Domande Pagani FFM2

Filippo Troncana

A.A. 2024/2025

1 Classificazione delle PDE quasilineari del secondo ordine

Fissato $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, si dice ***equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine quasilineare*** con incognita $u \in \mathcal{C}^2(U)$ un'espressione della forma

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d$$

dove a, b, c, d sono funzioni della forma $f(x, y, u, u_x, u_y)$. Consideriamo una curva regolare $\gamma : I \to U$ con $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ e, con l'abuso di notazione $f|_\gamma := f \circ \gamma$, i dati iniziali

$$u|_\gamma = h(s), \quad u_x|_\gamma = \phi(x), \quad u_y|_\gamma = \psi(x)$$

Con h, ϕ, ψ funzioni date. Queste devono rispettare certi vincoli, infatti applicando la regola della catena otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}u|_\gamma}{\mathrm{d}s} = u_x|_\gamma \cdot x' + u_y|_\gamma \cdot y' \Leftrightarrow h' = \phi \cdot x' + \psi \cdot y'$$

Assumendo che una soluzione u esista e tutto sia sufficientemente regolare, consideriamo le sue derivate seconde

$$\frac{\mathrm{d}u_x|_\gamma}{\mathrm{d}s} = u_{xx}|_\gamma x' + u_{xy}|_\gamma y' = \phi', \quad \frac{\mathrm{d}u_y|_\gamma}{\mathrm{d}s} = u_{yx}|_\gamma x' + u_{yy}|_\gamma y' = \psi'$$

Quindi ricordando l'equazione iniziale, gli assunti di regolarità e componendo con γ otteniamo

$$a|_\gamma u_{xx}|_\gamma + 2b|_\gamma u_{xy}|_\gamma + c|_\gamma u_{yy}|_\gamma = d|_\gamma$$

Otteniamo un sistema lineare nelle derivate seconde di u:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a|_\gamma & 2b|_\gamma & c|_\gamma \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{xx}|_\gamma \\ u_{xy}|_\gamma \\ u_{yy}|_\gamma \end{pmatrix}}_{u''} = \underbrace{\begin{pmatrix} d|_\gamma \\ \phi' \\ \psi' \end{pmatrix}}_{k}$$

Denotando con $\Delta(s) := \det A(s)$ otteniamo tre casi:

- $\Delta \neq 0$ su tutta la curva, ovvero esiste ed è unico $u''(s)$ che soddisfa l'equazione.
- $\Delta = 0$ su tutta la curva ***in generale*** non ci dà una soluzione, ma solamente se $\mathrm{rk}(A|k) = \mathrm{rk}(A)$, che comunque non ci garantisce l'unicità; in particolare, calcolando esplicitamente il determinante, vediamo che equivale a dire:

  $$a|_\gamma \cdot (y')^2 - 2b|_\gamma \cdot x' \cdot y' + c|_\gamma \cdot (x')^2 = 0$$

  E in questo caso si dice che la curva γ è una ***curva caratteristica***. In particolare, rinominando la variabile s in t e assumendo che $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$ ottengo

  $$a|_\gamma \cdot (f')^2 - 2b|_\gamma \cdot f' + c|_\gamma = 0 \Rightarrow f' = \frac{2b|_\gamma \pm \sqrt{(2b|_\gamma)^2 - 4a|_\gamma \cdot c|_\gamma}}{2a|_\gamma}$$

  Questa condizione ci divide in tre casi:

  - $(2b|_\gamma)^2 - 4a|_\gamma \cdot c|_\gamma > 0$, detto ***iperbolico***, dove ho due derivate distinte e dunque due famiglie di curve caratteristiche.
  - $(2b|_\gamma)^2 - 4a|_\gamma \cdot c|_\gamma = 0$, detto ***parabolico***, in cui ho una sola famiglia di derivate e dunque di curve caratteristiche.
  - $(2b|_\gamma)^2 - 4a|_\gamma \cdot c|_\gamma > 0$, detto ***ellittico***, in cui non ho curve caratteristiche
- Negli altri casi coi nostri strumenti non abbiamo considerazioni interessanti dal punto di vista fisico.

2 Superfici caratteristiche per PDC e teorema di Cauchy–Kovalevskaja

Assumendo che la curva caratteristica γ della nostra equazione sia della forma $(t, f(t))$ (o simmetricamente della forma $(f(t), t)$), proviamo a descrivere γ come luogo di zeri di una funzione $F(x, y)$. Sappiamo che

$$a|_\gamma (f')^2 - 2b|_\gamma f' + c|_\gamma = 0$$

Supponendo che $F(t, f(t)) = 0$ posso derivare totalmente e ottengo:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = F_x \cdot 1 + F_y f' \Rightarrow f' = -\frac{F_x}{F_y}$$

E dunque la condizione di cui sopra diventa (moltiplicando per $(F_y)^2$ per eliminare i denominatori)

$$a|_\gamma (F_x)^2 + 2b|_\gamma F_x F_y + c|_\gamma (F_y)^2 = 0$$

Questa condizione vale per le curve, ma in realtà si generalizza abbastanza facilmente a quello delle (iper)superfici in $\mathbb{R}^{n+1}$ grazie al teorema di invertibilità locale. Generalizziamo la nostra equazione ad una scrittura della forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,k} u_{i,j} = d$$

Dove $a^{i,k}$ e d sono funzioni in $(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_n)$; posta $F(x_1, ..., x_n)$ la funzione di cui ipotizziamo l'esistenza, otteniamo la condizione

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,k} F_i F_j = 0$$

E da questa una "trasmissione di regolarità" analoga a quanto visto per le curve.

Teorema 2.1: Teorema di Cauchy–Kovalevskaja

Data una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ regolare, a, b, c e d funzioni analitiche nelle variabili x, y, u_x, u_y e dati $u|_\gamma, u_x|_\gamma$ e $u_y|_\gamma$ analitici, esiste ed è unica in un intorno del supporto di γ una soluzione analitica u dell'equazione:

$$a \cdot \cdot u_{xx} + 2b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} = d$$