Selezione da Analisi Matematica B

Davide Borra, Silvano Delladio, Filippo Sarzi Puttini, Filippo Troncana

A.A. 2023/2024

Indice

1 Teoria della Misura **5**

1.1 Misure esterne, definizione e prime proprietà 5

1.2 Misure esterne metriche, Boreliane, Borel-regolari, di Radòn 8

1.2.1 Misura di Lebesgue 10

Capitolo 1

Teoria della Misura

1.1 Misure esterne, definizione e prime proprietà

Definizione 1.1: Misura esterna

Sia X un insieme e 2^X il suo insieme delle parti.
Una ***misura esterna*** sull'insieme X è una mappa $\varphi : 2^X \to [0, +\infty]$ tale che

1. $\varphi(\varnothing) = 0$;
2. $\varphi(E) \leq \varphi(F)$, se $E \subset F \subset X$;
3. $\varphi\left(\cup_j E_j\right) \leq \sum_j \varphi\left(E_j\right)$, se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X.

Esempio 1.1: Misura esterna banale

Sia $X \neq \varnothing$ e sia

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \varnothing \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

φ è una misura esterna su X.

Esempio 1.2: Misura esterna di Dirac

Sia $X \neq \varnothing$, $x_0 \in X$ e sia

$$\varphi_{x_0}(E) := \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

φ_{x_0} è una misura esterna su X.

Esempio 1.3: Misura del conteggio

Sia X un insieme. La mappa $\varphi(E) := \#E$ è una misura esterna su X.

Osservazione 1.1: Misure di Peano-Jordan

La misura (inferiore/superiore) di Peano-Jordan (come definita sotto) non è una misura.

Notazione

Un intervallo in $\mathbb{R}^n$ è qualsiasi insieme che sia prodotto di intervalli di $\mathbb{R}$.

Notazione

La misura elementare di un intervallo aperto (ma pure del chiuso) $(a, b) \subset \mathbb{R}$ è $b - a$ e la misura elementare di un intervallo prodotto è il prodotto delle misure elementari delle sue componenti.
Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di intervalli, denotiamo con $S(\mathcal{F})$ la somma delle misure elementari di ciascun intervallo.

Dimostrazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e siano:

- ***Misura inferiore di Peano-Jordan***: definiamo l'insieme di famiglie di intervalli

$$\mathcal{I}_-(A) := \left\{ \{I_i\}_1^n : I_i \text{ intervalli}, \quad \bigcup_{i=1}^n I_i \subseteq A, \quad I_i \cap I_j = \varnothing \quad \text{se } i \neq j \right\}$$

  Allora la misura inferiore di Peano-Jordan è data da

$$J_-(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{I}_-(A) = \varnothing \\ \sup_{\mathcal{I}_-(A)} S & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Osserviamo che se non richiedessimo gli intervalli disgiunti, questa esploderebbe sempre all'infinito. Verifichiamo gli assiomi di misura:

  1. $J_-(\varnothing) = 0$ banalmente.
  2. Osserviamo che $\mathcal{I}_-$ è monotono per inclusione, come lo è sup, dunque lo è anche J_-.
  3. Consideriamo $E_1 := \mathbb{Q}^2 \cap (0,1)^2$ e $E_2 := (0,1)^2 \setminus E_1$. Per densità di $\mathbb{Q}^2$ abbiamo che $J_-(E_1) = J_-(E_2) = 0$ ma $J_-(E_1 \cup E_2) > 0$, dunque cade la disuguaglianza richiesta.

- ***Misura superiore di Peano-Jordan***: definiamo l'insieme di famiglie di intervalli

$$\mathcal{I}_+(A) := \left\{ \{I_i\}_1^n : I_i \text{ intervalli}, \quad \bigcup_{i=1}^n I_i \supseteq A, \quad I_i \cap I_j = \varnothing \quad \text{se } i \neq j \right\}$$

  Notiamo che questo è definito per gli insiemi limitati, dunque per questi definiamo la misura superiore di Peano-Jordan

$$J_+(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{I}_+(A) = \varnothing \\ \inf_{\mathcal{I}_+(A)} S & \text{se } A \text{ limitato} \\ \lim_{\rho \to +\infty} J_+(A \cap B_\rho(\mathbf{0})) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  L'esistenza del limite segue dalla monotonia inversa di $\mathcal{I}_+$ e inf. Verifichiamo gli assiomi di misura esterna

  1. $J_+\varnothing = 0$ banalmente.
  2. Abbiamo già dimostrato la monotonia.
  3. Osserviamo che $J_+(\mathbb{Q} \cap]0,1[) > 0$, mentre (indicizzando $\mathbb{Q}$) $\sum_j J_+(\{q_j\}) = 0$.

- ***Misura di Peano-Jordan*** sia $D \subset 2^{\mathbb{R}^2}$ la famiglia di sottoinsiemi tali che la misura inferiore e la misura superiore coincidono. Il dominio della mappa $J(A) := J_-(A) = J_+(A)$ non corrisponde a tutte le parti di $\mathbb{R}$ come visto sopra, dunque non è una misura esterna.

$\square$

Definizione 1.2: Insiemi misurabili

Siano X un insieme e φ una misura esterna su X.
Un sottoinsieme $E \subset X$ si dice ***misurabile*** per φ se per ogni $A \subset X$ vale: $\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)$.
Denotiamo la famiglia dei misurabili per φ con $\mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.2

Per il terzo punto della definizione 1.1 potremmo "rilassare" questa definizione con $\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)$

Esempio 1.4: Insiemi misurabili per gli esempi precedenti

Negli esempi 1.1, 1.2 e 1.3 abbiamo rispettivamente:

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\varnothing, X\}, \qquad \mathcal{M}_\varphi = 2^X, \qquad \mathcal{M}_\varphi = 2^X$$

.

Teorema 1.1: * | Fondamentale sui misurabili**

Sia X un insieme e φ una misura esterna su X. Valgono i seguenti:

1. $\mathcal{M}_\varphi$ è chiusa per complemento.
2. Gli insiemi di misura nulla sono misurabili.
3. $\mathcal{M}_\varphi$ è chiusa per intersezione (unione) finita.
4. $\mathcal{M}_\varphi$ è chiusa per unione numerabile di insiemi disgiunti.
5. φ è addittiva per unione numerabile di insiemi disgiunti.

Dimostrazione

1. Banale per definizione di misurabile.
2. Sia E tale che $\varphi(E) = 0$. Abbiamo che $0 \leq \varphi(A \cap E) \leq \varphi(E) = 0$ e quindi $\varphi(A) \leq \varphi(E) + \varphi(A \cap E^c) \leq \varphi(A)$.
3. Dimostriamo il caso con due insiemi, dato che l'intersezione finita è semplicemente un'intersezione binaria ripetuta. Siano $E, F \in \mathcal{M}_\varphi$ e sia $A \in 2^X$. Vale

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)$$

$$\varphi(A \cap E) \geq (A \cap E \cap F) + (A \cap E \cap F^c)$$
$$\varphi(A \cap E^c) \geq (A \cap E^c \cap F) + (A \cap E^c \cap F^c)$$

Quindi combinando il tutto otteniamo

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap (E \cap F)) + \varphi(A \cap (E \cap F)^c)$$

4. TODO
5. TODO

□

Osservazione 1.3

Posta una famiglia $\{E_i\}_{I \subset \mathbb{N}}$ di insiemi misurabili, possiamo ottenere una famiglia $\{E_i^*\}_{I \subset \mathbb{N}}$ di insiemi misurabili disgiunti ma con la stessa unione ponendo

$$E_1^* := E_1, \qquad E_i^* := E_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} E_j$$

Un po' *à la* ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.
Così possiamo potenziare il punto 4 del teorema 1.1 permettendo famiglie numerabili arbitrarie.

Definizione 1.3: σ-algebra

Sia X un insieme e sia Σ una famiglia non vuota di suoi sottoinsiemi tale che:

- Σ è chiusa rispetto al complementare
- Σ è chiusa rispetto all'unione numerabile

Allora Σ si dice ***σ-algebra*** su X.

Osservazione 1.4

Il secondo punto è equivalente al richiedere la chiusura per intersezione arbitraria.

Esempio 1.5: Esempi di σ-algebre

Sia X un insieme. Si ha che $\{\varnothing, X\}$ e 2^X sono entrambe σ-algebre, e per ogni σ-algebra Σ si ha $\{\varnothing, X\} \subset \Sigma \subset 2^X$.

Esempio 1.6: σ-algebra dei numerabili/conumerabili

La famiglia $\Sigma := \{E \in\subset 2^{\mathbb{R}} : \#E \leq \#\mathbb{N} \vee \#E^c \leq \#\mathbb{N}\}$ è una σ-algebra.

Esempio 1.7: Non σ-algebra dei finiti/cofiniti

La famiglia $\Sigma := \{E \in\subset 2^{\mathbb{N}} : \#E \in \mathbb{N} \vee \#E^c \in \mathbb{N}\}$ è chiusa rispetto al complementare ma non è chiusa rispetto all'unione numerabile, basti pensare a $\{\{2n\}\}_{\mathbb{N}}$.

Proposizione 1.1: ° | σ-algebra dei misurabili

Combinando il teorema 1.1, l'osservazione 1.3 e la definizione 1.3 è automatico osservare che $\mathcal{M}_\varphi$ è una σ-algebra.

Teorema 1.2: ** | Continuità dal basso/alto

Sia X un insieme, φ una misura esterna e siano $\{E_i\}_I$ e $\{F_j\}_J$ due famiglie numerabili di misurabili, rispettivamente crescenti e decrescenti con $\varphi(F_1) \in \mathbb{R}$. Valgono:

$$\varphi\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sup_{i\in I} \varphi(E_i) \qquad \varphi\left(\bigcap_{j\in J} F_j\right) = \inf_{j\in J} \varphi(F_j)$$

Dimostrazione

La dimostrazione non è banale ed è lasciata a chi deciderà di studiarla come esercizio di ricerca in note più complete.

$\square$

Osservazione 1.5: Sulle ipotesi della continuità dall'alto

Se non assumiamo tra le ipotesi del teorema 1.2 che $\varphi(F_1)$ sia finita, la tesi potrebbe fallire. Poniamo $X = \mathbb{N}$ e $F_j := \mathbb{N}_{\geq j}$ per ogni j. Abbiamo che per ogni j, $\varphi(F_j) = +\infty$, ma l'intersezione di tutta la famiglia è $\varnothing$ che ha misura nulla.

1.2 Misure esterne metriche, Boreliane, Borel-regolari, di Radòn

Definizione 1.4: Misura di CARATHÉODORY

Sia (X, d) uno spazio metrico e φ una misura esterna. Questa si dice ***misura di CARATHÉODORY*** se è addittiva sugli insiemi con distanza maggiore di 0, ovvero le coppie di insiemi tali che

$$d(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y) > 0$$

Teorema 1.3: * | CARATHÉODORY**

Sia φ una misura esterna di CARATHÉODORY su (X, d). Ogni sottoinsieme chiuso di X è misurabile.

Osservazione 1.6

In realtà per nel teorema 1.3 vale anche il viceversa, una misura esterna su uno spazio metrico che misura i chiusi è necessariamente metrica.

Proposizione 1.2: σ-algebra generata

Sia $I \subset 2^X$ una famiglia di sottoinsiemi e sia $\mathcal{A}_I$ la famiglia delle σ-algebre in X contenenti I, definiamo la ***σ-algebra generata*** da I la famiglia

$$\Sigma(I) := \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{A}_I} \Sigma$$

Essa è una σ-algebra, inoltre se $I \in \mathcal{A}_I$ allora $I = \Sigma(I)$ e la mappa $I \mapsto \Sigma(I)$ è monotona crescente per inclusione.

Dimostrazione

Banalmente $\Sigma(I)$ è in $\mathcal{A}_I$ e per minimalità vale $\Sigma(I) \subset I \subset \Sigma(I)$.
Notiamo che se $I \subset J$ allora $\mathcal{A}_I \supset \mathcal{A}_J$, l'intersezione ribalta di nuovo l'inclusione e quindi segue la monotonia.

$\square$

Proposizione 1.3: σ-algebra boreliana

Sia (X, τ) uno spazio topologico, siano F_τ i chiusi di X e K_τ i compatti. Valgono le seguenti:

1. $\Sigma(\tau) = \Sigma(F_\tau)$.
2. Se X è T_2, $\Sigma(K_\tau) \subset \Sigma(F_\tau)$.
3. Se (X, d) è metrico e separabile, $\Sigma(K_\tau) = \Sigma(\tau)$.

Dimostrazione

1. Banale, i chiusi sono tutti e soli i complementari degli aperti.
2. In uno spazio di Hausdorff i compatti sono chiusi, dunque l'inclusione segue dalla monotonia.
3. Dimostriamolo in $\mathbb{R}^n$. Dato che (X, d) è di Hausdorff e vale il punto precedente, dunque l'unica cosa che abbiamo bisogno di dimostrare è che $\tau \subset \Sigma(K_\tau)$.
Posto $G \in \tau$, indichiamo con $B_\mathbb{Q}$ la famiglia delle palle chiuse di raggio e centro razionali contenute in G e notiamo che $\#B_\mathbb{Q} = \#\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_{>0} = \#\mathbb{N}$. Proviamo che $G = \cup B_\mathbb{Q}$, un'inclusione ($\cup B_\mathbb{Q} \subset G$) è banale quindi consideriamo l'altra.
Prendiamo $x \in G$, sappiamo che esiste $B_r(x)$ completamente contenuta in G, per densità di $\mathbb{Q}^n$ esiste $Q \in B_{r/3}(x) \cap \mathbb{Q}^n$ e $q \in]r/3, r/2[\cap \mathbb{Q}$ tale che $G \supset \bar{B}_q(Q) \in B_\mathbb{Q}$, dunque tutti i punti di G appartengono almeno a una palla razionale.
A questo punto notiamo che $\Sigma(\tau)$ è stabile per unione numerabile e dunque $G \in \Sigma(K_\tau)$.

$\square$

Osservazione 1.7

In uno spazio topologico non metrico e non separabile potrebbe non valere l'ultimo punto di proposizione 1.3, basta considerare $[0, 1]$ con la topologia discreta, dove vale $\tau = \Sigma(\tau) = 2^{[0,1]}$, dove K_τ è la famiglia degli insiemi finiti e Σ_0 quella degli insiemi numerabili o conumerabili introdotta nell'esempio 1.5 vale $\Sigma(K_\tau) \subset \Sigma_0 \subset 2^{[0,1]} \neq \Sigma_0$.

Definizione 1.5: Boreliani

Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ una misura esterna. Allora:

1. La σ-algebra $\Sigma(\tau)$ viene denotata con $\mathcal{B}(X)$ ed è detta dei ***boreliani*** di X.
2. Se $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_\mu$, μ si dice ***boreliana***.

3. Se μ è boreliana e per ogni insieme S esiste un boreliano che contiene S di misura uguale, questa si dice ***Borel-regolare***.
4. Se μ è Borel-regolare e finita sui compatti, si dice ***di Radòn***.

Corollario 1.1: Di CARATHÉODORY

Una misura esterna metrica è boreliana.

Valgono i seguenti due risultati senza dimostrazione:

Teorema 1.4

Sia μ una misura esterna boreliana su uno spazio metrico (X, d) e sia B un boreliano. Valgono i seguenti fatti:

1. Se la misura di B è finita, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso F contenuto in B tale che $\mu(B \setminus F) \leq \varepsilon$.
2. Se B è contenuto in un'unione di insiemi aperti di misura finita, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto G contenente B tale che $\mu(G \setminus B) \leq \varepsilon$.

Teorema 1.5

Sia μ una misura esterna Borel-regolare su uno spazio metrico (X, d) e sia B un misurabile. Valgono i seguenti fatti:

1. Se la misura di B è finita, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso F contenuto in B tale che $\mu(B \setminus F) \leq \varepsilon$.
2. Se B è contenuto in un'unione di insiemi aperti di misura finita, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto G contenente B tale che $\mu(G \setminus B) \leq \varepsilon$.

1.2.1 Misura di Lebesgue

Teorema 1.6: Grande teorema di Lebesgue

Sia la funzione $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ definita da:

$$\mathcal{L}^n(E) = \begin{cases} \inf \left\{ \sum_j v(I_j) : \{I_j\}_j \in \mathcal{R}(E) \right\} & \text{se } E \neq \varnothing \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove $\mathcal{R}(E)$ è la famiglia dei ricoprimenti numerabili di intervalli aperti di E e v è la misura elementare di un intervallo. Allora $\mathcal{L}^n$ è una misura esterna metrica di Radòn.

Dimostrazione

Procediamo un punto alla volta

- $\mathcal{L}^n(\varnothing) = 0$ per definizione.
- Supponiamo $0 \neq E \subset F \subset \mathbb{R}^n$, vale evidentemente che $\mathcal{R}(F) \subset \mathcal{R}(E)$ e quindi calcolando l'inf su un insieme più grosso otteniamo $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(F)$.
-

$\square$