


PEM

F. Troncana, sotto la supervisione del prof. R. Zunino

TBD

Nota preliminare

Durante questa trattazione, noi faremo alcune cose leggermente inquietanti dal punto di vista "fondazionale", in particolare tratteremo classi proprie come insiemi, useremo versioni ultrapotenziante dell'assioma della scelta, avremo collezioni "piccole" di oggetti "grossi" che comunque tratteremo come insiemi, insomma, ne faremo di tutti i colori. È effettivamente possibile ben fondare tutto quello che faremo, ma ciò esula dagli scopi di questa trattazione: procederemo dunque con una fede incrollabile e un ottimismo completamente ingiustificato, come sempre d'altronde.

Ogni tanto porterò io stesso l'attenzione ai fondamenti "scricchiolanti" della nostra trattazione con il carattere .

1 Preliminari

1.1 Nozioni fondamentali

Definizione 1.1: Categoria e dualità

Una **categoria** \mathcal{C} è una struttura munita di due classi: $\text{ob } \mathcal{C}$ e $\text{hom } \mathcal{C}$, dette rispettivamente **oggetti** (o elementi) e **morfismi** (o mappe o frecce) tali che

- Ogni morfismo $f \in \text{hom } \mathcal{C}$ abbia associati due oggetti $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$ detti rispettivamente **dominio** e **codominio** di f , che verrà indicato come $f : A \rightarrow B$.
- Per ogni coppia di morfismi $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ sia definita la loro **composizione**, ovvero un morfismo $g \circ f : A \rightarrow C$ (spesso indicato solo con gf).
- Per ogni oggetto $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ esista un morfismo $\text{id}_X \in \text{hom } \mathcal{C}$ detto **identità** di X tale che per ogni morfismo $f : A \rightarrow B$ valga $\text{id}_B f = f \text{id}_A = f$.
- Per ogni terna di morfismi componibili $f, g, h \in \text{hom } \mathcal{C}$, valga $h(gf) = (hg)f =: hgf$, ovvero la composizione sia **associativa**.

Fissati due oggetti $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$ denoteremo con $\text{hom}(A, B)$ o $\mathcal{C}(A, B)$ la collezione dei morfismi $A \rightarrow B$ di $\text{hom } \mathcal{C}$.

Per ogni categoria \mathcal{C} è definita la sua **duale** (o opposta) \mathcal{C}^{op} , i cui oggetti sono gli stessi di \mathcal{C} e i cui morfismi sono quelli di \mathcal{C} ma invertiti di direzione, ovvero ad ogni $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} corrisponde un $f^{\text{op}} : B \rightarrow A$ in \mathcal{C}^{op} .

Una categoria \mathcal{C} si dice:

- **Piccola** se le classi $\text{hom } \mathcal{C}$ e $\text{ob } \mathcal{C}$ (anche se vedremo sotto che la grandezza della seconda è sempre limitata dalla prima) sono insiemi.
- **Grande** se non è piccola.
- **Localmente piccola** se, una volta fissati due oggetti $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$, la classe $\text{hom}(X, Y)$ è un insieme.
- **Finita** se è piccola e l'insieme dei morfismi è un insieme finito.

Osservazione 1.1: Sulle categorie

Banalmente:

- Le identità sono uniche.
- La categoria duale è essenzialmente^a unica e vale $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$.
- Dato che $\text{ob } \mathcal{C}$ inietta sempre in $\text{hom } \mathcal{C}$ con la mappa $X \mapsto \text{id}_X$, in generale la classe dei morfismi può essere arbitrariamente più grande di quella degli oggetti, dunque la grandezza di una categoria è in generale

indipendente dalla sua classe degli oggetti.

Dimostrazione

Dimostriamo solo l'ultimo punto con un esempio, gli altri sono banali. Sia V la categoria formata da un unico oggetto \bullet e la cui classe dei morfismi corrisponde alla classe dei cardinali in ZFC, dove la composizione di due morfismi è data dalla loro somma come cardinali. Nonostante $\text{ob } V$ sia la più piccola possibile (al di là della categoria vuota), $\text{hom } V$ è una classe propria, dunque V non solo è grande, ma non è nemmeno localmente piccola.

□

^aA meno di equivalenza come definita in 1.8

Da ora in avanti, assumeremo sempre (anche senza specificarlo) che le nostre categorie siano almeno localmente piccole per evitare *troppi* problemi di fondazione.

Definizione 1.2: Sottocategoria

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due categorie tali che $\text{ob } \mathcal{C} \subset \text{ob } \mathcal{D}$, $\text{hom } \mathcal{C} \subset \text{hom } \mathcal{D}$ e per ogni $f, g, h \in \text{hom } \mathcal{C}$ valga

$$h = f \circ_{\mathcal{C}} g = f \circ_{\mathcal{D}} g.$$

Allora \mathcal{C} si dice una **sottocategoria** di \mathcal{D} .

Se per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \mathcal{C}$ vale $\mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{D}(X, Y)$, allora \mathcal{C} si dice **piena**.

Definizione 1.3: Sapori di morfismi

Sia \mathcal{C} una categoria e sia $f : A \rightarrow B$ un morfismo. Esso può dirsi:

- **Monomorfismo** (o monico o mono) se la precomposizione è iniettiva, ovvero per ogni coppia di morfismi $g_1, g_2 : C \rightarrow A$ e ogni morfismo postcomponibile f vale $f g_1 = f g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.
- **Epimorfismo** (o epico o epi) se la postcomposizione è iniettiva, ovvero se per ogni coppia di morfismi $g_1, g_2 : B \rightarrow C$ e ogni morfismo precomponibile f vale $g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$.
- **Endomorfismo** (o endo) se $A = B$.
- **Sezione** (o split mono) se ha un'inversa sinistra, ovvero se esiste un morfismo $g : B \rightarrow A$ tale che $g f = \text{id}_A$.
- **Retrazione** (o split epi) se ha un'inversa destra, ovvero se esiste un morfismo $g : B \rightarrow A$ tale che $f g = \text{id}_B$.
- **Isomorfismo** (o iso) se ha un'inversa destra e sinistra. In particolare, A e B si dicono **isomorfi** (attraverso f) e li indicheremo con $f : A \cong_{\mathcal{C}} B$ omettendo usualmente f o \mathcal{C} .
- **Automorfismo** (o auto) se è iso e endo.

Osservazione 1.2: Sui morfismi

Valgono le seguenti:

- Le sezioni sono mono.
- Le retrazioni sono epi.
- $\text{iso} \Leftrightarrow (\text{split mono} \wedge \text{epi}) \Leftrightarrow (\text{mono} \wedge \text{split epi}) \Rightarrow (\text{epi} \wedge \text{mono})$, ma nell'ultimo caso non vale l'implicazione inversa.
- Tutte le inverse sono uniche quando esistono.
- Un mono è un epi nella categoria opposta e viceversa.

Dimostrazione

Forniamo solo due esempi di morfismi che sono epici e monici ma non isomorfismi (le altre verifiche sono assolutamente automatiche):

- Consideriamo in **Haus**^a l'inclusione $\iota : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \hookrightarrow [0, 1]$ (entrambi con la topologia euclidea); questa è chiaramente monica in quanto iniettiva, ed è epica in quanto una funzione continua in **Haus** è completamente determinata dal suo valore su un sottospazio denso, ma non è iso dato che non è suriettiva.
- Consideriamo la categoria

$$\text{id} \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{f} \bullet \circlearrowright \text{id}$$

Dato che a destra o sinistra possiamo comporre solo con l'identità, f è sia monico che epico, ma non è iso in quanto non ha inversa.

□

^aCategoria degli spazi topologici di Hausdorff, ovvero T_2 , e delle funzioni continue

Definizione 1.4: Oggetti iniziali e finali

Sia \mathcal{C} una categoria e sia I un oggetto.

I si dice **oggetto iniziale** se per ogni oggetto X di \mathcal{C} esiste un unico morfismo $\iota_X : I \rightarrow X$

I si dice **oggetto finale** se è l'oggetto iniziale di \mathcal{C}^{op} , o equivalentemente se per ogni oggetto X di \mathcal{C} esiste un unico morfismo $\zeta_X : X \rightarrow I$.

Se I è sia finale che iniziale, si dice **oggetto zero**.

Proposizione 1.1: Unicità di oggetti iniziali e finali

Se una categoria \mathcal{C} ammette un oggetto iniziale (o finale o zero), questo è essenzialmente unico.

Definizione 1.5: Funtore

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due categorie. Un **funtore covariante** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste in due mappe $F : \text{ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{ob } \mathcal{D}$ e $F : \text{hom } \mathcal{C} \rightarrow \text{hom } \mathcal{D}$ che rispettino la composizione, ovvero:

- Per ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ vale $Ff : FX \rightarrow FY$.
- Per ogni oggetto $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ vale $F \text{id}_X = \text{id}_{FX}$.
- Per ogni coppia di morfismi componibili f, g in $\text{hom } \mathcal{C}$ vale $F(gf) = FgFf$.

Un **funtore controvariante** da \mathcal{C} a \mathcal{D} è un funtore covariante $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$. Anche se l'espressione "un funtore controvariante $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ " tecnicamente indicherebbe un funtore covariante $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, la useremo quasi sempre per indicare un funtore controvariante $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, ovvero una controvarianza specificata due volte non farà una covarianza.

Un funtore si dice:

- **Fedele** se per ogni $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$ è iniettiva.
- **Pieno** se per ogni $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$ è suriettiva.
- **Pienamente fedele** se è pieno e fedele.
- **Essenzialmente suriettivo sugli oggetti** se per ogni oggetto $Y \in \mathcal{D}$ esiste un oggetto $X \in \mathcal{C}$ tale che $FX \cong_{\mathcal{D}} Y$

Se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ sono due funtori, la loro composizione $GF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ è un funtore

Proposizione 1.2: Riflessione di isomorfismi

Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtore. Se $f : X \cong Y$, allora $Ff : FX \cong FY$.

Se F è pienamente fedele e $g : FX \cong FY$, allora $X \cong Y$.

Dimostrazione

La prima implicazione è banale, dunque assumiamo che F sia pienamente fedele e $g : FX \cong FY$ sia un isomorfismo; dato che la mappa $\varphi := F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$ è una biezione, esiste $f : X \rightarrow Y$ tale che $\varphi(f) = g$, dunque definiamo $f' := \varphi^{-1}(g^{-1})$ e dimostriamo che è un'inversa sinistra (dimostrare che è

un'inversa destra è analogo). Dato che F è un funtore, vale

$$f'f = \varphi^{-1}(\varphi(f'f)) = \varphi^{-1}(\varphi(f')\varphi(f)) = \varphi^{-1}(g^{-1}g) = \varphi^{-1}(\text{id}_{FX}) = \text{id}_X$$

□

Adesso faremo una cosa un po' buffa, ovvero definiremo il prodotto di categorie come definiremmo normalmente il prodotto cartesiano di insiemi e più tardi lo useremo per definire il prodotto in categorie generali.

Definizione 1.6: Categoria prodotto

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due categorie. Definiamo la **categoria prodotto** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ di \mathcal{C} e \mathcal{D} come la categoria i cui oggetti sono le coppie ordinate di un oggetto di \mathcal{C} e uno di \mathcal{D} e dove

$$\text{hom}((A, B), (C, D)) = \{(f, g) : f \in \mathcal{C}(A, C), g \in \mathcal{D}(B, D)\}.$$

Una categoria prodotto è naturalmente munita di due funtori $P_I : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow I$ con $I = \mathcal{C}, \mathcal{D}$, detti **proiezioni**, tali che

$$P_{\mathcal{C}}((f, g) : (A, B) \rightarrow (C, D)) = (f : A \rightarrow C) \quad \text{e} \quad P_{\mathcal{D}}((f, g) : (A, B) \rightarrow (C, D)) = (g : B \rightarrow D).$$

Perchè "spostiamo" il prodotto cartesiano alle categorie? Perchè spesso quando lavoriamo in qualche categoria ci risulta più agevole una definizione più "intrinseca" di prodotto, oppure abbiamo prodotti diversi: in **Rel**¹ il prodotto "categorico" è dato dall'unione disgiunta, nonostante **Set**² sia una sua sottocategoria e in questa il prodotto sia l'usuale prodotto cartesiano.

Abbiamo visto che i morfismi sono trasformazioni tra oggetti, mentre i funtori sono trasformazioni tra morfismi. Introduciamo ora un ulteriore "livello" di frecce, le trasformazioni naturali, ovvero trasformazioni tra funtori.

Definizione 1.7: Trasformazione naturale

Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} categorie e siano $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ due funtori.

Una **trasformazione naturale** $\Phi : F \Rightarrow G$ è una classe di morfismi $\{\Phi_X : F(X) \rightarrow G(X)\}_{X \in \text{ob } \mathcal{C}}$ tali che per ogni $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccc} X & & F(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & G(X) \\ \downarrow f & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ Y & & F(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & G(Y) \end{array}$$

Una trasformazione naturale tale per cui tutti i morfismi Φ_X so isomorfismi si dice **isomorfismo naturale**.

Definizione 1.8: Equivalenza di categorie

Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due categorie e siano $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ due funtori.

La coppia (F, G) si dice **equivalenza di categorie** tra F e G se esistono due isomorfismi naturali

$$\text{id}_{\mathcal{C}} \cong GF \quad \text{e} \quad \text{id}_{\mathcal{D}} \cong FG.$$

Proposizione 1.3: Caratterizzazione per un'equivalenza di categorie

Sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtore. Questo definisce un'equivalenza di categorie se e solo se è pienamente fedele ed essenzialmente suriettivo sugli oggetti.

Definizione 1.9: Funtori aggiunti

Siano $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ due funtori. Questi si dicono **aggiunti** (rispettivamente sinistro e destro all'altro) se esiste un isomorfismo:

$$\mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$$

Naturale per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $d \in \mathcal{D}$. Scriveremo $F \dashv G$ per indicare che F è aggiunto sinistro a G e che G è

¹Categoria degli insiemi e delle relazioni

²Categoria degli insiemi e delle funzioni

aggiunto destro a F .

1.2 Lemma di Yoneda e conseguenze

Definizione 1.10: Categoria dei funtori

Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} due categorie.

Definiamo la categoria $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, che spesso denoteremo con $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, la **categoria dei funtori** da \mathcal{C} a \mathcal{D} , i cui oggetti sono i funtori covarianti e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali con la **composizione verticale**: definiamo per $\mu : F \rightarrow G$ e $\nu : G \rightarrow H$ la loro composizione verticale $\nu\mu : F \rightarrow H$ col seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & (\nu\mu)_X & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 X & & F(X) & \xrightarrow{\mu_X} & G(X) & \xrightarrow{\nu_X} & H(X) \\
 \downarrow f & & \downarrow Ff & & \downarrow Gf & & \downarrow Hf \\
 Y & & F(Y) & \xrightarrow{\mu_Y} & G(Y) & \xrightarrow{\nu_Y} & H(Y) \\
 & & & & \curvearrowleft & & \\
 & & & & (\nu\mu)_Y & &
 \end{array}$$

Spesso invece di scrivere $[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G)$ o $\text{hom}_{[\mathcal{C}, \mathcal{D}]}(F, G)$ scriveremo $\text{Nat}(F, G)$.

Definizione 1.11: hom-funtore covariante e controvariante

Sia \mathcal{C} una categoria localmente piccola^a e sia A un oggetto di \mathcal{C} . Definiamo due funtori $h_A : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ e $h^A : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, detti **hom-funtori** (rispettivamente covariante e controvariante) nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{hom}(A, X) & \xleftarrow{h_A} & X & \xrightarrow{h^A} & \text{hom}(X, A) \\
 \downarrow h_A(f)=f \circ - & & \downarrow f & & \uparrow h^A(f)=- \circ f \\
 \text{hom}(A, Y) & \xleftarrow{h_A} & Y & \xrightarrow{h^A} & \text{hom}(Y, A)
 \end{array}$$

Inoltre possiamo interpretare $\text{hom}(-, -)$ come un bifuntore $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

^aÈ vero che abbiamo detto che lo avremmo sempre assunto, ma è importante specificarlo in questo caso.

Teorema 1.1: Lemma di Yoneda covariante

Sia \mathcal{C} una categoria localmente piccola e sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ un funtore covariante. Allora esiste una biezione di insiemi \cong :

$$\text{Nat}(h_A, F) \cong F(A)$$

e questa è naturale in A e F .

Dimostrazione

Diamo uno sketch della dimostrazione, mancano alcuni dettagli come la dimostrazione della naturalità in A e F ma l'importante è lo spirito della cosa.

Sia $\Phi \in \text{Nat}(h_A, F)$. Dato che questa è naturale, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & h_A(A) & \xrightarrow{\quad \Phi_A \quad} & F(A) \\
 \downarrow f & & \downarrow h_A(f) & & \downarrow F(f) \\
 & & & \text{id}_A \xrightarrow{\quad \text{blu} \quad} u & \\
 & & \downarrow f \circ \text{id}_A = f & \xrightarrow{\quad} & (Ff)(u) = \Phi_X(f) \\
 & & & & \downarrow \\
 X & & h_A(X) & \xrightarrow{\quad \Phi_X \quad} & F(X)
 \end{array}$$

Vediamo che ci basta specificare l'assegnazione blu per determinare univocamente tutto il resto:

- Partendo da $\Phi \in \text{Nat}(h_A, F)$ ci basta specificare $\Phi \mapsto u := \Phi_A(\text{id}_A)$ elemento di $F(A)$.
- Partendo da $u \in F(A)$ costruiamo la trasformazione naturale Φ definendo per ogni $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ il morfismo $\Phi_X(f : A \rightarrow X) := Ff(u)$.

□

Abbiamo dualmente la versione controvariante:

Corollario 1.1: Lemma di Yoneda controvariante

Sia $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ un funtore controvariante. Allora esiste una biezione di insiemi

$$\text{Nat}(h^A, F) \cong F(A)$$

e questa è naturale in A e F .

Osservazione 1.3: ☹️: Yoneda non ci dà una biezione di insiemi

Questi non sono insiemi! Una trasformazione naturale è una *classe*, in generale una classe propria, ovvero una classe che non è un insieme; è solo un caso che nel lato sinistro abbiamo una collezione "piccola" di oggetti "grandi", che però non è un insieme. Vediamo un esempio:

Consideriamo $\mathcal{C} := \mathbf{Grp}^a$ e il funtore dimenticante $U : (G, \cdot) \mapsto G$. Yoneda ci dice che:

$$\text{Nat}(h_G, U) \cong G \in \mathbf{Set}$$

Vediamo però che ogni trasformazione naturale $\Phi : h_G \rightarrow U$ è una classe $\{\Phi_X\}_{X \in \mathbf{Grp}}$ grande tanto quanto la classe di tutti i gruppi. Quindi noi abbiamo una classe di classi che però abbiamo specificato *non* poter essere membri di altre classi. La teoria delle categorie è da buttare in quanto contraddittoria?

Ovviamente no, però ci mostra che la teoria degli insiemi di ZFC risulta inadeguata per trattare rigorosamente la teoria delle categorie, principalmente perchè trattando strutture potenzialmente molto "grandi" si va a sbattere contro ostacoli di tipo fondazionale.

I lettori più curiosi possono trovare più informazioni su questa pagina di nLab.

^aCategoria dei gruppi e degli omomorfismi di gruppi

Una delle più naturali applicazioni del lemma di Yoneda è l'embedding di Yoneda, fondamentale in gran parte della topologia e della geometria moderna: esso permette di identificare una categoria \mathcal{C} con una sottocategoria della cosiddetta *categoria dei prefasci su \mathcal{C}* , che è solo un altro nome per $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$. Ad esempio se interpretiamo la topologia τ di uno spazio (X, τ) come una categoria, dove i morfismi sono dati dall'inclusione insiemistica, questa è completamente determinata dalle classi delle funzioni continue entranti nei (o uscenti dai) suoi aperti.

Teorema 1.2: Embedding di Yoneda covariante

Sia \mathcal{C} una categoria. Questa è equivalente ad una sottocategoria piena di $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ tramite la mappa $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow$

$[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ definita da questo diagramma (dove abbiamo morfismi $f : A \rightarrow B$ e $g : X \rightarrow Y$ di \mathcal{C}):

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{Y}(A)(X) = h^A(X) & \xrightarrow{\quad \mathcal{Y}(f)(X) = f \circ - \quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Y}(B)(X) = h^B(X) \\
 \uparrow \mathcal{Y}(A)(g) = - \circ g & & (X \xrightarrow{m \circ g} A) \hookrightarrow (X \xrightarrow{f \circ m \circ g} B) & & \uparrow \mathcal{Y}(B)(g) = - \circ g \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & (Y \xrightarrow{m} A) \hookrightarrow (Y \xrightarrow{f \circ m} B) & & \\
 \mathcal{Y}(A)(Y) = h^A(Y) & \xrightarrow{\quad \mathcal{Y}(f)(Y) = f \circ - \quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Y}(B)(Y) = h^B(Y)
 \end{array}$$

Dove un oggetto A di \mathcal{C} viene mandato nel funtore $h^A : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ definito sopra e un morfismo $f : A \rightarrow B$ viene mandato nella sua postcomposizione, che è una trasformazione naturale da h^A a h^B come si vede nel diagramma.

Dimostrazione

Applicando il corollario 1.1 con $F = h^B$ scorrendo su $B \in \text{ob } \mathcal{C}$ otteniamo

$$\text{Nat}(h^A, h^B) \cong h^B(A), \text{ o equivalentemente, } \text{Nat}(h^A, h^B) \cong \text{hom}(A, B).$$

Vediamo che dunque l'assegnazione $A \mapsto h^A$ definisce un funtore covariante $h^\bullet : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ pienamente fedele (ma non essenzialmente suriettivo sugli oggetti). Restringendo h^\bullet all'immagine di \mathcal{C} in $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$, otteniamo un'equivalenza di categorie (dato che la restrizione all'immagine è tautologicamente suriettiva) per la proposizione 1.3.

□

Abbiamo dualmente la versione controvariante:

Corollario 1.2: Embedding di Yoneda controvariante

Sia \mathcal{C} una categoria. Allora la sua categoria opposta \mathcal{C}^{op} è equivalente ad una sottocategoria piena di $[\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$ tramite la mappa $\mathcal{Y}' : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow [\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$ definita da questo diagramma (dove abbiamo morfismi $f : A \rightarrow B$ e $g : X \rightarrow Y$ di \mathcal{C}):

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{Y}'(A)(X) = h_A(X) & \xleftarrow{\quad \mathcal{Y}'(f)(X) = - \circ f \quad} & & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{Y}'(B)(X) = h_B(X) \\
 \downarrow \mathcal{Y}'(A)(g) = g \circ - & & (A \xrightarrow{m \circ f} X) \hookleftarrow (B \xrightarrow{m} X) & & \downarrow \mathcal{Y}'(B)(g) = g \circ - \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & (A \xrightarrow{g \circ m \circ f} Y) \hookleftarrow (B \xrightarrow{g \circ m} Y) & & \\
 \mathcal{Y}'(A)(Y) = h_A(Y) & \xleftarrow{\quad \mathcal{Y}'(f)(Y) = - \circ f \quad} & & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{Y}'(B)(Y) = h_B(Y)
 \end{array}$$

□

Ora grazie al lemma di Yoneda possiamo dimostrare un fatto che ci servirà più tardi:

Lemma 1.1: Essenziale unicità degli aggiunti

Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} due categorie e siano $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G_1, G_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtori tali che $F \dashv G_1$ e $F \dashv G_2$ oppure $G_1 \dashv F$ e $G_2 \dashv F$. Allora $G_1 \cong G_2$.

Dimostrazione

Scriviamo le aggiunzioni in termini degli hom-funtori:

$$h^d(Fc) \cong h^{G_1 d}(c) \cong h^{G_2 d}(c)$$

Ottenendo dunque $\mathcal{Y} \circ G_1 \cong \mathcal{Y} \circ G_2$: dal teorema 1.2, ovvero la piena fedeltà dell'embedding di Yoneda, segue la tesi.

□

1.3 Limiti

Uno dei concetti più importanti in teoria delle categorie è quello di limite. Per definire il concetto di limite dobbiamo dare la definizione formale di diagramma in una categoria, che generalizza il concetto di famiglia indicizzata in **Set**.

Definizione 1.12: Diagramma commutativo

Siano \mathcal{J}, \mathcal{C} due categorie.

Si dice **diagramma (commutativo)** in \mathcal{C} di forma \mathcal{J} un funtore $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$; \mathcal{J} si dice **forma** o **indice** del diagramma: se \mathcal{J} è finita o piccola, il diagramma F si dirà rispettivamente **finito** o **piccolo**.

La **categoria dei diagrammi** in \mathcal{C} di forma \mathcal{J} è la categoria dei funtori $[\mathcal{J}, \mathcal{C}]$.

Se in teoria degli insiemi definiamo una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X indicizzata dall'insieme J come un'applicazione $J \rightarrow \mathcal{P}(X)$, qui abbiamo bisogno di un'applicazione che rispetti la struttura di categoria, ovvero un funtore: intuitivamente oltre a indicizzare gli oggetti indicizziamo anche i morfismi in modo che la composizione sia rispettata. Per la prossima definizione ci servirà di considerare un diagramma particolare, il diagramma costante $K_N : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ (dove N è un oggetto di \mathcal{C}) che manda ogni oggetto di \mathcal{J} in N e ogni morfismo in id_N .

Definizione 1.13: Cono e cocono

Sia \mathcal{C} una categoria, sia $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramma e sia N un oggetto di \mathcal{C} .

Si dice **cono** in \mathcal{C} su F con punta N un morfismo $\psi : K_N \rightarrow F$ di $[\mathcal{J}, \mathcal{C}]$, ovvero una famiglia di morfismi

$$\{\psi_X : N \rightarrow F(X)\}_{X \in \text{ob } \mathcal{J}} \subset \text{hom } \mathcal{C}$$

Tali che per ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{J} il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \psi_X \swarrow & & \searrow \psi_Y \\ F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \end{array}$$

Dualmente, si dice **cocono** su F con punta N un morfismo $\psi : F \rightarrow K_N$, o equivalentemente un cono in \mathcal{C}^{op} . Definiamo la **categoria dei coni** in \mathcal{C} su F come la categoria i cui oggetti sono i coni intesi come coppia $(N, \psi^N : K_N \rightarrow F)$ e i cui morfismi sono i cosiddetti morfismi **medianti**, ovvero i morfismi $\alpha : N \rightarrow M$ di \mathcal{C} tali per cui per ogni oggetto X di \mathcal{J} valga:

$$\psi_X^M \circ \alpha = \psi_X^N,$$

Denoteremo questa categoria come **Cone**(\mathcal{C}, F).

Ed eccoci pronti a definire i limiti.

Definizione 1.14: Limite e colimite

Sia $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramma.

Si dice **limite** (o limite proiettivo) di F in \mathcal{C} l'oggetto terminale di **Cone**(\mathcal{C}, F).

Si dice **colimite** (o limite induttivo) di F in \mathcal{C} il limite di F in \mathcal{C}^{op} , o equivalentemente l'oggetto iniziale di **Cone**(\mathcal{C}, F).

Indichiamo rispettivamente limiti e colimiti di F in \mathcal{C} come

$$\lim_{\leftarrow} F \quad \text{e} \quad \lim_{\rightarrow} F.$$

Un limite si dice rispettivamente piccolo o finito se lo è F come diagramma.

Una categoria che ammette tutti i (co)limiti piccoli si dice **(co)completa**.

Più esplicitamente³, possiamo definire il limite di F in \mathcal{C} come il cono (L, ψ^L) tale che per ogni altro cono (N, ψ^N) esista un unico morfismo $\lambda_N : N \rightarrow L$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N & & \\
 & \swarrow & \downarrow \lambda_N & \searrow & \\
 & \psi_X^N & L & \psi_Y^N & \\
 & \swarrow & \downarrow \psi_X^L & \searrow & \\
 F(X) & & F(f) & & F(Y)
 \end{array}$$

Vedremo che il concetto di limite è davvero il concetto centrale in teoria delle categorie, in quanto in effetti un altro concetto estremamente utile (quello di funtore aggiunto) non è altro che un esempio di limite (in effetti, è anche possibile definire i limiti in termini di funtori aggiunti, che è quello che andremo a fare più tardi in un caso specifico nel teorema 2.1).

Talvolta diremo che una categoria "ammette/ha tutti i..." facendo riferimento a dei limiti definiti su una qualche classe di diagrammi: questo significa che ogni diagramma di quella classe ammette un limite in \mathcal{C} .

Osservazione 1.4: Limiti e oggetti iniziali

Sia $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramma.

- Se \mathcal{J} ammette un oggetto iniziale I , allora $\lim_{\leftarrow} F = F(I)$.
- Dualmente, se \mathcal{J} ammette un oggetto finale Z , allora $\lim_{\rightarrow} F = F(Z)$.
- Infine, se \mathcal{J} ammette un oggetto zero 0 , allora $\lim_{\leftarrow} F = \lim_{\rightarrow} F = F(0)$.

1.4 Limiti notevoli

Presentiamo alcuni limiti di particolare importanza (in effetti delle classi di limiti) nella pratica matematica; in questa sezione, assumeremo per semplicità che \mathcal{J} sia una sottocategoria (di forma opportunamente specificata) di \mathcal{C} e $F : \mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{C}$ sia il funtore di inclusione: questo ci permetterà di dire semplicemente "Sia \mathcal{J} un diagramma" o parlare di $\lim_{\leftarrow} \mathcal{J}$.

Definizione 1.15: Prodotto

Sia \mathcal{C} una categoria e sia \mathcal{J} un diagramma discreto (ovvero i cui unici morfismi sono le identità). Si dice **prodotto** di \mathcal{J} in \mathcal{C} il limite di \mathcal{J} in \mathcal{C} , che indicheremo come

$$\prod_{X \in \text{ob } \mathcal{J}} X \quad \text{oppure, più semplicemente,} \quad \prod \mathcal{J}.$$

Un prodotto in \mathcal{C}^{op} si dice **coprodotto** in \mathcal{C} e lo indicheremo come $\coprod \mathcal{J}$. I morfismi $\pi_X : \prod \mathcal{J} \rightarrow X$ si dicono **proiezioni ai fattori**.

Osservazione 1.5: Sui prodotti

- Il prodotto sul diagramma vuoto è (se esiste) l'oggetto terminale di \mathcal{C} .
- Sotto gli assiomi di ZF, **Set** ammette tutti i prodotti piccoli^a se e solo se vale l'assioma della scelta.

^aOvvero quelli indicizzati da una categoria piccola

Definizione 1.16: Pullback o prodotto fibrato

Sia \mathcal{C} una categoria, e sia \mathcal{J} il diagramma $\{X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y\}$, detto **cospan**^a.

Il limite di \mathcal{J} in \mathcal{C} si dice **pullback** di \mathcal{J} , o anche **prodotto fibrato** di X e Y lungo (o su) Z .

³Ovvero scrivendo per esteso la definizione di oggetto terminale

Un pullback in $\mathcal{C}^{\mathbf{op}}$ si dice *pushout*.

^aE ovviamente $\mathcal{J}^{\mathbf{op}}$ si dirà *span*

2 Prodotti

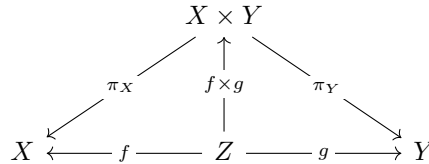
Ci sono diverse definizioni di prodotto in una categoria, sono (quasi) equivalenti ma in base all'occasione alcune sono più utili di altre.

2.1 Proprietà universale

Definizione 2.1: Prodotto tramite proprietà universale

Sia \mathcal{C} una categoria e siano $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ due oggetti.

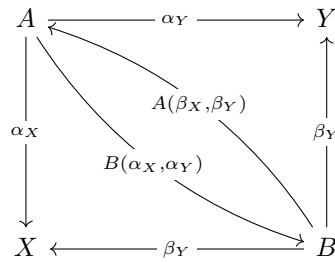
Si dice **prodotto** di X e Y in \mathcal{C} un oggetto $X \times Y$ munito di due morfismi $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ detti **proiezioni** tali che per ogni oggetto Z e ogni coppia di morfismi $f : Z \rightarrow X$ e $g : Z \rightarrow Y$ esista un unico morfismo $f \times g : Z \rightarrow X \times Y$ tale che il seguente diagramma commuti:



Questo, se esiste, è essenzialmente unico.

Dimostrazione

Siano (A, α_X, α_Y) e (B, β_X, β_Y) due prodotti di X e Y . Il seguente diagramma commuta:



Definendo automaticamente un isomorfismo.

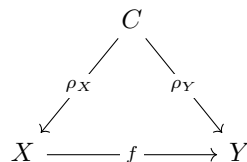
Questa definizione è evidentemente utile quando si parla di lavorare coi prodotti nell'usuale pratica matematica, ad esempio è una definizione meno "pesante" di quella che si dà dei prodotti in **Top**⁴ o **Mble**⁵ nella maggior parte dei corsi introduttivi di topologia generale o teoria della misura. Allo stesso modo non dipende da scelte arbitrarie, come di una norma prodotto in **NormVec** \mathbb{K} ⁶ o di una misura prodotto in **Meas**⁷.

2.2 Categoria dei coni

Definizione 2.2: Cono

Sia \mathcal{C} una categoria e sia J un diagramma in \mathcal{C} .

Si dice **cono** su J un oggetto $C \in \mathcal{C}$ con una collezione di morfismi $\{\rho_j : C \rightarrow j\}_{j \in J}$ tale che per ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ in J , il seguente diagramma commuti:



La collezione dei coni su un diagramma J e dei morfismi tra loro forma una categoria, detta **Cone**(J): i suoi oggetti sono i coni $(C, \{\rho_j\}_{j \in J})$ e i suoi morfismi sono definiti da

$$\text{hom}((C, \{\rho_j\}_{j \in J}), (C', \{\rho'_j\}_{j \in J})) = \{m : C \rightarrow C' : \forall j \in J, \rho_j = \rho'_j m\}$$

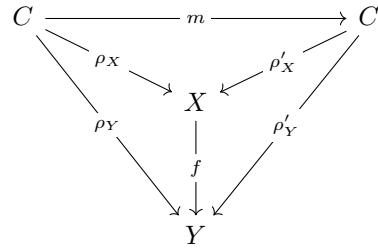
⁴Categoria degli spazi topologici e delle funzioni continue

⁵Categoria di spazi e funzioni misurabili

⁶Categoria dei \mathbb{K} -spazi vettoriali normati e delle mappe lineari continue

⁷Categoria degli spazi con misura e delle funzioni misurabili

Ovvero i morfismi $m : C \rightarrow C'$ di \mathcal{C} che fanno commutare il seguente diagramma per ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ di \mathcal{C} :



Questi sono detti morfismi *medianti*.

Definizione 2.3: Prodotto tramite coni

Sia \mathcal{C} una categoria e siano $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ due oggetti. Si dice **prodotto** di X e Y l'oggetto $X \times Y$ di \mathcal{C} tale che $(X \times Y, \{\pi_X, \pi_Y\})$ sia l'oggetto finale di $\mathbf{Cone}(\{X, Y\})$, ovvero della categoria dei coni sul diagramma discreto $\{X, Y\}$.

2.3 Aggiunzioni

Prima di dare la prossima definizione, osserviamo che questa catena di biezioni è verificata (e naturale in A, B e C)

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B \times C)}_{\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}} &\cong_{\mathbf{Set}} \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\
 &\cong_{\mathbf{Set}} \text{hom}_{\mathcal{C}^2}((A, A), (B, C)) \\
 &\cong_{\mathbf{Set}} \text{hom}_{\mathcal{C}^2}(\Delta A, (B, C))
 \end{aligned}$$

Dove $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^2$ è il funtore diagonale, che manda un oggetto A nell'oggetto (A, A) e un morfismo f nel morfismo (f, f) : abbiamo ottenuto dunque che $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B \times C) \cong_{\mathbf{Set}} \text{hom}(\Delta A, (B, C))$, ovvero che interpretando il prodotto come un funtore $\times : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}$ questo è aggiunto destro al funtore diagonale, ovvero $\Delta \dashv \times$, quindi definiamo

Definizione 2.4: Prodotto III

Sia \mathcal{C} una categoria e siano $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ due oggetti. Si dice **prodotto** di X e Y l'immagine della coppia $(X, Y) \in \text{ob } \mathcal{C}^2$ attraverso un funtore Π aggiunto destro al funtore Δ .

Grazie al lemma 1.1 abbiamo immediatamente che il prodotto è essenzialmente unico. Questa definizione sarà la migliore più tardi, quando daremo più struttura alle categorie che trattiamo.

2.4 Equivalenza

Teorema 2.1: Equivalenza di definizioni

Le definizioni 2.1, 2.3 e 2.4 sono essenzialmente equivalenti, ovvero un oggetto P che rispetta una di esse rispetta automaticamente le altre due.

Dimostrazione

- Sia $(P, \pi_X, \pi_Y) \in \mathbf{Cone}(\{X, Y\})$ tale che rispetti 2.1 se visto come oggetto in \mathcal{C} e sia (Z, f_X, f_Y) un altro cono; per la proprietà universale di P , esiste un unico morfismo $h : Z \rightarrow P$ tale che $\pi_i \circ h = f_i$, dunque un unico morfismo mediante $\hat{h} : (Z, f_X, f_Y) \rightarrow (P, \pi_X, \pi_Y)$; l'altra equivalenza è evidente.
- Sia $\Pi : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}$

3 Categorie Cartesiane Chiuse

Ok, abbiamo definito i nostri prodotti, ma c'è un problema... esistono sempre? E come lavoriamo con questi prodotti? Per rispondere a queste domande dobbiamo porre qualche restrizione sulla definizione di categoria.

Definizione 3.1: Oggetto esponenziale

Sia \mathcal{C} una categoria tale che ogni coppia di oggetti ammetta un prodotto e siano Z e Y due oggetti di \mathcal{C} . Si dice **esponenziale** di Z e Y un oggetto Z^Y dotato di un morfismo $e : Z^Y \times Y \rightarrow Z$ tale che per ogni morfismo $g : X \times Y \rightarrow Z$ esista un unico morfismo $\lambda g : X \rightarrow Z^Y$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & & \\ \downarrow \lambda g \times \text{id}_Y & \searrow g & \\ Z^Y \times Y & \xrightarrow{e} & Z \end{array}$$

Ovvero tale che l'assegnazione $g \mapsto \lambda g$ definisca un isomorfismo $\text{hom}(X \times Y, Z) \cong \text{hom}(X, Z^Y)$.

Definizione 3.2: Categoria Cartesiana Chiusa