

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В. И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АПУ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №3
по дисциплине «Математические основы теории систем»
Тема: Спектр. Ряд Фурье

Студент гр. 2392

Жук Ф.П.

Преподаватель

Каплун Д.И.

Санкт-Петербург

2024

Цель работы:

- Знакомство со спектральным представлением периодических и случайных процессов;
- Изучение взаимосвязи преобразований сигналов во временной и частотной областях;
- Оценка дефектов дискретного преобразования Фурье и методы их подавления.
-

Теоретические положения. Поставим задачу: представить некоторый сложный периодический процесс $x(t)$, заданный на интервале $[0, T]$, в виде суммы простых периодических функций вида $\psi_\omega(t) = A \sin(\omega t + \phi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

Периодичность $x(t)$ гарантирует, что в таком разложении будут присутствовать только гармоники кратных частот $\omega = n\omega_0$, n – целое, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. При $n=0$ получим постоянную составляющую, обычно записываемую в форме $\frac{a_0}{2}$, а все разложение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t) + (a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t, \end{aligned}$$

Данное разложение называется *рядом Фурье*.

Коэффициенты этого ряда рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

Если воспользоваться формулой Эйлера $\exp(j\phi) = \cos \phi + j \sin \phi$, получим более простую запись ряда Фурье в комплексной форме:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \text{ — коэффициенты ряда Фурье или спектр}$$

Совокупность функций $e^{-jn\omega_0 t}$ называется *базисом Фурье*.

Комплексные коэффициенты F_n обычно представляют в форме $F_n = S_n e^{j\phi_n} = U_n + jV_n$, где $S_n = \sqrt{U_n^2 + V_n^2}$ — амплитудный спектр; $\phi_n = \arctg \frac{V_n}{U_n}$ — фазовый спектр; U_n — реальная составляющая спектра; V_n — мнимая составляющая спектра.

Для анализа непериодических процессов ($T \rightarrow \infty$) служит преобразование Фурье:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Широкое распространение спектрального представления сигналов объясняется следующими причинами:

- Гармонические функции — единственные, не меняющие своей формы при прохождении через линейную систему: может измениться только их амплитуда и фаза, но не форма, а, значит, не частота;
- Простота синтеза гармонического колебания — для этого достаточно иметь колебательный контур или любую другую резонансную систему. Разложить в спектр Фурье оптический сигнал может любая двояковыпуклая линза, радиосигналы в эфире тоже представлены электромагнитными волнами — гармониками ряда Фурье;
- Графическое представление спектральных коэффициентов на частотной оси — спектра сигнала — позволяет получить наглядную картину распределения в сигнале низких и высоких частот;
- Частотные характеристики используются не только для анализа сигналов, но и для анализа свойств динамических систем.

Чтобы построить спектр с помощью ДПФ (БПФ), надо определить следующие параметры:

- количество спектральных составляющих N ;
- шаг между соседними частотами – разрешение по частоте Δf ;
- частоту дискретизации f_s ;
- минимальную (нижнюю) частоту спектра $f_{\text{нижн}}$;
- верхнюю частоту $f_{\text{верх}}$;
- временной интервал анализа T .

На самом деле, эти параметры жестко связаны друг с другом, и для однозначного построения спектра достаточно задать всего две величины.

Как правило, анализ начинается с выбора временной базы анализа T и частоты дискретизации f_s . При этом оказываются определенными и количество отсчетов сигнала $N = T \times f_s$, и минимальная частота спектра: $f_{\text{нижн}} = 1/T$. А поскольку количество спектральных коэффициентов равно количеству отсчетов сигнала N , оказываются определенными и верхняя частота преобразования $f_{\text{верх}} = f_{\text{нижн}} \times N = f_s$, и шаг между соседними частотами $\Delta f = f_{\text{нижн}}$.

Спектр сигнала (сейчас мы рассматриваем только вещественные функции) будет состоять из двух зеркально отраженных картин. Для комплексного спектра этого не происходит, однако в спектре появляются отрицательные частоты.

Теорема Котельникова – фундаментальное утверждение в области цифровой обработки сигналов, связывающее непрерывные и дискретные сигналы.

Формулировка: Любой сигнал $s(t)$, спектр которого не содержит составляющих с частотами выше некоторого значения $\omega_s = 2\pi f_s$, может быть без потерь информации представлен своими дискретными отсчетами $\{s(kT)\}$, взятыми с интервалом T , удовлетворяющим следующему неравенству:

$$T < \frac{1}{2f_s} = \frac{\pi}{\omega_s} .$$

Преобразование Фурье в дискретной форме (ДПФ) имеет и другие недостатки. Главный из них – растекание спектра. Растекание спектра (англ. spectrum

leakage) – эффект, возникающий вследствие финитности анализируемого сигнала (фактически бесконечный сигнал взвешивается финитным прямоугольным окном). Для подавления этого эффекта используют взвешивание сигнала специальными оконными функциями (окна Чебышева, Ханна, Парзена и т.д.).

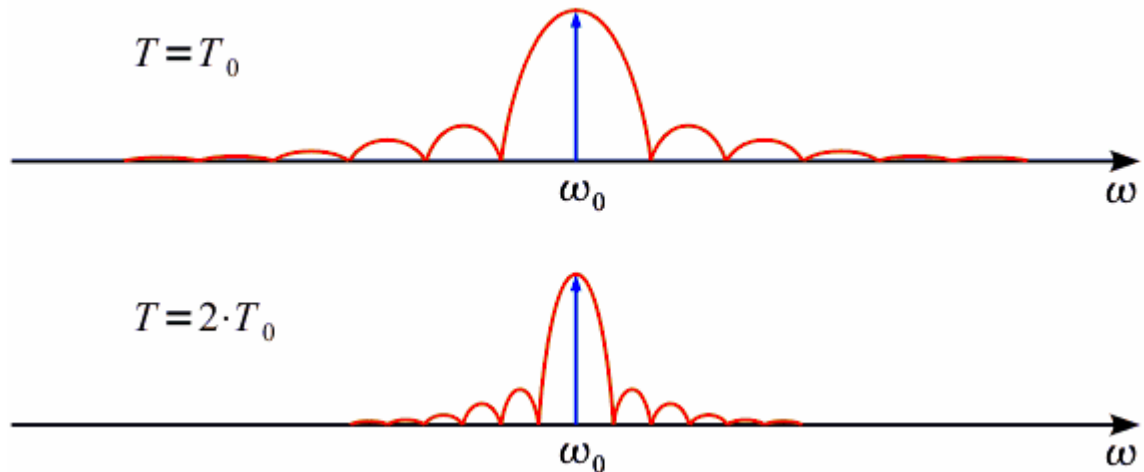


Рис. 1 - Растекание спектра

При спектральном преобразовании сигнала могут использоваться и другие – не гармонические – функции. В этом случае говорят об *обобщенном преобразовании Фурье*: $F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \psi_n(t) dt$.

Главные требования к функциям ψ_n – их *ортogonalность и полнота*.

Два вектора X_i , X_j называют *взаимноортogonalными*, если их скалярное произведение Y равно нулю: $X_i = [x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(N)]$; $X_j = [x_j(1), x_j(2), \dots, x_j(N)]$; $Y = \sum_{n=1}^N X_i(n) \cdot X_j(n) = 0$.

Если при этом норма каждого вектора равна 1: $\|Y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N X_i(n) \cdot X_i^*(n)} = 1$

, векторы называют *ортонормальными*.

Для любого вектора размерности (длины) N можно найти N и только N ортogonalных векторов. Такой набор векторов называют *полной ортонормальной системой*, или *базисом* N -мерного линейного пространства.

Рассмотрим для примера два базиса в пространстве $N = 2^3$

Первый базис задается матрицей (Рис. 2):

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

или в графической форме (каждая функция – одна из строк матрицы W_3):

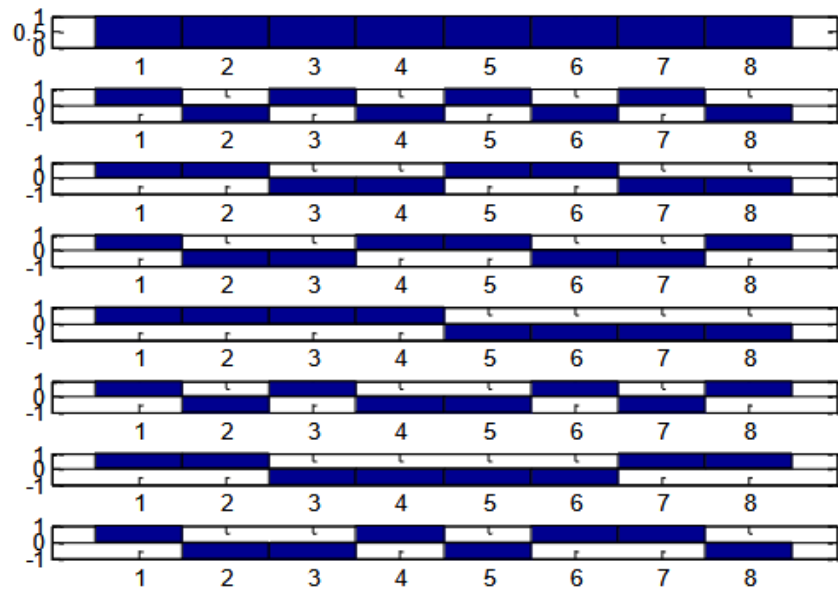


Рис. 2 – Первый базис

Второй базис зададим матрицей (рис. 3)

$A =$	0.1250	0.5026	0.4275	0.8550	0.2138	0.6917	0.4275
0.8550	0.2138	-0.2939	0.7310	-0.5000	0.3655	-0.4045	0.7310
-0.5000	0.2513	0.4755	-0.2939	-0.8090	0.4297	0.6545	-0.2939
-0.8090	0.3458	-0.3455	-0.4045	0.5878	0.5914	-0.4755	-0.4045
0.5878	0.5026	0.8090	0.8090	1.0000	-0.2939	-0.5878	-0.8090
-1.0000	0.5026	-0.8090	0.8090	-1.0000	-0.2939	0.5878	-0.8090
1.0000	0.6917	0.8090	-0.5878	-1.0000	-0.4045	-0.5878	0.5878
1.0000	0.6917	-0.8090	-0.5878	1.0000	-0.4045	0.5878	0.5878
-1.0000							

или графически:

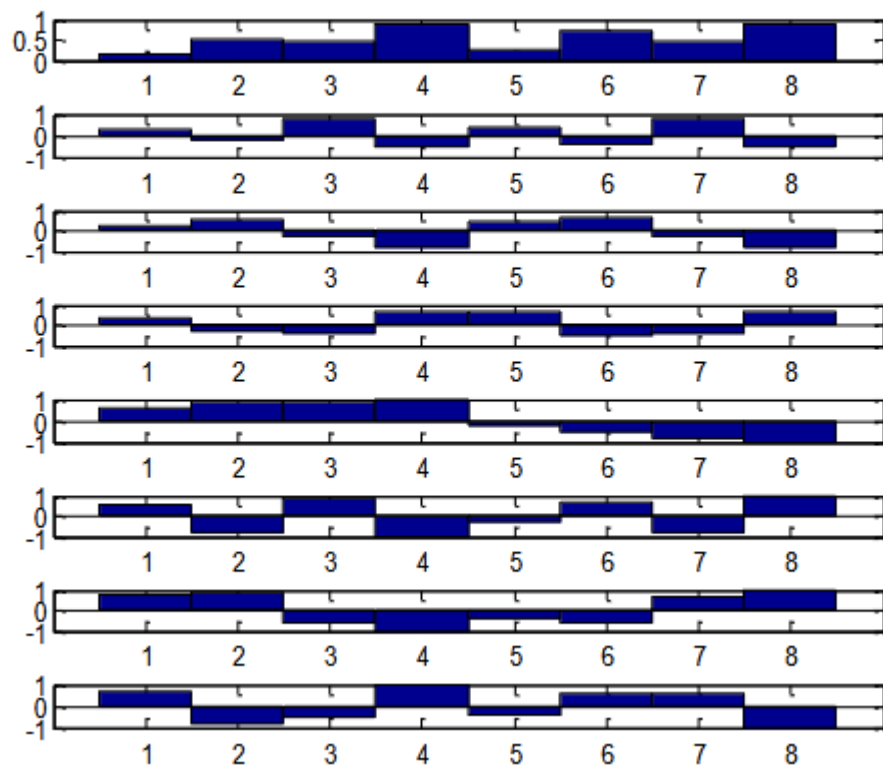


Рис. 3 – Второй базис

Сравним эти базисы. Прежде всего, бросается в глаза равенство ± 1 всех элементов матрицы W_3 . Это очень удобное свойство базисных функций: при умножении на такую функцию временные затраты минимальны. Во втором базисе это свойство потеряно. Первая строка базиса обычно служит для выделения постоянной составляющей из исследуемого сигнала и в классических базисах все ее элементы равны единице. При этом все остальные функции не реагируют на постоянную составляющую вследствие симметричности их относительно нуля. Этого во втором базисе тоже нет. Поэтому первый базис используется очень широко и носит название базиса Уолша, а второй базис кроме вас никто не видел.

Приведем еще один весьма широко используемый базис – базис Хаара (рис. 4)

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

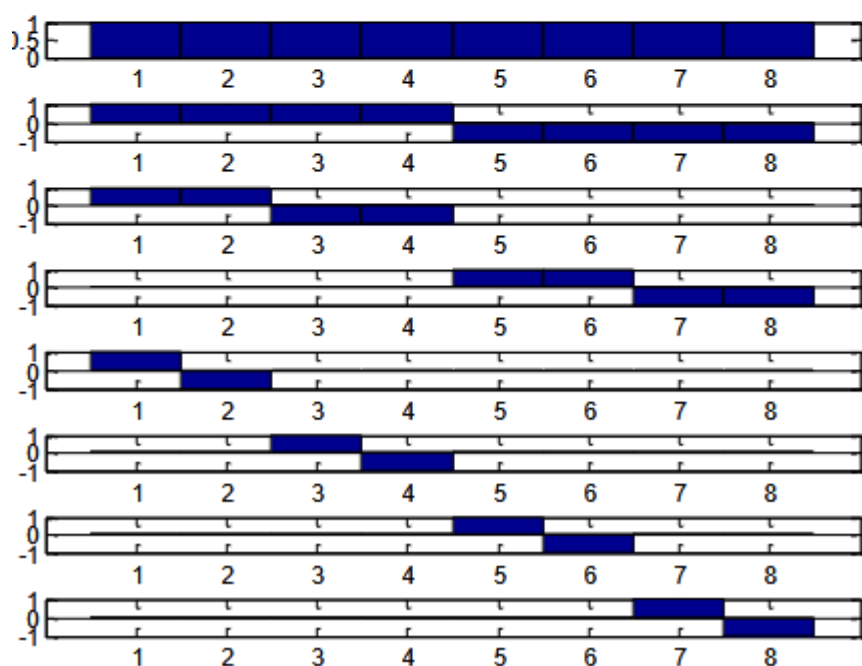


Рис. 4 – базис Хаара

Его главное достоинство – большое количество нулевых элементов. Это не только ускоряет вычисления спектра, но и обеспечивает сжатое представление сигналов с резкими перепадами. Это объясняется тем, что каждая функция (за исключением первых двух) выделяет только некоторую локальную область существования сигнала.

Для упрощения здесь базис Хаара приведен в ненормированной форме: чем уже импульс, тем меньше его энергия.

Ход работы.

1. Создадим 2 сигнала:

$$f_1 = \cos(2 * \pi * 100 * x)$$

$$f_2 = 4 * \cos(2 * \pi * 350 * x)$$

Частота дискретизации 4096, время анализа 1 секунда.

Графики сингалов (рис. 1.1):

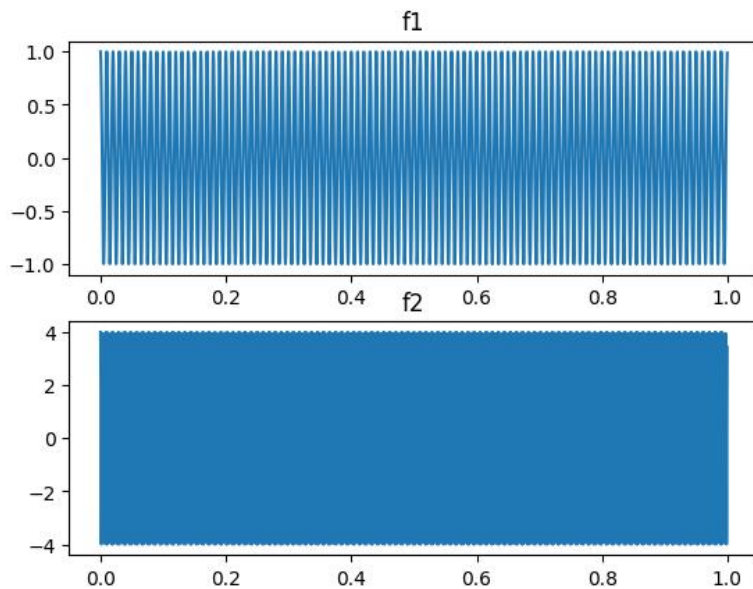


Рис. 1.1 – Сигналы

Получим модуль спектра двух сигналов, график модуля спектров (рис. 1.2).

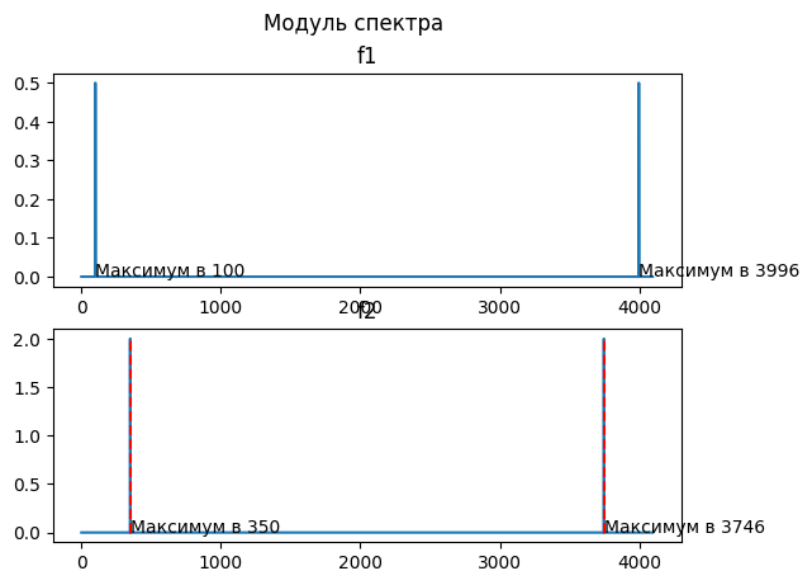


Рис. 1.2 - Модуль спектров

Номер гармоники определяется по индексу, а значение является амплитудой данной гармоники.

Пример для f1:

У нас имеются два пика это в значения 100 и 3996, следует сигнал состоит из 2 част 100 и 3996 Дб. Данные частоты имеют амплитуду 0.5 из чего можем представить сигнал как сумму двух косинусоид с данными характеристиками. График разности исходного сигнала и полученного за счет Фурье (рис. 1.3).

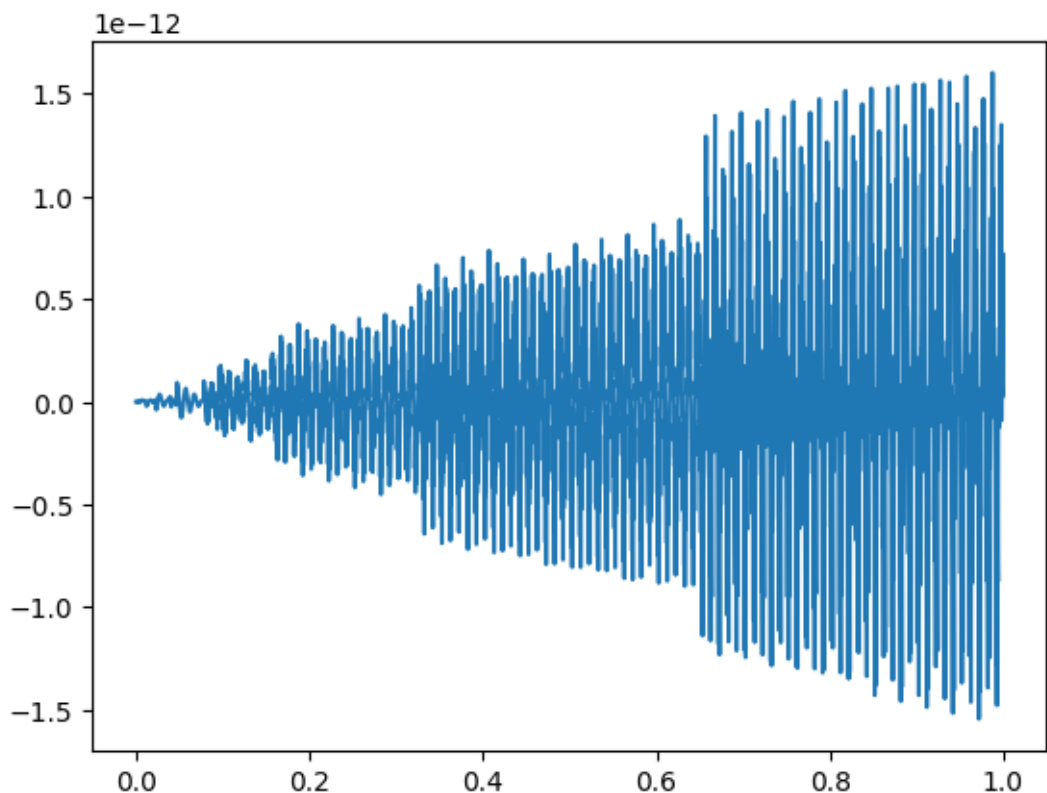


Рис. 1.3 - Разность исходного сигнала и Фурье

Из графика видно, что преобразование Фурье дало хорошую точность.

2. Создадим сигналы:

$$f_3 = f_1 + f_2$$

$$f_4 = f_1 * f_2$$

Графики сингалов (рис. 2. 1):

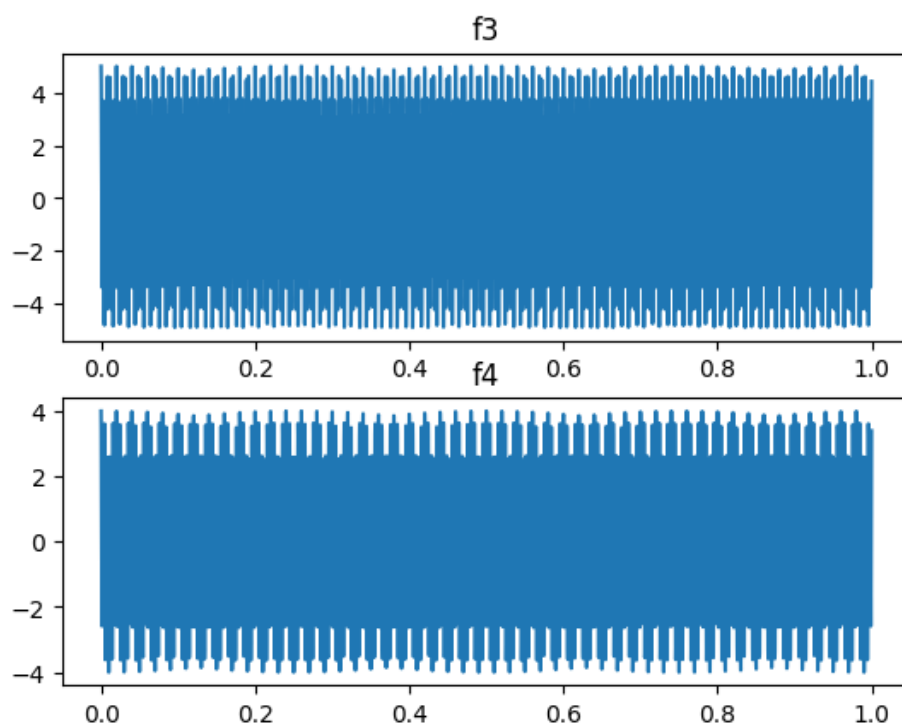


Рис. 2.1 – Сигналы

Получим модуль спектра двух сигналов, график модуля спектров (рис. 2.2).

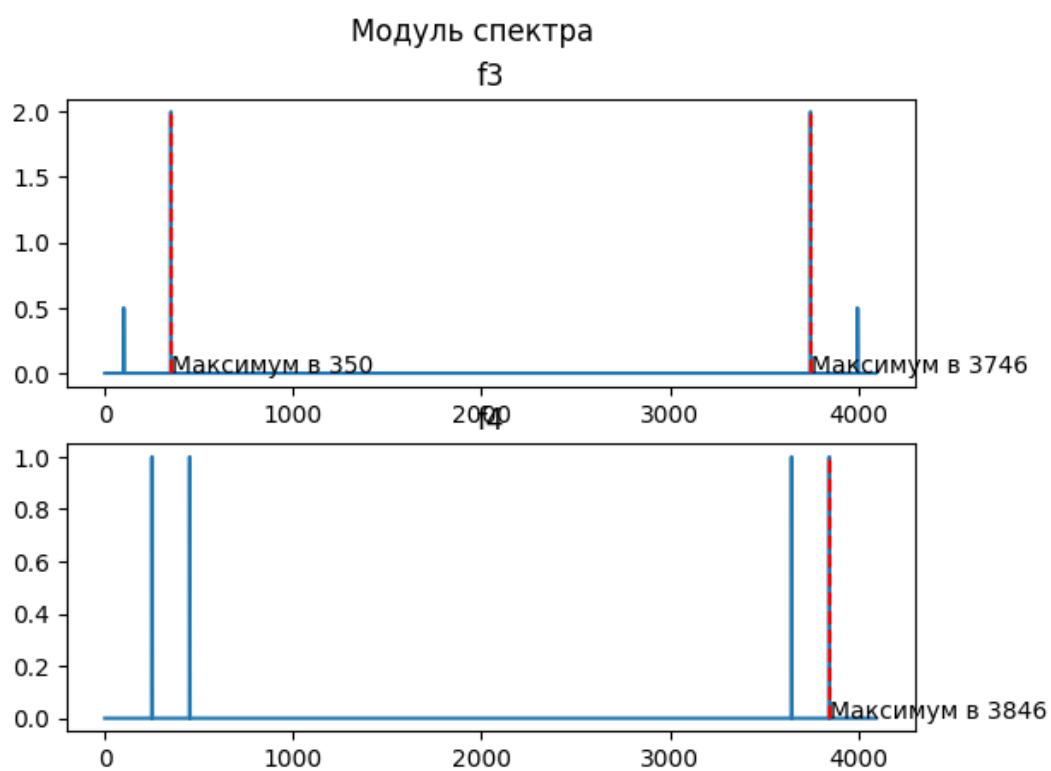


Рис. 2.2 - Модуля спектров

При сложении мы получим сложение графиков модуля спектров f_1 и f_2 .

При умножении мы увидим более равномерное распределение амплитуд по спектрам.

3. Создадим сигнал на временном интервале 128. Зададим импульс на участке и получим его спектр (рис. 3.1)

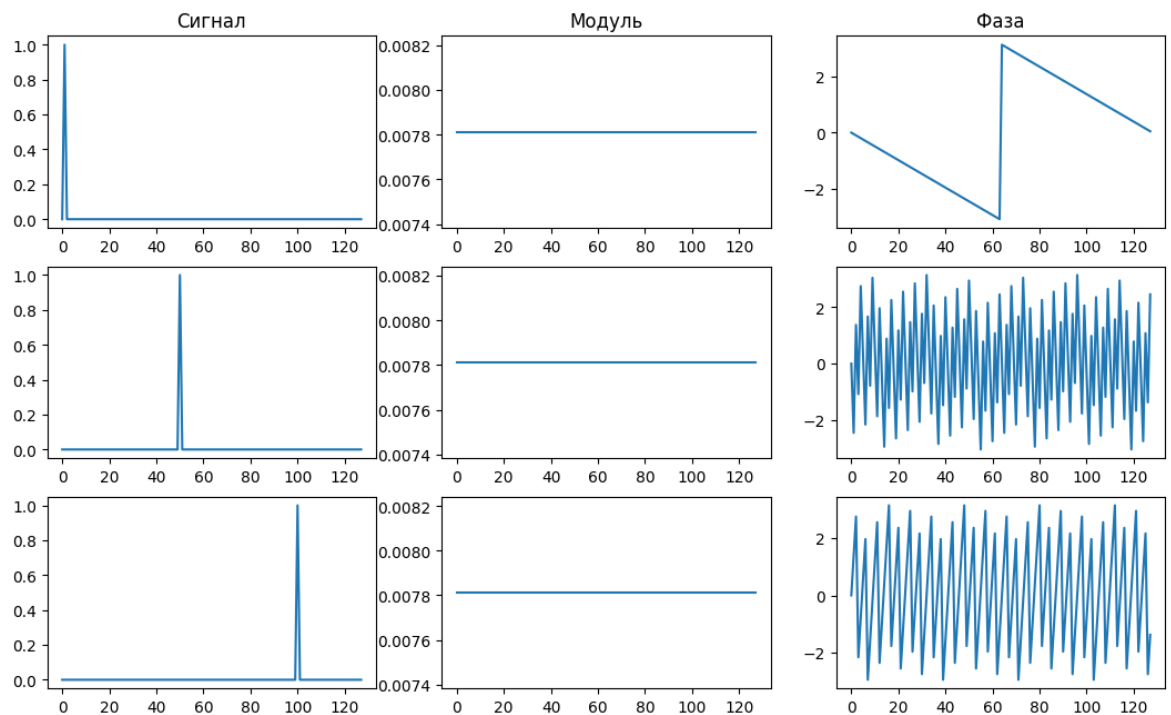
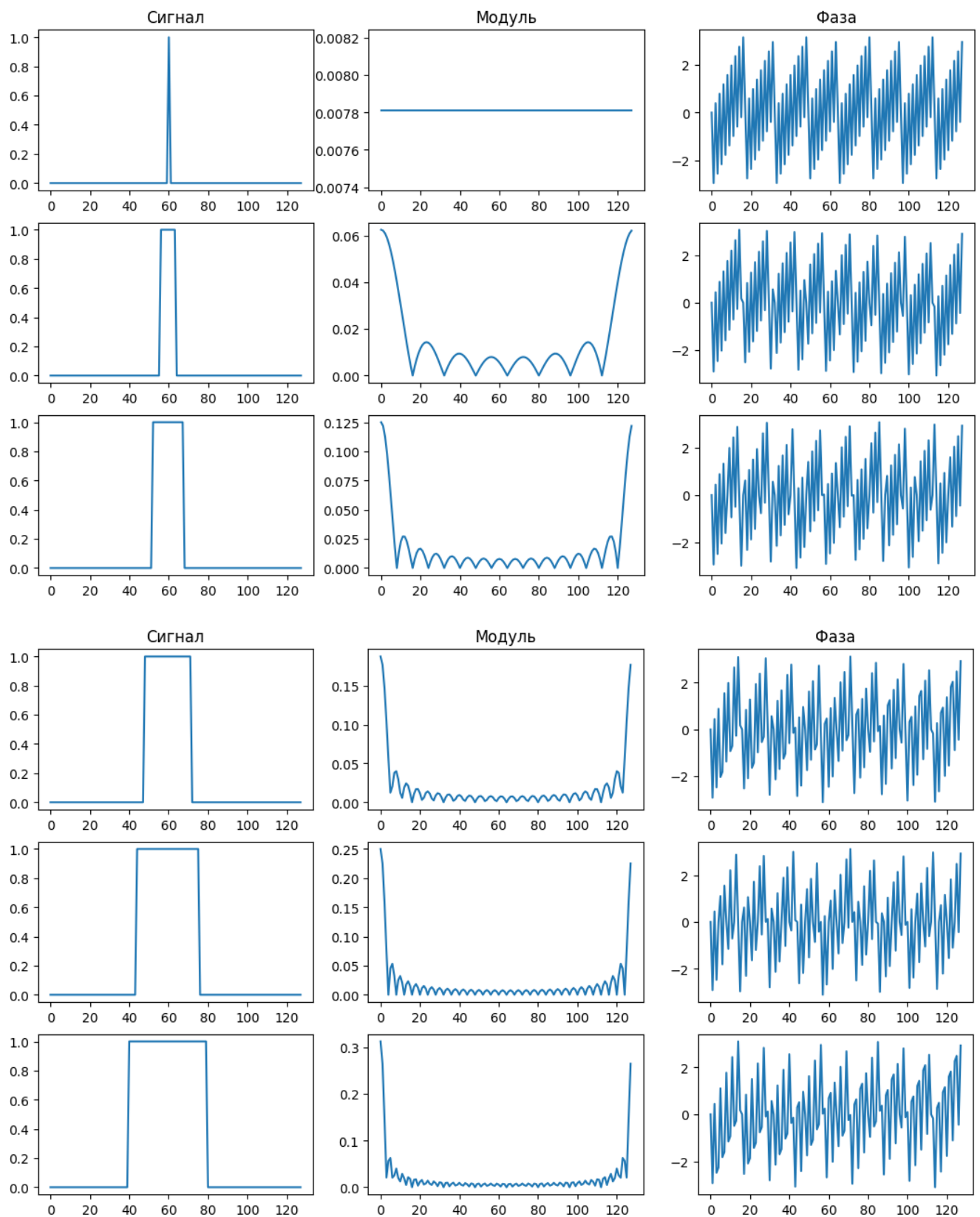


Рис. 3.1 – Результаты

Проведя анализ, заметим, что модуль спектра не изменяется, а фаза изменяет частоту при сдвиге импульса.

4. Из пункта 3 возьмем импульс и в цикле `for` последовательно увеличивайте ширину импульса с шагом 8, наблюдая соответствующие изменения его спектра.



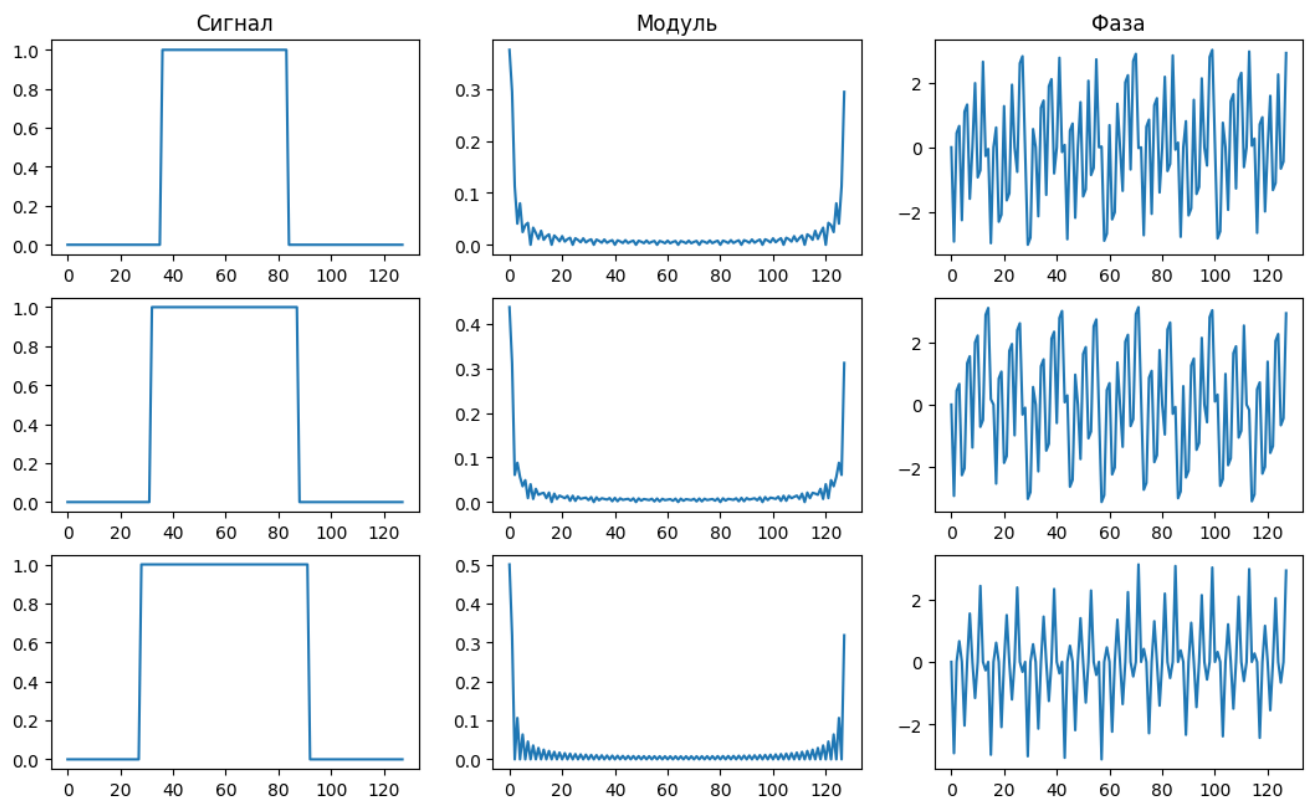


Рис. 4.1 – Графики спектров

При увеличении ширины импульса спектр становится более выраженным. Также частота фазы падает с расширением сигнала.

Рассчитаем спектр вручную для 4-го графика.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left(\cos(2\pi kn/N) - i \cdot \sin(2\pi kn/N) \right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

При ручном расчёте мы получим следующие данные (рис. 4.2)

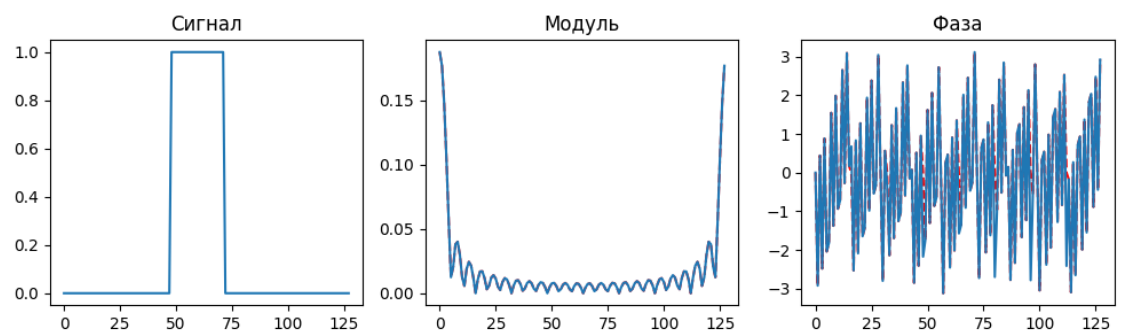


Рис. 4.2 – Ручной расчет

Сравнив данный график и полученный ранее видно, что они полностью совпадают.

5. На том же временном интервале создам периодический прямоугольный сигнал со скважностью 2 (меандр) и количеством периодов, кратным двум. Построим их характеристики (рис. 5.1).

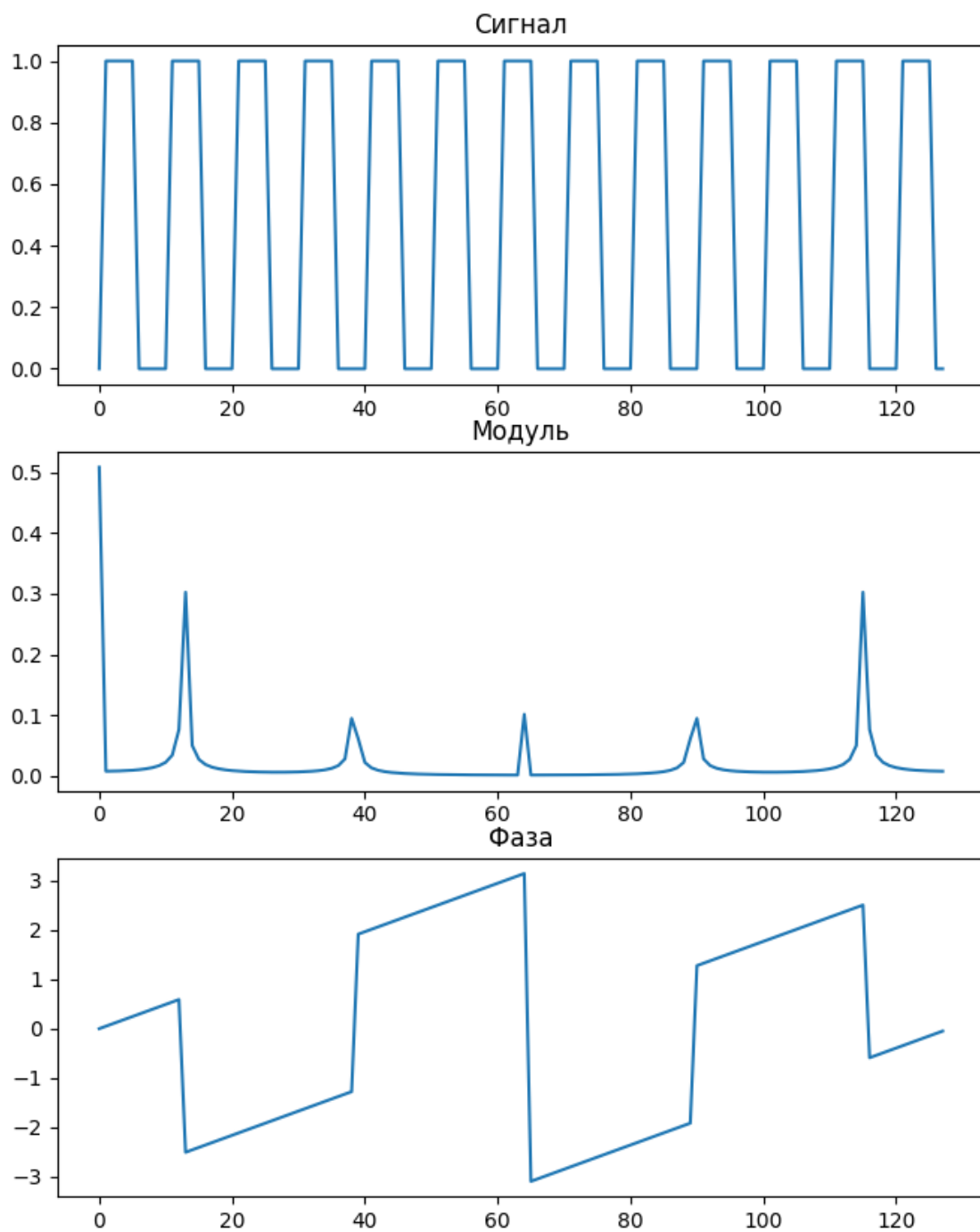


Рис. 5.1 - График спектра

Далее проведем ручной расчёт, так же как и в прошлом пункте (рис. 5.2).

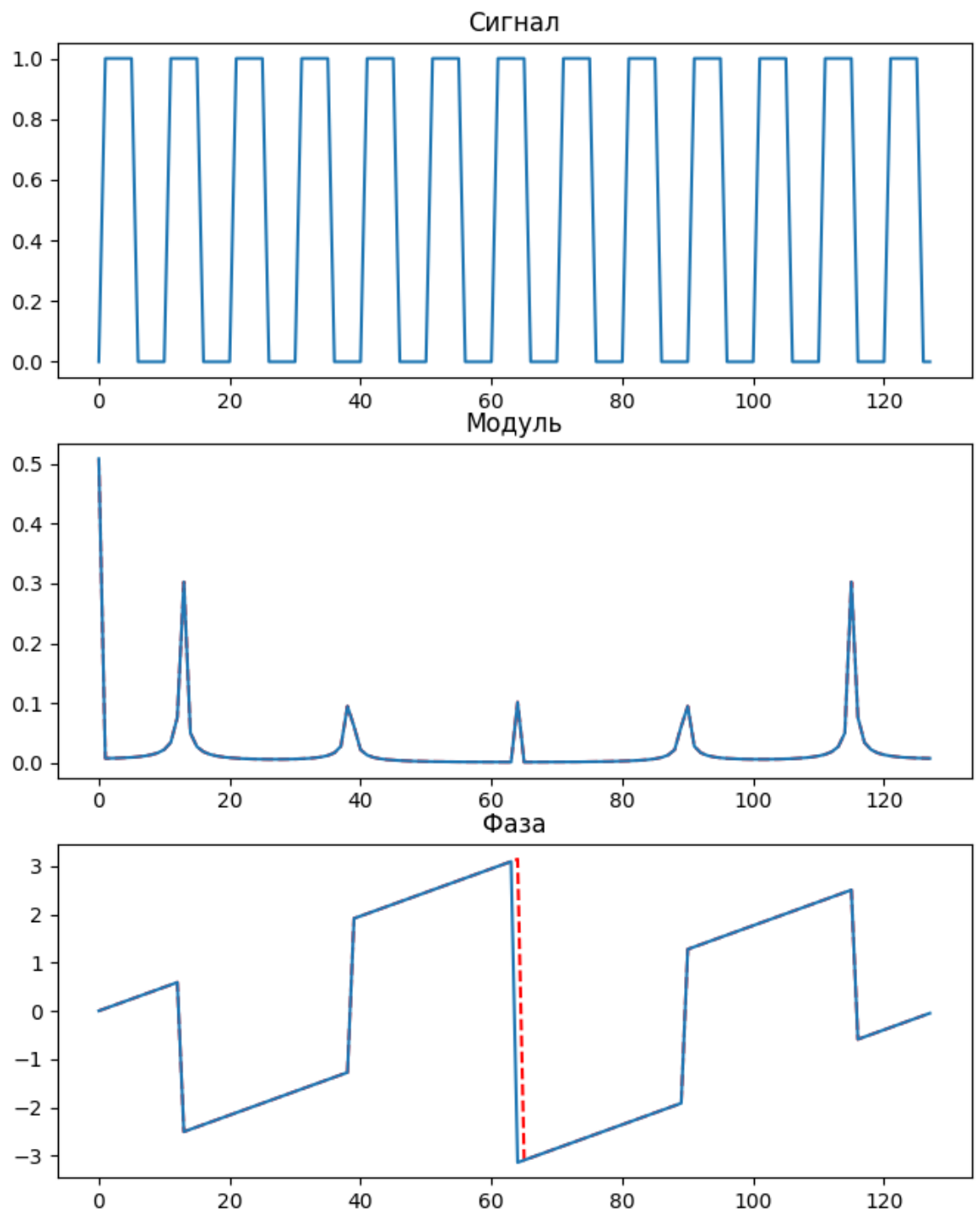


Рис. 5.2 – Ручной расчет

Сравнив графики видно, что они практически совпадают, но имеют малое различие в фазе. Данное различие получено вероятнее всего из-за округления результатов.

6. Покажем базисные функции преобразования Фурье(ограничьтесь только косинусным преобразованием), Уолша и Хаара.

Приведем базис Уолша для $N = 2^4$ (рис. 6.1)

```
array([[ 1,  1,  1,  1,  1,  1,  1,  1],
       [ 1, -1,  1, -1,  1, -1,  1, -1],
       [ 1,  1, -1, -1,  1,  1, -1, -1],
       [ 1, -1, -1,  1,  1, -1, -1,  1],
       [ 1,  1,  1,  1, -1, -1, -1, -1],
       [ 1, -1,  1, -1, -1,  1, -1,  1],
       [ 1,  1, -1, -1, -1, -1,  1,  1],
       [ 1, -1, -1,  1, -1,  1,  1, -1]])
```

Рис. 6.1 - Базис Уолша

Приведем базис Хаара (рис. 6.2)

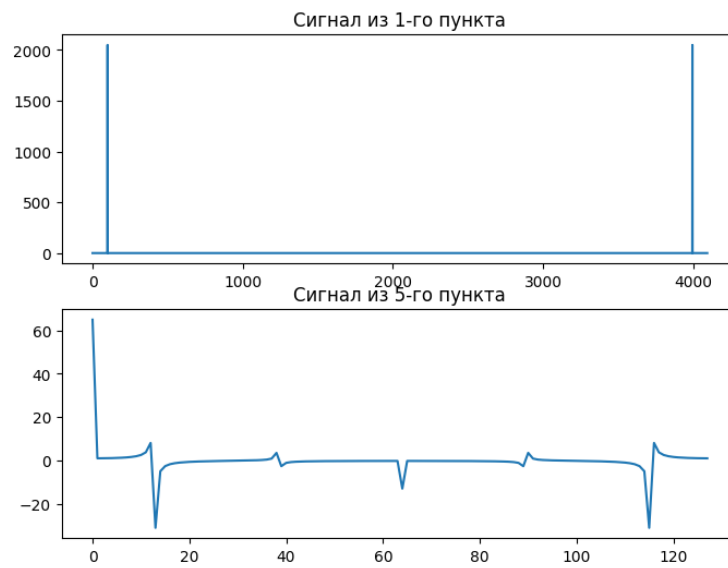
```
array([[ 0.35355339,  0.35355339,  0.35355339,  0.35355339,  0.35355339,
        0.35355339,  0.35355339,  0.35355339],
       [ 0.35355339,  0.35355339,  0.35355339,  0.35355339, -0.35355339,
       -0.35355339, -0.35355339, -0.35355339],
       [ 0.5,  0.5, -0.5, -0.5,  0.,  0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.5,  0.5, -0.5, -0.5],
       [ 0.70710678, -0.70710678,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.70710678, -0.70710678,  0.,  0.,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.70710678, -0.70710678,  0.,  0.],
       [ 0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.70710678, -0.70710678]])
```

Рис. 6.2 - Базис Хаара

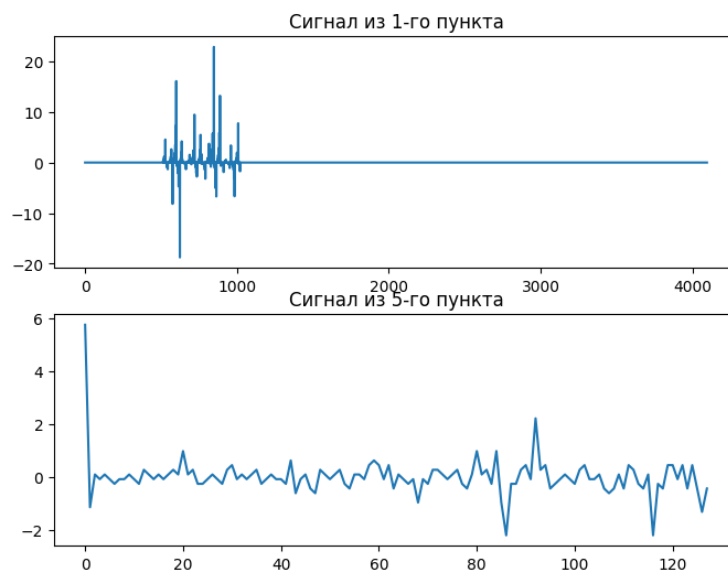
$e^{-i\omega t}$ - базисная функция преобразования Фурье.

7. Построим спектр с помощью преобразований из пункта 6 сигнала x_1 из пункта 1, а затем сигнала из 5. Преобразование Фурье и Уолша хорошо справляются с синусоидальными сигналами, но Уолш плохо подходит для импульсных сигналов. А хаара служит в основном для сжатия сигнала.

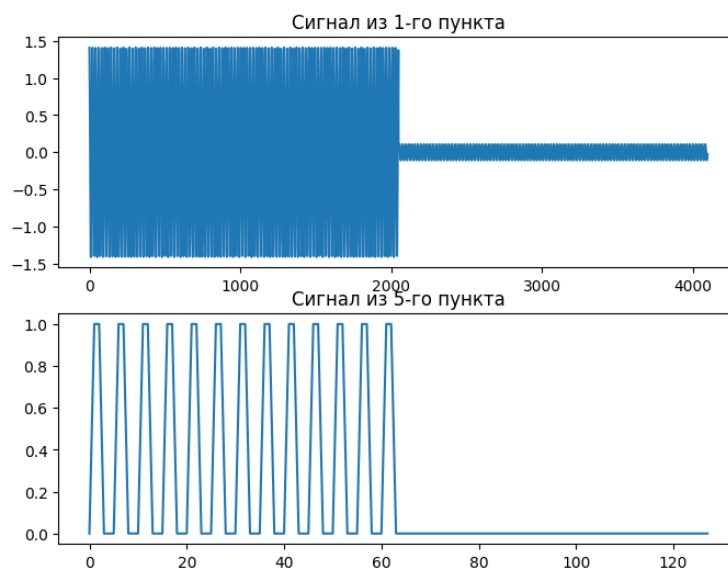
Преобразование Фурье



Преобразование Уолша



Преобразование Хаара



8. Определим форму и ширину частотной характеристики двух соседних каналов анализатора Фурье. Это можно сделать в цикле `for`, изменяя частоту анализируемого сигнала с достаточно малым шагом (0.01) и выделяя из спектра только отчет, принадлежащий каналу 35 (рис. 8.1).

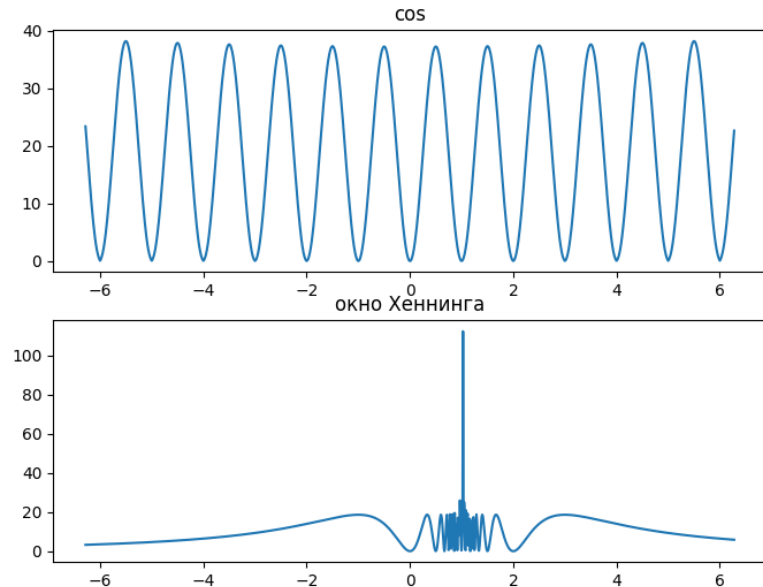


Рис. 8.1 – Частотные характеристики

Видно как у `cos` синусоидная форма, а у окна Хеннинга имеется ярко выраженный пик.

9. Построим частотную характеристику 3-х соседних каналов ДПФ. Медленно меняя в цикле частоту сигнала с шагом 0.01 запоминая значение амплитуды каждого из 3-х каналов, после чего на одном графике построим их (рис. 9.1).

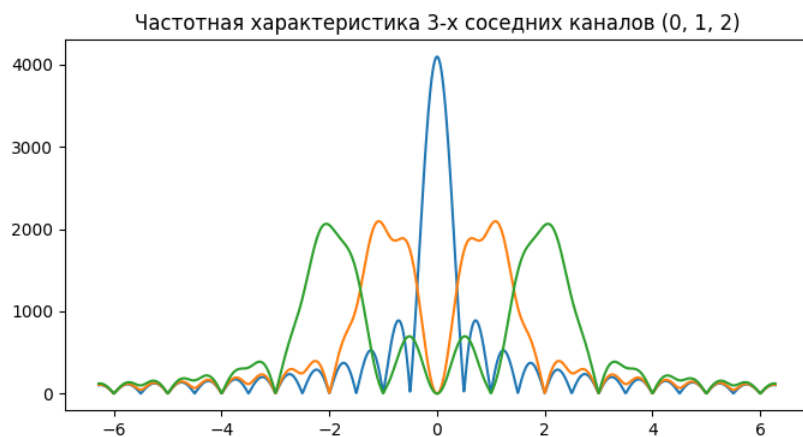


Рисунок 9.1

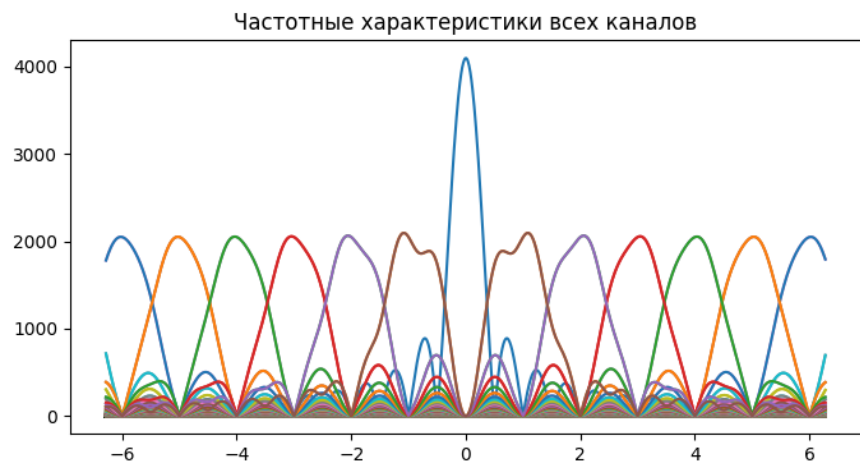


Рисунок 9.2

10. Построим частотные характеристики 3-х соседних каналов ДПФ как в пункте 8 с использованием 3-х различных оконных функций (рис 10.1).

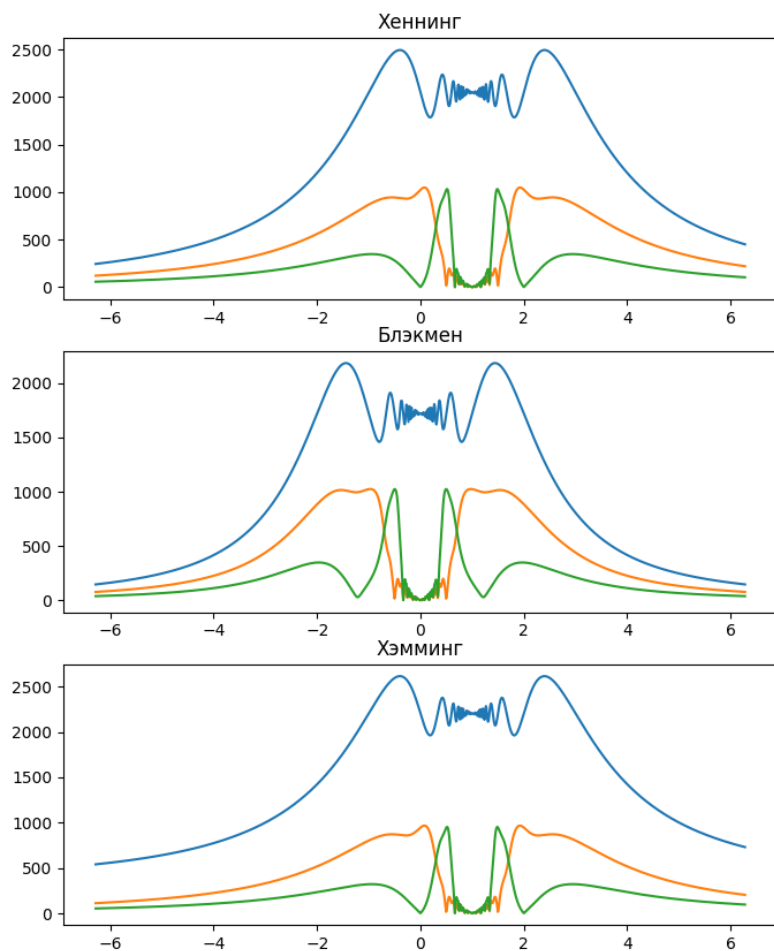


Рис. 10.1 - Частотные характеристики

При анализе видно, что изменяется только расположение, а формы идентичные.

Выводы.

1. Анализ спектра сигналов:

Применение быстрого преобразования Фурье (БПФ) дает возможность эффективно исследовать частотные характеристики сигналов. Существует прямая зависимость между частотным содержанием сигнала и расположением его гармоник в спектре.

2. Суммирование и умножение сигналов:

Сложение сигналов приводит к объединению их спектров, в то время как умножение создает новые частотные компоненты, соответствующие сумме и разности частот исходных сигналов.

3. Импульсы и их спектры:

Узкие импульсы обладают широкими спектрами, что подтверждает принцип неопределенности: чем меньше длительность сигнала во временной области, тем больше его спектр.

4. Оконные функции:

Применение оконных функций улучшает спектральный анализ, уменьшая побочные лепестки, но при этом увеличивает ширину основного лепестка. Разные оконные функции обеспечивают различные уровни компромисса между разрешением и подавлением побочных лепестков.

5. Частотные характеристики каналов:

Форма частотных характеристик дискретных фильтров определяется оконной функцией и шагом дискретизации. При изменении частоты спектр сигнала плавно варьируется, отражая вклад в соседние каналы.

6. Базисные функции преобразований:

Различные преобразования (Фурье, Уолша, Хаара) предоставляют базисы для представления сигналов. Базис Фурье позволяет разложить сигнал в частотной области, тогда как базисы Уолша и Хаара — в виде прямоугольных и ступенчатых компонентов.

7. Ручной расчёт спектров:

Теоретические расчеты спектров для импульсов и прямоугольных сигналов согласуются с результатами численного моделирования, что подтверждает правильность анализа.

Данная работа способствует более аналитическому пониманию принципов частотного анализа сигналов, влияния оконных функций и методов разложения. Приобретенные навыки полезны для обработки сигналов в цифровых системах, улучшения спектрального анализа.

Определения:

Преобразование Фурье:

$$- \text{(прямое)} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

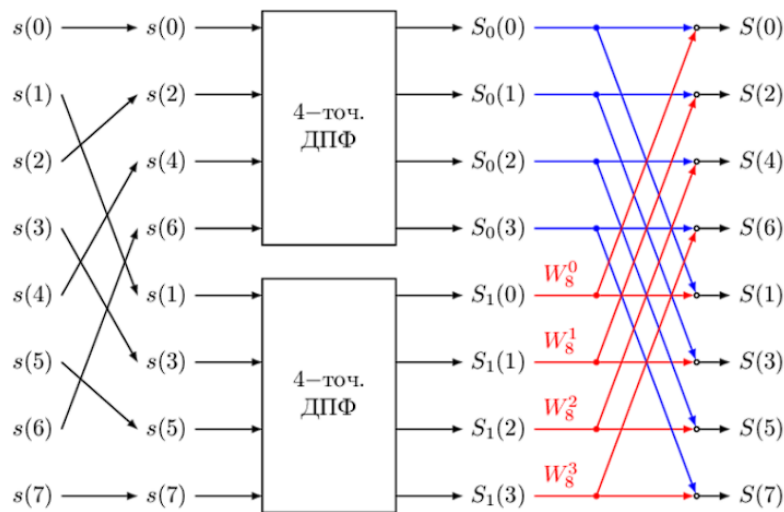
$$- \text{(обратное)} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Дискретное преобразование Фурье:

$$- \text{(прямое)} \quad X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

$$- \text{(обратное)} \quad x(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi nk}{N}}$$

Алгоритм «бабочка» - графически для 8 отсчетов



Формула перемножения двух синусов

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

Растекание спектра – эффект, при котором энергия сигнала в одной частотной области проявляется в других частотах. Он возникает из-за того, что сигнал в конечном итоге является дискретным в пространстве и времени, и поэтому не может быть точно представлен с помощью непрерывного набора частот

АЧХ – это зависимость амплитуды выходного сигнала некоторой системы от частоты её входного гармонического сигнала

ФЧХ – это зависимость разности фаз между выходным и входным сигналами от частоты сигнала

Спектр – физ. плотность распределения значений какой-либо физической величины, а также граф. представление такого распределения

Формула Эйлера:

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

Теорема Котельникова, частота Найквиста.

Теорема Котельникова - фундаментальное утверждение в области цифровой обработки сигналов, связывающее непрерывные и дискретные сигналы и гласящее, что «любую функцию F(t), состоящую из частот от 0 до f1, можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом менее чем через 1/(2f1) секунд.»

Частота Найквиста – частота, равная половине частоты дискретизации