МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АПУ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2

по дисциплине «Корреляционный метод измерения задержки сигнала»

Тема: Матричные преобразования и трехмерная графика

Студент гр. 2392	___________________	Жук Ф.П.
Преподаватель	___________________	Каплун Д.И.

Санкт-Петербург
2024

Цель работы: освоение специфики матричных преобразований MATLAB и сравнительный анализ различных форм графического отображения результатов.

Теоретические положения. *Корреляция* (correlation), и ее частный случай для центрированных сигналов – *ковариация* – это мера схожести двух сигналов (Рис. 3.4). Приведем один из вариантов использования корреляционной функции. Допустим, нам надо найти в тексте некоторый символ. Скользя по тексту, прикладываем символ к каждой букве, проверяя их сходство. Аналогично решается задача обнаружения некоторой последовательности известной формы и конечной длины T в принимаемом сигнале $y(t)$.

Для поиска этой последовательности в скользящем по сигналу $y(t)$ временном окне длиной T вычисляется интеграл от произведения процессов $y(t)$ и $x(t)$:

$$Z_{xy} = \int_0^T x(t) * y(t)\,dt$$

В дискретной форме Z есть *скалярное произведение* векторов X и Y:

$$Z_{xy} = X * Y = \sum_{i=1}^{N} x(i) \cdot y(i)$$

Скалярное произведение используется как мера взаимосвязи двух векторов (процессов). Равенство нулю скалярного произведения означает крайнюю меру их независимости – их ортогональность. Чтобы проверить взаимосвязь векторов при различных сдвигах одного из них на время τ, необходимо Z_{xy} вычислять многократно, для каждого τ. Если еще ввести нормирующий множитель $1/T$ для исключения зависимости Z от длины реализации T, получим выражение, называемое *взаимной корреляционной функцией* (ВКФ):

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{\vartheta}^{\vartheta+T} x(t) * y(t+\tau)\,dt,$$

Аналогично для случая непрерывного сигнала:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=\vartheta}^{\vartheta+N} x(i) * y(i+\tau)$$

Теперь скалярное произведение превратилось в *свертку* двух векторов.

$R(\tau)$ широко используется в различных областях человеческой деятельности. Например, в медицине корреляционная функция позволяет обнаружить минимальные изменения состояния организма от воздействия какого-либо неблагоприятного фактора или оценить длительность воздействия лекарства на пациента. Социологи используют ВКФ для оценки влияния на население новых законодательных актов. Астрономам ВКФ позволила обнаружить периодичность в изменении свечения звезд (пульсары). В приведенном примере поиска в тексте заданного символа корреляционная функция использовалась для распознавания или обнаружения сигнала. Еще более часто корреляционная функция используется для определения времени прихода (задержки) сигнала. Поскольку максимальное сходство (следовательно, и максимальное скалярное произведение) будет в момент полного совпадения $x(t)$ и его копии в $y(t)$, по положению максимума корреляционной функции можно судить о времени прихода сигнала. Этот метод лежит в основе измерения расстояния до цели (ракеты, самолета), определения высоты полета самолета или глубины погружения подводной лодки. Чтобы определить направление прихода радиосигнала (задача пеленгации), определяют разность времени прихода сигнала пеленгуемого объекта на две разнесенные антенны. Во всех этих примерах производится определение скалярного произведения сигнала $x(t)$ *с собственной копией*, скользящей по аргументу, а функцию $R_{xx}(\tau)$ называют *автокорреляционной функцией – АКФ*:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)*x(t+\tau)dt.$$

Автокорреляция позволяет оценить среднестатистическую зависимость текущих отсчетов сигнала от своих предыдущих и последующих значений (так называемый радиус корреляции значений сигнала), а также выявить в сигнале наличие периодически повторяющихся элементов.

В корреляционном анализе часто вид корреляционной функции не имеет значения: интерес представляет один из ее параметров. В приведенных выше примерах хотя и вычисляется вся корреляционная функция, однако в первой задаче анализируется только величина максимального значения, а во второй – положение ее максимума на временной оси. Для анализа длительности лечебного воздействия прививок в медицине анализируют ширину корреляционной функции, и т.д.

КФ, вычисленная по центрированному значению сигнала $x(t)$, представляет собой *ковариационную* функцию сигнала:

$$C_{xy}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T (x(t)-m_x)*(y(t+\tau)-m_y)dt$$

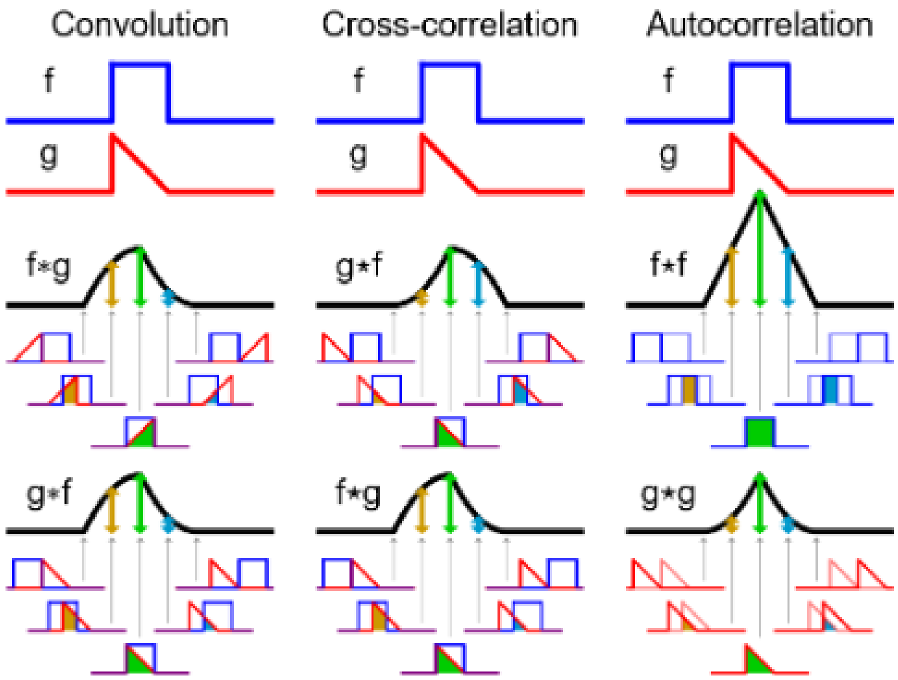


Рис. 1 - Сравнение операций свертки, кросс-корреляции и автокорреляции

Ход работы.

1. В качестве решаемой задачи рассмотрим задачу измерения высоты полета самолета. Проще всего послать вертикально вниз короткий радиоимпульс и измерить при помощи корреляционной функции задержку импульса, отраженного от земли.

   Создадим 2 импульса рисунок 1.1.

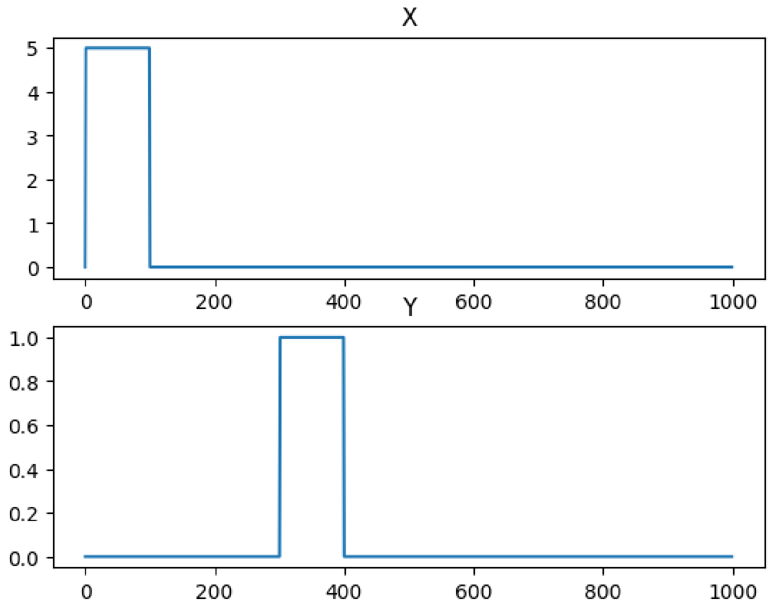


Рис. 1.1 – Графики сигналов

Построим график $R_{xy}(t)$ (рис. 1.2)

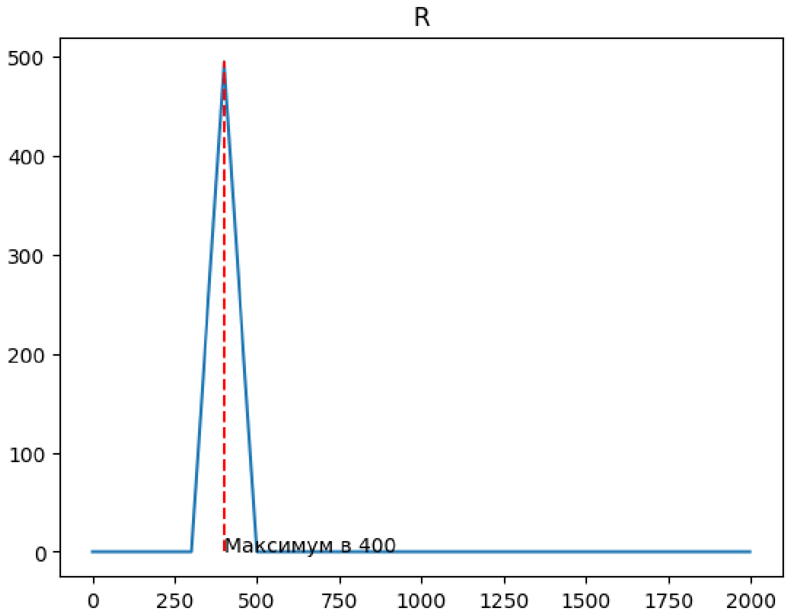


Рис. 1.2 – График $R_{xy}(t)$

Усложним сигнал добавив дополнительные импульсы (рис. 1.3)

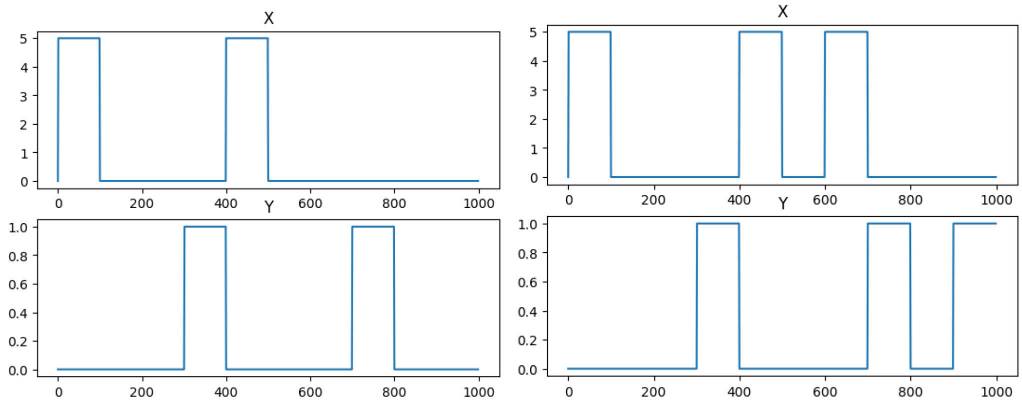


Рис. 1.3 – Графики сигналов с 2-мя и 3-мя импульсами

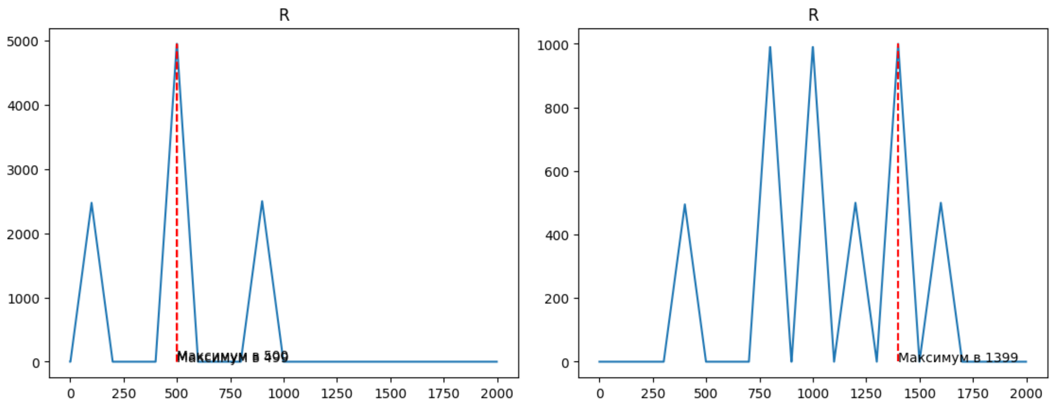


Рис. 1.2 – Графики $R_{xy}(t)$ сигналов с 2-мя и 3-мя импульсами

2. Создадим еще более сложный сигнал, в котором нет периодических повторов импульсов. Сымитируем задержку распространения (рис. 2.1).

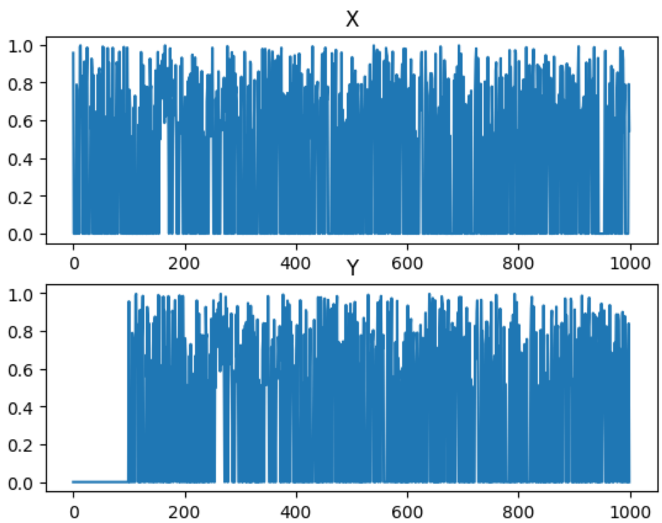


Рис. 2.1 - Сложный сигнал

Получим графики $R_{xx}(t)$ и $C_{xy}(t)$.

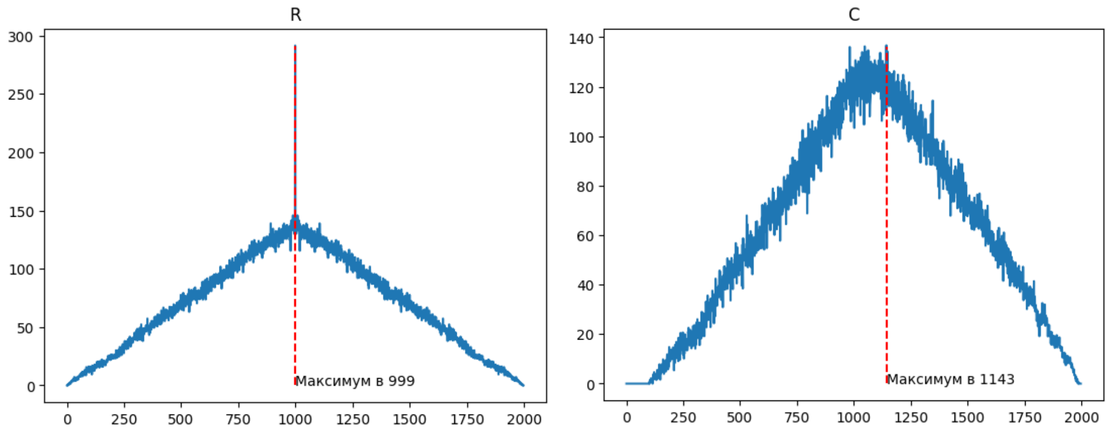


Рис. 2.2 - графики $R_{xx}(t)$ и $C_{xy}(t)$.

Автокорреляция (R_{XX}) показывает, как сигнал совпадает сам с собой с учетом смещения. Из-за чего формируется пик при полном совпадении. Ковариация (C_{XY}) показывает, как один сигнал совпадает с другим вариантом сигнала.

3. Проделаем ряд экспериментов: наложим на принятый (задержанный) сигнал шум с соотношением ОСШ от −15 до 15 дБ. Построим график (рис. 3.1) вероятности правильного определения расстояния при заданном ОСШ.

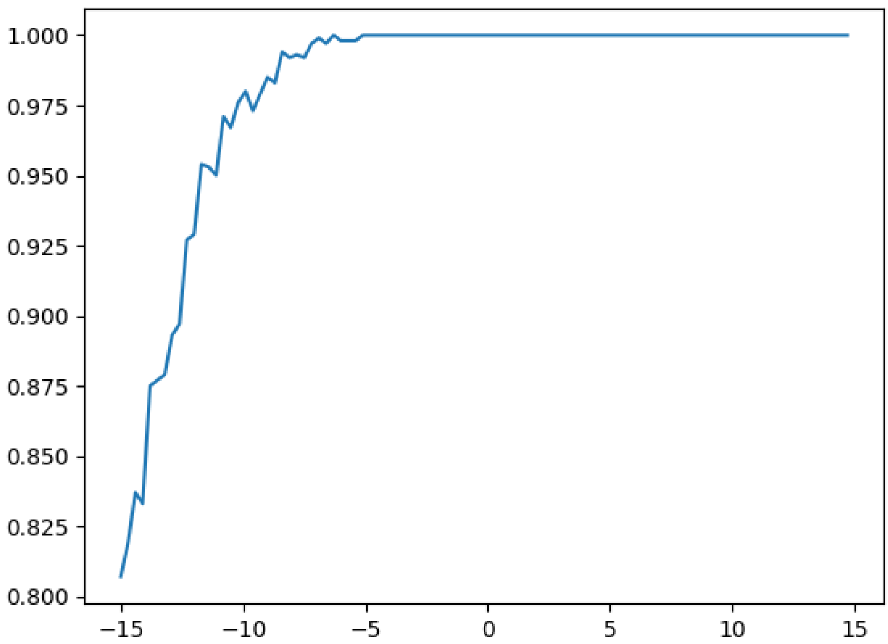


Рис. 3.1 - график вероятности правильного определения расстояния

Из чего следует, что минимальное соотношение SNR , при котором еще возможно измерение задержки, примерно равно -5 Дб. В качестве критерия выступало верное определение задержки между сигналами.

Так же рассмотрим критерий корреляции сигнала с шумом и без (рис. 3.2).

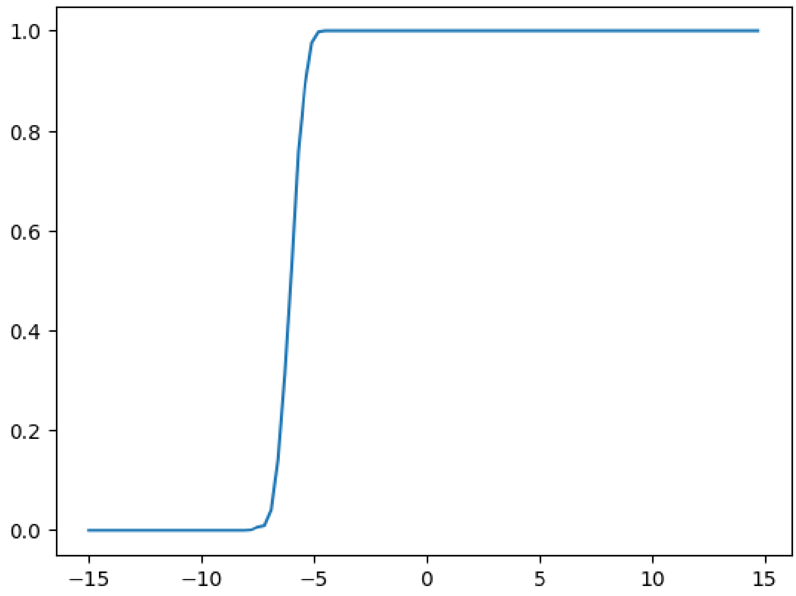


Рис. 3.2 - график вероятности правильного определения расстояния

4. В качестве посылаемого сигнала возьмем отрезок синусоиды (рис. 4.1)

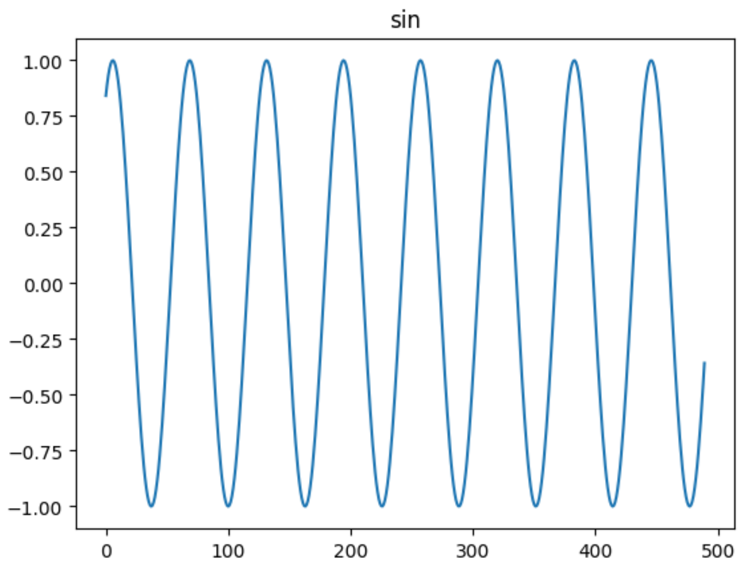


Рис. 4.1 - Синус

Наложим на сигнал шум (рис. 4.2)

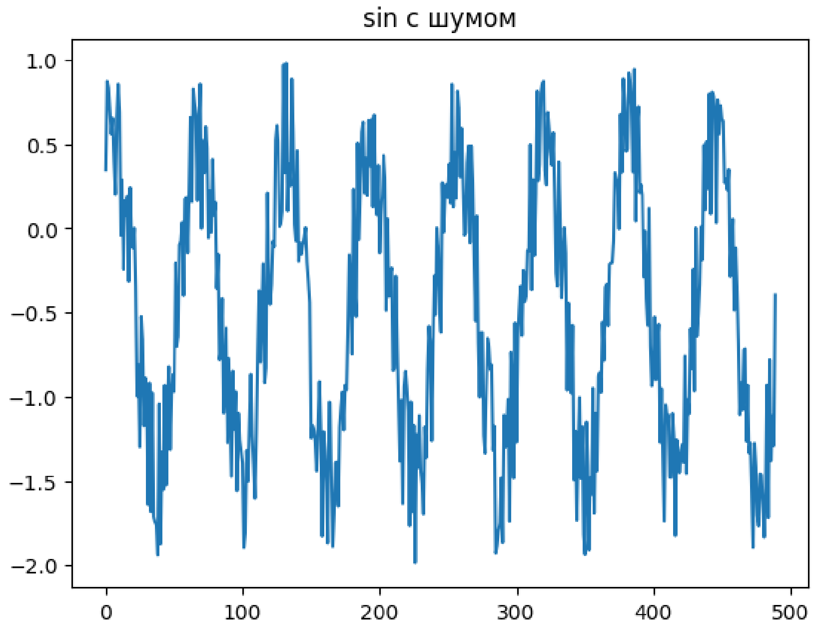


Рис. 4.2 – Синусойда с шумом

Построим график R_{xy} (t) (рис. 4.3)

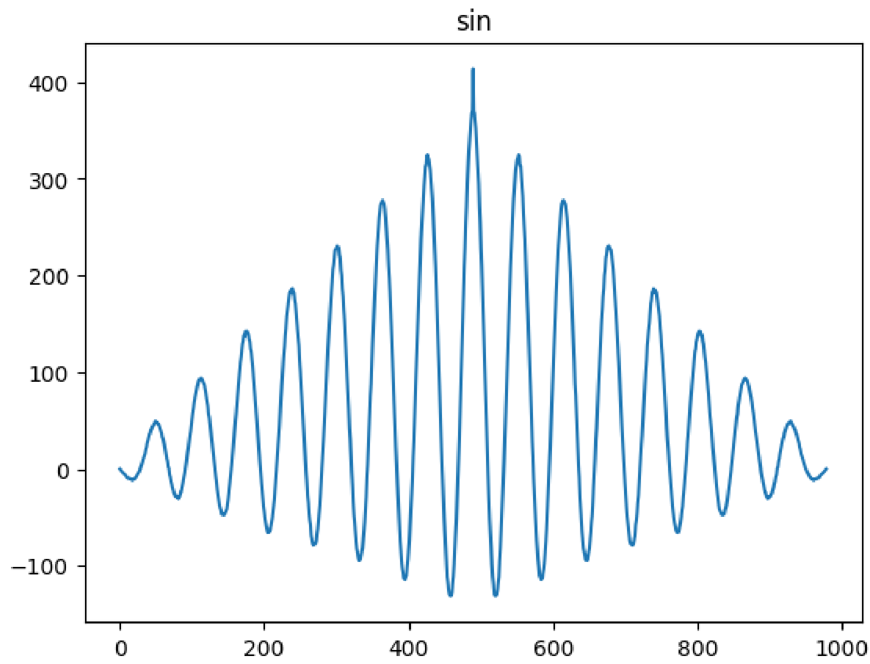


Рис. 4.3 - график R_{xy} (t)

Сравнив рисунки 4.4 и 1.2, можно увидеть что у синуса имеется более ярко выраженный пик, чем у прямоугольного квадрата. Из-за чего легче будет определить задержку при синусоидальном сигнале.

5. Используем код Баркера (рис. 5.1) и шумоподобный (rand) с длиной 13 символов сигнал (рис. 5.2) для анализа автокорреляционных свойств сигнала.

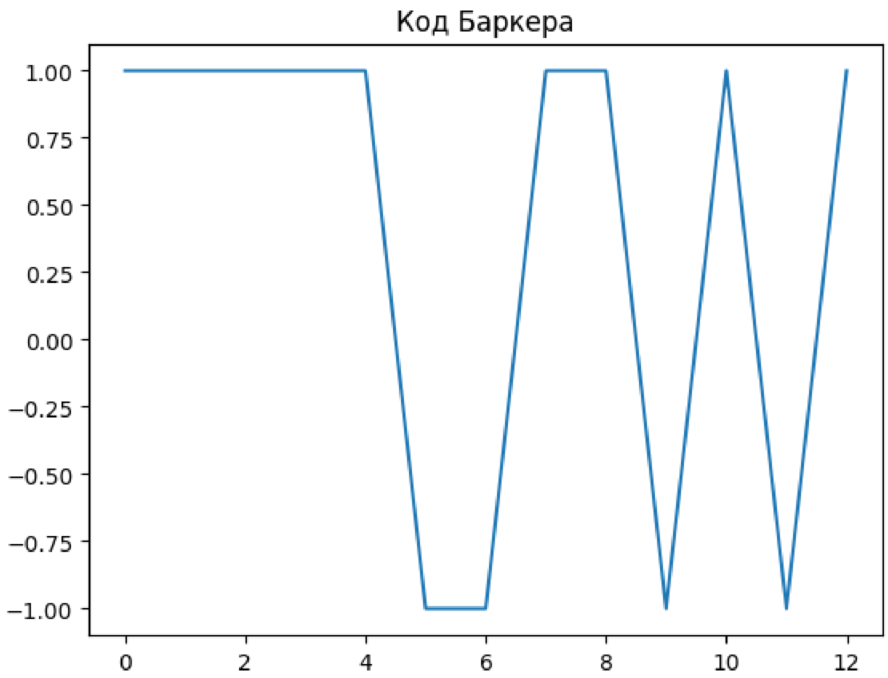


Рис. 5.1 – Код Баркера

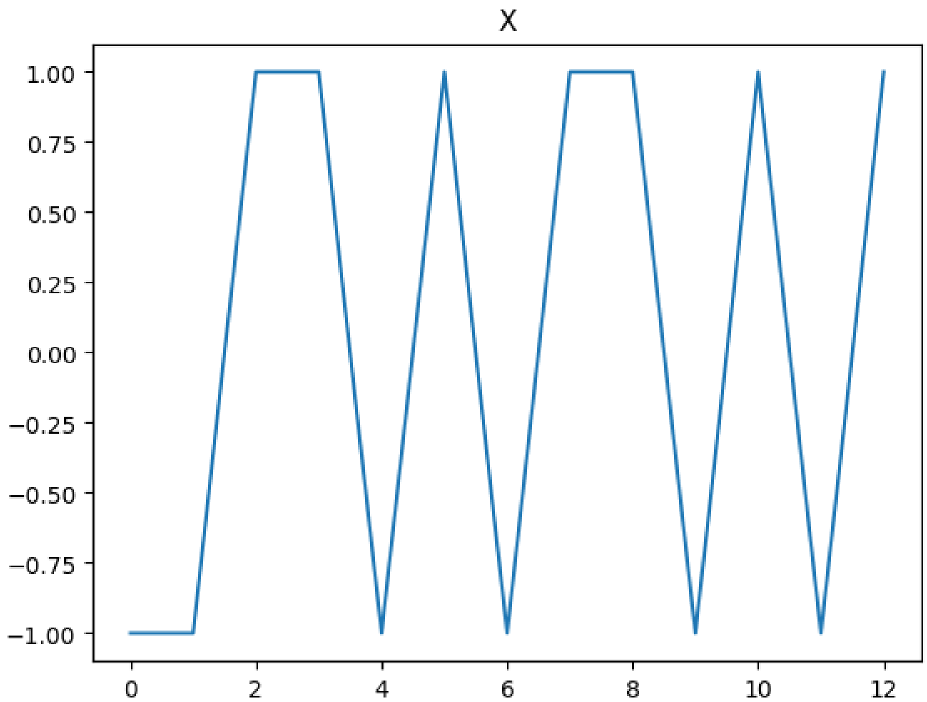


Рис. 5.2 – Случайный сигнал длиной 13

Применим на данных функциях автокорреляцию (рис. 5.3)

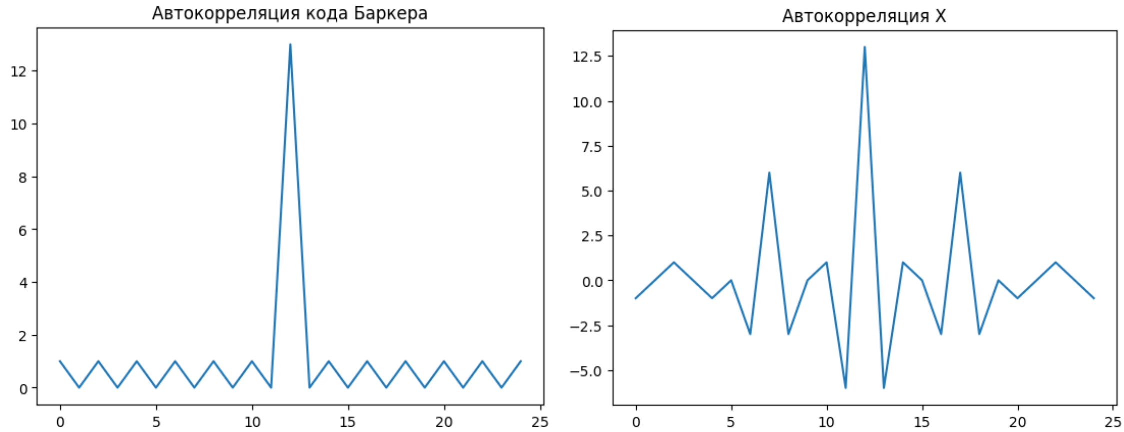
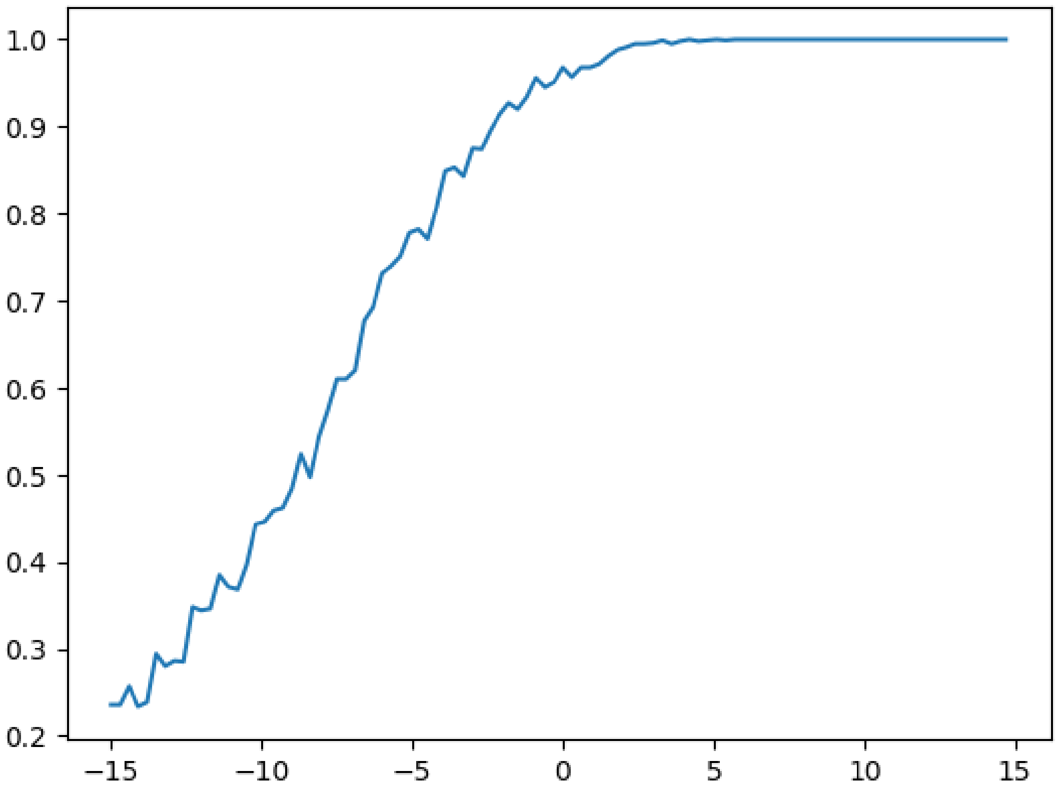


Рис. 5.3 – Автокорреляция сигналов

Сигнал автокорреляции кода Баркера имеет более выраженный пик, что даёт нам преимущество в определении задержки сигнала, чем при случайных значениях.

6. Повторим опыт из пункта 3, но используя код Бракера и шумоподобный сигнал.



\

Рис. 6.1 - график вероятности правильного определения задержи используя код Баркера

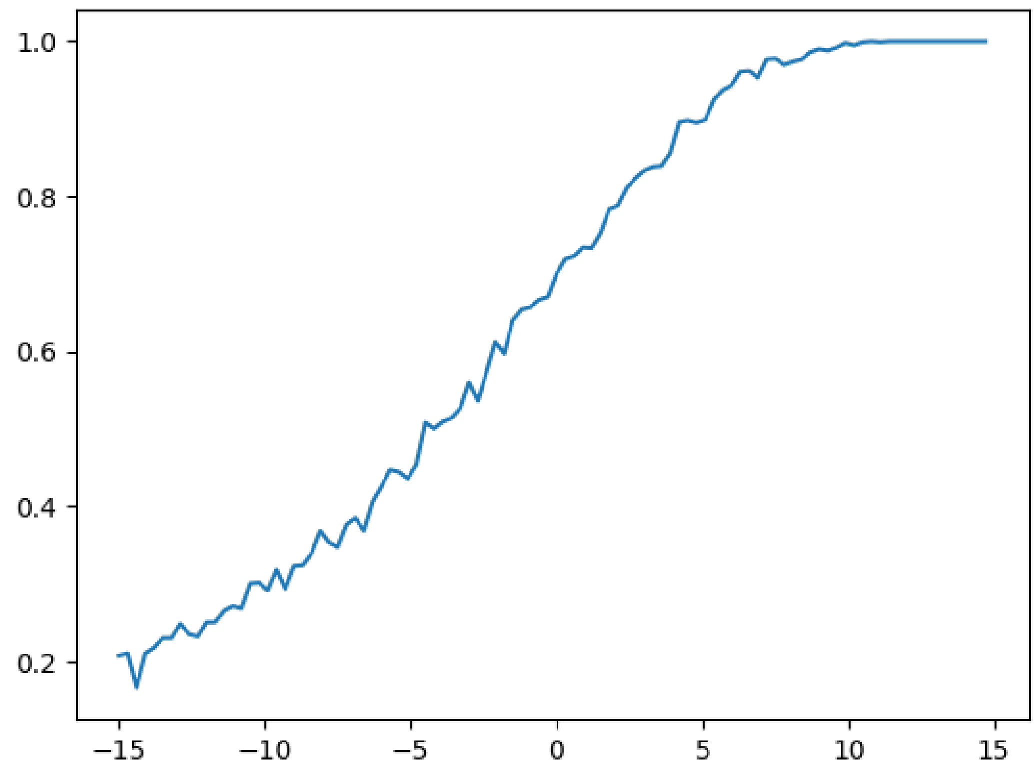


Рис. 6.2 - график вероятности правильного определения задержи используя шумоподобный сигнал

Проанализировав данные графики, заметим что:

- Код Бракера более устойчив к помехам чем случайный сигнал
- Минимальный ОСШ кода бракера 5 Дб
- Минимальный ОСШ шумоподобного сигнала 10 Дб

7. Найдем Е (мат.ожидание), σ, σ2 , построить гистограмму w(t) для сигналов:

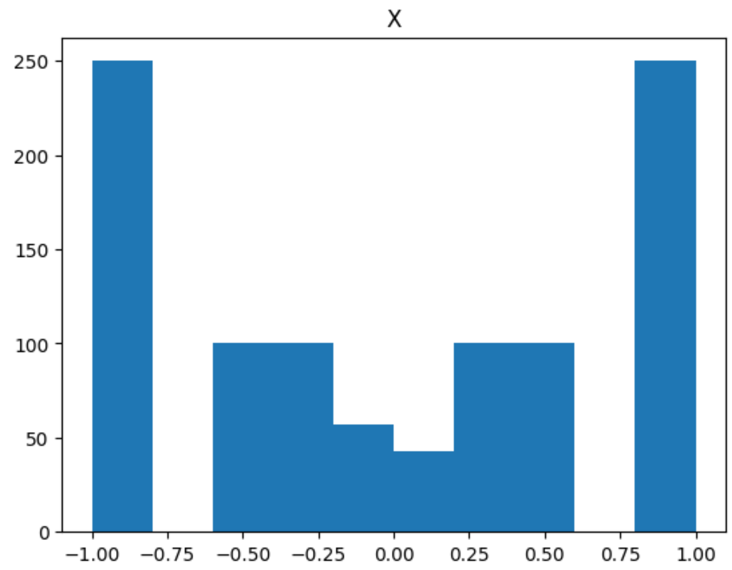
- Моногармонический: s=sin(2πf t)

При f = 5, t = [0:10:0,01]

Mean -7.993605777301127e-17

Std 0.7071067811865468

Vairance 0.4999999999999999



Гистограмма

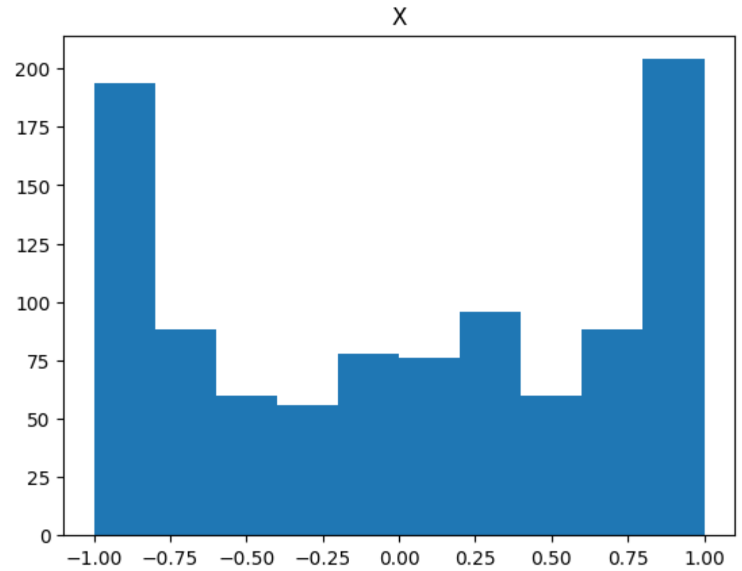
- С линейной частотой модуляцией: $s=\sin(2\pi f\, t^2)$

При f = 5, t = [0:10:0,01]

Mean 8.171241461241152e-17

Std 0.7071067811865476

Vairance 0.5



Гистограмма

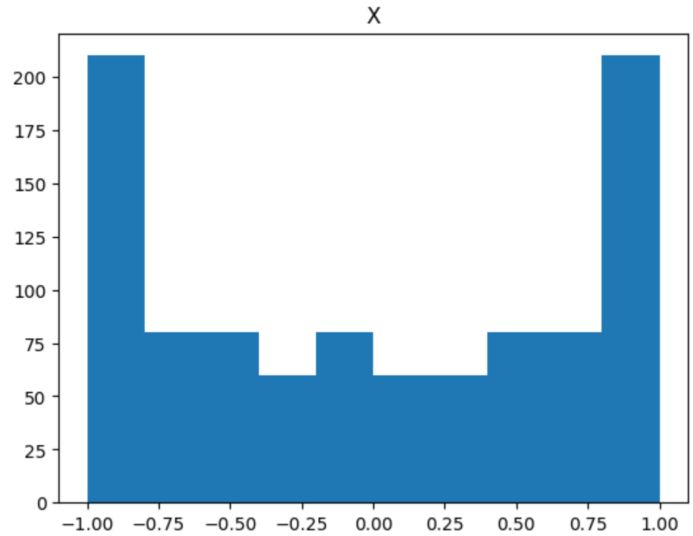
- С амплитудной модуляцией: $s=\sin(2\pi f_н\, t)*(1+ m* \sin(2\pi f_c\, t))$, где

При $f_н=1$, $f_c=10000$, m = 0.7

Mean 5.048761408943392e-14

Std 0.7071067811852684

Vairance 0.499999999998191



Гистограмма

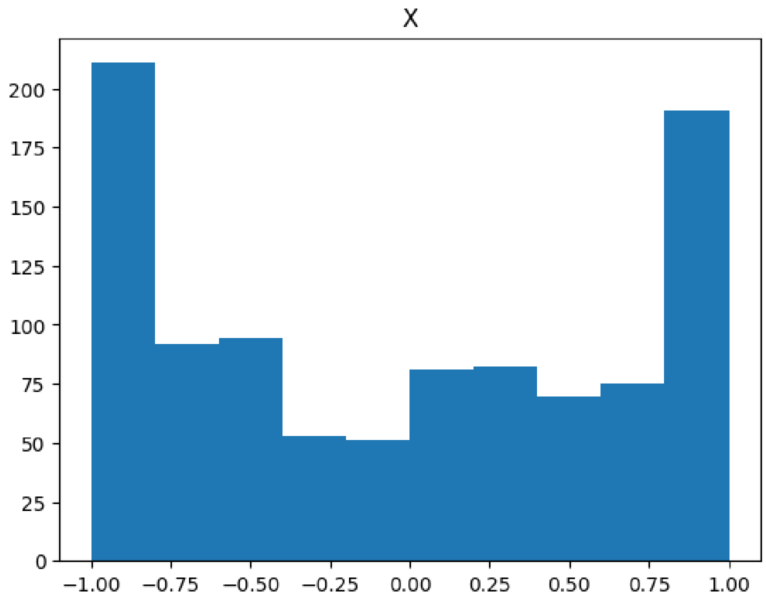
- С частотной модуляцией: s=sin(2πfc(t) t)

При $f(t) = e^t$

Mean -0.027591396022672448

Std 0.7011632301522005

Vairance 0.4916298753174677



Гистограмма

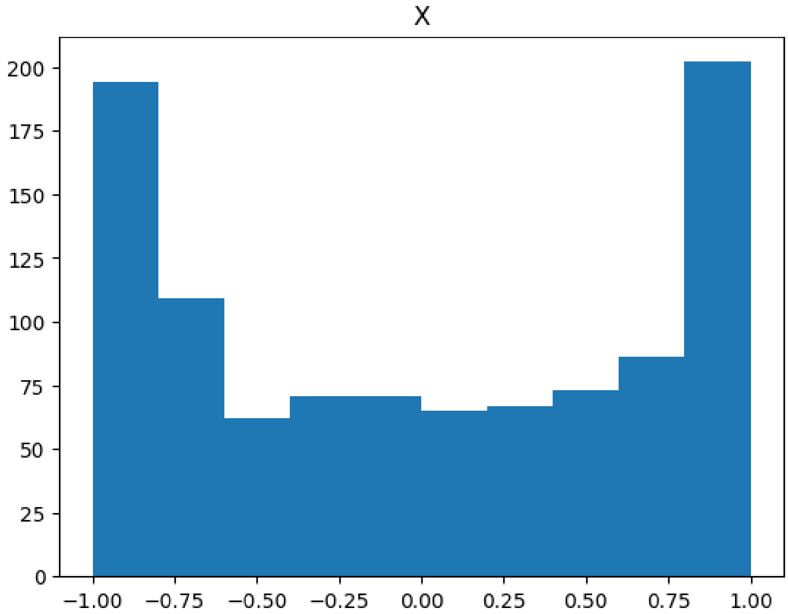
- С фазовой модуляцией: $s=\sin(2\pi f_н t+\varphi(t))$

При $f_н = 5$ $\varphi(t) = e^t$

Mean -0.004069529200334246

Std 0.7002146026047587

Vairance 0.49030048970094003



Гистограмма

Определения:

1. **Корреляция –** $\mathrm{cov}_{XY} = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}(X))(Y - \mathbf{M}(Y))] = \mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}(X)\mathbf{M}(Y),$

2. **Ковариация –** $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)],$

3. **Автокорреляция –** $R(t) = corr(X(t), X(t+k)),$ **где k - шаг**

4. **Отношение сигнал-шум (SNR) – безразмерная величина, равная отношению мощности полезного сигнала к мощности шума**

5. **ЛЧМ** $f(t) = f_0 + b \cdot t, \quad -\frac{T_c}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T_c}{2},$ **–**

где f_0 — начальная частота сигнала;
$b = (F_{\max} - f_0)/T_c;$ T_c — длительность сигнала;
$F_{\max}$ — максимальное значение частоты сигнала.

6. **АМ – u_{AM} = U_m(1+m*cos (Ωt)) * sin (ωt) . где m - коэффициент глубины модуляции,**

7. **ЧМ –**

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c \cos\left(2\pi \int_0^t f(\tau)d\tau\right) \\ &= A_c \cos\left(2\pi \int_0^t [f_c + f_\Delta u_m(\tau)]\, d\tau\right) \\ &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t u_m(\tau)d\tau\right) \end{aligned}$$

где $f_\Delta = K_f A_m$, K_f — чувствительность модулятора, A_m — амплитуда модулируемого сигнала.

8. **ФМ –** $s(t) = A\cos[2\pi f_c t + k u_m(t)],$

где A — амплитуда сигнала;
$u_m(t)$ — модулирующий информационный сигнал;
k — некоторая константа;
f_c — частота несущего гармонического сигнала;
t — время.

9. **Гистограмма – это диаграмма частот, позволяющая наглядно представить характер изменчивости данных**

10. **Теорема Котельникова – любой аналоговый сигнал может быть восстановлен с какой угодно точностью по своим дискретным отсчётам, взятым с частотой f > 2 f_c, f>2f_c, где f_c — максимальная частота, которая ограничена спектром реального сигнала; если максимальная частота в сигнале равна или превышает половину частоты дискретизации**

(наложение спектра), то способа восстановить сигнал из дискретного в аналоговый без искажений не существует

Выводы.

Значение корреляционных методов: Проведенное исследование подтвердило, что корреляционные методы являются важным инструментом для выделения сигналов на фоне шума. Они позволяют точно определять задержку, фазу, частоту и амплитудные характеристики сигналов, что находит применение в радиолокации, связи и других областях.

Скалярное произведение и его роль: В работе показано, что скалярное произведение эффективно используется для оценки сходства между сигналами. Применение взаимной и автокорреляционных функций дало возможность идентифицировать временно задержанные сигналы, что полезно для задач пеленгации и измерения расстояний.

Влияние соотношения сигнал/шум (SNR): Исследование выявило, что при высоких значениях SNR (более 10 дБ) вероятность правильного обнаружения сигнала значительно увеличивается. В условиях низкого SNR (<0 дБ) шум затрудняет выделение сигнала, что снижает точность анализа. Графическое представление зависимости вероятности правильного обнаружения от уровня SNR подтвердило эту закономерность.

Автокорреляционная функция и периодичность: Применение автокорреляции к периодическим сигналам, таким как синусоиды, показало, что даже при высоком уровне шума структура автокорреляционной функции остается неизменной. Это делает метод эффективным для выявления скрытых периодических компонентов сигналов.

Эффективность кодов Баркера: Исследование кода Баркера продемонстрировало наличие выраженного центрального пика в автокорреляции, что делает его полезным для точного определения задержки. Напротив, автокорреляционная функция случайных сигналов имела более размытый профиль, что подтверждает уникальность кода Баркера в задачах обнаружения.

Корреляционные методы в шумовых условиях: При наложении шумов с различными уровнями SNR на сигнал, основанный на коде Баркера, было замечено, что вероятность успешного обнаружения значительно возрастает с улучшением SNR. При высоких значениях SNR корреляционный пик остается четким, что упрощает идентификацию сигнала даже на фоне значительных шумов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Код на python: