SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mia Filić

ANALIZA POSTUPKA PROCJENE POLOžAJA TEMELJEM ZADANIH PSEUDOUDALJENOSTI U PROGRAMSKI ODREđENOM PRIJAMNIKU ZA SATELITSKU NAVIGACIJU

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc Luka Grubišić i prof. dr. sc Renato Filjar

Zagreb, 25. lipnja 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Na kraju

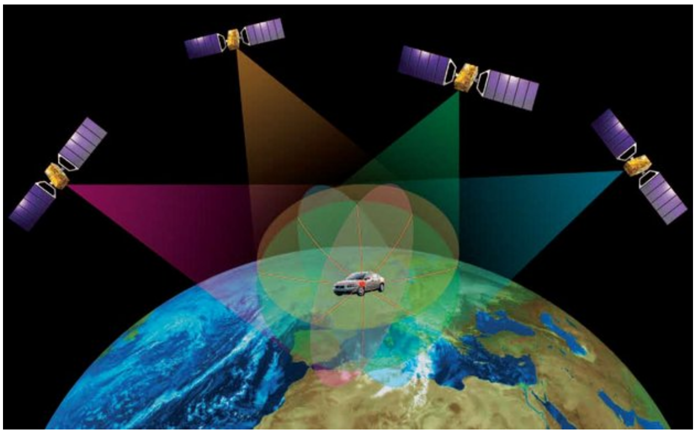
Sadržaj

Uvod

Globalni navigacijski satelitski sustav (GNSS) je osmišljen s ciljem da u bilo kojem trenutku i za bilo koji entitet na Zemljinoj površini može dati podatak o trenutnom vremenu, položaju i brzini gibanja (engl. Position, Velocity and Time (PVT)). Kao takav daje temelje rastućem broju tehnoloških i društveno-ekonomskih sustava.

Poglavlje 1

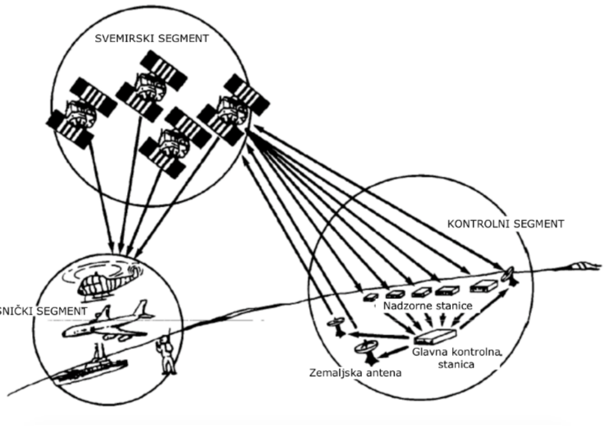
Globalni navigacijski satelitski sustav (engl. Global Navigation Satellite System (GNSS))



Slika 1.1: Satelitska navigacija[4]

Spominjući GNSS, najčešće se misli na *"sazviježđe"* satelita koji odašilju signale, potrebne za određivanje trenutne cije, i *Navigacijske poruke* (engl. Navigation Messages (NM)). *"Sazviježđe"* satelita predstavlja (1) svemirski segment GNSS sustava. Postoji još (2) kontrolni segment koji čine kontrolne stanice smještene na Zemlji i (3) korisnički segment, tj. GNSS prijemnici 1.2. Kontrolni segment nadzire i upravljaja radom sustava.

Trenutno postoji više GNS sustava (GNSS). Neki su u potpunosti operativni, dok su neki samo djelomično. Najraširaniji u civilnoj upotrebi je GPS (Global Positi-



Slika 1.2: Segmenti GNS sustava (GNSS)

oning System). GPS je u potpunosti operativan i u vlasništnu Vlade SAD-a. Njime upravlja Ministarstvo obrane SAD-a (engl. US Air Force). GPS omogućava dvije znatno različite razine korištenja, civilnu i vojnu. Vojna razina korištenja ima više mogućnosti, a dopuštena je samo određenim korisnicima. Civilna razina korištenja je dostupna svima, bez dodatne naknade, uz uvjet posjedovanja GPS-prijemnika.

Drugi, također u potpunost operativan GNSS, je GLONASS (Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) koji je u vlasništvu Rusije. Postoje i GNSS sustavi u razvoju. Jedan od njih je Galileo. Galileo-om upravlja Europska unija (EU). Galileo je najavljen postati u potpunosti operativan do 2020 [4]. Kina posjeduje lokalni navigacijski satelitski sustav BeiDou koji je najavljan postati svjetski do 2020 [4].

Primjena GNSS-a dijeli se na pozicioniranje i navigaciju.

Definicija 1.0.1 (Navigacija)**.** *Navigacija obuhvaća trenutno određivanje položaja i brzine entiteta u pokretu. Svrha navigacije je praćenje i upravljanje gibanja entiteta.*

Definicija 1.0.2 (Pozicioniranje)**.** *Pozicioniranje nazivamo postupak određivanja položaja točkovnog entiteta ili niza točkovnih entiteta u prostoru.*

Ovaj rad se bavi isključivo off-line navigacijskom primjenom, u svrhu praćenja entiteta. Off-line navigacijska primjena je važna za prometnu znanost u svrhu analize prometnih puteva. Kako ne zahtjeva real-time izračunavanje, svodi se na određivanje položaja točkovnog entiteta koji je statičan u danom vremenu t, tj. pozicioniranje. Određujući položaj entiteta za niz vremena $t_1, t_2, \ldots, t_n$, dobiva se aproksimacija kretanja entiteta u vremenskom okviru $[t_1, t_n]$. Preciznost aproksimacije kretanja zadaje se veličinom okvira i parametrom n, ili dostupnošću podataka. Praksa ne zathjeva se da je n u odnosu na vremenski okvir od 1 sata prevelik. Točno kretanje entiteta moguće je odrediti preslikavanjem dobivene aproksimacije na kartu prometnih puteva. U tu se svrhu koriste koriste otprije poznati algoritmi. Zaključno, bavimo se isključivo algoritmom za pozicioniranje (statičkog entiteta).

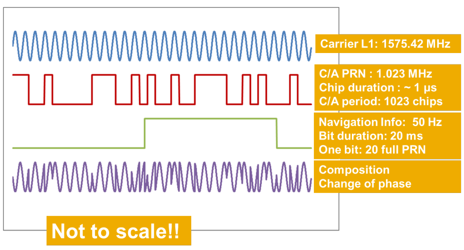
U danjim poglavljima, baziramo se na jedan određeni GNSS, GPS u aspektu civilne razine korištenja.

Poglavlje 2

Globalni pozicijski sustav (GPS, engl. Global Positioning System)

Sazviježđe GPS-a se sastoji od najmanje 24 satelita raspoređenih u 6 jednako odmaknutih orbita, svaka s inklanacijom od 55 stupnjeva od ekvatorijalne ravnine (engl. Medium Earth Orbit (MEO)). Sateliti kruže na visini od oko 20200 kilometara od Zemljine površine s periodom rotacije 12 zvjezdanih sati. Sateliti su raspoređeni na način tako da u svakom trenutku za svako mjesto na Zemljinoj površini postoje barem 4 dostupna satelita. Definicija dostupnosti satelita je dana na stranici 13.

Svi GPS sateliti odašilju signale na istoj osnovnoj frekvenciji/frekvencijama (Slika 2.1). U satelitima, vrijeme se prati pomoću cezijevih satova koji se sinkroniziraju s GPS atomskom vremenskom skalom. Sinkronizacija se odvija u periodima.



Slika 2.1: GPS signal i njegove komponente [5]

2.1 GPS signali: C/A PRN i P kod

C/A PRN kod i primjene

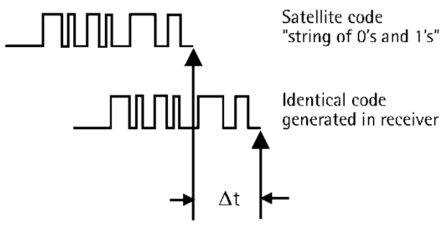
GPS sateliti odašilju signale na dvije frekvencije (nosača) L_1 i L_2, od kojih L_1 na 1575.42 MHz je namjenjena civilnoj upotrebi. Pojam signal se u satelitskoj navigaciji koristi za poruku koja sadržava C/A PRN kod (eng. Coarse Acquisition Pseudo Random Noise). Svaki satelit posjeduje jedinstveni C/A PRN kod koji predstavlja niz od 1023 0 i 1. GPS-prijemnik razlikuje signale i *Navigacijske poruke* različitih satelita temeljem sadržanih C/A PRN kodova. Satelit C/A PRN kodove odašilje neprestano, s početkom na početku svake sekunde. Prijemnik primljeni C/A PRN kod korsti za razlikovanje satelita odašiljetelja, ali i za računanje pseudo-udaljenosti.

Definicija 2.1.1 (Pseudo-udaljenost)**.** *Naka su svi sateliti numerirani brojevima iz* $\mathbb{N}$ *s početkom u 1. Naka je* $i \in \mathbb{N}$ *neki satelit i* t *prijamnik prijemnik koji je u mogućnosti primiti signal koji odašilje satelit* i*. Pseudo-udaljenost između satelita odašiljatelja* i *i prijemnika primatelja* t*:*

$$d_i = c \cdot (t_i' - t_i)$$

gdje je c *konstanta koja je jednaka brzini putovanja signala od satelita do prijemnika.* t_i' *je vrijeme primanja signala,* t_i *vrijeme slanja signala (po UTC vremenu).*

Pseudo-udaljenost je aproksimacija udaljenosti između satelita odašiljatelja i prijemnika primatelja signala u danom trenutku. Označimo $\delta t := (t_i' - t_i)$. Izračun vremena putovanja signala se odvija poravnavanjem odgovarajućih signala, tj. C/A PRN kodova. U isto vrijeme, prijemnik i satelit generiraju isti C/A PRN kod. Budući da dok signala putuje, prijemnik još uvijek generira C/A PRN kod, po primitku signala, ta 2 koda se uspoređuju. Temeljem promjene u fazi, dobinenog i generiranog signala, računa se procjena vremena putovanja, tj. δt (Slika 2.2).



Slika 2.2: Procjena vremena putovanja signala (δt)

Za konstantu c se obično uzima brzina svjetlosti koja predstavlje brzinu putovanja poruke satelita u vakuumu.

Budući da se psudo-udaljenost dobiva poravnavanjem kodova , upravo opisani način određivanja pseudo-udaljenosti naziva se kodni.

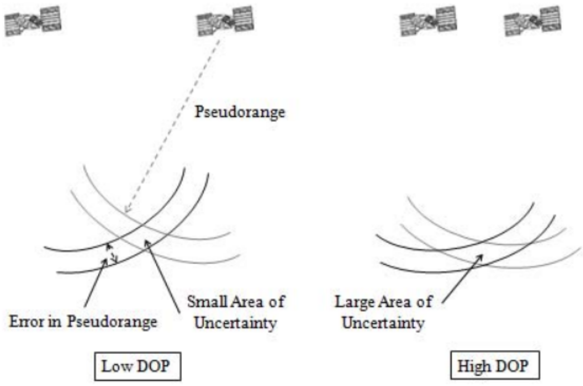
Postoji još i fazni način određivanja psudo-udaljenosti koji se zasniva na poravnavanju valova nosača (engl. Carrier phase) nakon micanjem C/A PRN i P(Y) kodova iz poruke (Slika 2.1). Fazno mjerenje služi kao nadopuna kodnome u svrhu poboljšanja točnosti određivanja položaja.

2.2 P kod

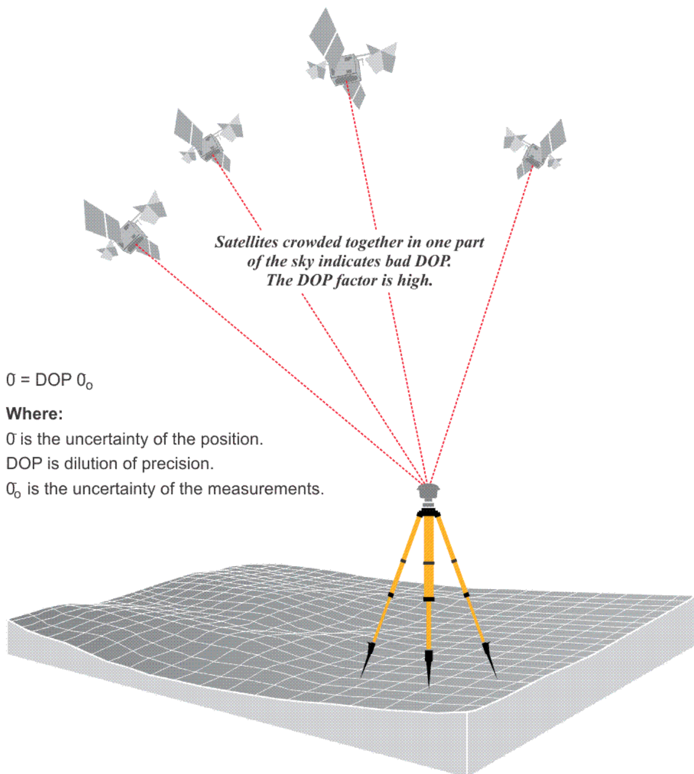
P kod se odašilje na obje frekvencije i rezerviran je za vojnu razinu upotrebe. Kao i C/A PRN kod, sastoji se od niza nula i jedinica i šalje se brzinom 1023 bit/s, ali je puno dulji. Potrebno je 37 tjedana kako bi se poslao cjelokupan P kod. Za razliku od C/A koda, gdje svaki satelit ima svoj jednistveni C/A kod, P kod je distribuiran među satelitima. Isječci P koda različitih satelita su međusobno različiti. U određeno vrijeme, svakih 7 dana, određeni satelit odašilje svoj dio P koda. Na taj način, prijemnik razlikuje jedan satelit od drugoga. Npr. ukoliko satelit S odašilje 14. tjedan P koda, onda je satelit S zapravo *Space Vehicle 14 (SV 14)*. Prijemnik ne prima goli P kod, već njegovu kriptiranu verziju, u oznaci $P(Y)$. Samo korisnici s vojnom razinom upotrebe su u mogućnosti dekriptirati $P(Y)$ u P. P kod omogućava točnije određivanje pozicije entiteta.

2.3 Pogreške određivanja položaja i vrste

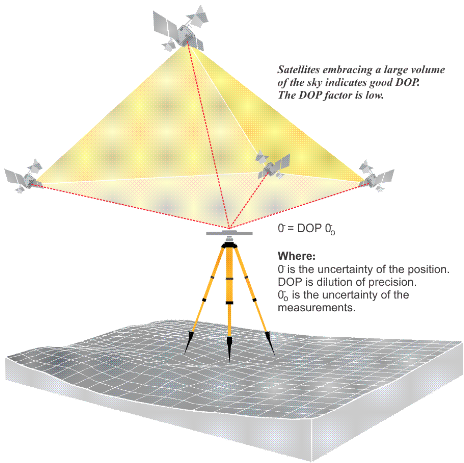
Pogreške određivanja položaja se grubo dijele na dvije vrste: (1) pogreške nastale usljed konstrukcije ulaza u algoritam i (2) usljed primjenje algoritma za određivanje položaja na mjerenim psudo-udaljeniostima. Dakle, postoje dva izvora: ulazni podatci algoritma (tip 1) i algoritam (tip 2). Izvori pogreške tipa 1 su najčešće pogreške pri određivanju pseudo-udaljenosti ili raspoređenost satelita u svemiru. Nepovoljan položaj promatranih satelita može rezultirati skoro pa zavisnom jednadžbama u (2.4) (Slike 2.3, 2.4 i 2.5).



Slika 2.3: Razlike u razmještaju satelita



Slika 2.4: Loš razmještaj satelita



Slika 2.5: Dobar razmještaj satelita

Detaljnija podjela pogrešaka tipa 1 nastalih pri određivanju psudo-udaljenosti i na što koja utječe dana je sljedećom tablicom.

Tablica 2.1: Pogreške određivanja pseudo-udaljenosti

izvor	utjecaj
satelit	pogreške orbite pogreška sata satelita
rasprostiranje signala	troposferska refrakcija ionosferska refrakcija
prijemnik	pogreške antene pogreška sata

Utjecaj sistemskih pogrešaka otklanja se modeliranjem ili kombinacijom opažanja. Korištenjem više prijemnika, otkanjaju se pogreške spacifične za satelite: Pogreške specifične za prijemnike otkanja korištenje viška satelita. Utjecajem troposfere se najčešće smanjuje modeliranjem, a ionosfere korištenjem dva signala različitih frekvencija.

Postoje još i slučajne pogreške nastale zbog aktualnog mjerenja i slučajnog dijela višestruke refleksije signala (multipath) nastalog interferencijom direktnog i reflektiranog signala.

U ovom radu, sistemske i slučajne pogreške su otklonjene koristeći RTK-LIB.Prije konstrukcije ulaza algoritma za određivanja položaja, reducirana je pogreška s izvorom u pseudo-udaljenostima. Opravdano je pretpostaviti kako ona više nije značajna neuzimajući ju u obzir u daljnjem postupku izračuna položaja.

Pogreške tipa 2 mogu imati izvor u dizajnu izvedbe algoritma ili samoj izvedbi:

1. dizajn izvedbe algoritma,
2. numeričke greške, greške zbog ograničene preciznosti računala, aproksimacije pojedinih vrijednosti,
3. izvedna algoritma.

One se ne modeliraju algoritmima procjene položaja (poglavlje 3), već prilikom dizajna izvedbe odabranog algoritma (poglavlje 4)

U poglavlju 4, biti će obrađena analiza pogreške tipa 2 za odabrani algoritam.

2.4 Navigation Message

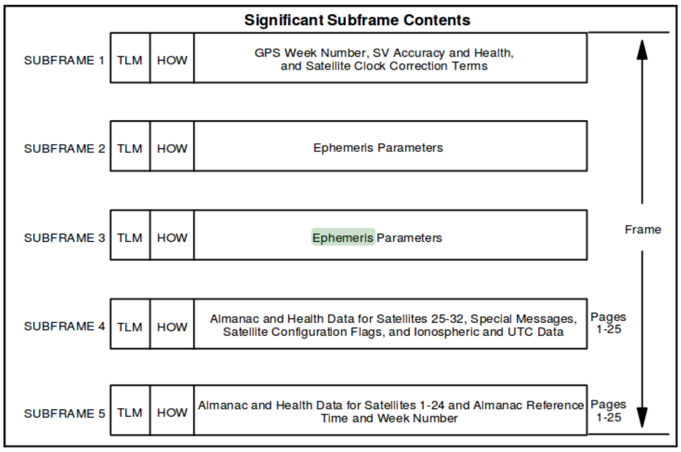
Svaki satelit, uz C/A PRN i P kod, odašilje i dodatne podatke potrebne za ispravo pozicioniranje prijemnika. Odašilje ih u obliku *Navigacijske poruke* koja se šalje zajedno s generiranim C/A PRN kodovima (Slika 2.1).

Navigacijska poruka se sastoji od 25 okvira[4]. Jedan okvir se satoji od 5 podokvira i svaki sadržava vrijeme slanja sljedećeg okvira (Slika [5]). Za slanje cjelokupnog podokvira potrebno je 6 sekundi, 6 cjelokupnih C/A PRN kodova. Prijemnik je u mogućnosti računati pseudo-udeljenost za novu poziciju satelita svakih 6 sekundi. Za slanje cjelokupne NM, potrebno je 12.5 minuta. U nastavku termin poruka koristi se misleći na podprozor.

Prozor sadrži:

1. GPS vremena odašiljanja
2. signal prijenosa s P na C/A kod (potpoglavlja 2.2 i 2.1)
3. podatke o orbitalnoj putanji satelita
4. podatke o korekciji sata satelita
5. almanah statusa svih satelita u sazvježđu
6. koeficijenti preračunavanja GPS vremena u UTC
7. ionosferski model korekcije

Definicija 2.4.1 (Universal Time Coordinate (UTC vrijeme))**.** *Universal Time Coordinate je vremenski standard zasnovan na međunarodnom atomskom vremenu koji se najčešće koristi u znanstvene i vojne svrhe. Drugi nazivi za taj vremenski standard su ZULU vrijeme i Greenwich Mean Time (GMT).*



Slika 2.6: Pregled strukture prozora navigacijske poruke[5]

Pojedini dijelovi navigacijske poruke pomažu pri otklanjaju pogrešaka tipa 1 spomenutih u potpoglavlju 2.3, određivanju pseudo-udaljenosti i trenutnoj poziciji satelita. Naime, iz podataka o orbitalnoj putanji satelita moguće je za odabrani trenutak izračunati poziciju (koordinate) satelita u orbitalnom koordinatnom sustavu pa i svakom drugom.

Za razumjevanje ovoga rada, dovoljno je razumjeti sljedeće. Prijemnik svakih 6 sekundi ima dovoljno podataka da odredi novu pseudo-udaljenost do istog satelita sve dok on ne prestane biti dostupan.

Definicija 2.4.2 (Dostupnost satelita S prijemniku T)**.** *Za satelit S kažemo da je dostupan prijemniku T u trenutku t ako je u sljedećih 6 sekundi u mogućnosti izračunati pseudo-udaljenost do satelita S i konstruirati sljedeću jednadžbu:*

$$d_s = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2} \tag{2.1}$$

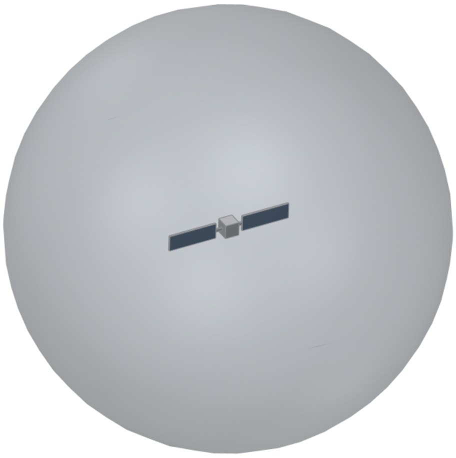
gdje su jedine nepoznanice (x, y, z), tj. koordinate položaja prijemnika. (x_s, y_s, z_s) su koordinate položaja satelita.

2.5 Proces određivanja položaja

U pravilu, prijemnik ima više dostupnih satelita od kojih dobiva poruke u odabranom trenutku. Za određivanje položaja prijemnika u granicama dopuštene točnosti, zahtjevaju se barem 4 dostupna satelita.

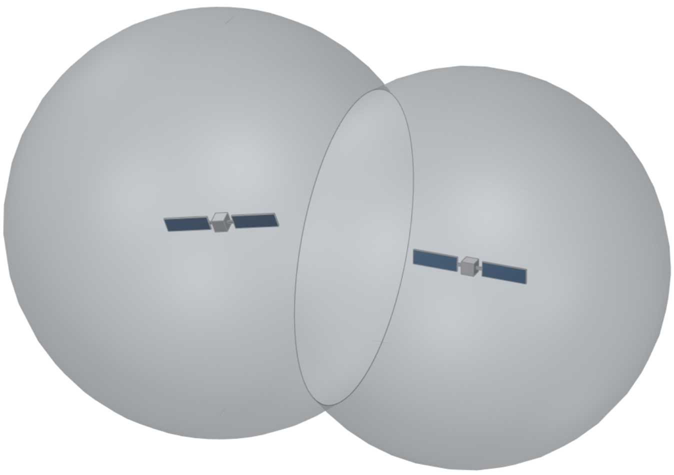
Kako bi prijemnik odredio svoju poziciju, računa tri nepoznanice: geografsku širinu, duljinu i nadmorsku visinu. Neka je k broj vidljivih satelita od prijemnika

T. Prijemnik T promatrajući poruke dobivene od samo jednog satelita, u vremenu t, izračunava samo jednu pseudo-udaljenost i može konstruirati samo jednu jednadžbu 2.1 koja mu omogućava odrediti sferu oko promatranog satelita na kojoj bi se mogao nalaziti (Slika 2.7).



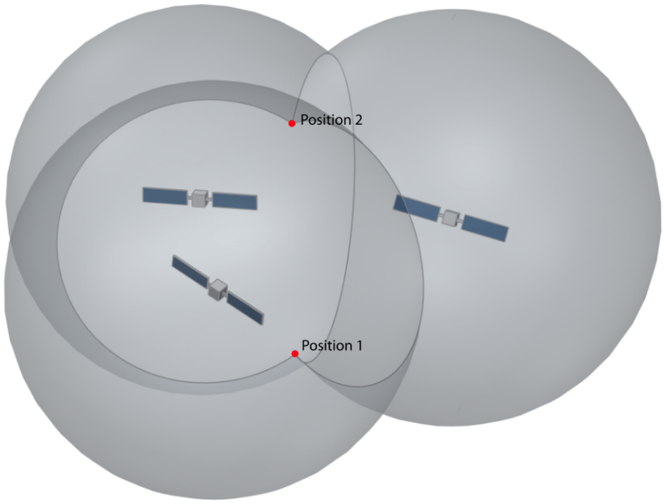
Slika 2.7: Sfera oko promatranog satelita na kojoj bi se prijemnik mogao nalaziti [2]

Uključujući u izračun pridobivene pseudo-udaljenosti od još jednog satelita dobivamo situaciju prikazanu na Slici 2.8.



Slika 2.8: Sfere oko 2 promatrana satelita, presjek je kružnica na kojoj bi se prijemnik mogao nalaziti. [2]

Uključujuči u izračun još jedan satelit, dobivamo situaciju prikazanu na Slici 2.9.



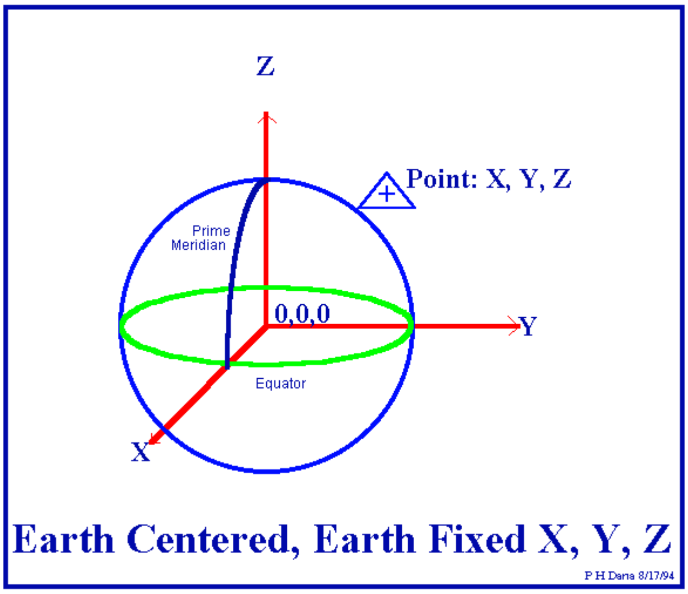
Slika 2.9: Sfere oko 3 promatrana satelita, presjek su 2 točke na kojoj bi se prijemnik mogao nalaziti. [2]

Presjek 3 promatrane sfere su 2 točke na kojoj bi se prijemnik mogao nalaziti. Jedna točka se nalazi daleko u svemiru, dok je druga točka točka kandidat pozicije prijemnika.

Algebarski, rješavamo sljedeći sustav linearnih jednadžbi u (x, y, z) :

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} \\ d_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2} \\ d_3 &= \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdje su $1, 2, 3$, 3 različita satelita, a (x_i, y_i, z_i) pripadajuće koordinate položaja satelita u (ECEF XYZ) koordinatnom sustavu. ECEF XYZ koordinatni sustav je prikazan na Slici 2.10. Ishodište (ECEF XYZ) koordinatnog sustava je središte zemlje.



Slika 2.10: Earth-Centered, Earth-Fixed X, Y, Z coordinate system (ECEF XYZ koordinatni sustav) [3]

Svaki prijemnik je sposoban izvesti konverziju iz i u koordinata u ECEF XYZ sustavu u i iz geografskih (geografska širina i duljina i nadmorska visina) [3]. Dakle, prijemniku su potrebna barem 3 dostupna satelita kako bi odredio poziciju. Ali ipak na stranici 13 se postavlja zahtjev na barem 4.

Primjetimo kako proces određivanja položaja prijemnika indirektno zahtjeva usklađenost satova prijemnika i dostupnih satelita. Kako su satovi svih satelita međusobno usklađeni, usklađeni s GPS vremenom (Ukoliko odstupanje postoji odstupanje, biti će zapisano u navigacijskoj poruci koja se može uzeti u obzir prilikom određivanja položaja prijemnika). Napomenimo da GPS vrijeme nije jednako UTC vremenu. GPS vrijeme je bilo 0 u 06.01.1980. i određeno je protjecanjem vremena u GPS satelitima, tj. njihovim satovima.

Satovi prijemnika nisu iste preciznosti kao satovi satelita. Prijemnici obično koriste satove preciznosti do otprilike 10^{-6} sekundi. Pogreška određivanja vremena od 10^{-6} sekundi dovodi do pogreške u određivanju pseudo-udaljenosti od oko 300 metara. Uključijući u izračin i pogrešku sata prijemnika, pseudo-udaljenost modeliramo jednadžbom:

$$d_i = c \times (t_i' - t_i + d_T)$$

gdje d_T predstavlja spomenutu pogrešku. Budući da se prilikom određivanja položaja, spomenuta pogreška u oznaci d_T ne mijenja u odnosu na satelit koji se promatra, može se izračunati dodavajući ju kao nepoznanicu u sustav jednadžbi 2.2 Dakle, sustav jednadžbi 2.2 prelazi u:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}+d_T \\
d_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}+d_T \\
d_3 &= \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2}+d_T
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Kako bi za gornji sustav postojala mogućnost pronalaska rješenja, uvodi se zahtjev na još barem jedan dostupni satelit, što je ukupno 4 (Stranica 13). Dobivamo sljedeći sustav jednadžbi u (x, y, z, d_T):

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}+d_T \\
d_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}+d_T \\
d_3 &= \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2}+d_T \\
d_4 &= \sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2}+d_T
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Upravo opisanom postupkom otklanjamo pogrešku nastalu prilikom određivanja pseudo-udaljenosti s izvorom u pogrešci sata prijemnika. U praksi se može koristiti još veći broj dostupnih satelita što poboljšava preciznost pozicioniranja prijemnika.

Poglavlje 3

Algoritam procjene položaja u domeni navigacijske primjene

Algoritam procjene položaja u domeni navigacijske primjene (APP) smatramo svakim algoritmom koji za sustav jednadžbi (2.4) određuje nepoznatu poziciju prijemnika u koordinatama (x, y, z). Broj jednadži sustava može biti i veći od 4. Tada govorimo o prezasićenim sustavima. Ovisno o odabiru, APP se može temeljiti na rješavanju sustava nelinearnih jednadžbi pronalaženjem rješenja pomoću (1) metode najmanjih kvadrata (Newton-ova metoda), (2) pomoću zatvorene formule, (3) metode najbližeg susjeda ili (4) vjerojatnosne metode [1].

Općenito, rješava se moduficiran sustav jednadžbi 2.4:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} + d_T + v_1 \\ d_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2} + d_T + v_2 \\ d_3 &= \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2} + d_T + v_3 \\ d_4 &= \sqrt{(x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 + (z-z_4)^2} + d_T + v_4 \end{aligned} \tag{3.1}$$

u koji uključejemo nepoznati parametar (v_1, v_2, v_3, v_4), dodatnu pogreška izračuna.

Uz oznake

$$\rho := (d_1, d_2, d_3, d_4)^T \tag{3.2}$$

$$\mathbf{x} := (x, y, z, d_T)^T \tag{3.3}$$

$$\mathbf{s}_i := (x_i, y_i, z_i)^T \tag{3.4}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} ||(s_1 - \mathbf{x}_{1:3})|| + x_4 \\ ||(s_2 - \mathbf{x}_{1:3})|| + x_4 \\ ||(s_3 - \mathbf{x}_{1:3})|| + x_4 \\ ||(s_4 - \mathbf{x}_{1:3})|| + x_4 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{v} := (v_i, v_2, v_3, v_4)^T \tag{3.6}$$

prelazi u

$$\rho = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \tag{3.7}$$

3.1 Iterativna metoda najmanjih kvadrata

Primjetimo kako je $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ jednako pravom vektoru udaljenosti između satelita i prijemnika za prave vrijednosti $\mathbf{x}$,$\bar{\mathbf{x}}$.
Na ovoj razini, algoritam oderđivanja pozicije se ne bavi pogreškom tipa 2, već samo pogreškom tipa 1 (stranica 2.3). Također, može se pretpostavti kako su otklonjene sve pogreške tipa 1 koje imaju izvor u izračunu pseudo-udaljenosti (stranica 2.3). Ostaje samo modelirati pogreške koje imaju za izvor trenutni položaj satelita dostupnih za izračunavanje željenog položaja $\bar{\mathbf{x}}_{(1:3)}$. U tu svrhu modeliramo vektor pogrešaka $\mathbf{v}$, funkcijom $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ koja ovisi o nepoznatom parametru $\mathbf{x}$. Uz oznaku $\mathbf{y} := \rho$ jednadžba 3.7 prelazi u

$$\mathbf{y} = \rho = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{x}) \tag{3.8}$$

Preciznije, član $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ modelira pogrešku razlike u procjeni parametra $\mathbf{x}$ od stvarne vrijednosti. Što je bolja aproksimacija potrebnih vrijednosti za izračun rješenja matrične jednadžbe 3.7 točnija, to je $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ bliže nuli za pravu vrijednost pozicije prijemnika $\bar{\mathbf{x}}$. Tada aproksimaciju za $\bar{\mathbf{x}}$, u oznaci $\hat{\mathbf{x}}$, pronalazimo tražeći nultočke funkcije $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. U praksi je uobičajeno da mjerenja sadrže pogreške. Tada $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ uopće ne mora imati nultočke i $\hat{\mathbf{x}}$ ne možemo pronaći tražeći nultočke funkcije $\mathbf{p}(\mathbf{x})$.

Ideja metode najmanjih kvadrata je pronalazak $\hat{\mathbf{x}}$ tražeći minimum $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, tj.

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{p}(\mathbf{x}) \tag{3.9}$$

Problem opisan jednadžbom (3.9) nije linearan pa ne postoji općeniti način pronalaska njegovog rješenja.

U slučaju da su funkcija koju treba minimiziati i početna vrijednost $\mathbf{x}_0$ (iterativnog postupka) dovoljno dobre (vidi: dodatak A), rješenja problema 3.9 možemo dobiti iterativnim postupakom. Ideja iterativnog postupka je počevši s $\mathbf{x}_0$ računati $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ sve dok se novoizračunate vrijednosti ne prestanu mijenjati ili postanu dovoljno bliske prethodnoj, tj. $\|x_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \delta$ za dovoljno male $\delta > 0$. δ još nazivamo i zaustavni kriterij.

Jedan iterativni postupak rješavanja problema 3.9 je pomoću Newton-Gaussove metode (iterativna metoda najmanjih kvadrata). Newton-Gaussova metoda linearizira $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ u okolini od $\mathbf{x_k}$ razvojem u $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ u Taylorov red:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x_k} + \Delta\mathbf{x_k}) \approx \mathbf{p}(\mathbf{x_k}) + \mathbf{p}'(\mathbf{x_k}) \cdot \Delta\mathbf{x_k} \tag{3.10}$$

$\Delta\mathbf{x_k}$ se odabire na način tako da

$$lim_{k\to\infty}\left(\mathbf{p}(\mathbf{x_k})\right) = 0$$

za $\mathbf{p}(\mathbf{x_{k+1}}) := \mathbf{p}(\mathbf{x_k} + \Delta\mathbf{x_k}) \approx \mathbf{p}(\mathbf{x_k}) + \mathbf{p}'(\mathbf{x_k}) \cdot \Delta\mathbf{x_k}$. Dakle, $\Delta\mathbf{x_k}$ odabiremo tako da tražimo rješenje jednadžbe

$$\mathbf{p}(\mathbf{x_k}) + \mathbf{p}'(\mathbf{x_k}) \cdot \Delta\mathbf{x_k} = 0 \tag{3.11}$$

Označimo sada s $J_k := \mathbf{p}'(\mathbf{x_k}) = \mathbf{h}'(\mathbf{x_k})$. Sada 3.11 možemo zapisati u obliku

$$J_k\Delta\mathbf{x_k} = -\mathbf{p}(\mathbf{x_k}) \tag{3.12}$$

koji predstavlja prezasićen sustav linearnih jednadžbi čije je rješenje definirano s

$$\Delta\mathbf{x_k} = -(J_k^T J_k)^{-1} J_k^T \mathbf{p}(\mathbf{x_k}) \tag{3.13}$$

Sada, $\mathbf{x_{k+1}}$ dobivamo pomoću jednadžbe

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{x_k} - (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T \mathbf{p}(\mathbf{x_k}) \tag{3.14}$$

Prilikom izvedbe algoritma, potrebano je dobro odrediti početnu vijednost $\mathbf{x_0}$, te kasnije iterirati po formuli 3.14. Ukoliko odaberemo dovoljno dobar $\mathbf{x}_0$, dovoljno blizu rješenju i ako je druga derivacija od p u točki $\bar{\mathbf{x}}$ dovoljno mala, niz $x_0, x_2, \ldots$ konvergira prema $\bar{\mathbf{x}}$.

Algoritam iterativne metode najmanjih kvadrata definiran je pseudo-kodom 1.

Algoritam 1: Iterativna metoda najmanjih kvadrata

Data: $\mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0, \delta$

Result: $\hat{\mathbf{x}}$

$k = 0$;

while $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| \geq \delta$ **do**

    $J_k = \mathbf{p}'(\mathbf{x}_k)$;

    $\Delta\mathbf{x}_k = -\frac{J_k}{\mathbf{p}(\mathbf{x}_k)}$;

    $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k$;

    $k++$;

end

$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x_k}$

Ukoliko gornji algoritam primjenjujemo za oderđivanje pozicije entiteta i nemamo boljih kandidata za $\mathbf{x}_0$ mogu uzeti koordinate središta zemlje. Naime, jednadžbe za određivanje položaja su dovoljno blizu linearnim.

Ukoliko znamo da su vrijednosti koje koristimo za konstrukciju jednadžbi za određivanje položaja (2.4) za neke jednadžbe točnije nego za druge, pametno je dati veći značaj tim jednadžbama nego ostalima. Svakoj jednadžbi se pridaje težina σ_i koja je proporcionalna točnosti vrijednosti koje se koriste u njezinoj konstrukciji. Najčešće se težine modeliraju preko kovarijancone matrice vektora pogrešaka $\mathbf{v}$ (3.6),u oznaci $\Sigma := cov(\mathbf{v})$, pa minimizacijski problem 3.9 prelazi u

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \Sigma \mathbf{p}(\mathbf{x}) \tag{3.15}$$

Sada, algoritam 1 prelazi u algoritam 2.

Algoritam 2: Iterativna metoda težinskih najmanjih kvadrata

Data: $\mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0, \delta, \Sigma$

Result: $\hat{\mathbf{x}}$

$k = 0$;

while $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| \geq \delta$ **do**

    $J_k = \mathbf{p}'(\mathbf{x}_k)$;

    $\Delta\mathbf{x}_k = -\frac{\Sigma^{\frac{1}{2}} J_k}{\Sigma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{p}(\mathbf{x}_k))}$;

    $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k$;

    $k++$;

end

$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x_k}$

Procjenitelj za $\bar{\mathbf{x}}$ dobiven težinskom metodom najmanjih kvadrata 3.15 ima najmanju varijancu među svim procjeniteljima za $\bar{\mathbf{x}}$. Ukoliko je vektor pogrešaka $\mathbf{v}$ normalno distribuiran, procjenitelj 3.15 postaje procjenitelj metode najbližeg susjeda (3.3) (MLE procjenitelj). Izračun od J_k se može naći u prilogu A.

Težinska metoda najmanjih kvadrata daje najboljeg procjenitelja za $\bar{\mathbf{x}}$ uz poznatu distribuciju vektora pogrešaka, tj. kovarijancone matrice Σ. Prilikom korištenja težinske metode najmanjih kvadrate, potrebno je pripazati na velike pogreške u određivanju vrijednosti pomoći kojih se gradi sustav jednadžbi 2.4 i netipične vrijednosti ("outlinere") koji se uklanjaju prije primjene algoritma.

Sljedeće poglavlje donosi izvedbu upravo opisanog algoritma 2 i analizu njegove točnosti. Prije toga navedimo jednu zanimljivu posljedicu dobivenu analizom pogreške metode najmanjih kvadrata i pregled ostalih metoda za rješavanje sustava 2.4.

Analize pogreške metode najmanjih kvadrata

Uz oznake kao do sada, neka $\bar{\mathbf{y}}$ predstavlja prave udaljenosti između satelita i promatranog entiteta i $\hat{\mathbf{y}}$ izračunate psudo-udaljenosti. Vrijedi $\hat{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y}$. Promatramo idealan slučaj. Neka je metoda najmanjih kvadarata konvergirala k $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{x}'_k = \hat{\mathbf{x}}$ je rješenje dobiveno metodom najmanjih kvadrata uz $\delta = 0$ i $\forall m \geq k', \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_{m+1}$. Uvrštavanjem $\mathbf{x}_k := \hat{\mathbf{x}}$ i $\hat{\mathbf{y}}$ u jednadžbu 3.14 dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x_{k+1}} &= \mathbf{x_k} - (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T \mathbf{p}(\mathbf{x_k}) \\
\mathbf{x_{k+1}} - \mathbf{x_k} &= -(J_k^T J_k)^{-1} J_k^T \mathbf{p}(\mathbf{x_k}) \\
0 &= -(J_k^T J_k)^{-1} J_k^T \mathbf{p}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) \\
0 &= (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T (\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) - (\bar{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y}))
\end{aligned}$$

Matica J_k predstavlja funkciju koja ovisi o parametru $\mathbf{x}$ i nije konstantna. Kako se pretpostavlja da je $\Delta\mathbf{x}$ mali, $J := J_k$ se može smatrati gotovo konstantnom u susjedstvu od $\bar{\mathbf{x}}$ radijusa $\Delta\mathbf{x}$. Stoga se $\mathbf{h}$ u okolini točke $\bar{\mathbf{x}}$ može linearizirati na sljedeći način: $\mathbf{h}(\mathbf{x} + \delta) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + J\delta, \delta > 0$ Dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &= (J^T J)^{-1} J^T (\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}) + J\Delta\mathbf{x} - (\bar{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y})) \\
0 &= (J^T J)^{-1} J^T (J\Delta\mathbf{x} - \Delta\mathbf{y}) \\
(J^T J)^{-1} J^T J\Delta\mathbf{x} &= (J^T J)^{-1} J^T \Delta\mathbf{y} \\
\Delta\mathbf{x} &= (J^T J)^{-1} J^T \Delta\mathbf{y}
\end{aligned}$$

Ukoliko pretpostavimo normalnost pogreške izračunavanja pseudo-udaljenosti, $\Delta\mathbf{y} \sim N(0, \Sigma)$ slijedi

$$\Delta\mathbf{x} \sim N(0, (J^T J)^{-1} J^T \Sigma J (J^T J)^{-1}) \tag{3.16}$$

Uz $\Sigma = \sigma^2 I$, $\Delta\mathbf{x} \sim N(0, \sigma^2 (J^T J)^{-1})$. U kontekstu satelitske navigacije, $(J^T J)^{-1}$ se naziva DOP matrica (engl. Dilution of Precision). Iz DOP matrice moguće je izvesti različite mjere kvalitete "zviježđda" satelita u danom trenutuku za danu poziciju.

1. GDOP $= \sqrt{tr(J^T J)^{-1}}$
2. PDOP $= \sqrt{tr((J^T J)^{-1}_{(1:3,1:3)})}$
3. HDOP $= \sqrt{tr((J^T J)^{-1}_{(1:2,1:2)})}$
4. VDOP $= \sqrt{(J^T J)^{-1}_{(3,3)}}$
5. TDOP $= \sqrt{(J^T J)^{-1}_{(4,4)}}$

Opširnije o mjerama kvalitete "zviježđda" moguće je naći u dodatku C.

Uz dane pretpostavke Jakobijeva matrica funkcije $\mathbf{h}$, J može reći mnogo o kvaliteti određivanja položaja za sustav jednadžbi 2.4, veličini pogreške određivanja. Izračuni gornjih mjera su onoliko točni koliko su pretpostavke o jednakosti varijanci za $\Delta\mathbf{y}$ i $\Delta\mathbf{x}$ istinite.

3.2 Metoda pomoću zatvorene formule

3.3 Metoda najbližeg susjeda

3.4 Vjerojatnosne metode

Poglavlje 4

Dizajn i izvedba algoritma, procjena točnosti

Kratki opis koraka koje smo napravili prilikom izvedbe.

Zahtjevi algoritma

Ulaz (U rinex) + uzorak za usporedbu(RINEX)

RINEX

-objašnjenje pojma + primjeri. + otkuda nam.

Programski određen GPS prijemnik

+zašto i kako smo ga koristili. i dobili podatke. (User manual?)

Izvedba

R kod

Procjena točnosti

+uočene pogreške, uvjetovanost matrice.

4.1 Poboljšani algoritam i njegova izvedba

Numerička metoda koja dovodi do poboljšanja

Zašto , kako smo došli do toga!

Izvedba

R kod

Procjena točnosti

kako već

4.2 Usporedba osnovnog i poboljšanog algoritma

+ zaključak zašto je bolji.

4.3 Zaključak

Bibliografija

[1] Simo Ali-Löytty, Jussi Collin, Helena Leppäkoski, Hanna Sairo i Niilo Sirola, *Mathematics and methods for Positioning*, 2008, http://math.tut.fi/courses/MAT-45806/mathematics_and_methods_for_positioning_2008.pdf [Online: accessed 25. lipnja 2017.].

[2] Anon., *Vulnerability assessment of the transportation infrastructure relying on the Global Positioning System*, John A. Volpe National Transportation Systems Center, Tech. Rep. (2001).

[3] DANA, P. H., *Global positioning system overview*, http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/, 1994, [Online; accessed 9-Feb-2017].

[4] J. Sanz Subirana, J.M. Juan Zornoza and M. Hernández-Pajares, *Fundamentals and Algorithms*, sv. 1, May 2013, http://gage.upc.edu/sites/default/files/TEACHING_MATERIAL/GNSS_Book/ESA_GNSS-Book_TM-23_Vol_I.pdf[Online; accessed 25. lipnja 2017.].

[5] United States military, *GLOBAL POSITIONING SYSTEM STANDARD POSITIONING SERVICE SIGNAL SPECIFICATION*, http://www.gps.gov/technical/ps/1995-SPS-signal-specification.pdf, 1995, [Online; accessed 30-Jan-2017].

[6] PMF, *Redovi potencija i Taylorovi redovi*, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/analiza/files/ch3_3.pdf, 2009, [Online; accessed 9-Feb-2017].

Sažetak

Satelitsko određivanje položja predstavlja temeljnu tehnologiju rastućeg broja tehnoloških i društveno-ekonomskih sustava. Kvaliteta njihovih usluga određena je točnoću procjene položja satelitskim sustavima. Programski određen radioprijamnik za satelitsku navigaciju procesira signale za određivanje položja i podatke iz navigacijske poruke u tri osnovne domene: radiofrekvencijskoj, u domeni osnovnog frekvencijskog područja te u domeni navigacijske primjene. Ovaj rad analizira postupak procjene položaja u domeni navigacijske primjene. U tu svrhu, koriste se na osobnom računalu izveden programski određen GPS prijamnik i ulazni podatci o opaženim pseudoudaljenostima spremljeni u RINEX podatkovnom formatu. Analiza korištenog algoritma procjene položaja temelji se na izmjerenim pseudoudaljenosti (Sanz Subirana et al, 2013, Chapter 6.1) te se otkrivaju potencijalne slabosti algoritma s učincima na točnost procjene položja. Na kraju, predlažu se poboljšanja algoritma te ih se izvodi u programskom okruženju R. Poboljšanja algoritma su vrednovana komparativnom analizom obilježja poboljšanog i izvornog algoritma.

Summary

In this ...

Životopis

Dana ...

Dodatak A

Taylorov red potencija

Primjetimo kako smo na stranici 21 pretpostavili kako će za rezidualnu funkciju $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ postojati njezin razvoj u Taylorov red oko svake točke $\mathbf{x_k}$. Ipak, Taylorov red nije definiran za svaku funkciju na $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. Prilikom primjene Iterativne metode najmanjih kvadrata, treba zahtjevati da funkcija $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ i točka x_k zadovoljava uvjete definicije razvoja funkcije u Taylorov red oko točke x_k [6].

Definicija A.0.1. *Naka je $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(\mathbf{I})$ definirana na otvorenom intervalu $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $c \in \mathbf{I}$. Red potencija*

$$T\left[f, c\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} \left(x - c\right)^n \tag{A.1}$$

*nazivamo **Taylorov red** funkcije f oko točke c.*

Također, pretpostavlja se kako je

$$\mathbf{p}(\mathbf{x_{k+1}} + \Delta\mathbf{x}_k) = T\left[\mathbf{p}, x_k\right] \tag{A.2}$$

što općenito nije točno. Naime, Taylorov red $T\left[f, c\right]$ funkcije $f \in C^\infty(\mathbf{I})$ nužno ne konvergira za svaki $x \neq c, x \in \mathbf{I}$ ili može konvergirati prema nekoj drugoj funkciji. Uvjete pod kojima zaista vrijedi A.2 opisani su teoremima u nastavku.

Definicija A.0.2 (Analitička funkcija)**.** *Za $f \in C^\infty(\mathbf{I})$ kažemo da je **analitička u točki** $c \in \mathbf{I}$ ako njezin Taylorov red:*

$$T\left[f, c\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} \left(x - c\right)^n$$

ima radijus konvergencije $R > 0$ i ako postoji $0 < \delta \leq R$ takav da vrijedi

$$f(x) = T\left[f, c\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} \left(x - c\right)^n, \forall x \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle \cap \mathbf{I}$$

U oznaci: $f \in C^{\omega}(\mathbf{I})$.

Teorem A.0.3. *Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - c\right)^n$ red potencija s radijusom konvergencije $R > 0$. Za $\mathbf{I} := \langle c - R, c + R\rangle$, funkcija $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - c\right)^n \tag{A.3}$$

je analitička na čitavom $\mathbf{I}$. Nadalje, za svaki $\alpha \in \mathbf{I}$ pripadni Taylorov red

$$T\left[f, \alpha\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} \left(x - \alpha\right)^n \tag{A.4}$$

ima radijus konvergencije $\rho \leq R - (c - \alpha)$ i vrijedi

$$f(x) = T\left[f, \alpha\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} \left(x - \alpha\right)^n \tag{A.5}$$

Teorem A.0.4. *Naka je $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^{\infty}(\mathbf{I})$ definirana na otvorenom intervalu $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je $f \in C^{\omega}(\mathbf{I}$ ako i samo ako za svaki $c \in \mathbf{I}$ postoje $\delta > 0$ i konstante $C > 0$ i $r > 0$ takve da za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi:*

$$\left| f^n(x) \leq C \frac{n!}{r^n} \right| \forall x \in \mathbf{J} := \langle c - \delta, c + \delta\rangle \cap \mathbf{I} \tag{A.6}$$

U tom slučaju $f(x) = T\left[f, c\right](x)\ \forall x \in \langle c - r, c + r\rangle \cap \mathbf{J}$.

Za primjenu iterativne metode najmanjih kvadrata $\mathbf{p}$ mora biti klase $C^{\infty}(\mathbf{I})$ gdje je $\mathbf{I}$ unija otvorenih okolina oko svih izračinatih $\mathbf{x}_k, k \in \mathbb{N}$, osim zadnjega. Također, otvorena okolina oko $\mathbf{x}_k$ mora barem sadržavaki otvorenu kuglu $K(\mathbf{x}_k, \Delta\mathbf{x}_k)$ i za $\mathbf{p}$ mora vrijediti teorem A.0.3 ili A.0.4.

Dodatak B

Jakobijeva matrica funkcije h, J

Iz jednakosti 3.8 i $J = \mathbf{p}(\mathbf{x})$ dobivamo

$$J = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \tag{B.1}$$

Za

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} ||(s_1 - \mathbf{x}_{1:3})|| \\ ||(s_2 - \mathbf{x}_{1:3})|| \\ ||(s_3 - \mathbf{x}_{1:3})|| \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

dobivamo

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} ||(s_1 - \mathbf{x}_{1:3})|| \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} ||(s_2 - \mathbf{x}_{1:3})|| \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} ||(s_3 - \mathbf{x}_{1:3})|| \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{(s_1 - \mathbf{x}_{1:4})^T}{||(s_1 - \mathbf{x}_{1:3})||} \\ \frac{(s_2 - \mathbf{x}_{1:4})^T}{||(s_1 - \mathbf{x}_{1:3})||} \\ \frac{(s_3 - \mathbf{x}_{1:4})^T}{||(s_1 - \mathbf{x}_{1:3})||} \end{bmatrix} = (J_n(1:3, 1:3)) \tag{B.3}$$

za $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_n$

Dodatak C

Mjere kvalitete "zviježđda"