

# Calcolo delle Variazioni

Filippo  $\mathcal{L}$  Troncana

dalle lezioni del prof. Marco Bonacini dell'omonimo corso per il corso di laurea in Matematica

A.A. 2024/2025

# Indice

<b>1</b>	<b>Metodi classici</b>	<b>5</b>
1.1	Le equazioni di Eulero–Lagrange . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Metodi diretti</b>	<b>8</b>

## Introduzione

Il calcolo delle variazioni è quella branca della matematica che affronta il problema di trovare in una data famiglia (di funzioni, superfici, curve...) l'oggetto o gli oggetti che minimizzano una certa grandezza ad essi associata, ad esempio il problema della brachistocrona è uno degli esempi più classici

## Esempi introduttivi

### Metodi classici: funzioni reali

Supponiamo di avere una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  della quale vogliamo trovare i punti di minimo. Se la nostra funzione è differenziabile su  $]a, b[$  possiamo usare il teorema di Fermat che ci dà una condizione **necessaria ma non sufficiente** affinché un punto  $x_0 \in ]a, b[$  sia un punto di massimo, ovvero  $f'(x_0) = 0$ .

Se la nostra funzione è doppiamente differenziabile, possiamo ottenere un'altra condizione necessaria, ovvero che  $f'(x_0) = 0$  e che  $f''(x_0) \geq 0$ ; inoltre sempre lavorando sulla derivata seconda otteniamo quella che è una condizione **sufficiente ma non necessaria**, ovvero che  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$ .

Scartando l'ipotesi di doppia derivabilità, possiamo sostituirla con l'ipotesi di convessità, rendendo  $f'(x_0) = 0$  una condizione sufficiente per la minimalità di  $x_0$ .

I metodi classici (o indiretti) si basano sulla generalizzazione di questo approccio a spazi di funzioni, come vediamo ora.

### Metodi classici: integrale di Dirichlet

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto a chiusura compatta con frontiera  $\partial\Omega$  regolare e sia  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Definiamo il nostro spazio  $X$  e il nostro funzionale  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  come:

$$X = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = g\}, \quad F(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \, d\mathcal{L}^n, \quad \text{inoltre assumiamo che esista } u_0 = \arg \min_{u \in X} F(u).$$

Analogamente a quanto visto per le funzioni reali, quali condizioni necessarie o sufficienti possiamo identificare per il nostro punto di minimo  $u_0$ ? Ragionando sull'approccio del teorema di Fermat, possiamo formulare la condizione al primo ordine della nostra funzione reale come

$$0 = f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

Consideriamo lo spazio  $C_c^1(\Omega)$  delle funzioni differenziabili a supporto compatto contenuto in  $\Omega$  e per una  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$  e  $t \in \mathbb{R}$  definiamo la funzione  $u_t := u_0 + t\varphi$ , che appartiene a  $X$  per ogni  $t \in \mathbb{R}^1$ . Usiamo la nostra  $\varphi$  a mo' di "vettore della base canonica" come facevamo in  $\mathbb{R}^n$ :

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_t) - F(u_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \int_{\Omega} \|\nabla u_t\|^2 \, d\mathcal{L}^n - \int_{\Omega} \|\nabla u_0\|^2 \, d\mathcal{L}^n \right)$$

Sviluppando i quadrati e usando la linearità dell'integrale otteniamo

$$\frac{1}{t} \left( \int_{\Omega} \|\nabla u_t\|^2 \, d\mathcal{L}^n - \int_{\Omega} \|\nabla u_0\|^2 \, d\mathcal{L}^n \right) = \int_{\Omega} \frac{\|\nabla u_0\|^2}{t} + \frac{2t \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi}{t} + \frac{t^2 \|\nabla \varphi\|^2}{t} - \frac{\|\nabla u_0\|^2}{t} \, d\mathcal{L}^n \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2 \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi \, d\mathcal{L}^n.$$

Battezziamo questa quantità che abbiamo trovato **variazione prima di  $F$  rispetto a  $\varphi$  in  $u_0$**  e la indichiamo con  $\delta F(u_0, \varphi)$ , sarà analoga alla nostra derivata direzionale; inoltre, se avessimo qualche ragione di assumere che  $u_0$  sia anche  $C^2(\bar{\Omega})$  potremmo usare il teorema della divergenza per scrivere anche

$$0 = \delta F(u_0, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi \, d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} (-\Delta u_0) \varphi \, d\mathcal{L}^n + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{du_0}{d\nu} \, dS = 0$$

Sfruttando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni otteniamo che

$$\int_{\Omega} (-\Delta u_0) \varphi \, d\mathcal{L}^n = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \Leftrightarrow -\Delta u_0 = 0$$

Perbacco! Assumendo che il nostro punto di minimo esista, abbiamo ottenuto che questo deve soddisfare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{su } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Ci sono due criticità tuttavia: abbiamo assunto tante cose belle sulla nostra  $u_0$  (in primo luogo, che questa esista) e siamo arrivati a scrivere una PDE, oggetti che in generale non sono di facilissima trattazione e figuriamoci risoluzione. Per questo nel ventesimo secolo si sono sviluppati i cosiddetti metodi diretti.

<sup>1</sup>Banalmente, in quanto  $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$

## Metodi diretti: teorema di Weierstrass

Tornando all'esempio della nostra funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , potremmo ricordarci che abbiamo un teorema che ci garantisce l'esistenza del minimo assumendo semplicemente la continuità di  $f$ , ovvero il teorema di Weierstrass, la cui dimostrazione si riassume in questi step:

1. Sia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione minimizzante, ovvero tale che  $f(x_n) \rightarrow \inf_{[a,b]} f$
2. L'intervallo  $[a, b]$  è compatto, dunque esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  che converge a  $\hat{x} \in [a, b]$ .
3. Dato che  $f$  è continua,  $f(\hat{x}) = \inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$ .

Notiamo che sarebbe bastata la semicontinuità inferiore di  $f$ , e che questo approccio dipende dalla topologia di  $[a, b]$ : i metodi diretti si basano proprio su questo, ovvero su una forma più generale del teorema di Weierstrass (sostituendo  $[a, b]$  con uno spazio topologico sequenzialmente compatto) e scegliendo sulla nostra famiglia di oggetti la topologia adeguata.

Chiaramente abbiamo un piccolo trade-off: se la nostra topologia è molto fine (= tanti aperti), è facile dimostrare la continuità del nostro funzionale ma è difficile avere la compattezza della nostra famiglia; al contrario, con topologie meno fini abbiamo una compattezza più semplice da dimostrare ma una continuità più difficile, per questo è utile ridurre le ipotesi (ad esempio con la semicontinuità inferiore invece della continuità).

### Esercizio 0.0.1: Dimostrare che esiste una successione minimizzante

Sia  $X$  un insieme non vuoto e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

Si mostri che esiste una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  tale che  $f(x_n) \rightarrow \inf_X f$ .

### Soluzione

Sia  $y_0 \in f(X)$ . Se  $y_0 = \inf_X f$ , prendiamo una qualsiasi successione in  $f^{-1}(y_0)$ ; altrimenti, e per ogni  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  prendiamo<sup>a</sup>  $y_{n+1} \in f(X) \cap ]-\infty, y_n[$ , fermandoci se dovessimo arrivare a  $\inf_X f$ .

Per ogni  $y_n$  scegliamo<sup>b</sup>  $x_n \in f^{-1}(y_n)$  e abbiamo ottenuto la nostra successione minimizzante.



<sup>a</sup>Probabilmente c'è un modo per aggirare l'utilizzo di scelta dipendente ma non ho davvero voglia di pensarci.

<sup>b</sup>Idem ma con scelta numerabile.

## Cosa tratteremo?

Durante il corso tratteremo per lo più problemi unidimensionali in forma integrale, ovvero:

$$X = \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ ammette una qualche } u'\}, \quad F(u) = \int_{[a,b]} f(x, u(x), u'(x)) \, d\mathcal{L}^1(x), \quad \text{con } f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Il nostro funzionale  $F$  spesso sarà chiamato **energia**, mentre la funzione  $f$  avrà spesso come variabili  $f(x, s, p)$  e sarà chiamata **lagrangiana**; le sue derivate parziali saranno indicate con  $f_x, f_s, f_p$ .

## Ulteriori esempi introduttivi

### La brachistocrona

### Problema di Didone, o isoperimetrico

### Superfici di rivoluzione di area minima

### Problema di Plateau, o delle superfici minime

### Principio di minima azione

Si veda l'esercizio 1.1.1

# Capitolo 1

## Metodi classici

### 1.1 Le equazioni di Eulero–Lagrange

La situazione che analizziamo adesso è questa:

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \quad \text{con } a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a < b,$$

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, dx \quad \text{con } f \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Supponiamo che  $F$  ammetta un punto di minimo  $u_0 \in X$ , fissiamo una  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]a, b[)$  e definiamo per  $t \in \mathbb{R}$  la funzione  $u_t = u_0 + t\varphi$ , che chiaramente appartiene a  $X$  come visto nei primi esempi. Per ipotesi di minimalità, allora la funzione  $g(t) := F(u_t)$  deve avere un punto stazionario in  $t = 0$ . Se  $g$  fosse  $\mathcal{C}^1$  (cosa che vediamo sarà verificata grazie al prossimo teorema) potremmo applicare il teorema di Fermat per ottenere la condizione:

$$0 = g'(0) = \left. \frac{d}{dt} F(u_0 + t\varphi) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, u_0(x) + t\varphi(x), u_0'(x) + t\varphi'(x)) \, dx \right|_{t=0}.$$

#### Teorema 1.1.1: Derivazione sotto il segno di integrale

Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un insieme  $\mathcal{L}^n$ -misurabile,  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo aperto e  $h : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che

- $\forall t \in I$ , la mappa  $x \mapsto h(x, t)$  è  $\mathcal{L}^n$ -integrabile;
- $\forall x \in A$ , la mappa  $t \mapsto h(x, t)$  è derivabile;
- Esiste una funzione  $H : A \rightarrow \mathbb{R}$  maggiorante essenziale  $\mathcal{L}^n$ -integrabile della mappa  $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} h(x, t)$  per ogni  $t \in I$ .

Allora vale

$$\frac{d}{dt} \int_A h(x, t) \, d\mathcal{L}^n(x) = \int_A \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \, d\mathcal{L}^n(x).$$

Applicando il teorema alla nostra  $h(x, t) = f(x, u_0(x) + t\varphi(x), u_0'(x) + t\varphi'(x))$  e facendo un po' di derivate otteniamo

#### Definizione 1.1.1: Variazione prima

Nella situazione 1.1, la quantità

$$\delta F(u, \varphi) := \int_a^b f_s(x, u(x), u'(x))\varphi(x) + f_p(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \, dx$$

è detta **variazione prima** in  $u$  del funzionale  $F$  lungo  $\varphi$ .

E quindi con quanto fatto finora abbiamo dimostrato

**Proposizione 1.1.1: Equazione di Eulero–Lagrange debole**

Nella situazione 1.1, se  $u_0$  è un punto di minimo allora per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]a, b[)$  soddisfa l'**equazione di Eulero–Lagrange debole**:

$$\delta F(u_0, \varphi) = 0 = \int_a^b f_s(x, u(x), u'(x))\varphi(x) + f_p(x, u(x), u'(x))\varphi'(x) \, dx.$$

Una funzione che soddisfa l'equazione si dice **estremale**.

Adesso supponiamo anche di sapere<sup>1</sup> che  $f_p(x, u_0(x), u'_0(x))$  sia  $\mathcal{C}^1([a, b])$  (ad esempio, se avessimo motivo di credere che  $f$  e  $u_0$  siano  $\mathcal{C}^2$ ); integrando per parti otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 = \delta F(u_0, \varphi) &= \int_a^b f_s(x, u_0(x), u'_0(x))\varphi(x) \, dx + \cancel{[f_p(x, u_0(x), u'_0(x))\varphi(x)]_a^b} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [f_p(x, u_0(x), u'_0(x))] \varphi(x) \, dx = \\ &= \int_a^b \left[ f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{\partial}{\partial x} f_p(x, u_0(x), u'_0(x)) \right] \varphi(x) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Adesso useremo un piccolo lemma, ovvero:

**Lemma 1.1.1: Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni**

Sia  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Se per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]a, b[)$  vale

$$\int_a^b v(x)\varphi(x) \, dx = 0,$$

allora  $v$  è identicamente nulla su  $[a, b]$ .

**Dimostrazione**

Supponiamo per assurdo che esista  $x_0 \in ]a, b[$  tale che  $v(x_0) > 0$ . Allora per continuità di  $v_0$  esiste un intorno aperto  $I$  tale che per ogni  $x \in I$  vale  $v(x) \geq v(x_0)/2$ ; prendo una  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]a, b[)$  tale che  $\varphi > 0$  su  $I$  e  $\varphi = 0$  su  $]a, b[ \setminus I$ , allora vale

$$0 = \int_a^b v(x)\varphi(x) \, dx \geq \int_I \underbrace{v(x)\varphi(x)}_{>0} \, dx > 0,$$

assurdo, dunque  $v \equiv 0$ .

□

<sup>a</sup>Se fosse sugli estremi varrebbe comunque un argomento assolutamente analogo.

<sup>b</sup>WLOG

Allora possiamo applicare questo lemma alla relazione di prima per ottenere

**Teorema 1.1.2: Equazioni di Eulero–Lagrange**

Nella situazione 1.1, vale la proposizione 1.1.1.

Inoltre, se  $f_p \in \mathcal{C}^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  vale anche

$$f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) - \frac{\partial}{\partial x} f_p(x, u_0(x), u'_0(x)) = 0.$$

Questa condizione si dice **equazione di Eulero–Lagrange forte**.

**Esercizio 1.1.1: Eulero–Lagrange per il moto**

Sia  $\gamma : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la legge oraria della traiettoria di un punto materiale di massa  $m > 0$  sottoposto a un campo di forze  $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  conservativo, ovvero tale che esista  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $E = \nabla V$ .

<sup>1</sup>Per qualche motivo

Sappiamo che  $\gamma$  soddisfa le equazioni del moto

$$m\gamma''(t) = E(\gamma(t));$$

definiamo il funzionale **azione** come

$$S(\gamma) = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m(\gamma'(t))^2 - V(\gamma(t)) \, dt.$$

Si mostri (supponendo adeguate regolarità) che i minimi di  $S$  risolvono le equazioni del moto.

### Soluzione

Risolveremo il caso unidimensionale, in quanto il caso tridimensionale è semplicemente un sistema di tre casi unidimensionali indipendenti tra loro.

Supponiamo che  $\gamma$  sia un minimo di  $S$  e osserviamo che la lagrangiana di  $S$  è data da:

$$f(x, s, p) = \frac{1}{2} mp^2 - V(s) \Rightarrow \begin{cases} f_s(x, s, p) = \nabla V(s) = E(s) \\ f_p(x, s, p) = mp \end{cases}.$$

Applicando il teorema 1.1.2 abbiamo dunque

$$E(\gamma(t)) - \frac{\partial}{\partial t} m\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow E(\gamma(t)) = m\gamma''(t).$$



## Capitolo 2

# Metodi diretti