# Calcolo delle Variazioni

Filippo $\mathcal{L}$ Troncana
dalle lezioni del prof. Marco Bonacini dell'omonimo corso per il corso di laurea in Matematica

A.A. 2024/2025

# Indice

# Introduzione

Il calcolo delle variazioni è quella branca della matematica che affronta il problema di trovare in una data famiglia (di funzioni, superfici, curve...) l'oggetto o gli oggetti che minimizzano una certa grandezza ad essi associata, ad esempio il problema della brachistocrona è uno degli esempi più classici

## Esempi introduttivi

### Metodi classici: funzioni reali

Supponiamo di avere una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ della quale vogliamo trovare i punti di minimo. Se la nostra funzione è differenziabile su $]a, b[$ possiamo usare il teorema di Fermat che ci dà una condizione **necessaria ma non sufficiente** affinchè un punto $x_0 \in ]a, b[$ sia un punto di massimo, ovvero $f'(x_0) = 0$.
Se la nostra funzione è doppiamente differenziabile, possiamo ottenere un'altra condizione necessaria, ovvero che $f'(x_0) = 0$ e che $f''(x_0) \geq 0$; inoltre sempre lavorando sulla derivata seconda otteniamo quella che è una condizione **sufficiente ma non necessaria**, ovvero che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$.
Scartando l'ipotesi di doppia derivabilità, possiamo sostituirla con l'ipotesi di convessità, rendendo $f'(x_0) = 0$ una condizione sufficiente per la minimalità di $x_0$.
I metodi classici (o indiretti) si basano sulla generalizzazione di questo approccio a spazi di funzioni, come vediamo ora.

### Metodi classici: integrale di Dirichlet

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto a chiusura compatta con frontiera $\partial\Omega$ regolare e sia $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo il nostro spazio $X$ e il nostro funzionale $F : X \to \mathbb{R}$ come:

$$X = \left\{u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = g\right\}, \qquad F(u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n, \qquad \text{inoltre assumiamo che esista } u_0 = \arg\min_{u\in X} F(u).$$

Analogamente a quanto visto per le funzioni reali, quali condizioni necessarie o sufficienti possiamo identificare per il nostro punto di minimo $u_0$? Ragionando sull'approccio del teorema di Fermat, possiamo formulare la condizione al primo ordine della nostra funzione reale come

$$0 = f'(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

Consideriamo lo spazio $\mathcal{C}^1_c(\Omega)$ delle funzioni differenziabili a supporto compatto contenuto in $\Omega$ e per una $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$ definiamo la funzione $u_t := u_0 + t\varphi$, che appartiene a $X$ per ogni $t \in \mathbb{R}$[1]. Usiamo la nostra $\varphi$ a mo' di "vettore della base canonica" come facevamo in $\mathbb{R}^n$:

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{F(u_t) - F(u_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left( \int_\Omega \|\nabla u_t\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n - \int_\Omega \|\nabla u_0\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right)$$

Sviluppando i quadrati e usando la linearità dell'integrale otteniamo

$$\frac{1}{t} \left( \int_\Omega \|\nabla u_t\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n - \int_\Omega \|\nabla u_0\|^2 \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \right) = \int_\Omega \cancel{\frac{\|\nabla u_0\|^2}{t}} + \frac{2\cancel{t}\nabla u_0 \cdot \nabla\varphi}{\cancel{t}} + \frac{t^{\cancel{2}}\|\nabla\varphi\|^2}{\cancel{t}} - \cancel{\frac{\|\nabla u_0\|^2}{t}} \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \xrightarrow{t\to 0} 2\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n.$$

Battezziamo questa quantità che abbiamo trovato ***variazione prima di $F$ rispetto a $\varphi$ in*** $u_0$ e la indichiamo con $\delta F(u_0, \varphi)$, sarà analoga alla nostra derivata direzionale; inoltre, se avessimo qualche ragione di assumere che $u_0$ sia anche $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ potremmo usare il teorema della divergenza per scrivere anche

$$0 = \delta F(u_0, \varphi) = \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n + \cancel{\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\nu} \, \mathrm{d}S} = 0$$

Sfruttando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni otteniamo che

$$\int_\Omega (-\Delta u_0)\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = 0 \;\forall\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega) \Leftrightarrow -\Delta u_0 = 0$$

Perbacco! Assumendo che il nostro punto di minimo esista, abbiamo ottenuto che questo deve soddisfare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Ci sono due criticità tuttavia: abbiamo assunto tante cose belle sulla nostra $u_0$ (in primo luogo, che questa esista) e siamo arrivati a scrivere una PDE, oggetti che in generale non sono di facilissima trattazione e figuriamoci risoluzione. Per questo nel ventesimo secolo si sono sviluppati i cosiddetti metodi diretti.

[1]Banalmente, in quanto $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$

**Metodi diretti: teorema di Weierstrass**

Tornando all'esempio della nostra funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, potremmo ricordarci che abbiamo un teorema che ci garantisce l'esistenza del minimo assumendo semplicemente la continuità di $f$, ovvero il teorema di Weierstrass, la cui dimostrazione si riassume in questi step:

1. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante, ovvero tale che $f(x_n) \to \inf_{[a,b]} f$
2. L'intervallo $[a, b]$ è compatto, dunque esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge a $\hat{x} \in [a, b]$.
3. Dato che $f$ è continua, $f(\hat{x}) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$.

Notiamo che sarebbe bastata la semicontinuità inferiore di $f$, e che questo approccio dipende dalla topologia di $[a, b]$: i metodi diretti si basano proprio su questo, ovvero su una forma più generale del teorema di Weierstrass (sostituendo $[a, b]$ con uno spazio topologico sequenzialmente compatto) e scegliendo sulla nostra famiglia di oggetti la topologia adeguata.
Chiaramente abbiamo un piccolo trade-off: se la nostra topologia è molto fine (= tanti aperti), è facile dimostrare la continuità del nostro funzionale ma è difficile avere la compattezza della nostra famiglia; al contrario, con topologie meno fini abbiamo una compattezza più semplice da dimostrare ma una continuità più difficile, per questo è utile ridurre le ipotesi (ad esempio con la semicontinuità inferiore invece della continuità).

**Esercizio 0.0.1: Dimostrare che esiste una successione minimizzante**

Sia $X$ un insieme non vuoto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione.
Esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ tale che $f(x_n) \to \inf_X f$.

**Dimostrazione**

Sia $y_0 \in f(X)$. Se $y_0 = \inf_X f$, prendiamo una qualsiasi successione in $f^{-1}(y_0)$; altrimenti, e per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ prendiamo[a] $y_{n+1} \in f(X) \cap ]-\infty, y_n[$, fermandoci se dovessimo arrivare a $\inf_X f$.
Per ogni $y_n$ scegliamo[b] $x_n \in f^{-1}(y_n)$ e abbiamo ottenuto la nostra successione minimizzante.

[a] Probabilmente c'è un modo per aggirare l'utilizzo di scelta dipendente ma non ho davvero voglia di pensarci.
[b] Idem ma con scelta numerabile.

# Parte I

# Metodi classici

**Teorema 0.0.1: Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni**

# Parte II

# Metodi diretti