

TFA per cambiamenti di coordinate

Filippo \mathcal{L} . Troncana

A.A. 2023/2024

Sommario

Uno dei più importanti risultati della teoria geometrica della misura è la formula dell'area, strumento fondamentale per il calcolo delle misure di sottovarietà regolare di \mathbb{R}^n e degli integrali su di esse.

La dimostrazione classica, ad esempio quella riportata in [3] fa uso di diverse stime estremamente tecniche, ma credo¹ che fare un giro leggermente più largo possa portare a una dimostrazione meno traumatica.

Alcune fondamentali idee, come quella di considerare spazi misurabili "migliorati" (che noi chiameremo rinforzati), ovvero dotati di una famiglia di insiemi considerati trascurabili o nulli, per un'idea più "naturale" di equivalenza quasi ovunque vengono da [2].

In questa tesi vengono presentati dei risultati di teoria della misura sviluppati con un approccio simile a quello usato per lo studio della topologia generale e successivamente questi vengono applicati allo studio dell'integrale di funzioni composte e alla formula dell'area.

Indice

1	Teoria astratta della misura indotta	2
1.1	σ -algebre e misure esterne indotte da funzioni	2
1.2	Sottospazi misurabili	4
1.3	Spazi misurabili prodotto	5
1.4	Spazi misurabili rinforzati	6
2	Teoria dell'integrazione	7
2.1	Integrazione indotta	7
3	Derivata di Radò-Nikodym	8
4	Il viaggio verso il TFA	10

Notazione

Useremo le seguenti convenzioni:

- Generalmente un insieme X è assunto non vuoto.
- Dato un insieme X , indicheremo con 2^X il suo insieme delle parti.
- Dato un insieme X e un sottoinsieme $E \subset X$, indicheremo con E^c il suo complementare $X \setminus E$.
- Dato un insieme X e una sua famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} \subset 2^X$, la notazione $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ rappresenta una funzione $\varphi : I \rightarrow \mathcal{F}$ che a ciascun indice mappa un insieme di \mathcal{F} e indichiamo:

$$\cup_I E_i := \bigcup_{i \in I} E_i \quad , \quad \cap_I E_i := \bigcap_{i \in I} E_i \quad \text{e} \quad \prod_I E_i := \prod_{i \in I} E_i$$

In particolare, quest'ultimo è definito se I è finito (non ci occuperemo di prodotti cartesiani infiniti) e se $E_i = E_j = E$ per ogni i, j , allora $\prod_I E_i := E^{\#I}$

- Dato un campo K e una successione di elementi del campo $\{a_i\}_{i \in I} \subset K$, indichiamo

$$\sum_I a_i := \sum_{i \in I} a_i \quad \text{e} \quad \prod_I a_i := \prod_{i \in I} a_i$$

Almeno a livello formale, indipendentemente dalla loro esistenza o definizione.

¹o meglio, spero

1 Teoria astratta della misura indotta

Le definizioni di teoria della misura usate si riferiscono a quelle date in [1], meno che alcune che riportiamo qui, con opportuna motivazione

Definizione 1.1: Funzione misurabile

Siano (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) due spazi misurabili e sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione.
 f si dice **misurabile** se per ogni $E \in \mathcal{B}$ vale $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$.

In [1] le funzioni misurabili sono definite analogamente, ma l'ambiente di arrivo è uno spazio topologico e si richiede che la controimmagine di ogni aperto sia misurabile, in modo da poter usare alcuni strumenti di topologia dotando l'insieme di arrivo della σ -algebra Boreliana.

Tuttavia, ai fini della nostra trattazione sarà meglio usare la definizione più generale riportata qui sopra, che quindi è quella che adottiamo.

1.1 σ -algebre e misure esterne indotte da funzioni

Analogamente alle costruzioni di topologia iniziale e finale, definiamo

Definizione 1.2: σ -algebre indotte

Siano X e Y due insiemi, sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione, sia \mathcal{A} una σ -algebra su X e sia \mathcal{B} una σ -algebra su Y .
Definiamo le seguenti famiglie:

$$f_{\#}\mathcal{A} := \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\} \quad \text{e} \quad f_{\flat}\mathcal{B} := \{f^{-1}(E) \in 2^X : E \in \mathcal{B}\}$$

Esse si dicono rispettivamente **σ -algebra finale e iniziale** di f rispetto a \mathcal{A} e \mathcal{B} .

Proposizione 1.1

Nella situazione della definizione 1.2, $f_{\#}\mathcal{A}$ e $f_{\flat}\mathcal{B}$ sono σ -algebre.

Dimostrazione

Segue banalmente dalla commutatività tra operatori insiemistici, immagine e preimmagine.

□

Osservazione 1.1

La σ -algebra finale di f rispetto a \mathcal{A} è la più grande σ -algebra Ω tale che $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Omega)$ sia misurabile.
La σ -algebra iniziale di f rispetto a \mathcal{B} è la più piccola σ -algebra Σ tale che $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ sia misurabile.

Dimostrazione

Sia $\Omega \subset 2^Y$ tale che $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \Omega)$ sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni $E \in \Omega$, abbiamo che $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, dunque $\Omega \subset f_{\#}\mathcal{A}$.

Sia $\Sigma \subset 2^X$ tale che $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ sia misurabile. Per definizione di funzione misurabile, abbiamo che per ogni $E \in f_{\flat}\mathcal{B}$ si ha che $E = f^{-1}(F)$ con $F \in \mathcal{B}$ e quindi che $E \in \Sigma$, dunque $f_{\flat}\mathcal{B} \subset \Sigma$.

□

Definizione 1.3: Misure esterne indotte

Siano X e Y due insiemi, siano μ e ν due misure esterne rispettivamente su X e su Y e sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione.

La **misura esterna finale** di f rispetto a μ è la funzione

$$f_{\#}\mu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f_{\#}\mu(E) := \mu(f^{-1}(E))$$

La **misura esterna iniziale** di f rispetto a ν è la funzione

$$f_{\flat}\nu : 2^X \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{con} \quad f_{\flat}\nu(E) := \nu(f(E))$$

Proposizione 1.2

Nella situazione della definizione 1.3, $f_{\#}\mu$ è una misura esterna su Y e $f_b\nu$ è una misura esterna su X .

Dimostrazione

Dimostriamo i tre assiomi di misura esterna per $f_{\#}\mu$:

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f_{\#}\mu(\emptyset) = 0$.
2. Siano $E \subset F \subset Y$, allora $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$, dunque la monotonia di $f_{\#}\mu$ segue dalla monotonia di μ .
3. Siano $A, B \subset Y$, allora $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ e la subaddittività segue da quella di μ

Ora per $f_b\nu$:

1. $f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f_b\nu(\emptyset) = 0$.
2. Siano $E \subset F \subset X$, allora $f(E) \subset f(F)$, dunque la monotonia di $f_b\nu$ segue dalla monotonia di ν .
3. Siano $A, B \subset X$, allora $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ e la subaddittività segue da quella di ν .

□

Osservazione 1.2: TOCORRECT: Bidualità delle σ -algebre

Nella situazione della definizione 1.2, $f_b f_{\#}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ e $f_{\#} f_b\mathcal{B} = \mathcal{B}$ SONO INCLUSIONI NON UGUAGLIANZE PER L'UGUAGLIANZA VUOI INIETTIVITÀ E SURIETTIVITÀ.

Dimostrazione

Per definizione

$$f_b f_{\#}\mathcal{A} = \{f^{-1}(E) \in 2^X : E \in f_{\#}\mathcal{A}\} = \{f^{-1}(E) \in 2^X : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\} = \{E \in 2^X : E \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$$

Allo stesso modo

$$f_{\#} f_b\mathcal{B} = \{E \in 2^Y : f^{-1}(E) \in f_b\mathcal{B}\} = \{E \in 2^Y : E \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$$

□

Proposizione 1.3: Bidualità delle misure esterne indotte

Nella situazione della definizione 1.3, $f_b f_{\#}\mu \geq \mu$ e $f_{\#} f_b\nu \leq \nu$. In particolare, se f è iniettiva vale $f_b f_{\#}\mu = \mu$ e se f è suriettiva vale $f_{\#} f_b\nu = \nu$

Dimostrazione

Abbiamo che $f_b f_{\#}\mu(E) = f_{\#}\mu(f(E)) = \mu(f^{-1}(f(E))) \geq \mu(E)$ per monotonia di μ .

Allo stesso modo, $f_{\#} f_b\nu(E) = f_b\nu(f^{-1}(E)) = \nu(f(f^{-1}(E))) \leq \nu(E)$

L'uguaglianza nei casi particolari segue banalmente.

□

Corollario 1.1

Sotto le ipotesi della proposizione 1.3, se f è una funzione biettiva vale l'uguaglianza.

Analogamente alle costruzioni topologiche, usiamo questa teoria per parlare di sottospazi misurabili

1.2 Sottospazi misurabili

Definizione 1.4: Sottospazio misurabile

Sia (X, \mathcal{A}) uno spazio misurabile e $Z \subset X$. Allora, definita la famiglia $\mathcal{A}|_Z := \{E \cap Z \in 2^X : E \in \mathcal{A}\}$, $(Z, \mathcal{A}|_Z)$ si dice **sottospazio misurabile** di X .

Osservazione 1.3

$(Z, \mathcal{A}|_Z)$ è effettivamente uno spazio misurabile.

Dimostrazione

La dimostrazione è banale.

□

Proposizione 1.4: Misurabili iniziali rispetto all'inclusione

Sia (X, \mathcal{A}) uno spazio misurabile, sia $Z \subset X$ un suo sottoinsieme e sia $i : Z \rightarrow X$ l'inclusione canonica. Allora $\mathcal{A}|_Z = i_b \mathcal{A}$.

Dimostrazione

Per $E \in i_b \mathcal{A}$ vale se e solo se $E = i^{-1}(F)$ per qualche $F \in \mathcal{A}$, ma per ogni $F \in 2^X$ vale $i^{-1}(F) = F \cap Z$, dunque $E = F \cap Z$ per qualche $F \in \mathcal{A}$ e quindi $E \in \mathcal{A}|_Z$.

□

Definizione 1.5: Sottomisura esterna

Sia X un insieme, $Z \subset X$ un suo sottoinsieme, $i : Z \rightarrow X$ l'inclusione canonica e sia $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna su X .

Allora $i_b \mu$ si dice **sottomisura esterna** su Z rispetto a X .

Notiamo che è effettivamente una misura esterna per la proposizione 1.2, adesso curiamoci di trovare un modo di calcolarla magari

Proposizione 1.5: Sottomisura esterna e restrizione

Nella situazione della definizione 1.5, vale $i_b \mu = \mu|_{2Z} = \mu \cdot \chi_Z$.

Dimostrazione

Per definizione, per ogni $E \subset X$ si ha $i_b \mu(E) = \mu(i^{-1}(E)) = \mu(E \cap Z) = \mu(E) = \mu|_{2Z}(E)$.

□

1.3 Spazi misurabili prodotto

A onor di completezza, sarebbe possibile trattare anche i prodotti da questo punto di vista, ma si tratta di costruzioni complesse e

Definizione 1.6: Spazio misurabile prodotto

Siano (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) due spazi misurabili, $X \times Y$ il prodotto cartesiano dei due insiemi e $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ le proiezioni canoniche.

Lo **spazio misurabile prodotto** $(X, \mathcal{A}) \otimes (Y, \mathcal{B})$ è lo spazio $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ dove $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ è la più piccola σ -algebra che contenga gli insiemi della forma $A \times B$ con $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, in altre parole, definiamo in questo modo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \langle \{A \times B \in 2^{X \times Y} : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \rangle$.

Osservazione 1.4

Siano (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) due spazi misurabili, $X \times Y$ il prodotto cartesiano dei due insiemi e $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ le proiezioni canoniche.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ è la più piccola σ -algebra che renda misurabili sia π_X che π_Y .

Dimostrazione

Notiamo che la tesi può essere riscritta come $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \langle \pi_{X^b} \mathcal{A} \cup \pi_{Y^b} \mathcal{B} \rangle$, in quanto una σ -algebra che renda misurabili le proiezioni deve necessariamente contenere l'unione delle σ -algebre iniziali^a, ma quindi per l'ipotesi di minimalità di $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ possiamo semplicemente richiedere $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \subset \langle \pi_{X^b} \mathcal{A} \cup \pi_{Y^b} \mathcal{B} \rangle$.

Notiamo che in generale, $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$, rispettivamente elementi di $\pi_{X^b} \mathcal{A}$ e $\pi_{Y^b} \mathcal{B}$, quindi deve appartenere alla σ -algebra generata dalla loro unione.

□

^aNotiamo che $\pi_{X^b} \mathcal{A} = \{A \times Y \in 2^{X \times Y} : A \in \mathcal{A}\}$

Definizione 1.7: Misura esterna prodotto

Siano X, Y due insiemi rispettivamente con misure esterne $\mu : X \rightarrow [0, +\infty]$ e $\nu : Y \rightarrow [0, +\infty]$. Una **misura prodotto** di μ e ν è una misura esterna $\mu \otimes \nu$ su $X \times Y$ tale che $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$

1.4 Spazi misurabili rinforzati

Un concetto fondamentale in teoria della misura è quello proprietà valide μ -quasi ovunque, ma sorge il problema della scelta di una misura. In realtà è possibile "indebolire" questo requisito, specificando la famiglia degli insiemi nulli di uno spazio misurabile e imponendo un requisito di "fedeltà" per le misure che vorremo definire su di esso.

Definizione 1.8: σ -ideale

Sia X un insieme e $I \subset 2^X$ una famiglia di insiemi tale che:

1. $\emptyset \in I$.
2. Se $N \in I$ e $M \subset N$ allora $M \in I$.
3. Se $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset I$ allora $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i \in I$.

Allora I si dice **σ -ideale** su X . In particolare, se $X \notin I$, allora I si dice **σ -ideale proprio**, altrimenti improprio^a.

^aIn quanto avremmo $I = 2^X$, non particolarmente utile nel migliore dei casi.

Definizione 1.9: Spazio fortemente misurabile

Sia X un insieme, \mathcal{M} una σ -algebra su X e \mathcal{N} un σ -ideale su X tale che $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.

Allora $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ si dice **spazio fortemente misurabile** e gli insiemi di \mathcal{N} si dicono **nulli** o trascurabili. La coppia $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ è detta **struttura fortemente misurabile**.

Ovviamente ogni spazio misurabile rinforzato è uno spazio misurabile e una misura esterna μ su un insieme X induce su di esso una struttura fortemente misurabile allo stesso modo in cui induce una normale struttura misurabile, con la coppia $(\mathcal{M}_\mu, \mathcal{N}_\mu)$ dove $\mathcal{N}_\mu := \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) = 0\}$.

Definizione 1.10: Validità quasi ovunque

Sia $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ uno spazio fortemente misurabile.

Una proprietà P sugli elementi di X si dice **valida quasi ovunque** se $\{x \in X : \neg P(x)\} \in \mathcal{N}$ e scriviamo $\forall_{\mathcal{N}} x \in X, P(x)$.

Notiamo che se $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\mu$ per una misura μ , questa diventa la definizione di validità μ -quasi ovunque

Notazione

Sia $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ uno spazio fortemente misurabile e siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Allora $=_{\mathcal{N}}, \geq_{\mathcal{N}}, >_{\mathcal{N}}, \leq_{\mathcal{N}}$ e $<_{\mathcal{N}}$ si riferiscono alle stesse relazioni intese quasi ovunque.

Se $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\mu$ per qualche misura esterna, invece di scrivere \mathcal{N} al pedice scriveremo μ .

2 Teoria dell'integrazione

2.1 Integrazione indotta

La situazione che studiamo in questa sezione è la seguente

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{A}, \mu) & \xrightarrow{f} & (Y, f_{\#}\mathcal{A}, f_{\#}\mu) \\
 & \searrow g \circ f & \downarrow g \\
 & & (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (Y, \mathcal{B}, \nu) & \xleftarrow{f} & (X, f_b\mathcal{B}, f_b\nu) \\
 \downarrow g & \nwarrow g \circ f & \\
 (\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}) & &
 \end{array}$$

Dove \mathcal{L} è la misura di Lebesgue sui numeri reali.

Teorema 2.1: Integrazione indotta

Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura, sia Y un insieme, sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione biettiva e sia $g : (Y, f_{\#}\mathcal{A}, f_{\#}\mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1)$ una funzione $f_{\#}\mathcal{A}$ -misurabile.

Allora g è $f_{\#}\mu$ -integrabile se e solo se $g \circ f$ è μ -integrabile, e vale l'identità

$$\int g \, d f_{\#}\mu = \int g \circ f \, d\mu$$

Dimostrazione

Assumiamo che g sia $f_{\#}\mu$ -integrabile. Allora vale

$$\begin{aligned}
 \int g \, d f_{\#}\mu &= \int g \, d f_{\#}\mu = \sup_{*} \{ I_{f_{\#}\mu}(\varphi) : \varphi \in \Sigma_{-}(g) \} = \sup \left\{ \sum_i a_i f_{\#}\mu(\varphi^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \in \Sigma_{-}(g) \right\} = \\
 &= \sup \left\{ \sum_i a_i \mu(f^{-1}(\varphi^{-1}(\{a_i\}))) : \varphi \in \Sigma_{-}(g) \right\} = \sup \left\{ \sum_i a_i \mu((\varphi \circ f)^{-1}(\{a_i\})) : \varphi \circ f \in \Sigma_{-}(g \circ f) \right\} \\
 &\quad \text{con } \psi := \varphi \circ f, \quad \int g \, d f_{\#}\mu = \sup_{*} \{ I_{\mu}(\psi) : \psi \in \Sigma_{-}(g \circ f) \} = \int g \circ f \, d\mu
 \end{aligned}$$

La dimostrazione è assolutamente analoga per l'integrale superiore e nella direzione opposta assumendo l'integrabilità di $g \circ f$. Le varie uguaglianze seguono dalla biettività di f .

□

Osservazione 2.1: Girotondone per il TFA

L'obiettivo di questo scherzetto è dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate, ovvero

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ f) \cdot J_f \, d\mathcal{L}^n$$

Ma c'è un problema: noi abbiamo dimostrato un risultato dalla forma leggermente diversa, ovvero

$$\int g \, d f_{\#}\mu = \int g \circ f \, d\mu$$

Osservando il TFA ci aspettiamo che la nostra $d f_{\#}\mu$ corrisponda a $J_f \, d\mathcal{L}^n$, dunque dobbiamo fare un piccolo girotto usando la biettività di f :

$$\int g \, d\lambda = \int g \circ f \circ f^{-1} \, d\lambda = \int g \circ f \, d f^{-1}\lambda$$

In questo modo ci basta riuscire a far corrispondere $J_f \, d\mathcal{L}^n$ a $d f^{-1}\lambda$

3 Derivata di Radò-Nikodym

Teorema 3.1: Teorema di Radò-Nikodym

Sia (X, \mathcal{A}) uno spazio misurabile e siano ν, μ misure su (X, \mathcal{A}) tali che μ sia σ -finita e ν sia assolutamente continua rispetto a μ . Allora esiste una funzione \mathcal{A} -misurabile $f : X \rightarrow [0, +\infty[$ tale che per ogni $E \in \mathcal{A}$ si abbia

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

E per una funzione ν -integrabile $g : (X, \mathcal{A}, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$ vale

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu$$

Definizione 3.1: Derivata di Radò-Nikodym

Nella situazione precedente, la funzione f si dice **derivata di Radò-Nikodym** di ν rispetto a μ e si indica con

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

Definizione 3.2: Funzioni R-N

Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) due spazi con misure σ -finite.

Una funzione $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \nu)$ si dice **funzione R-N** se:

1. f è misurabile
2. Per ogni $E \in \mathcal{B}$ tale che $\nu(E) = 0$ si ha $\mu(f^{-1}(E)) = 0$

Osservazione 3.1: Categoria degli spazi con misure σ -finite e delle funzioni R-N

La classe degli spazi con misure σ -finite con la classe delle funzioni R-N e l'usuale composizione di funzioni è una categoria, che chiamiamo **Mea_{R-N}**.

Dimostrazione

Controlliamo le varie proprietà:

- Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura σ -finita. La funzione identità id_X è evidentemente una funzione R-N.
- Siano $f : (X, \mathcal{A}, \lambda) \rightarrow (Y, \mathcal{B}, \mu)$ e $g : (Y, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Z, \mathcal{C}, \nu)$ due funzioni R-N. Notiamo che per ogni $E \in \mathcal{C}$ tale che $\nu(E) = 0$ si ha $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(E))$ e $\mu(g^{-1}(E)) = 0$, dunque $\lambda((g \circ f)^{-1}(E)) = 0$.
- La composizione eredita l'associatività dalla composizione di funzioni in **Set**.

□

Proposizione 3.1: Derivata di R-N per Lipschitziane

Sia (X, d, μ) uno spazio metrico di dimensione $n \in \mathbb{Z}_+$ con una misura μ di Radò (rispetto alla σ -algebra Boreliana indotta dalla metrica) invariante per traslazioni (ovvero, $\mu(B_r(x)) = \mu(B_r(y))$ per ogni x, y in X)^a e sia $F : X \rightarrow X$ una funzione biettiva di Lipschitz con costante di Lipschitz $L > 0$.

Allora $F^{-1}\mu \ll \mu$ e L^n e la derivata di Radò-Nikodym di $F^{-1}\mu$ rispetto a μ è maggiorata μ -quasi ovunque da L^n .

Dimostrazione

È sufficiente dimostrarlo sulle palle aperte, dato che queste costituiscono una base della topologia e dunque della σ -algebra Boreliana.

Per ogni $r > 0$ e ogni $x \in X$ abbiamo che $F(B_r(x)) \subset B_{Lr}(F(x))$ che implica $\mu(F(B_r(x))) \leq \mu(B_{Lr}(F(x))) = L^n \mu(B_r(F(x)))$ il che implica che per ogni insieme, $F^{-1}(E) \leq \mu(E)$, dunque sappiamo che deve esistere $g : (X, d, \mu) \rightarrow [0, +\infty[$ tale che

$$F^{-1}\mu(E) = \int_E g \, d\mu$$

Ancora una volta lavoriamo sulle palle

$$\forall r > 0, \forall x \in X, 0 \leq \int_{B_r(x)} g(y) \, d\mu(y) \leq \int_{B_r(x)} L^n \, d\mu(y) \Rightarrow g \leq_\mu L^n$$

□

^aOnestamente non so se questa "uniformità" vada codificata come una proprietà dello spazio o della misura, dato che il nostro fine è quello di applicarlo alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n non ci poniamo troppi problemi in quanto \mathbb{R}^n è tutto piatto e \mathcal{L}^n è invariante per traslazioni.

4 Il viaggio verso il TFA

Cercheremo di dimostrare il TFA per cambiamenti di coordinate **lineari** con la speranza di estendere questo ragionamento a cambiamenti di coordinate **differenziabili**, ovvero localmente lineari. Per fare questo, ci permetteremo di sostituire i plurirettangoli nella definizione della misura di Lebesgue ai pluriparallelogrammi

Lemma 4.1: Misura indotta da un cambiamento di coordinate lineare

Sia $F : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa lineare invertibile.
Allora $F^{-1}\mathcal{L}^n = |\det F| \cdot \mathcal{L}^n$ e dunque

$$F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det F| \, d\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione

Sia $E \in \mathcal{FM}_{\mathcal{L}}$. Per definizione di misura indotta, abbiamo che $F^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(F(E))$ e che, come visto nel corso di Geometria A è uguale a $|\det F| \cdot \mathcal{L}^n(E)$.

□

Teorema 4.1: TFA per cambiamenti di coordinate lineari

Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa lineare invertibile e sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione \mathcal{L}^n -integrabile. Vale il seguente fatto:

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ F) \cdot |\det F| \, d\mathcal{L}^n$$

Teorema 4.2: Derivata R-N di una misura finale di diffeomorfismi

Sia $\varphi : (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo locale e sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E |\det D\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

Equivalentemente

$$\frac{d\varphi^{-1}\mathcal{L}^n}{d\mathcal{L}^n} = |\det D\varphi|$$

Nel senso della definizione 3.1 della derivata di Radòn-Nikodym.

Dimostrazione

Il fatto che $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \ll \mathcal{L}^n$ segue dalla proposizione 3.1, infatti se φ è un diffeomorfismo è almeno localmente lipschitziana e in ogni insieme limitato V ha costante di Lipschitz $\sup_V |\det D\varphi|$.

Poniamo $|\det D\varphi(x)| =: J(x)$.

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Localmente la trasformazione φ agisce come una trasformazione lineare $D\varphi$, dunque in intorno V_i sufficientemente piccoli di punti $x_i \in E$ indicizzati su un insieme numerabile I applichiamo il lemma 4.1 e abbiamo $\varphi^{-1}\mathcal{L}^n \sim D\varphi\mathcal{L}^n = J(x) \cdot \mathcal{L}^n$. Dunque posti possiamo scrivere

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \sum_{i \in I} \int_{V_i} J(x_i) \, d\mathcal{L}^n = \sum_{i \in I} \int_E J(x_i) \chi_{V_i}(y) \, d\mathcal{L}^n(y)$$

Facendo una *mossa alla Gottinga* riconosciamo una regolarità sufficiente ad applicare uno strano genere di integrale di Riemann rendendo sempre più piccoli i nostri intorni aumentando il loro numero e otteniamo

$$\varphi^{-1}\mathcal{L}^n(E) = \int_E J \, d\mathcal{L}^n = \int_E |\det D\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

□

Teorema 4.3: TFA

Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo locale e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione \mathcal{L}^n -integrabile. Vale

$$\int g \, d\mathcal{L}^n = \int (g \circ \varphi) \cdot |\det D_\varphi| \, d\mathcal{L}^n$$

Dimostrazione

La dimostrazione è banale combinando i non banali teoremi 2.1, 3.1 e ??.

□

Riferimenti bibliografici

- [1] S. Delladio, *Note di Analisi Matematica B per il Corso di Laurea in Matematica*. A.A. 2023/2024. indirizzo: [https://silvanodelladio.maths.unitn.it/AA23_24/AMB\(mat\)/NoteAMb_2324.pdf](https://silvanodelladio.maths.unitn.it/AA23_24/AMB(mat)/NoteAMb_2324.pdf).
- [2] D. Fremlin, *Measure Theory* (Measure theory v. 1-4). Torres Fremlin, 2000, ISBN: 9780953812905.
- [3] L. Evans e R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions* (Studies in Advanced Mathematics). Taylor & Francis, 1991, ISBN: 9780849371578.