Categories for the Learning Mathematician

Filippo $\mathcal{L}$. Troncana

A.A. 2025/2026

Capitolo 1

Elementi di Teoria delle Categorie

Fondamenti

Trattando strutture molto "grandi" in un senso che renderemo preciso in seguito, per fondare propriamente la Teoria delle Categorie è necessario estendere la Teoria degli Insiemi di Zermelo-Fraenkel più l'assioma della scelta, che assumeremo sempre[1]. L'approccio che seguiremo è un approccio che in qualche modo "limiti" la grandezza delle nostre strutture, supponendo l'esistenza di un insieme "universo" che si sostituisca alla classe di tutti gli insiemi.

Definizione 1.1: Universo di Grothendieck

Sia $\mathcal{G}$ un insieme non vuoto. Questo si dice ***universo di Grothendieck*** se:

- Se $x \in y$ e $y \in \mathcal{G}$ allora $x \in \mathcal{G}$, ovvero $\mathcal{G}$ è un insieme ***transitivo***.
- Se $x, y \in \mathcal{G}$ allora $\{x, y\} \in \mathcal{G}$.
- Se $x \in \mathcal{G}$ allora $2^x \in \mathcal{G}$.
- Se $I \in \mathcal{G}$, per ogni $f : I \to \mathcal{G}$ vale $\bigcup_{i \in I} f(i) \in \mathcal{G}$, ovvero $\mathcal{G}$ è chiuso per unioni indicizzate da un suo elemento.

Si dimostrano immediatamente le seguenti proprietà (si veda [**SGA4**]):

Proposizione 1.1: Proprietà degli universi di Grothendieck più che numerabili

Sia $\mathcal{G}$ un universo di Grothendieck. Allora questo contiene:

- Tutti i sottoinsiemi di ogni suo elemento (in particolare dunque l'insieme vuoto).
- Tutti i singoletti contenenti i suoi elementi.
- Tutti i prodotti, le unioni disgiunte e le intersezioni di famiglie di suoi elementi indicizzate da un suo elemento.
- Tutte le funzioni tra due suoi elementi.
- Tutti i suoi sottoinsiemi la cui cardinalità è un suo elemento.

Da queste proprietà seguono due fatti strettamente correlati, ovvero che un universo di Grothendieck più che numerabile è un ***modello*** per ZFC e che l'esistenza di un universo di Grothendieck più che numerabile è indipendente da ZFC.
Intuitivamente, il seguente assioma ci permette di trattare un universo di Grothendieck come "sostituto" della classe di tutti gli insiemi, sicuri del fatto che questo "limiti" tutta la pratica matematica "usuale".

Assioma 1.1: Assioma di Universo debole

Esiste un universo di Grothendieck più che numerabile $\mathcal{G}$. Tutti gli elementi di $\mathcal{G}$ si dicono ***piccoli***, mentre gli altri insiemi si dicono ***grandi***. I sottoinsiemi di $\mathcal{G}$, piccoli o grandi che siano, si dicono ***moderati***.

In realtà l'assioma 1.1 è[2] più spesso assunto in una sua versione più forte, ovvero:

[1] Potremmo essere tentati di limitare l'assioma della scelta a famiglie piccole o almeno moderate di insiemi (nel senso specificato in 1.2), ma ai fini della nostra trattazione lo assumeremo sempre nella sua forma completa.

[2] Come si potrebbe intuire dal nome

Assioma 1.2: Assioma di Universo

Per ogni insieme x esiste un universo di Grothendieck U tale che $x \in U$

Questo implicherebbe l'esistenza di tutta una gerarchia di universi ciascuno "inaccessibile" (nel senso della Teoria degli Insiemi) da quello precedente, utile per fare Teoria delle Categorie Superiori, ma per una trattazione più elementare è sufficiente assumere l'esistenza di un solo universo, si veda [**MacLane1969**].

1.1 Nozioni fondamentali

Definizione 1.2: Categoria e dualità

Una ***categoria*** $\mathcal{C}$ è una struttura munita di due insiemi: $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ e $\hom\mathcal{C}$, detti rispettivamente ***oggetti*** (o elementi) e ***morfismi*** (o mappe o frecce) tali che

- Ogni morfismo $f \in \hom\mathcal{C}$ abbia associati due oggetti $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ detti rispettivamente ***dominio*** e ***codominio*** di f, che verrà indicato come $f : A \to B$.
- Per ogni coppia di morfismi $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sia definita la loro ***composizione***, ovvero un morfismo $g \circ f : A \to C$ (spesso indicato solo con gf).
- Per ogni oggetto $X \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ esista un morfismo $\mathrm{id}_X \in \hom\mathcal{C}$ detto ***identità*** di X tale che per ogni morfismo $f : A \to B$ valga $\mathrm{id}_B f = f \,\mathrm{id}_A = f$.
- Per ogni terna di morfismi componibili $f, g, h \in \hom\mathcal{C}$, valga $h(gf) = (hg)f =: hgf$, ovvero la composizione sia ***associativa***.

Fissati due oggetti $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ denoteremo con $\hom(A, B)$ o $\mathcal{C}(A, B)$ l'insieme dei morfismi $A \to B$ di $\hom\mathcal{C}$.
Per ogni categoria $\mathcal{C}$ è definita la sua ***duale*** (o opposta) $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, i cui oggetti sono gli stessi di $\mathcal{C}$ e i cui morfismi sono quelli di $\mathcal{C}$ ma invertiti di direzione, ovvero ad ogni $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ corrisponde un $f^{\mathsf{op}} : B \to A$ in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.
Una categoria $\mathcal{C}$ si dice:

- ***Piccola*** se gli insiemi $\hom\mathcal{C}$ e $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ (anche se vedremo sotto che la grandezza del secondo è sempre limitata dal primo) sono insiemi piccoli.
- ***Grande*** se non è piccola.
- ***Localmente piccola*** se, una volta fissati due oggetti $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$, l'insieme $\hom(X, Y)$ è un insieme piccolo.
- ***Finita*** se è piccola e l'insieme dei morfismi è un insieme finito.

Uno degli aspetti più vantaggiosi della Teoria delle Categorie è il ***principio di dualità***,molto informalmente un "paghi uno prendi due": ogni teorema in Teoria delle Categorie ha un equivalente che si dimostra "gratuitamente" passando alla categoria opposta, ne vedremo alcuni esempi.

Osservazione 1.1: Sulle categorie

Banalmente:

- Le identità sono uniche.
- Passando da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ la composizione dei morfimsi viene "ribaltata" a sua volta, infatti $(g \circ f)^{\mathsf{op}} = f^{\mathsf{op}} \circ g^{\mathsf{op}}$; vale inoltre $(\mathcal{C}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} = \mathcal{C}$.
- Dato che $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ inietta sempre in $\hom\mathcal{C}$ con la mappa $X \mapsto \mathrm{id}_X$, in generale l'insieme dei morfismi può essere arbitrariamente più grande di quello degli oggetti, dunque la grandezza di una categoria è in generale indipendente dal suo insieme degli oggetti.

Dimostrazione

Forniamo un esempio dell'ultimo punto, gli altri sono banali. Sia $\mathcal{V}$ la categoria formata da un unico oggetto $\bullet$ e il cui insieme dei morfismi corrisponde all'insieme dei cardinali appartenenti a $\mathcal{G}$, dove la composizione di due morfismi è data dalla loro somma come cardinali. Nonostante $\operatorname{ob}\mathcal{V}$ sia il più piccolo possibile (al di là della categoria vuota), $\hom\mathcal{V}$ è (dimostrabilmente) un insieme grande, dunque $\mathcal{V}$ non solo è grande, ma non è nemmeno localmente piccola.

$\square$

Da ora in avanti, assumeremo sempre (anche senza specificarlo) che le nostre categorie siano almeno localmente piccole per comodità.

Definizione 1.3: Sottocategoria

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie tali che $\operatorname{ob}\mathcal{C} \subset \operatorname{ob}\mathcal{D}$, $\hom\mathcal{C} \subset \hom\mathcal{D}$ e per ogni $f, g, h \in \hom C$ valga

$$h = f \circ_{\mathcal{C}} g = f \circ_{\mathcal{D}} g.$$

Allora $\mathcal{C}$ si dice una ***sottocategoria*** di $\mathcal{D}$.
Se per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \mathcal{C}$ vale $\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{D}(X,Y)$, allora $\mathcal{C}$ si dice ***piena***.

Definizione 1.4: Sapori di morfismi

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $f : A \to B$ un morfismo. Esso può dirsi:

- ***Monomorfismo*** (o monico o mono) se la precomposizione è iniettiva, ovvero per ogni coppia di morfismi postcomponibili $g_1, g_2 : C \to A$ vale $fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.
- ***Epimorfismo*** (o epico o epi) se la postcomposizione è iniettiva, ovvero se per ogni coppia di morfismi precomponibili $g_1, g_2 : B \to C$ vale $g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$.
- ***Endomorfismo*** (o endo) se $A = B$.
- ***Sezione*** (o split mono) se ha un inverso sinistro, ovvero se esiste un morfismo $g : B \to A$ tale che $gf = \mathrm{id}_A$.
- ***Retrazione*** (o split epi) se ha un inverso destro, ovvero se esiste un morfismo $g : B \to A$ tale che $fg = \mathrm{id}_B$.
- ***Isomorfismo*** (o iso) se ha un inverso destro e sinistro. In particolare, A e B si dicono ***isomorfi*** (attraverso f) e li indicheremo con $f : A \cong_{\mathcal{C}} B$ omettendo usualmente f o $\mathcal{C}$.
- ***Automorfismo*** (o auto) se è iso e endo.

Osservazione 1.2: Sui morfismi

Valgono le seguenti:

- Le sezioni sono mono.
- Le retrazioni sono epi.
- Mono ed epi sono concetti duali, allo stesso modo lo sono sezioni e retrazioni.
- iso $\Leftrightarrow$ (split mono $\wedge$ epi) $\Leftrightarrow$ (mono $\wedge$ split epi) $\Rightarrow$ (epi $\wedge$ mono), ma nell'ultimo caso non vale l'implicazione inversa.
- Tutte le inverse sono uniche quando esistono.

Dimostrazione

Forniamo solo due esempi di morfismi che sono epici e monici ma non isomorfismi (le altre verifiche sono assolutamente automatiche):

- Consideriamo in **Haus** (1.1) l'inclusione $\iota : [0,1] \cap \mathbb{Q} \hookrightarrow [0,1]$ (entrambi con la topologia euclidea); questa è chiaramente monica in quanto iniettiva, ed è epica in quanto una funzione continua in **Haus** è completamente determinata dal suo valore su un sottospazio denso, ma non è iso dato che non è suriettiva.
- Consideriamo la categoria

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "1\leq 1"] \arrow[r, "1\leq 2"] & 2 \arrow[loop right, "2\leq 2"] \end{tikzcd}$$

  Dato che a destra o sinistra possiamo comporre solo con l'identità, $1 \leq 2$ è sia monico che epico, ma non è iso in quanto non ha inverso.

$\square$

Definizione 1.5: Oggetti iniziali e finali

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia I un oggetto.
I si dice ***oggetto iniziale*** se per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\iota_X : I \to X$
I si dice ***oggetto finale*** se è l'oggetto iniziale di $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, o equivalentemente se per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\zeta_X : X \to I$.
Se I è sia finale che iniziale, si dice ***oggetto zero***.

Proposizione 1.2: Unicità di oggetti iniziali e finali

Se una categoria $\mathcal{C}$ ammette un oggetto iniziale (o finale o zero), questo è essenzialmente unico.

Introduciamo quello che può essere considerato un morfismo di categorie (e in effetti lo è in Teoria delle Categorie Superiori), ovvero il concetto di funtore. Di fatto la Teoria delle Categorie è nata per studiare i funtori, di cui l'esempio motivante è il gruppo fondamentale in Topologia Algebrica.

Definizione 1.6: Funtore

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un ***funtore covariante*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste in due mappe $F : \operatorname{ob}\mathcal{C} \to \operatorname{ob}\mathcal{D}$ e $F : \hom\mathcal{C} \to \hom\mathcal{D}$ che rispettino la composizione, ovvero:

- Per ogni morfismo $f : X \to Y$ vale $Ff : FX \to FY$.
- Per ogni oggetto $X \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ vale $F\operatorname{id}_X = \operatorname{id}_{FX}$.
- Per ogni coppia di morfismi componibili $f, g \in \hom\mathcal{C}$ vale $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.

Un ***funtore controvariante*** da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ è un funtore covariante $F : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{D}$. Anche se l'espressione "un funtore controvariante $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{D}$" tecnicamente indicherebbe un funtore covariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, la useremo quasi sempre per indicare un funtore controvariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ovvero una controvarianza specificata due volte non farà una covarianza.
Un funtore si dice:

- ***Fedele*** se per ogni $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è iniettiva.
- ***Pieno*** se per ogni $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è suriettiva.
- ***Pienamente fedele*** se è pieno e fedele.
- ***Essenzialmente suriettivo sugli oggetti*** se per ogni oggetto $Y \in \mathcal{D}$ esiste un oggetto $X \in \mathcal{C}$ tale che $FX \cong_{\mathcal{D}} Y$.

Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sono due funtori, la loro composizione $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ è un funtore.

Ora possiamo definire una categoria assolutamente centrale, di fatto la categoria ambiente per tutta la pratica matematica "tradizionale" e che ci permette di definire una certa classe di sue "sottocategorie":

Esempio 1.1: La categoria degli insiemi piccoli e categorie concrete

Indichiamo con **Set** la categoria degli insiemi piccoli, ovvero elementi di $\mathcal{G}$ (1.1), e delle funzioni tra di loro con l'usuale composizione di funzioni insiemistiche.
Una categoria $\mathcal{C}$ si dice ***concreta*** se è munita di un funtore fedele $U : \mathcal{C} \to$ **Set**, detto ***dimenticante***: informalmente, le categorie concrete sono quelle i cui oggetti sono insiemi (piccoli) dotati di una certa struttura e i cui morfismi sono funzioni insiemistiche che rispettano questa struttura. Alcune categorie concrete sono:

- **Top** degli spazi topologici e delle funzioni continue;
- **Haus** degli spazi topologici T_2 e delle funzioni continue tra loro;
- **Mble** degli spazi e delle funzioni misurabili;
- **Meas** degli spazi con misura e delle funzioni misurabili fra loro;
- **Vec**$\mathbb{K}$ dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e delle mappe lineari;
- **NormVec**$\mathbb{K}$ dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali normati e delle mappe lineari e continue

Lemma 1.1: Riflessione di isomorfismi

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore. Se $f : X \cong Y$, allora $Ff : FX \cong FY$.
Se F è pienamente fedele e $g : FX \cong FY$, allora $X \cong Y$.

Dimostrazione

La prima implicazione è banale, dunque assumiamo che F sia pienamente fedele e $g : FX \cong FY$ sia un isomorfismo; dato che la mappa $\varphi := F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è una biezione, esiste $f : X \to Y$ tale che $\varphi(f) = g$, dunque definiamo $f' := \varphi^{-1}(g^{-1})$ e dimostriamo che è un'inversa sinistra (dimostrare che è un'inversa destra è analogo). Dato che F è un funtore, vale

$$f'f = \varphi^{-1}(\varphi(f'f)) = \varphi^{-1}(\varphi(f')\varphi(f)) = \varphi^{-1}(g^{-1}g) = \varphi^{-1}(\mathrm{id}_{FX}) = \mathrm{id}_X$$

$\square$

Adesso faremo una cosa un po' buffa, ovvero definiremo il prodotto di categorie come definiremmo normalmente il prodotto cartesiano di insiemi e più tardi lo useremo per definire il prodotto di oggetti in categorie generali.

Definizione 1.7: Categoria prodotto e bifuntore

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Definiamo la ***categoria prodotto*** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ come la categoria i cui oggetti sono le coppie ordinate di un oggetto di $\mathcal{C}$ e uno di $\mathcal{D}$ e dove

$$\hom((A, B), (C, D)) = \{(f, g) : f \in \mathcal{C}(A, C), g \in \mathcal{D}(B, D)\} = \hom(A, C) \times \hom(B, D).$$

Una categoria prodotto è naturalmente munita di due funtori $P_I : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to I$ con $I = \mathcal{C}, \mathcal{D}$, detti ***proiezioni***, tali che

$$P_{\mathcal{C}}((f, g) : (A, B) \to (C, D)) = (f : A \to C) \quad \text{e} \quad P_{\mathcal{D}}((f, g) : (A, B) \to (C, D)) = (g : B \to D).$$

Un funtore $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ si dice ***bifuntore***.

Perchè "spostiamo" il prodotto cartesiano alle categorie? Perchè spesso quando lavoriamo in qualche categoria ci risulta più agevole una definizione più "intrinseca" di prodotto, oppure abbiamo prodotti diversi: in **Rel**[3] il prodotto "categorico" è dato dall'unione disgiunta, nonostante **Set** sia una sua sottocategoria e in questa il prodotto sia l'usuale prodotto cartesiano.
Abbiamo visto che i morfismi sono trasformazioni tra oggetti, mentre i funtori sono trasformazioni tra morfismi. Introduciamo ora un ulteriore "livello" di frecce, le trasformazioni naturali, ovvero trasformazioni tra funtori.

Definizione 1.8: Trasformazione naturale

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie e siano $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ due funtori.
Una ***trasformazione naturale*** $\Phi : F \Rightarrow G$ è un insieme di morfismi $\{\Phi_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}}$ tali che per ogni $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ Y & F(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Una trasformazione naturale tale per cui tutti i morfismi Φ_X sono isomorfismi si dice ***isomorfismo naturale***.

Definizione 1.9: Equivalenza di categorie

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie e siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ due funtori.
La coppia (F, G) si dice ***equivalenza di categorie*** tra F e G se esistono due isomorfismi naturali

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \cong GF \quad \text{e} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \cong FG.$$

Useremo questa caratterizzazione[4] per le equivalenze di categorie, di cui omettiamo la dimostrazione in quanto più lunga e laboriosa che profonda.

[3] Categoria degli insiemi piccoli e delle relazioni tra loro
[4] Senza assumere l'assioma della scelta in realtà si avrebbe solo un'implicazione

Proposizione 1.3: Caratterizzazione per un'equivalenza di categorie

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore. Questo definisce un'equivalenza di categorie se e solo se è pienamente fedele ed essenzialmente suriettivo sugli oggetti.

Definizione 1.10: Funtori aggiunti

Siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ due funtori. Questi si dicono ***aggiunti*** (rispettivamente sinistro e destro all'altro) se esiste un isomorfismo:

$$\mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$$

Naturale per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $d \in \mathcal{D}$. Scriveremo $F \dashv G$ per indicare che F è aggiunto sinistro a G e che G è aggiunto destro a F.

1.2 Lemma di Yoneda e conseguenze

Un risultato assolutamente centrale in Teoria delle Categorie è il lemma di Yoneda, una versione "categoriale" del teorema di Cayley in Teoria dei Gruppi[5].

Definizione 1.11: Categoria dei funtori

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie.
Definiamo la categoria $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, che spesso denoteremo con $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, la ***categoria dei funtori*** da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, i cui oggetti sono i funtori covarianti e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali con la ***composizione verticale***: definiamo per $\mu : F \to G$ e $\nu : G \to H$ la loro composizione verticale $\nu\mu : F \to H$ col seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "Ff"] \arrow[rr, bend left, "(\nu\mu)_X"] & G(X) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "Gf"] & H(X) \arrow[d, "Hf"] \\
Y & F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[rr, bend right, "(\nu\mu)_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\nu_Y"] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

Se le categorie sono chiare dal contesto, invece di scrivere $[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G)$ o $\hom_{[\mathcal{C},\mathcal{D}]}(F, G)$ scriveremo $\mathrm{Nat}(F, G)$.

Definizione 1.12: hom-funtore covariante e controvariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola[a] e sia A un oggetto di $\mathcal{C}$. Definiamo due funtori $h_A : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ e $h^A : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$, detti hom-***funtori*** (rispettivamente covariante e controvariante) nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd}
\hom(A, X) \arrow[d, "h_A(f) = f\circ -"'] & X \arrow[l, mapsto, "h_A"'] \arrow[r, mapsto, "h^A"] \arrow[d, "f"] & \hom(X, A) \\
\hom(A, Y) & Y \arrow[l, mapsto, "h_A"'] \arrow[r, mapsto, "h^A"] & \hom(Y, A) \arrow[u, "h^A(f) = -\circ f"']
\end{tikzcd}$$

Inoltre possiamo interpretare $\hom(-,-)$ come un bifuntore $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.
Un funtore covariante o controvariante F a valori in $\mathbf{Set}$ si dice ***rappresentabile*** se esiste una ***rappresentazione*** di F, ovvero un oggetto A di $\mathcal{C}$ e un isomorfismo naturale $\Phi : h_A \to F$ nel caso covariante, $\Phi : h^A \to F$ nel caso controvariante.

[a] È vero che abbiamo detto che lo avremmo sempre assunto, ma è importante specificarlo in questo caso.

Teorema 1.1: Lemma di Yoneda covariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e sia $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ un funtore covariante. Allora esiste una biezione di insiemi:

$$\mathrm{Nat}(h_A, F) \cong F(A)$$

[5] E in effetti, il teorema di Cayley può essere ridotto ad un caso particolare del lemma di Yoneda

e questa è naturale in A e F.

Dimostrazione

Diamo uno sketch della dimostrazione, mancano alcuni dettagli come la dimostrazione della naturalità in A e F ma l'importante è lo spirito della cosa.
Sia $\Phi \in \mathrm{Nat}(h_A, F)$. Dato che questa è naturale, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[ddd, "f"] & h_A(A) \arrow[rrr, "\Phi_A"] \arrow[ddd, "h_A(f)"] & & & F(A) \arrow[ddd, "F(f)"] \\
& & \mathrm{id}_A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & u \arrow[d, mapsto] & \\
& & f \circ \mathrm{id}_A = f \arrow[r, mapsto] & (Ff)(u) = \Phi_X(f) & \\
X & h_A(X) \arrow[rrr, "\Phi_X"] & & & F(X)
\end{tikzcd}$$

Vediamo che ci basta specificare l'assegnazione blu per determinare univocamente tutto il resto:

- Partendo da $\Phi \in \mathrm{Nat}(h_A, F)$ ci basta specificare $\Phi \mapsto u := \Phi_A(\mathrm{id}_A)$ elemento di $F(A)$.
- Partendo da $u \in F(A)$ costruiamo la trasformazione naturale Φ definendo per ogni $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ il morfismo $\Phi_X(f : A \to X) := Ff(u)$.

$\square$

Abbiamo dualmente la versione controvariante:

Corollario 1.1: Lemma di Yoneda controvariante

Sia $F : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$ un funtore controvariante. Allora esiste una biezione di insiemi

$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \cong F(A)$$

e questa è naturale in A e F.

Osservazione 1.3: Lemma di Yoneda e grandezza

In generale la biezione dataci da 1.1 non è una biezione tra insiemi piccoli, in quanto gli elementi di $\mathrm{Nat}(h_A, F)$ non sono in generale insiemi piccoli.
Prendiamo ad esempio il funtore identità $\mathbf{Id}$ da Set (ricordiamo la definizione 1.1) in sè stessa: noi abbiamo che $\mathrm{Nat}(h_S, \mathbf{Id})$ è in biezione con S, ma gli elementi di $\mathrm{Nat}(h_S, \mathbf{Id})$ sono indicizzati da $\mathcal{G}$, che non è affatto un insieme piccolo.
Avendo l'assioma 1.1 non incorriamo in problemi di tipo logico o fondativo, ma se non avessimo limitato in questo modo la grandezza delle nostre categorie dovremmo gestire in qualche modo la collezione $\mathrm{Nat}(h_S, \mathbf{Id})$, che per quanto ci sia garantito debba essere "grande quanto" un insieme, sarebbe una collezione di elementi normalmente considerati come classi proprie, ovvero classi che non possono appartenere ad altre classi.

Una delle più naturali applicazioni del lemma di Yoneda è l'embedding di Yoneda, fondamentale in gran parte della topologia e della geometria moderna: esso permette di identificare una categoria $\mathcal{C}$ con una sottocategoria della cosiddetta ***categoria dei prefasci su*** $\mathcal{C}$, che è solo un altro nome per $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$. Ad esempio se interpretiamo la topologia τ di uno spazio (X, τ) come una categoria, dove i morfismi sono dati dall'inclusione insiemistica, questa è completamente determinata dalle classi delle funzioni continue entranti nei (o uscenti dai) suoi aperti.

Teorema 1.2: Embedding di Yoneda covariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Questa è equivalente ad una sottocategoria piena di $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ tramite la mappa $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \to$

$[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ definita da questo diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}(A)(X) = h^A(X) \arrow[rrr, "\mathcal{Y}(f)(X)=f\circ-"] & & & \mathcal{Y}(B)(X) = h^B(X) \\
& (X \xrightarrow{m\circ g} A) \arrow[r, mapsto] & (X \xrightarrow{f\circ m\circ g} B) & \\
& (Y \xrightarrow{m} A) \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & (Y \xrightarrow{f\circ m} B) \arrow[u, mapsto] & \\
\mathcal{Y}(A)(Y) = h^A(Y) \arrow[rrr, "\mathcal{Y}(f)(Y)=f\circ-"] \arrow[uuu, "\mathcal{Y}(A)(g)=-\circ g"] & & & \mathcal{Y}(B)(Y) = h^B(Y) \arrow[uuu, "\mathcal{Y}(B)(g)=-\circ g"']
\end{tikzcd}$$

Dove un oggetto A di $\mathcal{C}$ viene mandato nel funtore $h^A : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$ definito sopra e un morfismo $f : A \to B$ viene mandato nella sua postcomposizione, che è una trasformazione naturale da h^A a h^B come si vede nel diagramma.

Dimostrazione

Applicando il corollario 1.1 con $F = h^B$ scorrendo su $B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ otteniamo

$$\operatorname{Nat}(h^A, h^B) \cong h^B(A), \text{ o equivalentemente, } \operatorname{Nat}(h^A, h^B) \cong \hom(A, B).$$

Vediamo che dunque l'assegnazione $A \mapsto h^A$ definisce un funtore covariante $h^\bullet : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ pienamente fedele (ma non essenzialmente suriettivo sugli oggetti). Restringendo $h^\bullet$ all'immagine di $\mathcal{C}$ in $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$, otteniamo un'equivalenza di categorie (dato che la restrizione all'immagine è tautologicamente suriettiva) per la proposizione 1.3.

$\square$

Abbiamo dualmente la versione controvariante:

Corollario 1.2: Embedding di Yoneda controvariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Allora la sua categoria opposta $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ è equivalente ad una sottocategoria piena di $[\mathcal{C}, \mathsf{Set}]$ tramite la mappa $\mathcal{Y}' : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to [\mathcal{C}, \mathsf{Set}]$ definita da questo diagramma (dove abbiamo morfismi $f : A \to B$ e $g : X \to Y$ di $\mathcal{C}$):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}'(A)(X) = h_A(X) \arrow[ddd, "\mathcal{Y}'(A)(g)=g\circ-"'] & & & \mathcal{Y}'(B)(X) = h_B(X) \arrow[lll, "\mathcal{Y}'(f)(X)=-\circ f"'] \arrow[ddd, "\mathcal{Y}(B)(g)=g\circ-"] \\
& (A \xrightarrow{m\circ f} X) \arrow[d, mapsto] & (B \xrightarrow{m} X) \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \\
& (A \xrightarrow{g\circ m\circ f} Y) & (B \xrightarrow{g\circ m} Y) \arrow[l, mapsto] & \\
\mathcal{Y}'(A)(Y) = h_A(Y) & & & \mathcal{Y}'(B)(Y) = h_B(Y) \arrow[lll, "\mathcal{Y}'(f)(Y)=-\circ f"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Ora grazie al lemma di Yoneda possiamo dimostrare un fatto che ci servirà più tardi:

Lemma 1.2: Essenziale unicità degli aggiunti

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie e siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G_1, G_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtori tali che $F \dashv G_1$ e $F \dashv G_2$ oppure $G_1 \dashv F$ e $G_2 \dashv F$.
Allora $G_1 \cong G_2$.

Dimostrazione

Dimostriamo il caso destro, il caso sinistro segue per dualità; scriviamo le aggiunzioni in termini degli hom-funtori:

$$h^d(Fc) \cong h^{G_1 d}(c) \cong h^{G_2 d}(c)$$

Ottenendo dunque $\mathcal{Y} \circ G_1 \cong \mathcal{Y} \circ G_2$: dal teorema 1.2, ovvero la piena fedeltà dell'embedding di Yoneda, segue la tesi.

□

1.3 Limiti

Uno dei concetti più importanti in Teoria delle Categorie è quello di limite. Per definire il concetto di limite dobbiamo dare la definizione formale di diagramma in una categoria, che generalizza il concetto di famiglia indicizzata in **Set**.

Definizione 1.13: Diagramma commutativo

Siano $\mathcal{J}, \mathcal{C}$ due categorie.
Si dice ***diagramma (commutativo)*** in $\mathcal{C}$ di forma $\mathcal{J}$ un funtore $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$; $\mathcal{J}$ si dice ***forma*** o ***indice*** del diagramma: se $\mathcal{J}$ è finita o piccola, il diagramma F si dirà rispettivamente ***finito*** o ***piccolo***.
La ***categoria dei diagrammi*** in $\mathcal{C}$ di forma $\mathcal{J}$ è la categoria dei funtori $[\mathcal{J}, \mathcal{C}]$.

Se in Teoria degli Insiemi definiamo una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X indicizzata dall'insieme J come un'applicazione $J \to \mathcal{P}(X)$, qui abbiamo bisogno di un'applicazione che rispetti la struttura di categoria, ovvero un funtore: intuitivamente oltre a indicizzare gli oggetti indicizziamo anche i morfismi in modo che la composizione sia rispettata. Per la prossima definizione ci servirà di considerare un diagramma particolare, il diagramma costante $K_N : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ (dove N è un oggetto di $\mathcal{C}$) che manda ogni oggetto di $\mathcal{J}$ in N e ogni morfismo in id_N.

Definizione 1.14: Cono e cocono

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, sia $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramma e sia N un oggetto di $\mathcal{C}$ e sia $K_N : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ il funtore costante, ovvero il funtore

$$K_N(f : X \to Y) = (\mathrm{id}_N : N \to N).$$

Si dice ***cono*** in $\mathcal{C}$ su F con punta N un morfismo $\psi : K_N \to F$ di $[\mathcal{J}, \mathcal{C}]$, ovvero una famiglia di morfismi

$$\{\psi_X : N \to F(X)\}_{X \in \mathrm{ob}\, \mathcal{J}} \subset \hom \mathcal{C}$$

Tali che per ogni morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{J}$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

Dualmente, si dice ***cocono*** su F con punta N un morfismo $\psi : F \to K_N$, o equivalentemente un cono in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.
Definiamo la ***categoria dei coni*** in $\mathcal{C}$ su F come la categoria i cui oggetti sono i coni intesi come coppia $(N, \psi^N : K_N \to F)$ e i cui morfismi sono i cosiddetti morfismi ***medianti***, ovvero i morfismi $\alpha : N \to M$ di $\mathcal{C}$ tali per cui per ogni oggetto X di $\mathcal{J}$ valga:

$$\psi^M_X \circ \alpha = \psi^N_X,$$

Denoteremo questa categoria come $\mathbf{Cone}(\mathcal{C}, F)$.

Ed eccoci pronti a definire i limiti.

Definizione 1.15: Limite e colimite

Sia $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramma.
Si dice ***limite*** (o limite proiettivo) di F in $\mathcal{C}$ l'oggetto terminale di $\mathbf{Cone}(\mathcal{C}, F)$.
Si dice ***colimite*** (o limite induttivo) di F in $\mathcal{C}$ il limite di F in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, o equivalentemente l'oggetto iniziale di $\mathbf{Cone}(\mathcal{C}, F)$.

Indichiamo rispettivamente limiti e colimiti di F in $\mathcal{C}$ come

$$\lim_{\leftarrow} F \quad \text{e} \quad \lim_{\rightarrow} F.$$

Un limite si dice rispettivamente piccolo o finito se lo è F come diagramma.
Una categoria che ammette tutti i (co)limiti piccoli si dice ***(co)completa***.

Più esplicitamente[6], possiamo definire il limite di F in $\mathcal{C}$ come il cono (L, ψ^L) tale che per ogni altro cono (N, ψ^N) esista un unico morfismo $\lambda_N : N \to L$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[d, dashed, "\lambda_N"] \arrow[ddl, bend right, "\psi^N_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi^N_Y"] & \\
 & L \arrow[dl, "\psi^L_X"'] \arrow[dr, "\psi^L_X"] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Chiameremo una tale proprietà[7] ***universalità***.
Il concetto di limite è uno dei concetti centrali della Teoria delle Categorie: analogamente a come sia possibile definire equivalentemente aperti, chiusi, intorni, chiusura, interno e così via in Topologia Generale, è possibile definire i funtori aggiunti in termini di limiti, i limiti in termini di funtori aggiunti ed equivalentemente tante altre costruzioni in Teoria delle Categorie.
Talvolta diremo che una categoria "ammette/ha tutti i..." facendo riferimento a dei (co)limiti definiti su una qualche classe di diagrammi: questo significa che ogni diagramma di quella classe ammette un (co)limite in $\mathcal{C}$.

Osservazione 1.4: Limiti e oggetti iniziali

Sia $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramma.

- Se $\mathcal{J}$ ammette un oggetto iniziale I, allora $\lim_{\leftarrow} F = F(I)$.
- Dualmente, se $\mathcal{J}$ ammette un oggetto finale Z, allora $\lim_{\rightarrow} F = F(Z)$.
- Infine, se $\mathcal{J}$ ammette un oggetto zero 0, allora $\lim_{\leftarrow} F = \lim_{\rightarrow} F = F(0)$.

1.3.1 Limiti notevoli

Presentiamo alcuni limiti di particolare importanza (in effetti delle classi di limiti) nella pratica matematica; in questa sezione, assumeremo per semplicità che $\mathcal{J}$ sia una sottocategoria (di forma opportunamente specificata) di $\mathcal{C}$ e $F : \mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{C}$ sia il funtore di inclusione: questo ci permetterà di dire semplicemente "Sia $\mathcal{J}$ un diagramma" o parlare di $\lim_{\leftarrow} \mathcal{J}$.

Definizione 1.16: Prodotto

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $\mathcal{J}$ un diagramma discreto (ovvero i cui unici morfismi sono le identità).
Si dice ***prodotto*** di $\mathcal{J}$ in $\mathcal{C}$ il limite di $\mathcal{J}$ in $\mathcal{C}$, che indicheremo come

$$\prod_{X \in \operatorname{ob} \mathcal{J}} X \quad \text{oppure, più semplicemente,} \quad \prod \mathcal{J}\ .$$

Un prodotto in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ si dice ***coprodotto*** in $\mathcal{C}$ e lo indicheremo come $\coprod \mathcal{J}$, mentre prodotti e coprodotti binari verranno indicati (nel caso in cui sia chiara la categoria ambiente) rispettivamente come $A \times B$ e $A + B$.
I morfismi $\pi_X : \prod \mathcal{J} \to X$ si dicono ***proiezioni***, mentre i morfismi $\iota_X : X \to \coprod \mathcal{J}$ si dicono ***inclusioni***.

È immediato osservare che se $\mathcal{C}$ ammette un oggetto terminale, questo è il prodotto del diagramma vuoto.

[6] Ovvero scrivendo per esteso la definizione di oggetto terminale
[7] Ovvero essere il cono terminale/iniziale su un qualche diagramma

Definizione 1.17: Pullback o prodotto fibrato

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, e sia $\mathcal{J}$ il diagramma $\{X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y\}$, detto ***cospan***[a].
Il limite di $\mathcal{J}$ in $\mathcal{C}$ si dice ***pullback*** di $\mathcal{J}$, o anche ***prodotto fibrato*** di X e Y lungo (o su) Z e si può indicare con $X \times_Z Y$.
Un pullback in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ si dice ***pushout***.

[a]E ovviamente $\mathcal{J}^{\mathsf{op}}$ si dirà ***span***

Il pullback è una sorta di analogo categoriale delle equazioni: è facile dimostrare che in **Set** e nelle categorie concrete il pullback di $\{X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y\}$ è il sottoinsieme $\{(x, y) | f(x) = g(y)\}$ di $X \times Y$ e i morfismi che lo accompagnano sono la restrizione delle proiezioni. Un altro esempio è quello del grafico di una funzione, che è il pullback del diagramma $\{X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\mathrm{id}_Y} Y\}$.

Definizione 1.18: Equalizzatore

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $\mathcal{J}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Si dice ***equalizzatore*** di f e g il limite di $\mathcal{J}$ in $\mathcal{C}$, e lo indichiamo con $\mathrm{eq}(f, g)$, come indichiamo l'unico morfismo "primitivo" del cono con $e_{f,g} : \mathrm{eq}(f, g) \to X$.
Un equalizzatore in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ si dice ***coequalizzatore***.

1.3.2 Esistenza dei limiti

Considerando l'ubiquità del concetto di (co)limite, è importante essere in grado di dimostrare che le categorie in cui si sta lavorando siano (co)complete, ma può sembrare difficile dimostrare l'esistenza del (co)limite per diagrammi piccoli di forma arbitraria. Fortunatamente il prossimo risultato ci dà una condizione necessaria e sufficiente per la (co)completezza di una categoria e ci mostra che in realtà ogni limite si può costruire "facendo prodotti e risolvendo equazioni".

Teorema 1.3: Esistenza dei limiti

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.
$\mathcal{C}$ ammette tutti i prodotti piccoli ed equalizzatori per ogni coppia di morfismi se e solo $\mathcal{C}$ è una categoria completa.

Dimostrazione

Se $\mathcal{C}$ è una categoria completa allora ammette ovviamente tutti i prodotti piccoli e tutti gli equalizzatori, in quanto questi sono casi di limite piccolo, dunque supponiamo che $\mathcal{C}$ ammetta tutti i prodotti piccoli e gli equalizzatori di coppie di morfismi.
Sia $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramma piccolo e consideriamo i seguenti prodotti:

$$S := \prod_{X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{J}} F(X) \qquad \text{e} \qquad T := \prod_{u \in \hom \mathcal{J}} F(\mathrm{cod}(u))$$

Le cui proiezioni indicheremo rispettivamente con σ_i e τ_i.
Dato che per ogni $u \in \hom \mathcal{J}$ abbiamo ovviamente $\mathrm{cod}(u) \in \mathrm{ob}\,\mathcal{J}$, S ammette mappe (precisamente le sue proiezioni) verso ogni $F(\mathrm{cod}(u))$, dunque per la proprietà universale del prodotto esiste ed è unica $f : S \to T$ tale che il seguente diagramma commuti per ogni $u \in \hom \mathcal{J}$:

$$\begin{tikzcd} & F(\mathrm{cod}(u)) & \\ S \arrow[ur, "\sigma_{F(\mathrm{cod}(u))}"] \arrow[rr, dashed, "f"] & & T \arrow[ul, "\tau_{F(\mathrm{cod}(u))}"'] \end{tikzcd}$$

Analogamente, deve esistere ed essere unica una mappa $g : S \to T$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "\sigma_{F(\mathrm{dom}(u))}"] & T \arrow[d, "\tau_{F(\mathrm{cod}(u))}"] \\
F(\mathrm{dom}(u)) \arrow[r, "F(u)"] & F(\mathrm{cod}(u))
\end{tikzcd}$$

Consideriamo dunque $L := \mathrm{eq}(f, g)$ e la mappa $e_{f,g} : L \to S$ che equalizza f e g: questo è il nostro candidato limite, dobbiamo prima controllare che sia un cono definendo le proiezioni su F, ma vediamo che basta definirle nel seguente modo dato qualsiasi $u : X \to Y$ di $\mathcal{J}$:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, "e_{f,g}"] \arrow[drrr, dashed, bend left, "\psi_{F(Y)}:=\tau_{F\,\mathrm{cod}(u)}\circ f\circ e_{f,g}=\tau_{F\,\mathrm{cod}(u)}\circ g\circ e_{f,g}"] \arrow[ddr, dashed, bend right, "\psi_{F(X)}:=\sigma_{F(X)}\circ e_{f,g}"'] & & & \\
& S \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\sigma_{F(X)}"] & T \arrow[r, dashed, "\tau_{F(\mathrm{cod}(u))}"] & F(Y) = F(\mathrm{cod}(u)) \\
& F(X) \arrow[urr, "F(u)"] & &
\end{tikzcd}$$

Ora dobbiamo dimostrare che è effettivamente universale: considerando un altro cono (N, φ), le sue φ definiscono un'unica $h : N \to S$, ma dato che è un cono deve anche valere $f \circ h = g \circ h$, dunque h è una mappa equalizzante e dunque deve esistere un'unica mappa $\eta : N \to L$ tale che $h = e_{f,g} \circ \eta$.

□

Corollario 1.3: Esistenza dei colimiti

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.
$\mathcal{C}$ ammette tutti i coprodotti piccoli e coequalizzatori per ogni coppia di morfismi se e solo $\mathcal{C}$ è una categoria cocompleta.

1.3.3 Prodotti

Chiudiamo con una discussione di una diversa caratterizzazione del prodotto di due oggetti in una categoria.
La definizione che abbiamo dato in 1.16 è evidentemente utile quando si parla di lavorare coi prodotti nell'usuale pratica matematica, ad esempio è una definizione meno "pesante" di quella che si dà dei prodotti in **Top** o **Mble** nella maggior parte dei corsi introduttivi di Topologia Generale o Teoria della Misura. Allo stesso modo non dipende da scelte arbitrarie, come di una norma prodotto in **NormVec**$\mathbb{K}$ o di una misura prodotto in **Meas**.
Tuttavia in altre applicazioni della Teoria delle Categorie, ad esempio in Topologia Algebrica o informatica teorica, può essere agevole considerare il prodotto di due oggetti non come definito intrinsecamente tramite proprietà universale, ma come un bifuntore.

Teorema 1.4: Caratterizzazione del prodotto binario

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e sia $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ il funtore diagonale, ovvero l'applicazione

$$\Delta(f : X \to Y) = ((f, f) : (X, X) \to (Y, Y)).$$

Se $\mathcal{C}$ ammette i prodotti binari, l'applicazione $\Pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definita da

$$\Pi((f, g) : (X, Y) \to (W, Z)) := (f \times g : X \times Y \to W \times Z)$$

definisce un funtore aggiunto destro a Δ.

Dimostrazione

Osserviamo che dalle definizioni di categoria prodotto (definizione 1.7), di prodotto nella definizione 1.16 e assumendo che il prodotto in **Set** sia l'usuale prodotto cartesiano[a], la seguente catena di biezioni è verificata in **Set** per ogni A, B e C oggetti in $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{C}^2}(\Delta A, (B,C)) &\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}^2}((A,A),(B,C)) \\
&\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times \hom_{\mathcal{C}}(A,C) \\
&\cong_{\mathsf{Set}} \underbrace{\hom_{\mathcal{C}}(A, B\times C)}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}}\times(\mathcal{C}\times\mathcal{C})\to\mathsf{Set}} = \hom_{C}(A, \Pi(B,C))
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che Π è effettivamente una mappa aggiunta destra alla mappa diagonale; dovremmo dimostrare la funtorialità, ma è banale e consiste semplicemente nell'applicare le proprietà universali dei prodotti. Applicando il lemma 1.2, otteniamo l'essenziale unicità, concludendo.

□

[a]Dimostrazione lasciata per esercizio al lettore

Corollario 1.4: Caratterizzazione del coprodotto binario

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e sia $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ il funtore diagonale.
Se $\mathcal{C}$ ammette i coprodotti binari, l'applicazione $\amalg : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definita da

$$\amalg((f,g) : (X,Y) \to (W,Z)) := (f + g : X + Y \to W + Z)$$

definisce un funtore aggiunto sinistro a Δ.

Capitolo 2

Categorie Cartesiane Chiuse

Definizione 2.1: Oggetto esponenziale

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano Z, Y oggetti di $\mathcal{C}$ tali che esista sempre il prodotto binario $- \times Y$ (e che dunque definisca un funtore $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$).
Un oggetto Z^Y si dice ***esponenziale*** in $\mathcal{C}$ se è munito di un morfismo $\mathrm{eval}_{Y,Z} : Z^Y \times Y \to Z$ tale che per ogni morfismo $g : X \times Y \to Z$ esista un unico $\lambda g : X \to Z^Y$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[d, "\lambda g \times \mathrm{id}_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z^Y \times Y \arrow[r, "\mathrm{eval}_{Y;Z}"] & Z \end{tikzcd}$$

L'assegnazione $g \mapsto \lambda g$ definisce una biezione $\hom(X \times Y, Z) \cong \hom(X, Z^Y)$.

Definizione 2.2: Categoria Cartesiana Chiusa

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Questa si dice ***cartesiana chiusa*** se:

- $\mathcal{C}$ ammette un oggetto terminale $\mathbf{1}$ e tutti i prodotti binari, o equivalentemente ammette tutti i prodotti finiti, dato che $\mathbf{1} = \prod \varnothing$.
- $\mathcal{C}$ ammette tutti gli esponenziali.

Lemma 2.1

Sia $\mathcal{C}$ cartesiana chiusa e localmente piccola.
Definiti per ogni $B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ i funtori $\Pi_B, \mathbf{E}_B : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ come:

$$\Pi_B : (f : X \to Y) \mapsto (f \times \mathrm{id}_B : X \times B \to Y \times B)$$

$$\mathbf{E}_B : (f : X \to Y) \mapsto (f^* : X^B \to Y^B)$$

Esempio 2.1: Set è cartesiana chiusa

La categoria **Set** è cartesiana chiusa.

Dimostrazione

Controllando le tre condizioni:

- L'oggetto terminale è il singoletto $\{\varnothing\}$.
- Il prodotto di insiemi X e Y è il loro prodotto cartesiano.
- L'esponenziale Z^Y è dato dall'insieme $\hom(Y, Z)$ e le mappe $g \mapsto \lambda g$ e $\mathrm{eval}_{Y,Z}$ sono definite dal seguente

diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[dd, "\lambda g \times \mathrm{id}_B"] & & & \\
 & (x,y) \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & \\
 & (\lambda g(x) := g(x, \bullet) : Y \to Z, y) \arrow[r, mapsto] & \lambda g(x)(y) := g(x,y) & \\
\hom(Y,Z) \times Y \arrow[rrr, "\mathrm{eval}_{Y,Z}"] & & & Z
\end{tikzcd}
$$

Dunque **Set** è cartesiana chiusa, in particolare è l'esempio prototipico di categoria cartesiana chiusa.

□

Esempio 2.2: Vec($\mathbb{K}$) non è cartesiana chiusa

Sia $\mathbb{K}$ un campo e consideriamo la categoria **Vec**($\mathbb{K}$); questa non è cartesiana chiusa.

Dimostrazione

Per dimostrarlo usiamo un lemma:

Lemma 2.2

Se una categoria $\mathcal{C}$ con un oggetto zero $\mathbf{0}$ è cartesiana chiusa, allora tutti gli oggetti di $\mathcal{C}$ sono isomorfi tramite un unico isomorfismo.

Dimostrazione

Dato che $\mathbf{0}$ è sia iniziale che terminale, per ogni coppia di oggetti X, Y abbiamo:

$$\hom(X,Y) \cong \hom(X \times \mathbf{0}, Y) \cong \hom(\mathbf{0}, Y^X) \cong \{\varnothing\}$$

E naturalmente vale lo stesso per $\hom(Y,X)$, dunque X è isomorfo a Y tramite un unico isomorfismo.

Notiamo che per qualsiasi campo $\mathbb{K}$ lo spazio vettoriale banale $\mathbf{0} := \{0_{\mathbf{0}}\}$ è l'oggetto zero di **Vec**$\mathbb{K}$, in quanto per ogni spazio V abbiamo le uniche mappe $0_{\mathbf{0}} \mapsto 0_V$ e $v \mapsto 0_{\mathbf{0}}$.
Siccome ha un oggetto zero, se **Vec**$\mathbb{K}$ fosse cartesiana chiusa tutti gli spazi vettoriali sarebbero isomorfi, assurdo, dunque otteniamo la tesi.

□

Capitolo 3

La categoria $\mathbf{PER}(\mathbb{N})$

In questa parte consideremo un esempio non banale di categoria cartesiana chiusa costruita in CITA, la categoria **PER**($\mathbb{N}$), i cui oggetti sono le relazioni di equivalenza parziali sui numeri naturali con dei morfismi opportunamente definiti in termini di computabilità.

3.1 Funzioni parziali ricorsive

Definiamo una classe di funzioni

Definizione 3.1: Funzioni parziali ricorsive

Consideriamo su un sottoinsieme $R \subset P := \{f : \mathbb{N}^n \xrightarrow{\text{parz}} \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ le seguenti condizioni:

1. R contiene le funzioni costantemente nulle.
2. R contiene la funzione successore $n \mapsto n + 1$.
3. Per ogni n in $\mathbb{N}$, R contiene le proiezioni $\pi_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (e dunque l'identità $\pi_1 : \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ e la scelta di un elemento $k : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$).
4. Per ogni $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ in R e $f_1, ..., f_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ in R, la composizione (definita solo dove l'immagine delle f_i appartiene al dominio di g) $g(f_1, ..., f_k) : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ appartiene a R.
5. Per $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ in R e $g : \mathbb{N}^{k+2}$ in R esiste un'unica $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ in R tale che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^k$ e per ogni $y \in \mathbb{N}$ vale
$$h(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \qquad \text{e} \qquad h(\mathbf{x}, y + 1) = g(\mathbf{x}, y, h(\mathbf{x}, y))$$
6. Per ogni $f : \mathbb{N}^{k+1}$ in R esiste una funzione $\mu_f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ in R definita da
$$\mu_f(\mathbf{x}) = \min\{y \in \mathbb{N} : f(\mathbf{x}, y) = 0\}$$
dove questo minimo esiste (ovvero dove l'insieme non è vuoto), indefinita altrimenti.

Definiamo $\mathcal{R}^*$ come il minimo insieme che soddisfa le condizioni da (1) a (5) e $\mathcal{R}$ come il minimo insieme che soddisfa le condizioni da (1) a (6).

Teorema 3.1

Le funzioni in $\mathcal{R}^*$ sono tutte e sole le funzioni calcolabili da un linguaggio di programmazione imperativo con cicli di lunghezza finita e predeterminata.

Dimostrazione

Dimostriamo che tutte le funzioni in $\mathcal{R}$ sono calcolabili per induzione scrivendo delle funzioni in Python, gli altri linguaggi imperativi sono equivalenti:

Capitolo 4

Categorie Abeliane