TFA per cambiamenti di coordinate

Filippo $\mathcal{L}$. Troncana

A.A. 2023/2024

1 Misure e σ-algebre indotte

Definizione 1.1: σ-algebra finale

Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, sia Y un insieme e sia $f : X \to Y$ una funzione biettiva.
La ***σ-algebra*** finale indotta da f rispetto a $\mathcal{A}$ è la famiglia

$$f\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

Osservazione 1.1

La σ-algebra finale di f rispetto a $\mathcal{A}$ è la più grande σ-algebra Σ tale che $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \Sigma)$ sia misurabile.

Dimostrazione

Sia $\Sigma \subset 2^Y$ tale che $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \Sigma)$ sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni $E \in \Sigma$, abbiamo che $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, dunque $\Sigma \subset f\mathcal{A}$.

$\square$

Definizione 1.2: Misura esterna indotta

Siano X e Y due insiemi, sia μ una misura esterna su X e sia $f : X \to Y$ una funzione biettiva.
La ***misura indotta*** da f rispetto a μ è la funzione

$$f\mu : 2^Y \to [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

Proposizione 1.1

$f\mu$ è una misura esterna su Y.

Dimostrazione

Dimostriamo i tre assiomi di misura esterna.

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \Rightarrow f\mu(\varnothing) = 0$.
2. Siano $E \subset F \subset Y$, allora $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$, dunque la monotonia di $f\mu$ segue dalla monotonia di μ.
3. Siano $A, B \subset Y$, allora $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ e la "disuguaglianza triangolare" segue da quella di μ

$\square$

Proposizione 1.2

Se $f\mu$ è la misura indotta da f rispetto a μ, allora $\mathcal{M}_{f\mu} = f\mathcal{M}_\mu$.

Dimostrazione

TODO

$\square$

TODO: è possibile definire una duale σ-algebra iniziale e una misura iniziale, ma per la nostra trattazione è sufficiente la versione finale.

2 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{A}, \mu) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \arrow[d, "g"] \\ & (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}) \end{tikzcd}$$

Teorema 2.1: Integrazione indotta

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura, sia Y un insieme, sia $f : X \to Y$ una funzione biettiva e sia $g : (Y, f\mathcal{A}, f\mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1)$ una funzione $f\mathcal{A}$-misurabile.
Allora g è $f\mu$-integrabile se e solo se $g \circ f$ è μ-integrabile, e vale l'identità

$$\int g \ \mathrm{d}f\mu = \int g \circ f \ \mathrm{d}\mu$$

Dimostrazione

Assumiamo che g sia $f\mu$-integrabile. Allora vale

$$\int g \ \mathrm{d}f\mu = \int_* g \ \mathrm{d}f\mu = \sup \{I_{f\mu}(\varphi) : \varphi \in \Sigma_-(g)\} = \sup \left\{ \sum_i a_i f\mu(\varphi^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \sum_i a_i \mu(f^{-1}(\varphi^{-1}(\{a_i\}))) : \varphi \in \Sigma_-(g) \right\} = \sup \left\{ \sum_i a_i \mu((\varphi \circ f)^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \circ f \in \Sigma_-(g \circ f) \right\}$$

$$\text{con } \psi := \varphi \circ f, \quad \int_* g \ \mathrm{d}f\mu = \sup \{I_\mu(\psi) : \psi \in \Sigma_-(g \circ f)\} = \int_* g \circ f \ \mathrm{d}\mu$$

La dimostrazione è assolutamente analoga per l'integrale superiore e nella direzione opposta assumendo l'integrabilità di $g \circ f$. Le varie uguaglianze seguono dalla biettività di f.

$\square$