

# TFA per cambiamenti di coordinate

Filippo  $\mathcal{L}$ . Troncana

A.A. 2023/2024

## Sommario

Uno dei più importanti risultati della teoria geometrica della misura è la formula dell'area, strumento fondamentale per il calcolo delle misure di sottovarietà regolare di  $\mathbb{R}^n$  e degli integrali su di esse.

La dimostrazione classica, ad esempio quella riportata in [3] fa uso di diverse stime estremamente tecniche, ma credo<sup>1</sup> che fare un giro leggermente più largo possa portare a una dimostrazione meno traumatica.

Alcune fondamentali idee, come quella di considerare spazi misurabili "migliorati" (che noi chiameremo rinforzati), ovvero dotati di una famiglia di insiemi considerati trascurabili o nulli, per un'idea più "naturale" di equivalenza quasi ovunque vengono da [2].

In questa tesi vengono presentati dei risultati di teoria della misura sviluppati con un approccio simile a quello usato per lo studio della topologia generale e successivamente questi vengono applicati allo studio dell'integrale di funzioni composte e alla formula dell'area.

## Indice

<b>1</b>	<b>Teoria astratta della misura indotta</b>	<b>2</b>
1.1	$\sigma$ -algebre e misure esterne indotte da funzioni . . . . .	2
1.2	Sottospazi misurabili . . . . .	4
1.3	Spazi misurabili prodotto . . . . .	5
1.4	Spazi misurabili rinforzati . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Teoria dell'integrazione</b>	<b>7</b>
2.1	Integrazione indotta . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Derivata di Radò-Nikodym</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Il viaggio verso il TFA</b>	<b>10</b>

### Notazione 0.1: U

eremo le seguenti convenzioni:

- Generalmente un insieme  $X$  è assunto non vuoto.
- Dato un insieme  $X$ , indicheremo con  $2^X$  il suo insieme delle parti.
- Dato un insieme  $X$  e un sottoinsieme  $E \subset X$ , indicheremo con  $E^c$  il suo complementare  $X \setminus E$ .
- Dato un insieme  $X$  e una sua famiglia di sottoinsiemi  $\mathcal{F} \subset 2^X$ , la notazione  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$  rappresenta una funzione  $\varphi : I \rightarrow \mathcal{F}$  che a ciascun indice mappa un insieme di  $\mathcal{F}$  e indichiamo:

$$\cup_I E_i := \bigcup_{i \in I} E_i \quad , \quad \cap_I E_i := \bigcap_{i \in I} E_i \quad \text{e} \quad \prod_I E_i := \prod_{i \in I} E_i$$

In particolare, quest'ultimo è definito se  $I$  è finito (non ci occuperemo di prodotti cartesiani infiniti) e se  $E_i = E_j = E$  per ogni  $i, j$ , allora  $\prod_I E_i := E^{\#I}$

- Dato un campo  $K$  e una successione di elementi del campo  $\{a_i\}_{i \in I} \subset K$ , indichiamo

$$\sum_I a_i := \sum_{i \in I} a_i \quad \text{e} \quad \prod_I a_i := \prod_{i \in I} a_i$$

Almeno a livello formale, indipendentemente dalla loro esistenza o definizione.

<sup>1</sup>o meglio, spero

# 1 Teoria astratta della misura indotta

Le definizioni di teoria della misura usate si riferiscono a quelle date in [1], meno che alcune che riportiamo qui, con opportuna motivazione

## Definizione 1.1: Funzione misurabile

Siano  $(X, \mathcal{A})$  e  $(Y, \mathcal{B})$  due spazi misurabili e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione.  $f$  si dice **misurabile** se per ogni  $E \in \mathcal{B}$  vale  $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ .

In [1] le funzioni misurabili sono definite analogamente, ma l'ambiente di arrivo è uno spazio topologico e si richiede che la controimmagine di ogni aperto sia misurabile, in modo da poter usare alcuni strumenti di topologia dotando l'insieme di arrivo della  $\sigma$ -algebra Boreliana.

Tuttavia, ai fini della nostra trattazione sarà meglio usare la definizione più generale riportata qui sopra, che quindi è quella che adottiamo.

## 1.1 $\sigma$ -algebre e misure esterne indotte da funzioni

Analogamente alle costruzioni di topologia iniziale e finale, definiamo

## Definizione 1.2: $\sigma$ -algebre indotte

Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi, sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione, sia  $\mathcal{A}$  una  $\sigma$ -algebra su  $X$  e sia  $\mathcal{B}$  una  $\sigma$ -algebra su  $Y$ . Definiamo le seguenti famiglie:

$$f_{\#}\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\} \quad \text{e} \quad f_b\mathcal{B} := \{f^{-1}(E) \in 2^X : E \in \mathcal{B}\}$$

Esse si dicono rispettivamente  **$\sigma$ -algebra finale e iniziale** di  $f$  rispetto a  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .

## Proposizione 1.1

Nella situazione della definizione 1.2,  $f_{\#}\mathcal{A}$  e  $f_b\mathcal{B}$  sono  $\sigma$ -algebre.

## Dimostrazione

Segue banalmente dalla commutatività tra operatori insiemistici, immagine e preimmagine.

## Osservazione 1.1

La  $\sigma$ -algebra finale di  $f$  rispetto a  $\mathcal{A}$  è la più grande  $\sigma$ -algebra  $\Omega$  tale che  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Omega)$  sia misurabile. La  $\sigma$ -algebra iniziale di  $f$  rispetto a  $\mathcal{B}$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  tale che  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  sia misurabile.

## Dimostrazione

Sia  $\Omega \subset 2^Y$  tale che  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Omega)$  sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni  $E \in \Omega$ , abbiamo che  $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ , dunque  $\Omega \subset f_{\#}\mathcal{A}$ .

Sia  $\Sigma \subset 2^X$  tale che  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni  $E \in f_b\mathcal{B}$  si ha che  $E = f^{-1}(F)$  con  $F \in \mathcal{B}$  e quindi che  $E \in \Sigma$ , dunque  $f_b\mathcal{B} \subset \Sigma$ .

## Definizione 1.3: Misure esterne indotte

Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi, siano  $\mu$  e  $\nu$  due misure esterne rispettivamente su  $X$  e su  $Y$  e sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione.

La **misura esterna finale** di  $f$  rispetto a  $\mu$  è la funzione

$$f_{\#}\mu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f_{\#}\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

La **misura esterna iniziale** di  $f$  rispetto a  $\nu$  è la funzione

$$f_b\nu : 2^X \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f_b\nu(E) := \nu(f(E))$$

### Proposizione 1.2

Nella situazione della definizione 1.3,  $f_{\#}\mu$  è una misura esterna su  $Y$  e  $f_b\nu$  è una misura esterna su  $X$ .

#### Dimostrazione

Dimostriamo i tre assiomi di misura esterna per  $f_{\#}\mu$ :

1.  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f_{\#}\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Siano  $E \subset F \subset Y$ , allora  $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$ , dunque la monotonia di  $f_{\#}\mu$  segue dalla monotonia di  $\mu$ .
3. Siano  $A, B \subset Y$ , allora  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  e la subaddittività segue da quella di  $\mu$

Ora per  $f_b\nu$ :

1.  $f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f_b\nu(\emptyset) = 0$ .
2. Siano  $E \subset F \subset X$ , allora  $f(E) \subset f(F)$ , dunque la monotonia di  $f_b\nu$  segue dalla monotonia di  $\nu$ .
3. Siano  $A, B \subset X$ , allora  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  e la subaddittività segue da quella di  $\nu$ .

### Osservazione 1.2: TOCORRECT: Bidualità delle $\sigma$ -algebre

Nella situazione della definizione 1.2,  $f_b f_{\#}\mathcal{A} = \mathcal{A}$  e  $f_{\#} f_b\mathcal{B} = \mathcal{B}$  SONO INCLUSIONI NON UGUAGLIANZE PER L'UGUAGLIANZA VUOI INIETTIVITÀ E SURIETTIVITÀ.

#### Dimostrazione

Per definizione

$$f_b f_{\#}\mathcal{A} = \{f^{-1}(E) \in 2^X : E \in f_{\#}\mathcal{A}\} = \{f^{-1}(E) \in 2^X : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\} = \{E \in 2^X : E \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$$

Allo stesso modo

$$f_{\#} f_b\mathcal{B} = \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in f_b\mathcal{B}\} = \{E \in 2^Y : E \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$$

### Proposizione 1.3: Bidualità delle misure esterne indotte

Nella situazione della definizione 1.3,  $f_b f_{\#}\mu \geq \mu$  e  $f_{\#} f_b\nu \leq \nu$ . In particolare, se  $f$  è iniettiva vale  $f_b f_{\#}\mu = \mu$  e se  $f$  è suriettiva vale  $f_{\#} f_b\nu = \nu$

#### Dimostrazione

Abbiamo che  $f_b f_{\#}\mu(E) = f_{\#}\mu(f(E)) = \mu(f^{-1}(f(E))) \geq \mu(E)$  per monotonia di  $\mu$ .

Allo stesso modo,  $f_{\#} f_b\nu(E) = f_b\nu(f^{-1}(E)) = \nu(f(f^{-1}(E))) \leq \nu(E)$

L'uguaglianza nei casi particolari segue banalmente.

### Corollario 1.1

Sotto le ipotesi della proposizione 1.3, se  $f$  è una funzione biettiva vale l'uguaglianza.

Analogamente alle costruzioni topologiche, usiamo questa teoria per parlare di sottospazi misurabili

## 1.2 Sottospazi misurabili

### Definizione 1.4: Sottospazio misurabile

Sia  $(X, \mathcal{A})$  uno spazio misurabile e  $Z \subset X$ . Allora, definita la famiglia  $\mathcal{A}|_Z := \{E \cap Z \in 2^X : E \in \mathcal{A}\}$ ,  $(Z, \mathcal{A}|_Z)$  si dice **sottospazio misurabile** di  $X$ .

### Osservazione 1.3

$(Z, \mathcal{A}|_Z)$  è effettivamente uno spazio misurabile.

### Dimostrazione

La dimostrazione è banale.

### Proposizione 1.4: Misurabili iniziali rispetto all'inclusione

Sia  $(X, \mathcal{A})$  uno spazio misurabile, sia  $Z \subset X$  un suo sottoinsieme e sia  $i : Z \rightarrow X$  l'inclusione canonica. Allora  $\mathcal{A}|_Z = i_b \mathcal{A}$ .

### Dimostrazione

Per  $E \in i_b \mathcal{A}$  vale se e solo se  $E = i^{-1}(F)$  per qualche  $F \in \mathcal{A}$ , ma per ogni  $F \in 2^X$  vale  $i^{-1}(F) = F \cap Z$ , dunque  $E = F \cap Z$  per qualche  $F \in \mathcal{A}$  e quindi  $E \in \mathcal{A}|_Z$ .

### Definizione 1.5: Sottomisura esterna

Sia  $X$  un insieme,  $Z \subset X$  un suo sottoinsieme,  $i : Z \rightarrow X$  l'inclusione canonica e sia  $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$  una misura esterna su  $X$ .

Allora  $i_b \mu$  si dice **sottomisura esterna** su  $Z$  rispetto a  $X$ .

Notiamo che è effettivamente una misura esterna per la proposizione 1.2, adesso curiamoci di trovare un modo di calcolarla magari

### Proposizione 1.5: Sottomisura esterna e restrizione

Nella situazione della definizione 1.5, vale  $i_b \mu = \mu|_{2^Z} = \mu \cdot \chi_Z$ .

### Dimostrazione

Per definizione, per ogni  $E \subset Z$  si ha  $i_b \mu(E) = \mu(i^{-1}(E)) = \mu(E \cap Z) = \mu(E) = \mu|_{2^Z}(E)$ .

### 1.3 Spazi misurabili prodotto

A onor di completezza, sarebbe possibile trattare anche i prodotti da questo punto di vista, ma si tratta di costruzioni complesse e

#### Definizione 1.6: Spazio misurabile prodotto

Siano  $(X, \mathcal{A})$  e  $(Y, \mathcal{B})$  due spazi misurabili,  $X \times Y$  il prodotto cartesiano dei due insiemi e  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  le proiezioni canoniche.

Lo **spazio misurabile prodotto**  $(X, \mathcal{A}) \otimes (Y, \mathcal{B})$  è lo spazio  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  dove  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra che contenga gli insiemi della forma  $A \times B$  con  $A \in \mathcal{A}$  e  $B \in \mathcal{B}$ , in altre parole, definiamo in questo modo  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \langle \{A \times B \in 2^{X \times Y} : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \rangle$ .

#### Osservazione 1.4

Siano  $(X, \mathcal{A})$  e  $(Y, \mathcal{B})$  due spazi misurabili,  $X \times Y$  il prodotto cartesiano dei due insiemi e  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  le proiezioni canoniche.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra che renda misurabili sia  $\pi_X$  che  $\pi_Y$ .

#### Dimostrazione

Notiamo che la tesi può essere riscritta come  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \langle \pi_{X^b} \mathcal{A} \cup \pi_{Y^b} \mathcal{B} \rangle$ , in quanto una  $\sigma$ -algebra che renda misurabili le proiezioni deve necessariamente contenere l'unione delle  $\sigma$ -algre iniziali<sup>a</sup>, ma quindi per l'ipotesi di minimalità di  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  possiamo semplicemente richiedere  $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subset \langle \pi_{X^b} \mathcal{A} \cup \pi_{Y^b} \mathcal{B} \rangle$ .

Notiamo che in generale,  $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ , rispettivamente elementi di  $\pi_{X^b} \mathcal{A}$  e  $\pi_{Y^b} \mathcal{B}$ , quindi deve appartenere alla  $\sigma$ -algebra generata dalla loro unione.

<sup>a</sup>Notiamo che  $\pi_{X^b} \mathcal{A} = \{A \times Y \in 2^{X \times Y} : A \in \mathcal{A}\}$

#### Definizione 1.7: Misura esterna prodotto

Siano  $X, Y$  due insiemi rispettivamente con misure esterne  $\mu : X \rightarrow [0, +\infty]$  e  $\nu : Y \rightarrow [0, +\infty]$ . Una **misura prodotto** di  $\mu$  e  $\nu$  è una misura esterna  $\mu \otimes \nu$  su  $X \times Y$  tale che  $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$

## 1.4 Spazi misurabili rinforzati

Un concetto fondamentale in teoria della misura è quello proprietà valide  $\mu$ -quasi ovunque, ma sorge il problema della scelta di una misura. In realtà è possibile "indebolire" questo requisito, specificando la famiglia degli insiemi nulli di uno spazio misurabile e imponendo un requisito di "fedeltà" per le misure che vorremo definire su di esso.

### Definizione 1.8: $\sigma$ -ideale

Sia  $X$  un insieme e  $I \subset 2^X$  una famiglia di insiemi tale che:

1.  $\emptyset \in I$ .
2. Se  $N \in I$  e  $M \subset N$  allora  $M \in I$ .
3. Se  $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset I$  allora  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i \in I$ .

Allora  $I$  si dice  **$\sigma$ -ideale** su  $X$ . In particolare, se  $X \notin I$ , allora  $I$  si dice  **$\sigma$ -ideale proprio**, altrimenti improprio<sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup>In quanto avremmo  $I = 2^X$ , non particolarmente utile nel migliore dei casi.

### Definizione 1.9: Spazio fortemente misurabile

Sia  $X$  un insieme,  $\mathcal{M}$  una  $\sigma$ -algebra su  $X$  e  $\mathcal{N}$  un  $\sigma$ -ideale su  $X$  tale che  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ .

Allora  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N})$  si dice **spazio fortemente misurabile** e gli insiemi di  $\mathcal{N}$  si dicono **nulli** o trascurabili. La coppia  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  è detta **struttura fortemente misurabile**.

Ovviamente ogni spazio misurabile rinforzato è uno spazio misurabile e una misura esterna  $\mu$  su un insieme  $X$  induce su di esso una struttura fortemente misurabile allo stesso modo in cui induce una normale struttura misurabile, con la coppia  $(\mathcal{M}_\mu, \mathcal{N}_\mu)$  dove  $\mathcal{N}_\mu := \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) = 0\}$ .

### Definizione 1.10: Validità quasi ovunque

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N})$  uno spazio fortemente misurabile.

Una proprietà  $P$  sugli elementi di  $X$  si dice **valida quasi ovunque** se  $\{x \in X : \neg P(x)\} \in \mathcal{N}$  e scriviamo  $\forall_{\mathcal{N}} x \in X, P(x)$ .

Notiamo che se  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\mu$  per una misura  $\mu$ , questa diventa la definizione di validità  $\mu$ -quasi ovunque

### Notazione 1.1: S

a  $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N})$  uno spazio fortemente misurabile e siano  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $=_{\mathcal{N}}, \geq_{\mathcal{N}}, >_{\mathcal{N}}, \leq_{\mathcal{N}}$  e  $<_{\mathcal{N}}$  si riferiscono alle stesse relazioni intese quasi ovunque.

Se  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\mu$  per qualche misura esterna, invece di scrivere  $\mathcal{N}$  al pedice scriveremo  $\mu$ .

## 2 Teoria dell'integrazione

### 2.1 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{A}, \mu) & \xrightarrow{f} & (Y, f_{\#}\mathcal{A}, f_{\#}\mu) \\
 & \searrow g \circ f & \downarrow g \\
 & & (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (Y, \mathcal{B}, \nu) & \xleftarrow{f} & (X, f_b\mathcal{B}, f_b\nu) \\
 & \nwarrow g \circ f & \downarrow g \\
 & & (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})
 \end{array}$$

Dove  $\mathcal{L}$  è la misura di Lebesgue sui numeri reali.

#### Teorema 2.1: Integrazione indotta

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura, sia  $Y$  un insieme, sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione biettiva e sia  $g : (Y, f_{\#}\mathcal{A}, f_{\#}\mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1)$  una funzione  $f_{\#}\mathcal{A}$ -misurabile.

Allora  $g$  è  $f_{\#}\mu$ -integrabile se e solo se  $g \circ f$  è  $\mu$ -integrabile, e vale l'identità

$$\int g \, d f_{\#}\mu = \int g \circ f \, d\mu$$

#### Dimostrazione

Assumiamo che  $g$  sia  $f_{\#}\mu$ -integrabile. Allora vale

$$\begin{aligned}
 \int g \, d f_{\#}\mu &= \int_* g \, d f_{\#}\mu = \sup \{ I_{f_{\#}\mu}(\varphi) : \varphi \in \Sigma_-(g) \} = \sup \left\{ \sum_i a_i f_{\#}\mu(\varphi^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \\
 &= \sup \left\{ \sum_i a_i \mu(f^{-1}(\varphi^{-1}(\{a_i\}))) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \sup \left\{ \sum_i a_i \mu((\varphi \circ f)^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \circ f \in \Sigma_-(g \circ f) \right\} \\
 &\quad \text{con } \psi := \varphi \circ f, \quad \int_* g \, d f_{\#}\mu = \sup \{ I_{\mu}(\psi) : \psi \in \Sigma_-(g \circ f) \} = \int_* g \circ f \, d\mu
 \end{aligned}$$

La dimostrazione è assolutamente analoga per l'integrale superiore e nella direzione opposta assumendo l'integrabilità di  $g \circ f$ . Le varie uguaglianze seguono dalla biettività di  $f$ .

□

#### Osservazione 2.1: Girotondone per il TFA

L'obiettivo di questo scherzetto è dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate, ovvero

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ f) \cdot J_f \, d\mathcal{L}^n$$

Ma c'è un problema: noi abbiamo dimostrato un risultato dalla forma leggermente diversa, ovvero

$$\int g \, d f_{\#}\mu = \int g \circ f \, d\mu$$

Osservando il TFA ci aspettiamo che la nostra  $d f_{\#}\mu$  corrisponda a  $J_f \, d\mathcal{L}^n$ , dunque dobbiamo fare un piccolo girotto usando la biettività di  $f$ :

$$\int g \, d\lambda = \int g \circ f \circ f^{-1} \, d\lambda = \int g \circ f \, d f^{-1}\lambda$$

In questo modo ci basta riuscire a far corrispondere  $J_f \, d\mathcal{L}^n$  a  $d f^{-1}\mathcal{L}^n$

### 3 Derivata di Radò-Nikodym

#### Teorema 3.1: Teorema di Radò-Nikodym

Sia  $(X, \mathcal{A})$  uno spazio misurabile e siano  $\nu, \mu$  misure su  $(X, \mathcal{A})$  tali che  $\mu$  sia  $\sigma$ -finita e  $\nu$  sia assolutamente continua rispetto a  $\mu$ . Allora esiste una funzione  $\mathcal{A}$ -misurabile  $f : X \rightarrow [0, +\infty[$  tale che per ogni  $E \in \mathcal{A}$  si abbia

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

E per una funzione  $\nu$ -integrabile  $g : (X, \mathcal{A}, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$  vale

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu$$

#### Definizione 3.1: Derivata di Radò-Nikodym

Nella situazione precedente, la funzione  $f$  si dice **derivata di Radò-Nikodym** di  $\nu$  rispetto a  $\mu$  e si indica con

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

#### Definizione 3.2: Funzioni R-N

Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  due spazi con misure  $\sigma$ -finite.

Una funzione  $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \nu)$  si dice **funzione R-N** se:

1.  $f$  è misurabile
2. Per ogni  $E \in \mathcal{B}$  tale che  $\nu(E) = 0$  si ha  $\mu(f^{-1}(E)) = 0$

#### Osservazione 3.1: Categoria degli spazi con misure $\sigma$ -finite e delle funzioni R-N

La classe degli spazi con misure  $\sigma$ -finite con la classe delle funzioni R-N e l'usuale composizione di funzioni è una categoria, che chiamiamo **Mea<sub>R-N</sub>**.

#### Dimostrazione

Controlliamo le varie proprietà:

- Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura  $\sigma$ -finita. La funzione identità  $\text{id}_X$  è evidentemente una funzione R-N.
- Siano  $f : (X, \mathcal{A}, \lambda) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \mu)$  e  $g : (Y, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Z, \mathcal{C}, \nu)$  due funzioni R-N. Notiamo che per ogni  $E \in \mathcal{C}$  tale che  $\nu(E) = 0$  si ha  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(E))$  e  $\mu(g^{-1}(E)) = 0$ , dunque  $\lambda((g \circ f)^{-1}(E)) = 0$ .
- La composizione eredita l'associatività dalla composizione di funzioni in **Set**.

#### Proposizione 3.1: Derivata di R-N per Lipschitziane

Sia  $(X, d, \mu)$  uno spazio metrico di dimensione  $n \in \mathbb{Z}_+$  con una misura  $\mu$  di Radò (rispetto alla  $\sigma$ -algebra Boreliana indotta dalla metrica) invariante per traslazioni (ovvero,  $\mu(B_r(x)) = \mu(B_r(y))$  per ogni  $x, y$  in  $X$ )<sup>a</sup> e sia  $F : X \rightarrow X$  una funzione biettiva di Lipschitz con costante di Lipschitz  $L > 0$ .

Allora  $F^{-1}\mu \ll \mu$  e  $L^n$  e la derivata di Radò-Nikodym di  $F^{-1}\mu$  rispetto a  $\mu$  è maggiorata  $\mu$ -quasi ovunque da  $L^n$ .

#### Dimostrazione

È sufficiente dimostrarlo sulle palle aperte, dato che queste costituiscono una base della topologia e dunque della  $\sigma$ -algebra Boreliana.

Per ogni  $r > 0$  e ogni  $x \in X$  abbiamo che  $F(B_r(x)) \subset B_{Lr}(F(x))$  che implica  $\mu(F(B_r(x))) \leq \mu(B_{Lr}(F(x))) = L^n \mu(B_r(F(x)))$  il che implica che per ogni insieme,  $F^{-1}(E) \leq \mu(E)$ , dunque sappiamo che deve esistere  $g : (X, d, \mu) \rightarrow [0, +\infty[$  tale che

$$F^{-1}\mu(E) = \int_E g \, d\mu$$



Ancora una volta lavoriamo sulle palle

$$\forall r > 0, \forall x \in X, 0 \leq \int_{B_r(x)} g(y) \, d\mu(y) \leq \int_{B_r(x)} L^n \, d\mu(y) \Rightarrow g \leq_\mu L^n$$

---

<sup>a</sup>Onestamente non so se questa "uniformità" vada codificata come una proprietà dello spazio o della misura, dato che il nostro fine è quello di applicarlo alla misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$  non ci poniamo troppi problemi in quanto  $\mathbb{R}^n$  è tutto piatto e  $\mathcal{L}^n$  è invariante per traslazioni.

## 4 Il viaggio verso il TFA

Cercheremo di dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate **lineari** con la speranza di estendere questo ragionamento a cambiamenti di coordinate **differenziabili**, ovvero localmente lineari. Per fare questo, ci permetteremo di sostituire i plurirettangoli nella definizione della misura di Lebesgue ai pluriparallelogrammi

### Lemma 4.1: Misura indotta da un cambiamento di coordinate lineare

Sia  $F : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa lineare invertibile.  
Allora  $F^{-1}\mathcal{L}^n = |\det F| \cdot \mathcal{L}^n$  e dunque

$$F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det F| \, d\mathcal{L}^n$$

### Dimostrazione

Sia  $E \in F\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ . Per definizione di misura indotta, abbiamo che  $F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(F(E))$  e che, come visto nel corso di Geometria A è uguale a  $|\det F| \cdot \mathcal{L}^n(E)$ .

### Teorema 4.1: TFA per cambiamenti di coordinate lineari

Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa lineare invertibile e sia  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{L}^n$ -integrabile. Vale il seguente fatto:

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ F) \cdot |\det F| \, d\mathcal{L}^n$$

### Teorema 4.2: Derivata R-N di una misura finale di diffeomorfismi

Sia  $\varphi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un diffeomorfismo locale e sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un aperto. Allora

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det D\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

Equivalentemente

$$\frac{d\varphi^{-1}\mathcal{L}^n}{d\mathcal{L}^n} = |\det D\varphi|$$

Nel senso della definizione 3.1 della derivata di Radon-Nikodym.

### Dimostrazione

Il fatto che  $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \ll \mathcal{L}^n$  segue dalla proposizione 3.1, infatti se  $\varphi$  è un diffeomorfismo è almeno localmente lipschitziana e in ogni insieme limitato  $V$  ha costante di Lipschitz  $\sup_V |\det D\varphi|$ .

Poniamo  $|\det D\varphi(x)| =: J(x)$ .

Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un aperto. Localmente la trasformazione  $\varphi$  agisce come una trasformazione lineare  $D\varphi$ , dunque in intorno  $V_i$  sufficientemente piccoli di punti  $x_i \in E$  indicizzati su un insieme numerabile  $I$  applichiamo il lemma ?? e abbiamo  $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \sim D\varphi\mathcal{L}^n = J(x) \cdot \mathcal{L}^n$ . Dunque posti possiamo scrivere

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \sum_{i \in I} \int_{V_i} J(x_i) \, d\mathcal{L}^n = \sum_{i \in I} \int_E J(x_i) \chi_{V_i}(y) \, d\mathcal{L}^n(y)$$

Facendo una *mossa alla Gottinga* riconosciamo una regolarità sufficiente ad applicare uno strano genere di integrale di Riemann rendendo sempre più piccoli i nostri intorni aumentando il loro numero e otteniamo

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E J \, d\mathcal{L}^n = \int_E |\det D\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

### Teorema 4.3: TFA

Sia  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un diffeomorfismo locale e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{L}^n$ -integrabile. Vale

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

### Dimostrazione

La dimostrazione è banale combinando i non banali teoremi 2.1, 3.1 e ??.

## Riferimenti bibliografici

- [1] S. Delladio, *Note di Analisi Matematica B per il Corso di Laurea in Matematica*. A.A. 2023/2024. indirizzo: [https://silvanodelladio.maths.unitn.it/AA23\\_24/AMB\(mat\)/NoteAMb\\_2324.pdf](https://silvanodelladio.maths.unitn.it/AA23_24/AMB(mat)/NoteAMb_2324.pdf).
- [2] D. Fremlin, *Measure Theory* (Measure theory v. 1-4). Torres Fremlin, 2000, ISBN: 9780953812905.
- [3] L. Evans e R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions* (Studies in Advanced Mathematics). Taylor & Francis, 1991, ISBN: 9780849371578.