M2 Géo-mécanique : Ouvrages, Eau, Réservoirs (GEO2)

CNL: hands on [Part 1]

Filippo Gatti, Ph.D.
filippo.gatti@centralesupelec.fr
Lab.MSSMat UMR CNRS 8579
CentraleSupélec

November 3, 2019

CentraleSupélec

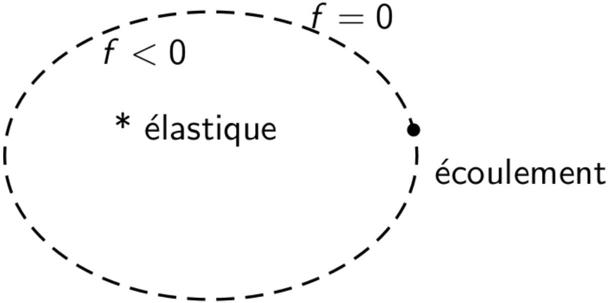
Outline

Modèles élastoplastiques avancés

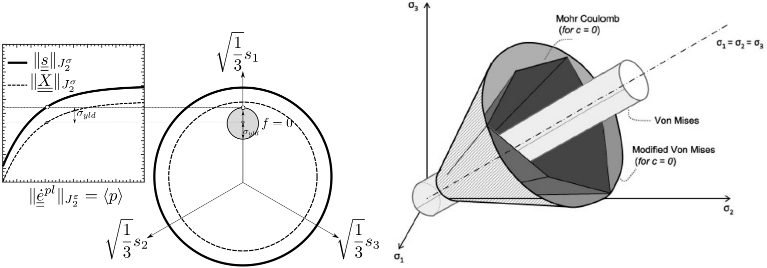
Problème élastoplastique

- Ingrédients pour décrire l'évolution élastoplastique?
    1. seuil de plasticité
    2. fonction de charge (critère de rupture)
    3. écrouissage (évolution du seuil de plasticité)
    4. écoulement plastique
    5. problème d'optimisation
    6. module d'écrouissage et multiplicateur plastique
    7. tenseur de rigidité élastoplastique

$$\begin{cases} f\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) < 0 & \text{elasticity} \quad (1) \\ f\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) = 0 & \text{plasticity} \quad (2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} f\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) - \sigma_{yld} \leq 0 & \text{limite élastique} \quad (3) \\ f_{ult}\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) - \sigma_{ult} \leq 0, \quad (\text{for} \|\underline{\underline{\varepsilon}}^{pl}\| \rightarrow \infty) & \text{surface limite} \quad (4) \end{cases}$$

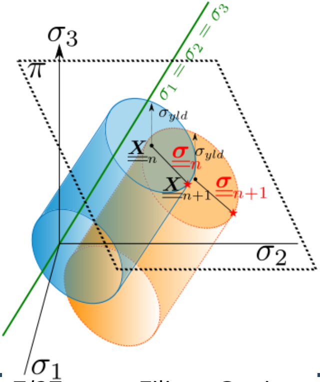


a b

Figure: Modèle de Armstrong-Frederick Gatti 2017

Modèle de Armstrong-Frederick

$$\begin{cases} f = \sqrt{3J_2\left(\underline{\underline{s}}^{\sigma} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\alpha}}\right)\right)} - \sigma_{yld} - R\left(r\right) \leq 0 & \text{limite élastique} \quad (5) \\ f_{ult} = \sqrt{3J_2\left(\underline{\underline{s}}^{\sigma} - \underline{\underline{X}}\right)} - \sigma_{yld} - R_{\infty} \leq 0 & \text{surface limite} \quad (6) \end{cases}$$



Variables d'écrouissage :

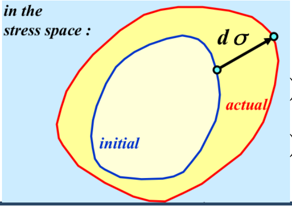
$$\begin{cases} \underset{\sim}{\chi} = \left\{\underline{\underline{X}}, R\right\} & \text{statiques} \quad (7) \\ \underset{\sim}{\eta} = \left\{\underline{\underline{\alpha}}, r\right\} & \text{cinématiques} \quad (8) \end{cases}$$

- Variables d'écrouissages $\equiv$ variables internes
- Utilisées pour décrire l'évolution de $f\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right)$
- $\underset{\sim}{\chi}$: variables d'écrouissage statiques
  $\longrightarrow$ collection des variables scalaires, vectorielles, tensorielles

$$\underset{\sim}{\chi} = \left\{R, \theta, \ldots, \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{Y}}}, \ldots\right\} \tag{9}$$

- $\underset{\sim}{\boldsymbol{\eta}}$: variables d'écrouissage cinématiques
  $\longrightarrow$ collection des variables scalaires, vectorielles, tensorielles
- Modèle de Armstrong-Frederick $\underset{\sim}{\boldsymbol{\eta}} = \left\{\underline{\underline{\alpha}}, r\right\}$:

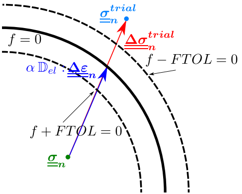
$$\underset{\sim}{\chi} \equiv \begin{cases} \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\left(\underline{\underline{\alpha}}\right) = \dfrac{2}{3} C \underline{\underline{\alpha}} \\ R\left(r\right) = R_{\infty}\left(1 - \exp\left(-br\right)\right) \end{cases}$$

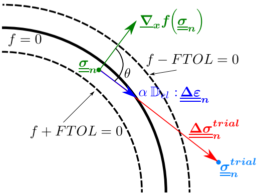


Évolution continue de f en temps : $f\,(t+\delta t) \approx f\,(t) + \delta f$

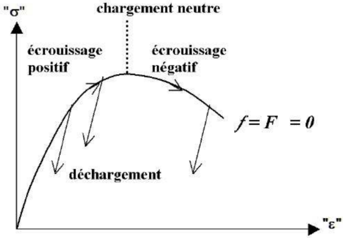
$$\text{si } f\,(t) \equiv 0 : \begin{cases} \delta f < 0 \rightarrow f\,(t+\delta t) < 0 & \text{déchargement élastique} \quad (12) \\ \delta f = 0 \rightarrow f\,(t+\delta t) = 0 & \text{chargement plastique} \quad (13) \end{cases}$$

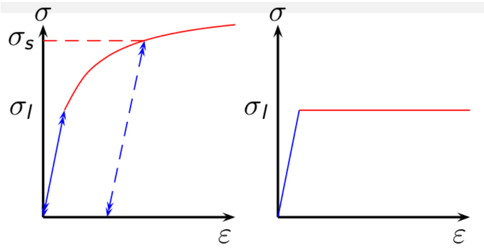
1. Hypothèse 0: $\underline{\underline{\boldsymbol{\delta}\varepsilon}}^{pl} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \rightarrow \underline{\underline{\boldsymbol{\delta}\sigma}}^{trial} = \mathbf{D}^{el} : \underline{\underline{\boldsymbol{\delta}\varepsilon}}$
2. Vérifier la valeur de $f\left(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\delta}\sigma}}^{trial}; \underset{\sim}{\chi}\right) \leq 0$
3. si $f\left(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\delta}\sigma}}^{trial}; \underset{\sim}{\chi}\right) > 0 \rightarrow$ correction: $f\left(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\delta}\sigma}}; \underset{\sim}{\chi} + \boldsymbol{\delta}\underset{\sim}{\chi}\right) = 0$

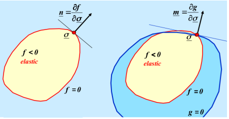




$$
\begin{cases}
f(t) = 0 \text{ and } \underline{\underline{\mathbb{D}_{\sigma} \boldsymbol{f}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\delta\sigma}}}^{trial} > 0 & \text{écrouissage positif} \quad (14) \\
f(t) = 0 \text{ and } \underline{\underline{\mathbb{D}_{\sigma} \boldsymbol{f}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\delta\sigma}}}^{trial} = 0 & \text{plasticité parfaite } (f = f_{ult}) \quad (15) \\
f(t+\delta t) = 0 \text{ and } \underline{\underline{\mathbb{D}_{\sigma} \boldsymbol{f}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\delta\sigma}}}^{trial} < 0 & \text{écrouissage négatif} \quad (16) \\
f(t+\delta t) < 0 \text{ and } \underline{\underline{\mathbb{D}_{\sigma} \boldsymbol{f}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\delta\sigma}}}^{trial} < 0 & \text{écrouissage négatif} \quad (17)
\end{cases}
$$

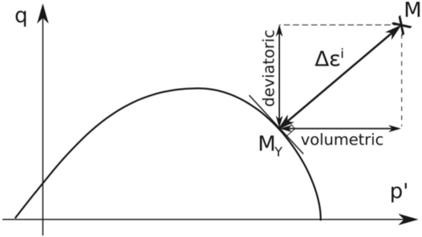


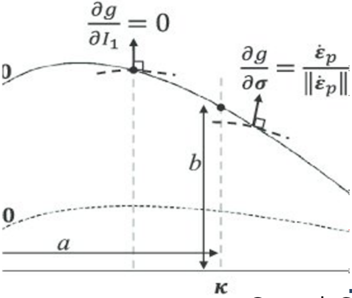




$$\begin{cases} \underline{\underline{\delta\varepsilon}}^{pl} = \delta\lambda.\underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{g}}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\delta\eta}} = -\delta\lambda.\underline{\underline{\mathbb{D}_\chi \boldsymbol{g}}} & \text{non-associée} \quad (18) \\ \underline{\underline{\delta\varepsilon}}^{pl} = \delta\lambda.\underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{f}}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\delta\eta}} = -\delta\lambda.\underline{\underline{\mathbb{D}_\chi \boldsymbol{f}}} & \text{associée}(f = g) \quad (19) \end{cases}$$

$$\lambda = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{\delta\varepsilon}}^{pl} : \underline{\underline{\delta\varepsilon}}^{pl}dt} = \qquad (20)$$





Modèle de Armstrong-Frederick : $\lambda, \mu, C, \kappa, b, R_\infty, \sigma_{yld}$: paramètres du modèles
Potentiel plastique:

$$g\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) = f\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) + \underbrace{\frac{3}{4}\frac{\kappa}{C}\underline{\underline{\boldsymbol{X}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}}_{\textbf{fading memory}} \tag{21}$$

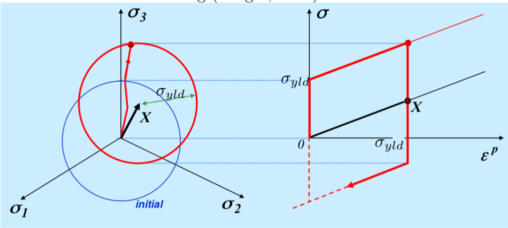
$$\underline{\underline{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}}^{pl} = \delta\lambda \underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{g}}} = \delta\lambda \underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{f}}} = \delta\lambda \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}}{\sqrt{3J_2\left(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right)}} \tag{22}$$

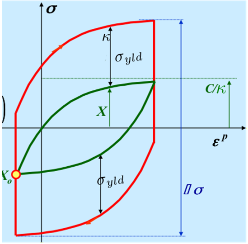
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\delta\eta}} \equiv \begin{cases} \underline{\underline{\boldsymbol{\delta\alpha}}} = \delta\lambda \underline{\underline{\mathbb{D}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{g}}} = \delta\lambda \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}}{\sqrt{3J_2\left(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right)}} - \delta\lambda \frac{3\kappa}{2C}\underline{\underline{\boldsymbol{X}}} & (23) \\ \delta r = -\delta\lambda \frac{\partial g}{\partial R} = -\delta\lambda \frac{\partial f}{\partial R} = \delta\lambda \rightarrow r \equiv \lambda & (24) \end{cases}$$

Évolution du seuil de plasticité

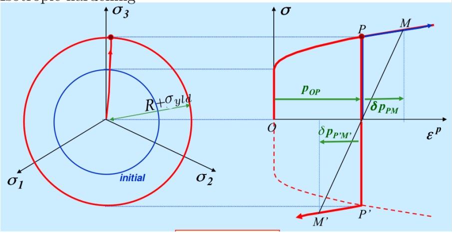
$$\delta \underset{\sim}{\chi} = \mathbf{D}_{\underset{\sim}{\eta}\underset{\sim}{\chi}} : \delta \underset{\sim}{\eta} \tag{25}$$

Linear kinematic hardening (Prager, 1949)





Isotropic hardening



Modèle de Armstrong-Frederick:

$$\boldsymbol{\delta}\underset{\sim}{\chi} \equiv \begin{cases} \underline{\underline{\boldsymbol{\delta X}}}\left(\underline{\underline{\alpha}}\right) = \frac{2}{3}C\underline{\underline{\boldsymbol{\delta}\alpha}} = \left(C\frac{\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^{\sigma} - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}}{\sqrt{3J_2\left(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^{\sigma} - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right)}} - \kappa\underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right)\delta\lambda & (26) \\ \delta R\left(r\right) = b\left(R_{\infty} - R\left(r\right)\right)\delta\lambda & (27) \end{cases}$$

Conditions de Karush–Kuhn–Tucker conditions:

$$\mathcal{K}: \begin{cases} f\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) \leq 0, & \qquad (28) \\ \lambda \geq 0, \qquad \forall f\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) \in \mathbb{S} \times \mathbb{K} & \qquad (29) \\ \delta\lambda f\left(\underline{\underline{\sigma}}; \underset{\sim}{\chi}\right) = 0 & \qquad (30) \end{cases}$$

$\delta\lambda$ est calculé à partir des conditions de consistance élastoplastique:

$$\text{if } f = 0, \rightarrow \delta f = 0 \rightarrow f(t + \delta t) = 0, \quad \text{chargement plastique}$$

$$\delta f = \underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{f}}} : \underbrace{\mathbf{D}^{el} : \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}} - \delta\lambda \underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{g}}}\right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\delta\sigma}}}} + \underline{\underline{\mathbb{D}_\chi \boldsymbol{f}}} : \underbrace{\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \underset{\sim}{\chi} : \underline{\underline{\mathbb{D}_\chi \boldsymbol{g}}} \delta\lambda}_{\boldsymbol{\delta} \underset{\sim}{\chi} = \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \underset{\sim}{\chi} : \boldsymbol{\delta} \underset{\sim}{\boldsymbol{\eta}}} = 0 \qquad (31)$$

En résolvant l'Equation (31), on trouve l'incrément du multiplicateur plastique:

$$\delta f = 0 \rightarrow \delta\lambda = \frac{\underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{f}}} : \mathbf{D}^{el} : \underline{\underline{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}}}{\underbrace{\underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{f}}} : \mathbf{D}^{el} : \underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma \boldsymbol{g}}}}_{\mathcal{H}_c=\text{module d'ecrouissage critique}} \quad \underbrace{- \underline{\underline{\mathbb{D}_\chi \boldsymbol{f}}} : \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}\underset{\sim}{\chi}} : \underline{\underline{\mathbb{D}_\chi \boldsymbol{g}}}}_{\mathcal{H}=\text{module d'ecrouissage}}} \tag{32}$$

Modèle de Armstrong-Frederick:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{D}_X \boldsymbol{f}}} = -\dfrac{3}{2} \dfrac{\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}}{\sqrt{3J_2\left(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right)}}; \dfrac{\partial f}{\partial R} = -1 & (33) \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\delta X}}} = \left(C \dfrac{\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}}{\sqrt{3J_2\left(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right)}} - \kappa \underline{\underline{\boldsymbol{X}}} \right) \delta\lambda & (34) \\ \delta R = b\left(R_\infty - R(r)\right)\delta\lambda & (35) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H} = C - \dfrac{3\kappa}{2} \dfrac{\left(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right) : \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}}{\sqrt{3J_2\left(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}}^\sigma - \underline{\underline{\boldsymbol{X}}}\right)}} + b\left(R_\infty - R\right) & (36) \\ \mathcal{H}_c = 3\mu & (37) \end{cases}$$

À l'aide de l'Equation (32), l'incrément élastoplastique de l'état de contrainte peut s'écrire sous forme:

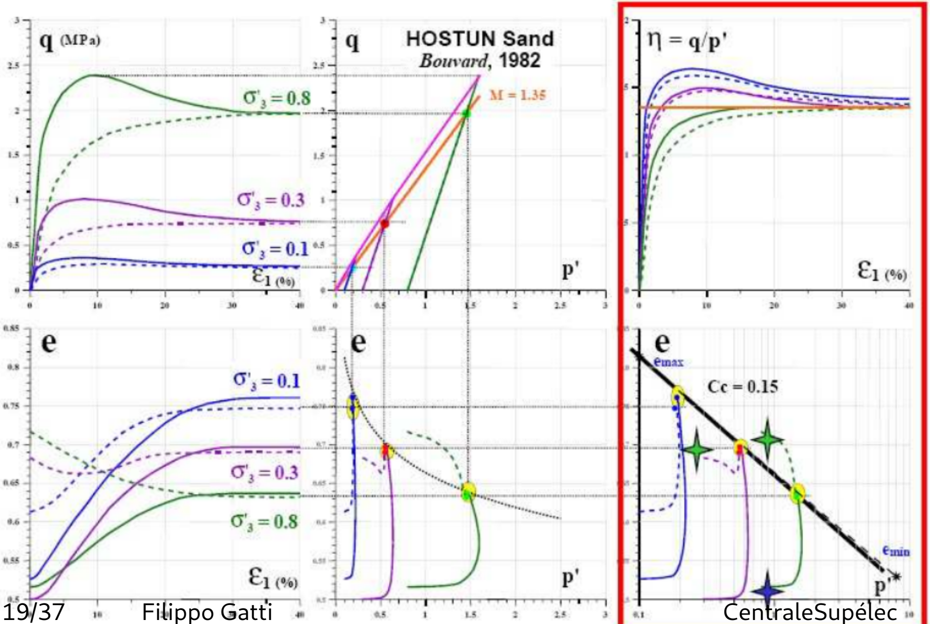
$$\underline{\underline{\delta\sigma}} = \mathbf{D}^{el} : \left(\underline{\underline{\delta\varepsilon}} + \underbrace{\frac{\underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma f}} : \mathbf{D}^{el} : \underline{\underline{\delta\varepsilon}}}{\mathcal{H} - \mathcal{H}_c}}_{-\delta\lambda} \underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma g}} \right) \tag{38}$$

Le tenseur de rigidité élastoplastique est identifiée :

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^{el} : \left(\mathbf{I} + \frac{\underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma g}} \otimes \mathbf{D}^{el} : \underline{\underline{\mathbb{D}_\sigma f}}}{\mathcal{H} - \mathcal{H}_c} \right) \tag{39}$$

$$\underline{\underline{\delta\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} : \underline{\underline{\delta\varepsilon}} \tag{40}$$

Modèles EP pour les argiles


q (MPa)
σ'3 = 0.8
σ'3 = 0.3
σ'3 = 0.1
ε1 (%)
q
HOSTUN Sand
Bouvard, 1982
M = 1.35
p'
η = q/p'
ε1 (%)
e
σ'3 = 0.1
σ'3 = 0.3
σ'3 = 0.8
ε1 (%)
e
p'
e
emax
Cc = 0.15
emin
p'

Ingrédients de modélisation

- comportement volumétrique/déviatorique couplés

- comportement volumétrique/déviatorique couplés
  1. volumétrique
     - compression isotrope
     - compression oedométrique (conditions à repos, in-situ$\rightarrow$ consolidation)
     - variables intéressées: $\sigma'_m (= p')$ et ε_{vol} (ou index des vides e)

- comportement volumétrique/déviatorique couplés
  1. volumétrique
     - compression isotrope
     - compression oedométrique (conditions à repos, in-situ$\rightarrow$ consolidation)
     - variables intéressées: $\sigma'_m (= p')$ et ε_{vol} (ou index des vides e)
  2. déviatorique
     - comportement sous charge triaxial/multiaxial
     - variables intéressées: $q - p'$ et $\varepsilon_d, \varepsilon_{vol}$ ($\varepsilon_d = \sqrt{\frac{4}{3} J_2 \left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}$)

Ingrédients de modélisation

- comportement volumétrique/déviatorique couplés
  1. volumétrique
     - compression isotrope
     - compression oedométrique (conditions à repos, in-situ$\longrightarrow$ consolidation)
     - variables intéressées: $\sigma'_m (= p')$ et ε_{vol} (ou index des vides e)
  2. déviatorique
     - comportement sous charge triaxial/multiaxial
     - variables intéressées: $q - p'$ et $\varepsilon_d, \varepsilon_{vol}$ ($\varepsilon_d = \sqrt{\frac{4}{3} J_2 \left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}$)
- rôle de la pression d'eau interstitielle u_w:

Ingrédients de modélisation

- comportement volumétrique/déviatorique couplés
  1. volumétrique
     - compression isotrope
     - compression oedométrique (conditions à repos, in-situ$\rightarrow$ consolidation)
     - variables intéressées: $\sigma'_m (= p')$ et ε_{vol} (ou index des vides e)
  2. déviatorique
     - comportement sous charge triaxial/multiaxial
     - variables intéressées: $q - p'$ et $\varepsilon_d, \varepsilon_{vol}$ ($\varepsilon_d = \sqrt{\frac{4}{3} J_2 \left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}$)
- rôle de la pression d'eau interstitielle u_w:
  1. conditions drainée: $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' + u_w \underline{\underline{\boldsymbol{I}}}$ (Terzaghi)

Ingrédients de modélisation

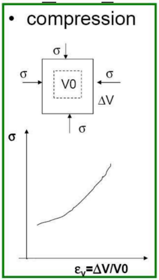
- comportement volumétrique/déviatorique couplés
  1. volumétrique
     - compression isotrope
     - compression oedométrique (conditions à repos, in-situ$\rightarrow$ consolidation)
     - variables intéressées: $\sigma_m'(=p')$ et ε_{vol} (ou index des vides e)
  2. déviatorique
     - comportement sous charge triaxial/multiaxial
     - variables intéressées: $q-p'$ et $\varepsilon_d, \varepsilon_{vol}$ ($\varepsilon_d = \sqrt{\frac{4}{3}J_2\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}$)
- rôle de la pression d'eau interstitielle u_w:
  1. conditions drainée: $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' + u_w\underline{\underline{\boldsymbol{I}}}$ (Terzaghi)
  2. conditions non-drainée: $\delta\varepsilon_{vol} = 0$ (sollicitations dynamiques rapides)

- comportement volumétrique/déviatorique couplés
  1. volumétrique
     - compression isotrope
     - compression oedométrique (conditions à repos, in-situ$\rightarrow$ consolidation)
     - variables intéressées: $\sigma'_m (= p')$ et ε_{vol} (ou index des vides e)
  2. déviatorique
     - comportement sous charge triaxial/multiaxial
     - variables intéressées: $q - p'$ et $\varepsilon_d, \varepsilon_{vol}$ ($\varepsilon_d = \sqrt{\frac{4}{3} J_2 \left(\underline{\underline{\varepsilon}} \right)}$)
- rôle de la pression d'eau interstitielle u_w:
  1. conditions drainée: $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' + u_w \underline{\underline{\boldsymbol{I}}}$ (Terzaghi)
  2. conditions non-drainée: $\delta\varepsilon_{vol} = 0$ (sollicitations dynamiques rapides)
- relation élastoplastique (conditions triaxiales)

$$\begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{D}^{ep}_{p'p'} & \mathsf{D}^{ep}_{p'q} \\ \hline \mathsf{D}^{ep}_{qp'} & \mathsf{D}^{ep}_{qq} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{vol} \\ \delta\varepsilon_d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{vol} \\ \delta\varepsilon_d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{C}^{ep}_{p'p'} & \mathsf{C}^{ep}_{p'q} \\ \hline \mathsf{C}^{ep}_{qp'} & \mathsf{C}^{ep}_{qq} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} \tag{41}$$

Compression isotrope

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{\underline{I}}$$



- $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix};$
- $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_v/3 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_v/3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_v/3 \end{bmatrix}$

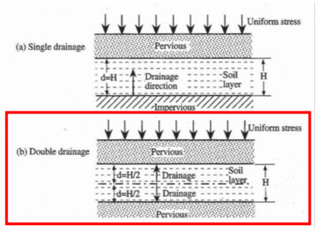
Figure: Bardet 1997

$$\varepsilon_{vol} = 3\varepsilon_1 = Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) \text{ déformation volumique}$$

Compression odeométrique

- $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\varepsilon_3 = 0 ; \quad \varepsilon_v = \varepsilon_1$
- contrôle en $\varepsilon_a \nearrow$ (ou $\sigma_a \nearrow$) : $\quad \delta\varepsilon_a > 0$

En élasticité: $\delta\varepsilon_{vol} = \delta\varepsilon_1 = \delta\varepsilon_a = \frac{\delta H}{H} = 3K\sigma_1$



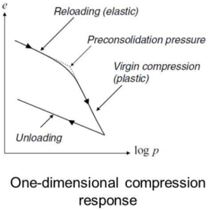
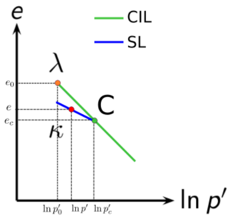


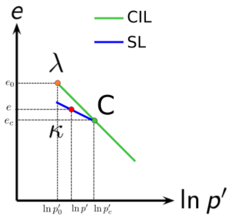
Figure: Bardet 1997

CentraleSupélec



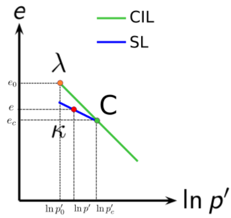
- Comportement élastique non linéaire (linéaire en $\log p'$)
- λ et κ dans le plan $\ln p' - e$
- C_c et C_s dans le plan $\log p' - e$ et $\log \sigma'_v - e$
- $OCR = \frac{\sigma'_{vc}}{\sigma'_v}$ ou $OCR = \frac{p'_c}{p'}$

- $\delta \varepsilon_{vol} = -\frac{\delta e}{1+e_0} = -\frac{\delta e}{v_0}$ (compression positive)



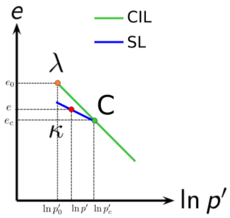
- Comportement élastique non linéaire (linéaire en $\log p'$)
- λ et κ dans le plan $\ln p' - e$
- C_c et C_s dans le plan $\log p' - e$ et $\log \sigma'_v - e$
- $OCR = \frac{\sigma'_{vc}}{\sigma'_v}$ ou $OCR = \frac{p'_c}{p'}$
- $\delta\varepsilon_{vol} = -\frac{\delta e}{1+e_0} = -\frac{\delta e}{v_0}$ (compression positive)
- e_0 index de vide à repos (ou conventionnellement, correspondant à p'=1 kPa)

CentraleSupélec



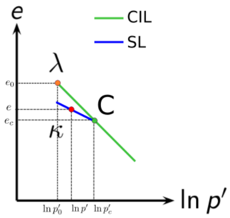
- Comportement élastique non linéaire (linéaire en $\log p'$)
- λ et κ dans le plan $\ln p' - e$
- C_c et C_s dans le plan $\log p' - e$ et $\log \sigma_v' - e$
- $OCR = \frac{\sigma_{vc}'}{\sigma_v'}$ ou $OCR = \frac{p_c'}{p'}$

- $\delta \varepsilon_{vol} = -\frac{\delta e}{1+e_0} = -\frac{\delta e}{v_0}$ (compression positive)
- e_0 index de vide à repos (ou conventionnellement, correspondant à p'=1 kPa)
- $\delta \varepsilon_{vol} = \delta \varepsilon_{vol}^{el} + \delta \varepsilon_{vol}^{pl}$, $\delta e = \delta e^{el} + \delta e^{pl}$



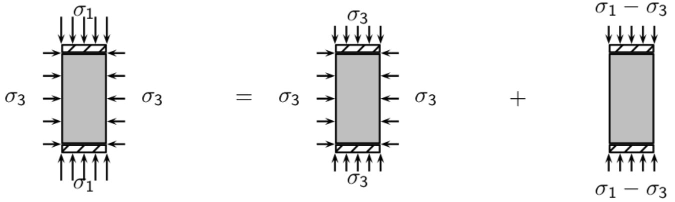
- Comportement élastique non linéaire (linéaire en $\log p'$)
- λ et κ dans le plan $\ln p' - e$
- C_c et C_s dans le plan $\log p' - e$ et $\log \sigma'_v - e$
- $OCR = \frac{\sigma'_{vc}}{\sigma'_v}$ ou $OCR = \frac{p'_c}{p'}$

- $\delta\varepsilon_{vol} = -\frac{\delta e}{1+e_0} = -\frac{\delta e}{v_0}$ (compression positive)
- e_0 index de vide à repos (ou conventionnellement, correspondant à p'=1 kPa)
- $\delta\varepsilon_{vol} = \delta\varepsilon^{el}_{vol} + \delta\varepsilon^{pl}_{vol}$, $\delta e = \delta e^{el} + \delta e^{pl}$
- Consolidation normale [virgin consolidation]:
$\rightarrow \delta e = -\lambda\delta(\ln p') = -\lambda\frac{\delta p'}{p'}$, $\quad v = \Gamma - \ln\left(\frac{p'}{p'_0}\right)$ ($\Gamma = 1 + e_0$)



- Comportement élastique non linéaire (linéaire en $\log p'$)
- λ et κ dans le plan $\ln p' - e$
- C_c et C_s dans le plan $\log p' - e$ et $\log \sigma'_v - e$
- $OCR = \frac{\sigma'_{vc}}{\sigma'_v}$ ou $OCR = \frac{p'_c}{p'}$

- $\delta\varepsilon_{vol} = -\frac{\delta e}{1+e_0} = -\frac{\delta e}{v_0}$ (compression positive)
- e_0 index de vide à repos (ou conventionnellement, correspondant à p'=1 kPa)
- $\delta\varepsilon_{vol} = \delta\varepsilon_{vol}^{el} + \delta\varepsilon_{vol}^{pl}$, $\delta e = \delta e^{el} + \delta e^{pl}$
- Consolidation normale [virgin consolidation]:
  $\rightarrow \delta e = -\lambda\delta\left(\ln p'\right) = -\lambda\frac{\delta p'}{p'}, \quad v = \Gamma - \ln\left(\frac{p'}{p'_0}\right)$ $(\Gamma = 1 + e_0)$
- Décharge élastique [swelling line]: $\delta e^{el} = -\kappa\frac{\delta p'}{p'}, \delta e^{pl} = -\left(\lambda - \kappa\right)\frac{\delta p'}{p'}$
  $\rightarrow v = v_c - \kappa \ln\left(\frac{p'}{p'_c}\right)$
  $e_c = e_{c0} - \lambda \ln\left(\frac{p'_c}{p'_{c0}}\right)$ ou $v_c = v_{c0} - \lambda \ln\left(\frac{p'_c}{p'_{c0}}\right)$



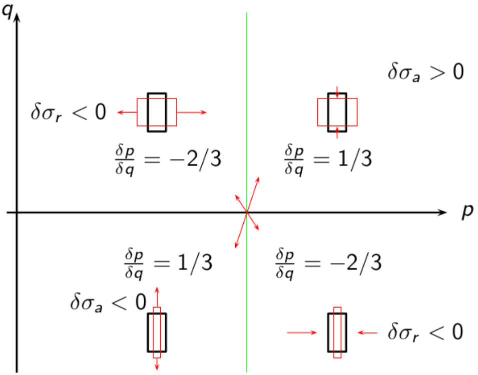
$$\sigma_1 = \sigma_a \qquad \sigma_3 = \sigma_r$$

- $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{bmatrix}$
- $q = \sigma_a - \sigma_r$ $\qquad$ $\delta q = \delta\sigma_a - \delta\sigma_r$
- $\delta\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \delta\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\delta\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \delta\varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \delta\varepsilon_r \end{bmatrix}$

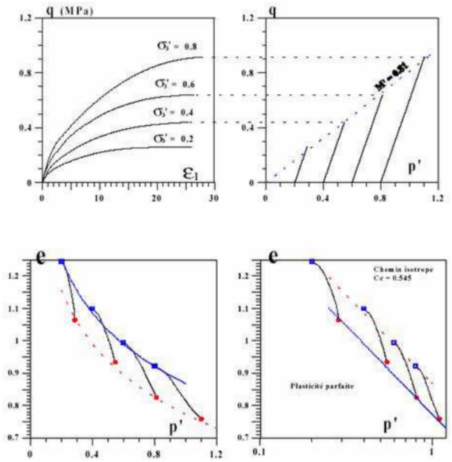
$$\rho = \sqrt{2J_2\left(\underline{\underline{s}}^{\sigma}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}q$$

Comportement déviatorique dépende de:

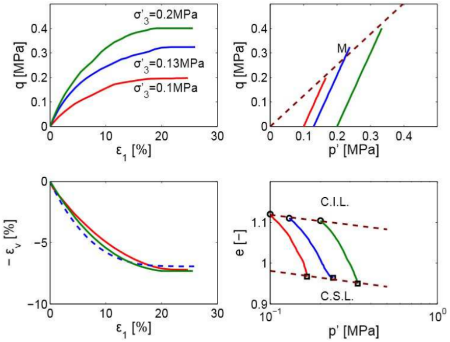
- la consolidation (isotrope ou oedometrique) $\longrightarrow$ argiles
- densité $\longrightarrow$ sables



- compression triaxiale:
  $q > 0, \sigma_a > \sigma_r$
- extension triaxiale:
  $q < 0, \sigma_a < \sigma_r$



a



b

Figure: Compression triaxiale monotone : (a) argiles normalement consolidées; (b) sables lâches (Ziani and Biarez 1990 d'après Lopez-Caballero)

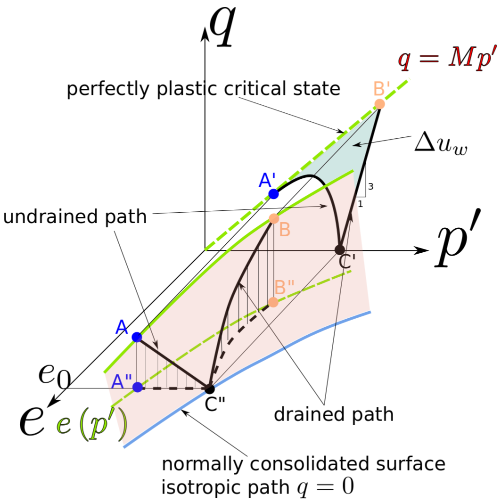


Figure: Ligne d'état critique dans l'espace $q - p' - e$

Modèle de Mohr Coulomb

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}'\right) = \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2} - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\sin\phi' - c'\cos\phi < 0 \qquad (42)$$

$$g\left(\underline{\underline{\sigma}}'\right) = |\sigma_I - \sigma_{III}| - (\sigma_I + \sigma_{III})\sin\psi < 0 \qquad (43)$$

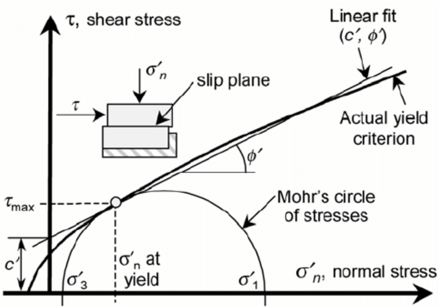
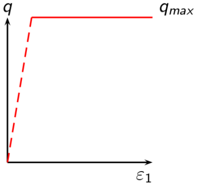
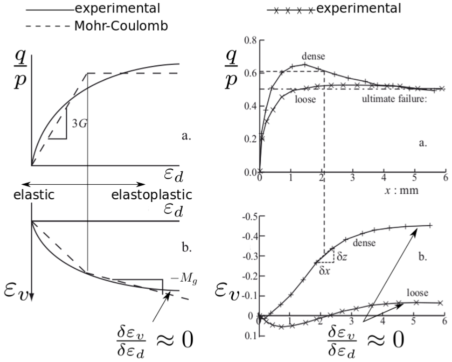


Figure: Han et al. 2006

- Critère de Coulomb:
  - ϕ' angle de frottement
  - c' cohésion drainée apparente
- angle de dilatance ψ ($f \neq g$)
- élastoplasticité parfaite (pas d'écrouissage)





$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}'\right) = |q| - Mp' - N \leq 0 \tag{44}$$

$$\begin{cases} \sigma_I = \dfrac{3p' + 2q}{3}, \sigma_{III} = \dfrac{3p' - q}{3} & (45) \\ M = \dfrac{6 \sin\phi'}{3sgn(q) - \sin\phi'} & (46) \\ N = \dfrac{6c' \cos\phi'}{3sgn(q) - \sin\phi'} & (47) \end{cases}$$

$$g\left(\underline{\underline{\sigma}}'\right) = |q| - M_g p' \tag{48}$$

$$M_g = \frac{6 \sin\psi}{3sgn(q) - \sin\psi} \tag{49}$$

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}'\right)\frac{|q|}{3}\left(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\sin\phi'\right)-p'\sin\phi'-2c'\cos\phi'\leq 0 \qquad (50)$$

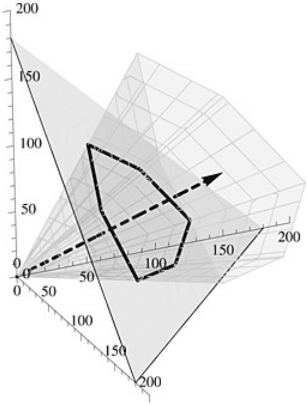
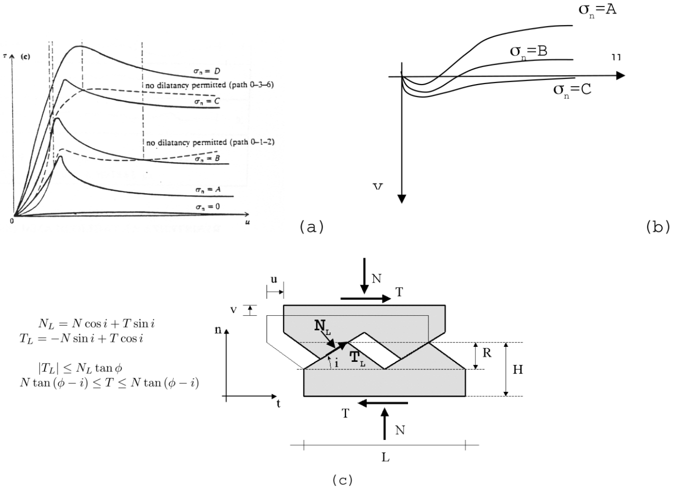


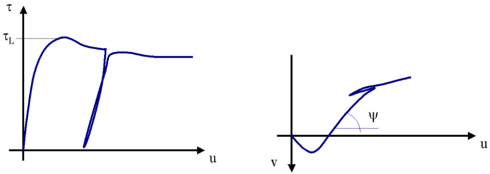
Figure: Panteghini and Lagioia 2014



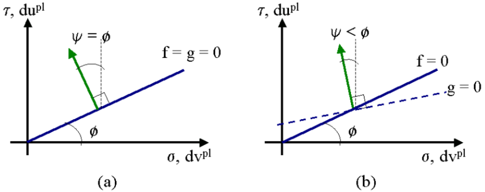
$$N_L = N\cos i + T\sin i$$
$$T_L = -N\sin i + T\cos i$$

$$|T_L| \leq N_L \tan\phi$$
$$N\tan(\phi - i) \leq T \leq N\tan(\phi - i)$$

Figure: Essaie de cisaillement direct. (a) Courbes $\tau - u$; (b) Courbes $v - u$; (c) mécanisme d'inter-locking



a

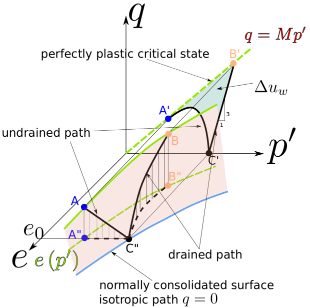


b

Figure: Essaie de cisaillement direct: (a) Courbes typiques; (b) loi d'écoulement associée ($\psi = \phi'$) et non-associé ($\psi =\neq \phi'$)

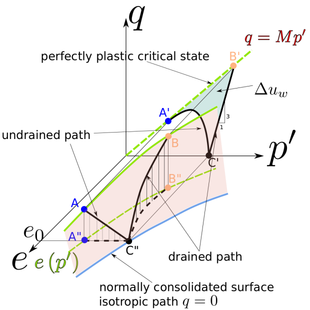
Le modèle de Mohr-Coulomb est trop simple:

- Conditions drainées → comportement volumique:
  1. phase élastique : $\delta p' \uparrow \delta\varepsilon_{vol}^{el} \uparrow$
  2. phase élastoplastique dépende du OCR
     - contraction (NC ou $OCR < 4$)
     - dilatance ($OCR > 4$): mesurée comme $\frac{\delta\varepsilon_{vol}^{pl}}{\delta\varepsilon_{d}^{pl}}$



Le modèle de Mohr-Coulomb est trop simple:

- Conditions drainées $\longrightarrow$ comportement volumique:
  1. phase élastique : $\delta p' \uparrow \delta \varepsilon_{vol}^{el} \uparrow$
  2. phase élastoplastique dépende du OCR
     - contraction (NC ou $OCR < 4$)
     - dilatance ($OCR > 4$): mesurée comme $\dfrac{\delta \varepsilon_{vol}^{pl}}{\delta \varepsilon_{d}^{pl}}$



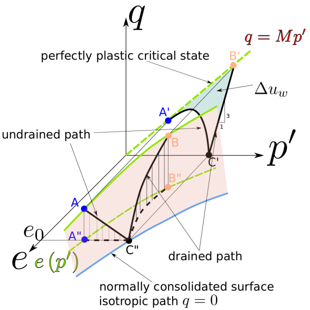
- Conditions non-drainées $\delta \varepsilon_{vol} = 0$:
  1. phase élastique :
     - $\delta \varepsilon_{vol} = \delta \varepsilon_{vol}^{el} = 0 = \mathsf{C}_{p'p'}^{el} \delta p' \left(\mathsf{C}_{p'q}^{el} = 0 \right) \longrightarrow \delta p = \delta u_w \uparrow$
  2. phase élastoplastique :
     - $OCR < 4 \longrightarrow \delta u_w > 0$
     - $OCR > 4 \longrightarrow \delta u_w > 0$ et $\delta u_w < 0$
     - $\delta p' = \mathsf{C}_{p'p'}^{ep} \cancelto{0}{\delta \varepsilon_{vol}} + \mathsf{C}_{p'q}^{ep} \delta \varepsilon_{d} = \delta p + \delta u_w$
     - $\delta q = \mathsf{C}_{qp'}^{ep} \cancelto{0}{\delta \varepsilon_{vol}} + \mathsf{C}_{qq}^{ep} \delta \varepsilon_{d}$

- Comportement élastique :

$$\frac{\delta p'}{p'} = \frac{1+e}{\kappa}\delta\varepsilon_{vol}^{el} = \frac{\nu}{\kappa}\delta\varepsilon_{vol}^{el} \tag{51}$$

- Comportement élastoplastique :

$$\frac{\delta p'}{p'} = \frac{1+e}{\lambda-\kappa}\delta\varepsilon_{vol}^{pl} = \frac{\nu}{\lambda-\kappa}\delta\varepsilon_{vol}^{pl} \tag{52}$$



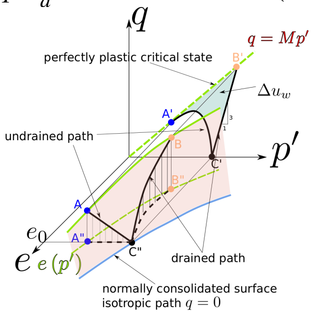
Incrément de travail élastoplastique (constante le long l'essai):

$$\delta W^{ep} = \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}}^{pl} = p'\delta\varepsilon^{pl}_{vol} + q\delta\varepsilon^{pl}_{d} \tag{53}$$

À l'état critique en compression (argile normalement consolidée):

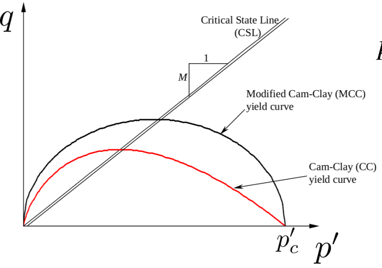
$$\begin{cases} \delta\varepsilon_{vol} \approx \delta\varepsilon^{pl}_{vol} = 0, \quad \delta q = M\delta p' & (54) \\ \delta W^{ep} = Mp'\delta\varepsilon^{pl}_{d} = p'\delta\varepsilon^{pl}_{vol} + q\delta\varepsilon^{pl}_{d} & (55) \end{cases}$$

$$\frac{\delta\varepsilon^{pl}_{vol}}{\delta\varepsilon^{pl}_{d}} \equiv \begin{cases} M - \dfrac{q}{p'} > 0 & \text{compression} \quad (56) \\ M - \dfrac{q}{p'} = 0 & \text{CS} \quad (57) \\ M - \dfrac{q}{p'} > 0 & \text{dilatance} \quad (58) \end{cases}$$



- Fonction de charge:

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) \equiv \begin{cases} q + Mp' \ln\left(\frac{p'}{p'_c}\right) \leq 0 & \text{CCM} \quad (59) \\ \frac{q^2}{p'^2} + M^2\left(1 - \frac{p'_c}{p'}\right) \leq 0 & \text{MCCM} \quad (60) \end{cases}$$



p'_c : pression de pré-consolidation

→ contrôle la taille de la surface

→ paramètre d'écrouissage (voir Equation (52))

$$p'_c = p'_{c0} \exp\left(\frac{\nu}{\lambda - \kappa}\varepsilon^{pl}_{vol}\right) \qquad (61)$$

Bibliography

Bibliography I

Jean-Pierre Bardet (1997). *Experimental Soil Science*. Vol. 134. 3389, p. 566. DOI: 10.1038/134566b0.

F. Gatti (Sept. 2017). "Forward physics-based analysis of "source-to-site" seismic scenarios for strong ground motion prediction and seismic vulnerability assessment of critical structures". Theses. Université Paris-Saclay - CentraleSupélec and Politecnico di Milano. URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01626230.

Hongxue Han et al. (Jan. 2006). "Simulation of Tectonic Deformation and Large Area Casing Shear Mechanisms—-Part B: Geomechanics". In:

A. Panteghini and R. Lagioia (2014). "A fully convex reformulation of the original Matsuoka-Nakai failure criterion and its implicit numerically efficient integration algorithm". In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 38, pp. 593–614. DOI: 10.1002/nag.2228. URL: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.2228/pdf.

F. Ziani and J. Biarez (1990). "Pressure sinkage relationship for tyres on very loose sand". In: *Journal of Terramechanics* 27.3, pp. 167–177. ISSN: 0022-4898. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-4898(90)90009-B. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002248989090009B.