

# TFA per cambiamenti di coordinate

Filippo  $\mathcal{L}$ . Troncana

A.A. 2023/2024

## 1 Misura indotta e $\sigma$ -algebra finale

### Definizione 1.1: $\sigma$ -algebra finale

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura, sia  $Y$  un insieme e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione biettiva. La  **$\sigma$ -algebra** finale indotta da  $f$  rispetto a  $\mathcal{A}$  è la famiglia

$$f\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

### Osservazione 1.1

La  $\sigma$ -algebra finale di  $f$  rispetto a  $\mathcal{A}$  è la più grande  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  tale che  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Sigma)$  sia misurabile.

#### Dimostrazione

Sia  $\Sigma \subset 2^Y$  tale che  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Sigma)$  sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni  $E \in \Sigma$ , abbiamo che  $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ , dunque  $\Sigma \subset f\mathcal{A}$ .

□

### Definizione 1.2: Misura esterna indotta

Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi, sia  $\mu$  una misura esterna su  $X$  e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione biettiva. La **misura indotta** da  $f$  rispetto a  $\mu$  è la funzione

$$f\mu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

### Proposizione 1.1

$f\mu$  è una misura esterna su  $Y$ .

#### Dimostrazione

Dimostriamo i tre assiomi di misura esterna.

1.  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Siano  $E \subset F \subset Y$ , allora  $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$ , dunque la monotonia di  $f\mu$  segue dalla monotonia di  $\mu$ .
3. Siano  $A, B \subset Y$ , allora  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  e la "disuguaglianza triangolare" segue da quella di  $\mu$

□

### Proposizione 1.2

Se  $f\mu$  è la misura indotta da  $f$  rispetto a  $\mu$ , allora  $\mathcal{M}_{f\mu} = f\mathcal{M}_\mu$ .

### Dimostrazione

TODO

□

## 2 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{A}, \mu) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{B}, \nu) \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}) \end{array}$$