Calcolo delle Variazioni

Filippo $\mathcal{L}$ Troncana
dalle lezioni del prof. Marco Bonacini dell'omonimo corso per il corso di laurea in Matematica

A.A. 2024/2025

Indice

Introduzione

Il calcolo delle variazioni è quella branca della matematica che affronta il problema di trovare in una data famiglia (di funzioni, superfici, curve...) l'oggetto o gli oggetti che minimizzano una certa grandezza ad essi associata, ad esempio il problema della brachistocrona è uno degli esempi più classici

Esempi introduttivi

Metodi classici: funzioni reali

Supponiamo di avere una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ della quale vogliamo trovare i punti di minimo. Se la nostra funzione è differenziabile su $]a, b[$ possiamo usare il teorema di Fermat che ci dà una condizione **necessaria ma non sufficiente** affinchè un punto $x_0 \in]a, b[$ sia un punto di massimo, ovvero $f'(x_0) = 0$.
Se la nostra funzione è doppiamente differenziabile, possiamo ottenere un'altra condizione necessaria, ovvero che $f'(x_0) = 0$ e che $f''(x_0) \geq 0$; inoltre sempre lavorando sulla derivata seconda otteniamo quella che è una condizione **sufficiente ma non necessaria**, ovvero che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$.
Scartando l'ipotesi di doppia derivabilità, possiamo sostituirla con l'ipotesi di convessità, rendendo $f'(x_0) = 0$ una condizione sufficiente per la minimalità di x_0.
I metodi classici (o indiretti) si basano sulla generalizzazione di questo approccio a spazi di funzioni, come vediamo ora.

Metodi classici: integrale di Dirichlet

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto a chiusura compatta con frontiera $\partial\Omega$ regolare e sia $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo il nostro spazio X e il nostro funzionale $F : X \to \mathbb{R}$ come:

$$X = \left\{ u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = g \right\}, \qquad F(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n, \qquad \text{inoltre assumiamo che esista } u_0 = \arg\min_{u \in X} F(u).$$

Analogamente a quanto visto per le funzioni reali, quali condizioni necessarie o sufficienti possiamo identificare per il nostro punto di minimo u_0? Ragionando sull'approccio del teorema di Fermat, possiamo formulare la condizione al primo ordine della nostra funzione reale come

$$0 = f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

Consideriamo lo spazio $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ delle funzioni differenziabili a supporto compatto contenuto in Ω e per una $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$ definiamo la funzione $u_t := u_0 + t\varphi$, che appartiene a X per ogni $t \in \mathbb{R}$[1]. Usiamo la nostra φ a mo' di "vettore della base canonica" come facevamo in $\mathbb{R}^n$:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{F(u_t) - F(u_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\int_\Omega \|\nabla u_t\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n - \int_\Omega \|\nabla u_0\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right)$$

Sviluppando i quadrati e usando la linearità dell'integrale otteniamo

$$\frac{1}{t} \left(\int_\Omega \|\nabla u_t\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n - \int_\Omega \|\nabla u_0\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right) = \int_\Omega \cancel{\frac{\|\nabla u_0\|^2}{t}} + \frac{2\cancel{t}\nabla u_0 \cdot \nabla\varphi}{\cancel{t}} + \frac{t^{\cancel{2}}\|\nabla\varphi\|^2}{\cancel{t}} - \cancel{\frac{\|\nabla u_0\|^2}{t}} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \xrightarrow{t \to 0} 2 \int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Battezziamo questa quantità che abbiamo trovato ***variazione prima di F rispetto a φ in*** u_0 e la indichiamo con $\delta F(u_0, \varphi)$, sarà analoga alla nostra derivata direzionale; inoltre, se avessimo qualche ragione di assumere che u_0 sia anche $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ potremmo usare il teorema della divergenza per scrivere anche

$$0 = \delta F(u_0, \varphi) = \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n + \cancel{\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\nu} \, \mathrm{d}S} = 0$$

Sfruttando il lemma 1.1.1 otteniamo che

$$\int_\Omega (-\Delta u_0)\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega) \Leftrightarrow -\Delta u_0 = 0$$

Perbacco! Assumendo che il nostro punto di minimo esista, abbiamo ottenuto che questo deve soddisfare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Ci sono due criticità tuttavia: abbiamo assunto tante cose belle sulla nostra u_0 (in primo luogo, che questa esista) e siamo arrivati a scrivere una PDE, oggetti che in generale non sono di facilissima trattazione e figuriamoci risoluzione. Per questo nel ventesimo secolo si sono sviluppati i cosiddetti metodi diretti.

[1]Banalmente, in quanto $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$

Metodi diretti: teorema di Weierstrass

Tornando all'esempio della nostra funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, potremmo ricordarci che abbiamo un teorema che ci garantisce l'esistenza del minimo assumendo semplicemente la continuità di f, ovvero il teorema di Weierstrass, la cui dimostrazione si riassume in questi step:

1. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante, ovvero tale che $f(x_n) \to \inf_{[a,b]} f$
2. L'intervallo $[a,b]$ è compatto, dunque esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge a $\hat{x} \in [a,b]$.
3. Dato che f è continua, $f(\hat{x}) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$.

Notiamo che sarebbe bastata la semicontinuità inferiore di f, e che questo approccio dipende dalla topologia di $[a,b]$: i metodi diretti si basano proprio su questo, ovvero su una forma più generale del teorema di Weierstrass (sostituendo $[a,b]$ con uno spazio topologico sequenzialmente compatto) e scegliendo sulla nostra famiglia di oggetti la topologia adeguata.
Chiaramente abbiamo un piccolo trade-off: se la nostra topologia è molto fine (= tanti aperti), è facile dimostrare la continuità del nostro funzionale ma è difficile avere la compattezza della nostra famiglia; al contrario, con topologie meno fini abbiamo una compattezza più semplice da dimostrare ma una continuità più difficile, per questo è utile ridurre le ipotesi (ad esempio con la semicontinuità inferiore invece della continuità).

Esercizio 0.0.1: Dimostrare che esiste una successione minimizzante

Sia X un insieme non vuoto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione.
Si mostri che esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tale che $f(x_n) \to \inf_X f$.

Soluzione

Sia $y_0 \in f(X)$. Se $y_0 = \inf_X f$, prendiamo una qualsiasi successione in $f^{-1}(y_0)$; altrimenti, e per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ prendiamo[a] $y_{n+1} \in f(X) \cap]-\infty, y_n[$, fermandoci se dovessimo arrivare a $\inf_X f$.
Per ogni y_n scegliamo[b] $x_n \in f^{-1}(y_n)$ e abbiamo ottenuto la nostra successione minimizzante.

❀

[a] Probabilmente c'è un modo per aggirare l'utilizzo di scelta dipendente ma non ho davvero voglia di pensarci.
[b] Idem ma con scelta numerabile.

Cosa tratteremo?

Durante il corso tratteremo per lo più problemi unidimensionali in forma integrale, ovvero:

$$X = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} : u \text{ ammette una qualche } u'\}, \quad F(u) = \int_{[a,b]} f(x, u(x), u'(x))\, d\mathcal{L}^1(x), \quad \text{con } f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Il nostro funzionale F spesso sarà chiamato ***energia***, mentre la funzione f avrà spesso come variabili $f(x,s,p)$ e sarà chiamata ***lagrangiana***; le sue derivate parziali saranno indicate con f_x, f_s, f_p.

Ulteriori esempi introduttivi

La brachistocrona

Problema di Didone, o isoperimetrico

Superfici di rivoluzione di area minima

Problema di Plateau, o delle superfici minime

Principio di minima azione

Si veda l'esercizio 1.1.1

Capitolo 1

Metodi classici

1.1 Le equazioni di Eulero–Lagrange

La situazione che analizziamo adesso è questa:

Situazione 1.1.1: Eulero–Lagrange con estremi vincolati

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \qquad \text{con } a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a < b,$$

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, \mathrm{d}x \qquad \text{con } f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

Con $u_0 \in X$ punto di minimo per F.

Fissiamo una $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(]a,b[)$ e definiamo per $t \in \mathbb{R}$ la funzione $u_t = u_0 + t\varphi$, che chiaramente appartiene a X come visto nei primi esempi. Per ipotesi di minimalità, allora la funzione $g(t) := F(u_t)$ deve avere un punto stazionario in $t = 0$. Se g fosse $\mathcal{C}^1$ (cosa che vediamo sarà verificata grazie al prossimo teorema) potremmo applicare il teorema di Fermat per ottenere la condizione:

$$0 = g'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(u_0 + t\varphi)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b f(x, u_0(x) + t\varphi(x), u_0'(x) + t\varphi'(x)) \, \mathrm{d}x\Big|_{t=0}.$$

Teorema 1.1.1: Derivazione sotto il segno di integrale

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile, $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $h : A \times I \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

- $\forall t \in I$, la mappa $x \mapsto h(x,t)$ è $\mathcal{L}^n$-integrabile;
- $\forall x \in A$, la mappa $t \mapsto h(x,t)$ è derivabile;
- Esiste una funzione $H : A \to \mathbb{R}$ maggiorante essenziale $\mathcal{L}^n$-integrabile della mappa $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} h(x,t)$ per ogni $t \in I$.

Allora vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A h(x,t) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x) = \int_A \frac{\partial}{\partial t} h(x,t) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(x).$$

Applicando il teorema alla nostra $h(x,t) = f(x, u_0(x) + t\varphi(x), u_0'(x) + t\varphi'(x))$ e facendo un po' di derivate otteniamo

Definizione 1.1.1: Variazione prima

Nella situazione 1.1.1, la quantità

$$\delta F(u, \varphi) := \int_a^b f_s(x, u(x), u'(x))\varphi(x) + f_p(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \, \mathrm{d}x$$

è detta ***variazione prima*** in u del funzionale F lungo φ.

E quindi con quanto fatto finora abbiamo dimostrato

Proposizione 1.1.1: Equazione di Eulero–Lagrange debole

Nella situazione 1.1.1, se u_0 è un punto di minimo allora per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(]a,b[)$ soddisfa l'***equazione di Eulero–Lagrange debole***:

$$\delta F(u_0,\varphi) = 0 = \int_a^b f_s(x,u(x),u'(x))\varphi(x) + f_p(x,u(x),u'(x))\varphi'(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Una funzione che soddisfa l'equazione si dice ***estremale***.

Adesso supponiamo anche di sapere[1] che $f_p(x,u_0(x),u_0'(x))$ sia $\mathcal{C}^1([a,b])$ (ad esempio, se avessimo motivo di credere che f e u_0 siano $\mathcal{C}^2$); integrando per parti otteniamo:

$$0 = \delta F(u_0,\varphi) = \int_a^b f_s(x,u_0(x),u_0'(x))\varphi(x)\ \mathrm{d}x + \cancel{[f_p(x,u_0(x),u_0'(x))\varphi(x)]_a^b} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}[f_p(x,u_0(x),u_0'(x))]\varphi(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[f_s(x,u_0(x),u_0'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} f_p(x,u_0(x),u_0'(x))\right]\varphi(x)\ \mathrm{d}x = 0\ .$$

Adesso useremo un piccolo lemma, ovvero:

Lemma 1.1.1: Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni

Sia $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(]a,b[)$ vale

$$\int_a^b v(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = 0,$$

allora v è identicamente nulla su $[a,b]$.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in]a,b[$[a] tale che $v(x_0) > 0$[b]. Allora per continuità di v_0 esiste un intorno aperto I tale che per ogni $x \in I$ vale $v(x) \geq v(x_0)/2$; prendo una $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(]a,b[)$ tale che $\varphi > 0$ su I e $\varphi = 0$ su $]a,b[\setminus I$, allora vale

$$0 = \int_a^b v(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_I \underbrace{v(x)\varphi(x)}_{>0}\ \mathrm{d}x > 0,$$

assurdo, dunque $v \equiv 0$.

□

[a] Se fosse sugli estremi varrebbe comunque un argomento assolutamente analogo.
[b] WLOG

Osservazione 1.1.1: Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni super saiyan

In realtà è sufficiente controllare le φ in $\mathcal{C}^\infty_c$, anche se useremo questo risultato non lo dimostreremo.

Allora possiamo applicare questo lemma alla relazione di prima per ottenere

Teorema 1.1.2: Equazioni di Eulero–Lagrange I

Nella situazione 1.1.1, vale la proposizione 1.1.1.
Inoltre, se $f_p \in \mathcal{C}^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ vale anche

$$f_s(x,u_0(x),u_0'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} f_p(x,u_0(x),u_0'(x)) = 0.$$

Questa condizione si dice ***equazione di Eulero–Lagrange forte***.

[1] Per qualche motivo

Vedremo nelle prossime pagine che in realtà queste ipotesi più forti ci sono sempre garantite.

Esercizio 1.1.1: Eulero–Lagrange per il moto

Sia $\gamma : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^3$ la legge oraria della traiettoria di un punto materiale di massa $m > 0$ sottoposto a un campo di forze $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conservativo, ovvero tale che esista $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $E = \nabla V$.
Sappiamo che γ soddisfa le equazioni del moto

$$m\gamma''(t) = E(\gamma(t));$$

definiamo il funzionale ***azione*** come

$$S(\gamma) = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m(\gamma'(t))^2 - V(\gamma(t)) \, \mathrm{d}t.$$

Si mostri (supponendo adeguate regolarità) che i minimi di S risolvono le equazioni del moto.

Soluzione

Risolveremo il caso unidimensionale, in quanto il caso tridimensionale è semplicemente un sistema di tre casi unidimensionali indipendenti tra loro.
Supponiamo che γ sia un minimo di S e osserviamo che la lagrangiana di S è data da:

$$f(x, s, p) = \frac{1}{2} mp^2 - V(s) \Rightarrow \begin{cases} f_s(x, s, p) = \nabla V(s) = E(s) \\ f_p(x, s, p) = mp \end{cases}.$$

Applicando il teorema 1.1.2 abbiamo dunque

$$E(\gamma(t)) - \frac{\partial}{\partial t} m\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow E(\gamma(t)) = m\gamma''(t).$$

❀

Esempio 1.1.1: TODO

Poniamo

$$F(u) := \int_0^{2\pi} (u'(x))^2 - (u(x))^2 \, \mathrm{d}x, \qquad X := \{u \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi]) : u(0) = u(2\pi) = 0\}.$$

Esempio 1.1.2: TODO

Poniamo

$$F(u) := \int_{-1}^{1} u^2(x) \cdot (2x - u'(x))^2 \, \mathrm{d}x, \qquad X := \{u \in \mathcal{C}^1([-1, 1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}.$$

1.1.1 Lemma di Du Bois–Raymond

Poniamoci sempre nella situazione 1.1.1 e fissiamo un pochino di notazione:

$$a(x) := f_s(x, u_0(x), u_0'(x)), \quad b(x) := f_p(x, u_0(x), u_0'(x)), \quad A(x) := \int_a^x a(t) \, \mathrm{d}t$$

Che ci permettono di riscrivere la forma debole delle equazioni di Eulero–Lagrange come

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_a^b a(x)\varphi(x) - b(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \cancel{[A(x)\varphi(x)]_a^b} - \int_a^b A(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b b(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b [b(x) - A(x)]\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1([a,b]).
\end{aligned}
$$

Ora sfoderiamo un lemmino dal cilindro, ovvero il

Lemma 1.1.2: Lemma di Du Bois–Raymond

Sia $v \in \mathcal{C}^0([a,b])$ tale che

$$\int_a^b v(x)\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[).$$

Allora v è costante su $[a,b]$.

Dimostrazione

Sia φ come da ipotesi e $\psi = \varphi'$: dato che φ è nulla negli estremi di $[a,b]$, l'integrale di ψ su $[a,b]$ è nullo; allo stesso modo, integrando una ψ che abbia integrale nullo su $[a,b]$ da a a x possiamo recuperare una sua primitiva φ che soddisfi le ipotesi del lemma, dunque possiamo riformulare l'ipotesi equivalentemente come:

$$\int_a^b v(x)\psi(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[) : \int_a^b \psi(x) \, \mathrm{d}x = 0 \ .$$

Fissiamo una $w \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ tale che il suo integrale su $[a,b]$ sia 1 e data $w \in \mathcal{C}_c^\infty(]a,b[)$ poniamo

$$\psi(x) := \varphi(x) - w(x) \int_a^b \varphi(t) \, \mathrm{d}t \ ,$$

Integrando per parti vediamo che ψ soddisfa le nostre ipotesi, dunque analogamente vediamo che

$$0 = \int_a^b v(x)\psi(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b v(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b v(x)w(x) \int_a^b \varphi(t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_a^b \left[v(x) - \int_a^b v(t)w(t) \, \mathrm{d}t \right] \varphi(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

Infine applicando il lemma 1.1.1 nella sua forma più forte, in quanto per l'arbitrarietà di φ vale

$$v - \underbrace{\int_a^b v(x)w(x) \, \mathrm{d}x}_{\in \mathbb{R}} \equiv 0 \Rightarrow v \equiv \int_a^b v(x)w(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

$\square$

Applicandolo otteniamo che $b(x) - A(x) \equiv c \in \mathbb{R}$, dunque $f_p(x, u_0(x), u_0'(x)) = b(x) = c + A(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$, il che significa che abbiamo ottenuto "gratis" le ipotesi più forti per il teorema 1.1.2.

1.1.2 Equazioni di Eulero–Lagrange con estremi liberi

Proviamo ad alleggerire la situazione 1.1.1 e lavoriamo con questa nuova situazione, ovvero:

$$X = \mathcal{C}^1([a,b]), \qquad F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, \mathrm{d}x \qquad \text{con } f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Avendo reso più generale X, cosa dobbiamo richiedere su F per poter usare ancora la tesi del teorema 1.1.2? Assumendo come al solito u_0 come minimo di F, definiamo per $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])^2$ e $t \in \mathbb{R}$ la funzione $u_t = u_0 + t\varphi$ che ovviamente appartiene a X e quindi $g(t) = F(u_t)$ che quindi ha minimo in $t = 0$. Vediamo che:

$$
\begin{aligned}
0 = g'(0) &= \int_a^b f_s(x, u_0(x), u_0'(x))\varphi(x) - f_p(x, u_0(x), u_0'(x))\varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \underbrace{f_s(x, u_0(x), u_0'(x))\varphi(x) - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, u_0(x), u_0'(x))\right]\varphi(x)}_{=0 \text{ per la tesi che vogliamo}} \, \mathrm{d}x + \left[f_p(x, u_0(x), u_0'(x))\varphi(x)\right]_a^b = \\
&= f_p(b, u_0(b), u_0'(b))\varphi(b) - f_p(a, u_0(a), u_0'(a))\varphi(a) \qquad \forall \varphi \in X
\end{aligned}
$$

Da ciò otteniamo delle cosiddette condizioni al bordo "naturali", ovvero:

$$
\begin{cases}
f_p(b, u_0(b), u_0'(b)) = 0 \\
f_p(a, u_0(a), u_0'(a)) = 0
\end{cases}
$$

Che quindi andiamo a fissare in questa situazione:

Situazione 1.1.2: Eulero–Lagrange con estremi liberi

$$X = \mathcal{C}^1([a,b]),$$

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, \mathrm{d}x \quad \text{con } f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) : \begin{cases} f_p(b, u_0(b), u_0'(b)) = 0 \\ f_p(a, u_0(a), u_0'(a)) = 0 \end{cases}$$

Con $u_0 \in X$ punto di minimo per F.

Ecco dunque dimostrato:

Teorema 1.1.3: Equazioni di Eulero–Lagrange II

La tesi del teorema 1.1.2 vale anche nella situazione 1.1.2.

1.2 Minimi locali

Definizione 1.2.1: Norme e distanze per funzioni continue e differenziabili

Siano $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b])$, definiamo:

- $\|u\|_{\mathcal{C}^0([a,b])} := \max_{x \in [a,b]} |u(x)|$;
- $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}^0([a,b])}(u,v) := \|v - u\|_{\mathcal{C}^0([a,b])}$;
- $\|u\|_{\mathcal{C}^1([a,b])} := \max_{x \in [a,b]} |u(x)| + \max_{x \in [a,b]} |u'(x)|$;
- $\mathrm{dist}_{\mathcal{C}^1([a,b])}(u,v) := \|v - u\|_{\mathcal{C}^1([a,b])}$.

Per alleggerire la notazione, nei casi dove non avremo timore di ambiguità scriveremo occasionalmente $\|u\|_0$ o anche solo $\|u\|$ e vale lo stesso per $\mathrm{dist}(u,v)$.

[2] attenzione, non necessariamente a supporto compatto!

Capitolo 2

Metodi diretti

Bibliografia

[1] F. Angrisani, G. Ascione, C. Leone e C. Mantegazza, *Appunti di Calcolo delle Variazioni*. 2019.

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 2011.

[3] B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*. 2009.

[4] M. Giaquinta e S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*. 2004.

[5] G. Buttazzo, M. Giaquinta e S. Hildebrandt, *One-dimensional Variational Problems*. 1999.