**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра АПУ**

отчет

**по лабораторной работе №3**

**по дисциплине «Математические основы теории систем»**

Тема: **Спектр. Ряд Фурье**

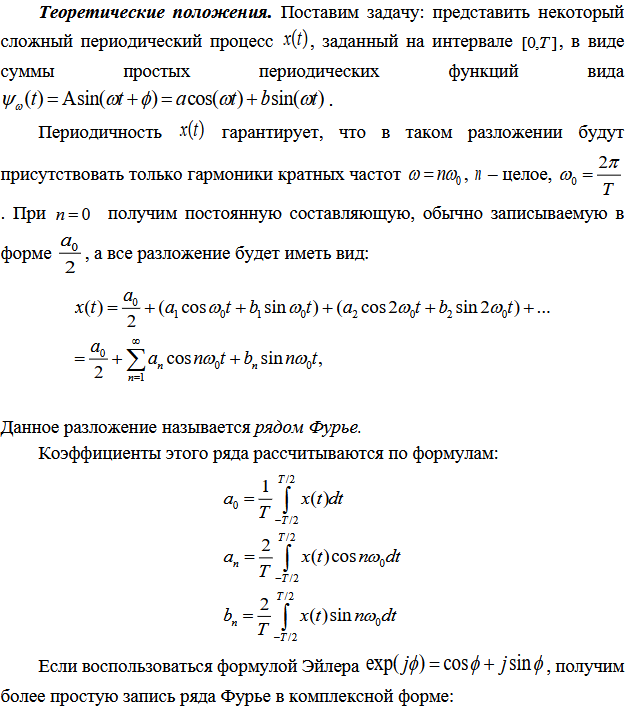
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 2392 |  | Жук Ф.П. |
| Преподаватель |  | Каплун Д.И. |

Санкт-Петербург

2024

**Цель работы:**

* Знакомство со спектральным представлением периодических и случайных процессов;
* Изучение взаимосвязи преобразований сигналов во временной и частотной областях;
* Оценка дефектов дискретного преобразования Фурье и методы их подавления.

****

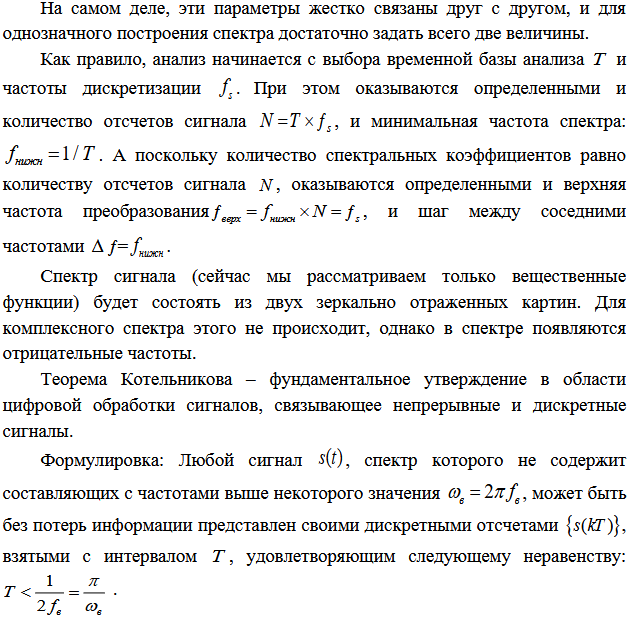
**Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание**

* Гармонические функции – единственные, не меняющие своей формы при прохождении через линейную систему: может измениться только их амплитуда и фаза, но не форма, а, значит, не частота;
* Простота синтеза гармонического колебания – для этого достаточно иметь колебательный контур или любую другую резонансную систему. Разложить в спектр Фурье оптический сигнал может любая двояковыпуклая линза, радиосигналы в эфире тоже представлены электромагнитными волнами – гармониками ряда Фурье;
* Графическое представление спектральных коэффициентов на частотной оси – спектра сигнала – позволяет получить наглядную картину распределения в сигнале низких и высоких частот;
* Частотные характеристики используются не только для анализа сигналов, но и для анализа свойств динамических систем.

Чтобы построить спектр с помощью ДПФ (БПФ), надо определить следующие параметры:

* количество спектральных составляющих N ;
* шаг между соседними частотами – разрешение по частоте ƒ;
* частоту дискретизации fs ;
* минимальную (нижнюю) частоту спектра fнижн ;
* верхнюю частоту f верх;
* временной интервал анализа T .



Преобразование Фурье в дискретной форме (ДПФ) имеет и другие недостатки. Главный из них – растекание спектра. Растекание спектра (англ. spectrum leakage) – эффект, возникающий вследствие финитности анализируемого сигнала (фактически бесконечный сигнал взвешивается финитным прямоугольным окном). Для подавления этого эффекта используют взвешивание сигнала специальными оконными функциями (окна Чебышева, Ханна, Парзена и т.д.).

Изображение выглядит как линия, диаграмма, График

Автоматически созданное описание

Рис. 1 - Растекание спектра

**Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание**

Рассмотрим для примера два базиса в пространстве N = 23

Первый базис задается матрицей (Рис. 2):

**Изображение выглядит как текст, снимок экрана, линия, диаграмма

Автоматически созданное описание**

Рис. 2 – Первый базис

Второй базис зададим матрицей (рис. 3)

**Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, линия

Автоматически созданное описание**

**Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание**

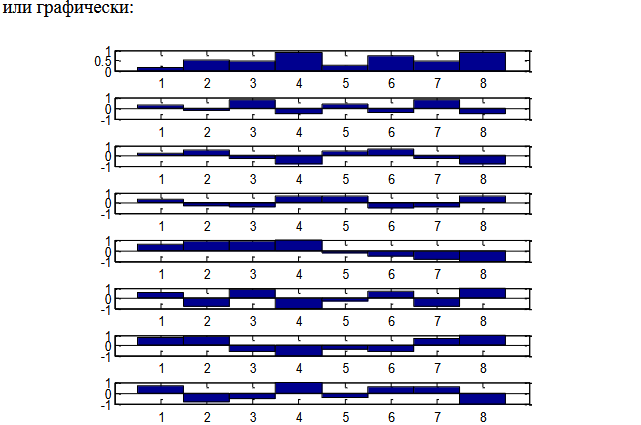
****

Рис. 3 – Второй базис

**Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание**



Приведем еще один весьма широко используемый базис – базис Хаара (рис. 4)

Изображение выглядит как текст, линия, диаграмма, Параллельный

Автоматически созданное описание

Рис. 4 – базис Хаара

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, число

Автоматически созданное описание

**Ход работы.**

1. Создадим 2 сигнала:

Частота дискретизации 4096, время анализа 1 секунда.

Графики сингалов (рис. 1.1):

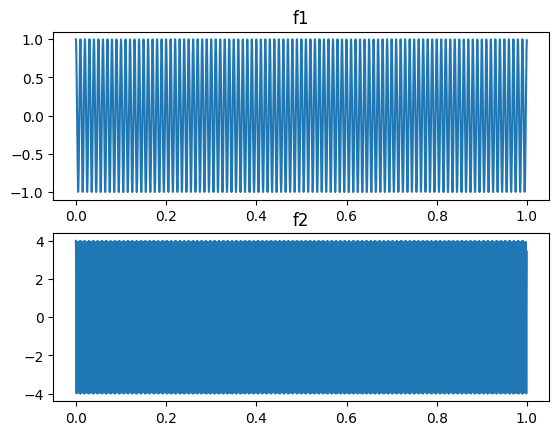


Рис. 1.1 – Сигналы

Получим модуль спектра двух сигналов, график модуля спектров (рис. 1.2).

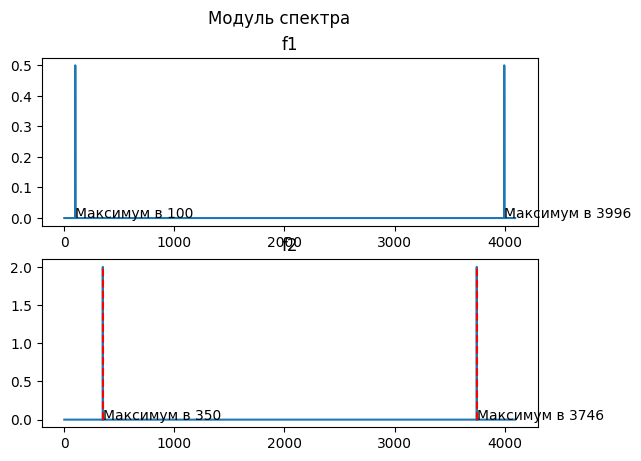


Рис. 1.2 - Модуля спектров

Номер гармоники определяется по индексу, а значение является амплитудой данной гармоники.

Пример для f1:

У нас имеются два пика это в значения 100 и 3996, следует сигнал состоит из 2 част 100 и 3996 Дб. Данные частоты имеют амплитуду 0.5 из чего можем представить сигнал как сумму двух косинусоид с данными характеристиками. График разности исходного сигнала и полученного за счет Фурье (рис. 1.3).

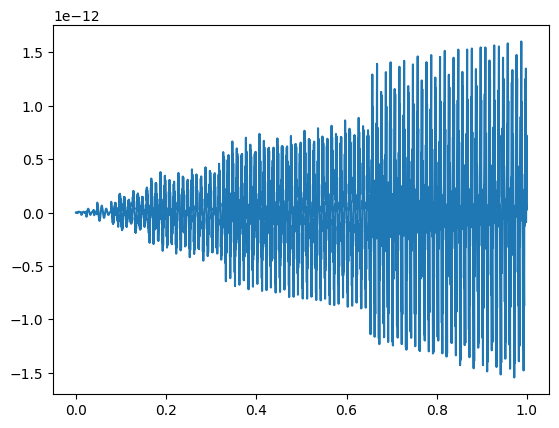


Рис. 1.3 - Разность исходного сигнала и Фурье

Из графика видно, что преобразование Фурье дало хорошую точность.

1. Создадим сигналы:

Графики сингалов (рис. 2. 1):

Изображение выглядит как снимок экрана, Прямоугольник, линия, текст

Автоматически созданное описание

Рис. 2.1 – Сигналы

Получим модуль спектра двух сигналов, график модуля спектров (рис. 2.2).

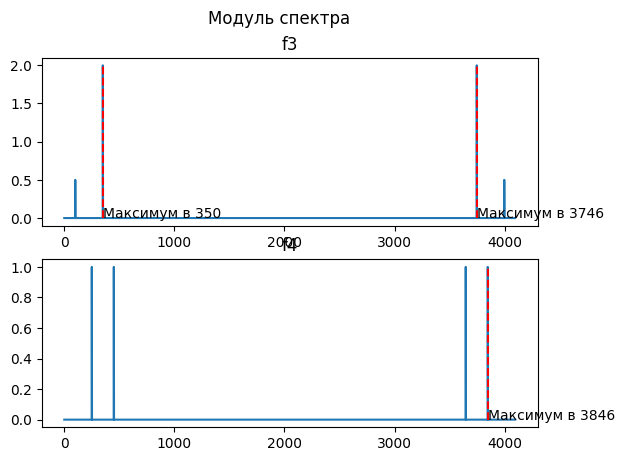


Рис. 2.2 - Модуля спектров

При сложении мы получим сложение графиков модуля спектров f1 и f2.

При умножении мы увидим более равномерное распределение амплитуд по спектрам.

1. Создадим сигнал на временном интервале 128. Зададим импульс на участке и получим его спектр (рис. 3.1)

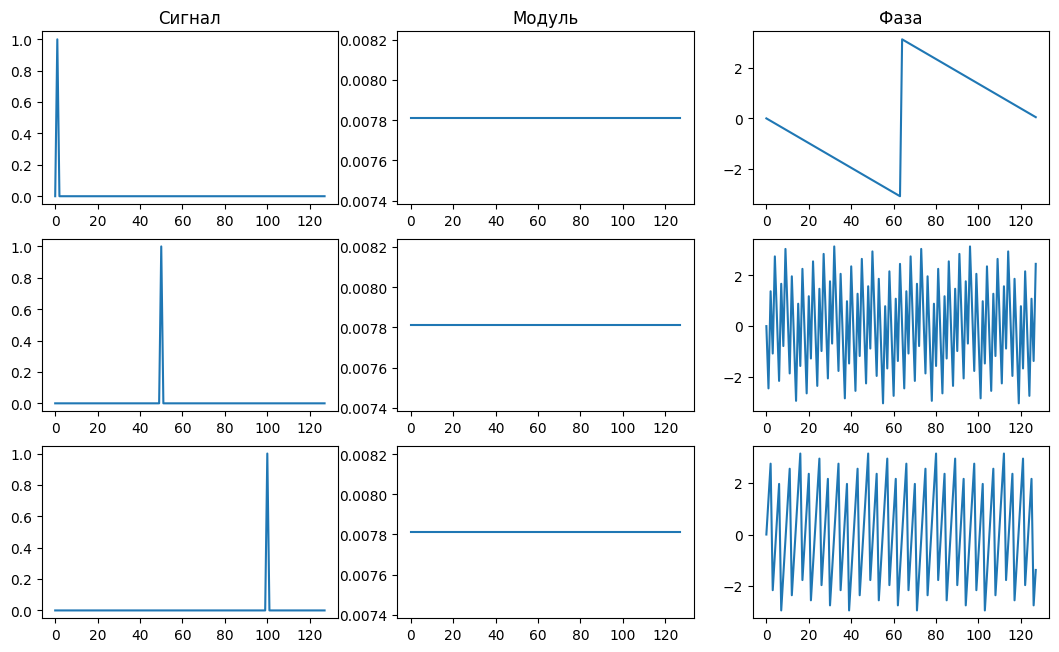


Рис. 3.1 – Результаты

Проведя анализ, заметим, что модуль спектра не изменяется, а фаза изменяет частоту при сдвиге импульса.

1. Из пункта 3 возьмем импульс и в цикле for последовательно увеличивайте ширину импульса с шагом 8, наблюдая соответствующие изменения его спектра.

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, График

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст, диаграмма, снимок экрана, График

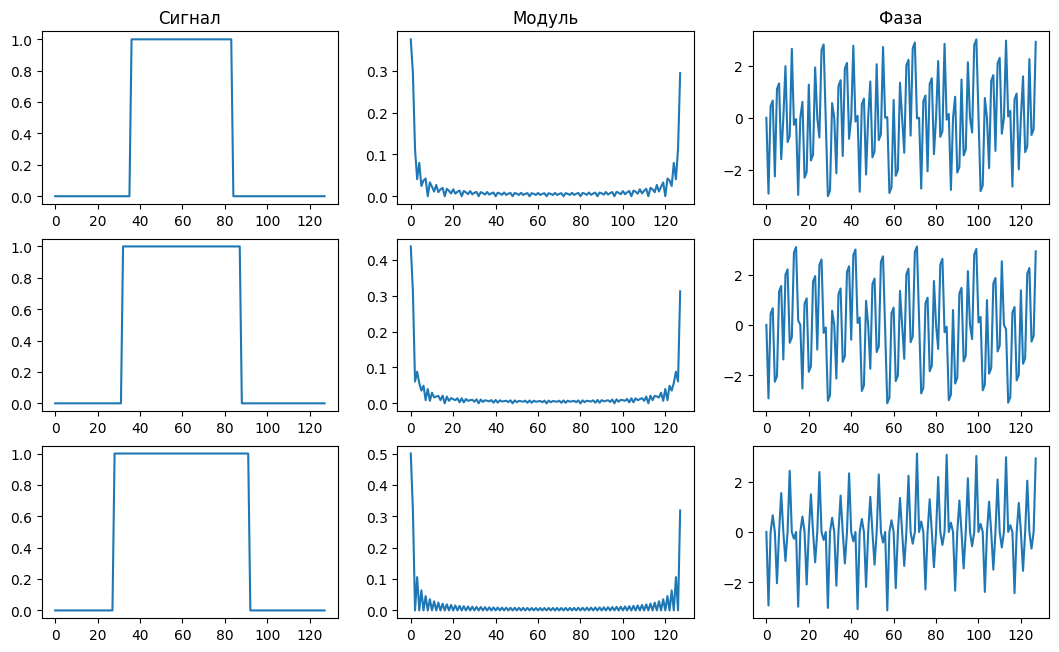
Автоматически созданное описание

Рис. 4.1 – Графики спектров

При увеличении ширины импульса спектр становиться более выраженным. Также частота фазы падает с расширением сигнала.

Рассчитаем спектр вручную для 4-го граффика.



При ручном расчёте мы получим следующие данные (рис. 4.2)

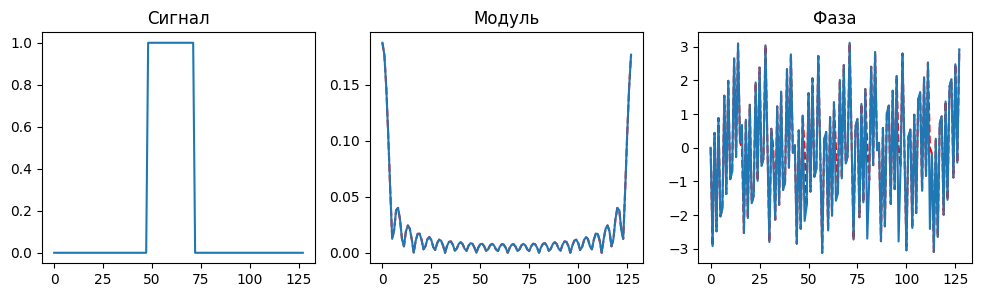


Рис. 4.2 – Ручной расчет

Сравнив данный график и полученный ранее видно, что они полностью совпадают.

1. На том же временном интервале создам периодический прямоугольный сигнал со скважностью 2 (меандр) и количеством периодов, кратным двум. Построим их характеристики (рис. 5.1).

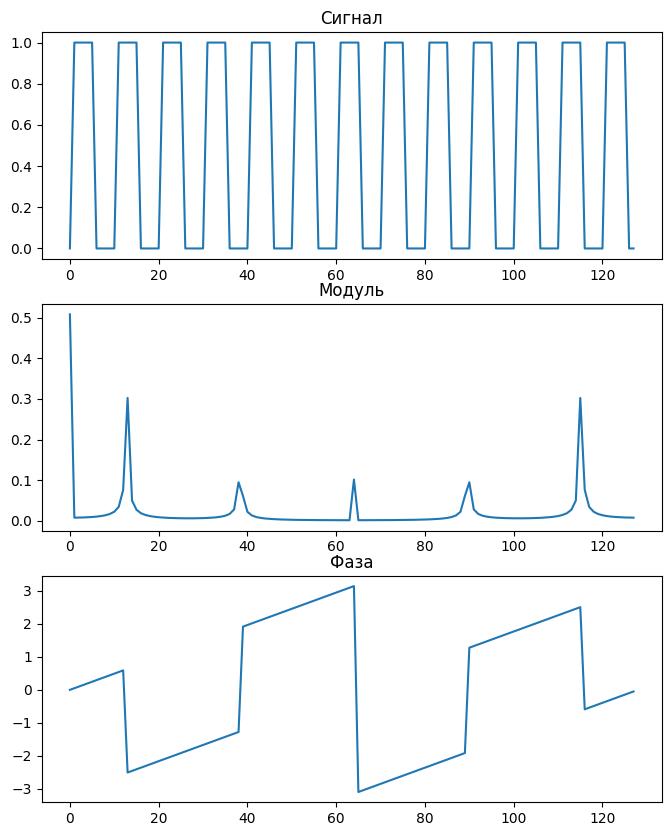


Рис. 5.1 - График спектра

Далее проведем ручной расчёт, так же как и в прошлом пункте (рис. 5.2).

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, График

Автоматически созданное описание

Рис. 5.2 – Ручной расчет

Сравнив графики видно, что они практически совпадают, но имеют малое различие в фазе. Данное различие получено вероятнее всего из-за округления результатов.

1. Покажем базисные функции преобразования Фурье(ограничьтесь только косинусным преобразованием), Уолша и Хаара.

Приведем базис Уолша для N = 24 (рис. 6.1)

array([[ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1],

[ 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1],

[ 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1],

[ 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1],

[ 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1],

[ 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1],

[ 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1],

[ 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1]])

Рис. 6.1 - Базис Уолша

Приведем базис Хаара (рис. 6.2)

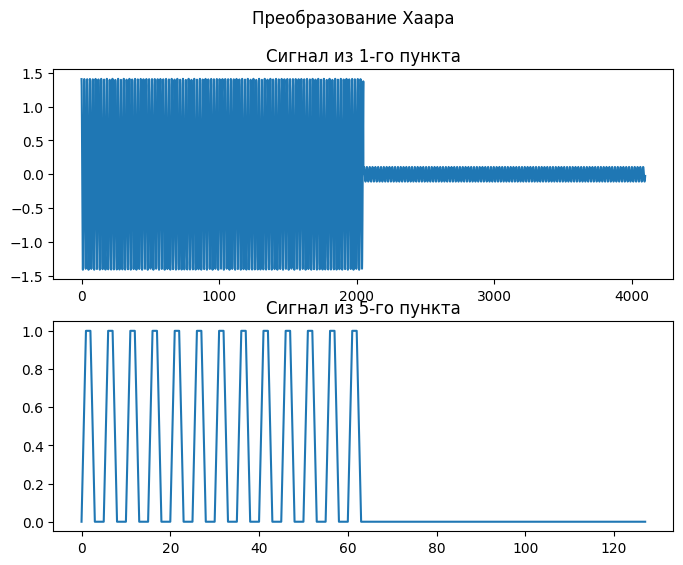
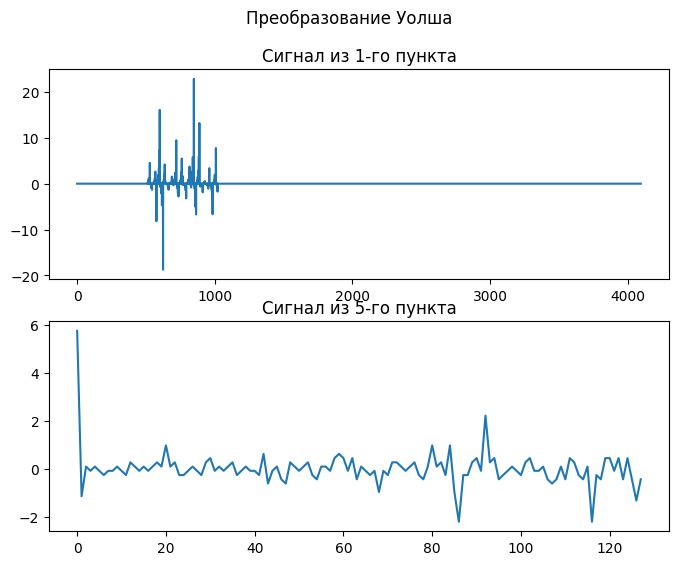
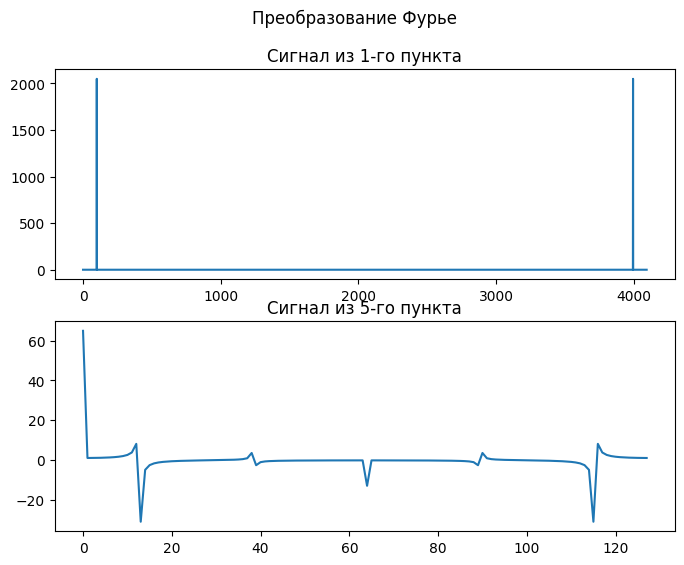
Изображение выглядит как текст, снимок экрана

Автоматически созданное описание

Рис. 6.2 - Базис Хаара

- базисная функция преобразования Фурье.

1. Построим спектр с помощью преобразований из пункта 6 сигнала х1 из   
   пункта 1, а затем сигнала из 5. Преобразование Фурье и Уолша хорошо справляются с синусоидальными сигналами, но Уолш плохо подходит для импульсных сигналов. А хаара служит в основном для сжатия сигнала.



1. Определим форму и ширину частотной характеристики двух соседних каналов анализатора Фурье. Это можно сделать в цикле for, изменяя частоту анализируемого сигнала с достаточно малым шагом (0.01) и

выделяя из спектра только отчет, принадлежащий каналу 35 (рис. 8.1).

Изображение выглядит как текст, График, снимок экрана, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рис. 8.1 – Частотные характеристики

Видно как у cos синусоидная форма, а у окна Хеннинга имеется ярко выраженный пик.

1. Построим частотную характеристику 3-х соседних каналов ДПФ.   
   Медленно меняя в цикле частоту сигнала с шагом 0.01 запоминая значение амплитуды каждого из 3-х каналов, после чего на одном   
   графике построим их (рис. 9.1).

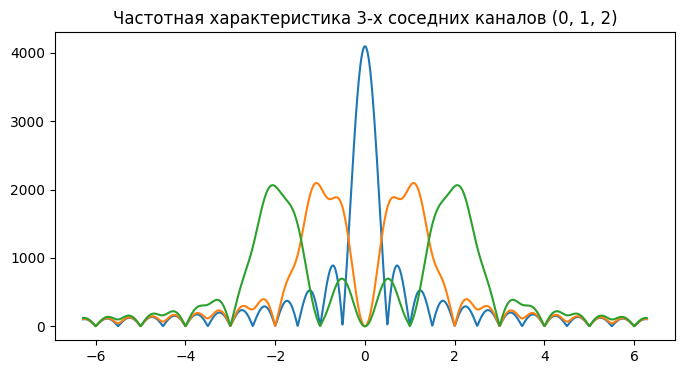


Рисунок 9.1

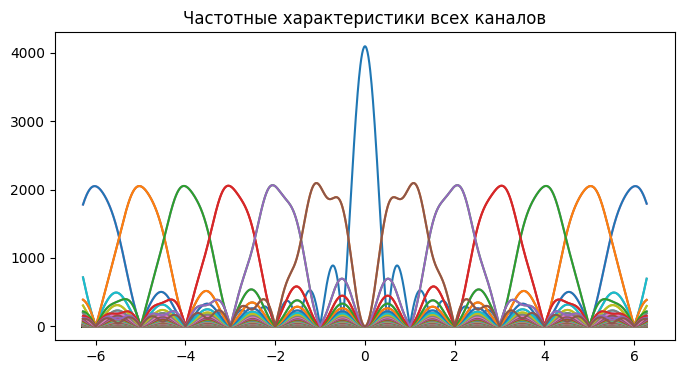


Рисунок 9.2

1. Построим частотные характеристики 3-х соседних каналов ДПФ как в   
   пункте 8 с использованием 3-х различных оконных функций (рис 10.1).

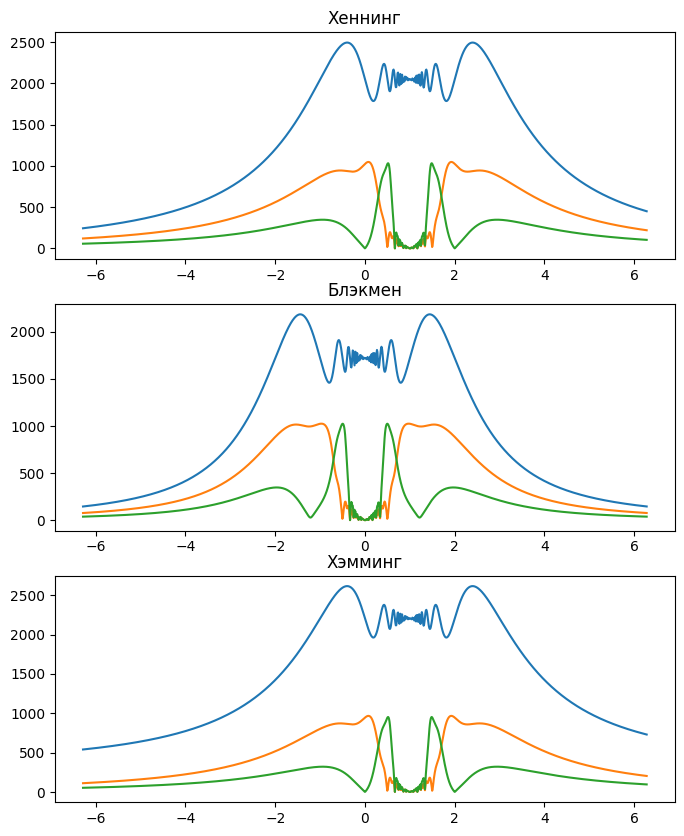


Рис. 10.1 - Частотные характеристики

При анализе видно, что изменяется только расположение, а формы идентичные.

**Выводы.**

1. Анализ спектра сигналов:

Применение быстрого преобразования Фурье (БПФ) дает возможность эффективно исследовать частотные характеристики сигналов. Существует прямая зависимость между частотным содержанием сигнала и расположением его гармоник в спектре.

2. Суммирование и умножение сигналов:

Сложение сигналов приводит к объединению их спектров, в то время как умножение создает новые частотные компоненты, соответствующие сумме и разности частот исходных сигналов.

3. Импульсы и их спектры:

Узкие импульсы обладают широкими спектрами, что подтверждает принцип неопределенности: чем меньше длительность сигнала во временной области, тем больше его спектр.

4. Оконные функции:

Применение оконных функций улучшает спектральный анализ, уменьшая побочные лепестки, но при этом увеличивает ширину основного лепестка. Разные оконные функции обеспечивают различные уровни компромисса между разрешением и подавлением побочных лепестков.

5. Частотные характеристики каналов:

Форма частотных характеристик дискретных фильтров определяется оконной функцией и шагом дискретизации. При изменении частоты спектр сигнала плавно варьируется, отражая вклад в соседние каналы.

6. Базисные функции преобразований:

Различные преобразования (Фурье, Уолша, Хаара) предоставляют базисы для представления сигналов. Базис Фурье позволяет разложить сигнал в частотной области, тогда как базисы Уолша и Хаара — в виде прямоугольных и ступенчатых компонентов.

7. Ручной расчёт спектров:

Теоретические расчеты спектров для импульсов и прямоугольных сигналов согласуются с результатами численного моделирования, что подтверждает правильность анализа.

Данная работа способствует более аналитическому пониманию принципов частотного анализа сигналов, влияния оконных функций и методов разложения. Приобретенные навыки полезны для обработки сигналов в цифровых системах, улучшения спектрального анализа.

**Определения:**

**Изображение выглядит как текст, Шрифт, белый, рукописный текст

Автоматически созданное описание**

Изображение выглядит как текст, Шрифт, белый, линия

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст, диаграмма, линия, Шрифт

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст, Шрифт, белый, линия

Автоматически созданное описание

Растекание спектра – эффект, при котором энергия сигнала в одной частотной области проявляется в других частотах. Он возникает из-за того, что сигнал в конечном итоге является дискретным в пространстве и времени, и поэтому не может быть точно представлен с помощью непрерывного набора частот

АЧХ – это зависимость амплитуды выходного сигнала некоторой системы от частоты её входного гармонического сигнала

ФЧХ – это зависимость разности фаз между выходным и входным сигналами от частоты сигнала

Спектр – физ. плотность распределения значений какой-либо физической величины, а также граф. представление такого распределения

Изображение выглядит как текст, Шрифт, белый, типография

Автоматически созданное описание

Теорема Котельникова, частота Найквиста.

Теорема Котельникова - фундаментальное утверждение в области цифровой обработки сигналов, связывающее непрерывные и дискретные сигналы и гласящее, что «любую функцию F(t), состоящую из частот от 0 до 𝑓1, можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом менее чем через 1/(2𝑓1) секунд.»

Частота Найквиста – частота, равная половине частоты дискретизации