# Categorie per il matematico disoccupato

Filippo L. Troncana, per il corso "Strumenti Informatici per la Matematica"

A.A. 2023/2024

## 1 Introduzione e prime definizioni

Durante la seconda metà del XX secolo la profondissima (sebbene apparentemente banale) osservazione del fatto che in fondo tutta la matematica è fatta di *cosi*[1] e frecce tra *cosi* ha motivato l'introduzione del concetto di Categoria.

Informalmente parlando una categoria è fatta da oggetti che condividono un certo senso di struttura e delle frecce che li collegano, che preservano questo tipo di struttura. Un esempio classico è la categoria **Set**, ovvero gli insiemi e le funzioni tra essi, oppure la categoria **Top** degli spazi topologici le cui frecce sono le funzioni continue. Procediamo a dare una definizione un po' più rigorosa.

**Definizione 1.1.** *Una* **categoria** $\mathcal{C}$ *consiste nelle seguenti:*

- *Una classe* $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ *i cui elementi sono detti* oggetti *di* $\mathcal{C}$[2].
- *Una classe* $\mathrm{mor}(\mathcal{C})$ *i cui elementi sono detti* morfismi *di* $\mathcal{C}$. *Ogni morfismo* $f$ *ha un unico oggetto sorgente* $A$ *e un unico oggetto di destinazione* $B$, *e si denota con* $f : A \to B$. *La classe dei morfismi tra due oggetti nella stessa categoria si indica con* $\mathrm{mor}(A, B)$.
- *Per ogni terna di oggetti* $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, *è definita una* legge di composizione *tra morfismi, che a un morfismo* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *associa un unico morfismo* $g \circ f : A \to C$. *La composizione di morfismi deve rispettare le seguenti proprietà:*
  - *L'*associatività*: per qualsiasi terna di morfismi* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *e* $h : C \to D$ *vale* $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.
  - *L'esistenza del morfismo* identità*: per ogni oggetto* $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ *esiste un morfismo* $\mathrm{id}_X : X \to X$ *tale che per ogni morfismo* $f : A \to X$ *e* $g : X \to A$ *valgano* $\mathrm{id}_X \circ f = f$ *e* $g \circ \mathrm{id}_X = g$.

**Osservazione 1.1.** *Dato che per ogni oggetto esiste un unico (la dimostrazione dell'unicità è banale) morfismo identità, una categoria risulta essere univocamente determinata dai suoi morfismi, e pertanto è possibile definire le categorie semplicemente in base alla classe dei morfismi.*

Arricchiamo leggermente il nostro linguaggio

**Definizione 1.2.** *Sia* $\mathcal{C}$ *una categoria.*
*Se* $\mathrm{mor}(\mathcal{C})$ *è un insieme (e dunque per l'osservazione precedente lo è anche* $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$*), allora* $C$ *si dice* piccola*, altrimenti si dice* grande.
*Una categoria in cui una volta fissati due* $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ *allora* $\mathrm{mor}(A, B)$ *è un insieme si dice* localmente piccola.

**Definizione 1.3.** *Sia* $\mathcal{C}$ *una categoria e sia* $f : A \to B$ *un morfismo. Esso si dice:*

- Endomorfismo *se* $A = B$
- Isomorfismo *se* $\exists f' : B \to A$ *tale che* $f \circ f' = \mathrm{id}_B \wedge f' \circ f = \mathrm{id}_A$
- Automorfismo *se è contemporaneamente endomorfismo e isomorfismo.*

Al lettore dotato di un qualsivoglia $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere di familiarità con l'algebra astratta, la definizione di categoria risulterà analoga a quella di monoide. In effetti un monoide $(M, +)$ non è altro che una categoria piccola con un unico oggetto (l'insieme $M$) e i cui morfismi corrispondono alle traslazioni degli elementi di $M$ sugli altri elementi di $M$.
Inoltre, quasi sempre, quando si esprime l'unicità di qualcosa in teoria delle categorie la si considera a meno di isomorfismo, come vedremo più avanti.

[1] termine tecnico
[2] Occasionalmente, scriveremo $A \in \mathcal{C}$ invece di $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ con un lieve abuso di notazione

# 2 Diagrammi commutativi

Ai *cat-boys*[3] piace molto esprimere qualsiasi proprietà attraverso cosiddetti diagrammi commutativi, utili strumenti per esprimere le relazioni fra oggetti e morfismi in una categoria

**Definizione 2.1.** *Un* diagramma commutativo *è un grafo diretto in cui i nodi sono costituiti da oggetti e i cui archi sono costituiti da morfismi tra essi in modo tale che percorrere un arco corrisponda ad applicare il morfismo a esso associato.*

Ad esempio, i diagrammi commutativi possono essere usati per riformulare in modo visualmente intuitivo alcuni teoremi.

**Teorema 2.1.** *Sia* $\mathbb{K} \in \textbf{\textsf{Fld}}$*, siano* $V, W \in \textbf{\textsf{Vec}}(\mathbb{K})$ *e sia* $f \in \operatorname{mor}(V, W)$*.*
*Allora* $\exists! \phi \in \operatorname{mor} V/\ker(f), \operatorname{Im}(f)$ *tale che* $\phi$ *sia un isomorfismo e si abbia* $f = i \circ \phi \circ \pi$*.*
*Equivalentemente,* $\exists! \phi \in \operatorname{mor} V/\ker(f), \operatorname{Im}(f)$ *tale che il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & W \\
V/\ker(f) \arrow[r, shift left, "\phi"] & \operatorname{im}(f) \arrow[l, shift left, "\phi^{-1}"] \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

# 3 Funtori e trasformazioni naturali

## 3.1 Funtori

Abbiamo parlato di oggetti e frecce tra oggetti. Ma se volessimo parlare di frecce tra le frecce?

**Definizione 3.1.** *Siano* $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ *due categorie.*
*Un* Funtore covariante *è una mappa* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *tale che:*

- $\forall X \in \operatorname{ob}(\mathcal{C}), \exists! F(X) \in \operatorname{ob}(\mathcal{D})$
- $\forall f : A \to B \in \operatorname{mor}(\mathcal{C}), \exists! F(f) : F(A) \to F(B) \in \operatorname{mor}(\mathcal{D})$

*Un* Funtore controvariante *è una mappa* $G$ *da* $C$ *a* $D$ *tale che:*

- $\forall X \in \operatorname{ob}(\mathcal{C}), \exists! G(X) \in \operatorname{ob}(\mathcal{D})$
- $\forall f : A \to B \in \operatorname{mor}(\mathcal{C}), \exists! G(f) : G(B) \to G(A) \in \operatorname{mor}(\mathcal{D})$

*Un Funtore (covariante o controvariante)* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *deve rispettare le seguenti proprietà:*

- $\forall X \in \operatorname{ob}(\mathcal{C}), F(\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{F(X)})$
- $\forall f, g \in \operatorname{mor}(\mathcal{C}), F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

La situazione che stiamo immaginando si traduce dunque in questo diagramma commutativo (dove $F$ e $G$ sono come nella definizione)

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rrrrr, "F(f)"] \arrow[ddddd, "\mathrm{id}_{F(X)}"'] & & & & & F(Y) \arrow[ddddd, "F(g)"] \\
& X \arrow[rrr, "f"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}_X"] & & & Y \arrow[ddd, "g"] & \\
& & G(X) & G(Y) \arrow[l, "G(f)"] & & \\
& & G(X) \arrow[u, "\mathrm{id}_{G(X)}"'] & G(Z) \arrow[l, "G(g\circ f)"'] \arrow[u, "G(g)"] & & \\
& X \arrow[rrr, "g\circ f"] & & & Z & \\
F(X) \arrow[rrrrr, "F(g\circ f)"'] & & & & & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Vediamo degli esempi che ci permettano di chiarire:

[3]Teorici delle categorie

- La mappa $S : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ che ad un gruppo $(G, +)$ associa l'insieme $G$ è un funtore covariante, detto funtore dimenticante[4]. Esistono numerosi (infiniti, in effetti) funtori smemorati, ad esempio da $\mathsf{Fld}$ a $\mathsf{Vec}(\mathbb{K})$, da $\mathsf{Vec}(\mathbb{K})$ a $\mathsf{Grp}$, da $\mathsf{Top}$ a $\mathsf{Set}$ e così via, da qualsiasi categoria i cui oggetti siano quelli della categoria in arrivo con una struttura più regolare.

- La mappa $\pi_1 : \mathsf{Top}^* \to \mathsf{Grp}$ che a uno spazio topologico con un punto fissato associa il suo gruppo fondamentale è un funtore covariante, in particolare è il primo (definito come tale) incontrato dalla maggior parte degli studenti.

- La mappa $* : \mathsf{Vec}(\mathbb{K}) \to \mathsf{Vec}(\mathbb{K})$ che ad uno spazio vettoriale $V$ associa il suo spazio duale $V^*$, ovvero lo spazio vettoriale dei morfismi $V \to \mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K}$ è visto come oggetto in $\mathsf{Vec}(\mathbb{K})$), è un funtore controvariante.

- La mappa $\mathsf{Set} \to \mathsf{Graph}^*$ (dove $\mathsf{Graph}^*$ è la categoria dei grafi diretti) che ad una famiglia di oggetti e morfismi rappresentati da un insieme di indici associa un diagramma commutativo è un funtore[5].

È interessante notare che in una data categoria la classe dei morfismi tra due oggetti può possedere una struttura notevole: per esempio fissato un $V \in \mathrm{ob}(\mathsf{Vec}(\mathbb{K}))$, l'insieme $\mathrm{mor}(V, V)$ è un'algebra associativa su $\mathbb{K}$, al cui studio è dedicato tutto il primo semestre del corso di Geometria A. Ma se volessimo fissare due categorie e parlare dei funtori tra di esse, come potremmo procedere?

### 3.2 Trasformazioni naturali

**Definizione 3.2.** *Siano $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ due funtori dalla categoria $\mathcal{A}$ alla categoria $\mathcal{B}$*
*Si dice* trasformazione naturale *una collezione $\{\alpha_X : F(X) \to G(X)\}$ di morfismi in $\mathcal{B}$ indicizzati da oggetti di $\mathcal{A}$ tale che il seguente diagramma commuti:*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
Y & F(Y) \arrow[r, "\alpha_X"] & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

*Ovvero, tale che per ogni oggetto $X$ e ogni morfismo $f : X \to Y$ di $\mathcal{A}$ si abbia $\alpha_X \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_X$.*

Possiamo dunque immaginare una trasformazione naturale come una specie di funtore tra funtori dunque, in un diagramma commutativo di questo tipo:

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, equal] & & Y \arrow[dr, equal] & & & \\
 & F \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[rrrr, Rightarrow, "\alpha"] & & & & \alpha(F) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) & & & & & {[\alpha(F)](X)} \arrow[r, "{[\alpha(F)](f)}"] & {[\alpha(F)](Y)}
\end{tikzcd}
$$

# 4 Proprietà universali

Uno dei principali punti di forza della teoria delle categorie è il permettere di formulare delle cosiddette "proprietà universali" di una costruzione. Partiamo con un esempio

**Teorema 4.1.** *$\mathbb{R}$ è l'unico campo completo totalmente ordinato, a meno di isomorfismo.*

Le possibili costruzioni dei numeri reali sono molte, le più famose sono quelle per classi di equivalenza di successioni di Cauchy o per sezioni di Dedekind a partire da $\mathbb{Q}$, ma come facciamo a dimostrare che una nuova bizzarra costruzione che ci è appena venuta in mente sia effettivamente una costruzione dei numeri reali? È semplice, basta dimostrare che con le opportune operazioni, che idealmente dovrebbero emergere in modo naturale dalla nostra costruzione, questo oggetto costituisca un campo totalmente ordinato e completo, e dal teorema precedente avremo la garanzia che sia $\mathbb{R}$ (o almeno, che sia isomorfo a esso). Dunque c'è un senso in cui questa è una proprietà che è "universale" rispetto alle costruzioni dei numeri reali.
Esaminiamo un altro caso.

**Definizione 4.1.** *Siano $X, Y$ oggetti in una categoria $\mathcal{C}$. Si dice* prodotto *di $X$ e $Y$ un oggetto $X\mathbf{\Pi}Y$ di $\mathcal{C}$ fornito di una coppia di morfismi $\pi_X : X\mathbf{\Pi}Y \to X$ e $\pi_Y : X\mathbf{\Pi}Y \to Y$ suriettivi tale che per qualsiasi morfismo $f : Z \to X\mathbf{\Pi}Y$*

[4]nonostante "dimenticante" sia il termine utilizzato in letteratura, l'autore preferisce "smemorato"
[5]Sì, sostanzialmente qualsiasi cosa è un funtore

*esistano unici* $f_X : Z \to X$ *e* $f_Y : Z \to Y$ *tali per cui il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f_X"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_Y"] & \\
A & X \mathbf{\Pi} Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

In questo modo, generalizziamo le idee di prodotto cartesiano in **Set**, prodotto topologico in **Top** o prodotto tensoriale in **Vec**($\mathbb{K}$): qualsiasi tipo di "prodotto" tra due strutture dello stesso tipo è completamente caratterizzato dalle proiezioni alle sue componenti.

# 5 Conclusione

In conclusione, il formalismo della teoria delle categorie fornisce una sorta di "grande teoria unificata" delle varie branche della matematica