TFA per cambiamenti di coordinate

Filippo $\mathcal{L}$. Troncana

A.A. 2023/2024

1 Misure e σ-algebre indotte

Definizione 1.1: σ-algebra finale

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, sia Y un insieme e sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva.
La ***σ-algebra*** finale indotta da f rispetto a $\mathcal{A}$ è la famiglia

$$f\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

Osservazione 1.1

La σ-algebra finale di f rispetto a $\mathcal{A}$ è la più grande σ-algebra Σ tale che $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \Sigma)$ sia misurabile.

Dimostrazione

Sia $\Sigma \subset 2^Y$ tale che $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \Sigma)$ sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni $E \in \Sigma$, abbiamo che $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, dunque $\Sigma \subset f\mathcal{A}$.

$\square$

Definizione 1.2: Misura esterna indotta

Siano X e Y due insiemi, sia μ una misura esterna su X e sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva.
La ***misura indotta*** da f rispetto a μ è la funzione

$$f\mu : 2^Y \to [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

Proposizione 1.1

$f\mu$ è una misura esterna su Y.

Dimostrazione

Dimostriamo i tre assiomi di misura esterna.

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \Rightarrow f\mu(\varnothing) = 0$.
2. Siano $E \subset F \subset Y$, allora $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$, dunque la monotonia di $f\mu$ segue dalla monotonia di μ.
3. Siano $A, B \subset Y$, allora $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ e la subaddittività segue da quella di μ

$\square$

Proposizione 1.2

Se $f\mu$ è la misura indotta da f rispetto a μ, allora $\mathcal{M}_{f\mu} = f\mathcal{M}_\mu$.

Dimostrazione

TODO

$\square$

TODO: è possibile definire una duale σ-algebra iniziale e una misura iniziale richiedendo l'iniettività, ma per la nostra trattazione è sufficiente la versione finale.

Lemma 1.1: Isomorfismo di σ-algebre indotte

Siano $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, Y un insieme e $f : (X, \mathcal{A}) \to Y$ una funzione biettiva. Allora $F\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$.

Dimostrazione

Banale dimostrazione di insiemistica.

$\square$

2 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{A}, \mu) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \arrow[d, "g"] \\
& (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.1: Integrazione indotta

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura, sia Y un insieme, sia $f : X \to Y$ una funzione biettiva e sia $g : (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1)$ una funzione $f\mathcal{A}$-misurabile.
Allora g è $f\mu$-integrabile se e solo se $g \circ f$ è μ-integrabile, e vale l'identità

$$\int g \ \mathrm{d}f\mu = \int g \circ f \ \mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione

Assumiamo che g sia $f\mu$-integrabile. Allora vale

$$\int g \ \mathrm{d}f\mu = \int_* g \ \mathrm{d}f\mu = \sup \{I_{f\mu}(\varphi) : \varphi \in \Sigma_-(g)\} = \sup \left\{ \sum_i a_i f\mu(\varphi^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \sum_i a_i \mu(f^{-1}(\varphi^{-1}(\{a_i\}))) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \sup \left\{ \sum_i a_i \mu((\varphi \circ f)^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \circ f \in \Sigma_-(g \circ f) \right\}$$

$$\text{con } \psi := \varphi \circ f, \quad \int_* g \ \mathrm{d}f\mu = \sup \{I_\mu(\psi) : \psi \in \Sigma_-(g \circ f)\} = \int_* g \circ f \ \mathrm{d}\mu$$

La dimostrazione è assolutamente analoga per l'integrale superiore e nella direzione opposta assumendo l'integrabilità di $g \circ f$. Le varie uguaglianze seguono dalla biettività di f.

$\square$

Osservazione 2.1: Girotondone per il TFA

L'obiettivo di questo scherzetto è dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate, ovvero

$$\int g \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g \circ f) \cdot J_f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Ma c'è un problema: noi abbiamo dimostrato un risultato dalla forma leggermente diversa, ovvero

$$\int g \ \mathrm{d}f\mu = \int g \circ f \ \mathrm{d}\mu$$

Osservando il TFA ci aspettiamo che la nostra $\mathrm{d}f\mu$ corrisponda a $J_f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$, dunque dobbiamo fare un piccolo giretto usando la biettività di f:

$$\int g \ \mathrm{d}\lambda = \int g \circ f \circ f^{-1} \ \mathrm{d}\lambda = \int g \circ f \ \mathrm{d}f^{-1}\lambda$$

In questo modo ci basta riuscire a far corrispondere $J_f \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n$ a $\mathrm{d}f^{-1}\mathcal{L}^n$

3 Derivata di Radòn-Nikodym

Teorema 3.1: Teorema di Radòn-Nikodym

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e siano ν, μ misure su $(X, \mathcal{A})$ tali che μ sia σ-finita e ν sia assolutamente continua rispetto a μ. Allora esiste una funzione $\mathcal{A}$-misurabile $f : X \to X$ tale che per ogni $E \in \mathcal{A}$ si abbia

$$\nu(A) = \int_A f \ \mathrm{d}\mu$$

E per una funzione ν-integrabile $g : (X, \mathcal{A}, \nu) \to \mathbb{R}$ vale

$$\int g \ \mathrm{d}\nu = \int g \cdot f \ \mathrm{d}\mu$$

Definizione 3.1: Derivata di Radòn-Nikodym

Nella situazione precedente, la funzione f si dice ***derivata di Radòn-Nikodym*** di ν rispetto a μ e si indica con

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$$

Corollario 3.1: CONGETTURA Di Banach-Caccioppoli e Radòn-Nikodym

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu, ||\cdot||)$ uno spazio di misura di Banach, sia μ una misura di Radòn invariante per isometrie e sia $f : (X, ||\cdot||) \to (X, ||\cdot||)$ una contrazione biettiva.
Allora $f^{-1}\mu$ soddifa le ipotesi del teorema 3.1 e $||f||$ è la sua derivata di R-N rispetto a μ.

Dimostrazione

Sia $0 < L < 1$ la costante di Lipschitz di f e sia $A \in \mathcal{A}$ un insieme di misura nulla.
Abbiamo che $f^{-1}\mu(A) = \mu(f(A))$. Osserviamo che $f(A)$ è isometricamente equivalente a un sottoinsieme di A, dunque $f(A)$ ha misura nulla per monotonia di μ. Abbiamo dunque che esiste una funzione μ-integrabile $g : X \to [0, +\infty]$ tale che

$$f^{-1}\mu(E) = \int_E g \; \mathrm{d}\mu = \int g\chi_E \; \mathrm{d}\mu = \int_* g\chi_E \; \mathrm{d}\mu = \sup \{I_\mu(\varphi) : \varphi \in \Sigma_-(g\chi_E)\}$$

Combinando con la definizione di misura finale

$$f^{-1}\mu(E) = \mu(f(E)) = \int_{f(E)} \mathrm{d}\mu$$

□

4 Il viaggio verso il TFA

Cercheremo di dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate ***lineari*** con la speranza di estendere questo ragionamento a cambiamenti di coordinate ***differenziabili***, ovvero localmente lineari. Per fare questo, ci permetteremo di sostituire i plurirettangoli nella definizione della misura di Lebesgue ai pluriparallelogrammi

Lemma 4.1: Misura indotta da un cambiamento di coordinate lineare

Sia $F : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_\mathcal{L}, \mathcal{L}^n) \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare invertibile.
Allora $F^{-1}\mathcal{L}^n = |\det F| \cdot \mathcal{L}^n$ e dunque

$$F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det F| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione

Sia $E \in F\mathcal{M}_\mathcal{L}$. Per definizione di misura indotta, abbiamo che $F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(F(E))$ e che, come visto nel corso di Geometria A è uguale a $|\det F| \cdot \mathcal{L}^n(E)$.

□

Teorema 4.1: TFA per cambiamenti di coordinate lineari

Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare invertibile e sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n$-integrabile. Vale il seguente fatto:

$$\int g \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g \circ F) \cdot |\det F| \; \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Lemma 4.2: NON SO SE SERVA DAVVERO

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e per $r > 0$ sia $\{B_r(x_i)\}_{i \in I_r}$ un suo ricoprimento numerabile di palle aperte.
Vale

$$\mathcal{L}^n(E) \leq \sum_{i \in I_r} \mathcal{L}^n(B_r(x_i)) \quad \text{e in particolare} \quad \mathcal{L}^n(E) = \lim_{r \to 0} \sum_{i \in I_r} \mathcal{L}^n(B_r(x_i))$$

Dimostrazione

Segue dal teorema di Lindelof e dalla compatibilità tra $\mathcal{H}^n$ e $\mathcal{L}^n$

□

Teorema 4.2: Derivata R-N di una misura finale

Sia $\varphi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^n) \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo locale e sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^{-1}\mathcal{L}^n}{\mathrm{d}\mathcal{L}^n} = |\det D_\varphi|$$

Nel senso della definizione 3.1 della derivata di Radòn-Nikodym.

Dimostrazione

Poniamo $|\det D_\varphi(x)| =: J(x)$.
Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Localmente la trasformazione φ agisce come una trasformazione lineare D_φ, dunque in intorni V_i sufficientemente piccoli di punti $x_i \in E$ indicizzati su un insieme numerabile I applichiamo il lemma 4.1 e abbiamo $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \sim D_\varphi \mathcal{L}^n = J(x) \cdot \mathcal{L}^n$. Dunque posti possiamo scrivere

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \sum_{i \in I} \int_{V_i} J(x_i) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n \sum_{i \in I} \int_E J(x_i)\chi_{V_i}(y) \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n(y)$$

Facendo una *mossa alla Gottinga* riconosciamo una regolarità sufficiente ad applicare uno strano genere di integrale di Riemann rendendo sempre più piccoli i nostri intorni e otteniamo

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E J \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int_E |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

□

Teorema 4.3: TFA

Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo locale e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n$-integrabile. Vale

$$\int g \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n = \int (g \circ \varphi) \cdot |\det D_\varphi| \, \mathrm{d}\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione

La dimostrazione è banale combinando i non banali teoremi 2.1, 3.1 e 4.2.

□