Dimostrazioni per l'esame orale di Analisi Matematica A

Filippo L. Troncana

A.A. 2023/2024

Indice

1 Modulo 1

1.1 Irrazionalità della radice di 2

Teorema 1.1.1

Non esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q^2 = 2$.

Dimostrazione

Siano $a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ tali che $\text{mcd}(a, b) = 1$ e $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$.
Abbiamo automaticamente che $a^2 = 2b^2$, dunque $2|a^2$ e in quanto 2 è un numero primo, $2|a$, ovvero $a^2 = 4n$ per un qualche $n \in \mathbb{Z}$.
Allora possiamo scrivere $4n = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2n$, ma allora analogamente a quanto scritto sopra, $2|b$.
Pertanto, $\text{mcd}(a, b) \geq 2$, ma questo porta a una contraddizione, dunque non esistono tali $a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

$\square$

1.2 Radici n-esime di un numero complesso

Teorema 1.2.1

Sia $z \in \mathbb{C}$ scritto come $z = \rho \cos(\theta) + i\rho \operatorname{sen}(\theta)$ con $\rho, \theta \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$.
Allora $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, si ha $z = (\rho^{1/n} \cos(\theta/n) + i\rho^{1/n} \operatorname{sen}(\theta/n))^n$.

Dimostrazione

Segue direttamente dall'identità di Eulero, ovvero $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$

$\square$

1.3 Esistenza del limite per funzioni monotone

Teorema 1.3.1

Sia $X \subset \mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente (decrescente) e $x \in \mathbb{R}$.
Se x_0 è un punto di accumulazione sinistro ((destro)) per X, allora

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{X \cap]-\infty, x_0[} f \quad \left(\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{X \cap]x_0, +\infty[} f\right)\right)$$

Se $x_0 = \pm\infty$ Allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_X f \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf_X f$$

Dimostrazione

Sia f crescente e dimostriamo il caso finito, il resto è analogo.
Sia $l = \sup_{X \cap]-\infty, x_0[} f$, che esiste per la completezza di $\mathbb{R}$.
Allora abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in X \cap]-\infty, x_0[$ tale che $l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq l$ e per qualsiasi $x \in]x_\varepsilon, x_0[$ abbiamo $l - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq l < l + \varepsilon$.

$\square$

1.4 Esistenza degli zeri

Teorema 1.4.1

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^0([a, b])$ tale che $f(a)f(b) < 0$.
Esiste $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione

Assumiamo $f(a) < 0$ (il caso contrario è analogo) e definiamo tre successioni in questo modo.

$$\begin{cases} a_0, b_0 = a, b \\ c_n = \frac{b_n - a_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ a_{n+1} = c_n \quad \text{se } f(c_n) < 0, \quad a_{n+1} = a_n \quad \text{altrimenti.} \\ b_{n+1} = c_n \quad \text{se } f(c_n) > 0, \quad b_{n+1} = b_n \quad \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo che $|c_n - c_{n+1}| = \frac{b-a}{2^{n+1}}$, quindi è una successione di Cauchy contenuta in $]a, b[$ e in quanto tale converge a $c \in]a, b[$, dobbiamo solo dimostrare che $f(c) = 0$.
Notiamo che a_n e b_n sono due successioni monotone la cui differenza è uguale a $\frac{b-a}{2^n}$, quindi hanno entrambe un limite e questo è lo stesso, ovvero c (è abbastanza semplice vederlo).
In particolare $f(a_n) \leq 0$ e $f(b_n) \geq 0$, dunque passando al limite (cosa che possiamo fare grazie alla continuità di f) abbiamo $0 \leq f(c) \leq 0$, quindi $f(c) = 0$.

□

1.5 Teorema dei valori intermedi

Teorema 1.5.1

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^0([a, b])$ con $f(a) < f(b)$ (analogo per il caso contrario).
Si ha $f([a, b]) \supseteq [f(a), f(b)]$.

Dimostrazione

Consideriamo per $k \in [f(a), f(b)]$ la funzione $x \mapsto f(x) - k$ definita sull'intervallo $[a, b]$.
Essa soddisfa abbastanza evidentemente le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri, segue la tesi.

□

1.6 Teorema di Fermat

Teorema 1.6.1

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^0([a, b])$ e $\mathcal{D}^1(]a, b[)$.
Se per un qualche $x_0 \in]a, b[$ si ha un punto di massimo/minimo locale di f, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione

Assumiamo che $x_0 \in]a, b[$ sia un punto di massimo locale (analogo per un minimo).
Significa che esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\frac{f(x_0 - \delta) - f(x_0)}{\delta} \leq 0 \leq \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}$$

Ma in quanto f è derivabile, mandando $\delta \to 0$ i limiti destro e sinistro devono coincidere e si ha $f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0)$, da cui segue la tesi.

□

1.7 Teorema di Lagrange (formulazione che comprende il teorema di Rolle)

Teorema 1.7.1

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^0([a, b])$ e $\mathcal{D}^1(]a, b[)$.
Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$

Dimostrazione

Consideriamo il caso in cui $f(b) = f(a)$. Per il teorema di Weierstrass, la funzione ha un massimo e un minimo, dunque esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$ e segue la tesi.
Altrimenti consideriamo la funzione $\hat{f} : x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Questa soddisfa le nostre ipotesi e ricade nel caso precedente, quindi esiste $c \in]a, b[$ tale che:

$$\hat{f}'(c)(b-a) = \left(f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(b-a) = 0 \Rightarrow f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

□

1.8 Taylor con resto di Peano

Teorema 1.8.1

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^m$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^n(A)$.
Allora per $x_0 \in A$ si ha che $f(x) = P_{n,x_0}(x) + o(||x - x_0||^n)$, dove:

$$P_{n,x_o}(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{D^i_{x_0}(x - x_0)}{i!}$$

Dove $D^i_{x_0} : A \to \mathbb{R}$ è la forma di ordine i associata al tensore (∂_α) delle derivate i-esime con multi-indice α di lunghezza i.
Se $m = 1$ allora abbiamo più semplicemente:

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{d^i f}{dx^i}(x_0)\frac{(x - x_0)^i}{i!}$$

Dimostrazione

Dimostriamo solo il caso $m = 1$, inoltre possiamo assumere $x_0 = 0$ a meno di traslazioni.
Procediamo per induzione su n:

- Se $n = 0$ abbiamo $f(x) = f(0) + o(1)$, vero per definizione di continuità.
- Se $n = 1$ abbiamo $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$, vero per definizione di derivata.
- Assumiamo che valga il teorema per $n - 1$ e $f \in \mathcal{C}^n(A)$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P_n'(x)}{(x^n)'}$$

  Sia $Q_k(x)$ il polinomio di Taylor di ordine k associato a f', e abbiamo che $P_n'(x) = nQ_{n-1}(x)$, quindi per ipotesi induttiva arriviamo alla nostra tesi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P_n'(x)}{(x^n)'} = \lim_{x\to 0} \frac{n}{n} \frac{f'(x) - Q_{n-1}(x)}{x^{n-1}} = 0$$

□

1.9 Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Teorema 1.9.1

Sia $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione tale che $\sum_{\mathbb{N}} a_n = l \in \mathbb{R}$.
Allora si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione

Sia $\{S_n\}_{\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali. In convergente, essa deve essere di Cauchy, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ deve esistere $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $i, j > N$ si ha $|S_i - S_j| < \varepsilon$.
In particolare allora, per ogni $\varepsilon > 0$ deve esistere $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $i > N$ si ha $|S_{i+1} - S_i| = |a_{i+1}| < \varepsilon$, che per definizione vuol dire che $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ è infinitesima.

$\square$

1.10 Criteri per convergenza di serie a termini non negativi

Teorema 1.10.1

Sia $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione tale che $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$.
Valgono le seguenti:

1. Se esiste una successione $\{b_n\}_{\mathbb{N}}$ a termini non negativi tale che eventualmente si abbia $b_n \geq a_n$, allora si ha
   - $\{b_n\}_{\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}) \Rightarrow \{a_n\}_{\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$.
   - $\sum_{\mathbb{N}} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{\mathbb{N}} b_n = +\infty$.
2. Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ si ricade in uno dei seguenti casi:
   - Se $k < 1$, allora $\{a_n\}_{\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$.
   - Se $k > 1$, allora $\sum_{\mathbb{N}} a_n = +\infty$.
   - Se $k = 1$, chi può dire.
3. TODO: Confronto asintotico

Dimostrazione

Sia $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ come da ipotesi e sia $\{A_n\}_{\mathbb{N}}$ la successione delle sue somme parziali:

1. Sia $\{b_n\}_{\mathbb{N}}$ come da ipotesi, sia $\{B_n\}_{\mathbb{N}}$ la successione delle sue somme parziali e sia $N \in \mathbb{N}$ il primo indice tale che $\forall n > N, a_n \leq b_n$. Allora abbiamo:
   - Assumiamo $\{b_n\}_{\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ e consideriamo la successione $\{\hat{B}_n := B_n - B_N\}_{n>N}$. Abbiamo dunque:

$$0 \leq A_n \leq \hat{B}_n + A_N \leq B_n + A_N \to l + A_N \in \mathbb{R}$$

$\square$

1.11 Teorema della media integrale

Teorema 1.11.1

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.
Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass, $f([a,b]) = [m, M]$, dunque definiamo le funzioni costanti su $[a,b]$ $x \mapsto m$ e $x \mapsto M$. Per la monotonia dell'integrale di Riemann abbiamo:

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

dunque

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Segue la tesi.

□

1.12 Teorema di Torricelli-Barrow

Teorema 1.12.1

Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione in $\mathcal{R}([a,b])$ tale che esista una funzione $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ che sia continua su $[a,b]$ e sia sua primitiva su $]a,b[$. Allora vale:

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione

Suddividiamo l'intervallo $[a,b]$ in sottointervalli della forma $[x_i, x_{i+1}]$ con $i \in \{0, ..., I\}$ dove $x_0 = a$ e $x_I = b$. Abbiamo allora

$$G(b) - G(a) = G(x_I) - G(x_{I-1}) + G(x_{I-1}) - ... - G(x_1) + G(x_1) - G(x_0)$$

Su ciascun intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ possiamo usare il teorema di Lagrange e trovare un c_i tale che $G(x_{i+1}) - G(x_i) = G'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = g(c_i)(x_{i+1} - x_i)$. Abbiamo dunque

$$G(b) - G(a) = \sum_{0 \leq i < I} g(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Che con il tendere di I all'infinito corrisponde alla definizione di integrale di Riemann.

□

1.13 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 1.13.1

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione in $\mathcal{R}([a,b])$ e sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita come

$$F(x) := \int_a^x f(x) dx$$

Allora $F \in \mathcal{C}^0([a,b])$, e se $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ si ha $F \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$ e vale $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione

In quanto continua, abbiamo $f([a,b]) = [m,M]$. Per la formula di spezzamento, con $x_0, x_1 \in [a,b]$ abbiamo:

$$|F(x_1) - F(x_0)| = \left| \int_a^{x_1} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \right| \leq |M(x_1 - x_0)|$$

Allora con $x_1 \to x_0$ abbiamo $F(x_1) \to F(x_0)$, dunque è continua.
Ora assumiamo che anche f sia continua.
Prendiamo $x_0 \in [a,b]$ e $h > 0$ (con $h < 0$ è analogo). Per il teorema della media integrale esiste un $c_h \in [x_0, x_0 + h]$ tale che:

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = f(c_h)$$

Facendo tendere $h \to 0$ abbiamo quindi $F'(x_0) = f(x_0)$.

□

1.14 Risoluzione equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Teorema 1.14.1

Sia $\varphi : f' = g(f)$ un'equazione differenziale con $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tale che $g = G'$ con G invertibile e $g \circ f \neq 0$ in qualche aperto reale.
Allora l'integrale generale di φ è $f(x) = G^{-1}(ke^x)$.

Dimostrazione

Manipoliamo un po' questa equazione.

$$f' = G'(f) \Leftrightarrow \frac{f'}{G'(f)} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \log(G(f)) = 1$$

Passiamo alle primitive

$$\log(G(f(x))) = x + C \Leftrightarrow G(f(x)) = e^{x+C} = ke^x \Leftrightarrow f(x) = G^{-1}(ke^x)$$

□

2 Modulo 2

2.1 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Teorema 2.1.1

Sia $(H, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale pre-Hilbertiano con norma indicata con N.
Si ha che $|x \cdot y| \leq N(x)N(y)$.

Dimostrazione

Escludiamo i casi dove $x = 0$ e $y = 0$ che sono banali, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.
Abbiamo

$$0 < N(x - \lambda y)^2 = (x - \lambda y) \cdot (x - \lambda y) = x \cdot x - \lambda 2(x \cdot y) + \lambda^2 (y \cdot y)$$

Dato che questa disequazione deve valere per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo $4(x \cdot y)^2 < 4(x \cdot x)(y \cdot y)$ ed estraendo la radice (operazione possibile dato che norma e prodotto scalare sono definiti positivi) segue la tesi.

□

2.2 Caratterizzazione dei chiusi nello spazio euclideo

Teorema 2.2.1

Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se:

1. ogni successione $\{x_i\}_{\mathbb{N}} \subset C$ convergente converge a un $\hat{x} \in C$.
2. $\partial C \subset C$.
3. C contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Dimostrazione

Procederemo circolarmente per dimostrare l'equivalenza, di solito avremo $A = C^c$.

1. Assumiamo che C sia chiuso. Per definizione di convergenza, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che $\{x_i\}_{i>N} \subset B_\varepsilon(\hat{x})$, ma quindi per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo $C \cap B_\varepsilon(\hat{x}) \neq \varnothing$ e dunque $\hat{x} \in C$.
2. Assumiamo C chiuso, dunque A è aperto per definizione; allora per definizione di frontiera, in ogni punto $x \in \partial C$ la pallina centrata in x ha sempre intersezione non vuota con C, dunque $\partial C \cap A = \varnothing$, quindi $\partial C \subset C$. Assumiamo che $\partial C \subset C$; allora per ogni punto in C, o questo sta nei punti interni (dunque la pallina centrata in esso è contenuta in C) o sta nella frontiera (dunque la pallina centrata in esso ha intersezione non vuota con C), dunque ogni punto in A ammette una pallina totalmente esterna a C, quindi A è aperto e C è chiuso.
3. Assumiamo che C sia chiuso. Abbiamo che dato C^* l'insieme dei suoi punti di accumulazione, questo è l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $B_r(x) \cap C \neq \varnothing$ per qualsiasi $r > 0$.
   Dato che C è chiuso, ogni suo punto esterno ammette una palla completamente nel suo complementare, dunque $C^* \subset C$.
   Supponiamo che $C^* \subset C$.

□

2.3 Teorema di Bolzano-Weierstrass

Teorema 2.3.1

Sia $\{x_i\}_{\mathbb{N}}$ una successione limitata in $\mathbb{R}^n$.
Essa ammette una sottosuccessione $\{x_{\sigma(i)}\}_{\mathbb{N}}$ convergente a $\hat{x}$ in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione

Iniziamo con il caso $n = 1$ e supponiamo $\{x_i\}_{\mathbb{N}} \subset [a_0, b_0]$.
Definiamo $c_0 := (b_0 - a_0)/2$ come il punto medio dell'intervallo. Dato che $\{x_i\}_{\mathbb{N}}$ ha infiniti termini, almeno uno tra gli intervalli $[a_0, c_0]$ e $[c_0, b_0]$ contiene infiniti termini di $\{x_i\}_{\mathbb{N}}$.
Supponiamo che sia $[a_0, c_0]$, poniamo $a_1 := a_0$ e $b_1 := c_0$ e ripetiamo questo processo con il nuovo $c_1 = (b_1 - a_1)/2$, dimezzando ogni volta l'intervallo e scegliendo la (o una delle) metà in cui giacciono infiniti termini della successione, ottenendo dunque una successione di intervalli $\{[a_j, b_j]\}_{\mathbb{N}}$ ciascuno di ampiezza $(b-a)/2^j$.
Notiamo che $\{a_i\}_{\mathbb{N}}$ e $\{b_i\}_{\mathbb{N}}$ sono entrambe monotone (rispettivamente crescente e decrescente) e limitate, dunque convergono rispettivamente a $\alpha \in [a, b]$ e $\beta \in [a, b]$, dove

$$\beta - \alpha = \lim_{i \to +\infty} b_i - a_i = \lim_{i \to +\infty} \frac{b-a}{2^i} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta =: \hat{x}$$

Poniamo $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $x_{\sigma(i)} \in [a_i, b_i]$ e abbiamo ottenuto una sottosuccessione $\{x_{\sigma(i)}\}_{\mathbb{N}}$ convergente a $\hat{x}$.
Per i casi $n > 1$ abbiamo una successione della forma $\{(x^1, ..., x^n)_i\}_{\mathbb{N}}$ che corrisponde a una successione $\{(x_i^1, ..., x_i^n)\}_{\mathbb{N}}$, ovvero una n-upla di successioni $\{x_i^j\}_{\mathbb{N}}$.
Procediamo come sopra sulla successione $\{x_i^1\}_{\mathbb{N}}$ ottenendo la funzione σ_1, poi procediamo sulla successione $\{x^2_{\sigma_1(i)}\}_{\mathbb{N}}$ ottenendo la funzione $\sigma_{1,2}$ e così via, sulla coordinata $m+1$-esima procederemo sulla successione $\{x^{m+1}_{\sigma_{1,...,m}(i)}\}_{\mathbb{N}}$. Arriveremo alla sottosuccessione $\{(x^1, ..., x^n)_{\sigma_{1,...,n}(i)}\}_{\mathbb{N}}$ in cui tutte le coordinate convergono a una qualche $\hat{x}^j \in \mathbb{R}$.

□

Osservazione 2.3.1

Nella dimostrazione precedente, quello che stiamo facendo è definire implicitamente una catena di funzioni iniettive

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma_1} \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma_2} \dots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \mathbb{N} \xrightarrow{\sigma_n} \mathbb{N}$$

Ottenendo esplicitamente la loro composizione $\sigma_{1,\dots,n} = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1$

2.4 Teorema di Heine-Borel

Teorema 2.4.1

Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ è (sequenzialmente) compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione

Consideriamo entrambe le implicazioni.

1. Assumiamo che K sia compatto .
   (a) Supponiamo che K sia illimitato. Allora esiste una successione $\{x_i\}_\mathbb{N}$ tale che per ogni i si abbia $||x_i|| \geq i$, ma questa non ammetterebbe sottosuccessioni convergenti, dunque K deve essere limitato.
   (b) Prendiamo una successione $\{x_i\}_\mathbb{N}$ convergente a $\hat{x}$. Allora tutte le sue sottosuccessioni devono convergere a $\hat{x}$, ma dato che K è compatto, $\hat{x}$ deve appartenere a K
2. Assumiamo che K sia chiuso e limitato. In quanto limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass ogni successione contenuta in K deve avere una sottosuccessione convergente, e in quanto chiuso questa deve convergere a un elemento di K.

□

2.5 Condizione di Cauchy

Teorema 2.5.1

Una successione in $\mathbb{R}^n$ è convergente se e solo se è di Cauchy.

Dimostrazione

Consideriamo entrambe le implicazioni.

1. Assumiamo che una successione $\{x_i\}_\mathbb{N}$ sia convergente a $\hat{x}$. Allora per ogni $\varepsilon/2 > 0$ esiste $N > 0$ tale che per ogni $i, j > N$, si abbia $d(x_i, x_j) \leq d(x_i, \hat{x}) + d(\hat{x}, x_j) < \varepsilon$, ovvero è di Cauchy.
2. Assumiamo che una successione $\{x_i\}_\mathbb{N}$ sia di Cauchy.
   (a) Dimostriamo che è limitata. Noi abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che per ogni $i, j > N$ si abbia $d(x_i, x_j) < \varepsilon$. Poniamo $\varepsilon = 1$ e abbiamo $d(0, x_i) \leq d(x_i, x_N) + d(0, x_N) < 1 + d(0, x_N) \leq 1 + M$ con $M = \max\{d(0, x_0), \dots, d(0, x_N)\}$.
   (b) In quanto limitata, per il teorema di cui Bolzano-Weierstrass essa ammette sottosuccessioni convergenti a qualche insieme di $\hat{x}$. Supponiamo che una sottosuccessione $\{x_{\sigma(i)}\}_\mathbb{N}$ converga a $\hat{x}$.
   Applicando le definizioni di successione di Cauchy e successione convergente abbiamo che per ogni $\varepsilon/2 > 0$ esiste $N > 0$ tale che per ogni $i > N$ si abbia $d(\hat{x}, x_i) \leq d(\hat{x}, x_{\sigma(i)}) + d(x_{\sigma(i)}, x_i) < \varepsilon$ e quindi tutta la successione converge a $\hat{x}$.

□

2.6 Definizione e caratterizzazione di Continuità nello spazio euclideo

Teorema 2.6.1

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua se e solo se la controimmagine di ogni aperto (chiuso) è un aperto (chiuso).

Dimostrazione

Valutiamo entrambe le implicazioni.

1. Sia f continua, ovvero in ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ (con $y = f(x)$) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(y)$, ovvero che per ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ passando alle controimmagini abbiamo $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y))$. Dunque abbiamo dimostrato che una pallina in entrata è sempre contenuta nella controimmagine di una pallina in arrivo, ovvero le controimmagini delle palline in arrivo sono aperti; dato che le palline sono una base della topologia euclidea e la controimmagine commuta con l'unione, abbiamo la tesi.

2. Assumiamo che la controimmmagine di ogni aperto sia un aperto e scegliamo un aperto non vuoto A. Abbiamo che per ogni $y = f(x)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y))$, che passando alle immagini porta alla tesi.

$\square$

2.7 Esistenza degli zeri su connessi per archi

Teorema 2.7.1

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ connesso per archi e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^0(A)$.
Se esistono $x, y \in A$ tali che $f(x)f(y) < 0$, allora esiste $z \in A$ tale che $f(z) = 0$.
In particolare, per ogni $x, y \in A$ con $x \leq y$, si ha che $[f(x), f(y)] \subset f(A)$.

Dimostrazione

Sia $\gamma : [0,1] \to A$ un arco contenuto in A tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.
Allora la funzione $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue su un intervallo, dunque esiste almeno un $t \in [0,1]$ tale che $z = \gamma(t)$ sia uno zero per f.
Per dimostrare il corollario, ovvero dei valori intermedi, per qualsiasi $k \in [f(x), f(y)]$ consideriamo la funzione $f - k$.

$\square$

2.8 Teorema di Weierstrass

Teorema 2.8.1

- Forma debole: sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^0(K)$.
  Allora esistono minimo m e massimo M di f su K e in particolare se K è connesso per archi, $f(K) = [m, M]$.

- Forma forte: sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : K \to \mathbb{R}^m$ una funzione $\mathcal{C}^0(K)$
  Allora $f(K)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^m$.

La forma forte implica la forma debole nel caso $n = 1$.

Dimostrazione

Dimostriamo la forma debole dimostrando la limitatezza superiore e l'esistenza del massimo per f, l'esistenza del minimo seguirà dall'applicazione a $-f$.
Supponiamo che $f(K)$ non sia limitato superiormente. Dunque deve esistere una successione $\{x_i\}_\mathbb{N}$ tale che per ogni $i \in \mathbb{N}$ si abbia $f(x_i) > i$ che per via della compattezza di K deve contenere una sottosuccessione con la stessa proprietà che converga a $\hat{x}$. Ma allora per ogni $i \in \mathbb{N}$ si avrebbe $f(\hat{x}) > i$, perciò $\hat{x} \notin K$, assurdo, dunque f è limitata superiormente.
Sia allora M il minimo maggiorante di f. Per ogni $i \in \mathbb{N}$, sia $M_i = M - 2^{-i}$ e definiamo una successione $\{x_i\}_\mathbb{N}$ in K tale che $f(x_i) = M_i$. In quanto successione in K ammette una sottosuccessione convergente a $\hat{x}$ e per continuità di f abbiamo $f(x_{\sigma(i)}) \to f(\hat{x})$ dove $f(\hat{x}) = \lim_{i \to +\infty} M_i = M$, dunque M è il massimo di f su K.
Per il teorema precedente, se K è connesso per archi, f contiene tutti i valori intermedi tra m (il suo minimo) e M, dunque $f(K) = [m, M]$.

$\square$

Dimostrazione

Dimostriamo ora la forma forte.
Sia $\{y_i\}_{\mathbb{N}} \subset f(K)$ una successione di punti immagine. Allora a questa è associata una successione di fibre $\{f^{-1}(y_i)_{\mathbb{N}}\} \subset \mathcal{P}(K)$.
Usando l'assioma della scelta, per ogni $f^{-1}(y_i)$ possiamo scegliere un x_i tale che $f(x_i) = y_i$ e dunque possiamo considerare la successione $\{x_i\}_{\mathbb{N}} \subset K$. In quanto successione in un compatto, ammette una sottosuccessione $\{x_{\sigma(i)}\}_{\mathbb{N}} \to \hat{x} \in K$, e dunque per continuità di f allora anche $\{f(x_{\sigma(i)})\}_{\mathbb{N}} = \{y_{\sigma(i)}\}_{\mathbb{N}} \to \hat{y} = f(\hat{x})$.
Ponendo $m = 1$ abbiamo che l'immagine di f deve essere chiusa e limitata, dunque un'unione di intervalli chiusi, pertanto ha un massimo b e un minimo a.
Se K è connesso per archi, per il teorema dei valori intermedi abbiamo $f(K) = [a, b]$.

□

2.9 Teorema di Heine Cantor

Teorema 2.9.1

Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}^m$ una funzione $\mathcal{C}^0(K)$.
f è uniformemente continua su K.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua, ovvero che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esista una coppia di punti $x_\delta, y_\delta \in K$ tale che $||y_\delta - x_\delta|| < \delta$ ma $||f(y_\delta) - f(x_\delta)|| \geq \varepsilon$, ovvero che la differenza delle loro f non tenda mai a 0.
Definiamo $\{\delta_i\}_{\mathbb{N}} = 2^{-i}$ e consideriamo le successioni $\{x_{\delta_i}\}_{\mathbb{N}}$ e $\{y_{\delta_i}\}_{\mathbb{N}}$. Abbiamo che $||y_{\delta_i} - x_{\delta_i}|| < \delta_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, dunque deve tendere a 0, ma quindi devono ammettere due sottosuccessioni (determinate da una sottosuccessione $\{\delta_{\sigma(i)}\}_{\mathbb{N}}$) che tendano allo stesso limite $\hat{x} \in K$.
Per la continuità di f, abbiamo che $||f(y_{\delta_{\sigma(i)}}) - f(x_{\delta_{\sigma(i)}})||$ deve tendere a 0, assurdo per ipotesi, dunque segue la tesi.

□

2.10 Derivabilità e continuità delle funzioni differenziabili

Teorema 2.10.1

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $x_0 \in A$.
Allora:

1. f è continua in x_0.
2. È derivabile lungo ogni direzione e vale $d(x_0) = \nabla f(x_0)$
3. Se $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ vale $D_v f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$.

Dimostrazione

Supponiamo che f sia differenziabile in $x_0 = 0$, che $f(0) = 0$ e sia $d := d(0)$. Abbiamo che $f(h) = \langle d, h \rangle + o(||h||)$.

1. Per Cauchy-Schwarz abbiamo $\langle d, h \rangle \to 0$ quando $h \to 0$, dunque f è continua in 0.
2. Sia $d = (d_1, ..., d_n)$ e $h_i = te_i$ con $t > 0$. Abbiamo per definizione $f(h_i) = \langle d, te_i \rangle + o(t) = td_i + o(t)$, dunque f è derivabile lungo e_i e $d_i = \partial_i f$. Dato che vale per ogni i, abbiamo $d = \nabla f$.
3. Sia $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ con $v = (v_1, ..., v_n)$ e sia $t > 0$. Per linearità abbiamo $f(tv) = \langle d, tv \rangle + o(t) = t \sum_i \sum_j d_i v_j \delta_{i,j} + o(t)$ che come visto sopra è $t \sum_i \sum_j \partial_i f \cdot v_j \delta_{i,j} + o(t) = t \sum_i \partial_i f \cdot v_i + o(t) = t \langle \nabla f, v \rangle + o(t)$, dunque $\partial_v f = \langle \nabla f, v \rangle$.

□

2.11 Teorema del differenziale totale

Teorema 2.11.1

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Se f è $\mathcal{C}^1(U_{x_0})$, allora f è differenziabile in x_0.

Dimostrazione

Dimostriamo il caso $n = 2$.
Possiamo supporre che $x_0 = 0$ e $f(0) = 0$ e sia $v = (h, k)$. Abbiamo $f(v) = f(h, k) = f(h, k) - f(0, k) + f(0, k) - f(0) = \heartsuit$, che applicando il teorema di Lagrange ci dice che esistono ξ, ζ tali che $\heartsuit = f_x(\xi, k)h + f_y(0, \zeta)k$.
Ora possiamo dire

$$0 \leq \left| \frac{f(v) - \langle \nabla f(0), v \rangle}{||v||} \right| = \left| \frac{f_x(\xi, k)h + f_y(0, \zeta)k - f_x(0)h - f_y(0)k}{||v||} \right|$$

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$\leq \frac{h}{||v||}|f_x(\xi, k) - f_x(0)| + \frac{k}{||v||}|f_y(0, \zeta) - f_y(0)| \leq |f_x(\xi, k) - f_x(0)| + |f_y(0, \zeta) - f_y(0)|$$

Mandiamo $v \to 0$ e per la continuità delle derivate quest'ultimo termine va a 0, dunque f è differenziabile.

$\square$

Osservazione 2.11.1

Le implicazioni vanno così

$$f \in \mathcal{C}^1 \Leftrightarrow f, f_x, f_y \in \mathcal{C}^0 \Rightarrow \forall x \exists a_x : f(x + v) = f(x) + \langle a_x, v \rangle + o(||v||) \Rightarrow a_x = \nabla f(x)$$

2.12 Derivazione delle funzioni composte

Teorema 2.12.1

Siano $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ e $f : \gamma([0, 1]) \to \mathbb{R}$ due funzioni $\mathcal{C}^1$ sui punti interni dei rispettivi domini.
Si ha $(f \circ \gamma)' = \langle (\nabla f) \circ \gamma, \gamma' \rangle$.

Dimostrazione

Sia $t \in]0, 1[$, un $h > 0$ tale che $t + h \in]0, 1[$ e sia $\Delta_h \gamma(t) := \gamma(t + h) - \gamma(t)$.
In quanto γ è $\mathcal{C}^1$, abbiamo $\Delta_h \gamma(t) = \gamma'(t)h + m(h)h$, dove $m(h)$ è una funzione infinitesima per $h \to 0$.
Sia $x \in A$, un $k \in \mathbb{R}^n$ tale che $x + k \in A$ e sia $\Delta_k f(x) := f(x + k) - f(x)$.
In quanto f è $\mathcal{C}^1$ abbiamo $\Delta_k f(x) = \langle \nabla f(x), k \rangle + M(k)||k||$, dove $M(k)$ è una funzione infinitesima per $k \to 0$.
Prendiamo $x = \gamma(t)$ e $k = \Delta_h \gamma(t)$ e abbiamo $(\Delta_k f)(\gamma(t)) = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \Delta_h \gamma(t) \rangle + M(\Delta_h \gamma(t))||\Delta_h \gamma(t)||$.
Ponendo $\Delta_h (f \circ \gamma)(t) := (\Delta_k f)(\gamma(t))$ e facendo qualche sostituzione otteniamo:

$$\Delta_h (f \circ \gamma)(t) = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t)h + m(h)h \rangle + M(\gamma'(t)h + m(h)h)||\gamma'(t)h + m(h)h||$$

Dividiamo tutto per h e arriviamo a

$$\frac{\Delta_h (f \circ \gamma)(t)}{h} = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t) + m(h) \rangle + M(\gamma'(t)h + m(h)h)||\gamma'(t) + m(h)||$$

E dunque mandando $h \to 0$ otteniamo

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$\square$

2.13 Teorema di Lagrange Super Saiyan

Teorema 2.13.1

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1(A)$ e siano $x, y \in A$ tali che $[x, y] \subset A$.
Allora esiste $z \in [x, y]$ tale che $\langle \nabla f(z), y - x \rangle = f(y) - f(x)$.

Dimostrazione

Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ la combinazione convessa $t \mapsto ty + (1 - t)x$ e consideriamo $f \circ \gamma$.
Questa soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange, dunque esiste $l \in [0, 1]$ tale che $(f \circ \gamma)'(l) = (f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) = f(y) - f(x)$.
Ponendo $z = \gamma(l)$, per le regole di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \langle (\nabla f) \circ \gamma, \gamma' \rangle \xrightarrow{\varphi_l} \langle \nabla f(z), y - x \rangle$$

Segue la tesi.

□

2.14 Teorema di Fermat Super Saiyan

Teorema 2.14.1

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1(A)$.
Se $x_0 \in A$ è un punto di massimo o minimo per f, si ha $\nabla f(x_0) = 0$.

Dimostrazione

Assumiamo che x_0 sia un punto di massimo (la dimostrazione del minimo è analoga) e consideriamo per $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ la funzione $f_v : t \mapsto f(x_0 + tv)$.
Abbiamo che $t = 0$ deve essere un punto di massimo per f_v, dunque dobbiamo avere:

$$\frac{df_v}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0$$

Dato che questo deve verificarsi per ogni v, abbiamo $\nabla f(x_0) = 0$.

□

2.15 Condizioni sufficienti per estremi locali

Teorema 2.15.1

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $f \in \mathcal{C}^2(A)$ e sia x_0 un suo punto critico.
Se Q_{f,x_0} è definita positiva (negativa), allora x_0 è un punto di massimo (minimo) locale.
Se Q_{f,x_0} è indefinita, allora x_0 è un punto di sella.
Se Q_{f,x_0} è semidefinita, non possiamo dire nulla a priori sulla natura di x_0.

Dimostrazione

Possiamo supporre $x_0 = 0$ e $f(0) = 0$ senza perdita di generalità.
Dato che 0 è un punto critico, abbiamo $\nabla f(0) = 0$ e f è approssimata in un intorno di 0 da $Q_{f,0}(x) + o(||x||^2)$.
Se $Q_{f,0}$ è definita positiva (negativa), in un intorno di 0 la f è strettamente maggiore (minore) di 0, dunque è un massimo (minimo) locale.
Se $Q_{f,0}$ è indefinita, in un intorno di 0 abbiamo sia punti in cui $f > 0$ e altri in cui $f < 0$, dunque è un punto di sella.
Se è semidefinita invece non possiamo dire nulla a priori.

□

2.16 Teorema del Dini in due variabili

Teorema 2.16.1

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^n(A)$ con $n > 1$ e sia $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ tale che $f(P_0) = 0$. Se $f_y(P_0) \neq 0$ in un intorno di y_0, esiste un'unica funzione $\varphi : V_{x_0} \to V_{y_0}$ di classe $\mathcal{C}^n(V_{x_0})$ tale che in un intorno $V = V_{x_0} \times V_{y_0}$ di P_0 si abbia $f(x, \varphi(x)) = 0$ e si abbia:

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$

Dimostrazione

Supponiamo $f \in \mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ e possiamo supporre $P_0 = (0, 0)$ e $f_y(0, 0) > 0$ senza perdita di generalità.

- Esistenza, unicità e continuità.
  Dato che f è almeno $\mathcal{C}^1$ e dunque f_y è almeno $\mathcal{C}^0$, per la permanenza del segno esistono $a, b > 0$ tali che per ogni $x \in [-a, a]$ e $y \in [-b, b]$ si abbia $f_y(x, y) > 0$ e in particolare che $f|_x : y \mapsto z = f(x, y)$ sia minore di 0 in $-b$ e maggiore di 0 in b, in quanto (per permanenza del segno) abbiamo che ogni $f|_x$ ha uno zero. In quanto $f|_x : [-b, b] \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente per quanto scritto sopra e continua, è invertibile, dunque ammette un'unica inversa (continua, dato che $f|_x$ è invertibile su un compatto) $f|_x^{-1} : z \mapsto y$, dunque definiamo $\varphi : x \mapsto f|_x^{-1}(0)$.
  In quanto la mappa $x \mapsto f_x(y)$ è continua su $[-a, a]$ per ogni $y \in [-b, b]$, abbiamo che φ è anch'essa continua.

- Formula della derivata e differenziabilità.
  Abbiamo ottenuto che per ogni $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$ si abbia $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. Fissiamo un $x \in [-a, a]$ e prendiamo h con $0 < h < |a - x|$, dunque abbiamo $0 = f(x + h, \varphi(x + h)) - f(x, \varphi(x))$.
  Per la differenziabilità di f abbiamo che la sua variazione è uguale a (dove $w(h)$ è una funzione infinitesima per $h \to 0$)

  $$0 = \langle (\nabla f)(x, \varphi(x)), (h, \varphi(x+h) - \varphi(x)) \rangle + w(h)h = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot (\varphi(x+h) - \varphi(x)) + w(h)h$$

  con un po' di algebra otteniamo

  $$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{f_x(x, \varphi(x)) + w(h)}{f_y(x, \varphi(x))}$$

  E mandando $h \to 0$ otteniamo

  $$\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y}(x, \varphi(x))$$

  Dato che f è $\mathcal{C}^k$, le sue derivate prime sono $\mathcal{C}^{k-1}$, dunque φ' è un multiplo scalare di un rapporto di funzioni $\mathcal{C}^{k-1}$ con denominatore non nullo per ipotesi, ovvero è $\mathcal{C}^{k-1}$ e quindi φ è $\mathcal{C}^k$.

$\square$