamo convergenza uniforme per le serie

$$u_t(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t), \quad u_{xx}(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t)$$

Notiamo che le ipotesi di regolarità minime che abbiamo fatto su φ sono sufficienti a garantire la convergenza per tutte le derivate di u in $[0,L] \times [t_0, +\infty)$, infatti vediamo che vale

$$\left|\frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l}(x,t)\right| < 2M \left(\frac{\pi n}{L}\right)^{2k+l} a^{2k} e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t_0}$$

Per l'arbitrarietà di t_0 inoltre posso estendere questa regolarità a tutto $[0, L] \times (0, +\infty)$.
Infine dobbiamo controllare che u sia continua: dato che $|u_n|$ è sempre maggiorata da $|\varphi_n|$, è sufficiente richiedere la continuità a tratti di φ su $[0, L]$ e $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ per ottenere la continuità di u su tutto $[0, L] \times [0, +\infty)$. Notiamo che definendo

$$G(x,t,\xi) := \frac{2}{L} \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}\xi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t}$$

Possiamo scrivere la nostra soluzione come

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,t,\xi)\varphi(\xi) \, d\xi$$

4.2 Determinare la soluzione dell'equazione del calore con termine non omogeneo e temperatura iniziale nulla sul segmento $[0, L]$.

Consideriamo il problema non omogeneo (ovvero con una sorgente di calore) per l'equazione del calore sul segmento $[0, L]$ con $L > 0$ con temperatura iniziale nulla:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & \forall x \in (0, L), \forall t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \forall x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione è

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x, t-\tau, \xi) f(\xi, \tau) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau$$

Non ho davvero voglia di stare a scrivere la giustificazione.

4.3 Soluzione dell'equazione del calore con termine non omogeneo e temperatura iniziale non nulla sul segmento $[0, L]$.

Consideriamo il problema non omogeneo (ovvero con una sorgente di calore) per l'equazione del calore sul segmento $[0, L]$ con $L > 0$ con temperatura iniziale assegnata:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) & \forall x \in (0, L), \forall t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Per risolverlo, consideriamo l'operatore differenziale:

$$D(u)(x,t) := \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Questo è lineare e ci permette di riscrivere il nostro problema come

$$\begin{cases} D(u)(x,t) = f(x,t) & \forall x \in (0, L), \forall t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Ora consideriamo v, w soluzioni dei seguenti problemi:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 & \forall x \in (0, L), \forall t > 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) & \forall x \in [0, L] \\ v(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f(x,t) & \forall x \in (0, L), \forall t > 0 \\ w(x,0) = 0 & \forall x \in [0, L] \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Che abbiamo mostrato essere della forma (assumendo che φ e f ammettano serie di Fourier convergenti)

$$v(x,t) = \int_0^L G(x,t,\xi)\varphi(\xi) \, \mathrm{d}\xi \quad \text{e} \quad w(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x, t-\tau, \xi) f(\xi, \tau) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau$$

Dunque mostriamo $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$:

$$\begin{cases} D(v+w)(x,t) = \underbrace{D(v)(x,t)}_{=0} + \underbrace{D(w)(x,t)}_{=f(x,t)} = f(x,t) & \forall x \in (0, L), \forall t > 0 \\ \underbrace{v(x,0)}_{=\varphi(x)} + \underbrace{w(x,0)}_{=0} = \varphi(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$