ШАД и линал

Артём Филатов*

11 июля 2015 г.

Аннотация

Ключевые слова: ШАД, линейная алгебра.

1 Кратко про шад

Прим. ред. Здесь надо вставить про шад: что это, какие вступительные экзамены

2 Задачи по линейной алгебре из шАДовских экзаменов

Задача №1

Дана матрица A размера $n \times n$, где $a_{i,j} = (i-j)^2, i, j = 1, \ldots, n$. Найдите ранг матрицы A.

Решение:

Посмортим, как выглядит наша матрица.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & (n-2)^2 & (n-1)^2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & \cdots & (n-2)^2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & \cdots & (n-3)^2 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & \cdots & (n-4)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n-1)^2 & (n-2)^2 & (n-3)^2 & (n-4)^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Из условия каждый элемент матрицы A равен $(i-j)^2 = i^2 - 2ij + j^2$. Но у матрицы из элементов i^2 ранг 1, у матрицы из элементов j^2 ранг тоже единица. Посмотрим на матрицу, образованную ij:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \cdots & 3n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

*НИУ ВШЭ, Москва.

Ее ранг также не превосходит 1. Нам известно, что $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$, следовательно $\operatorname{rank}(A) \leq 3$. Но можно показать, что у нас есть ненулевые миноры 3 порядка, следовательно $\operatorname{rank}(A) = 3$.

Задача №2

Дана матрица из нулей и единиц, причем для каждой строки матрицы верно следующее: если в строке есть единицы, то они все идут подряд. Докажите, что определитель такой матрицы равен 0 или ± 1.

Решение:

Посмротрим на то, как выглядит одна из наших матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Переставим строки так, чтобы образовать некое подобие ступенчатой матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Что произойдет с определителем? Он либо не изменился, либо изменил знак, так как перестановка строк меняет знак определителя на противоположный. Теперь сделаем следующее: если позиции первых единиц у строк совпали, то вычтем из той в которой больше единиц, ту в которой меньше единиц. На определитель данное преобразование никак не влияет.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Переставляя строки и повторяя данную процедуру, мы получим ступенчатую матрицу, которая будет либо вырождена, либо иметь единицы на диагонали. А так как в такой матрице $\det(A) = \prod_{i=1} a_{i,i} = 1$, то детерминант исходной матрицы равен либо 0, либо ± 1.

Задача №3

Опишите все невырожденные вещественные матрицы A, для которых все элементы матриц A и A^{-1} неотрицательны.

Решение:

Пусть исходная невырожденная матрица А заполнена некотрыми элементами $a_{i,j}$, а обратная к ней A^{-1} элементами $b_{i,j}$. Как известно, $AA^{-1} = E$. Значит, произведение первой строки на первый столбец должно дать 1:

$$a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + \cdots + a_{1,n} \cdot b_{n,1} = 1$$

Но произведение первой строки на все остальные столбцы должно дать 0, также нам известно, что все элементы матриц неотрицательны, значит если $a_{1,i} \neq 0$, то $b_{i,j} = 0, j = 2 \ldots n$. Это должно быть выполнено для всех $a_{i,j}$. Формально:

$$a_{i,j} \neq 0 \Rightarrow b_{j,z} = 0, z = 1 \ldots (i-1), (i+1) \ldots n$$

Докажем, что нет такой матрицы A с двумя и более положительными элементами в одном столбце:

Зафиксируем столбец j. Предположим мы встретили первый ненулевой элемент, тогда все кроме одного элементы в j строке матрицы A^{-1} равны 0. Предположим, что мы встретили второй положительны элемент, тогда он занулит все элементы кроме одного, включая тот, который сы не занулили в первый раз. Следовательно, мы получили, что $b_{j,z} = 0$ для всех $z = 1 \ldots n$. Но это невозможно, так как это означало бы, что все алгебраические дополнения в некой строке матрицы A равны 0 ($b_{i,j} = \frac{Alg_{i,j}}{\det(A)}$), а следовательно и определитель.

Из всего сказанного следует, что единственно законной матрицей A будет такая матрица, в столбцах которых по одному положительному элементу. Элементарными преобразованиями такая матрица приводится к диагональному виду. Мы показали, что все элементы обратной матрицы зануляться, кроме тех, которые образуют 1 в произведении с ненулевыми элементами матрицы A, следовательно обратная матрица будет иметь аналогичный вид.