PEM

F. Troncana, sotto la supervisione del prof. R. Zunino

TBD

0.1 Nozioni fondamentali

Definizione 0.1: Categoria e dualità

Una ***categoria*** $\mathcal{C}$ è una struttura munita di due classi: $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ e $\hom\mathcal{C}$, dette rispettivamente ***oggetti*** (o elementi) e ***morfismi*** (o mappe o freccie) tali che

- Ogni morfismo $f \in \hom\mathcal{C}$ abbia associati due oggetti $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ detti rispettivamente ***dominio*** e ***codominio*** di f, che verrà indicato come $f : A \to B$.
- Per ogni coppia di morfismi $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sia definita la loro ***composizione***, ovvero un morfismo $g \circ f : A \to C$ (spesso indicato solo con gf).
- Per ogni oggetto $X \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ esista un morfismo $\mathrm{id}_X \in \hom\mathcal{C}$ detto ***identità*** di X tale che per ogni morfismo $f : A \to B$ valga $\mathrm{id}_B\, f = f\, \mathrm{id}_A = f$.
- Per ogni terna di morfismi componibili $f, g, h \in \hom\mathcal{C}$, valga $h(gf) = (hg)f =: hgf$, ovvero la composizione sia ***associativa***.

Fissati due oggetti $A, B \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ denoteremo con $\hom(A, B)$ o $\mathcal{C}(A, B)$ la collezione dei morfismi $A \to B$ di $\hom\mathcal{C}$.
Per ogni categoria $\mathcal{C}$ è definita la sua ***duale*** (o opposta) $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, i cui oggetti sono gli stessi di $\mathcal{C}$ e i cui morfismi sono quelli di $\mathcal{C}$ ma invertiti di direzione, ovvero ad ogni $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ corrisponde un $f^{\mathsf{op}} : B \to A$ in $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$.
Una categoria $\mathcal{C}$ si dice:

- ***Piccola*** se la classe $\hom\mathcal{C}$ è un insieme.
- ***Grande*** se non è piccola.
- ***Localmente piccola*** se, una volta fissati due oggetti $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$, la classe $\hom(X, Y)$ è un insieme.

Osservazione 0.1

Banalmente:

- Le identià sono uniche.
- La categoria duale è essenzialmente unica e vale $(\mathcal{C}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} = \mathcal{C}$.
- Dato che $\operatorname{ob}\mathcal{C}$ inietta sempre in $\hom\mathcal{C}$ con la mappa $X \mapsto \mathrm{id}_X$, in generale la classe degli oggetti di una categoria non è una buona misura della sua grandezza.

Dimostrazione

Dimostriamo solo l'ultimo punto con un esempio, gli altri sono banali. Sia V la categoria formata da un unico oggetto $\bullet$ e la cui classe dei morfismi corrisponde alla classe dei cardinali, dove la composizione di due morfismi è data dalla loro somma come cardinali.

Da ora in avanti, assumeremo sempre che le nostre categorie siano almeno localmente piccole per evitare *troppi* problemi di fondazione (anche se come vedremo rimarranno delle grandi criticità)

Definizione 0.2: Sapori di morfismi

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia $f : A \to B$ un morfismo. Esso può dirsi:

- ***Monomorfismo*** (o monico o mono) se la precomposizione è iniettiva, ovvero per ogni coppia di morfismi $g_1, g_2 : C \to A$ vale $fg_1 = fg_2 \Rightarrow g_1 = g_2$.

- ***Epimorfismo*** (o epico o epi) se la postcomposizione è iniettiva, ovvero se per ogni coppia di morfismi $g_1, g_2 : B \to C$ vale $g_1 f = g_2 f \Rightarrow g_1 = g_2$.
- ***Endomorfismo*** (o endo) se $A = B$.
- ***Sezione*** (o split mono) se ha un'inversa sinistra, ovvero se esiste un morfismo $g : B \to A$ tale che $gf = \mathrm{id}_A$.
- ***Retrazione*** (o split epi) se ha un'inversa destra, ovvero se esiste un morfismo $g : B \to A$ tale che $fg = \mathrm{id}_B$.
- ***Isomorfismo*** (o iso) se ha un'inversa destra e sinistra. In particolare, A e B si dicono ***isomorfi*** (attraverso f) e li indicheremo con $f : A \cong_{\mathcal{C}} B$ omettendo usualmente f o $\mathcal{C}$.
- ***Automorfismo*** (o auto) se è iso e endo.

Osservazione 0.2

Valgono le seguenti:

- Le sezioni sono mono.
- Le retrazioni sono epi.
- iso $\Leftrightarrow$ split mono + epi $\Leftrightarrow$ mono + split epi $\Rightarrow$ epi e mono,ma nell'ultimo caso non vale l'implicazione inversa.
- Tutte le inverse sono uniche quando esistono.
- Un mono è un epi nella categoria opposta e viceversa.

Dimostrazione

Forniamo solo due esempi di morfismi che sono epici e monici ma non isomorfismi (le altre verifiche sono assolutamente automatiche):

- Poniamoci nella categoria **Haus** degli spazi topologici di Hausdorff i cui morfismi sono le funzioni continue tra questi e consideriamo l'inclusione $\iota : [0,1] \cap \mathbb{Q} \hookrightarrow [0,1]$ (entrambi con la topologia euclidea); questa è chiaramente mono in quanto iniettiva, ed è epi in quanto una funzione continua in **Haus** è completamente determinata dal suo valore su un sottospazio denso, ma non è iso dato che non è suriettiva.
- Consideriamo la categoria

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "f"] & \bullet \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

  Dato che a destra o sinistra possiamo comporre solo con l'identità, f è sia mono che epi, ma non è iso in quanto non ha inversa.

Definizione 0.3: Funtore

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un ***funtore covariante*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste in due mappe $F : \mathrm{ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$ e $F : \hom \mathcal{C} \to \hom \mathcal{D}$ che rispettino la composizione, ovvero:

- Per ogni morfismo $f : X \to Y$ vale $Ff : FX \to FY$.
- Per ogni oggetto $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ vale $F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$.
- Per ogni coppia di morfismi componibili $f, g \; in \hom \mathcal{C}$ vale $F(gf) = FgFf$.

Un ***funtore controvariante*** da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ è un funtore covariante $F : \mathcal{C}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{D}$.
Un funtore si dice:

- ***Fedele*** se per ogni $X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è iniettiva.
- ***Pieno*** se per ogni $X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è suriettiva.
- ***Pienamente fedele*** se è pieno e fedele.
- ***Essenzialmente suriettivo sugli oggetti*** se per ogni oggetto $Y \in \mathcal{D}$ esiste un oggetto $X \in \mathcal{C}$ tale che $FX \cong_{\mathcal{D}} Y$

Proposizione 0.1

Sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore di qualsiasi varianza. Se $f : X \to Y$ è un isomorfismo, allora $Ff : FX \to FY$ è un isomorfismo.
Se F è pienamente fedele, vale anche l'implicazione inversa.

Dimostrazione

La prima implicazione è banale, dunque assumiamo che F sia pienamente fedele e $g : FX \to FY$ sia un isomorfismo; dato che la mappa $\varphi := F_{X,Y} : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ è una biezione, esiste $f : X \to Y$ tale che $\varphi(f) = g$, dunque definiamo $f' := \varphi^{-1}(g^{-1})$. Dato che F è un funtore, vale

$$f'f = \varphi^{-1}(\varphi(f'f)) = \varphi^{-1}(\varphi(f')\varphi(f)) = \varphi^{-1}(g^{-1}g) = \varphi^{-1}(\mathrm{id}_{FX}) = \mathrm{id}_X \ ,$$

Dimostrare che f' è anche l'inversa destra di f è assolutamente analogo, così come il caso controvariante.

$\square$

1 Prodotti

Ci sono (almeno) tre definizioni (quasi) equivalenti del prodotto in una categoria. La prima

1.1 Proprietà universale

Definizione 1.1: Prodotto tramite proprietà universale

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ due oggetti.
Si dice ***prodotto*** di X e Y in $\mathcal{C}$ un oggetto $X \times Y$ munito di due morfismi $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ detti ***proiezioni*** tali che per ogni oggetto Z e ogni coppia di morfismi $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$ esista un unico morfismo $f \times g : Z \to X \times Y$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & & Y \\
 & Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, "f\times g"] &
\end{tikzcd}$$

1.2 Categoria dei coni

Definizione 1.2: Cono

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia J un diagramma commutativo in $\mathcal{C}$.
Si dice ***cono*** su J un oggetto $C \in \mathcal{C}$ con una collezione di morfismi $\{\rho_j : C \to j\}_{j\in J}$ tale che per ogni morfismo $f : X \to Y$ in J, il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\rho_X"'] \arrow[dr, "\rho_Y"] & \\
X \arrow[rr, "f"] & & Y
\end{tikzcd}$$

La collezione dei coni su un diagramma J e dei morfismi tra loro forma una categoria, detta $\textsf{Cone}(J)$: i suoi oggetti sono i coni $(C, \{\rho_j\}_{j\in J})$ e i suoi morfismi sono definiti da

$$\hom((C, \{\rho_j\}_{j\in J}), (C', \{\rho'_j\}_{j\in J})) = \{m : C \to C' : \forall j \in J, \rho_j = \rho'_j m\}$$

Questi sono detti morfismi ***medianti***.

Definizione 1.3: Prodotto tramite coni

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ due oggetti. Si dice ***prodotto*** di X e Y l'oggetto $X \times Y$ di $\mathcal{C}$ tale che $(X \times Y, \{\pi_X, \pi_Y\})$ sia l'oggetto iniziale di $\mathsf{Cone}(\{X, Y\})$, ovvero della categoria dei coni sul diagramma discreto X, Y.

1.3 Aggiunzioni

Prima di dare la prossima definizione, osserviamo che questa catena di biezioni è verificata (e naturale in A, B e C)

$$\begin{aligned}\underbrace{\hom_{\mathcal{C}}(A, B \times C)}_{\mathcal{C}^{\mathsf{op}} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathsf{Set}} &\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times \hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ &\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}^2}((A, A), (B, C)) \\ &\cong_{\mathsf{Set}} \hom_{\mathcal{C}^2}(\Delta A, (B, C))\end{aligned}$$

Dove $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^2$ è il funtore diagonale, che manda un oggetto A nell'oggetto (A, A) e un morfismo f nel morfismo (f, f): abbiamo ottenuto dunque che $\hom_{\mathcal{C}}(A, B \times C) \cong_{\mathsf{Set}} \hom(\Delta A, (B, C))$, ovvero che interpretando il prodotto come un funtore $\times : \mathcal{C}^2 \to \mathcal{C}$ questo è aggiunto destro al funtore diagonale, ovvero $\Delta \dashv \times$, quindi definiamo

Definizione 1.4: Prodotto III

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano $X, Y \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$ due oggetti. Si dice ***prodotto*** di X e Y l'immagine della coppia $(X, Y) \in \operatorname{ob}\mathcal{C}^2$ attraverso un funtore Π aggiunto destro al funtore Δ.

Prima di procedere con questa definizione però dobbiamo dimostrare alcune cosine: innanzitutto ci serve che il prodotto sia almeno essenzialmente unico

Lemma 1.1: Essenziale unicità degli aggiunti

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ due categorie e siano $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G_1, G_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtori tali che $F \dashv G_1$ e $F \dashv G_2$ oppure $G_1 \dashv F$ e $G_2 \dashv F$.
Allora $G_1 \cong G_2$.

Dimostrazione