

Лабораторная работа №3

Спектр. Ряд Фурье

Цель работы:

- Знакомство со спектральным представлением периодических и случайных процессов;
- Изучение взаимосвязи преобразований сигналов во временной и частотной областях;
- Оценка дефектов дискретного преобразования Фурье и методы их подавления.

Теоретические положения. Поставим задачу: представить некоторый сложный периодический процесс $x(t)$, заданный на интервале $[0, T]$, в виде суммы простых периодических функций вида $\psi_{\omega}(t) = A \sin(\omega t + \phi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

Периодичность $x(t)$ гарантирует, что в таком разложении будут присутствовать только гармоники кратных частот $\omega = n\omega_0$, n – целое, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. При $n=0$ получим постоянную составляющую, обычно записываемую в форме $\frac{a_0}{2}$, а все разложение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t) + (a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t, \end{aligned}$$

Данное разложение называется *рядом Фурье*.

Коэффициенты этого ряда рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

Если воспользоваться формулой Эйлера $\exp(j\phi) = \cos \phi + j \sin \phi$, получим более простую запись ряда Фурье в комплексной форме:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{– коэффициенты ряда Фурье или спектр}$$

Совокупность функций $e^{-jn\omega_0 t}$ называется *базисом Фурье*.

Комплексные коэффициенты F_n обычно представляют в форме $F_n = S_n e^{j\phi} = U_n + jV_n$, где $S_n = \sqrt{U_n^2 + V_n^2}$ – амплитудный спектр; $\phi_n = \arctg \frac{V_n}{U_n}$ – фазовый спектр; U_n – реальная составляющая спектра; V_n – мнимая составляющая спектра.

Для анализа непериодических процессов ($T \rightarrow \infty$) служит преобразование Фурье:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Широкое распространение спектрального представления сигналов объясняется следующими причинами:

- Гармонические функции – единственные, не меняющие своей формы при прохождении через линейную систему: может измениться только их амплитуда и фаза, но не форма, а, значит, не частота;
- Простота синтеза гармонического колебания – для этого достаточно иметь колебательный контур или любую другую резонансную систему. Разложить в спектр Фурье оптический сигнал может любая двояковыпуклая линза, радиосигналы в эфире тоже представлены электромагнитными волнами – гармониками ряда Фурье;
- Графическое представление спектральных коэффициентов на частотной оси – спектра сигнала – позволяет получить наглядную картину распределения в сигнале низких и высоких частот;
- Частотные характеристики используются не только для анализа сигналов, но и для анализа свойств динамических систем.

Чтобы построить спектр с помощью ДПФ (БПФ), надо определить следующие параметры:

- количество спектральных составляющих N ;

- шаг между соседними частотами – разрешение по частоте Δf ;
- частоту дискретизации f_s ;
- минимальную (нижнюю) частоту спектра $f_{\text{нижн}}$;
- верхнюю частоту $f_{\text{верх}}$;
- временной интервал анализа T .

На самом деле, эти параметры жестко связаны друг с другом, и для однозначного построения спектра достаточно задать всего две величины.

Как правило, анализ начинается с выбора временной базы анализа T и частоты дискретизации f_s . При этом оказываются определенными и количество отсчетов сигнала $N = T \times f_s$, и минимальная частота спектра: $f_{\text{нижн}} = 1/T$. А поскольку количество спектральных коэффициентов равно количеству отсчетов сигнала N , оказываются определенными и верхняя частота преобразования $f_{\text{верх}} = f_{\text{нижн}} \times N = f_s$, и шаг между соседними частотами $\Delta f = f_{\text{нижн}}$.

Спектр сигнала (сейчас мы рассматриваем только вещественные функции) будет состоять из двух зеркально отраженных картин. Для комплексного спектра этого не происходит, однако в спектре появляются отрицательные частоты.

Теорема Котельникова – фундаментальное утверждение в области цифровой обработки сигналов, связывающее непрерывные и дискретные сигналы.

Формулировка: Любой сигнал $s(t)$, спектр которого не содержит составляющих с частотами выше некоторого значения $\omega_g = 2\pi f_g$, может быть без потерь информации представлен своими дискретными отсчетами $\{s(kT)\}$, взятыми с интервалом T , удовлетворяющим следующему неравенству:

$$T < \frac{1}{2f_g} = \frac{\pi}{\omega_g}.$$

Преобразование Фурье в дискретной форме (ДПФ) имеет и другие недостатки. Главный из них – растекание спектра. Растекание спектра (англ. spectrum leakage) – эффект, возникающий вследствие финитности анализируемого сигнала (фактически бесконечный сигнал взвешивается финитным прямоугольным окном). Для подавления этого эффекта используют

взвешивание сигнала специальными оконными функциями (окна Чебышева, Ханна, Парзена и т.д.).

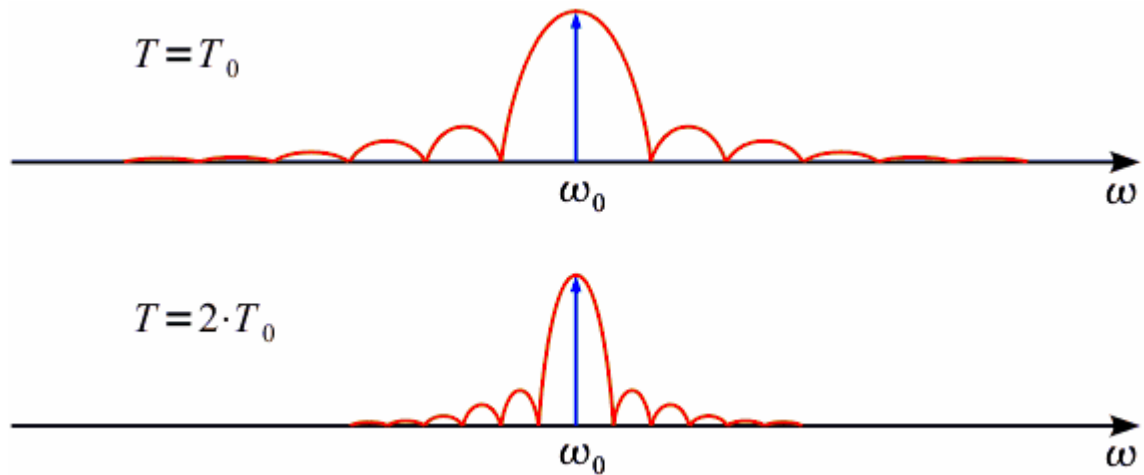


Рис. 3.5. Растекание спектра

При спектральном преобразовании сигнала могут использоваться и другие – не гармонические – функции. В этом случае говорят об *обобщенном*

преобразовании Фурье: $F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \psi_n(t) dt$.

Главные требования к функциям ψ_n – их *ортogonalность* и *полнота*.

Два вектора X_i , X_j называют *взаимноортogonalными*, если их скалярное произведение Y равно нулю: $X_i = [x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(N)]$; $X_j = [x_j(1), x_j(2), \dots, x_j(N)]$; $Y = \sum_{n=1}^N X_i(n) \cdot X_j(n) = 0$.

Если при этом норма каждого вектора равна 1: $\|Y\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N X_i(n) \cdot X_i^*(n)} = 1$

, векторы называют *ортонормальными*.

Для любого вектора размерности (длины) N можно найти N и только N ортogonalных векторов. Такой набор векторов называют *полной ортонормальной системой*, или *базисом* N -мерного линейного пространства.

Рассмотрим для примера два базиса в пространстве $N = 2^3$

Первый базис задается матрицей (Рис. 3.5):

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

или в графической форме (каждая функция – одна из строк матрицы W_3):

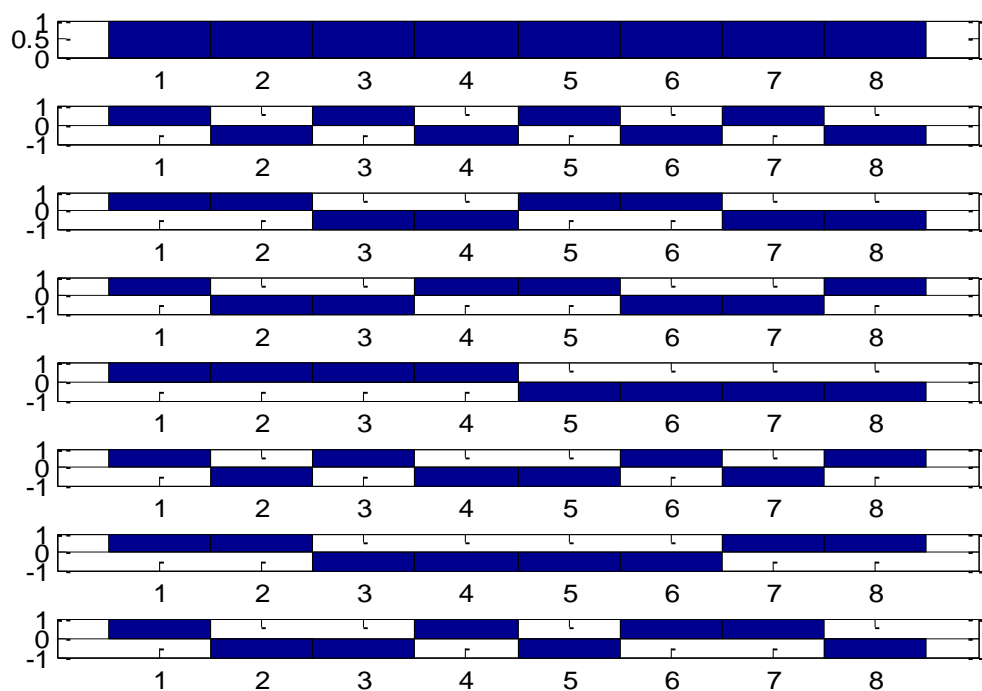


Рис. 3.5. Первый базис

Второй базис зададим матрицей (Рис. 3.6):

$$A = \begin{bmatrix} 0.1250 & 0.5026 & 0.4275 & 0.8550 & 0.2138 & 0.6917 & 0.4275 \\ 0.8550 & 0.2138 & -0.2939 & 0.7310 & -0.5000 & 0.3655 & -0.4045 & 0.7310 \\ -0.5000 & 0.2513 & 0.4755 & -0.2939 & -0.8090 & 0.4297 & 0.6545 & -0.2939 \\ -0.8090 & & & & & & & \end{bmatrix}$$

| | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.3458 | -0.3455 | -0.4045 | 0.5878 | 0.5914 | -0.4755 | -0.4045 |
| 0.5878 | 0.5026 | 0.8090 | 0.8090 | 1.0000 | -0.2939 | -0.5878 |
| -1.0000 | 0.5026 | -0.8090 | 0.8090 | -1.0000 | -0.2939 | 0.5878 |
| 1.0000 | 0.6917 | 0.8090 | -0.5878 | -1.0000 | -0.4045 | -0.5878 |
| 1.0000 | 0.6917 | -0.8090 | -0.5878 | 1.0000 | -0.4045 | 0.5878 |
| -1.0000 | | | | | | |

или графически:

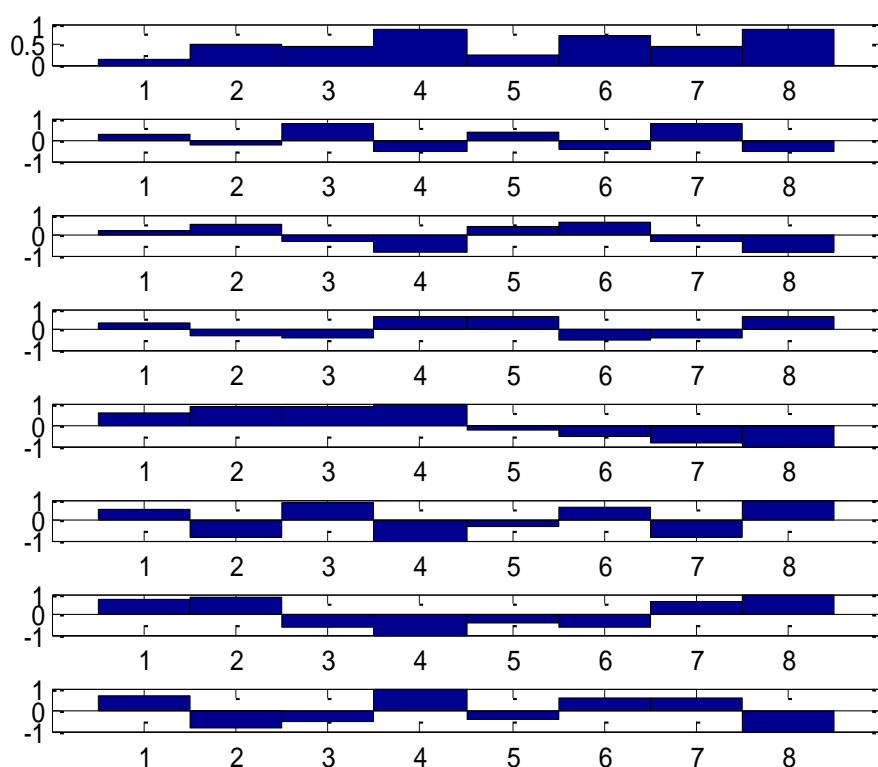


Рис. 3.6. Второй базис

Сравним эти базисы. Прежде всего, бросается в глаза равенство ± 1 всех элементов матрицы W_3 . Это очень удобное свойство базисных функций: при умножении на такую функцию временные затраты минимальны. Во втором базисе это свойство потеряно. Первая строка базиса обычно служит для выделения постоянной составляющей из исследуемого сигнала и в классических базисах все ее элементы равны единице. При этом все остальные функции не реагируют на постоянную составляющую вследствие симметричности их относительно нуля. Этого во втором базисе тоже нет.

Поэтому первый базис используется очень широко и носит название базиса Уолша, а второй базис кроме вас никто не видел.

Приведем еще один весьма широко используемый базис – базис Хаара (Рис. 3.7):

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

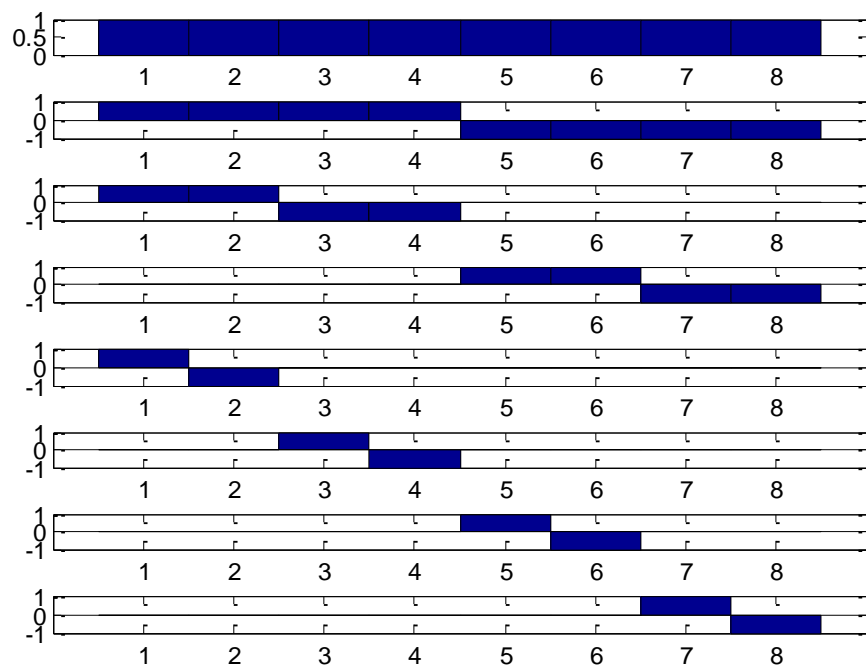


Рис. 3.7. Базис Хаара

Его главное достоинство – большое количество нулевых элементов. Это не только ускоряет вычисления спектра, но и обеспечивает сжатое представление сигналов с резкими перепадами. Это объясняется тем, что каждая функция (за исключением первых двух) выделяет только некоторую локальную область существования сигнала.

Для упрощения здесь базис Хаара приведен в ненормированной форме: чем уже импульс, тем меньше его энергия.

Порядок проведения работы

Используемые функции MATLAB:

- `fft(x)` – преобразование Фурье
 - `ifft(y)` – обратное преобразование Фурье
 - `abs(fft(x))` – модуль спектра;
 - `angle(y)`, `phase(y)` – фаза спектра;
 - `real(y)`, `imag(y)` – реальная и мнимая составляющая
 - `kron(A,B)` – кронекеровское произведение матрицы B на A, при котором каждый элемент матрицы A умножается на всю матрицу B.
1. Создайте два сигнала $x_1 = \cos(2\pi f_1 t)$; $x_2 = 4\cos(2\pi f_2 t)$; Частота дискретизации 4096, время анализа 1 секунда. Частоты f_1 и f_2 равны 100 и 350 Гц. Получите модуль спектра двух сигналов, постройте его график. Объясните, как определяется номер гармоники в спектре.
 2. Создайте еще два сигнала: $x_3 = x_1 + x_2$; $x_4 = x_1 \cdot x_2$ и постройте их спектры. Объясните полученный результат.
 3. На временном интервале $N = 2^7$ отсчетов создайте δ -импульс (на один отчет выставить 1) и получите его спектр (модуль и фазу). Как изменяется спектр, если сдвинуть δ -импульс?
 4. Из пункта 3 возьмите импульс и в цикле `for` последовательно увеличивайте ширину импульса с шагом 8, наблюдая соответствующие изменения его спектра. Сделайте 10 этапов моделирования. Для произвольной ширины импульса рассчитайте спектр вручную. Сделайте выводы.
 5. На том же временном интервале создайте периодический прямоугольный сигнал со скважностью 2 (меандр) и количеством периодов, кратным двум. Постройте его спектр. Рассчитайте спектр вручную.
 6. Покажите базисные функции преобразования Фурье (ограничьтесь только косинусным преобразованием), Уолша и Хаара. Базис Уолша можно сформировать с помощью матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ и кронекеровского перемножения этой матрицы самой на себя.
 7. Постройте спектр с помощью преобразований из пункта 6 сигнала x_1 из пункта 1, а затем сигнала из 5. Сравните их спектры.
 8. Определите форму и ширину частотной характеристики двух соседних каналов анализатора Фурье. Это можно сделать в цикле `for`, изменяя частоту анализируемого сигнала с достаточно малым шагом (0.1 – 0.2) и выделяя из спектра только отчет, принадлежащий выбранному каналу. Оцените, как меняется спектр моногармонического сигнала при его смещении по частотной оси. Для улучшения качества анализа

используйте вместо прямоугольного временного окна, обрезающего сигнал, окно Хеннинга (hanning). Сравните результаты.

9. Постройте частотную характеристику 3-х соседних каналов ДПФ. Медленно меняя в цикле частоту сигнала с шагом 0.01 запоминайте значение амплитуды каждого из 3-х каналов, после чего на одном графике постройте их. У центрального канала должны четко видны центральный лепесток и 5 боковых с обеих сторон от центрального.
10. Постройте частотные характеристики 3-х соседних каналов ДПФ как в пункте 8 с использованием 3-х различных оконных функций. Сравните результаты.

Определения:

1. Преобразование Фурье – формула
2. Дискретное преобразование Фурье – формула
3. Алгоритм «бабочка» - графически для 8 отсчетов
4. Формулу перемножения двух синусов
5. Растекание спектра – определение
6. АЧХ – определение
7. ФЧХ – определение
8. Спектр – определение
9. Формула Эйлера
10. Теорема Котельникова, частота Найквиста