Kód studenta 26 1

8 Střední hodnota (3 body)

1. Definujte pojem *střední hodnota* reálné náhodné veličiny na konečném pravděpodobnostním prostoru Ω.
2. Mějme běžnou šestistěnnou kostku se stěnami označenými čísly $1, 2 \ldots, 6$, přičemž každé z čísel padne se stejnou pravděpodobností. Určete střední hodnotu náhodné veličiny definované jako druhá mocnina hozeného čísla.
3. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme S_n množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pevný bod permutace $q \in S_n$ je takové $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro které je $q(k) = k$. Určete střední hodnotu počtu pevných bodů v náhodně vybrané permutaci (každá permutace je vybrána se stejnou pravděpodobností). $=1$

1.) Buď náhodná veličina X, stredná hodnota náh. vel. X (EX) je def:

$EX = \sum_k x_k p_k$ i pre dis. náh. veličinu X

Co je x_n, p_n?

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$ i pre spojitú náhodnú vel. X.

2. $P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \frac{1}{6}$ X... náh. vel

$$EX = 1^2 \cdot 1/6 + 2^2 \cdot 1/6 + 3^2 \cdot 1/6 + 4^2 \cdot 1/6 + 5^2 \cdot 1/6 + 6^2 \cdot 1/6 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6}$$

$$= \frac{91}{6} \doteq 15$$

3. $|2| \Rightarrow$

1 2	
1 2	2
2 1	0

$|3| \Rightarrow$

1 2 3	#P
1 2 3	3
1 3 2	1
2 3 1	0
2 1 3	1
3 1 2	0
3 2 1	1

#P = 6

1 2 3 4	#P
1 2 3 4	4
1 2 4 3	2
1 3 2 4	2
1 3 4 2	1
1 4 2 3	1
1 4 3 2	2
3 1 2 4	1
3 1 4 2	0
3 2 1 4	2
3 2 4 1	1
3 4 2 1	0
3 4 1 2	0

	#P
2 1 3 4	2
2 1 4 3	0
2 3 1 4	1
2 3 4 1	0
2 4 1 3	0
2 4 3 1	1
4 1 2 3	0
4 1 3 2	1
4 2 1 3	1
4 2 3 1	2
4 3 1 2	0
4 3 2 1	0

#P = 24

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \Rightarrow \#P = 6 \Rightarrow EX = 1$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \Rightarrow \#P = 24 \Rightarrow EX = 1$

$$\underline{\underline{EX = 1}}$$

JAK SE K VÝSLEDKU DOŠLO?

0b

Kód studenta 26

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici, kdy je teorie T jazyka L_T *jednoduchou kompletní extenzí* teorie S jazyka L_S (v predikátové logice).
2. Nechť $S = \{(\forall x)(\forall y)(\forall z)((U(x) \wedge U(y) \wedge U(z)) \rightarrow (x = y \vee y = z \vee x = z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle U \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol. Napište dvě (neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze T_1, T_2 teorie S.
3. Zdůvodněte, proč jsou T_1, T_2 kompletní.

0+

Kód studenta 26

4 Ortogonální projekce (3 body)

Buď $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matice ortogonální projekce na podprostor reálného vektorového prostoru.

1. Zjednodušte výraz $P - P^2 + P^3 - P^4 + \ldots + (-1)^{n+1}P^n$.
2. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$\|Px\| = \|x\| \quad \Leftrightarrow \quad Px = x.$$

Ortogonální projekce vektorového prostoru V na podprostor U. pre $x \in V$ je taký $x_U \in U$, že

$$|x - x_U| = \min_{y \in U}(|x-y|)$$

Ak existuje taký $y \in U$, že $x - y \in U^\perp$, tak $x_U = y$.

$P - P^2 = \cancel{P - (P \cdot P)}$

1. $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot P^i$

2. To ani neviem no v skriptách si spomínam na niečo také s tým že projekcia nezachováva? obraz

orientácia ovráva? $\Rightarrow$ $\|Px\| = \|x\| \Leftrightarrow Px = x$

1+

Kód studenta 26

1 Derivace (3 body)

1. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce a r je reálné číslo. Napište definici derivace funkce f v bodě r.
2. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, která pro každé $x \in \mathbb{R}$ splní $0 \leq f(x) \leq x^2$. Plyne z těchto předpokladů, že f má v bodě $x = 0$ derivaci? Plyne z těchto předpokladů, že $f'(0) = 0$? ÁNO
3. Definujme funkci $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

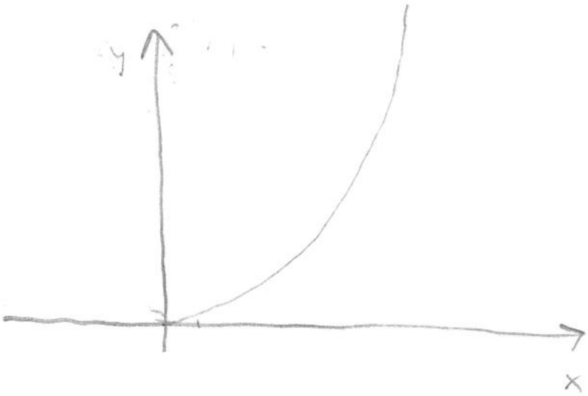
$$q(x) = \begin{cases} (\sin x)^2 \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Má funkce q derivaci v bodě 0, a pokud ano, čemu se rovná?

1. derivace funkce f v bode r je $f'(r) = \lim_{x \to r} \frac{f(x) - f(r)}{x - r}$ i pokud tato limita existuje.

→ ak f ma v r deriváciu ⇒ je v r spojitá

2.



x^2 je kvadratická funkcia s hodnotou $f(x)$ v bode 0 $f(0) = 0$ v tomto bode má aj deriváciu a je to glob. minimum

proč?

kedže je v tom bode ≤ toh

ÁNO.

3. $q'(x) = ((\sin x)^2 \cdot |\sin \frac{1}{x}|)' = ((\sin x)^2)' \cdot |\sin \frac{1}{x}| + (\sin x)^2 \cdot (\sin \frac{1}{x})' = 2 \cdot (\sin x)(\sin x)' \cdot |\sin \frac{1}{x}| + (\sin x)^2 \cdot (-1) \cdot (\sin x)^{-2} \cdot \underset{(\sin x)'}{} = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \, |\sin \frac{1}{x}| - \cancel{(\sin x)^2} \cdot \cancel{(\sin x)^{-2}} \cdot \cos x =$

$\sin x^{-1} = \sin(x^{-1}) \neq (\sin x)^{-1}$

→ kam zmizela abs. hodnota?

⇒ Vlastne to ani netreba počítaš kedže $q(0) = 0$.

$q'(0) = 0$.

$q(x) = 0 \Rightarrow q'(0) = 0$

taková implikace obecně neplatí

2

Kód studenta 26

7 Kombinační čísla (3 body)

1. Definujte kombinační číslo (binomický koeficient) a stručně popište Pascalův trojúhelník.
2. Rozhodněte, zdali pro každé přirozené n platí mezi následujícími dvěma výrazy stejná nerovnost a pokud ano, určete jakým směrem.

$$\underbrace{\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{2n-1}{n}}_{*\Sigma a} < \underbrace{\binom{2n}{n}}_{b}.$$

Své rozhodnutí zdůvodněte. (Nápověda: zkuste využít vztahů mezi dvěma sousedními čísly v Pascalově trojúhelníku.)

1. komb. číslo: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

→ komb. č. udáva počet k-prvkových množín množiny n.

Pas. △ Σ =

1 = 1
2 = 1 1
4 = 1 2 1
8 = 1 3 3 1
16 = 1 4 6 4 1
32 = 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
7 21 35 35 21 7
28 56 70 56 28

a & b

pyramída, kde každé číslo je súčtom dvoch čísel nad ním ohraničených 1-tkami. a každý riadok má dvojnásobný súčet predchádz. riadku.

$\boxed{*\Sigma a}$

2. $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 1 + \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{1!\,\cancel{3!}} + \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2!\,\cancel{3!}} = 1 + 4 + 10 = 15$ } a

$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} = 1 + \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{1\,\cancel{4!}} + \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2!\,\cancel{4!}} + \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!}\,\cancel{4!}} = 1 + 5 + 15 + 35 = 56$

$\boxed{\binom{2n}{n}} \Rightarrow$ $n=3$ $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,3 \cdot 2} = \frac{120}{6} = 20$ } b

$\binom{8}{4} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!} \cdot 2}{\cancel{4!}\,\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 70$

Proč??

$\binom{2n}{n}$ = stredové číslo riadku pas. △ ; $*\Sigma a$ = susedí z oboch strán stredového čísla $\binom{2n}{n}$

Preto $*\Sigma a < \binom{2n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2

Kód studenta 26

2 Primitivní funkce (3 body)

1. Napište definici pojmu *primitivní funkce* k funkci f na otevřeném intervalu I.
2. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^2 \ln x$ na intervalu $(0, +\infty)$, kde $\ln x$ označuje přirozený logaritmus.
3. Nechť k a ℓ jsou nezáporná celá čísla. Uvažme funkci $f_{k,\ell}(x) = x^k (\ln x)^\ell$ definovanou na intervalu $I = (0, +\infty)$. Dokažte, že $f_{k,\ell}$ má na intervalu I primitivní funkci $F_{k,\ell}$. Dokažte dále, že tuto primitivní funkci $F_{k,\ell}$ lze vyjádřit vzorečkem pomocí konstant, funkce x, funkce $\ln x$ a operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a umocňování.

1.) funkcia f ma na I primitívnu funkciu F ak platí $\forall x$

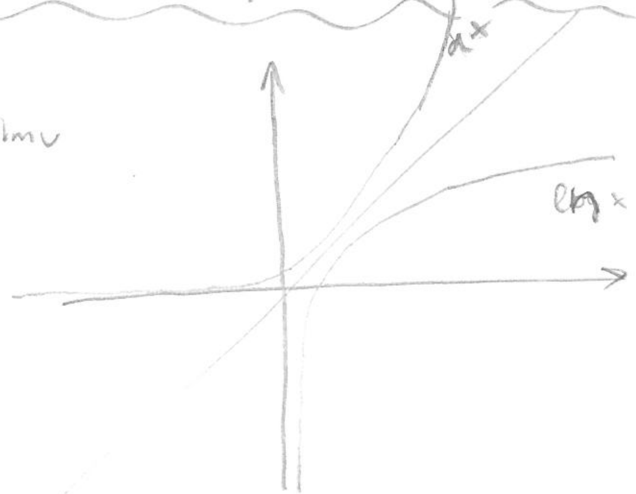
$$F' = f \quad (F'(x) = f(x))$$

$$|\ln x|' = \frac{1}{x}$$

$$\int u' v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

2.) $$\int x^2 \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u' = x^2 & u = \frac{x^3}{3} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int \frac{x^{\cancel{3}2}}{\cancel{x}} \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c \; ; \; c \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in (0, \infty)$$



3.) → mocninná funkcia je inverzná k logaritmu

→ Obe funkcie $(x^k, (\ln(x))^\ell)$ sú zložené funkcie elementárnych funkcií, kde

$$\int (a^x) \, dx = \frac{a^{x+1}}{x+1} + c$$

$$\int \ln x \, dx = \left| \frac{1}{x} \right| + c$$

→ Pomocou substitúcie/ per partes vieme nájsť aj prim. f pre túto zlož. f. a teda vieme to preniesť do požadovaného tvaru.

ukážka ?

3

Kód studenta 26

5 Determinanty matic (3 body)

1. Zformulujte Laplaceův rozvoj determinantu matice $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ podle druhého sloupce.
2. Rozhodněte, zda pro čtvercové matice téhož řádu platí

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

Odpověď zdůvodněte (dokažte nebo uveďte protipříklad).

Def.

1 Laplaceuv rozvoj det

$\det(A) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A^{ij})$; kde A^{ij} je matica A bez riadku i, stĺpca j.

$\forall i \in 1, \dots, m$

1. $\Rightarrow \det(A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A^{ij})$; $j=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+2} \cdot a_{ij} \cdot \det(A^{i2})$; $m=9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{9} (-1)^{i+2} \cdot a_{ij} \cdot \det(A^{i2})$

2

2) $\begin{array}{ccccc} A & & B & & C \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$

$\det(A) = (-1) \cdot 1 = -1$
$\det(B) = 2 \cdot (-2) = -4$
$\det(A+B) = 1 \cdot (-1) = -1$
$\det(A) + \det(B) = (-1) + (-4) = -5$

$\Rightarrow \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

1

Kód studenta 26

3 Soustavy lineárních rovnic (3 body)

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Rozhodněte, zda existuje $b \in \mathbb{R}^3$ takové, že soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení.
2. Rozhodněte, zda existuje $k \geq 1$ takové, že soustava $(A^k)x = b$ má alespoň jedno řešení pro všechna $b \in \mathbb{R}^3$.

①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{3} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$ NIE, keďže $RREF(A) \neq I_n$
vektory nie sú lineárne nezávislé
$\Rightarrow$ Má nekonečne veľa riešení! nebo 0
keďže z je voľná.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

②

$$k=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} = (A')^2$$

$\Rightarrow$ $RREF(A)^{=A'}$ má rovnaké riešenia ako A a preto sme mohli použiť tento tvar,
pre $k=1$ má $(A')^{k=2}$ nekonečne veľa riešení

$\rightarrow$ Asi to bol overkill, keďže za k môžeme dosadiť aj 1
a máme $(A^1)x = b \Leftrightarrow Ax = b$

$$(A^1 = A)$$

takže ÁNO - také b existuje (nekonečne veľa)
chceme $\forall b$

2 MM

Kód studenta 26

6 Stromy (3 body)

Nechť $G = (V, E)$ je graf s neprázdnou množinou hran. Rozhodněte, které z následujících podmínek jsou ekvivalentní tomu, že G je strom.

X a) G je souvislý a každé dvě kostry G jsou si navzájem izomorfní,

1/2 b) G nemá kružnice, minimální stupeň vrcholu je 1 a $|E| > |V| - 2$,

1 c) G je souvislý a má alespoň dva vrcholy stupně 1 (tzv. listy),

1/2 d) G obsahuje nesouvislý podgraf, dokonce každá vlastní podmnožina hran $F \subset E$ tvoří nesouvislý graf (V, F) a přitom mezi každými dvěma vrcholy existuje v G tah,

1/2 e) v G neexistuje podmnožina $W \subseteq V$ vrcholů, která by indukovala podgraf s $|W|$ hranami a přitom pro každou neprázdnou $W \subsetneq V$ existuje hrana $\{u, v\}$ mezi W a doplňkem W ve V.

Své rozhodnutí zdůvodněte.

grafu G taký, že $V(G) = V(G')$, $E(G') \subseteq E(G)$

a) z definície kostry - kostra G' je strom. Kedže $G(V,E)$ je strom tak v ňom existuje „práve jedna" kostra a teda všetky kostry sú izomorfní graf grafu $G(V,E)$ (izomorfne - „fancy" názov pre premenovanie vrcholov, hrán)

$\Rightarrow$ ÁNO.

Nè: co třeba C_4?

b) G nemá kružnice - ÁNO - Strom je graf bez cyklov/kružnic,

min stupeň vrcholu je 1 - ÁNO (z definice) (alebo z predpokladu že E je neprázdna)

$\to |E| = 5$

$\to |V| = 6$

$|E| > |V| - 2$

(ak je súvislý)

z definice stromu $|E| = |V| - 1 \Rightarrow$ platí aj $|E| > |V| - 2$

opačná implikace?

$\Rightarrow$ ÁNO - všetko platí

c)  $\Rightarrow$ NIE - aj tento graf je súvislý s dvoma vrcholmi stupňa 1, no nie je to strom (má cyklus)

d) Podgraf $P(V', E')$ grafu $G(V,E)$ je graf, kde $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

$\to$ kedže graf G obsahuje aspoň jednu hranu, tak každá ostrá podmnožina by aspoň jednu hranu vybrala a „znesúvislila" by strom.

(kedže v strome $\exists!$ cesta medzi každými 2 vrcholmi)

$\to$ takže ÁNO, platí to

~~opačná implikace~~: na dalším listu

e) -prvá časť

každý graf má triviálne indukovaný podgraf sám seba.

-druhá časť

→ ak je podmnožina hrán ostrá, aspoň jednu hranu sme vybrali (z nezávislej strom) a teda rozdelili strom na dve komponenty súvislosti.

napr. 

a teda táto hrana leží v rozdieli týchto množín.

ÁNO

Opačná implikace?

Doplnenie nejakých argumentov na (a-d) body na ďalšom papieri.

KOD STUDENTA (26) Úloha 6-doplnenie

a)

G je strom ⇒ a

– kedže kostra $G'(V', E')$ grafu $G(V, E)$ je strom taký, že $V = V'$ a $E' \subseteq E$

a G je strom (medzi každými dvomi vrcholmi existuje

práve jedna cesta), kostra existuje iba jedna

a preto a) platí.

a ⇒ G je strom

mám „len jednu" kostru a teda graf vrcholy a

hrany sú izomorfné ~~vrcholom~~ a hranám G.

b) ~~ka~~ je strom ⇒ G je strom

z definície stromu

b ⇒ G je strom

b je ekvivalentná def.

c) protipríklad na druhom papieri

d) G je strom ⇒ d

Z faktu, že v strome ∃! cesta medzi každými 2 vrcholmi.

d ⇒ G je strom

d vraví, že odobraním ľubovolnej hrany znesúvislým graf

a teď ∃! cesta medzi ∀ 2 vrcholmi.

Tento list je určen pro vaše komentáře týkající se průběhu státních zkoušek. Pomůžete nám, pokud uvedete jakékoliv kladné i záporné postřehy a připomínky. Komentáře jsou anonymní a dobrovolné, list proto *prosím odevzdávejte zvlášť.*

→ UF, nevšimol som si to tu, každopádne, žiadne komenty nemám :).