

# Domande Pagani FFM2

Filippo Troncana

A.A. 2024/2025

## Indice

1	Classificazione delle PDE quasilineari del secondo ordine	1
2	Superfici caratteristiche per PDC e teorema di Cauchy–Kovalevskaja	2
3	Ricavare da un modello fisico a scelta l'equazione delle onde. Scrivere la soluzione di d'Alembert per la retta e la semiretta con condizioni al bordo di Dirichlet e Von Neumann	2
3.1	Derivazione (onde trasversali ad una corda tesa)	2
3.2	Soluzioni	4
3.2.1	Retta	4
3.2.2	Semiretta, condizioni di Dirichlet	4
3.2.3	Semiretta, condizioni di Neumann	4
4	Soluzione dell'equazione del calore sul segmento $[0, L]$ con assegnati dati iniziali e condizioni al bordo omogenee di Dirichlet; giustificare rigorosamente la serie formale che rappresenta la soluzione.	5

## 1 Classificazione delle PDE quasilineari del secondo ordine

Fissato  $U \subset \mathbb{R}^2$  un aperto, si dice *equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine quasilineare* con incognita  $u \in \mathcal{C}^2(U)$  un'espressione della forma

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d$$

dove  $a, b, c, d$  sono funzioni della forma  $f(x, y, u, u_x, u_y)$ . Consideriamo una curva regolare  $\gamma : I \rightarrow U$  con  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  e, con l'abuso di notazione  $f|_\gamma := f \circ \gamma$ , i dati iniziali

$$u|_\gamma = h(s), \quad u_x|_\gamma = \phi(x), \quad u_y|_\gamma = \psi(x)$$

Con  $h, \phi, \psi$  funzioni date. Queste devono rispettare certi vincoli, infatti applicando la regola della catena otteniamo

$$\frac{du}{ds}|_\gamma = u_x|_\gamma \cdot x' + u_y|_\gamma \cdot y' \Leftrightarrow h' = \phi \cdot x' + \psi \cdot y'$$

Assumendo che una soluzione  $u$  esista e tutto sia sufficientemente regolare, consideriamo le sue derivate seconde

$$\frac{du_x}{ds}|_\gamma = u_{xx}|_\gamma x' + u_{xy}|_\gamma y' = \phi', \quad \frac{du_y}{ds}|_\gamma = u_{yx}|_\gamma x' + u_{yy}|_\gamma y' = \psi'$$

Quindi ricordando l'equazione iniziale, gli assunti di regolarità e componendo con  $\gamma$  otteniamo

$$a|_\gamma u_{xx}|_\gamma + 2b|_\gamma u_{xy}|_\gamma + c|_\gamma u_{yy}|_\gamma = d|_\gamma$$

Otteniamo un sistema lineare nelle derivate seconde di  $u$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a|_\gamma & 2b|_\gamma & c|_\gamma \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u_{xx}|_\gamma \\ u_{xy}|_\gamma \\ u_{yy}|_\gamma \end{pmatrix}}_{u''} = \underbrace{\begin{pmatrix} d|_\gamma \\ \phi' \\ \psi' \end{pmatrix}}_k$$

Denotando con  $\Delta(s) := \det A(s)$  otteniamo tre casi:

- $\Delta \neq 0$  su tutta la curva, ovvero esiste ed è unico  $u''(s)$  che soddisfa l'equazione.

- $\Delta = 0$  su tutta la curva **in generale** non ci dà una soluzione, ma solamente se  $\text{rk}(A|k) = \text{rk}(A)$ , che comunque non ci garantisce l'unicità; in particolare, calcolando esplicitamente il determinante, vediamo che equivale a dire:

$$a|_{\gamma} \cdot (y')^2 - 2b|_{\gamma} \cdot x' \cdot y' + c|_{\gamma} \cdot (x')^2 = 0$$

E in questo caso si dice che la curva  $\gamma$  è una **curva caratteristica**. In particolare, rinominando la variabile  $s$  in  $t$  e assumendo che  $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$  ottengo

$$a|_{\gamma} \cdot (f')^2 - 2b|_{\gamma} \cdot f' + c|_{\gamma} = 0 \Rightarrow f' = \frac{2b|_{\gamma} \pm \sqrt{(2b|_{\gamma})^2 - 4a|_{\gamma} \cdot c|_{\gamma}}}{2a|_{\gamma}}$$

Questa condizione ci divide in tre casi:

- $(2b|_{\gamma})^2 - 4a|_{\gamma} \cdot c|_{\gamma} > 0$ , detto **iperbolico**, dove ho due derivate distinte e dunque due famiglie di curve caratteristiche.
- $(2b|_{\gamma})^2 - 4a|_{\gamma} \cdot c|_{\gamma} = 0$ , detto **parabolico**, in cui ho una sola famiglia di derivate e dunque di curve caratteristiche.
- $(2b|_{\gamma})^2 - 4a|_{\gamma} \cdot c|_{\gamma} < 0$ , detto **ellittico**, in cui non ho curve caratteristiche.
- Negli altri casi coi nostri strumenti non abbiamo considerazioni interessanti dal punto di vista fisico.

## 2 Superfici caratteristiche per PDC e teorema di Cauchy–Kovalevskaja

Assumendo che la curva caratteristica  $\gamma$  della nostra equazione sia della forma  $(t, f(t))$  (o simmetricamente della forma  $(f(t), t)$ ), proviamo a descrivere  $\gamma$  come luogo di zeri di una funzione  $F(x, y)$ . Sappiamo che

$$a|_{\gamma}(f')^2 - 2b|_{\gamma}f' + c|_{\gamma} = 0$$

Supponendo che  $F(t, f(t)) = 0$  posso derivare totalmente e ottengo:

$$\frac{dF}{dt} = F_x \cdot 1 + F_y f' \Rightarrow f' = -\frac{F_x}{F_y}$$

E dunque la condizione di cui sopra diventa (moltiplicando per  $(F_y)^2$  per eliminare i denominatori)

$$a|_{\gamma}(F_x)^2 + 2b|_{\gamma}F_xF_y + c|_{\gamma}(F_y)^2 = 0$$

Questa condizione vale per le curve, ma in realtà si generalizza abbastanza facilmente a quello delle (iper)superfici in  $\mathbb{R}^{n+1}$  grazie al teorema di invertibilità locale. Generalizziamo la nostra equazione ad una scrittura della forma

$$\sum_{i,j=1}^n a^{i,k} u_{i,j} = d$$

Dove  $a^{i,k}$  e  $d$  sono funzioni in  $(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$ ; posta  $F(x_1, \dots, x_n)$  la funzione di cui ipotizziamo l'esistenza, otteniamo la condizione

$$\sum_{i,j=1}^n a^{i,k} F_i F_j = 0$$

E da questa una "trasmissione di regolarità" analoga a quanto visto per le curve.

### Teorema 2.1: Teorema di Cauchy–Kovalevskaja

Data una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regolare,  $a, b, c$  e  $d$  funzioni analitiche nelle variabili  $x, y, u_x, u_y$  e dati  $u|_{\gamma}, u_x|_{\gamma}$  e  $u_y|_{\gamma}$  analitici, esiste ed è unica in un intorno del supporto di  $\gamma$  una soluzione analitica  $u$  dell'equazione:

$$a \cdot u_{xx} + 2b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy} = d$$

## 3 Ricavare da un modello fisico a scelta l'equazione delle onde. Scrivere la soluzione di d'Alembert per la retta e la semiretta con condizioni al bordo di Dirichlet e Von Neumann

### 3.1 Derivazione (onde trasversali ad una corda tesa)

Procediamo a derivare l'equazione delle onde per le vibrazioni trasversali su una corda tesa tra due punti  $(0,0)$  e  $(L,0)$  nel piano  $xu$ . Assumiamo che la posizione di ciascun punto della corda vari ortogonalmente alla corda

stessa, permettendoci di descrivere lo spostamento di un punto  $x$  con la funzione  $u = u(x, t)$ , in modo che la curva  $\gamma_t = (x, u(x, t))$  rappresenti la corda al momento  $t$ .

Posti due punti  $x_1, x_2$  sulla corda, la quantità di moto tra i due è diretta lungo il versore  $\hat{e}_u$  trasversale alla corda ed è data da

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) u_t(\xi, t) d\xi$$

Dove  $\rho(\xi)$  è la densità della corda e  $u_t(\xi, t)$  è la velocità del punto  $\xi$  lungo  $\hat{e}_u$  al tempo  $t$ .

I versori tangenti alla corda nei due punti sono dati da:

$$T(x_i, t) = \frac{\hat{e}_x + \hat{e}_u u_x(x_i, t)}{\sqrt{1 + (u_x(x_i, t))^2}}$$

Possiamo fare tre considerazioni:

1. Chiamando  $A, B$  e  $C$  i tratti della corda rispettivamente precedente  $x_1$ , compreso tra  $x_1$  e  $x_2$  e successivo a  $x_2$  e assumendo che la tensione  $\tau$  sia costante, abbiamo che:
  - La forza di  $A$  su  $B$  in  $(x_1, t)$  è  $-\tau T(x_1, t)$ .
  - Analogamente, la forza di  $C$  su  $B$  in  $(x_2, t)$  è  $\tau T(x_2, t)$

E dunque la forza agente su  $B$  è  $F(t) := \tau (T(x_2, t) - T(x_1, t))$

2. Assumendo variazioni di piccola ampiezza, ovvero  $u_x \ll 1$  abbiamo

$$F(t) \approx \tau (u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) \hat{e}_u$$

3. Assumiamo che qualsiasi forza esterna agisca sulla corda lo faccia in  $B$  e sia della forma  $f(\xi, t) \hat{e}_u$ , dove  $f$  indica la "densità lineare" di forza agente al tempo  $t$ .

Consideriamo l'intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$  e applichiamo la forma integrale della seconda legge di Newton<sup>1</sup> per la variazione della quantità di moto  $p$  del tratto  $B$  nell'intervallo di tempo  $[t_1, t_2]$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) u_t(\xi, t_2) d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) u_t(\xi, t_1) d\xi = \int_{t_1}^{t_2} \tau (u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(\xi, t) d\xi dt$$

Definiamo le funzioni integrali

$$\int_{t_1}^{t_2} u_{tt}(x, t) dt = u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1), \quad \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x, t) dx = u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)$$

Per generalità di  $[x_1, x_2]$  posso estendere le mie equazioni a tutto il dominio e sostituire ottenendo

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(\xi) u_{tt}(\xi, t) - \tau u_{xx}(\xi, t) - f(\xi, t) dt d\xi \equiv 0 \Leftrightarrow \rho(x) u_{tt}(x, t) - \tau u_{xx}(x, t) \equiv f(x, t)$$

Dividendo tutto per  $\rho(x)$  e ponendo  $a^2 := \frac{\tau}{\rho(x)}$ , termine che corrisponde alla velocità di propagazione, otteniamo l'equazione

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = \frac{f(x, t)}{\rho(x, t)}$$

Detta **equazione delle onde**, una PDE del secondo ordine quasilineare iperbolica.

---

<sup>1</sup> $\Delta p = \int F dt$

## 3.2 Soluzioni

### 3.2.1 Retta

Assumiamo una corda di lunghezza infinita, densità costante e con forze esterne nulle, otteniamo il problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & \forall x, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Questa equazione ha come soluzione (ricavata usando le curve caratteristiche  $x = \pm at$  come assi) la **soluzione di D'Alembert**:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

### 3.2.2 Semiretta, condizioni di Dirichlet

Consideriamo il problema definito sulla semiretta  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  con la condizione al bordo di Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \geq 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \forall x \geq 0 \\ u(0, t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Possiamo trattarlo come il problema definito sulla retta definendo i prolungamenti dispari delle condizioni, ignorando momentaneamente la condizione di Dirichlet:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

E procedendo come sopra con la formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi$$

Valutando la soluzione in  $(0, t)$ , dato che sia  $\Phi$  che  $\Psi$  sono dispari, otteniamo

$$u(0, t) = \frac{\Phi(at) + \Phi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi \equiv 0$$

### 3.2.3 Semiretta, condizioni di Neumann

Consideriamo il problema definito sulla semiretta  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  con la condizione al bordo di Neumann

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \geq 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \forall x \geq 0 \\ u_x(0, t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Possiamo trattarlo come il problema definito sulla retta definendo i prolungamenti pari delle condizioni, ignorando momentaneamente la condizione di Neumann:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

E procedendo come sopra con la formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi$$

Adesso, deriviamo la soluzione:

$$u_x(x, t) = \frac{\Phi'(x + at) + \Phi'(x - at)}{2} + \frac{\Psi(x + at) - \Psi(x - at)}{2}$$

Dato che  $\Phi$  e  $\Psi$  sono pari, dunque  $\Phi'$  è dispari, otteniamo che valutando in  $(0, t)$ :

$$u_x(0, t) = \frac{\Phi'(at) + \Phi'(-at)}{2} + \frac{\Psi(at) - \Psi(-at)}{2} \equiv 0$$

#### 4 Soluzione dell'equazione del calore sul segmento $[0, L]$ con assegnati dati iniziali e condizioni al bordo omogenee di Dirichlet; giustificare rigorosamente la serie formale che rappresenta la soluzione.

Consideriamo il problema di Dirichlet con condizioni al bordo omogenee per l'equazione del calore sul segmento  $[0, L]$  con  $L > 0$ :

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & \forall x \in (0, L), \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Assumendo sufficiente regolarità per il dato  $\varphi(x)$ , calcoliamo i suoi coefficienti di Fourier per ogni  $n \in \mathbb{Z}^+$ :

$$c_n := \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{L} \xi\right) d\xi, \quad \varphi_n(x) := c_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

Dunque possiamo scrivere la nostra soluzione come

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} u_n(x, t), \quad \text{dove} \quad u_n(x, t) := c_n e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

A priori questa serie è puramente formale, dobbiamo verificare che abbia effettivo senso: osserviamo che possiamo derivare due volte, dato che assumendo  $t \geq t_0$  con  $t_0$  arbitrariamente piccolo e  $x \in (0, L)$  valgono le seguenti stime sfruttando il termine esponenziale:

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| < |\varphi_n(x)| \left( \frac{\pi n}{L} x \right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t_0}, \quad \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| < |\varphi_n(x)| \left( \frac{\pi n}{L} x \right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t_0}$$

Possiamo assumere ragionevolmente che la temperatura iniziale non sia infinita e che quindi ogni  $\varphi_n$  sia limitata da un qualche  $2M > 0$ , dunque otteniamo convergenza uniforme per le serie

$$u_t(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t), \quad u_{xx}(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t)$$

Notiamo che le ipotesi di regolarità minime che abbiamo fatto su  $\varphi$  sono sufficienti a garantire la convergenza per tutte le derivate di  $u$  in  $[0, L] \times [t_0, +\infty)$ , infatti vediamo che vale

$$\left| \frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l}(x, t) \right| < 2M \left( \frac{\pi n}{L} \right)^{2k+l} a^{2k} e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t_0}$$

Per l'arbitrarietà di  $t_0$  inoltre posso estendere questa regolarità a tutto  $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ . Infine dobbiamo controllare che  $u$  sia continua: dato che  $|u_n|$  è sempre maggiorata da  $|\varphi_n|$ , è sufficiente richiedere la continuità a tratti di  $\varphi$  su  $[0, L]$  e  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$  per ottenere la continuità di  $u$ .