

# TFA per cambiamenti di coordinate

Filippo  $\mathcal{L}$ . Troncana

A.A. 2023/2024

## 1 Misure e $\sigma$ -algebre indotte

### Definizione 1.1: $\sigma$ -algebra finale

Sia  $(X, \mathcal{A})$  uno spazio misurabile, sia  $Y$  un insieme e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione suriettiva. La  **$\sigma$ -algebra** finale indotta da  $f$  rispetto a  $\mathcal{A}$  è la famiglia

$$f\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

### Osservazione 1.1

La  $\sigma$ -algebra finale di  $f$  rispetto a  $\mathcal{A}$  è la più grande  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  tale che  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Sigma)$  sia misurabile.

#### Dimostrazione

Sia  $\Sigma \subset 2^Y$  tale che  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Sigma)$  sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni  $E \in \Sigma$ , abbiamo che  $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ , dunque  $\Sigma \subset f\mathcal{A}$ .

□

### Definizione 1.2: Misura esterna indotta

Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi, sia  $\mu$  una misura esterna su  $X$  e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione suriettiva. La **misura indotta** da  $f$  rispetto a  $\mu$  è la funzione

$$f\mu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

### Proposizione 1.1

$f\mu$  è una misura esterna su  $Y$ .

#### Dimostrazione

Dimostriamo i tre assiomi di misura esterna.

1.  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Siano  $E \subset F \subset Y$ , allora  $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$ , dunque la monotonia di  $f\mu$  segue dalla monotonia di  $\mu$ .
3. Siano  $A, B \subset Y$ , allora  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  e la subaddittività segue da quella di  $\mu$

□

### Proposizione 1.2

Se  $f\mu$  è la misura indotta da  $f$  rispetto a  $\mu$ , allora  $\mathcal{M}_{f\mu} = f\mathcal{M}_\mu$ .

### Dimostrazione

TODO

□

TODO: è possibile definire una duale  $\sigma$ -algebra iniziale e una misura iniziale richiedendo l'iniettività, ma per la nostra trattazione è sufficiente la versione finale.

### Lemma 1.1: Isomorfismo di $\sigma$ -algebre indotte

Siano  $(X, \mathcal{A})$  uno spazio misurabile,  $Y$  un insieme e  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow Y$  una funzione biettiva. Allora  $f\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ .

### Dimostrazione

Banale dimostrazione di insiemistica.

□

## 2 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{array}{ccc}
(X, \mathcal{A}, \mu) & \xrightarrow{f} & (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \\
& \searrow g \circ f & \downarrow g \\
& & (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})
\end{array}$$

### Teorema 2.1: Integrazione indotta

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura, sia  $Y$  un insieme, sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione biettiva e sia  $g : (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1)$  una funzione  $f\mathcal{A}$ -misurabile.

Allora  $g$  è  $f\mu$ -integrabile se e solo se  $g \circ f$  è  $\mu$ -integrabile, e vale l'identità

$$\int g \, df\mu = \int g \circ f \, d\mu$$

### Dimostrazione

Assumiamo che  $g$  sia  $f\mu$ -integrabile. Allora vale

$$\begin{aligned}
\int g \, df\mu &= \int_* g \, df\mu = \sup \{ I_{f\mu}(\varphi) : \varphi \in \Sigma_-(g) \} = \sup \left\{ \sum_i a_i f\mu(\varphi^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \\
&= \sup \left\{ \sum_i a_i \mu(f^{-1}(\varphi^{-1}(\{a_i\}))) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \sup \left\{ \sum_i a_i \mu((\varphi \circ f)^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \circ f \in \Sigma_-(g \circ f) \right\} \\
&\quad \text{con } \psi := \varphi \circ f, \quad \int_* g \, df\mu = \sup \{ I_\mu(\psi) : \psi \in \Sigma_-(g \circ f) \} = \int_* g \circ f \, d\mu
\end{aligned}$$

La dimostrazione è assolutamente analoga per l'integrale superiore e nella direzione opposta assumendo l'integrabilità di  $g \circ f$ . Le varie uguaglianze seguono dalla biettività di  $f$ .

□

### Osservazione 2.1: Girotondone per il TFA

L'obiettivo di questo scherzetto è dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate, ovvero

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ f) \cdot J_f \, d\mathcal{L}^n$$

Ma c'è un problema: noi abbiamo dimostrato un risultato dalla forma leggermente diversa, ovvero

$$\int g \, df\mu = \int g \circ f \, d\mu$$

Osservando il TFA ci aspettiamo che la nostra  $df\mu$  corrisponda a  $J_f \, d\mathcal{L}^n$ , dunque dobbiamo fare un piccolo girotto usando la biattività di  $f$ :

$$\int g \, d\lambda = \int g \circ f \circ f^{-1} \, d\lambda = \int g \circ f \, df^{-1}\lambda$$

In questo modo ci basta riuscire a far corrispondere  $J_f \, d\mathcal{L}^n$  a  $df^{-1}\mathcal{L}^n$

## 3 Derivata di Radò-Nikodym

### Teorema 3.1: Teorema di Radò-Nikodym

Sia  $(X, \mathcal{A})$  uno spazio misurabile e siano  $\nu, \mu$  misure su  $(X, \mathcal{A})$  tali che  $\mu$  sia  $\sigma$ -finita e  $\nu$  sia assolutamente continua rispetto a  $\mu$ . Allora esiste una funzione  $\mathcal{A}$ -misurabile  $f : X \rightarrow [0, +\infty[$  tale che per ogni  $E \in \mathcal{A}$  si abbia

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

E per una funzione  $\nu$ -integrabile  $g : (X, \mathcal{A}, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$  vale

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu$$

### Definizione 3.1: Derivata di Radò-Nikodym

Nella situazione precedente, la funzione  $f$  si dice **derivata di Radò-Nikodym** di  $\nu$  rispetto a  $\mu$  e si indica con

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

### Definizione 3.2: Funzioni R-N

Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  due spazi con misure  $\sigma$ -finite.

Una funzione  $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \nu)$  si dice **funzione R-N** se:

1.  $f$  è misurabile
2. Per ogni  $E \in \mathcal{B}$  tale che  $\nu(E) = 0$  si ha  $\mu(f^{-1}(E)) = 0$

### Osservazione 3.1: Categoria degli spazi con misure $\sigma$ -finite e delle funzioni R-N

La classe degli spazi con misure  $\sigma$ -finite con la classe delle funzioni R-N e l'usuale composizione di funzioni è una categoria, che chiamiamo **Mea<sub>R-N</sub>**.

### Dimostrazione

Controlliamo le varie proprietà:

- Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura  $\sigma$ -finita. La funzione identità  $\text{id}_X$  è evidentemente una funzione R-N.
- Siano  $f : (X, \mathcal{A}, \lambda) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \mu)$  e  $g : (Y, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Z, \mathcal{C}, \nu)$  due funzioni R-N. Notiamo che per ogni  $E \in \mathcal{C}$  tale che  $\nu(E) = 0$  si ha  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(E))$  e  $\mu(g^{-1}(E)) = 0$ , dunque  $\lambda((g \circ f)^{-1}(E)) = 0$ .
- La composizione eredita l'associatività dalla composizione di funzioni in **Set**.

□

### Proposizione 3.1

Sia  $(X, d, \mu)$  uno spazio metrico di dimensione  $n \in \mathbb{Z}_+$  con una misura  $\mu$  di Radon (rispetto alla  $\sigma$ -algebra Boreliana indotta dalla metrica) invariante per traslazioni (ovvero,  $\mu(B_r(x)) = \mu(B_r(y))$  per ogni  $x, y$  in  $X$ ) e sia  $F : X \rightarrow X$  una funzione biettiva di Lipschitz con costante di Lipschitz  $L > 0$ . Allora  $F^{-1}\mu \ll \mu$  e  $L^n$  e la derivata di Radon-Nikodym di  $F^{-1}\mu$  rispetto a  $\mu$  è maggiorata  $\mu$ -quasi ovunque da  $L^n$ .

### Dimostrazione

È sufficiente dimostrarlo sulle palle aperte, dato che queste costituiscono una base della topologia e dunque della  $\sigma$ -algebra Boreliana.

Per ogni  $r > 0$  e ogni  $x \in X$  abbiamo che  $F(B_r(x)) \subset B_{Lr}(F(x))$  che implica  $\mu(F(B_r(x))) \leq \mu(B_{Lr}(F(x))) = L^n \mu(B_r(F(x)))$  il che implica che per ogni insieme,  $F^{-1}(E) \leq \mu(E)$ , dunque sappiamo che deve esistere  $g : (X, d, \mu) \rightarrow [0, +\infty[$  tale che

$$F^{-1}\mu(E) = \int_E g \, d\mu$$

Ancora una volta lavoriamo sulle palle

$$\forall r > 0, \forall x \in X, 0 \leq \int_{B_r(x)} g(y) \, d\mu(y) \leq \int_{B_r(x)} L^n \, d\mu(y) \Rightarrow g \leq_\mu L^n$$

□

## 4 Il viaggio verso il TFA

Cercheremo di dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate **lineari** con la speranza di estendere questo ragionamento a cambiamenti di coordinate **differenziabili**, ovvero localmente lineari. Per fare questo, ci permetteremo di sostituire i plurirettangoli nella definizione della misura di Lebesgue ai pluriparallelogrammi

### Lemma 4.1: Misura indotta da un cambiamento di coordinate lineare

Sia  $F : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa lineare invertibile.

Allora  $F^{-1}\mathcal{L}^n = |\det F| \cdot \mathcal{L}^n$  e dunque

$$F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det F| \, d\mathcal{L}^n$$

### Dimostrazione

Sia  $E \in \mathcal{FM}_{\mathcal{L}}$ . Per definizione di misura indotta, abbiamo che  $F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(F(E))$  e che, come visto nel corso di Geometria A è uguale a  $|\det F| \cdot \mathcal{L}^n(E)$ .

□

#### Teorema 4.1: TFA per cambiamenti di coordinate lineari

Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa lineare invertibile e sia  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{L}^n$ -integrabile. Vale il seguente fatto:

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ F) \cdot |\det F| \, d\mathcal{L}^n$$

#### Lemma 4.2: NON SO SE SERVA DAVVERO

Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un insieme misurabile e per  $r > 0$  sia  $\{B_r(x_i)\}_{i \in I_r}$  un suo ricoprimento numerabile di palle aperte. Vale

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{i \in I_r} \mathcal{L}^n(B_r(x_i)) \quad \text{e in particolare} \quad \mathcal{L}^n(E) = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{i \in I_r} \mathcal{L}^n(B_r(x_i))$$

##### Dimostrazione

Segue dal teorema di Lindelof e dalla compatibilità tra  $\mathcal{H}^n$  e  $\mathcal{L}^n$

□

#### Teorema 4.2: Derivata R-N di una misura finale di diffeomorfismi

Sia  $\varphi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un diffeomorfismo locale e sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un aperto. Allora

$$\varphi^{-1} \mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det D\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

Equivalentemente

$$\frac{d\varphi^{-1} \mathcal{L}^n}{d\mathcal{L}^n} = |\det D\varphi|$$

Nel senso della definizione 3.1 della derivata di Radon-Nikodym.

##### Dimostrazione

Poniamo  $|\det D\varphi(x)| =: J(x)$ .

Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un aperto. Localmente la trasformazione  $\varphi$  agisce come una trasformazione lineare  $D\varphi$ , dunque in intorno  $V_i$  sufficientemente piccoli di punti  $x_i \in E$  indicizzati su un insieme numerabile  $I$  applichiamo il lemma 4.1 e abbiamo  $\varphi^{-1} \mathcal{L}^n \sim D\varphi \mathcal{L}^n = J(x) \cdot \mathcal{L}^n$ . Dunque posti possiamo scrivere

$$\varphi^{-1} \mathcal{L}^n(E) = \sum_{i \in I} \int_{V_i} J(x_i) \, d\mathcal{L}^n = \sum_{i \in I} \int_E J(x_i) \chi_{V_i}(y) \, d\mathcal{L}^n(y)$$

Facendo una *mossa alla Gottinga* riconosciamo una regolarità sufficiente ad applicare uno strano genere di integrale di Riemann rendendo sempre più piccoli i nostri intorno aumentando il loro numero e otteniamo

$$\varphi^{-1} \mathcal{L}^n(E) = \int_E J \, d\mathcal{L}^n = \int_E |\det D\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

□

#### Teorema 4.3: TFA

Sia  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un diffeomorfismo locale e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{L}^n$ -integrabile. Vale

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

##### Dimostrazione

La dimostrazione è banale combinando i non banali teoremi 2.1, 3.1 e ??.

□

## 5 Delirio categorico

Questa nostra costruzione può essere formalizzata come  $\Phi : (X, \bullet) \times \mathbf{Sur}(X, \star) \rightarrow \mathbf{Meable}$  che mappa la coppia  $((X, \mathcal{A}), f : X \rightarrow Y)$  in  $(Y, f\mathcal{A})$ , non credo sia più estensibile perchè è necessario che il supporto del primo spazio misurabile sia lo stesso insieme di partenza della suriezione