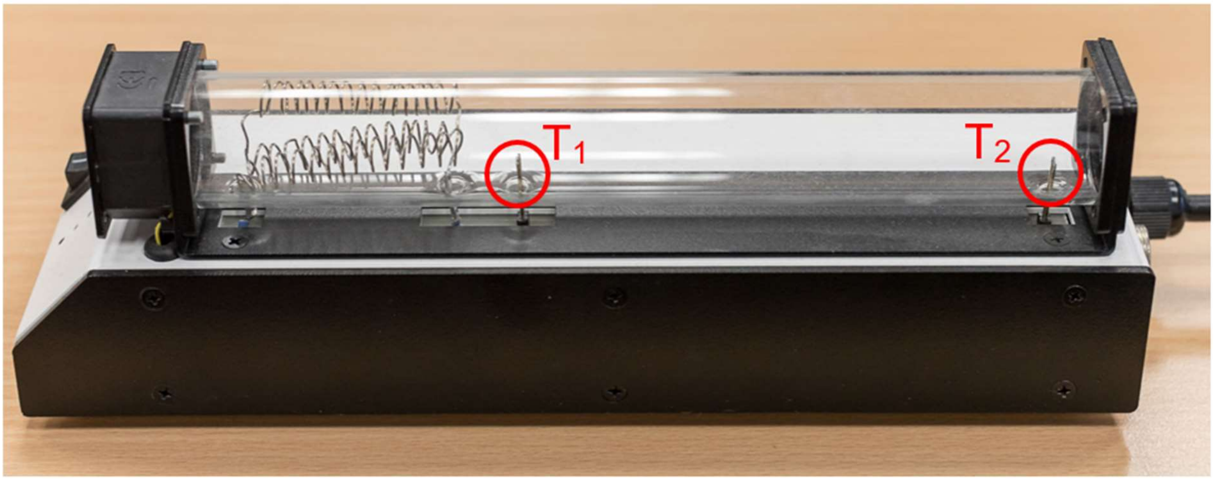
Cvičenie č.11

Meranie a aproximácia prevodovej charakteristiky tepelného systému

Cieľom zadania je osvojiť si postup merania prevodovej charakteristiky systému a jej aproximácie regresnou funkciou.

Uvažujeme laboratórny model tepelného systému podľa obr. 1. pozostávajúci zo sklenenej rúrky, ktorá má na jednom konci pripevnený ventilátor, ktorým je do nej vháňaný vzduch a na druhom konci je otvorená. V rúrke je umiestnená výhrevná špirála a dva snímače teploty. Snímač teploty umiestnený pri výhrevnej špirále je označený T1 a snímač teploty umiestnený pri výstupe z rúrky je označený T2. Ako vstup do systému uvažujeme signál ovládajúci výkon špirály a výstupom je signál z teplotného snímača T2.



Obr. 1. Laboratórny model tepelného systému

Úlohy:

1. Odmerajte prevodovú charakteristiku tepelného systému pre rozsah vstupného signálu 0-10 V.
2. Naštudujte princíp regresnej analýzy.
3. Aproximujte nameranú charakteristiku pomocou nasledovných funkcií:

   a) $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u$ lineárna funkcia

   b) $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u + \hat{\theta}_2 u^2$ kvadratická funkcia

   c) $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \sqrt{u}$ odmocninová funkcia

   Pre každú funkčnú závislosť vypočítajte aj hodnotu účelovej funkcie.

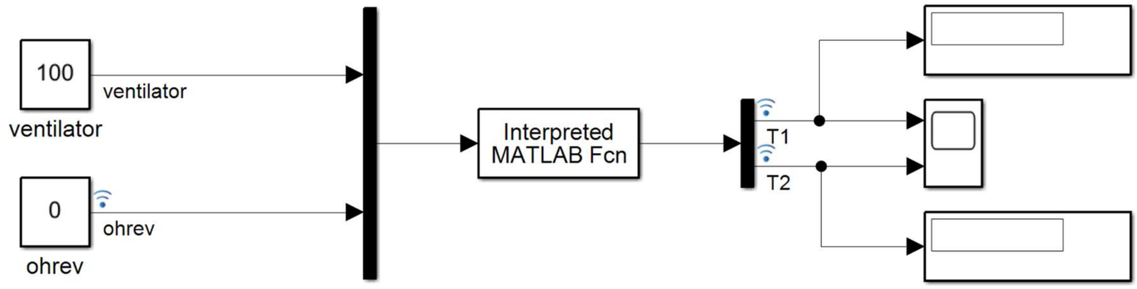
   Graficky porovnajte vypočítané funkčné závislosti s nameranou prevodovou charakteristikou.

   Vyhodnoťte ktorá funkcia lepšie opisuje nameranú prevodovú charakteristiku.
4. Urobte písomné zhrnutie a odôvodnenie dosiahnutých výsledkov.
5. Vypracovaný dokument pre laboratórne cvičenie uložte vo formáte pdf pod názvom *cv11_Priezvisko1_Priezvisko2* do miesta odovzdania v AIS.

Riešenie

Prevodová charakteristika udáva funkčnú **závislosť ustálených hodnôt výstupnej veličiny systému od vstupnej veličiny**. Neposkytuje nám žiadne informácie o dynamike systému. V prípade tepelného systému ide o **závislosť ustálených hodnôt teploty T2 od výkonu špirály**.

Bloková schéma pre meranie teploty T2 sa nachádza v súbore *tsCtrlSPv01.slx* (obr. 2). Vykonajte **meranie ustálených hodnôt teploty pre rozsah vstupného signálu 0-100 % s krokom 10%**.



Obr. 2. Simulačná schéma

Hodnotu vstupného signálu nastavujte v bloku *ohrev* a ustálenú hodnotu teploty T2 odčítavajte z bloku *Display*.

Vektor *y* naplňte nameranými hodnotami:

y=[?;?;?;?;?;?;?;?;?;?;?]

Vektor *u* obsahuje nastavené hodnoty výkonu špirály:

u=(0:10:100)'

Regresná analýza

Regresná analýza všeobecne skúma **funkčný vzťah**, podľa ktorého sa **mení závislá premenná** (výstup) *y* **v závislosti od nezávislých veličín** (vstupov) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, .., u_n)^T$.

$y = F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\theta}) + v$ **neznámy funkčný vzťah**

Kde v je náhodne pôsobiaci faktor (napr. šum merania)

$\boldsymbol{\theta}$ je **vektor neznámych parametrov** funkčného vzťahu.

Tento **neznámy** funkčný vzťah **aproximujeme odhadnutým** funkčným vzťahom (modelom):

$\hat{y} = \hat{F}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ model

kde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ je **vektor odhadovaných** parametrov modelu.

V prípade **funkcie s jednou vstupnou veličinou** môže mať odhadnutý funkčný vzťah tvar napr.:

$\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u$ lineárna funkcia

$\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u + \hat{\theta}_2 u^2$ kvadratická funkcia

$\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 \sqrt{u}$ odmocninová funkcia

Aby sme mohli **vypočítať vektor odhadovaných parametrov** modelu $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ potrebujeme **uskutočniť N meraní (experimentov)**, v ktorých získame **hodnoty výstupu** y_i **ako odozvu na zvolené hodnoty vstupu** u_i pre i=1, ... , N. Vzhľadom k tomu, že výstupné veličiny sú pri meraní skreslené šumom merania, je potrebné zvoliť **počet experimentov *N* omnoho väčší ako je počet neznámych parametrov**.

Pre každý experiment vyjadríme **odchýlku medzi nameraným výstupom** y_i a **výstupom z modelu** $\hat{y}_i$:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Cieľom je nájsť také (optimálne) parametre modelu, pre ktoré budú tieto **odchýlky najmenšie**. Na odhad parametrov preto použijeme **metódu najmenších štvorcov**, ktorá minimalizuje účelovú funkciu v tvare **súčtu druhých mocnín** (kvadrátov) **všetkých odchýlok** e_i pre i=1, ... , N:

$$Q(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} e_i^2 \qquad \textbf{účelová funkcia}$$

Túto účelovú funkciu je možné vyjadriť vo vektorovo-maticovom tvare:

$$Q(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

kde ***H*** je matica, ktorej prvky sú funkciami vstupných veličín

y je stĺpcový vektor nameraných výstupných veličín $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$.

Vzťah pre výpočet optimálneho vektora parametrov modelu odvodíme z nulovej hodnoty gradientu účelovej funkcie (keďže hľadáme minimum, čiže extrém funkcie) a **má nasledovný tvar**:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{H})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y} \qquad \textbf{Gaussov vzťah}$$

a) Aproximácia lineárnou funkciou $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u$

Do lineárnej rovnice **dosadíme postupne hodnoty** u_i pre i=1, ... , N, čím dostaneme tzv. **preurčený systém rovníc** (systém rovníc, v ktorých je viac rovníc ako neznámych):

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_1 \\ \hat{y}_2 &= \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_2 \\ &\dots \\ \hat{y}_N &= \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_N \end{aligned}$$

ktorý sa dá vyjadriť v tvare: $\widehat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{1}}\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}}$

kde $\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_N \end{pmatrix}$ a $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \end{pmatrix}$.

Maticu $\boldsymbol{H_1}$ **dosadíme do Gaussovho vzťahu** spolu s vektorom nameraných výstupov $\boldsymbol{y}$ a **dostaneme hľadaný vektor parametrov** modelu $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1$.

Hodnotu účelovej funkcie, t.j. sumu kvadrátov odchýlok vypočítame ako:

$$Q_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{e}$$

kde $\boldsymbol{e}$ je vektor obsahujúci odchýlky e_i pre i=1, ... , N, ktorý vypočítame nasledovne:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}_1\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1.$$

<u>Výpočet v Matlabe</u>

namerané vektory u a y musia byť v tvare stĺpca!

```
I=ones(size(u));                 % jednotkovy vektor
h1=[I,u];                        % matica H
theta1=inv(h1'*h1)*h1'*y;        % odhad parametrov
y1=h1*theta1;                    % vektor vystupov modelu
e=y-y1;                          % vektor odchylok
q1=e'*e;                         % suma kvadratov odchylok
```

b) Aproximácia kvadratickou funkciou $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u + \hat{\theta}_2 u^2$

Opäť **postupne dosadíme do rovnice modelu hodnoty** u_i pre i=1, ... , N, čím **dostaneme preurčený systém rovníc** v tvare:

$$\hat{y}_1 = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_1 + \hat{\theta}_2 u_1^2$$
$$\hat{y}_2 = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_2 + \hat{\theta}_2 u_2^2$$

...

$$\hat{y}_N = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 u_N + \hat{\theta}_2 u_N^2$$

ktorý sa dá vyjadriť v tvare: $\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{H_2}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_{\boldsymbol{2}}$

kde $\boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u_N & u_N^2 \end{pmatrix}$ a $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix}$.

Po dosadení matice $\boldsymbol{H_2}$ **do Gaussovho vzťahu** spolu s vektorom nameraných výstupov $\boldsymbol{y}$ dostanete hľadaný vektor parametrov modelu $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2$ a následne vypočítajte aj vektor výstupov modelu a-hodnotu účelovej funkcie Q_2.

c) Aproximácia odmocninovou funkciou $\hat{y} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1\sqrt{u}$

V tomto prípade majú matica $\boldsymbol{H_3}$ a vektor hľadaných parametrov $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_3$ tvar:

$$\boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{u_1} \\ 1 & \sqrt{u_2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \sqrt{u_N} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_3 = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte vektor parametrov modelu $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_3$, vektor výstupov modelu a hodnotu účelovej funkcie Q_3.

Vykreslite body nameranej prevodovej charakteristiky a do toho istého obrázka tiež **vykreslite získané funkčné závislosti**.

Na základe grafického porovnania priebehov aj porovnania hodnôt účelovej funkcie vyhodnoťte **ktorá funkcia najlepšie opisuje nameranú prevodovú charakteristiku**.

Poznámka: **vypočítaný odhad** parametrov je možné **skontrolovať v MATLABe** pomocou **Basic Fitting GUI.** Najskôr je potrebné vykresliť prevodovú charakteristiku príkazom *plot* a potom zvoliť v okne obrázku *Tools – Basic Fitting*.

Vytvorte dokument s názvom *cv11_Priezvisko1_Priezvisko2*, **do ktorého uveďte:**

- nameranú prevodovú charakteristiku (číselne aj graficky), pričom stručne popíšte aj postup jej merania a vyhodnotenia,
- matematické vzťahy pre vypočítané funkčné závislosti spolu s príslušnou hodnotou účelovej funkcie,
- grafické porovnanie vypočítaných funkčných závislostí s nameranou prevodovou charakteristikou,
- zhodnotenie dosiahnutých výsledkov - uveďte, ktorá funkčná závislosť najlepšie vystihuje nameranú prevodovú charakteristiku a prečo.