PEM

F. Troncana, sotto la supervisione del prof. R. Zunino

TBD

Nota preliminare

Durante questa trattazione, noi faremo alcune cose leggermente inquietanti dal punto di vista "fondazionale", in particolare tratteremo classi proprie come insiemi, useremo versioni ultrapotenziate dell'assioma della scelta, avremo collezioni "piccole" di oggetti "grossi" che comunque tratteremo come insiemi, insomma, ne faremo di tutti i colori.
È effettivamente possibile ben fondare tutto quello che faremo, ma ciò esula dagli scopi di questa trattazione: procederemo dunque con una fede incrollabile e un ottimismo completamente ingiustificato, come sempre d'altronde.

Ogni tanto porterò io stesso l'attenzione ai fondamenti "scricchiolanti" della nostra trattazione con il carattere .

1 Preliminari

1.1 Nozioni fondamentali

Definizione 1.1: Categoria e dualità

Una ***categoria*** $\mathcal{C}$ è una struttura munita di due classi: $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ e $\hom\mathcal{C}$, dette rispettivamente ***oggetti*** (o elementi) e ***morfismi*** (o mappe o freccie) tali che

- Ogni morfismo $f \in \hom\mathcal{C}$ abbia associati due oggetti $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ detti rispettivamente ***dominio*** e ***codominio*** di f, che verrà indicato come $f : A \to B$.
- Per ogni coppia di morfismi $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sia definita la loro ***composizione***, ovvero un morfismo $g \circ f : A \to C$ (spesso indicato solo con gf).
- Per ogni oggetto $X \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ esista un morfismo $\mathrm{id}_X \in \hom\mathcal{C}$ detto ***identità*** di X tale che per ogni morfismo $f : A \to B$ valga $\mathrm{id}_B f = f \,\mathrm{id}_A = f$.
- Per ogni terna di morfismi componibili $f, g, h \in \hom\mathcal{C}$, valga $h(gf) = (hg)f =: hgf$, ovvero la composizione sia ***associativa***.

Fissati due oggetti $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ denoteremo con $\hom(A, B)$ o $\mathcal{C}(A, B)$ la collezione dei morfismi $A \to B$ di $\hom\mathcal{C}$.
Per ogni categoria $\mathcal{C}$ è definita la sua ***duale*** (o opposta) $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, i cui oggetti sono gli stessi di $\mathcal{C}$ e i cui morfismi sono quelli di $\mathcal{C}$ ma invertiti di direzione, ovvero ad ogni $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ corrisponde un $f^{\mathsf{op}} : B \to A$ in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.
Una categoria $\mathcal{C}$ si dice:

- ***Piccola*** se la classe $\hom\mathcal{C}$ è un insieme.
- ***Grande*** se non è piccola.
- ***Localmente piccola*** se, una volta fissati due oggetti $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$, la classe $\hom(X, Y)$ è un insieme.

Osservazione 1.1

Banalmente:

- Le identità sono uniche.
- La categoria duale è essenzialmente unica e vale $(\mathcal{C}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} = \mathcal{C}$.
- Dato che $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ inietta sempre in $\hom\mathcal{C}$ con la mappa $X \mapsto \mathrm{id}_X$, in generale la classe degli oggetti di una categoria non è una buona misura della sua grandezza.

Dimostrazione

Dimostriamo solo l'ultimo punto con un esempio, gli altri sono banali. Sia V la categoria formata da un unico oggetto $\bullet$ e la cui classe dei morfismi corrisponde alla classe dei cardinali in ZFC, dove la composizione di due morfismi è data dalla loro somma come cardinali. Nonostante $\operatorname{ob} V$ sia la più piccola possibile, $\hom V$ è una classe propria, dunque V non solo è grande, ma non è nemmeno localmente piccola.

$\square$

Da ora in avanti, assumeremo sempre (anche senza specificarlo) che le nostre categorie siano almeno localmente piccole per evitare *troppi* problemi di fondazione.

Definizione 1.2: Sottocategoria

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie tali che $\operatorname{ob} \mathcal{C} \subset \operatorname{ob} \mathcal{D}$, $\hom \mathcal{C} \subset \hom \mathcal{D}$ e per ogni $f, g, h \in \hom C$ valga

$$h = f \circ_{\mathcal{C}} g \Leftrightarrow h = f \circ_{\mathcal{D}} g.$$

Allora $\mathcal{C}$ si dice una ***sottocategoria*** di $\mathcal{D}$.
Se per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \mathcal{C}$ vale $\mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{D}(X, Y)$, allora $\mathcal{C}$ si dice ***piena***.

Definizione 1.3: Sapori di morfismi

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $f : A \to B$ un morfismo. Esso può dirsi:

- ***Monomorfismo*** (o monico o mono) se la precomposizione è iniettiva, ovvero per ogni coppia di morfismi $g_1, g_2 : C \to A$ vale $fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.
- ***Epimorfismo*** (o epico o epi) se la postcomposizione è iniettiva, ovvero se per ogni coppia di morfismi $g_1, g_2 : B \to C$ vale $g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$.
- ***Endomorfismo*** (o endo) se $A = B$.
- ***Sezione*** (o split mono) se ha un'inversa sinistra, ovvero se esiste un morfismo $g : B \to A$ tale che $gf = \mathrm{id}_A$.
- ***Retrazione*** (o split epi) se ha un'inversa destra, ovvero se esiste un morfismo $g : B \to A$ tale che $fg = \mathrm{id}_B$.
- ***Isomorfismo*** (o iso) se ha un'inversa destra e sinistra. In particolare, A e B si dicono ***isomorfi*** (attraverso f) e li indicheremo con $f : A \cong_{\mathcal{C}} B$ omettendo usualmente f o $\mathcal{C}$.
- ***Automorfismo*** (o auto) se è iso e endo.

Osservazione 1.2: Sui morfismi

Valgono le seguenti:

- Le sezioni sono mono.
- Le retrazioni sono epi.
- iso $\Leftrightarrow$ (split mono $\wedge$ epi) $\Leftrightarrow$ (mono $\wedge$ split epi) $\Rightarrow$ (epi $\wedge$ mono), ma nell'ultimo caso non vale l'implicazione inversa.
- Tutte le inverse sono uniche quando esistono.
- Un mono è un epi nella categoria opposta e viceversa.

Dimostrazione

Forniamo solo due esempi di morfismi che sono epici e monici ma non isomorfismi (le altre verifiche sono assolutamente automatiche):

- Poniamoci nella categoria **Haus** degli spazi topologici T_2 i cui morfismi sono le funzioni continue tra questi e consideriamo l'inclusione $\iota : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \hookrightarrow [0, 1]$ (entrambi con la topologia euclidea); questa è chiaramente mono in quanto iniettiva, ed è epi in quanto una funzione continua in **Haus** è completamente determinata dal suo valore su un sottospazio denso, ma non è iso dato che non è suriettiva.

- Consideriamo la categoria

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "f"] & \bullet \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

  Dato che a destra o sinistra possiamo comporre solo con l'identità, f è sia mono che epi, ma non è iso in quanto non ha inversa.

$\square$

Definizione 1.4: Oggetti iniziali e finali

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia I un oggetto.
I si dice ***oggetto iniziale*** se per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\iota_X : I \to X$
I si dice ***oggetto finale*** se è l'oggetto iniziale di $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, o equivalentemente se per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\zeta_X : X \to I$.
Se I è sia finale che iniziale, si dice ***oggetto zero***.

Proposizione 1.1: Unicità di oggetti iniziali e finali

Se una categoria $\mathcal{C}$ ammette un oggetto iniziale (o finale o zero), questo è essenzialmente unico.

Definizione 1.5: Funtore

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un ***funtore covariante*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste in due mappe $F : \operatorname{ob}\mathcal{C} \to \operatorname{ob}\mathcal{D}$ e $F : \hom\mathcal{C} \to \hom\mathcal{D}$ che rispettino la composizione, ovvero:

- Per ogni morfismo $f : X \to Y$ vale $Ff : FX \to FY$.
- Per ogni oggetto $X \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ vale $F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$.
- Per ogni coppia di morfismi componibili $f, g\ in \hom\mathcal{C}$ vale $F(gf) = FgFf$.

Un ***funtore controvariante*** da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ è un funtore covariante $F : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{D}$. Anche se l'espressione "un funtore controvariante $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{D}$" tecnicamente indicherebbe un funtore covariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, la useremo quasi sempre per indicare un funtore controvariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ovvero una controvarianza specificata due volte non farà una covarianza.
Un funtore si dice:

- ***Fedele*** se per ogni $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è iniettiva.
- ***Pieno*** se per ogni $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è suriettiva.
- ***Pienamente fedele*** se è pieno e fedele.
- ***Essenzialmente suriettivo sugli oggetti*** se per ogni oggetto $Y \in \mathcal{D}$ esiste un oggetto $X \in \mathcal{C}$ tale che $FX \cong_{\mathcal{D}} Y$

Proposizione 1.2: Riflessione di isomorfismi

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore di qualsiasi varianza. Se $f : X \to Y$ è un isomorfismo, allora $Ff : FX \to FY$ è un isomorfismo.
Se F è pienamente fedele, vale anche l'implicazione inversa.

Dimostrazione

La prima implicazione è banale, dunque assumiamo che F sia pienamente fedele e $g : FX \to FY$ sia un isomorfismo; dato che la mappa $\varphi := F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è una biezione, esiste $f : X \to Y$ tale che $\varphi(f) = g$, dunque definiamo $f' := \varphi^{-1}(g^{-1})$. Dato che F è un funtore, vale

$$f'f = \varphi^{-1}(\varphi(f'f)) = \varphi^{-1}(\varphi(f')\varphi(f)) = \varphi^{-1}(g^{-1}g) = \varphi^{-1}(\mathrm{id}_{FX}) = \mathrm{id}_X \ ,$$

Dimostrare che f' è anche l'inversa destra di f è assolutamente analogo, così come il caso controvariante.

$\square$

Definizione 1.6: Equivalenza di categorie

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie e siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ due funtori.
La coppia (F, G) si dice ***equivalenza di categorie*** tra F e G se esistono due isomorfismi naturali

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \cong GF \quad \text{e} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \cong FG.$$

Proposizione 1.3: Caratterizzazione per un'equivalenza di categorie

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore. Questo definisce un'equivalenza di categorie se e solo se è pienamente fedele ed essenzialmente suriettivo sugli oggetti.

Definizione 1.7: Funtori aggiunti

Siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ due funtori. Questi si dicono ***aggiunti*** (rispettivamente sinistro e destro all'altro) se esiste un isomorfismo:

$$\mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$$

Naturale per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $d \in \mathcal{D}$. Scriveremo $F \dashv G$ per indicare che F è aggiunto sinistro a G e che G è aggiunto destro a F.

1.2 Lemma di Yoneda e conseguenze

Definizione 1.8: Categoria dei funtori

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie.
Definiamo la categoria $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, che spesso denoteremo con $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, la ***categoria dei funtori*** da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, i cui oggetti sono i funtori covarianti e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali con la ***composizione verticale***: definiamo per $\mu : F \to G$ e $\nu : G \to H$ la loro composizione verticale $\nu\mu : F \to H$ col seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & & F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "Ff"] \arrow[rr, bend left, "(\nu\mu)_X"] & G(X) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "Gf"] & H(X) \arrow[d, "Hf"] \\
Y & & F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[rr, bend right, "(\nu\mu)_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\nu_Y"] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

Spesso invece di scrivere $[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G)$ o $\hom_{[\mathcal{C},\mathcal{D}]}(F, G)$ scriveremo $\mathrm{Nat}(F, G)$.

Definizione 1.9: hom-funtore covariante e controvariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia A un oggetto di $\mathcal{C}$. Definiamo due funtori $h_A : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ e $h^A : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$, detti hom-***funtori*** (rispettivamente covariante e controvariante) nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd}
\hom(A, X) \arrow[d, "f \circ -"] & X \arrow[l, mapsto, "h_A"'] \arrow[r, mapsto, "h^A"] \arrow[d, "f"] & \hom(X, A) \\
\hom(A, Y) & Y \arrow[l, mapsto, "h_A"'] \arrow[r, mapsto, "h^A"] & \hom(Y, A) \arrow[u, "- \circ f"']
\end{tikzcd}$$

Inoltre possiamo interpretare $\hom(-, -)$ come un bifuntore $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$.

Teorema 1.1: Lemma di Yoneda covariante

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ un funtore covariante. Allora esiste una biezione di insiemi:

$$\mathrm{Nat}(h_A, F) \cong F(A)$$

e questa è naturale in A e F.

Dimostrazione

Sia $\Phi \in \mathrm{Nat}(h_A, F)$. Dato che è naturale, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[ddd, "f"] & h_A(A) \arrow[rrr, "\Phi_A"] \arrow[ddd, "h_A(f)"] & & & F(A) \arrow[ddd, "F(f)"] \\
& & \mathrm{id}_A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & u \arrow[d, mapsto] & \\
& & f \circ \mathrm{id}_A = f \arrow[r, mapsto] & (Ff)(u) = \Phi_X(f) & \\
X & h_A(X) \arrow[rrr, "\Phi_X"] & & & F(X)
\end{tikzcd}$$

Vediamo che ci basta specificare l'assegnazione blu per determinare univocamente tutto il resto:

- Partendo da $\Phi \in \mathrm{Nat}(h_A, F)$ ci basta specificare $\mathcal{Y}(\Phi) = u := \Phi_A(\mathrm{id}_A)$ elemento di $F(A)$.
- Partendo da $u \in F(A)$ possiamo costruire a ritroso $\Phi := \mathcal{Y}^{-1}(u)$ scorrendo su $X \in \mathcal{C}$ e assegnando $\Phi_X(f : A \to X) := Ff(u)$.

$\square$

Corollario 1.1: Lemma di Yoneda controvariante

Sia $F : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$ un funtore controvariante. Allora esiste una biezione di insiemi

$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \cong F(A)$$

e questa è naturale in A e F.

Dimostrazione

Analoga a quella del teorema precedente

Osservazione 1.3: Yoneda non ci dà una biezione di insiemi!

Questi non sono insiemi! Una trasformazione naturale è una *classe*, in generale una classe propria! È solo un caso che nel lato sinistro abbiamo una collezione "piccola" di oggetti "grandi", che però non è un insieme! Vediamo un esempio:
Consideriamo $\mathcal{C} := \mathsf{Grp}$ la categoria dei gruppi e degli omomorfismi tra gruppi con il funtore dimenticante $U : (G, \cdot) \mapsto G$. Yoneda ci dice che:

$$\mathrm{Nat}(h_G, U) \cong G \in \mathsf{Set}$$

Vediamo però che ogni trasformazione naturale $\Phi : h_G \to U$ corrisponde a una classe $\{\Phi_X\}_{X \in \mathsf{Grp}}$, che è una classe propria! Quindi noi abbiamo una classe di classi che però abbiamo specificato *non* poter essere membri di altre classi. La teoria delle categorie è falsa e da buttare in toto dunque, dato che persino uno dei suoi risultati più fondamentali è contradditorio?
Ovviamente no, però ci mostra che la teoria degli insiemi di ZFC risulta inadeguata per trattare rigorosamente la teoria delle categorie (soprattutto quando si inizia a parlare di teoria delle categorie superiori, dove studiamo oggetti come la "metacategoria" CAT delle categorie). Ci sono principalmente due approcci in qualche modo "duali" intrapresi da diversi autori:

- L'approccio "alla teoria dei tipi": abbandonare ZFC e fondare la teoria delle categorie su varie teorie dei tipi che permettano di trattare oggetti "arbitrariamente" più "grossi".
- L'approccio "alla teoria dei modelli": estendere ZFC con assiomi più o meno conservatori che permettano di "limitare" le delle categorie con degli opportuni cardinali.

I lettori più curiosi possono trovare più informazioni su questa pagina di nLab.

Una delle più naturali applicazioni del lemma di Yoneda è l'embedding di Yoneda, fondamentale in gran parte della topologia e della geometria moderna: esso permette di identificare una categoria $\mathcal{C}$ con una sottocategoria della cosiddetta ***categoria dei prefasci su*** $\mathcal{C}$, che è solo un altro nome per $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$. Ad esempio se interpretiamo la topologia τ di uno spazio (X, τ) come una categoria, dove i morfismi sono dati dall'inclusione insiemistica, questa è completamente determinata dalle classi delle funzioni continue entranti nei (o uscenti dai) suoi aperti.

Teorema 1.2: Embedding di Yoneda covariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Questa è equivalente ad una sottocategoria piena di $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ tramite la mappa $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ definita da:

$$\mathcal{Y}(f : A \to B) = (f \circ -) : h^A \to h^B$$

Dimostrazione

Applicando il corollario 1.1 con $F = h^B$ scorrendo su $B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ otteniamo

$$\operatorname{Nat}(h^A, h^B) \cong h^B(A), \text{ o equivalentemente, } \operatorname{Nat}(h^A, h^B) \cong \hom(A, B).$$

Vediamo che dunque l'assegnazione $A \mapsto h^A$ definisce un funtore covariante $h^\bullet : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ pienamente fedele (ma non essenzialmente suriettivo sugli oggetti). Restringendo $h^\bullet$ all'immagine di $\mathcal{C}$ in $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$, otteniamo un'equivalenza di categorie (dato che la restrizione all'immagine è tautologicamente suriettiva).

$\square$

Abbiamo dualmente la versione controvariante

Corollario 1.2: Embedding di Yoneda controvariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Allora la sua categoria opposta $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ è equivalente ad una sottocategoria piena di $[\mathcal{C}, \mathsf{Set}]$ tramite la mappa $\mathcal{Y}' : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to [\mathcal{C}, \mathsf{Set}]$ definita da:

$$\mathcal{Y}(f : A \to B) := (- \circ f) : h_B \to h_A.$$

Dimostrazione

Assolutamente analoga al teorema precedente.

$\square$

Ora grazie al lemma di Yoneda possiamo dimostrare un fatto che ci servirà più tardi:

Lemma 1.1: Essenziale unicità degli aggiunti

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie e siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G_1, G_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtori tali che $F \dashv G_1$ e $F \dashv G_2$ oppure $G_1 \dashv F$ e $G_2 \dashv F$.
Allora $G_1 \cong G_2$.

Dimostrazione

Scriviamo le aggiunzioni in termini degli hom-funtori:

$$h^d(Fc) \cong h^{G_1 d}(c) \cong h^{G_2 d}(c)$$

Ottenendo dunque $\mathcal{Y} \circ G_1 \cong \mathcal{Y} \circ G_2$: dal teorema 1.2, ovvero la piena fedeltà dell'embedding di Yoneda, segue la tesi.

$\square$

2 Prodotti

Ci sono (almeno) tre definizioni (quasi) equivalenti del prodotto in una categoria. La prima

2.1 Proprietà universale

Definizione 2.1: Prodotto tramite proprietà universale

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ due oggetti.
Si dice ***prodotto*** di X e Y in $\mathcal{C}$ un oggetto $X \times Y$ munito di due morfismi $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ detti ***proiezioni*** tali che per ogni oggetto Z e ogni coppia di morfismi $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$ esista un unico morfismo $f \times g : Z \to X \times Y$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & Z \arrow[l, "f"] \arrow[u, "f\times g"] \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Questo, se esiste, è essenzialmente unico.

Dimostrazione

Siano (A, α_X, α_Y) e (B, β_X, β_Y) due prodotti di X e Y. Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "\alpha_X"'] \arrow[dr, bend right, "B(\alpha_X,\alpha_Y)"'] & Y \\
X & B \arrow[l, "\beta_Y"] \arrow[u, "\beta_Y"'] \arrow[ul, bend right, "A(\beta_X,\beta_Y)"']
\end{tikzcd}$$

Definendo automaticamente un isomorfismo.

2.2 Categoria dei coni

Definizione 2.2: Cono

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia J un diagramma commutativo in $\mathcal{C}$.
Si dice ***cono*** su J un oggetto $C \in \mathcal{C}$ con una collezione di morfismi $\{\rho_j : C \to j\}_{j\in J}$ tale che per ogni morfismo $f : X \to Y$ in J, il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\rho_X"'] \arrow[dr, "\rho_Y"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

La collezione dei coni su un diagramma J e dei morfismi tra loro forma una categoria, detta $\textsf{\textbf{Cone}}(J)$: i suoi oggetti sono i coni $(C, \{\rho_j\}_{j\in J})$ e i suoi morfismi sono definiti da

$$\hom((C, \{\rho_j\}_{j\in J}), (C', \{\rho'_j\}_{j\in J})) = \{m : C \to C' : \forall j \in J, \rho_j = \rho'_j m\}$$

Questi sono detti morfismi ***medianti***.

Definizione 2.3: Prodotto tramite coni

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ due oggetti. Si dice ***prodotto*** di X e Y l'oggetto $X \times Y$ di $\mathcal{C}$ tale che $(X \times Y, \{\pi_X, \pi_Y\})$ sia l'oggetto iniziale di $\textsf{\textbf{Cone}}(\{X, Y\})$, ovvero della categoria dei coni sul diagramma discreto $\{X, Y\}$.

2.3 Aggiunzioni

Prima di dare la prossima definizione, osserviamo che questa catena di biezioni è verificata (e naturale in A, B e C)

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\hom_{\mathcal{C}}(A, B \times C)}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathsf{Set}} &\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times \hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\
&\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}^2}((A, A), (B, C)) \\
&\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}^2}(\Delta A, (B, C))
\end{aligned}
$$

Dove $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^2$ è il funtore diagonale, che manda un oggetto A nell'oggetto (A, A) e un morfismo f nel morfismo (f, f): abbiamo ottenuto dunque che $\hom_{\mathcal{C}}(A, B \times C) \cong_{\mathsf{Set}} \hom(\Delta A, (B, C))$, ovvero che interpretando il prodotto come un funtore $\times : \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}$ questo è aggiunto destro al funtore diagonale, ovvero $\Delta \dashv \times$, quindi definiamo

Definizione 2.4: Prodotto III

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ due oggetti. Si dice ***prodotto*** di X e Y l'immagine della coppia $(X, Y) \in \operatorname{ob}\mathcal{C}^2$ attraverso un funtore Π aggiunto destro al funtore Δ.

Grazie al lemma 1.1 abbiamo immediatamente che il prodotto è essenzialmente unico.

2.4 Equivalenza

Teorema 2.1: Equivalenza di definizioni

Le definizioni 2.1, 2.3 e 2.4 sono essenzialmente equivalenti.

Dimostrazione

- L'equivalenza di 2.1 e 2.3 è abbastanza evidente (in effetti si trattano entrambi di applicazioni del concetto di limite).
- : dimostrare che 2.1 e 2.4 sono equivalenti può sembrare abbastanza immediato, ma c'è un piccolo ostacolo preliminare: noi non abbiamo un *unico* oggetto prodotto e un *unico* funtore prodotto, ma ne abbiamo potenzialmente delle classi di equivalenza: il fatto di prendere dei rappresentanti da esse per dimostrare che queste effettivamente fanno ciò che vogliamo richiede l'utilizzo di un assioma molto potente:

  Assioma 2.1: Scelta globale

  Sia $\mathcal{V}$ la classe di tutti gli insiemi.
  Esiste ed è non vuota la classe prodotto

  $$\mathfrak{V} := \prod_{S \in \mathcal{V}} S$$