

# Sui numeri binari quadrati

Troncana F.

## Introduzione

Qualche tempo fa, Matilde mi ha presentato un'interessante congettura:

### Proposizione 0.1: Calabri I

Gli unici numeri della forma  $a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots$  con  $a_i \in \{0, 1\}$  che sono quadrati perfetti sono della forma  $10^{2k}$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ .

Dopo un infruttuoso attacco a forza di congruenze modulari, ho deciso di utilizzare tecniche a me più familiari, ovvero provare a ragionare in termini di polinomi.

Stabiliamo un pochino di linguaggio:

### Definizione 0.1: Numeri e polinomi binari

Un numero **binario in base**  $\beta$ , o numero  $\beta$ -**binario**, è un numero della forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \beta^i \quad \text{con } a_i \in \{0, 1\}$$

Analogamente, un **polinomio binario** è un polinomio della forma

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{con } a_i \in \{0, 1\}$$

Definiremo  $\mathbf{2}[x]$  l'insieme dei polinomi binari nella variabile  $x$ .

Possiamo vedere che quindi la congettura di Matilde riguarda i numeri 10-binari; procediamo a dimostrare il

### Teorema 0.1: Teorema del treno per polinomi

Sia  $p \in \mathbb{N}[x]$  di grado  $d$  tale che  $p^2 \in \mathbf{2}[x]$ .

Allora  $p = x^d$  se  $d \geq 0$ , altrimenti  $p = 0$ .

### Dimostrazione

I casi  $d \in \{-\infty, 0\}$  sono banali, assumiamo  $d \geq 1$  e scriviamo per esteso  $p$  e  $p^2$ :

$$p = \sum_{i=0}^d a_i x^i, \quad p^2 = \sum_{k=0}^{2d} b_k x^k \quad \text{dove} \quad b_k = \sum_{i=0}^k a_i a_{k-i} \quad \text{e} \quad \forall j > d, a_j = 0$$

Dimostriamo prima che  $p \in \mathbf{2}[x]$  (lemma della locomotiva) e successivamente che  $p = x^d$  (lemma della ferrovia):

- Dato che abbiamo assunto la binarietà di  $p^2$ , per ogni  $k$  bisogna avere  $b_k \in \{0, 1\}$ , dunque deve esistere al più un  $i$  tale che  $a_i a_{k-i} > 0$ , poichè altrimenti  $b_k$  sarebbe maggiore di 1; inoltre, dato che l'unico caso in cui il prodotto di due numeri naturali è uguale a 1 è quello in cui questi sono entrambi uno, deve valere  $a_i = a_{k-i} = 1$ , dunque per ogni  $j$  deve valere  $a_j \in \{0, 1\}$  e dunque  $p \in \mathbf{2}[x]$ .
- Per l'unicità di  $i$  vista nel punto precedente, deve valere anche  $i = k - i$ , ovvero  $k = 2i$  e quindi  $b_k$  può essere uguale a 1 soltanto per  $k$  pari. Scriviamo quindi

$$p^2 = \sum_{k=0}^d b_{2k} x^{2k} \quad \text{con} \quad b_{2k} = \sum_{i=0}^{2k} a_i a_{2k-i}$$

Notiamo che abbiamo "gratis"  $b_{2d} = 1$  e  $b_0 = a_0^2$  e supponiamo per assurdo che per un qualche  $0 < h < d$  si abbia  $b_{2h} = 1$ ; questo significherebbe che  $a_h = 1$  e che quindi  $b_{d+h} \neq 0$ , e in particolare

$$b_{d+h} = \sum_{i=0}^{d+h} a_i a_{d+h-i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{h-1} a_i a_{d+h-i}}_{=0} + \underbrace{a_h a_d}_{=1} + \underbrace{\sum_{i=h+1}^{d-1} a_i a_{d+h-i}}_{\geq 0} + \underbrace{a_d a_h}_{=1} + \underbrace{\sum_{i=d+1}^{d+h+1} a_i a_{d+h-i}}_{\geq 0} \geq 2$$

assurdo per ipotesi di binarietà di  $p^2$ , dunque dobbiamo concludere che  $b_{2h} = 0$  per ogni  $0 < h < d$  e perciò  $p^2 = x^{2d} + a_0$ , ma dato che  $x^{2d} + 1$  è irriducibile in  $\mathbb{R}[x]$  chiaramente lo è anche in  $\mathbb{N}[x]$  e ovviamente in  $\mathbf{2}[x]$  e quindi  $a_0 = 0$ .

□

Grazie al fatto che non solo il seguente diagramma commuta in **Set**, ma  $V_\beta$  è anche un morfismo nella categoria **SemiRing**, abbiamo i corollari

$$\begin{array}{ccccc} B_\beta \subset \mathbb{N} & \xleftarrow{\quad} & V_\beta & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{N}[x] \\ & \nwarrow & & \nearrow & \uparrow \\ & & V_\beta|_{\mathbf{2}[x]} & & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \{0, 1\}^\mathbb{N} \subset \{0, \dots, \beta - 1\}^\mathbb{N} & \xleftarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{2}[x] \end{array}$$

#### Corollario 0.1: Teorema del treno per numeri $\beta$ -binari

Sia  $p$  un quadrato perfetto  $\beta$ -binario.

Allora  $p$  è della forma  $\beta^{2n}$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$  oppure  $p = 0$ .

#### Dimostrazione

Scriviamo  $p$  in base  $\beta$ , vediamo le sue cifre come coefficienti di un polinomio  $p(x) \in \mathbf{2}[x]$  e applichiamo il teorema del treno per polinomi, ottenendo che  $p(x) = x^{2n}$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$  oppure  $p(x) \equiv 0$ .

Valutiamo  $p(\beta)$  per ottenere  $p = \beta^{2n}$  oppure  $p = 0$ .

□

#### Corollario 0.2: Calabri I

Gli unici numeri della forma  $a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots$  con  $a_i \in \{0, 1\}$  che sono quadrati perfetti sono della forma  $10^{2k}$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ .

#### Dimostrazione

Applichiamo il teorema del treno per numeri  $\beta$ -binari nel caso  $\beta = 10$ .