Domande dell'orale di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Filippo $\mathcal{L}$ Troncana (ovviamente su domande di Luigi Amedeo Bianchi)

A.A. 2023/2024, appello di Giugno

Disclaimer: Gli interrogati sono raccolti nell'ordine in cui mi sono state riferite le domande, non necessariamente nell'ordine di interrogazione. Aggiungerò le risposte, o almeno un tentativo.

1

Domande

1. Sia $X \sim \exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$ e sia $Y = g(X)$ con $g(x) = (1-x)^2$. Quali sono legge e media di Y?
2. Intervalli di confidenza.
3. Introduzione alla Statistica.
4. Media campionaria e dimostrazione della correttezza.

Risposte

1. Piuttosto che usare la formula, si può usare la definizione di legge, notando innanzitutto che $P(Y < 0) = 0$, quindi esaminiamo $y \geq 0$:

   $$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((1-X)^2 \leq y) = P(|1-X| \leq \sqrt{y}) = P(X \geq 1-\sqrt{y} \wedge X \leq 1) + P(X \leq 1+\sqrt{y} \wedge X > 1)$$

   Dunque otteniamo

   $$F_Y(y) = \mathbf{1}_{y\geq 0} \int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int\limits_{0}^{1+\sqrt{y}} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x & y > 1 \\ \int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x & y \in [0,1] \end{cases} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_X(1+\sqrt{y}) - F_X(1-\sqrt{y}) & y \geq 0 \end{cases}$$

2. TODO
3. TODO
4. Sia $X := \{X_i\}_1^n$ un campione di variabili aleatorie (che assumeremo indipendenti e identicamente distribuite) da una popolazione di media μ sconosciuta. La ***media campionaria*** di X indicata con $\hat{\mu}_n$ è lo stimatore

   $$\hat{\mu}_n = E\left[\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} X_i\right] \quad \text{che per la linearità della speranza è uguale a} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

   Ed è corretto come conseguenza della legge debole dei grandi numeri, che ci dice che

   $$\hat{\mu}_n \xrightarrow{n\to+\infty} \mu$$

2

Domande

1. Legge debole dei grandi numeri: enunciato, dimostrazione, significato e applicazione.
2. Variabile aleatoria binomiale: definizione, legge e media (con dimostrazione della media).

Risposte

1.

Teorema 2.0.1: Legge debole dei grandi numeri

Sia $\{X_i\}_{\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie identicamente distribuite e indipendenti, ciascuna di media μ e varianza σ^2 e sia $S_n := X_1 + ... + X_n$. Allora abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Dimostrazione

Sfruttando il fatto che $E[S_n/n] = \mu$ e $\text{Var}[S_n/n] = \sigma^2/n$ e la disuguaglianza di Chebychev, fissiamo $\varepsilon > 0$ e otteniamo

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left[\frac{S_n}{n}\right]\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$\square$

L'idea è che in una successione di variabili aleatorie, $S_n - n\mu = o(n)$, ma non è detto che $S_n - n\mu \to 0$, attenzione! Ci dà un'idea della frequenza dei risultati, non del risultato che dobbiamo aspettarci al prossimo tentativo: se finora sono uscite $42'000'000$ teste e 42 croci, non è per nulla detto che esca croce (anche se potremmo iniziare a farci qualche domanda sulla qualità della moneta).

2.

Definizione 2.0.1: Variabile aleatoria binomiale

Sia $\{X_i\}_1^n$ una successione di variabili aleatorie bernoulliane di parametro $p \in [0, 1]$.
Una variabile aleatoria X si dice ***binomiale*** e si indica $X \sim \text{bin}(n, p)$ se

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

La legge di X è

$$\varphi_X(k) = \mathbf{1}_{\{0 \to n\}}(k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Per la linearità della speranza, abbiamo che

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = np$$

3

Domande

1. Intervalli di confidenza: costruzione, interpretazione, esempi, proprietà.
2. In quanti modi si possono suddividere nove ubriachi in tre taxi con tre persone ciascuno?

Risposte

1. TODO
2. Innanzitutto possiamo immaginare 9! al numeratore, in quanto possiamo immaginare che i nostri passeggeri siano rappresentati da $\{1 \to 9\}$ e disporli in tre taxi sarebbe come immaginare una parola fatta di ciascuno di questi simboli, ma c'è un problema: la disposizione $123|456|789$ è equivalente a quella $123|789|456$ e a quella $132|456|789$ ad esempio, dunque dobbiamo anche dividere per i possibili ordini dei taxi e i possibili ordini dei passeggeri, ottenendo $9!/(3!)^2$.

4

Domande

1. Test statistici: definizione, obiettivi, proprietà ed esempi.
2. In un roster di quaranta giocatori numerati, qual è la probabilità che in una squadra da undici giocatori non ci siano due giocatori con numeri consecutivi?

Risposte

5

Domande

1. Successioni di variabili aleatorie.
2. Teorema centrale del limite.

Risposte

6

Domande

1. Variabili aleatorie poissoniane: definizioni, proprietà, esempi, intervallo di confidenza per una popolazione di poissoniane.

7

Domande

1. Variabili aleatorie geometriche: definizione, proprietà, varianza e media con dimostrazione.