Elementi di Teoria delle Categorie

Categories for the Learning Mathematician

Filippo Troncana, sotto la supervisione del prof. R. Zunino

A.A. 2025/2026

Sommario

La Teoria delle Categorie è un formalismo nato in seno alla Topologia e Geometria Algebrica per descrivere in modo generale la struttura delle varie teorie matematiche: laddove la Teoria degli Insiemi si fonda sui concetti primitivi di "insieme" e "elemento", quello della Teoria delle Categorie è un punto di vista più strutturale, basato sui concetti di "oggetto" e "morfismo", ovvero una relazione astratta tra due oggetti.
In questa trattazione forniremo un'elementare esposizione del linguaggio e di alcune costruzioni e risultati fondamentali nella Teoria delle Categorie in modo propedeutico alla pratica matematica generale, evidenziando alcuni aspetti di tipo fondativo tramite l'estensione della Teoria degli Insiemi di ZFC con un opportuno assioma di universo.

Fondamenti

Trattando strutture molto "grandi" in un senso che renderemo preciso in seguito, per fondare propriamente la Teoria delle Categorie è necessario estendere la Teoria degli Insiemi di Zermelo-Fraenkel più l'assioma della scelta, che assumeremo sempre[1]. L'approccio che seguiremo è un approccio che in qualche modo "limiti" la grandezza delle nostre strutture, supponendo l'esistenza di alcuni insiemi "universo" che si sostituiscano alla classe di tutti gli insiemi.
Questa sezione è quasi interamente basata sull'*expose* I.0 di [**SGA4**]. Assumeremo inoltre che ogni insieme sia un insieme puro.

Definizione 0.1: Universo di Grothendieck

Sia $\mathcal{G}$ un insieme non vuoto. Questo si dice ***universo di Grothendieck*** se:

- Se $x \in y$ e $y \in \mathcal{G}$ allora $x \in \mathcal{G}$, ovvero $\mathcal{G}$ è un insieme ***transitivo***.
- Se $x, y \in \mathcal{G}$ allora $\{x, y\} \in \mathcal{G}$.
- Se $x \in \mathcal{G}$ allora $2^x \in \mathcal{G}$.
- Se $I \in \mathcal{G}$, per ogni $f : I \to \mathcal{G}$ vale $\bigcup_{i \in I} f(i) \in \mathcal{G}$, ovvero $\mathcal{G}$ è chiuso per unioni indicizzate da un suo elemento.

Si dimostrano immediatamente le seguenti proprietà:

Proposizione 0.1: Proprietà degli universi di Grothendieck

Sia U un universo di Grothendieck. Allora questo contiene:

1. Tutti i sottoinsiemi di ogni suo elemento (in particolare dunque l'insieme vuoto).
2. Tutti i singoletti contenenti i suoi elementi.
3. Tutti i prodotti, le unioni disgiunte e le intersezioni di famiglie di suoi elementi indicizzate da un suo elemento.
4. Tutte le funzioni tra due suoi elementi.
5. Tutti i suoi sottoinsiemi la cui cardinalità è un suo elemento.

Inoltre l'intersezione di una famiglia di universi è un'universo.

Da queste proprietà seguono due fatti strettamente correlati, ovvero che un universo di Grothendieck più che numerabile è un ***modello*** per ZFC e che l'esistenza di un universo di Grothendieck più che numerabile è indipendente

[1] Potremmo essere tentati di limitare l'assioma della scelta a famiglie piccole o almeno moderate di insiemi (nel senso specificato in 0.1), ma ai fini della nostra trattazione lo assumeremo sempre nella sua forma completa.

da ZFC.
Intuitivamente, il seguente assioma ci permette di trattare un universo di Grothendieck come "sostituto" della classe di tutti gli insiemi, sicuri del fatto che questo "limiti" tutta la pratica matematica "usuale".

Assioma 0.1: Assioma di Universo

Per ogni insieme x esiste un universo di Grothendieck U tale che $x \in U$.
Consideriamo nella classe $\mathbb{G}$ degli universi di Grothendieck la famiglia $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \leq \omega}$, dove ω è il più piccolo ordinale infinito, definita come segue:

$$\mathcal{G}_0 := \min_{\subset} \mathbb{G} = \bigcap \mathbb{G}$$

$$\mathcal{G}_{\alpha+1} := \min_{\subset} \{U \in \mathbb{G} : \mathcal{G}_\alpha \in U\} = \bigcap \{U \in \mathbb{G} : \mathcal{G}_\alpha \in U\}$$

$$\mathcal{G}_\omega := \min_{\subset} \left\{ U \in \mathbb{G} : \bigcup_{\alpha < \omega} \mathcal{G}_\alpha \in U \right\} = \bigcap \{U \in \mathbb{G} : \forall \alpha < \omega, \mathcal{G}_\alpha \in U\}$$

Diremo gli elementi di $\mathcal{G}_\alpha$ insiemi ***α-piccoli*** e i suoi sottoinsiemi ***α-moderati***; gli elementi di $\mathcal{G}_\beta \setminus \mathcal{G}_\alpha$ per qualche $\beta > \alpha$ si dicono ***α-grandi***.
Diremo in generale ***piccoli*** gli insiemi che sono α-piccoli per un qualche $\alpha < \omega$, ***moderati*** gli insiemi ω-moderati e ***grandi*** gli insiemi ω-grandi.

La costruzione di $\mathcal{G}_\lambda$ può essere facilmente generalizzata a qualsiasi ordinale λ sia nel caso di un ordinale successore che nel caso di un ordinale limite, ma per i nostri scopi è sufficiente fermarci al primo ordinale infinito.

Osservazione 0.1: Su $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \omega}$

L'insieme $\mathcal{G}_0$ è numerabile e corrisponde alla classe degli insiemi ereditariamente finiti, ovvero degli insiemi finiti i cui elementi sono insiemi ereditariamente finiti.
Gli insiemi α-moderati per un qualche $\alpha < \omega$ sono $\alpha + 1$-piccoli.
$\{\mathcal{G}_\omega\}_{\alpha \leq \omega}$ è ben ordinata per inclusione.

Intuitivamente, $\mathcal{G}_1$ è già sufficiente per la pratica matematica "ordinaria", contenendo tutte le costruzioni usuali, e appunto è già un candidato per la "classe di tutti gli insiemi" in ZFC costituendone un modello.

Teorema 0.1: Modelli per ZFC in $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \leq \omega}$

L'esistenza di $\mathcal{G}_0$ è indipendente dalla teoria degli insiemi di ZF meno l'assioma di infinito e questo ne costituisce un modello; in particolare, l'esistenza di $\mathcal{G}_0$ in questa teoria è equivalente all'assioma di infinito.
L'esistenza di $\mathcal{G}_\alpha$ per $\alpha > 0$ è indipendente dalla teoria degli insiemi di ZFC e questo ne costituisce un modello.

Vale inoltre un teorema molto importante che stabilisce una corrispondenza tra universi di Grothendieck e cardinali fortemente inaccessibili in ZFC:

Teorema 0.2: Universi di Grothendieck e cardinali inaccessibili

Sia U un universo di Grothendieck più che numerabile.
Il cardinale $|U|$ è fortemente inaccessibile.

1 Nozioni fondamentali

Definizione 1.1: Categoria e dualità

Una ***categoria*** $\mathcal{C}$ è una struttura munita di due insiemi: $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ e $\hom\mathcal{C}$, detti rispettivamente ***oggetti*** (o elementi) e ***morfismi*** (o mappe o frecce) tali che

- Ogni morfismo $f \in \hom\mathcal{C}$ abbia associati due oggetti $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ detti rispettivamente ***dominio*** e ***codominio*** di f, che verrà indicato come $f : A \to B$.
- Per ogni coppia di morfismi $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sia definita la loro ***composizione***, ovvero un morfismo $g \circ f : A \to C$ (spesso indicato solo con gf).
- Per ogni oggetto $X \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ esista un morfismo $\mathrm{id}_X \in \hom\mathcal{C}$ detto ***identità*** di X tale che per ogni morfismo $f : A \to B$ valga $\mathrm{id}_B f = f \,\mathrm{id}_A = f$.

- Per ogni terna di morfismi componibili $f, g, h \in \hom \mathcal{C}$, valga $h(gf) = (hg)f =: hgf$, ovvero la composizione sia ***associativa***.

Fissati due oggetti $A, B \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ denoteremo con $\hom(A, B)$ o $\mathcal{C}(A, B)$ l'insieme dei morfismi $A \to B$ di $\hom \mathcal{C}$.
Per ogni categoria $\mathcal{C}$ è definita la sua ***duale*** (o opposta) $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, i cui oggetti sono gli stessi di $\mathcal{C}$ e i cui morfismi sono quelli di $\mathcal{C}$ ma invertiti di direzione, ovvero ad ogni $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ corrisponde un $f^{\mathsf{op}} : B \to A$ in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.
Una categoria $\mathcal{C}$ si dice:

- ***(α-)piccola*** se gli insiemi $\hom \mathcal{C}$ e $\operatorname{ob} \mathcal{C}$ (anche se vedremo sotto che la grandezza del secondo è sempre limitata dal primo) sono insiemi (α-)piccoli.
- ***(α-)grande*** se non è (α-)piccola.
- ***Localmente (α-)piccola*** se, una volta fissati due oggetti $X, Y \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$, l'insieme $\hom(X, Y)$ è un insieme (α-)piccolo.
- ***(α-)finita*** se è (α-)piccola e l'insieme dei morfismi è un insieme finito.

In [**MacLane1978**] viene data una definizione meno estensiva di grandezza, assumendo l'esistenza di un solo universo per la trattazione generale e lasciando al lettore la libertà di "ingrandirlo" rimpiazzandolo con uno maggiore laddove questi si trovasse a trattare categorie troppo grandi. Qui abbiamo semplicemente qualificato e chiarito meglio l'operazione di scelta di universi più grandi: ci siamo limitati ad una gerarchia di ω universi, ma nulla impedisce di estendere la stessa operazione a ordinali arbitrari.

Uno degli aspetti più vantaggiosi della Teoria delle Categorie è il ***principio di dualità***,molto informalmente un "paghi uno prendi due": ogni teorema in Teoria delle Categorie ha un equivalente che si dimostra "gratuitamente" passando alla categoria opposta, ne vedremo alcuni esempi.

Osservazione 1.1: Sulle categorie

Banalmente:

- Le identità sono uniche.
- Passando da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ la composizione dei morfimsi viene "ribaltata" a sua volta, infatti $(g \circ f)^{\mathsf{op}} = f^{\mathsf{op}} \circ g^{\mathsf{op}}$; vale inoltre $(\mathcal{C}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} = \mathcal{C}$.
- Dato che $\operatorname{ob} \mathcal{C}$ inietta sempre in $\hom \mathcal{C}$ con la mappa $X \mapsto \mathrm{id}_X$, in generale l'insieme dei morfismi può essere arbitrariamente più grande di quello degli oggetti, dunque la grandezza di una categoria è in generale indipendente dal suo insieme degli oggetti.

Dimostrazione

Forniamo un esempio dell'ultimo punto, gli altri sono banali.
Sia $\mathcal{V}$ la categoria con $\operatorname{ob} \mathcal{V} := \{\varnothing\}$ e $(\hom \mathcal{V}, \circ) \cong (\mathcal{G}_\omega, \cup)$: l'insieme degli oggetti di $\mathcal{V}$ è il più piccolo non vuoto possibile, mentre l'insieme dei morfismi di $\mathcal{V}$ è un insieme grande, dunque $\mathcal{V}$ non è solo grande, ma non è nemmeno localmente piccola.

$\square$

Da ora in avanti, assumeremo sempre (anche senza specificarlo) che le nostre categorie siano almeno localmente piccole per comodità.

Definizione 1.2: Sottocategoria

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie tali che $\operatorname{ob} \mathcal{C} \subset \operatorname{ob} \mathcal{D}$, $\hom \mathcal{C} \subset \hom \mathcal{D}$ e per ogni $f, g, h \in \hom C$ valga

$$h = f \circ_{\mathcal{C}} g = f \circ_{\mathcal{D}} g.$$

Allora $\mathcal{C}$ si dice una ***sottocategoria*** di $\mathcal{D}$.
Se per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \mathcal{C}$ vale $\mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{D}(X, Y)$, allora $\mathcal{C}$ si dice ***piena***.

Definizione 1.3: Sapori di morfismi

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $f : A \to B$ un morfismo. Esso può dirsi:

- ***Monomorfismo*** (o monico o mono) se la precomposizione è iniettiva, ovvero per ogni coppia di morfismi postcomponibili $g_1, g_2 : C \to A$ vale $fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.

- ***Epimorfismo*** (o epico o epi) se la postcomposizione è iniettiva, ovvero se per ogni coppia di morfismi precomponibili $g_1, g_2 : B \to C$ vale $g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$.
- ***Endomorfismo*** (o endo) se $A = B$.
- ***Sezione*** (o split mono) se ha un inverso sinistro, ovvero se esiste un morfismo $g : B \to A$ tale che $gf = \mathrm{id}_A$.
- ***Retrazione*** (o split epi) se ha un inverso destro, ovvero se esiste un morfismo $g : B \to A$ tale che $fg = \mathrm{id}_B$.
- ***Isomorfismo*** (o iso) se ha un inverso destro e sinistro. In particolare, A e B si dicono ***isomorfi*** (attraverso f) e li indicheremo con $f : A \cong_{\mathcal{C}} B$ omettendo usualmente f o $\mathcal{C}$.
- ***Automorfismo*** (o auto) se è iso e endo.

Osservazione 1.2: Sui morfismi

Valgono le seguenti:

- Le sezioni sono mono.
- Le retrazioni sono epi.
- Mono ed epi sono concetti duali, allo stesso modo lo sono sezioni e retrazioni.
- iso $\Leftrightarrow$ (split mono $\wedge$ epi) $\Leftrightarrow$ (mono $\wedge$ split epi) $\Rightarrow$ (epi $\wedge$ mono), ma nell'ultimo caso non vale l'implicazione inversa.
- Tutte le inverse sono uniche quando esistono.

Dimostrazione

Forniamo solo due esempi di morfismi che sono epici e monici ma non isomorfismi (le altre verifiche sono assolutamente automatiche):

- Consideriamo in **Haus** (1.1) l'inclusione $\iota : [0,1] \cap \mathbb{Q} \hookrightarrow [0,1]$ (entrambi con la topologia euclidea); questa è chiaramente monica in quanto iniettiva, ed è epica in quanto una funzione continua in **Haus** è completamente determinata dal suo valore su un sottospazio denso, ma non è isomorfismo dato che non è suriettiva.
- Consideriamo la categoria

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "1\leq 1"] \arrow[r, "1\leq 2"] & 2 \arrow[loop right, "2\leq 2"] \end{tikzcd}$$

  Dato che a destra o sinistra possiamo comporre solo con l'identità, $1 \leq 2$ è sia monico che epico, ma non è isomorfismo in quanto non ha inverso.

□

Definizione 1.4: Oggetti iniziali e terminali

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia I un oggetto.
I si dice ***oggetto iniziale*** se per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\iota_X : I \to X$
I si dice ***oggetto terminale*** se è l'oggetto iniziale di $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, o equivalentemente se per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\zeta_X : X \to I$.
Se I è sia terminale che iniziale, si dice ***oggetto zero***.

Proposizione 1.1: Unicità di oggetti iniziali e terminali

Se una categoria $\mathcal{C}$ ammette un oggetto iniziale (o terminale o zero), questo è unico a meno di unico isomorfismo.

Dimostrazione

Siano I, I' oggetti iniziali di $\mathcal{C}$; per definizione di oggetto iniziale, per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ deve valere $\iota_X = \iota'_X \circ \iota_{I'}$, dunque ponendo $X = I$ otteniamo $\iota_I = \mathrm{id}_I = \iota'_I \circ \iota_{I'}$; analogamente otteniamo l'altro lato dell'inversione.

$\square$

Introduciamo quello che può essere considerato un morfismo di categorie (e in effetti lo è in Teoria delle Categorie Superiori), ovvero il concetto di funtore. Di fatto la Teoria delle Categorie è nata per studiare i funtori, di cui l'esempio motivante è il gruppo fondamentale in Topologia Algebrica, e le trasformazioni naturali tra di essi.

Definizione 1.5: Funtore

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un ***funtore covariante*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste in due mappe $F : \mathrm{ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$ e $F : \hom\mathcal{C} \to \hom\mathcal{D}$ che rispettino la composizione, ovvero:

- Per ogni morfismo $f : X \to Y$ vale $Ff : FX \to FY$.
- Per ogni oggetto $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ vale $F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$.
- Per ogni coppia di morfismi componibili $f, g \in \hom\mathcal{C}$ vale $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.

Un ***funtore controvariante*** da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ è un funtore covariante $F : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{D}$. Anche se l'espressione "un funtore controvariante $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{D}$" tecnicamente indicherebbe un funtore covariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, la useremo quasi sempre per indicare un funtore controvariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, ovvero una controvarianza specificata due volte non farà una covarianza.
Un funtore si dice:

- ***Fedele*** se per ogni $X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è iniettiva.
- ***Pieno*** se per ogni $X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è suriettiva.
- ***Pienamente fedele*** se è pieno e fedele.
- ***Essenzialmente suriettivo sugli oggetti*** se per ogni oggetto $Y \in \mathcal{D}$ esiste un oggetto $X \in \mathcal{C}$ tale che $FX \cong_{\mathcal{D}} Y$.

Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sono due funtori, la loro composizione $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ è un funtore.

Ora possiamo definire una categoria assolutamente centrale, di fatto la categoria ambiente per tutta la pratica matematica "tradizionale" e che ci permette di definire una certa classe di sue "sottocategorie" in un senso più ampio e di un insieme di sue sovracategorie che permetta una trattazione adeguata della teoria generale:

Esempio 1.1: La categoria degli insiemi (α-)piccoli e categorie concrete

Per $\alpha \leq \omega$, indichiamo con Set_α la categoria i cui oggetti sono insiemi α-piccoli, ovvero elementi di $\mathcal{G}_\alpha$, e i cui morfismi sono le funzioni tra di loro con l'usuale composizione di funzioni insiemistiche; indicheremo semplicemente con Set la categoria Set_ω.
Una categoria $\mathcal{C}$ si dice ***concreta*** se è munita di un funtore fedele $U : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$, detto ***dimenticante***: informalmente, le categorie concrete sono quelle i cui oggetti sono insiemi (piccoli) dotati di una certa struttura e i cui morfismi sono funzioni insiemistiche che rispettano questa struttura. Alcune categorie concrete sono:

- Top degli spazi topologici e delle funzioni continue;
- Haus degli spazi topologici T_2 e delle funzioni continue tra loro;
- Mble degli spazi e delle funzioni misurabili;
- Meas degli spazi con misura e delle funzioni misurabili fra loro;
- $\mathsf{Vec}\mathbb{K}$ dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e delle mappe lineari;
- $\mathsf{NormVec}\mathbb{K}$ dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali normati e delle mappe lineari e continue.

Per $\alpha < \omega$, Set_α è piccola, ma Set_ω non lo è nemmeno localmente: due controesempi sono dati dagli insiemi

$$\hom\left(1, \bigcup_{\alpha<\omega} \mathcal{G}_\alpha\right), \qquad \hom\left(\bigcup_{\alpha<\omega} \mathcal{G}_\alpha, 2\right)$$

entrambi con cardinalità strettamente maggiore di qualsiasi $\mathcal{G}_\alpha$. Per qualsiasi $\alpha \leq \omega$, Set_α ha un unico oggetto iniziale, l'insieme vuoto 0, ed essenzialmente un'unico oggetto terminale, l'insieme 1.

Lemma 1.1: Riflessione di isomorfismi

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore. Se $f : X \cong Y$, allora $Ff : FX \cong FY$.
Se F è pienamente fedele e $g : FX \cong FY$, allora $X \cong Y$.

Dimostrazione

La prima implicazione è banale, dunque assumiamo che F sia pienamente fedele e $g : FX \cong FY$ sia un isomorfismo; dato che la mappa $\varphi := F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX,FY)$ è una biezione, esiste $f : X \to Y$ tale che $\varphi(f) = g$, dunque definiamo $f' := \varphi^{-1}(g^{-1})$ e dimostriamo che è un'inversa sinistra (dimostrare che è un'inversa destra è analogo). Dato che F è un funtore, vale

$$f'f = \varphi^{-1}(\varphi(f'f)) = \varphi^{-1}(\varphi(f')\varphi(f)) = \varphi^{-1}(g^{-1}g) = \varphi^{-1}(\mathrm{id}_{FX}) = \mathrm{id}_X$$

□

Adesso faremo una cosa un po' buffa, ovvero definiremo il prodotto di categorie come definiremmo normalmente il prodotto cartesiano di insiemi e più tardi lo useremo per definire il prodotto di oggetti in categorie generali.

Definizione 1.6: Categoria prodotto e bifuntore

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Definiamo la ***categoria prodotto*** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ come la categoria i cui oggetti sono le coppie ordinate di un oggetto di $\mathcal{C}$ e uno di $\mathcal{D}$ e dove

$$\hom((A,B),(C,D)) = \{(f,g) : f \in \mathcal{C}(A,C), g \in \mathcal{D}(B,D)\} = \hom(A,C) \times \hom(B,D).$$

Una categoria prodotto è naturalmente munita di due funtori $P_I : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to I$ con $I = \mathcal{C}, \mathcal{D}$, detti ***proiezioni***, tali che

$$P_{\mathcal{C}}((f,g) : (A,B) \to (C,D)) = (f : A \to C) \quad \text{e} \quad P_{\mathcal{D}}((f,g) : (A,B) \to (C,D)) = (g : B \to D).$$

Un funtore $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ si dice ***bifuntore***.

Perchè "spostiamo" il prodotto cartesiano alle categorie? Perchè spesso quando lavoriamo in qualche categoria ci risulta più agevole una definizione più "intrinseca" di prodotto, oppure abbiamo prodotti diversi: in **Rel**[2] il prodotto "categorico" è dato dall'unione disgiunta, nonostante **Set** sia una sua sottocategoria e in questa il prodotto sia l'usuale prodotto cartesiano.
Abbiamo visto che i morfismi sono trasformazioni tra oggetti, mentre i funtori sono trasformazioni tra morfismi. Introduciamo ora un ulteriore "livello" di frecce, le trasformazioni naturali, ovvero trasformazioni tra funtori.

Definizione 1.7: Trasformazione naturale

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorie e siano $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ due funtori.
Una ***trasformazione naturale*** $\Phi : F \Rightarrow G$ è un insieme di morfismi $\{\Phi_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}}$ tali che per ogni $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccccc} X & \qquad & F(X) & \xrightarrow{\Phi_X} & G(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ Y & & F(Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & G(Y) \end{array}$$

Una trasformazione naturale tale per cui tutti i morfismi Φ_X sono isomorfismi si dice ***isomorfismo naturale***.

Definizione 1.8: Equivalenza di categorie

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie e siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ due funtori.
La coppia (F,G) si dice ***equivalenza di categorie*** tra F e G se esistono due isomorfismi naturali

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \cong GF \quad \text{e} \quad \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \cong FG$$

Useremo questa caratterizzazione[3] per le equivalenze di categorie, di cui omettiamo la dimostrazione in quanto più lunga e laboriosa che profonda.

[2] Categoria degli insiemi piccoli e delle relazioni tra loro
[3] Senza assumere l'assioma della scelta in realtà si avrebbe solo un'implicazione

Proposizione 1.2: Caratterizzazione per un'equivalenza di categorie

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore.
Questo definisce un'equivalenza di categorie se e solo se è pienamente fedele ed essenzialmente suriettivo sugli oggetti.

Definizione 1.9: Funtori aggiunti

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie localmente piccole e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ due funtori.
Questi si dicono ***aggiunti*** se esiste un isomorfismo in $\mathbf{Set}$

$$\mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$$

naturale per ogni $c \in \mathcal{C}$ e $d \in \mathcal{D}$, ovvero sia come trasformazione naturale $\mathcal{D}(F(-), d) \to \mathcal{C}(-, G(d))$ sia come trasformazione naturale $\mathcal{D}(F(c), -) \to \mathcal{C}(c, G(-))$.
Scriveremo $F \dashv G$ per indicare che F è aggiunto sinistro a G e che G è aggiunto destro a F.

2 Lemma di Yoneda e conseguenze

Un risultato assolutamente centrale in Teoria delle Categorie è il lemma di Yoneda, una versione "categoriale" del teorema di Cayley in Teoria dei Gruppi[4].

Definizione 2.1: Categoria dei funtori

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie.
Definiamo la categoria $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, che spesso denoteremo con $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$, la ***categoria dei funtori*** da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, i cui oggetti sono i funtori covarianti e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali con la ***composizione verticale***: definiamo per $\mu : F \to G$ e $\nu : G \to H$ la loro composizione verticale $\nu\mu : F \to H$ col seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "Ff"] \arrow[rr, bend left, "(\nu\mu)_X"] & G(X) \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "Gf"] & H(X) \arrow[d, "Hf"] \\
Y & F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[rr, bend right, "(\nu\mu)_Y"] & G(Y) \arrow[r, "\nu_Y"] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

Se le categorie sono chiare dal contesto, invece di scrivere $[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G)$ o $\hom_{[\mathcal{C}, \mathcal{D}]}(F, G)$ scriveremo $\mathrm{Nat}(F, G)$.

Definizione 2.2: hom-funtore covariante e controvariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola[a] e sia A un oggetto di $\mathcal{C}$.
Definiamo due funtori $h_A : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ e $h^A : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$, detti hom-***funtori*** (rispettivamente covariante e controvariante) nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd}
\hom(A, X) \arrow[d, "h_A(f) = f \circ -"] & X \arrow[l, mapsto, "h_A"'] \arrow[r, mapsto, "h^A"] \arrow[d, "f"] & \hom(X, A) \\
\hom(A, Y) & Y \arrow[l, mapsto, "h_A"'] \arrow[r, mapsto, "h^A"] & \hom(Y, A) \arrow[u, "h^A(f) = - \circ f"']
\end{tikzcd}$$

Inoltre possiamo interpretare $\hom(-, -)$ come un bifuntore $\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.
Un funtore covariante o controvariante F a valori in $\mathbf{Set}$ si dice ***rappresentabile*** se esiste una ***rappresentazione*** di F, ovvero un oggetto A di $\mathcal{C}$ e un isomorfismo naturale $\Phi : h_A \to F$ nel caso covariante, $\Phi : h^A \to F$ nel caso controvariante.

[a] È vero che abbiamo detto che lo avremmo sempre assunto, ma è importante specificarlo in questo caso.

[4] E in effetti, il teorema di Cayley può essere ridotto ad un caso particolare del lemma di Yoneda

Teorema 2.1: Lemma di Yoneda covariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e sia $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ un funtore covariante.
Allora esiste un isomorfismo in Set

$$\mathrm{Nat}(h_A, F) \cong F(A)$$

naturale in A e F, ovvero sia se visto come trasformazione naturale $\mathrm{Nat}(h_\bullet, F) \to F$ sia come trasformazione naturale $\mathrm{Nat}(h_A, -) \to -(A)$.

Dimostrazione

Diamo uno sketch della dimostrazione, mancano alcuni dettagli come la dimostrazione della naturalità in A e F ma l'importante è lo spirito della cosa.
Sia $\Phi \in \mathrm{Nat}(h_A, F)$. Dato che questa è naturale, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dddd, "f"] & h_A(A) \arrow[rrr, "\Phi_A"] \arrow[dddd, "h_A(f)"] & & & F(A) \arrow[dddd, "F(f)"] \\
& & \mathrm{id}_A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & u \arrow[d, mapsto] & \\
& & f \circ \mathrm{id}_A = f \arrow[r, mapsto] & (Ff)(u) = \Phi_X(f) & \\
& & & & \\
X & h_A(X) \arrow[rrr, "\Phi_X"] & & & F(X)
\end{tikzcd}$$

Vediamo che ci basta specificare l'assegnazione blu per determinare univocamente tutto il resto:

- Partendo da $\Phi \in \mathrm{Nat}(h_A, F)$ ci basta specificare $\Phi \mapsto u := \Phi_A(\mathrm{id}_A)$ elemento di $F(A)$.
- Partendo da $u \in F(A)$ costruiamo la trasformazione naturale Φ definendo per ogni $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ il morfismo $\Phi_X(f : A \to X) := Ff(u)$.

$\square$

Abbiamo dualmente la versione controvariante:

Corollario 2.1: Lemma di Yoneda controvariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e sia $F : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$ un funtore controvariante.
Allora esiste un isomorfismo in Set

$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \cong F(A)$$

naturale in A e F.

Osservazione 2.1: Lemma di Yoneda e grandezza

In generale l'isomorfismo datoci da 2.1 non è una biezione tra insiemi piccoli, in quanto gli elementi di $\mathrm{Nat}(h_A, F)$ non sono in generale insiemi piccoli.
Prendiamo ad esempio il funtore identità $\mathbf{Id}$ da Set (ricordiamo la definizione 1.1) in sè stessa: noi abbiamo che $\mathrm{Nat}(h_S, \mathbf{Id})$ è in biezione con S, ma gli elementi di $\mathrm{Nat}(h_S, \mathbf{Id})$ sono indicizzati da $\mathcal{G}$, che non è affatto un insieme piccolo.
Avendo l'assioma 0.1 non incorriamo in problemi di tipo logico o fondativo, ma se non avessimo limitato in questo modo la grandezza delle nostre categorie dovremmo gestire in qualche modo la collezione $\mathrm{Nat}(h_S, \mathbf{Id})$, che per quanto ci sia garantito debba essere "grande quanto" un insieme, sarebbe una collezione di elementi normalmente considerati come classi proprie, ovvero classi che non possono appartenere ad altre classi.

Una delle più naturali applicazioni del lemma di Yoneda è l'embedding di Yoneda, fondamentale in gran parte della topologia e della geometria moderna: esso permette di identificare una categoria $\mathcal{C}$ con una sottocategoria della cosiddetta ***categoria dei prefasci su*** $\mathcal{C}$, che è solo un altro nome per $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$. Ad esempio se interpretiamo la topologia τ di uno spazio (X, τ) come una categoria, dove i morfismi sono dati dall'inclusione insiemistica, questa è completamente determinata dalle classi delle funzioni continue entranti nei (o uscenti dai) suoi aperti.

Teorema 2.2: Embedding di Yoneda covariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Questa è equivalente ad una sottocategoria piena di $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ tramite la mappa $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ definita da questo diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}(A)(X) = h^A(X) \arrow[rrr, "\mathcal{Y}(f)(X)=f\circ -"] & & & \mathcal{Y}(B)(X) = h^B(X) \\
& (X \xrightarrow{m\circ g} A) \arrow[r, mapsto] & (X \xrightarrow{f\circ m\circ g} B) & \\
& (Y \xrightarrow{m} A) \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & (Y \xrightarrow{f\circ m} B) \arrow[u, mapsto] & \\
\mathcal{Y}(A)(Y) = h^A(Y) \arrow[rrr, "\mathcal{Y}(f)(Y)=f\circ -"] \arrow[uuu, "\mathcal{Y}(A)(g)=-\circ g"] & & & \mathcal{Y}(B)(Y) = h^B(Y) \arrow[uuu, "\mathcal{Y}(B)(g)=-\circ g"']
\end{tikzcd}$$

Dove un oggetto A di $\mathcal{C}$ viene mandato nel funtore $h^A : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Set}$ definito sopra e un morfismo $f : A \to B$ viene mandato nella sua postcomposizione, che è una trasformazione naturale da h^A a h^B come si vede nel diagramma.

Dimostrazione

Applicando il corollario 2.1 con $F = h^B$ scorrendo su $B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ otteniamo

$$\operatorname{Nat}(h^A, h^B) \cong h^B(A), \text{ o equivalentemente, } \operatorname{Nat}(h^A, h^B) \cong \hom(A, B).$$

Vediamo che dunque l'assegnazione $A \mapsto h^A$ definisce un funtore covariante $h^\bullet : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$ pienamente fedele (ma non essenzialmente suriettivo sugli oggetti). Restringendo $h^\bullet$ all'immagine di $\mathcal{C}$ in $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}]$, otteniamo un'equivalenza di categorie (dato che la restrizione all'immagine è tautologicamente suriettiva) per la proposizione 1.2.

$\square$

Abbiamo dualmente la versione controvariante:

Corollario 2.2: Embedding di Yoneda controvariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Allora la sua categoria opposta $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ è equivalente ad una sottocategoria piena di $[\mathcal{C}, \mathsf{Set}]$ tramite la mappa $\mathcal{Y}' : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to [\mathcal{C}, \mathsf{Set}]$ definita da questo diagramma (dove abbiamo morfismi $f : A \to B$ e $g : X \to Y$ di $\mathcal{C}$):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}'(A)(X) = h_A(X) \arrow[ddd, "\mathcal{Y}'(A)(g)=g\circ -"'] & & & \mathcal{Y}'(B)(X) = h_B(X) \arrow[lll, "\mathcal{Y}'(f)(X)=-\circ f"'] \arrow[ddd, "\mathcal{Y}(B)(g)=g\circ -"] \\
& (A \xrightarrow{m\circ f} X) \arrow[d, mapsto] & (B \xrightarrow{m} X) \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \\
& (A \xrightarrow{g\circ m\circ f} Y) & (B \xrightarrow{g\circ m} Y) \arrow[l, mapsto] & \\
\mathcal{Y}'(A)(Y) = h_A(Y) & & & \mathcal{Y}'(B)(Y) = h_B(Y) \arrow[lll, "\mathcal{Y}'(f)(Y)=-\circ f"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Ora grazie al lemma di Yoneda possiamo dimostrare un fatto che ci servirà più tardi:

Lemma 2.1: Essenziale unicità degli aggiunti

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie localmente piccole e siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G_1, G_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtori tali che $F \dashv G_1$ e $F \dashv G_2$ oppure $G_1 \dashv F$ e $G_2 \dashv F$.
Allora $G_1 \cong G_2$.

Dimostrazione

Dimostriamo il caso destro, il caso sinistro segue per dualità; scriviamo le aggiunzioni in termini degli hom-funtori:

$$h^d(Fc) \cong h^{G_1 d}(c) \cong h^{G_2 d}(c)$$

Ottenendo dunque $\mathcal{Y} \circ G_1 \cong \mathcal{Y} \circ G_2$: dal teorema 2.2, ovvero la piena fedeltà dell'embedding di Yoneda, segue la tesi.

$\square$

3 Limiti

Uno dei concetti più importanti in Teoria delle Categorie è quello di limite. Per definire il concetto di limite dobbiamo dare la definizione formale di diagramma in una categoria, che generalizza il concetto di famiglia indicizzata in **Set**.

Definizione 3.1: Diagramma commutativo

Siano $\mathcal{J}, \mathcal{C}$ due categorie.
Si dice ***diagramma (commutativo)*** in $\mathcal{C}$ di forma $\mathcal{J}$ un funtore $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$; $\mathcal{J}$ si dice ***forma*** o ***indice*** del diagramma: se $\mathcal{J}$ è finita o piccola, il diagramma F si dirà rispettivamente ***finito*** o ***piccolo***.
La ***categoria dei diagrammi*** in $\mathcal{C}$ di forma $\mathcal{J}$ è la categoria dei funtori $[\mathcal{J}, \mathcal{C}]$.

Se in Teoria degli Insiemi definiamo una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X indicizzata dall'insieme J come un'applicazione $J \to \mathcal{P}(X)$, qui abbiamo bisogno di un'applicazione che rispetti la struttura di categoria, ovvero un funtore: intuitivamente oltre a indicizzare gli oggetti indicizziamo anche i morfismi in modo che la composizione sia rispettata. Per la prossima definizione ci servirà di considerare un diagramma particolare, il diagramma costante $K_N : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ (dove N è un oggetto di $\mathcal{C}$) che manda ogni oggetto di $\mathcal{J}$ in N e ogni morfismo in id_N.

Definizione 3.2: Cono e cocono

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, sia $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramma e sia N un oggetto di $\mathcal{C}$ e sia $K_N : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ il funtore costante, ovvero il funtore

$$K_N(f : X \to Y) = (\mathrm{id}_N : N \to N).$$

Si dice ***cono*** in $\mathcal{C}$ su F con punta N un morfismo $\psi : K_N \to F$ di $[\mathcal{J}, \mathcal{C}]$, ovvero una famiglia di morfismi

$$\{\psi_X : N \to F(X)\}_{X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{J}} \subset \hom \mathcal{C}$$

Tali che per ogni morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{J}$ il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

Dualmente, si dice ***cocono*** su F con punta N un morfismo $\psi : F \to K_N$, o equivalentemente un cono in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.
Definiamo la ***categoria dei coni*** in $\mathcal{C}$ su F come la categoria i cui oggetti sono i coni intesi come coppia $(N, \psi^N : K_N \to F)$ e i cui morfismi sono i cosiddetti morfismi ***medianti***, ovvero i morfismi $\alpha : N \to M$ di $\mathcal{C}$ tali per cui per ogni oggetto X di $\mathcal{J}$ valga:

$$\psi^M_X \circ \alpha = \psi^N_X,$$

Denoteremo questa categoria come $\mathbf{Cone}(\mathcal{C}, F)$.

Ed eccoci pronti a definire i limiti.

Definizione 3.3: Limite e colimite

Sia $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramma.
Si dice ***limite*** (o limite proiettivo) di F in $\mathcal{C}$ l'oggetto terminale di $\mathsf{Cone}(\mathcal{C}, F)$.
Si dice ***colimite*** (o limite induttivo) di F in $\mathcal{C}$ il limite di F in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, o equivalentemente l'oggetto iniziale di $\mathsf{Cone}(\mathcal{C}, F)$.
Indichiamo rispettivamente limiti e colimiti di F in $\mathcal{C}$ come

$$\varprojlim F \quad \text{e} \quad \varinjlim F.$$

Un limite si dice rispettivamente piccolo o finito se lo è F come diagramma.
Una categoria che ammette tutti i (co)limiti piccoli si dice ***(co)completa***.

Più esplicitamente[5], possiamo definire il limite di F in $\mathcal{C}$ come il cono (L, ψ^L) tale che per ogni altro cono (N, ψ^N) esista un unico morfismo $\lambda_N : N \to L$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[ddl, bend right, "\psi^N_X"'] \arrow[d, dashed, "\lambda_N"] \arrow[ddr, bend left, "\psi^N_Y"] & \\
& L \arrow[dl, "\psi^L_X"'] \arrow[dr, "\psi^L_X"] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Chiameremo una tale proprietà[6] ***universalità***.
Il concetto di limite è uno dei concetti centrali della Teoria delle Categorie: analogamente a come sia possibile definire equivalentemente aperti, chiusi, intorni, chiusura, interno e così via in Topologia Generale, è possibile definire i funtori aggiunti in termini di limiti, i limiti in termini di funtori aggiunti ed equivalentemente tante altre costruzioni in Teoria delle Categorie.
Talvolta diremo che una categoria "ammette/ha tutti i..." facendo riferimento a dei (co)limiti definiti su una qualche classe di diagrammi: questo significa che ogni diagramma di quella classe ammette un (co)limite in $\mathcal{C}$.

Osservazione 3.1: Limiti e oggetti iniziali

Sia $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramma.

- Se $\mathcal{J}$ ammette un oggetto iniziale I, allora $\lim_{\leftarrow} F = F(I)$.
- Dualmente, se $\mathcal{J}$ ammette un oggetto terminale Z, allora $\lim_{\rightarrow} F = F(Z)$.
- Infine, se $\mathcal{J}$ ammette un oggetto zero 0, allora $\lim_{\leftarrow} F = \lim_{\rightarrow} F = F(0)$.

3.1 Limiti notevoli

Presentiamo alcuni limiti di particolare importanza (in effetti delle classi di limiti) nella pratica matematica; in questa sezione, assumeremo per semplicità che $\mathcal{J}$ sia una sottocategoria (di forma opportunamente specificata) di $\mathcal{C}$ e $F : \mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{C}$ sia il funtore di inclusione: questo ci permetterà di dire semplicemente "Sia $\mathcal{J}$ un diagramma" o parlare di $\lim_{\leftarrow} \mathcal{J}$.

Definizione 3.4: Prodotto

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $\mathcal{J}$ un diagramma discreto (ovvero i cui unici morfismi sono le identità).
Si dice ***prodotto*** di $\mathcal{J}$ in $\mathcal{C}$ il limite di $\mathcal{J}$ in $\mathcal{C}$, che indicheremo come

$$\prod_{X \in \operatorname{ob} \mathcal{J}} X \quad \text{oppure, più semplicemente,} \quad \prod \mathcal{J}\ .$$

Un prodotto in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ si dice ***coprodotto*** in $\mathcal{C}$ e lo indicheremo come $\coprod \mathcal{J}$, mentre prodotti e coprodotti binari verranno indicati (nel caso in cui sia chiara la categoria ambiente) rispettivamente come $A \times B$ e $A + B$.
I morfismi $\pi_X : \prod \mathcal{J} \to X$ si dicono ***proiezioni***, mentre i morfismi $\iota_X : X \to \coprod \mathcal{J}$ si dicono ***inclusioni***.

[5] Ovvero scrivendo per esteso la definizione di oggetto terminale
[6] Ovvero essere il cono terminale/iniziale su un qualche diagramma

È immediato osservare che se $\mathcal{C}$ ammette un oggetto terminale, questo è il prodotto del diagramma vuoto.

Definizione 3.5: Pullback o prodotto fibrato

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, e sia $\mathcal{J}$ il diagramma $\{X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y\}$, detto ***cospan***[a].
Il limite di $\mathcal{J}$ in $\mathcal{C}$ si dice ***pullback*** di $\mathcal{J}$, o anche ***prodotto fibrato*** di X e Y lungo (o su) Z e si può indicare con $X \times_Z Y$.
Un pullback in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ si dice ***pushout***.

[a]E ovviamente $\mathcal{J}^{\mathsf{op}}$ si dirà ***span***

Il pullback è una sorta di analogo categoriale delle equazioni: è facile dimostrare che in **Set** e nelle categorie concrete il pullback di $\{X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y\}$ è il sottoinsieme $\{(x,y) | f(x) = g(y)\}$ di $X \times Y$ e i morfismi che lo accompagnano sono la restrizione delle proiezioni. Un altro esempio è quello del grafico di una funzione, che è il pullback del diagramma $\{X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\mathrm{id}_Y} Y\}$.

Definizione 3.6: Equalizzatore

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $\mathcal{J}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Si dice ***equalizzatore*** di f e g il limite di $\mathcal{J}$ in $\mathcal{C}$, e lo indichiamo con $\mathrm{eq}(f,g)$, come indichiamo l'unico morfismo "primitivo" del cono con $e_{f,g} : \mathrm{eq}(f,g) \to X$.
Un equalizzatore in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ si dice ***coequalizzatore***.

3.2 Esistenza dei limiti

Considerando l'ubiquità del concetto di (co)limite, è importante essere in grado di dimostrare che le categorie in cui si sta lavorando siano (co)complete, ma può sembrare difficile dimostrare l'esistenza del (co)limite per diagrammi piccoli di forma arbitraria. Fortunatamente il prossimo risultato ci dà una condizione necessaria e sufficiente per la (co)completezza di una categoria e ci mostra che in realtà ogni limite si può costruire "facendo prodotti e risolvendo equazioni".

Teorema 3.1: Esistenza dei limiti

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.
$\mathcal{C}$ ammette tutti i prodotti piccoli ed equalizzatori per ogni coppia di morfismi se e solo $\mathcal{C}$ è una categoria completa.

Dimostrazione

Se $\mathcal{C}$ è una categoria completa allora ammette ovviamente tutti i prodotti piccoli e tutti gli equalizzatori, in quanto questi sono casi di limite piccolo, dunque supponiamo che $\mathcal{C}$ ammetta tutti i prodotti piccoli e gli equalizzatori di coppie di morfismi.
Sia $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un diagramma piccolo e consideriamo i seguenti prodotti:

$$S := \prod_{X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{J}} F(X) \qquad \text{e} \qquad T := \prod_{u \in \hom \mathcal{J}} F(\mathrm{cod}(u))$$

Le cui proiezioni indicheremo rispettivamente con σ_i e τ_i.
Dato che per ogni $u \in \hom \mathcal{J}$ abbiamo ovviamente $\mathrm{cod}(u) \in \mathrm{ob}\,\mathcal{J}$, S ammette mappe (precisamente le sue proiezioni) verso ogni $F(\mathrm{cod}(u))$, dunque per la proprietà universale del prodotto esiste ed è unica $f : S \to T$ tale che il seguente diagramma commuti per ogni $u \in \hom \mathcal{J}$:

$$\begin{tikzcd} & F(\mathrm{cod}(u)) & \\ S \arrow[ur, "\sigma_{F(\mathrm{cod}(u))}"] \arrow[rr, dashed, "f"] & & T \arrow[ul, "\tau_{F(\mathrm{cod}(u))}"'] \end{tikzcd}$$

Analogamente, deve esistere ed essere unica una mappa $g : S \to T$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "\sigma_{F(\mathrm{dom}(u))}"] & T \arrow[d, "\tau_{F(\mathrm{cod}(u))}"] \\
F(\mathrm{dom}(u)) \arrow[r, "F(u)"] & F(\mathrm{cod}(u))
\end{tikzcd}$$

Consideriamo dunque $L := \mathrm{eq}(f, g)$ e la mappa $e_{f,g} : L \to S$ che equalizza f e g: questo è il nostro candidato limite, dobbiamo prima controllare che sia un cono definendo le proiezioni su F, ma vediamo che basta definirle nel seguente modo dato qualsiasi $u : X \to Y$ di $\mathcal{J}$:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, "e_{f,g}"] \arrow[drrr, dashed, bend left, "\psi_{F(Y)}:=\tau_{F\,\mathrm{cod}(u)}\circ f\circ e_{f,g}=\tau_{F\,\mathrm{cod}(u)}\circ g\circ e_{f,g}"] \arrow[ddr, dashed, bend right, "\psi_{F(X)}:=\sigma_{F(X)}\circ e_{f,g}"'] & & & \\
& S \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\sigma_{F(X)}"] & T \arrow[r, dashed, "\tau_{F(\mathrm{cod}(u))}"] & F(Y) = F(\mathrm{cod}(u)) \\
& F(X) \arrow[urr, "F(u)"] & &
\end{tikzcd}$$

Ora dobbiamo dimostrare che è effettivamente universale: considerando un altro cono (N, φ), le sue φ definiscono un'unica $h : N \to S$, ma dato che è un cono deve anche valere $f \circ h = g \circ h$, dunque h è una mappa equalizzante e dunque deve esistere un'unica mappa $\eta : N \to L$ tale che $h = e_{f,g} \circ \eta$.

$\square$

Corollario 3.1: Esistenza dei colimiti

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.
$\mathcal{C}$ ammette tutti i coprodotti piccoli e coequalizzatori per ogni coppia di morfismi se e solo $\mathcal{C}$ è una categoria cocompleta.

3.3 Prodotti

Chiudiamo con una discussione di una diversa caratterizzazione del prodotto di due oggetti in una categoria.
La definizione che abbiamo dato in 3.4 è evidentemente utile quando si parla di lavorare coi prodotti nell'usuale pratica matematica, ad esempio è una definizione meno "pesante" di quella che si dà dei prodotti in **Top** o **Mble** nella maggior parte dei corsi introduttivi di Topologia Generale o Teoria della Misura. Allo stesso modo non dipende da scelte arbitrarie, come di una norma prodotto in **NormVec**$\mathbb{K}$ o di una misura prodotto in **Meas**.
Tuttavia in altre applicazioni della Teoria delle Categorie, ad esempio in Topologia Algebrica o informatica teorica, può essere agevole considerare il prodotto di due oggetti non come definito intrinsecamente tramite proprietà universale, ma come un bifuntore.

Teorema 3.2: Caratterizzazione del prodotto binario

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e sia $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ il funtore diagonale, ovvero l'applicazione

$$\Delta(f : X \to Y) = ((f, f) : (X, X) \to (Y, Y)).$$

Se $\mathcal{C}$ ammette i prodotti binari, l'applicazione $\Pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definita da

$$\Pi((f, g) : (X, Y) \to (W, Z)) := (f \times g : X \times Y \to W \times Z)$$

definisce un funtore aggiunto destro a Δ.

Dimostrazione

Osserviamo che dalle definizioni di categoria prodotto (definizione 1.6), di prodotto nella definizione 3.4 e assumendo che il prodotto in **Set** sia l'usuale prodotto cartesiano[a], la seguente catena di biezioni è verificata in **Set** per ogni A, B e C oggetti in $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\hom_{\mathcal{C}^2}(\Delta A, (B, C)) &\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}^2}((A, A), (B, C)) \\ &\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times \hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ &\cong_{\mathsf{Set}} \underbrace{\hom_{\mathcal{C}}(A, B \times C)}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \to \mathsf{Set}} = \hom_{C}(A, \Pi(B, C))\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che Π è effettivamente una mappa aggiunta destra alla mappa diagonale; dovremmo dimostrare la funtorialità, ma è banale e consiste semplicemente nell'applicare le proprietà universali dei prodotti. Applicando il lemma 2.1, otteniamo l'essenziale unicità, concludendo.

$\square$

[a] Dimostrazione lasciata per esercizio al lettore

Corollario 3.2: Caratterizzazione del coprodotto binario

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e sia $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ il funtore diagonale.
Se $\mathcal{C}$ ammette i coprodotti binari, l'applicazione $\amalg : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definita da

$$\amalg((f, g) : (X, Y) \to (W, Z)) := (f + g : X + Y \to W + Z)$$

definisce un funtore aggiunto sinistro a Δ.

4 Categorie Cartesiane Chiuse

Definizione 4.1

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano X, Y oggetti di $\mathcal{C}$ che abbiano un prodotto in $\mathcal{C}$.
Si dice ***esponenziale*** di Z e Y in $\mathcal{C}$ un oggetto, indicato con Z^Y, munito di un morfismo $\mathrm{eval}_{Y,Z} : Z^Y \times Y \to Z$ tale che per ogni morfismo $f : X \times Y \to Z$ esista un unico $\lambda f : X \to Z^Y$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[d, "\lambda f \times \mathrm{id}_Y"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Z^Y \times Y \arrow[r, "\mathrm{eval}_{Y,Z}"'] & Z \end{tikzcd}$$

Inoltre l'assegnazione $f \mapsto \lambda f$ deve definire una biezione

$$\hom(X \times Y, Z) \cong \hom X, Z^Y$$

Definizione 4.2: Categoria Cartesiana Chiusa

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Questa si dice ***cartesiana chiusa*** se soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\mathcal{C}$ ammette un oggetto terminale 1;
2. $\mathcal{C}$ ammette tutti i prodotti binari;
3. $\mathcal{C}$ ammette tutti gli esponenziali.

Le condizioni (1) e (2) possono essere combinate richiedendo che $\mathcal{C}$ ammetta tutti i prodotti finiti, dove l'oggetto terminale è il prodotto della famiglia vuota.

Esempio 4.1: Set_α è cartesiana chiusa

La categoria Set_α è cartesiana chiusa per ogni $\alpha \leq \omega$.

Dimostrazione

Controlliamo le tre condizioni:

1. L'oggetto terminale è l'insieme singoletto 1;

2. Il prodotto è dato dal prodotto cartesiano;
3. L'esponenziale è dato da $Z^Y = \hom(Y, Z)$ e i morfismi sono definiti dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[ld, equal] \arrow[rrdd, "f"] & & \\
X \times Y \arrow[ddd, "\lambda f \times \mathrm{id}_Y"'] & (x,y) \arrow[dd, mapsto] \arrow[rdd, mapsto] & & \\
 & & & Z \arrow[dd, equal] \\
 & (\lambda f(x) : Y \to Z, y) \arrow[r, mapsto] & \lambda f(x)(y) = f(x,y) & \\
Z^Y \times Y \arrow[rrr, "\mathrm{eval}_{Y,Z}"] & & & Z
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 4.1: CCC e oggetti zero

Sia $\mathcal{C}$ una categoria cartesiana chiusa con oggetto terminale 1.
Se $\mathcal{C}$ ammette un oggetto zero $0 \cong 1$, allora ogni coppia di oggetti in $\mathcal{C}$ è isomorfa tramite un unico isomorfismo.

Dimostrazione

Per ogni coppia di oggetti X, Y è verificata la seguente catena di biezioni:

$$\hom(X, Y) \cong \hom(1 \times X, Y) \cong \hom(1, Y^X) \cong \hom(0, Y^X) = \{\zeta_{Y^X} : 0 \to Y^X\}$$

analogamente vale per $\hom(Y, X)$, segue la tesi.

□

L'intuizione sugli oggetti esponenziali come analoghi agli spazi di funzioni nel caso di **Set** ci suggerisce di cercare esempi di categorie cartesiane chiuse, almeno nel caso concreto, in categorie che abbiano i prodotti e dove l'hom-set tra due oggetti abbia la struttura di un oggetto in sè.
Seguendo questa intuizione, ci si potrebbe chiedere se la categoria degli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, magari di dimensione finita, sia cartesiana chiusa: d'altronde ha un oggetto terminale nello spazio vettoriale banale $\{0\}$, ha il prodotti binario nel prodotto cartesiano e in effetti $\hom(V, W)$ ha una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; tuttavia il lemma che abbiamo visto impedisce non solo agli spazi vettoriali, ma ai moduli in generale, di formare una categoria cartesiana chiusa.

Esempio 4.2: RMod non è cartesiana chiusa

Per qualsiasi anello R, la categoria R**Mod** non è cartesiana chiusa; in particolare dunque, per qualsiasi campo $\mathbb{K}$, la categoria **Vec**$(\mathbb{K})$ non è cartesiana chiusa.

Dimostrazione

R**Mod** ha un oggetto zero $\{0\}$, il modulo banale, ma dunque se fosse cartesiana chiusa tutti i moduli sarebbero isomorfi per il lemma 4.1; dato che questo non è vero, R**Mod** non può essere cartesiana chiusa.

□

Teorema 4.1

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola con prodotti binari *specificati*.
Questa è cartesiana chiusa se e solo se i seguenti funtori hanno degli *specifici* aggiunti destri per ogni oggetto B:

$$0 : \mathcal{C} \ni (f : X \to Y) \mapsto (\mathrm{id}_0 : 0 \to 0) \in \mathbf{1}$$

$$\Delta : \mathcal{C} \ni (f : X \to Y) \mapsto ((f, f) : (X, X) \to (Y, Y)) \in \mathcal{C}^2$$

$$- \times B : \mathcal{C} \ni (f : X \to Y) \mapsto (f \times \mathrm{id}_B : X \times B \to Y \times B) \in \mathcal{C}$$

5 La categoria $\mathsf{PER}(\mathbb{N})$

5.1 Computabilità

Consideriamo la seguente categoria:

Definizione 5.1

Sia $\mathsf{pfn}(\mathbb{N})$ la categoria i cui oggetti sono potenze finite di $\mathbb{N}$, compreso $\mathbb{N}^0 = 1$, e i cui morfismi sono le ***funzioni parziali*** su $\mathbb{N}$, ovvero dove un morfismo $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ è dato da una funzione $f : D \to \mathbb{N}^m$, dove $D \subset \mathbb{N}^k$ può essere anche vuoto.
I morfismi identità corrispondono alle funzioni identità e la composizione $g \circ f$ è data dalla funzione $g|_{\mathrm{dom}\, f} \circ f$

Osservazione 5.1

Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, la funzione vuota $\varnothing$ definisce un valido morfismo $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$.

Osservazione 5.2

Mentre l'insieme $\mathrm{ob}\,\mathsf{pfn}(\mathbb{N})$ è numerabile, $\hom \mathsf{pfn}(\mathbb{N})$ ha cardinalità del continuo.

Dimostrazione

Dato che le funzioni totali sono casi particolari di funzioni parziali, e le funzioni parziali sono casi particolari di relazioni (che sono semplicemente sottoinsiemi del prodotto cartesiano), valgono le seguenti inclusioni:

$$\hom_{\mathsf{Set}}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}^m) \subset \hom_{\mathsf{pfn}}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}^m) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m)$$

Dunque passando alle cardinalità per $n, m \geq 1$ possiamo concludere che $\hom_{\mathsf{pfn}}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}^m)$ abbia cardinalità del continuo; a questo punto basta osservare che

$$\hom \mathsf{pfn}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}} \hom_{\mathsf{pfn}}(\mathbb{N}^n, \mathbb{N}^m)$$

Dato che è un'unione numerabile di insiemi che hanno al più cardinalità del continuo e quasi sempre la raggiungono, possiamo concludere che abbia cardinalità del continuo.

Definizione 5.2

Consideriamo la sottocategoria $\mathsf{grf}(\mathbb{N})$ di $\mathsf{pfn}(\mathbb{N})$ definita da $\mathrm{ob}\,\mathsf{grf}(\mathbb{N}) = \mathrm{ob}\,\mathsf{pfn}(\mathbb{N})$ e il cui insieme dei morfismi $\mathcal{R}$ è definito come il minimo sottoinsieme di $\hom \mathsf{pfn}(\mathbb{N})$ tale che:

1. Le funzioni zero $z_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^0$ appartengono a $\mathcal{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. La funzione successore $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ appartiene a $\mathcal{R}$.
3. Le proiezioni $\pi_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ appartengono a $\mathcal{R}$; notiamo che questo include la funzione $\pi_0 : 1 \to \mathbb{N}$ di scelta di un elemento.
4. Se $f : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}^n$ e $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ appartengono a $\mathcal{R}$, allora la loro composizione $g \circ f$ appartiene a $\mathcal{R}$.
5. Se $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ e $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}^n$ appartengono a $\mathcal{R}$, allora la funzione $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^n$ definita per induzione da
$$h(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } y = 0 \\ g(\mathbf{x}, y-1, y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$
appartiene a $\mathcal{R}$.
6. Se $f \in \hom_{\mathsf{pfn}}(\mathbb{N}^{k+1}, \mathbb{N})$, allora la funzione definita da
$$\mu_f(\mathbf{x}) = \min\{y \in \mathbb{N} : f(\mathbf{x}, y) = 0\}$$
dove questo minimo esiste, indefinita altrimenti, appartiene a $\mathcal{R}$

Questa è detta categoria delle ***funzioni ricorsive generali***; omettendo il requisito 6 si ottiene la categoria delle ***funzioni ricorsive primitive*** $\mathsf{prf}(\mathbb{N})$.

Teorema 5.1: Tesi di Church-Turing

L'insieme $\hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})$ è esattamente l'insieme delle funzioni calcolabili da un linguaggio di programmazione imperativo Turing-completo.
L'insieme $\hom \mathbf{prf}(\mathbb{N})$ è esattamente l'insieme delle funzioni calcolabili da un linguaggio di programmazione imperativo Turing-completo ammettendo loop di lunghezza predeterminata.

Dimostrazione

Dimostriamo per induzione che le funzioni in $\hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})$ sono calcolabili da python; assumeremo che tutti i parametri passati siano come specificati in 5.2:

1.
```
def zero(x):
    return 0
```

2.
```
def succ(n):
    return n+1
```

3.
```
def proj(i, x):
    return x[i]
```

4.
```
def comp(g, f, x):
    return g(f(x))
```

5. Abbiamo due versioni equivalenti, la prima è più elegante mentre la seconda mostra come venga rispettato il requisito di avere loop di lunghezza predeterminata:

   (a)
```
def ric(g, f, x, y):
    if y == 0:
        return f(x)
    else:
        return g(x, y-1, ric(g, f, x, y-1))
```

   (b)
```
def ric(g, f, x, y):
    values = [f(x)]
    for n in range(1, y+1):
        values.append(g(x, n-1, n))
    return values[y]
```

6.
```
def minimalize(f, x):
    y = 0
    while f(x, y) > 0:
        y = y+1
    return y
```

L'altra inclusione è più complicata e ci penso dopo

Corollario 5.1

L'insieme $\hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})$ è numerabile.

Dimostrazione

Dato che ogni funzione in $\hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})$ è calcolabile da un programma, ovvero una sequenza finita di simboli tratti da un alfabeto finito Γ e per ogni numero naturale n abbiamo la funzione $\mathrm{id}_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$, vediamo che

$$|\mathbb{N}| \leq |\hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})| \leq \left| \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^n \right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\Gamma|^n = |\mathbb{N}|$$

$\square$

5.2 Teorema $s - m - n$

Definizione 5.3: Enumerazione standard di $\hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})$

Fissiamo una biezione $\Phi : \mathbb{N} \to \hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})$ che diremo ***enumerazione standard*** di $\hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})$.
Indicheremo con $\phi_i(x)$ la funzione $\Phi(i)(x)$

Teorema 5.2: Teorema $s - m - n$

Sia $\phi_i : \mathbb{N}^{n+m} \to \mathbb{N}$ in $\hom \mathbf{grf}(\mathbb{N})$.
Esiste una funzione $s^n_m : \mathbb{N}^{1+n} \to \mathbb{N}$ in $\hom \mathbf{prf}(\mathbb{N})$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{N}^m$ si abbia

$$\phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi_{s^n_m(i,\mathbf{x})}(\mathbf{y})$$

In più, s^n_m è univocamente determinata da m e n

Dimostrazione

La seguente funzione di python esibisce la tesi.
Gli input sono:

- la stringa f che definisce $\phi_i : \mathbb{N}^{n+m} \to \mathbb{N}$ nelle variabili $a \in \mathbb{N}^n$ e $b \in \mathbb{N}^m$;
- il numero $n \in \mathbb{N}$, che dipende dalla f ma esplicitiamo per comodità;
- un punto $x \in \mathbb{N}^n$;

l'output è la stringa che definisce la funzione $\phi_{s^n_m(i,x)} : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ della tesi rimpiazzando ogni istanza di a_i con il valore di x_i.

```
def smn(f, n, x):
    for i in range(n):
        F = f.split("a["+str(i)+"]")
        t = str(x[i])
        f = t.join(F)
    return f
```

Dato che s non calcola effettivamente f, ma semplicemente parte da una *qualsiasi* stringa e restituisce in un numero predeterminato di iterazioni un'altra stringa, appartiene a $\hom \mathbf{prf}(\mathbb{N})$.

□

5.3 Relazioni di equivalenza parziali

Definizione 5.4: Relazione di equivalenza parziale

Sia A un insieme.
Una ***relazione di equivalenza parziale*** su A è una relazione $R \subset A \times A$ che rispetti la proprietà transitiva e simmetrica, ma non necessariamente quella riflessiva.
Definiamo come $\operatorname{dom} R$ l'insieme dei punti $x \in A$ che sono in relazione con sè stessi (o equivalentemente con un qualsiasi altro punto) e definiamo l'insieme A/R come $(\operatorname{dom} R/R) \sqcup (A \setminus \operatorname{dom} R)$.

Intuitivamente possiamo pensare a A/R come ad una partizione di A in R-classi di equivalenza e una "zona d'ombra" che R non vede; equivalentemente, potremmo estendere R ad una relazione di equivalenza completa $\cap R$ che identifichi i punti fuori dal dominio di R in una nuova classe.

Definizione 5.5: La categoria $\mathbf{PER}(\mathbb{N})$

Definiamo la categoria $\mathbf{PER}(\mathbb{N})$ come la categoria i cui oggetti sono le relazioni di equivalenza parziali su $\mathbb{N}$ identificate con i loro quozienti $\mathbb{N}/R$ e i cui morfismi sono dati dalle mappe $f : \mathbb{N}/R \to \mathbb{N}/S$ "tracciate" da un qualche $i \in \mathbb{N}$, ovvero da una mappa $\varphi_i \in \hom_{\mathbf{grf}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ definita sul dominio di R tale che

$$xRy \Rightarrow \phi_i(x) S \phi_i(y)$$

O equivalentemente

$$f([x]_R) = [\phi_i(x)]_S$$

Osservazione 5.3

Nella definizione dei morfismi di $\textsf{\textbf{PER}}(\mathbb{N})$ non è richiesto nè che i sia unico nè che ϕ_i si comporti in qualsiasi modo prestabilito nella "zona d'ombra" di R

Lemma 5.1

Ogni relazione T con un'unica classe di equivalenza non vuota $\operatorname{dom} T$ è un oggetto terminale di $\textsf{\textbf{PER}}(\mathbb{N})$.

Dimostrazione

Prendiamo $T := \mathbb{N}^2$ e notiamo che per qualsiasi funzione costante ϕ_i traccia un unico morfismo $R \to T$