Formulario pazzo sperindio per Delladio

Filippo $\mathcal{L}$. Troncana

A.A. 2023/2024

1 Integrali

1.1 Integrale di Riemann

Proposizione 1.1.1: Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $g = G'$. Vale

$$\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = G(b) - G(a) =: [G(x)]_a^b$$

Proposizione 1.1.2: Formula dell'integrale per parti

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni $\mathcal{R}([a, b])$ tali che $g = G'$ e $f = F'$. Vale

$$\int_a^b F(x)g(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b f(x)G(x) \, \mathrm{d}x = [F(x)G(x)]_a^b$$

Proposizione 1.1.3: Integrale per sostituzione

Sia $x = g(t)$ con $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che g sia continua e derivabile e sia $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ integrabile. Vale:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \, \mathrm{d}t$$

1.2 Integrali $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Proposizione 1.2.1: Compatibilità Riemann-Lebesgue

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{R}([a, b])$. Valgono i seguenti fatti:

1. f è $\mathcal{L}^1$-sommabile su $[a, b]$.
2. f è $\mathcal{C}^0(x)$ a meno di un numero finito di $x \in [a, b]$
3. Vale l'uguaglianza
$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

Teorema 1.2.1: Teorema di Fubini rigoroso

Siano $X, Y \in \text{ob}(\textbf{Set})$, siano $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ e $\nu : 2^Y \to [0, +\infty]$ due misure esterne σ-finite e sia $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ una funzione $\mu \times \nu$-misurabile su tutto $X \times Y$ e $\mu \times \nu$-sommabile su un $S \in \mathcal{M}_{\mu \times \nu}$.
Valgono i seguenti fatti:

1. $S_x = \{y \in Y | (x, y) \in S\}$ è ν-misurabile $\forall_\mu x \in X$.
2. $f|_x : y \mapsto f(x, y)$ è ν-sommabile su S_x per $\forall_\mu x \in X$.
3. $x \mapsto \int_{S_x} f|_x \, d\nu$ è μ-sommabile
4. Vale l'uguaglianza:

$$\int_S f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_{S_x} f|_x \, d\nu \, d\mu$$

Proposizione 1.2.2: Teorema di Fubini *avec les mains*

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ tale che $E = [a, b] \times E_x$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^3$-sommabile. Vale l'uguaglianza:

$$\int_E f \, d\mathcal{L}^3 = \int_{[a,b]} \int_{E_x} f \, d\mathcal{L}^2(y, z) \, d\mathcal{L}^1(x)$$

Definizione 1.2.1: Matrice differenziale e fattore di trasformazione

Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione derivabile su un aperto A di $\mathbb{R}^n$.
Si dice ***matrice differenziale*** (o matrice Jacobiana) di φ per $x \in A$ la matrice

$$D_\varphi(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1(x) & \dots & \partial_n \varphi_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \varphi_m(x) & \dots & \partial_n \varphi_m(x) \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \partial_i \varphi_j(x) := \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)$$

Mentre si dice ***fattore di trasformazione*** di φ la quantità:

$$J_\varphi(x) = \sqrt{\det D^t_\varphi(x) \times D_\varphi(x)}$$

Definizione 1.2.2: (n, N)-parametrizzazione regolare

Siano $n \leq N \in \mathbb{N}$, sia C un compatto di $\mathbb{R}^n$ tale che C sia la chiusura di un aperto A tale che $\mathcal{L}^n(\partial A) = 0$ e sia contenuto in un altro aperto A'.
Sia $\varphi : A' \to \mathbb{R}^N$ tale che:

- φ sia iniettiva su C.
- $\varphi \in \mathcal{C}^0(C)$.
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(A')$.
- $J_\varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$.

Allora φ si dice (n, N)***-parametrizzazione regolare*** della superficie $\varphi(C)$.

Osservazione 1.2.1: Fattori di trasformazione utili

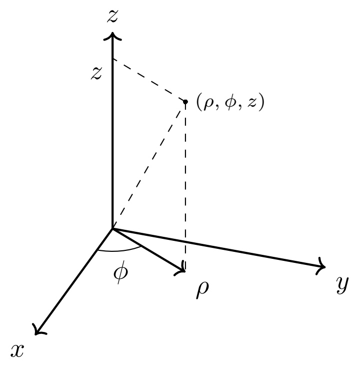
Sia φ una (n, N)-parametrizzazione regolare. Valgono i seguenti:

- Se $n = 1$, ovvero φ descrive una curva, vale $J_\varphi(x) = ||\varphi'(x)||$.
- Se $n = 2$ e $N = 3$, vale $J_\varphi(x) = ||D_{1,\varphi}(x) \wedge D_{1,\varphi}(x)||$.
- Se $n = N$, vale $J_\varphi(x) = |\det D_\varphi(x)|$.

Esempio 1.2.1: Coordinate cilindriche (polari)

$$\text{Sia} \quad \gamma : [0, +\infty[\times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \gamma(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \operatorname{sen} \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

questa è una $(3, 3)$-parametrizzazione regolari di $\mathbb{R}^3$ (oppure di $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ fissando z) che corrisponde al sistema di coordinate cilindriche (o polari)

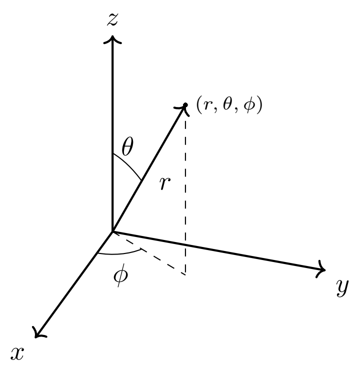


E il suo fattore di trasformazione è $J_\gamma(\rho, \phi, z) = \rho$.

Esempio 1.2.2: Coordinate sferiche

$$\text{Sia} \quad \sigma : [0, +\infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \quad \sigma(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Questa è una $(3, 3)$-parametrizzazione regolare di $\mathbb{R}^3$ che corrisponde alle coordinate sferiche



E il suo fattore di trasformazione è $J_\sigma(r, \theta, \phi) = r^2 \operatorname{sen} \theta$

Teorema 1.2.2: Teorema della Formula dell'Area

Sia C un compatto di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : C \to \mathbb{R}^N$ una (n, N)-parametrizzazione regolare con fattore di trasformazione $J_\varphi(x)$ e $f : \varphi(C) \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^0(\varphi(C))$. Vale l'uguaglianza:

$$\int_{\varphi(C)} f \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_C (f \circ \varphi) \cdot J_\varphi \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Osservazione 1.2.2

Nel caso in cui φ sia una $(1, 1)$-parametrizzazione regolare, il teorema si riduce all'integrale per sostituzione.

1.3 Integrali $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Osservazione 1.3.1: Regolarità a tratti

Quello che diciamo adesso sulle curve o superfici regolari vale anche su quelle regolari a tratti, basta considerare la famiglia di parametrizzazioni a tratti e sommare, dai che è easy e credo in voi.

Definizione 1.3.1: Campo vettoriale tangente e normale

Siano $\gamma : C = \bar{A} \to \mathbb{R}^N$ una $(1, N)$-parametrizzazione regolare della curva Γ e $\sigma : D = \bar{B} \to \mathbb{R}^3$ una $(2, 3)$-parametrizzazione regolare della superficie Σ. Allora:

- Il campo vettoriale $\tau_\Gamma : A \to \mathbb{S}^{N-1}$ definito da $\tau_\Gamma := \hat{\gamma'}$ si dice ***campo vettoriale tangente*** a Γ ed è invariante (a meno di orientazione) per parametrizzazioni.
- Il campo vettoriale $\nu_\Sigma : B \to \mathbb{S}^2$ definito da $\nu_\Sigma := \hat{v_\sigma}$ con $v_\sigma := D_1\sigma \wedge D_2\sigma$ si dice ***campo vettoriale normale*** a Σ ed è invariante (a meno di orientazione) per parametrizzazioni.

Definizione 1.3.2: Integrale di un campo vettoriale su una curva o superficie orientata

Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ l'immagine di una $(1, n)$-parametrizzazione regolare con campo vettoriale tangente τ e sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale (non so quali siano le ipotesi di regolarità ma di solito in esame sono carini). Definiamo l'***integrale del campo sulla curva***:

$$\int_{(\Gamma,\tau)} F := \int_\Gamma F \cdot \tau \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1$$

Analogamente, sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ l'immagine di una $(2, 3)$-parametrizzazione regolare con campo vettoriale normale ν e sia $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale. Definiamo l'***integrale del campo attraverso la superficie***:

$$\int_{\Sigma,\nu} V := \int_\Sigma V \cdot \nu \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2$$

Osservazione 1.3.2

Come nelle definizioni precedenti, valgono queste identità:

$$\int_{(\Gamma,-\tau)} F = -\int_{(\Gamma,\tau)} F \quad \text{e} \quad \int_{(\Sigma,-\nu)} V = -\int_{(\Sigma,\nu)} V$$

Definizione 1.3.3: Divergenza di un campo vettoriale

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale tale che $F = (F_x, F_y, F_z)$.
Si dice ***divergenza*** di F la funzione $\nabla \cdot F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\nabla \cdot F := \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Teorema 1.3.1: Teorema di Gauss della divergenza

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme tale che $(\partial E, \nu)$ sia una superficie regolare orientata e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale $\mathcal{C}^1$. Vale

$$\int_E \nabla \cdot F \, \mathrm{d}\mathcal{L}^3 = \int_{(\partial E,\nu)} F = \int_{\partial E} F \cdot \nu \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2$$

Teorema 1.3.2: Teorema di Gauss-Green nel piano

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme tale che $(\partial E, \tau)$ sia una curva regolare orientata e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale $\mathcal{C}^1$. Vale

$$\int_E \nabla \cdot F \, \mathrm{d}\mathcal{L}^2 = \int_{(\partial E,\tau)} F = \int_{\partial E} F \cdot \tau \, \mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \int_E D_x F_y - D_y F_x \, \mathrm{d}\mathcal{L}^2$$

Definizione 1.3.4: Rotore di un campo vettoriale

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale $\mathcal{C}^1$.
Si definisce ***rotore*** di F il campo vettoriale $\nabla \wedge F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come:

$$\nabla \wedge F := \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Teorema 1.3.3: Teorema di Stokes

Sia (Σ, ν) una superficie regolare orientata tale che $(\partial\Sigma, \tau)$ sia una curva regolare orientata e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale $\mathcal{C}^1$. Valgono:

$$\int_{(\Sigma,\nu)} \nabla \wedge F = \int_{(\partial\Sigma,\tau)} F \quad texte \quad \int_{(\Sigma,-\nu)} \nabla \wedge F = \int_{(\partial\Sigma,-\tau)} F$$

2 Fourier

Definizione 2.0.1: Spazio di Banach

Sia B un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale dotato di una norma $||\cdot||$.
Se B è completo rispetto alla metrica $d(x, y) = ||y - x||$, allora B si dice ***spazio di Banach***.

Definizione 2.0.2: Spazi L^p

Sia (X, A, μ) uno spazio con misura, $\mathbb{L}(X, A, \mu)$ l'insieme delle funzioni μ-integrabili da X in $\mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$.
Definiamo la funzione $|||\cdot|||_p : \mathbb{L} \to [0, +\infty]$ come:

$$|||f|||_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{se } p \neq +\infty, \quad \sup_X |f| \quad \text{altrimenti}$$

Indichiamo allora con $\mathcal{L}^p(X, A, \mu)$ il sottospazio di $\mathbb{L}(X, a, \mu)$ tali che $|||f|||_p \neq +\infty$ e definiamo la relazione di equivalenza $\sim_\mu$ come $f \sim_\mu g$ se e solo se sono uguali μ-quasi ovunque.
Definiamo $L^p(X, A, \mu) := \mathcal{L}^p(X, A, \mu)/\sim_\mu$ e $||f||_p := |||[f]|||_p = |||f|||_p$.

Osservazione 2.0.1

$(L^p(X, A, \mu), ||\cdot||_p)$ è uno spazio vettoriale normato.

Teorema 2.0.1: Teorema di Fisher-Riesz

Sia (X, A, μ) uno spazio con misura.
$(L^p(X, A, \mu), ||\cdot||_p)$ è uno spazio di Banach.

Definizione 2.0.3: Spazio di Hilbert

Sia H un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare $\cdot$. Se H è di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare, ovvero $||v|| := \sqrt{v \cdot v}$, allora H si dice ***spazio di Hilbert***.

Proposizione 2.0.1

$(L^2(X, A, \mu), \cdot)$ col prodotto scalare definito come:

$$[f] \cdot [g] := \int_X fg \, d\mu$$

È uno spazio di Hilbert ed è l'unico spazio di Hilbert tra gli L^p.

Definizione 2.0.4: Sistema ortonormale completo

Sia H uno spazio di Hilbert. Un insieme β di vettori si dice ***sistema ortonormale*** se per ogni coppia di vettori $x_i, x_j \in \beta$ si ha $x_i \cdot x_j = \delta_{i,j}$.
Se preso un vettore $v \in H$ si abbia che $v \cdot x = 0$ per ogni $x \in \beta$ implichi che $v = 0$, allora β si dice ***sistema ortonormale completo*** in H.

2.1 Teoria L^2 delle serie di Fourier

Teorema 2.1.1: Corollario del teorema di Stone-Weierstrass

Consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2([-\pi,\pi], \mathcal{M}_{\mathcal{L}^1}, \mathcal{L}^1)$ che scriveremo spesso come $L^2(-\pi,\pi)$ per semplicità.
La famiglia

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{\mathbb{Z}^+} \cup \left\{\frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{\mathbb{Z}^+}$$

è un sistema ortonormale completo.

Definizione 2.1.1: Serie di Fourier

Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e siano $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ definiti come segue:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\cos(nt)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(t) \quad \text{per } n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\operatorname{sen}(nt)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(t) \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}^+$$

E siano

$$S_{2N+1} := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx), \qquad S_f := \lim_{N\to+\infty} S_{2N+1}$$

Allora S_f si dice ***serie di Fourier*** di f

Teorema 2.1.2: Convergenza di serie di Fourier

Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$.
La serie di Fourier S_f di f converge incondizionatamente a f.

Teorema 2.1.3: Lusin-Carleson

Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$.
La serie di Fourier S_f di f converge puntualmente a f per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni $x \in]-\pi,\pi[$.

2.2 Convergenza puntuale della serie di Fourier per funzioni regolari a tratti

Definizione 2.2.1: Funzione continua e regolare a tratti

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica. Se

- L'insieme $D \subset [-\pi,\pi[$ delle discontinuità di f è finito e formato da discontinuità al massimo di salto, f si dice ***continua a tratti***.
- f è continua a tratti e f è $\mathcal{C}^1$ in almeno $[-\pi,\pi[\setminus D$, allora f si dice ***regolare a tratti***.

In particolare, per $x_0 \in \mathbb{R}$ definiamo

$$f(x_0 \pm 0) = \lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$$

Entrambi esistenti e finiti per definizione.

Teorema 2.2.1: Convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica regolare a tratti. Allora:

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $S_f(x)$ è uguale alla media tra $f(x-0)$ e $f(x+0)$ e in particolare se f è continua in x si ha $S_f(x) = f(x)$.
2. S_f converge uniformemente a f in tutti gli intervalli chiusi in cui f è continua.
3. Se f è continua su tutto $\mathbb{R}$, allora S_f converge uniformemente a f su tutto $\mathbb{R}$.

Osservazione 2.2.1: Serie di Fourier di funzioni pari e dispari

Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare a tratti e la sua serie di Fourier S_f.

- Se f è pari, $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Se f è dispari, $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3 Successioni e serie di funzioni

3.1 Successioni di funzioni

Definizione 3.1.1: Insieme di convergenza puntuale

Sia $\{f_n : X_n \to \mathbb{R}\}_{\mathbb{N}}$ una successione di funzioni. Definiamo l'insieme D e la funzione f come seguono:

$$D_f := \left\{ \forall n > \hat{n}, x \in X_n | \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = l_x \in \mathbb{R} \right\} \qquad f : x \in D_f \mapsto l_x$$

Allora D_f si dice ***insieme di convergenza puntuale*** di $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ e f si dice ***limite puntuale*** di $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ e scriviamo $f_n \to f$ in D_f.

Definizione 3.1.2: Convergenza uniforme

Sia $\{f_n : X_n \to \mathbb{R}\}_{\mathbb{N}}$ una successione di funzioni e sia E tale che $E \subset X_n$ definitivamente. Posti f e D_f come sopra, si dice che $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in E se $E \subset D_f$ e vale

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_E |f_n - f| = 0$$

Osservazione 3.1.1: Occhio alle implicazioi

La convergenza uniforme in un insieme implica la convergenza puntuale nello stesso, ma non viceversa.
La continuità in un sottoinsieme implica la continuità della restrizione, ma non viceversa.

Teorema 3.1.1: Convergenza uniforme e continuità

Sia $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ una successione di funzioni che converge uniformemente in $E \subset X$ a f. Se si ha che (definitivamente) le funzioni $f_n|_E$ sono continue, allora anche $f|_E$ è continua.

Teorema 3.1.2: S

a $f \in \mathcal{C}^\infty(]a, b[)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ tale che esista una costante $K \in \mathbb{R}$ che elevata alla n limiti superiormente la derivata n-esima di f su $]a, b[$ per n sufficientemente grande.
Allora il polinomio di taylor di f conferge uniformemente a f.

Proposizione 3.1.1: Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Sia $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue su $[a,b]$ uniformemente convergente a f. Vale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_n \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1$$

3.2 Serie di funzioni generiche

Definizione 3.2.1: Convergenza semplice e totale

Sia $(V, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato e $\{v_i\}_{\mathbb{N}}$ una successione di vettori.
Diremo che la serie $\sum v_i$ ***converge semplicemente*** se converge in senso usuale in V, mentre diremo che la serie ***converge totalmente*** se la serie $\sum ||v_i||$ converge in $\mathbb{R}$.

Osservazione 3.2.1

In uno spazio di Banach, la convergenza totale implica la convergenza semplice, non necessariamente viceversa.

Proposizione 3.2.1

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e sia $\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^0([a,b])$ una successione che converga semplicemente. Allora vale

$$\int_{[a,b]} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[a,b]} f_n \, \mathrm{d}\mathcal{L}^1$$

3.3 Serie di potenze

Proposizione 3.3.1

Data una successione $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ di numeri reali e la serie di potenze $\sum a_n x^n$, consideriamo il suo insieme di convergenza puntuale D e $R := \sup_D(|x|)$. Allora valgono le seguenti:

- $0 \in D$ e $D = \{0\}$ se e solo se $R = 0$
- Se $R > 0$, per ogni $0 < r < R$ la serie converge totalmente in $[-r, r]$
- Vale $]-R, R[\subset D \subset [-R, R]$, per questo R è detto ***raggio di convergenza*** della serie
- Se $R > 0$, la funzione $x \mapsto \sum a_n x^n$ è continua su $]-R, R[$

Teorema 3.3.1: Raggio di convergenza

Sia una serie di potenze $\sum a_n x^n$ con raggio di convergenza R e poniamo:

$$\rho := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Allora $R = 1/\rho$ (con estensione a 0 e $+\infty$). Inoltre se, per n sufficientemente grandi, $a_n \neq 0$ ed esiste il limite

$$l = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Allora si ha $\rho = l$.

Osservazione 3.3.1

Data una serie di potenze $\sum a_n x^n$ con raggio di convergenza $R > 0$, si possono verificare questi casi:

$$D =]-R, R[\quad D =]-R, R] \quad D = [-R, R[\quad D = [-R, R]$$

4 Foglio antipanico

Esempio 4.0.1: Serie geometrica

Può essere utile ricordare la serie geometrica di ragione $q \in]-1,1[$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n = \frac{1}{1-q}$$

4.1 Sviluppi di Taylor e derivate

Esempio 4.1.1: Funzioni trigonometriche

Vale la pena ricordare le derivate prime delle funzioni trigonometriche

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) \quad \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

E i loro sviluppi di Taylor centrati in $x = 0$.

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \arctan(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Esempio 4.1.2: Funzioni esponenziali

Vale la pena ricordare le derivate prime delle funzioni esponenziali

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \log'(x) = \frac{1}{x} \quad \operatorname{senh}'(x) = \cosh(x) \quad \cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$$

E i loro sviluppi di Taylor centrati in $x = 0$

$$e^x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \quad \log(1+x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} -\frac{(-x)^n}{n} \quad \operatorname{senh}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cosh(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Esempio 4.1.3: Funzioni razionali

Vale la pena ricordare lo sviluppo di Taylor di qualche funzione razionale

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^{2n}$$

4.2 Trigonometria

Esempio 4.2.1: Identità trigonometriche

Qualche identità trigonometrica

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{\tan(x)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(x)}} \qquad \cos(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

Le formule di addizione

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad \operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y \qquad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Le formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Le formule di bisezione

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Le formule parametriche

$$t := \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4.3 Flowcharts

Esempio 4.3.1: Esercizio standard sulle serie di Fourier

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica la cui espressione $f(x)$ è data per $[-\pi, \pi[$ e indichiamo con S_f la sua serie di Fourier in astratto.

1. Prima di tutto controlliamo le simmetrie di f, che ci possono aiutare col grafico e più tardi coi coefficienti di S_f:
   - Se f è pari, ovvero $f(x) = f(-x)$, abbiamo che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y e che (se f è regolare a tratti) per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ abbiamo $b_n = 0$.
   - Se f è dispari, ovvero $f(x) = -f(-x)$, abbiamo che il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine e che (se f è regolare a tratti) per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $a_n = 0$.
2. Poi disegnamo il grafico di f su $[-\pi, \pi[$
3. Verifichiamo la continuità a tratti di f e calcoliamo il suo insieme di discontinuità $D \subset [-\pi, \pi[$ e i limiti $f(x+0)$ e $f(x-0)$ per ogni $x \in D$.
4. Verifichiamo che f sia $L^2(-\pi, \pi)$ per ottenere i seguenti risultati:
   - S_f converge incondizionatamente a f in $(L^2(-\pi, \pi), ||\cdot||_2)$.
   - S_f converge puntualmente a f per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni $x \in]-\pi, \pi[$.
5. Verifichiamo la regolarità a tratti per ottenere i seguenti risultati:
   - S_f converge puntualmente a f in $\mathbb{R} \setminus D$.
   - S_f converge alla media dei limiti destro e sinistro in D.
   - S_f converge uniformemente a f negli intervalli chiusi in cui f è continua.
6. Calcoliamo i coefficienti $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{\mathbb{Z}^+}$ di S_f con le formule:

   $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\cos(nt)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(t) \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\operatorname{sen}(nt)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1(t)$$

   Ricordandoci le regolarità e simmetrie di cui sopra per facilitarci i calcoli.