

**Д. Х. ИМАЕВ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**  
по курсовому проектированию по дисциплине  
«Теория автоматического управления»  
(Электронный вариант)

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011

# СИНТЕЗ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА НА КАРЕТКЕ

Динамические модели перевернутых маятников различной конфигурации часто используются в исследованиях как наглядные примеры неустойчивых объектов, в частности, при сравнении методов синтеза алгоритмов автоматической стабилизации [ , ].

Отмечается, что многозвенные перевернутые маятники служат примерами шагающих роботов, ракет на старте, нескольких барж, которых толкает буксир и т. д. и т. п.

## 1. Перевернутый маятник на каретке

Принципиальная схема неустойчивого механического объекта — перевернутого маятника на каретке — изображена на рис. 1.

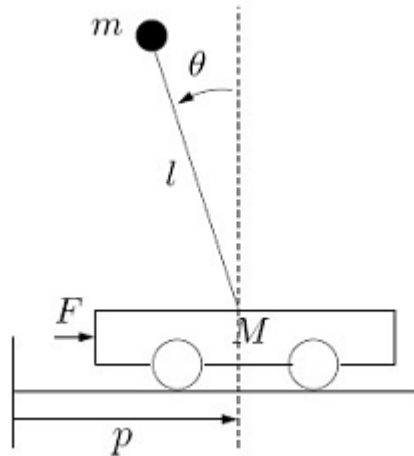


Рис. 1. Принципиальная схема перевернутого маятника на каретке

На рис. 1 приняты следующие обозначения параметров:

- $m$  – масса маятника, кг;
- $M$  – масса каретки, кг;
- $l$  – длина маятника, м,

а также переменных:

- $\theta(t)$  – угол отклонения маятника, рад;
- $x(t)$  – положение каретки, м;
- $f(t)$  – сила, действующая на каретку, Н (кг\*м/сек<sup>2</sup>).

Рассматриваемый механический объект имеет две степени свободы – вращательное движение маятника и поступательное движение каретки. Управление таким объектом осложняется тем обстоятельством, что имеется только одно управляющее воздействие – сила  $f(t)$ , приложенная к каретке. Кроме того, иногда можно измерять только положение каретки, и нет датчиков угла маятника, нет также датчиков скоростей их изменения.

## 2. Математическая модель маятника на каретке как объекта управления

Классические и современные методы синтеза систем автоматического управления основаны на математических моделях в виде дифференциальных или разностных уравнений.

Рис. 1 можно интерпретировать как символьную модель, представленную на языке механики. Для перевода на язык математических моделей используют законы классической механики. Такой способ построения математических моделей называют аналитическим — он возможен для объектов хорошо изученной природы.

Примем следующие допущения:

- массы сосредоточены (масса маятника сосредоточена в точке);
- отсутствует сопротивление среды;
- отсутствует трение.

В качестве обобщенных координат для рассматриваемой системы с двумя степенями свободы выберем  $\theta(t)$  — угол отклонения маятника и  $x(t)$  — положение каретки.

Для записи уравнений динамики механической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + f; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -\frac{\partial P}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $T$  — кинетическая энергия,  $P$  — потенциальная энергия (для консервативных сил),  $f$  — приложенная к каретке неконсервативная обобщенная сила.

Выражение для кинетической энергии запишется так

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v_A^2, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} v_A^2 &= \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2; \\ x_A &= x + l \sin \theta; \quad \dot{x}_A = \dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta}; \\ y_A &= l \cos \theta; \quad \dot{y}_A = -l \sin \theta \dot{\theta}; \\ v_A^2 &= \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

С учетом этих выражений вместо (2) получим

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2. \quad (3)$$

Потенциальная энергия для силы тяжести равна

$$P = -mgh = -mgl(1 - \cos \theta). \quad (4)$$

В результате подстановки (3) и (4) в (1) получим математическую модель рассматриваемого объекта в виде системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - mgl \sin \theta + ml^2 \cos \theta \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad (5)$$

$$(M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + ml \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} - ml \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = f. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) представляют собой выражения баланса моментов, действующих на маятник, и баланса сил, действующих на каретку.

### 3. Дифференциальные уравнения в форме Коши

Анализ объекта и его компьютерное моделирование упрощаются, если дифференциальные уравнения разрешены относительно старших производных.

Заметим, что вторые производные в исходные уравнения (5), (6) входят линейно. С учетом этого, приведем уравнения к матричной форме:

$$\begin{bmatrix} l & \cos \theta \\ ml \cos \theta & M + m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \sin \theta \\ ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + f \end{bmatrix}.$$

Прежде всего, проверим существование и единственность решения — вычислим определитель матрицы:

$$D = l(M + m) - ml \cos^2 \theta = lM + lm \sin^2 \theta \neq 0$$

и убедимся в том, что он не равен нулю.

Для решения системы уравнений воспользуемся правилом Крамера

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} g \sin \theta & \cos \theta \\ ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + f & M + m \end{vmatrix} = \\ &= ((M + m)g \sin \theta - ml \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - f \cos \theta) / D; \\ \ddot{x} &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} l & g \sin \theta \\ ml \cos \theta & ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + f \end{vmatrix} = (ml^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta + lf - mgl \sin \theta \cos \theta) / D. \end{aligned}$$

Заметим, что правые части уравнений не содержат переменных  $x$ ,  $\dot{x}$ , т. е. положение и скорость каретки не влияют на ускорения маятника и каретки. Объект может занимать любое положение или совершать равномерное поступательное движение. Это не отразится на динамике системы “каетка-маятник”.

Теперь легко записать уравнения объекта в форме Коши:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta};$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} = ((M + m)g \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - f \cos \theta) / D; \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x};$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = (ml^2\dot{\theta}^2 \sin \theta + lf - mgl \sin \theta \cos \theta) / D..$$

#### 4. Линеаризация дифференциальных уравнений

Будем рассматривать малые отклонения переменных  $\theta$  и  $\dot{\theta}$ , когда приближенно можно принять:  $\sin \theta \approx \theta$ ;  $\cos \theta \approx 1$ ;  $\dot{\theta}^2 \approx 0$ . Пренебрегая малыми величинами высших порядков, вместо нелинейных уравнений (7) получим линейные (линеаризованные) уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \dot{\theta}; \\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} &= \frac{(M + m)g\theta - f}{lM}; \\ \frac{dx}{dt} &= \dot{x}; \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{f - mg\theta}{M}. \end{aligned} \quad (8)$$

Запишем линейную систему (8) в матричной форме с использованием вектора состояний  $\mathbf{v} = (\theta \quad \dot{\theta} \quad x \quad \dot{x})'$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m+M}{lM}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{lM} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f; \quad (9)$$

$$x = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \times \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + 0 \cdot f. \quad (10)$$

Получена линейная модель в так называемой форме пространства состояний (ФПС):

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}f \\ x &= \mathbf{C}\mathbf{v} + Df\end{aligned}$$

Первое из этих уравнений называется *уравнением состояний*, второе — *уравнением выхода*.

ФПС является стандартом для анализа систем типа LTI – Linear Time-Invariant.

В уравнении выхода (10) за выход объекта — измеряемую непосредственно переменную принято положение каретки, т. е. скаляр. Поэтому матрица выхода  $\mathbf{C}$  оказывается строкой. Если за выход принимать вектор  $(\theta \ x)'$ , то матрица выхода будет иметь две строки

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а матрица обхода получится столбцовой

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 5. Передаточная функция объекта

Передаточная функция линейного объекта представляет собой отношение изображений выхода и входа при нулевых начальных условиях.

Прежде всего, получим характеристический полином матрицы

$$A(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2(s^2 - \frac{M+m}{lM}g), \quad (11)$$

который является знаменателем передаточных функций.

Далее получим полиномы числителей передаточных функций: от входа — силы  $F$ , приложенной к каретке, до переменной выхода — положения каретки  $x$

$$B_{xF}(s) = \frac{1}{M}(s^2 - g/l), \quad (12)$$

и до переменной  $\theta$  — углового положения маятника

$$B_{\theta F}(s) = \frac{1}{lM}s^2. \quad (13)$$

## 6. Анализ устойчивости положения равновесия

Устойчивость “в малом” положения равновесия  $(0\ 0\ 0\ 0)'$  нелинейной модели (7) можно выявить по линеаризованной модели (см. 4), т. е. на основе

первого метода Ляпунова. Условием асимптотической устойчивости положения равновесия нелинейной системы является принадлежность корней характеристического полинома (собственных значений матрицы состояний) линеаризованной системы левой полуплоскости.

Корни характеристического полинома (11) равны:

$$s_1 = s_2 = 0; s_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{M+m}{M}} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Имеется действительный положительный корень (в правой полуплоскости); кроме того, полином имеет двукратный нулевой корень. Это свидетельствует о неустойчивости положения равновесия нелинейной системы.

## 7. Компьютерное моделирование

Линеаризованные уравнения (9) позволяют исследовать устойчивость и качественный характер движений при малых отклонениях состояния системы от положения равновесия. Для исследования поведения объекта управления при любых отклонениях необходимо решать нелинейные уравнения.

Исходные нелинейные дифференциальные (7) уравнения нельзя решить аналитическим способом. Поэтому используют численные решения при конкретных начальных условиях и внешних воздействиях. Для автоматизации численных решений разработаны программные средства; далее будем использовать программу MATLAB/Simulink фирмы The MathWorks, Inc.

В окне MATLAB введем команду

`>>simulink3`

Появится окно с подсистемами блоков. Выберем опции File/New/Model; откроется окно без имени (Untitled). Построение компьютерной модели сводится к выбору соответствующих библиотечных блоков и их соединение ориентированными связями, как показано на рис. 2. Представленная структурная схема — модель объекта (программа) на языке графического редактора Simulink. Основу программы образуют два двойных интегратора, входами которых являются вторые производные переменных. Блоки Fcn и Fcn1, реализуют выражения, находящиеся в правых частях второго и четвертого уравнений системы (7). На входы этих блоков подается вектор  $(\theta \dot{\theta} f)'$ .

Сохраним модель под именем 'pendulum'.

Выберем следующие значения параметров:  $l = 0.25$  м;  $m = 0.2$  кг;  $M = 0.4$  кг. Проведем компьютерный эксперимент при начальных условиях:  $(\theta_0 \dot{\theta}_0 x_0 \dot{x}_0)' = (1 \ 0 \ 0 \ 0)'$  — маятник отклонен на 1 рад, угловая скорость маятника, положение и скорость каретки равны нулю. Рассматриваем свободные движения автономной системы — к каретке не оказывается воздействие, т. е.  $f = 0$ .

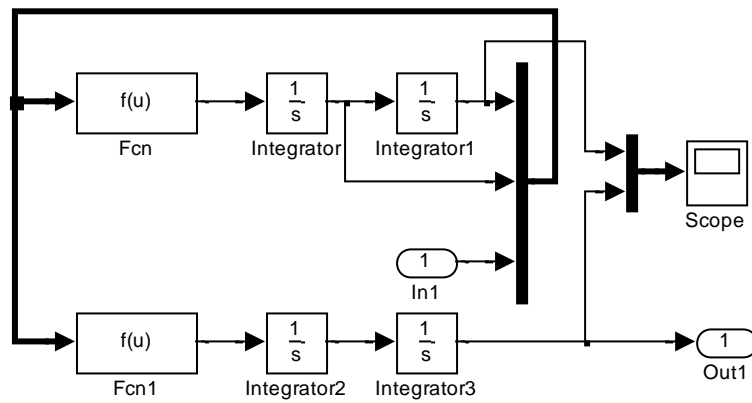


Рис. 2. Программа на языке графического редактора Simulink

На рис. 3 приведены результаты моделирования, из которых ясно, что верхнее положение маятника не устойчиво — при малейшем отклонении от него состояние системы не возвращается к нему, а начинаются колебания маятника относительно нижнего положения (см. рис. 3). Маятник колеблется с амплитудой  $(\pi - 1)$  радиан, а каретка также совершает периодические движения своеобразной формы.

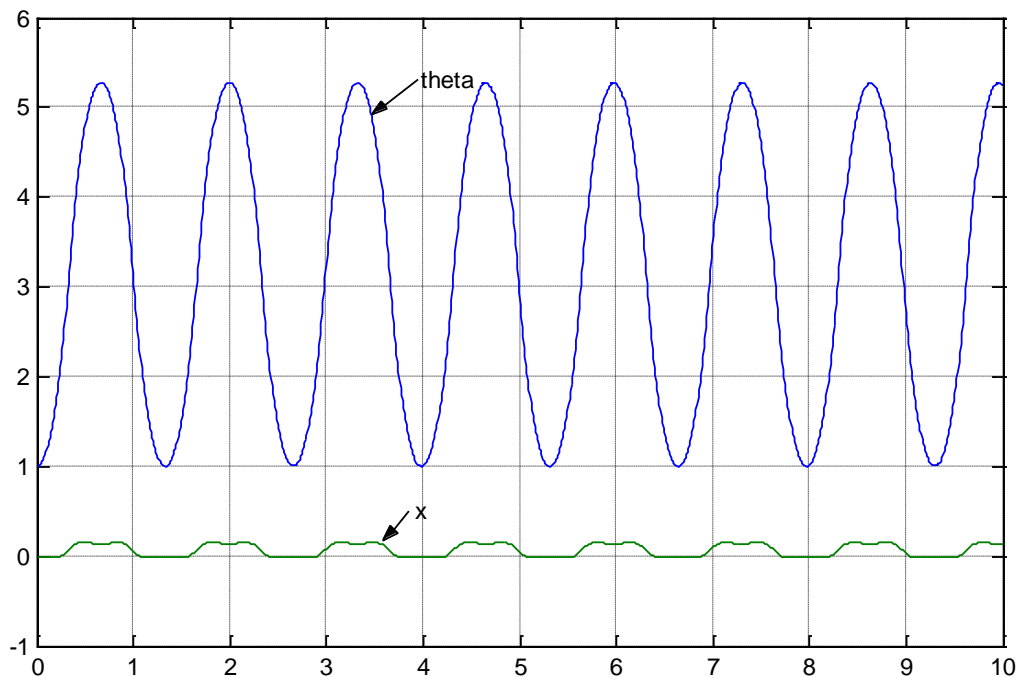


Рис. 3. Поведение объекта управления при начальных условиях  $(1 \ 0 \ 0 \ 0)'$  — отклонение маятника на 1 рад



Колебания маятника и каретки не затухают, так как построенная ранее математическая модель игнорирует потери энергии на преодоление сопротивления среды и трение.

Отметим, что компьютерное моделирование не позволяет, строго говоря, установить факт устойчивости или неустойчивости конкретного движения.

## 8. Линеаризация и анализ в среде MATLAB/Simulink

Программа MATLAB/Simulink позволяет получить линеаризованную для малых отклонений модель по команде

`[A,B,C,D]=linmod2('pendulum')`

если в правой части вписать имя simulink-модели. Для выбранных для иллюстрации параметров модели получим следующие матрицы:

A =

```
0    0    0  1.0000
0    0  1.0000    0
0  58.8000    0    0
0 -4.9000    0    0
```

B =

```
0
0
-10.0000
2.5000
```

C =

```
1  0  0  0
```

D = 0

Получена четвёрка матриц системы линейных дифференциальных уравнений в форме пространства состояний.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}f,$$

$$x = \mathbf{C}\mathbf{v} + Df$$

где:  $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)'$  — абстрактный вектор состояний.

Сопоставляя матрицы, полученные вручную (9), (10) и по команде `linmod2`, можно заметить отличие в расположении элементов. Это объясняется различной нумерацией переменных. Соответствие между абстрактным и физическим векторами состояний легко устанавливается по структуре матриц:  $v_1 = x$ ;  $v_2 = \theta$ ;  $v_3 = \dot{\theta}$ ;  $v_4 = \dot{x}$ .

Для линейных моделей разработано большое количество методов, алгоритмов и программ анализа и синтеза систем управления. Будем пользоваться программой MATLAB\Control System Toolbox.

Ляпунов показал, что об устойчивости “в малом” положении равновесия можно судить по линеаризованным уравнениям. Условием устойчивости является:  $\text{Re } s_i < 0$ , где  $s_i$  - собственные значения матрицы **A** (корни его характеристического полинома),  $i = 1, 2, 3, 4$ . Вычислим собственные значения матрицы **A** с помощью команды:

```
>> eig(A)
ans =
    0
    0
 7.6681
-7.6681
```

Видим, что имеется двукратное нулевое собственное значение и одно “правое” значение, что говорит о неустойчивости положения равновесия. Это отвечает нашим представлениям о поведении объекта и результатам компьютерного моделирования.

Программа MATLAB\Control System Toolbox позволяет получить передаточную функцию объекта численно.

Для получения числителя и знаменателя ПФ воспользуемся командами

```
>> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
num =
    0 -0.0000  2.5000  0.0000 -98.0000
den =
    1.0000 -0.0000 -58.8000    0    0
>> plant=tf(num,den)
```

```
-2.942e-015 s^3 + 2.5 s^2 + 6.16e-014 s - 98
```

```
-----
s^4 - 1.776e-015 s^3 - 58.8 s^2
```

Вычислительные ошибки приводят к наличию весьма малых коэффициентов, к сожалению, иногда повышающих степени полиномов. Следует вручную отредактировать коэффициенты

```
>> num=[2.5 0 -98];
>> den=[1 0 -58.8 0 0];
```

В результате получим ПФ объекта для малых отклонений

```
2.5 s^2 - 98
```

```
-----
s^4 - 58.8 s^2
```

Вычислим нули и полюсы ПФ :

```
>> zpk(plant)
Zero/pole/gain:
2.5 (s-6.261) (s+6.261)
```

```
-----
s^2 (s-7.668) (s+7.668)
```

Получена так называемая факторизованная форма ПФ.

Полюсы ПФ являются корнями характеристического полинома, т.е. собственными значениями матрицы  $A$ .

### 9. Синтез регулятора для перевернутого маятника на каретке операторным методом

Синтез проведем по линеаризованной модели объекта, полученной в форме пространства состояний (см. ). Характеристический полином матрицы (11) является знаменателем передаточных функций. Корни полинома, т. е. полюсы передаточных функций равны:

$$s_1 = s_2 = 0; s_{3,4} = \pm \sqrt{(M + m)/M} \sqrt{g/l}.$$

Для конкретных параметров объекта:  $l = 0.25; m = 0.2; M = 0.4$  имеем следующие полюсы:  $s_{1,2} = 0; s_{3,4} = \pm 1.2247$ .

Полином числителя передаточной функции объекта от входа — силы  $f$ , приложенной к каретке, до переменной выхода — положения каретки  $x$  (12). Корни этого полинома — нули передаточной функции:  $z_{1,2} = \pm \sqrt{g/l}$ .

Поскольку полюсы не равны нулям, передаточная функция по этому каналу является полной — объект полностью управляем и наблюдаем, т. е. нет неподвижных корней характеристического полинома — обратная связь, подобранная соответствующим образом, способна переместить любые корни. Заметим также, что отношение ненулевых полюсов и нулей зависит от соотношения масс маятника и каретки и равно  $\sqrt{(M + m)/m}$ .

Запишем дифференциальное уравнение объекта от входа — силы  $f$ , приложенной к каретке, до переменной выхода — положения каретки  $x$  в операторной форме

$$A_0(p)x(t) = B_0(p)f(t),$$

где комплексный аргумент  $s$  заменен символом оператора дифференцирования  $p$ , а полиномы знаменателя и числителя передаточной функции  $W_{xf}(s) = B_{xf}(s)/A(s)$  обозначены несколько иначе (введены нижние индексы 0):

$$A_0(p) = p^4 - \frac{M + m}{M} \frac{g}{l} p^2;$$
$$B_0(p) = \frac{1}{M} (p^2 - \frac{1}{l} g).$$

Численные значения коэффициентов полиномов для заданных параметров объекта ( $l = 0.25; m = 0.2; M = 0.4$ ) равны:

$$A_0(p) = p^4 - 58.8 p^2; \quad B_0(p) = 2.5(p^2 - 39.2) = 2.5 p^2 - 98.$$

Структурный синтез — определение порядка регулятора — сводится к анализу степеней полиномов. Степени операторных полиномов объекта  $A_0, B_0$  равны соответственно:  $n_0 = 4, m_0 = 2$ . Порядок регулятора равен  $n_R = m_R = n_0 - 1 = 4 - 1 = 3$ , а порядок системы  $n = n_0 + n_R = 4 + 3 = 7$ .

Искомое дифференциальное уравнение стабилизирующей отрицательной обратной связи (регулятора) также запишем в операторной форме

$$A_R(p)f(t) = -B_R(p)x(t).$$

В раскрытом виде с учетом степеней полиномов  $A_R, B_R$  получим:

$$(p^3 + a_{R2}p^2 + a_{R1}p + a_{R0})f(t) = (b_{R3}p^3 + b_{R2}p^2 + b_{R1}p + b_{R0})x(t).$$

Следовательно, необходимо найти значения семи коэффициентов дифференциального уравнения регулятора.

Поскольку порядок системы равен семи, назначим семь желаемых корней в левой полуплоскости:  $p_i^* = -0.2; -0.4; -1.0; -1.2247; -2.0; -4.0; -8.0$ . Один из корней характеристического полинома объекта (левый) оставляем на месте.

Желаемый характеристический полином построим с помощью команд MATLAB:

```
>> r=[-0.2 -0.4 -1 -1.2247 -2 -4 -8];
```

```
>> poly(r)
```

```
ans =
```

```
1.0000 16.8247 98.1853 260.0493 341.4710 221.4175 63.9056 6.2705
```

По этим коэффициентам желаемый полином запишется так

$$A^*(p) = p^7 + 16.8p^6 + 98.2p^5 + 260p^4 + 341p^3 + 221p^2 + 63.9p + 6.27.$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$A_3(p) = A_0(p)A_R(p) + B_0(p)B_R(p) =$$

$$\begin{aligned} &= (p^4 - 58.8p^2)(p^3 + a_{R2}p^2 + a_{R1}p + a_{R0}) + \\ &+ (2.5p^2 - 98)(b_{R3}p^3 + b_{R2}p^2 + b_{R1}p + b_{R0}) = \\ &p^7 + a_{R2}p^6 + (-58.8 + a_{R1} + 2.5b_{R3})p^5 + (a_{R0} - 58.8a_{R2} + 2.5b_{R2})p^4 + \\ &+ (-58.8a_{R1} + 2.5b_{R1} - 98b_{R3})p^3 + (-58.8a_{R0} + 2.5b_{R0} - 98b_{R2})p^2 - 98b_{R1}p - 98b_{R0}. \end{aligned}$$

Из тождества

$$A_3(p) \equiv A^*(p)$$

следует система уравнений

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -98 & 0 & 0 \\ -58.8 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & -98 & 0 \\ 0 & -58.8 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & -98 \\ 1 & 0 & -58.8 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{R0} \\ a_{R1} \\ a_{R2} \\ b_{R0} \\ b_{R1} \\ b_{R2} \\ b_{R3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \\ a_4^* \\ a_5^* + 58.8 \\ a_6^* \end{bmatrix}.$$

Матрица системы составлена из коэффициентов полиномов объекта; такая матрица называется матрицей Сильвестра. Ее определитель — *результант* полиномов  $A_0, B_0$  — отличен от нуля, если полиномы взаимно просты. Следовательно, задача размещения корней операторным методом разрешима, если характеристика вход-выход объекта является полной, т. е. объект полностью управляем и наблюдаем. В рассматриваемом примере решение существует и единственно.

Для численного решения системы воспользуемся программой MATLAB; введем матрицу

```
>>C = [ 0      0      0 -98.0000      0      0      0;
        0      0      0      0 -98.0000      0      0;
       -58.8      0      0  2.5000      0 -98.0000      0;
        0 -58.8000      0      0  2.5000      0 -98.0000;
       1.0000      0 -58.8000      0      0  2.5000      0;
        0  1.0000      0      0      0      0  2.5000;
        0      0  1.0000      0      0      0      0]
```

и коэффициенты желаемого полинома

```
>> a=[6.2705 63.9056 221.4175 341.4710 260.0493 156.9853 16.8247]';
```

К пятому элементу добавлен коэффициент, равный 58.8.

Для решения воспользуемся командой

```
>> R=C\a
```

R =

```
1.0e+003 *
   -2.5100
   -0.3315
    0.0168
   -0.0001
   -0.0007
    1.5037
    0.1954
```

Получен вектор коэффициентов регулятора **R**.

По коэффициентам вектора **R** составим числитель и знаменатель передаточной функции (операторы дифференциального уравнения регулятора):

```
>> den=[1 R(3) R(2) R(1)];
>> num=[R(7) R(6) R(5) R(4)];
>> regulator=tf(num,den)
```

Передаточная функция регулятора запишется так:

$$195.4 s^3 + 1504 s^2 - 0.6521 s - 0.06398$$

---


$$s^3 + 16.82 s^2 - 331.5 s - 2510$$

Дифференциальное уравнение регулятора имеет вид:

$$(p^3 + 16.82 p^2 - 331.5 p - 2510) f(t) =$$

$$= (195.4 p^3 + 1504 p^2 - 0.6521 p - 0.06398) x(t)$$

Заметим, что регулятор неустойчив — полином  $A_R(s)$  имеет отрицательные коэффициенты.

### ***9.1. Анализ линейной системы***

Передаточная функция объекта

```
>> plant=tf([2.5 0 -98],[1 0 -58.8 0 0])
```

$$2.5 s^2 - 98$$

---


$$s^4 - 58.8 s^2$$

Теперь можно получить передаточную функцию замкнутой системы

```
>> sysz=feedback(plant,regulator)
```

$$2.5 s^5 + 42.06 s^4 - 926.7 s^3 - 7924 s^2 + 3.248e004 s + 2.46e005$$

---


$$s^7 + 16.82 s^6 + 98.19 s^5 + 260 s^4 + 341.5 s^3 + 221.4 s^2 + 63.91 s + 6.27$$

Можно заметить, что знаменатель передаточной функции совпадает с желаемым полиномом.

Вычислим собственные значения замкнутой системы

```
>> eig(sysz)
```

$$-8.0000$$

$$-4.0000$$

$$-2.0000$$

$$-1.2247$$

$$-1.0000$$

$$-0.4000$$

$$-0.2000$$

Они получились в точности заданными.

Заметим, что операторный метод дает регулятор третьего порядка.

### ***9.2. Компьютерное моделирование нелинейной системы***

Подключим к нелинейной модели объекта регулятор, как показано на рис. 4.

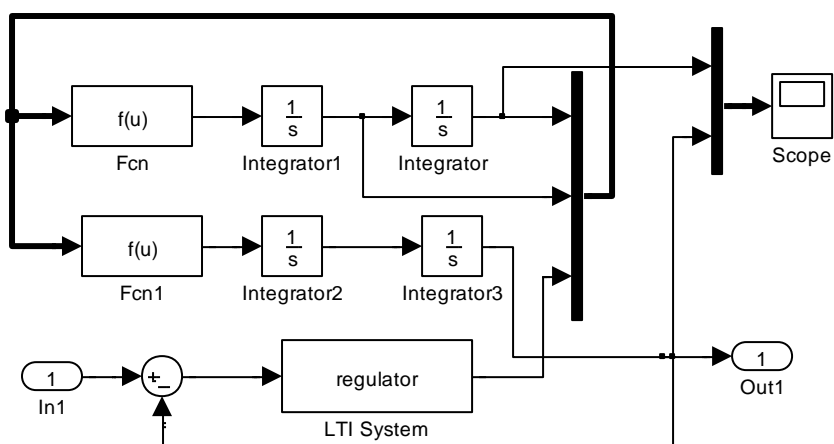


Рис. 4. Компьютерная модель системы стабилизации

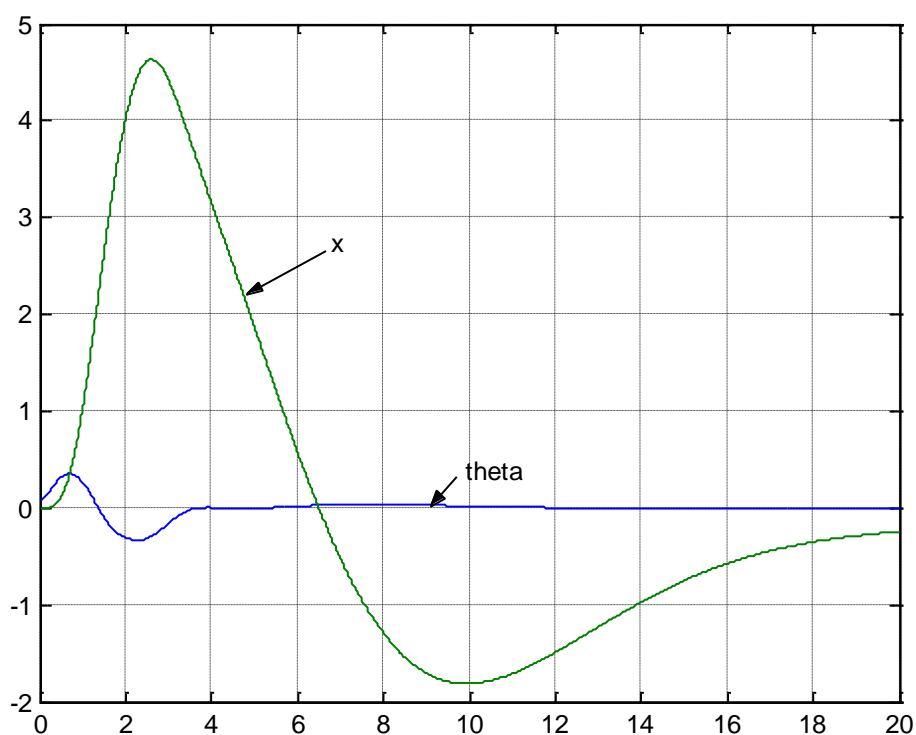


Рис. 5. Процессы в системе

Переходные процессы в системе при максимальном отклонении маятника  $\theta_{0\max} = 0.08 \text{ рад}$  приведены на рис. 5.

## 10. Синтез системы стабилизации перевернутого маятника

## на каретке методами пространства состояний

Необходимо создать систему автоматической стабилизации верхнего положения равновесия маятника. Каретка также должна находиться в заданном положении покоя.

Задачу будем решать на основе линеаризованной модели объекта, т. е. система автоматической стабилизации должна будет обеспечивать устойчивость при достаточно малых отклонениях состояния от положения равновесия. Введем параметры нелинейной модели:

```
>> l=0.25;  
>> m=0.2;M=0.4;  
>> g=9.8;
```

после чего получим линеаризованную модель по команде

```
[A,B,C,D]=linmod2('cartpole')
```

```
A =  
    0    0    0  1.0000  
    0    0  1.0000    0  
    0  58.8000    0    0  
    0 -4.9000    0    0
```

```
B =  
    0  
    0  
 -10.0000  
  2.5000
```

```
C =  
    1    0    0    0
```

```
D =  
    0
```

```
>> plant=ss(A,B,C,D);
```

Пусть имеется информация о всех переменных состояния объекта

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}f. \quad (13)$$

Алгоритм регулятора состояния запишется так:

$$F = -\mathbf{K}\mathbf{v} = -(k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = -(k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4). \quad (14)$$

Уравнение замкнутой системы в стандартной форме пространства состояний получим, если из уравнений объекта (13) и регулятора состояния (14) исключим переменную  $f$



$$\frac{dv}{dt} = (A - BK)v,$$

где  $(A - BK)$  — матрица замкнутой системы. Отметим, что замкнутая система получилась автономной — она не имеет входов.

Задача имеет решение, если объект *управляем*. Для анализа управляемости воспользуемся критерием Калмана, который сводится к проверке ранга матрицы управляемости  $[B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ :

```
>> rank(ctrb(A,B))
ans =
    4
```

Матрица управляемости имеет полный ранг, что свидетельствует о полной управляемости объекта. Действуя с силой  $f$  на каретку, можно стабилизировать верхнее положение маятника и привести каретку в исходное положение.

### 10.1. Метод размещения собственных значений

Задача синтеза заключается в определении матрицы регулятора состояния  $K$  из условия желаемого расположения собственных значений матрицы системы (корней характеристического полинома системы).

Существует произвол в выборе желаемых собственных значений системы. Чем дальше находится от мнимой оси собственное значение, тем быстрее затухают процессы. Однако, требование большего быстродействия означает необходимость приложения чрезмерных усилий на каретку. Назначим собственные значения системы с ориентацией на собственные значения объекта:

```
>> eig(A)
ans =
    0
    0
    7.6681
   -7.6681
```

Введем желаемые значения

```
>> p=[-1 -2 -4 -7]';
```

Матрицу регулятора, обеспечивающего желаемое расположение собственных значений, найдем по команде:

```
>> K=place(A,B,p)
K =
   -0.5714  -12.3229  -1.6704  -1.0816
```

Проведем анализ устойчивости системы:

```
>> eig(A-B*K)
ans =
   -7.0000
   -4.0000
   -2.0000
```

-1.0000

Замкнутая система имеет желаемое расположение собственных значений.

Регулятор состояния формирует управляющие воздействия на основе текущей информации обо всех переменных состояния. Реально измеряется только положение каретки  $x$ . Для вычисления остальных переменных состояния используют так называемый *наблюдатель состояния*. Если наблюдатель устойчив, то процессы затухают, в результате чего состояние модели  $\hat{\mathbf{v}}$  приближается к состоянию объекта  $\mathbf{v}$ .

Задача синтеза наблюдателя сводится к поиску матрицы  $\mathbf{L}$ , и имеет решение, если объект наблюдаем полностью. Наблюдаемость можно проверить по критерию Калмана, который сводится к проверке ранга матрицы наблюда-

емости  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} :$

```
>> rank(observ(A,C))
```

```
ans =
```

```
4
```

Матрица наблюдаемости имеет полный ранг, следовательно, объект наблюдаем полностью.

Управляемость и наблюдаемость объекта означает полноту передаточной функции объекта — отсутствие одинаковых нулей и полюсов.

Для синтеза наблюдателя воспользуемся методом размещения собственных значений — назначим собственные значения наблюдателя несколько дальше от мнимой оси в левой полуплоскости:

```
>> po=5*p
```

```
po =
```

```
-5
```

```
-10
```

```
-20
```

```
-35
```

Матрица наблюдателя  $\mathbf{L}$  вычисляется по команде:

```
>> L=place(A',C',po)'
```

```
L =
```

```
1.0e+004 *
```

```
0.0070
```

```
-0.3544
```

```
-2.6748
```

```
0.1634
```

*Динамический регулятор* получим, если объединить регулятор состояния и наблюдатель (рис. ). В результате динамический регулятор имеет четвертый порядок. Поэтому рекомендуется синтезировать редуцированный наблюдатель, учитывающий, что одна из переменных состояния — положение каретки  $x$  — измеряется непосредственно.

Уравнения динамического регулятора имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} &= \mathbf{A}_r \mathbf{v}_r + \mathbf{B}_r x; \\ -f &= \mathbf{C}_r \mathbf{v}_r + \mathbf{D}_r x,\end{aligned}$$

где матрицы вычисляются по команде:

```
>> [Ar,Br,Cr,Dr]=reg(A,B,C,D,K,L);
>> regulator=ss(Ar,Br,Cr,Dr);
```

Проверим устойчивость регулятора:

```
>> eig(Ar)
ans =
-55.0088 +52.1090i
-55.0088 -52.1090i
32.2791
-6.2615
```

Регулятор неустойчив — имеется положительное собственное значение. Передаточная функция регулятора выглядит так

```
>> [numr,denr]=ss2tf(Ar,Br,Cr,Dr);
>> regulator=tf(numr,denr)
8.655e004 s^3 + 6.58e005 s^2 - 4.543e004 s - 2e004
-----
s^4 + 84 s^3 + 2677 s^2 - 1.716e005 s - 1.16e006
```

Знаменатель ПФ — характеристический полином динамического регулятора — имеет отрицательный коэффициент.

## 10.2. Анализ системы с динамическим регулятором

Для анализа *по линейным моделям* получим матрицы системы уравнений замкнутой системы:

```
>> sysc=feedback(plant,regulator);
и вычислим собственные значения системы:
>> eig(sysc)
ans =
-35.0000
-20.0000
-10.0000
-1.0000
-2.0000
-4.0000
-5.0000
```

**-7.0000**

Замкнутая система с динамическим регулятором устойчива и имеет желаемые собственные значения.

Недостатком процедуры синтеза является избыточность наблюдателя, который заключается в превышении необходимого порядка. Поскольку одна из переменных состояния, а именно, положение каретки измеряется непосредственно, то нет необходимости в ее восстановлении. Может быть синтезирован наблюдатель пониженного порядка [ ].

### ***10.3. Компьютерное моделирование системы «нелинейный объект + динамический регулятор»***

Анализ линейной модели показывает, что существует область устойчивости положения равновесия — имеет место устойчивость “в малом”. Однако для моделей рассматриваемого типа нет аналитических методов определения размеров области притяжения. Единственным способом важной для практики оценки является многократное компьютерное моделирование.

Прежде всего, подключим динамический регулятор к нелинейному объекту, как это показано на рис. 6.

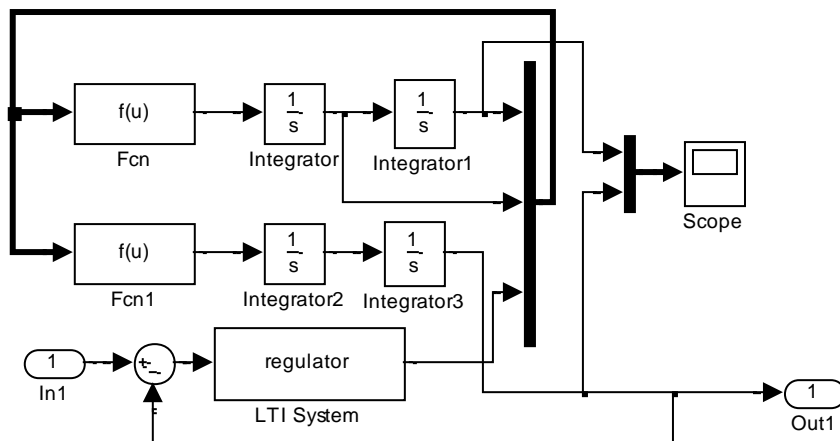


Рис 6. Система «нелинейный объект + динамический регулятор»

Для отредактированной нелинейной системы (см. рис. 6) целесообразен предварительный анализ устойчивости “в малом” положения равновесия. Для анализа существования области притяжения положения равновесия в соответствии с первым методом Ляпунова проведём линеаризацию замкнутой системы и вычислим собственные значения:

```
>> [Ac,Bc,Cc,Dc]=linmod2('cartpole_closed');  
>> eig(Ac)  
ans =  
-35.0000  
-20.0000  
-10.0000  
-1.0000
```

-2.0000  
-4.0000  
-5.0000  
-7.0000

Так как получены те же собственные значения, то область устойчивости существует.

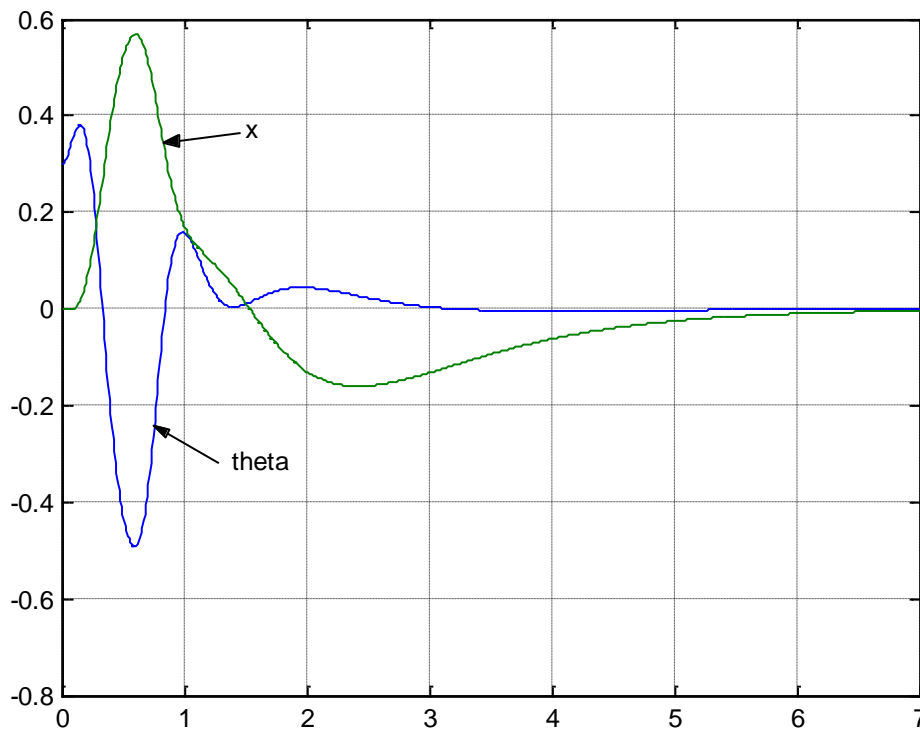


Рис. 7. Поведение системы при максимальном начальном отклонении маятника на 0.3 рад

Оценим размеры области притяжения положения равновесия путём многократных компьютерных экспериментов. Для примера на рис. 7. приведены результаты для максимального начального отклонения маятника, когда линейный динамический регулятор способен стабилизировать нелинейный объект.

## 11. Модели систем с цифровыми управляющими устройствами

Дискретизация времени и квантование уровней сигналов в большинстве современных систем управления обусловлена применением цифровых управляющих устройств. На рис. 8 изображена структура системы цифрового управления непрерывным объектом. Выделены аналого-цифровой АЦП и цифроаналоговый ЦАП преобразователи, реализующие операции дискретизации и континуализации сигналов. Как правило, АЦП выполняет измерительные, а ЦАП — исполнительные функции.

Аналого-цифровые преобразователи содержат квантизаторы уровня, в которых число уровней определяется длиной машинного слова. Если мощность множества значений сигнала велика, как это бывает в современных компьютерах, то квантованием уровня в большинстве случаев моделирования можно пренебречь.

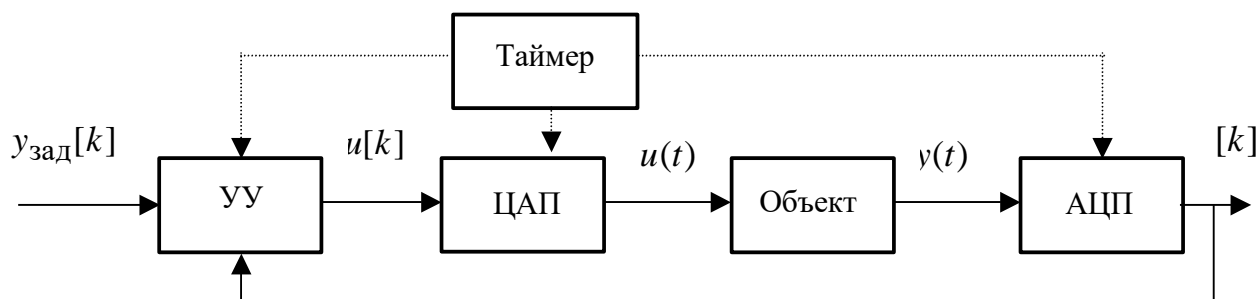


Рис.8. Система цифрового управления

Рассмотрим задачу построения математических моделей отдельных элементов и системы в целом.

Динамика непрерывного объекта описывается дифференциальными уравнениями. Если ограничиться классом линейных стационарных моделей с сосредоточенными параметрами, объект будет описан обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами или в форме передаточной функции  $W(s)$ , равной отношению изображений по Лапласу переменных выхода  $Y(s)$  и входа  $U(s)$  объекта при нулевых начальных условиях. Пусть цифровое управляющее устройство реализует алгоритм управления, описываемый в виде дискретной передаточной функции  $R(z)$ , равной отношению  $Z$ -изображений  $U(z)$  и  $E(z)$ , где  $E(z)$  — изображение ошибки системы.

Таким образом, модель системы (рис. 9) оказывается неоднородной (гибридной), так как она образована разнородными элементами, а переносимая между ними информация кодируется различными типами сигналов: аналоговыми —  $u_t, y_t$  и с дискретным временем —  $u_k, y_k, e_k$ .

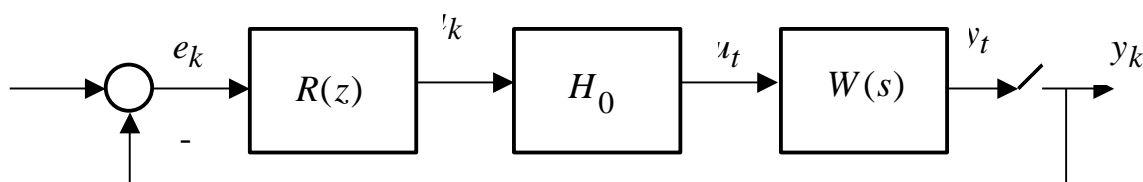


Рис. 9. Структурная схема системы цифрового управления

Разнородные элементы взаимодействуют между собой с помощью интерфейса, роль которого играют преобразователи АЦП и ЦАП (см. рис. 8).

Пренебрегая эффектом квантования уровня примем, что моделью АЦП является так называемый «ключ», который периодически замыкается на пренебрежимо малое (по сравнению со скоростью изменения переменной) время (рис. 10, а). Ключ позволяет получать информацию о переменной ошибки  $e(t)$  в равноотстоящие моменты времени  $e_k \equiv e[k] = e(kT)$ ;  $t = 0, T, 2T, \dots$ .

Другая часть интерфейса — ЦАП представляет собой *экстраполятор* или формирующее устройство. Его назначение — по определенному закону предсказывать значения функции  $u(t)$  до поступления на вход новой информации. Простейший и часто применяемый тип экстраполятора — экстраполятор нулевого порядка или *фиксатор* сохраняет постоянное значение сигнала:

$$u(t) = u[k]; \quad kT \leq t < (k+1)T.$$

Сигнал на выходе фиксатора, обозначаемого как  $H_0$ , имеет вид ступенчатой функции непрерывного времени.

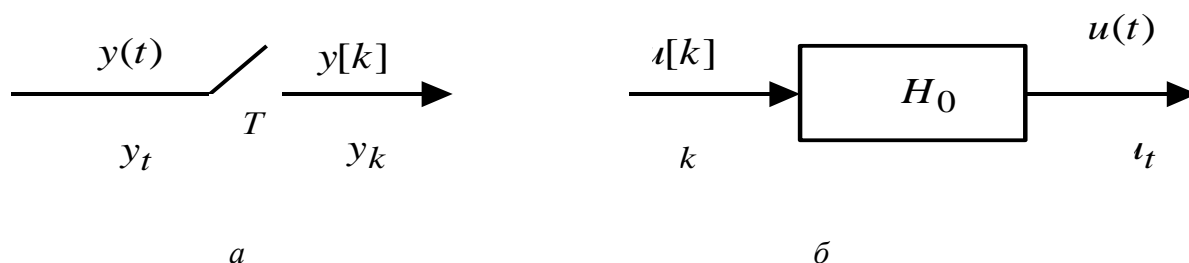


Рис. 10. Примеры графических изображений: дискретизатор времени непрерывного сигнала («ключ»)(а); фиксирующее устройство (б)

Таким образом, дискретизацию времени осуществляет «ключ», а континуализацию — фиксирующее или формирующее устройство (экстраполятор), условные изображения которых приведены на рис. 10. Эти элементы имеют дополнительные входы для периодических сигналов от таймера (см. рис. 9); на рис. 10, а рядом с ключом записан символ  $T$  — период замыкания ключа. Работа формирующего устройства в гибридных моделях обычно должна быть синхронизирована с работой ключа.

## 12. Исследование цифровых и импульсных систем

Для анализа и синтеза систем управления по неоднородным моделям не применимы расчетные методы, базирующиеся на аналитических методах решения уравнений динамики. Здесь возможности, как правило, ограничиваются компьютерной имитацией. Если, например, воспользоваться программой Simulink/MATLAB фирмы The MathWorks, Inc., то модель системы выглядит так, как это показано на рис. 11. На этом примере задание дискретной передаточной функции дополняется указанием периода дискретности времени  $T = 0.2$  с.

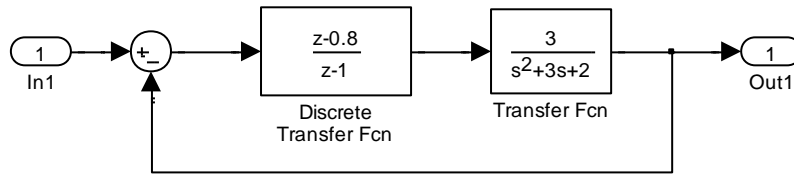


Рис. 11. Модель цифровой системы управления в среде Simulink/MATLAB

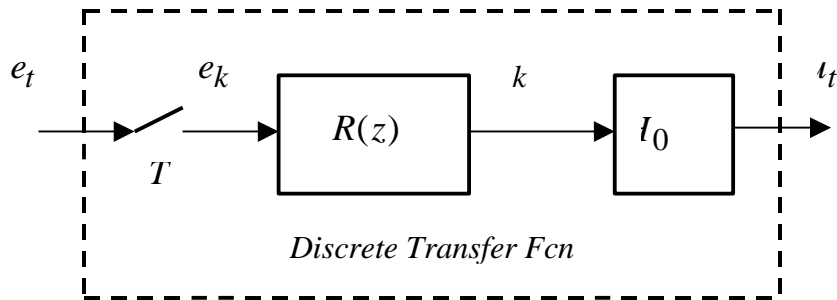


Рис. 12. Схема реализации блока Discrete Transfer Fcn

Следует обратить внимание на то, что выход блока *Discrete Transfer Fcn*, реализующего дискретную передаточную функцию, непосредственно подается на вход блока *Transfer Fcn*, имитирующего непрерывную передаточную функцию. Это возможно потому, что блок *Discrete Transfer Fcn* реализован в окружении интерфейса (рис. 12). При конкретизации содержания этого блока необходимо дополнительно указать время дискретизации  $T$ . Сигнал на выходе блока имеет вид ступенчатой функции непрерывного времени, как и положено для фиксатора.

### 13. Однородные модели цифровых систем управления

Основным, если не единственным, методом исследования систем управления по неоднородным (гибридным) моделям остается компьютерная имитация. Несмотря на широкие возможности современных программ имитации динамических систем, этот универсальный метод анализа конкретных систем плохо приспособлен для вывода суждений общего характера о поведении систем. Решение задач синтеза с помощью многократной имитации становится весьма трудоемким при значительной исходной неопределенности.

Возникает необходимость в поиске путей применения расчетных, аналитических методов исследования. Однако последние разработаны для линейных однородных моделей — непрерывных или дискретных, т. е. не могут непосредственно применяться к гибридным моделям. Таким образом, стано-



вится актуальной задача построения эквивалентных однородных моделей гибридных систем. Построение однородных моделей означает исключение всех других типов переменных кроме одного.

### 13.1. Дискретные модели цифровых систем управления

Для построения эквивалентной однородной модели с дискретным временем необходимо исключить переменные непрерывного времени  $y_t, u_t$  в последовательности преобразований, представленной на рис. 9. В результате замены последовательности из трех элементов – фиксатора, непрерывного объекта и ключа – получится дискретная модель объекта в виде разностных уравнений – модель ориентированная на ЭВМ). Модель системы окажется однородной – дискретной во времени, представленной, например, в форме разностных уравнений.

Рассмотрим кратко один из методов дискретизации линейной системы, дифференциальные уравнения которой представлены в форме пространства состояний:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x(0).$$

Ее решение имеет вид:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (15)$$

Поскольку на входе непрерывной системы стоит фиксатор, входная переменная остается постоянной от момента  $kT$  до момента  $(k+1)T$ , т. е. на интервале времени между моментами замыкания ключа. Полагаем, что работа фиксатора синхронизирована с работой ключа. Примем за начало и конец отсчета моменты  $kT$  и  $(k+1)T$ ; тогда решение (15) запишется так:

$$x[(k+1)T] = e^{At}x[kT] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]}d\tau Bu[kT].$$

После замены переменной интегрирования

$$\xi = (k+1)T - \tau$$

получим разностное уравнение в форме пространства состояний:

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k],$$

где

$$\begin{aligned} A_d &= e^{AT}; \\ B_d &= \int_0^T e^{A\xi}d\xi B = A^{-1}(e^{AT} - I)B. \end{aligned} \quad (16)$$

Как известно, функция от квадратной матрицы представляет собой матрицу того же размера. Ее собственные значения связаны с собственными значениями матрицы-аргумента по той же функциональной зависимости. Следовательно, собственные значения  $z_i$  матрицы состояний дискретной системы  $\mathbf{A}_d$  связаны с собственными значениями матрицы непрерывной системы так:

$$z_i = e^{s_i T}. \quad (17)$$

На рис. 13 изображены комплексные плоскости собственных значений непрерывной и дискретной систем.

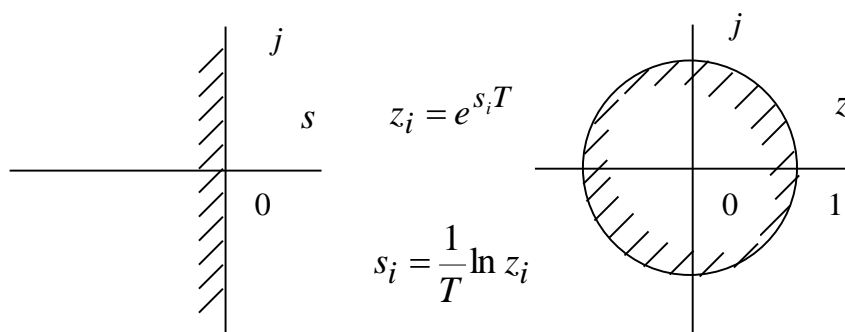


Рис. 13. Плоскости собственных значений непрерывной и дискретной систем

В программе MATLAB/Control System Toolbox процедура дискретизации линейных моделей (класса LTI – *Linear Time-Invariant*) выполняется по команде **c2dm**. Можно выбрать методы, предполагающие наличие фиксатора нулевого порядка на входе, метод Тастина и др.

В результате дискретизации объекта получим однородную дискретную модель замкнутой системы управления, структурная схема которой изображена на рис. 14. Для приведенного ранее примера (см. рис. 11) передаточная функция объекта в результате дискретизации времени с периодом  $T = 0.2$  равна:

$$W(z) = \frac{0.049z + 0.040}{z^2 - 1.489z + 0.549}.$$

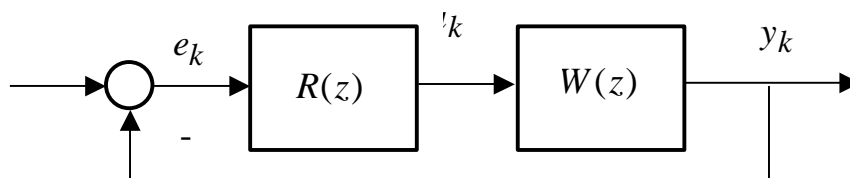


Рис. 14. Однородная дискретная модель цифровой системы управления

По отношению к однородной дискретной модели могут быть применены рассмотренные ранее методы анализа и синтеза.

### 13.2. Непрерывные модели цифровых систем управления

Если учесть, что современные контроллеры являются быстродействующими и обладают большой точностью представления уровней сигналов, для большинства технологических процессов можно пренебречь как дискретизацией времени, так и квантованием уровня. В такой ситуации цифровое управляющее устройство изначально моделируется как непрерывная система, а однородная модель в форме дифференциальных уравнений вполне адекватно описывает поведение всей системы управления. Необходимо подчеркнуть, что гибридные и однородные модели эквивалентны только при конкретизации свойств сигналов. В общем случае переход к однородным моделям путем игнорирования явлений дискретизации времени и квантования уровня сопровождается сокращением области адекватности моделей. В каждом конкретном случае следует количественно или качественно оценивать влияние этого эффекта на возможность объяснения поведения системы.

Рассмотрим ситуацию, когда необходимо учитывать специфику поведения цифровой системы или заранее нет уверенности в том, что эффект дискретизации времени не оказывает существенного влияния на процессы управления. В этом случае построение эквивалентной непрерывной модели связано с расчетами, сопровождающими исключение некоторых переменных.

Рассмотрим гибридную систему, изображенную на рис. 11. Для построения эквивалентной однородной непрерывной модели необходимо исключить переменные дискретного времени  $y_k, u_k$ . Процедура сводится к построению непрерывной модели для последовательности преобразований, отдельно представленной на рис. 15. Иногда такая процедура называется *континуализацией*, либо построением модели, ориентированной на объект. В результате получают эквивалентную непрерывную модель контроллера в форме дифференциального уравнения, описывающего причинно-следственную связь непрерывных переменных  $e_t \rightarrow u_t$ . Система окажется однородной непрерывной и будет описываться дифференциальными уравнениями.

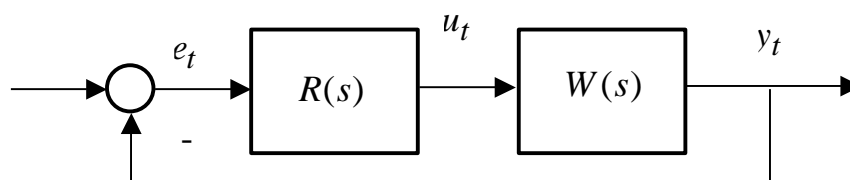


Рис. 15. Однородная непрерывная модель цифровой системы управления

Пусть имеем разностные уравнения цифрового управляющего устройства в форме пространства состояний:

$$\mathbf{v}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{v}[k] + \mathbf{B}_d e[k].$$

Процедура континуализации является обратной по отношению к процедуре дискретизации. Матрицы дифференциального уравнения в форме пространства состояний

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}e$$

могут быть получены из соотношений:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{T} \ln \mathbf{A}_d;$$

$$\mathbf{B} = (e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\mathbf{A}\mathbf{B}_d.$$

Разработаны различные методы и соответствующие алгоритмы континуализации. В программе MATLAB/Control System Toolbox процедура континуализации линейных моделей (класса LTI – *Linear Time-Invariant*) выполняется по команде **d2cm**. Можно выбрать методы, предполагающие наличие фиксатора нулевого порядка, метод Тастина и др.

Если собственные значения дискретной системы являются действительными отрицательными, то не существует соответствующей непрерывной системы того же порядка. Формально это следует из того, что не существует логарифма отрицательных действительных чисел. Действительно, составляющая движений дискретной системы (мода), определяемая действительным отрицательным собственным значением, является знакопеременной. В непрерывных системах моды, определяемые действительными собственными значениями, сохраняют знак.

Отметим, что команда **d2cm** программы MATLAB/Control System Toolbox в случае действительного отрицательного собственного значения дискретной системы предлагает непрерывную систему более высокого порядка с комплексными собственными значениями.

В результате континуализации контроллера получим однородную непрерывную модель замкнутой системы управления, структурная схема которой изображена на рис. 15. Для приведенного ранее примера (см. рис. 11) передаточная функция непрерывного регулятора равна:

$$R(s) = \frac{s+1}{s}.$$

## Литература Для самостоятельных занятий

### «Управление неустойчивыми механическими системами».

Тема для диссертационной работы.

Руководитель – ведущий научный сотрудник Института механики МГУ, доктор физико-математических наук, профессор А.М.Формальский. (лаб. 301, e-mail: formal@imec.msu.ru)

#### Краткая аннотация.

В приложениях часто возникают проблемы управления движением тех или иных механических систем. Обычно требуется построить закон управления, чаще всего в виде обратной связи, который обеспечивает функционирование системы в желаемом режиме. Определенные трудности вызывает проблема синтеза управления объектами, которые в отсутствие управления неустойчивы. Поскольку ресурсы реальных приводов так или иначе ограничены, то неустойчивый объект управления может быть выведен на желаемый режим работы, вообще говоря, не из всякого состояния.

Задачи управления однозвенным маятником, стабилизации его верхнего неустойчивого положения равновесия относятся к числу классических задач механики и теории управления. В большинстве работ задачи управления однозвенным маятником решаются путем перемещения точки подвеса маятника. Так, в работах [1, 2] предложено стабилизировать перевернутый маятник путем вертикальных перемещений его точки подвеса (стабилизированный таким образом маятник часто называют маятником Капицы). В работе [3] рассматривается задача стабилизации многозвенного перевернутого маятника. Она решается путем горизонтальных перемещений точки подвеса. Такой маятник может быть смонтирован на тележке, способной перемещаться горизонтально.

В диссертационной работе предполагается рассмотреть ряд маятниковых систем с неподвижной точкой подвеса. Управлять такими системами можно при помощи установленных на них маховиков. Подобные «маховичные» системы управления – гироины используются для управления ориентацией космических аппаратов. Можно управлять такими системами путем перемещения находящихся внутри них масс, подобно тому, как человек управляет колебаниями качелей, приседая на них и поднимаясь в определенные моменты времени. Можно, подобно гимнасту на перекладине, изменять угол между звеньями многозвенного механизма и тем самым управлять его движением.

#### Литература.

1. Stephenson A. On a New Type of Dynamical Stability. Mem-

#### наука

[Конференции](#)  
[Научные направления](#)  
[Архив](#)  
[Итоги 2008 года](#)  
[План на 2009 год](#)  
[Физико-химическая кинетика в газовой динамике](#)

#### экспериментальная база

[Аэродинамический комплекс](#)  
[Гидро- установки и стенды](#)  
[Гироскопы и мобильные роботы](#)  
[Ударные трубы и взрывные стенды](#)  
[Установки цикла МДТТ](#)

#### учебная работа

[Практикумы](#)  
[Спецкурсы](#)  
[Семинары](#)  
[Фестивали](#)  
[Научные темы](#)  
[Средняя школа](#)  
[Подготовительные курсы](#)

#### компьютерные технологии в механике

[ЦКТМ](#)

oirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society, Vol. 52, No. 8, Part II, 1908, pp. 1-10.

2. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. Журнал exper. и теор. физики. Том 21, Вып. 5, 1951.
3. Schaefer I.F., Cannon R.H. On the Control of Unstable Mechanical Systems. IFAC, 3d Congress, London, 1966.
4. Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
5. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием и торможением качелей. ПММ, Том 57, вып. 3, 1993.
6. Охоцимский Д.Е., Гурфинкель Е.В., Лавровский Э.К., Ленский А.В., Татарский С.Л., Формальский А.М. Стабилизация вертикального положения двухколесного велосипеда при помощи маховика. Доклады научной школы-конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы», Москва, 1999.
7. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Синтез оптимального управления раскачиванием и торможением двузвенного маятника. ПММ, Том 65, Вып. 2, 2001.
8. Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Панин Д.А., Формальский А.М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник. Известия РАН. Теория и системы управления, № 5, 2002.

1. 1. Колесников Ал.А. Синергетические законы стабилизации "перевернутого маятника" //Управление и информационные технологии. 2-я Всероссийская научная конференция 21 - 24 сентября 2004 г. Пятигорск. Сборник докладов в двух томах. Том 1. Изд-во "Спецпечать", 2004, с. 198 - 205.
  2. Kolesnikov A., Dougal R., Veselov G., Medvedev M., Kolesnikov Al., Kondratiev I. The Synergetic Control for DC/DC Boost Converter// Proc. of IFAC Symposium on Power Plant & Power Systems Control 2003. Seoul, Korea, September 15-19, 2003.
  3. Колесников Ал.А. Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов: управление механическими и колебательными системами// Материалы Всероссийской научной конференции "Управление и информационные технологии", 3-4 апреля, 2003 г., Санкт-Петербург. Сборник докладов в двух томах. Том 1.
  4. Попов А.Н., Веселов Г.Е., Колесников Ал.А. Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов: управление нелинейным электроприводом// Материалы Всероссийской научной конференции "Управление и информационные технологии", 3-4 апреля, 2003 г., Санкт-Петербург. Сборник докладов в двух томах. Том 1.
  5. Kolesnikov A., Veselov G., Dougal R., Kolesnikov Al., Kondratiev I., Kravtchenko P., Pogorelov M. Synergetic Synthesis of Adaptive Regulators for DC/DC Boost Converters// Proceedings of the Power

system 2002 conference: Impact of distributed generation, March 13-15, 2002. Ramada Inn, Clemson, SC.

6. Колесников А.А., Веселов Г.Е., Попов А.Н., Колесников Ал.А. Синергетический синтез антихаотических регуляторов// Тезисы докладов VII Международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Москва, ИПУ РАН, 22-24 мая 2002 г./ Под общей редакцией Е.С. Пятницкого, с.171-172.

7. Kolesnikov A. , Veselov G., Kolesnikov A., Monti A., Ponci F., Santi E., Dougal R. Synergetic Synthesis of Dc-Dc Boost Converter Controllers: Theory and Experimental Analysis// IEEE APEC 2002, Dallas, Texas, pp. 409-415, March 10-14, 2002.

8. Kolesnikov A., Popov A., Veselov G., Kolesnikov Al., Dougal R. Synergetic Control for Electromechanical Systems// Proceedings of the Fifteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems University of Notre Dame, August 12-16, 2002.

9. Колесников А.А., Веселов Г.Е., Попов А.Н., Кузьменко А.А., Медведев М.Ю., Колесников Ал.А. Новые синергетические технологии взаимосвязанного управления частотой и мощностью турбогенераторов// Научно-техническая конференция "Повышение качества регулирования частоты в ЕЭС". Сборник докладов. Москва, ВВЦ Выставочный павильон "Электрификация", 17 - 18 декабря 2002. С. 101 -107.

10. Колесников А.А., Веселов Г.Е., Попов А.Н., Кузьменко А.А., Медведев М.Ю., Колесников Ал.А. Новые синергетические технологии координирующего управления частотой и мощностью группы турбогенераторов// Научно-техническая конференция "Повышение качества регулирования частоты в ЕЭС". Сборник докладов. Москва, ВВЦ Выставочный павильон "Электрификация", 17 - 18 декабря 2002. С. 108 - 113.

11. Колесников Ал.А. Синергетическое управление системой "Перевернутый маятник на управляемой тележке"// Тезисы докладов VII Международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Москва, ИПУ РАН, 2002 г.

12. Kolesnikov A., Popov A., Veselov G., Kolesnikov Al. Development of Coordinating Control Strategies for Autonomous Electric Power System// Proceedings of the 36th Intersociety Energy Conversion Engineering Conference, July 29 - August 2, 2001, Savannah, Georgia, pp. 875 - 880.

13. Kolesnikov A., Veselov G., Popov A., Kolesnikov Al. Synergetic Synthesis of Vector Regulators for Nonlinear Electromechanical Systems// Proceedings of the 5th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS'01), July 4 - 6, 2001, Saint-Petersburg, Russia, pp. 1242-1245.

14. Колесников А.А., Веселов Г.Е., Попов А.Н., Колесников Ал.А. Алгоритмы энергосберегающего управления электромеханическими системами// Труды VI Международной научно-технической

конференции "Динамика технологических систем" г. Ростов-на-Дону, 2001, т. III, с. 40 - 44.

15. Kolesnikov A. , Veselov G., Popov A., Kolesnikov Al. Synergetic Control for AC and DC Electric Drives// Proceedings of the VII International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements Vrnjachka Banja, September 26-28, 2001.

16. Kolesnikov A.A., Veselov G.E., Popov A.N., Kolesnikov Al.A., Kuzmenko A.A. Synergetic control for nonlinear electromechanical systems// Proceeding of the First International Conference 15-18 February 2000, Bialystok (Suprasl) Poland. PP. 145 - 160.

17. Veselov G.E., Popov A.N., Kolesnikov Al.A. Chaos and direct self-organization of nonlinear systems// Proceeding of the First International Conference on Control and Selforganization in Nonlinear Systems 15-18 February 2000, Bialystok (Suprasl) Poland. PP. 181 - 190.

18. Kolesnikov A., Veselov G., Popov A., Kolesnikov Al., Kuzmenko A., Dougal R., Kondratiev I.A Synergetic Approach to the Modeling of Power Electronic Systems// The 7th Workshop on Computers in Power Electronics. July 16-18, 2000 Blacksburg, Virginia. Proceeding. pp. 251 - 254.

19. Колесников А.А., Веселов Г.Е., Попов А.Н., Колесников Ал.А., Кузьменко А.А., Кравченко П.Г. Синергетический синтез координирующего управления группами нелинейных объектов// Тезисы докладов Международной научно-технической конференции "Нелинейные науки на рубеже тысячелетий". 22 - 24 июня 1999г. Санкт-Петербург.

20. Веселов Г.Е., Колесников Ал.А. Аналитическое конструирование векторных законов управления асинхронными электроприводами// Известия ТРТУ. Специальный выпуск. Материалы XLIV научно-технической и научно-методической конференций профессорско-преподавательского состава, аспирантов и сотрудников ТРТУ. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1999, N2 (12), С. 58.

[www.keldysh.ru/papers/2007/source/prep2007\\_20.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2007/source/prep2007_20.pdf)[www.keldysh.ru/papers/2007/source/prep2007\\_20.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2007/source/prep2007_20.pdf) Федосов Б.Т. Управление неустойчивыми объектами. Обратный маятник

Но при выходе из строя автоматической системы управления неустойчивый объект может представлять ... Управление обратным маятником с помощью ПИД - регулятора ...

[model.exponenta.ru/.../bt\\_152\\_Inv\\_Pend\\_control\\_1.htm](http://model.exponenta.ru/.../bt_152_Inv_Pend_control_1.htm)

### Дополнительная литература

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ingenieur-Archiv. 1952. Bd 20. № 1.
2. Herrmann G., Jong I.C. On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // Trans ASME, J. Applied Mechanics. 1965. V. 32. № 3.
3. Hagedorn P. On the destabilisation effect of nonlinear damping in nonconservative systems with follower forces // Int. J. Nonlinear Mech. 197. V. 5. № 2.



4. 4. Агафонов С.А. Об устойчивости и автоколебаниях двойного маятника с упругими элементами, находящегося под действием следящей силы // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5.
  5. 5. Литвинов С.В. Устойчивость под действием следящей силы некоторых вращающихся модельных систем // Вестн. МГУ. Сер. 1. 2002. № 1.
  6. 6. Сейранян А.П. Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // Успехи механики. 1990. Т. 13. Вып. 2.
  7. 7. Палош В.Е. Исследование динамики двойного маятника со следящей и консервативной силами // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 3.
  8. 8. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Синтез оптимального управления раскачиванием и торможением двузвенного маятника // ПММ. 2001. Т. 65. № 2.
  9. 9. Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е. и др. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 5.
  10. 10. Решмин С.А. Метод декомпозиции в задаче управления перевернутым двойным маятником с использованием одного управляющего момента // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 6.
  11. 11. Формальский А.М. О стабилизации двойного перевернутого маятника при помощи одного управляющего момента // Изв. РАН. ТиСУ. 26. № 3.
  12. 12. Решмин С.А., Черноусько Ф.Л. Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3.
  13. 13. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 6.
  14. 14. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6.
  15. 15. Черноусько Ф.Л. Синтез управления нелинейной динамической системой // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2.
  16. 16. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций. М.: Машиностроение, 2004. 576 с.
  17. 17. Крутько П.Д. Задачи гашения энергии и алгоритмы управления движением динамических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 1999. № 6.
  18. 18. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974. 576 с.
  19. 19. Крутько П.Д. Декомпозирующие алгоритмы робастно устойчивых нелинейных многосвязных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 1.
  20. 20. Крутько П.Д. Робастно устойчивые структуры управляемых систем высокой динамической точности. Алгоритмы и динамика управления движением модельных объектов // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 2.
  21. 21. Крутько П.Д. Исследование чувствительности робастно устойчивых систем при параметрических и координатных возмущениях // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 6.
- Лавровский Э.К., Формальский А.М. Синтез оптимального управления раскачиванием и торможением двузвенного маятника. ПММ, 2001, Том 65, Вып. 2, с. 225-234.
  - Сиротин А.Н., Формальский А.М. Области достижимости и управляемости линейных дискретных систем. Изв. РАН, Теория и системы управления, 2002, № 4, с. 5-16.
  - Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Панин Д.А., Формальский А.М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник. Изв. РАН. Теория и системы управления. № 5, 2002, с. 14-24.
  - Ленский А.В., Формальский А.М. Двухколесный робот-велосипед с гиростабилизатором. Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003, №3, с. 176-183.
  - Aoustin Y., Formal'sky A. Control design for a biped: Reference trajectory based on driven angles as functions of the undriven angle. Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003, № 4, с. 159-176.
  - Aoustin Y., Formal'sky A. Simple anti-swing feedback control for a gantry crane. Robotica. Vol. 21, p. 655-666, 2003.
  - Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М. Маятник, управляемый при помощи маховика. ДАН. 2003, т. 392, № 6, с. 743-749.
  - Сиротин А.Н., Формальский А.М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях. Автоматика и телемеханика, 2003, № 12, с. 17-32.
  - Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М. Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса. Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004, № 1, с. 27-38.
  - Chevallereau C, Formal'sky A, and Djoudi D. 2004. Tracking of a Joint Path for the Walking of an Underactuated Biped, Robotica, 22(1), p. 15-28.
  - Formal'sky A. M., Sirotn A. N. On the Geometric Properties of Reachable and Controllable Sets for Linear Discrete Systems. Journal of Optimization Theory and Applications. August 2004, vol. 122, no. 2, p. 257-284, Kluwer Academic Publishers.

- Ленский А.В., Формальский А.М. Гироскопическая стабилизация двухколесного робота-велосипеда. ДАН, Т. 399, № 3, 2004, с. 319-324.
- Yannick Aoustin, Alexander Formal'sky. On the stabilization of a biped vertical posture in single support using internal torques. Robotica, January 2005, V. 23, Issue 1, p. 65-74.
- Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 4. С. 165-173.
- Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. К теории управления моноциклом // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. с. 569-583.
- Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Методы стабилизации неустойчивых объектов // Гироскопия и навигация, 2005, №2(49), с. 7-18.
- Y. Aoustin, A. Formal'sky and Y. Martynenko, "A Flywheel to Stabilize a Two-Link Pendulum". Proc. IFAC World Congress 2005, Prague, CD-ROM.
- Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Проблемы управления неустойчивыми системами // Успехи механики, 2005, №2, с. 73-135.
- [Формальский А.М. О стабилизации перевернутого маятника с неподвижной или подвижной точкой подвеса // ДАН, Т. 406, № 2, 2006, с. 175-179.](#)
- Формальский А.М. Перевернутый маятник на неподвижном и подвижном основании // ПММ, Т. 70, № 1, 2006, с. 62-71.
- ... всего более 160 опубликованных книг, статей.

Филимонов Ю.М. К задаче об оптимальном управлении математическим маятником // Дифференц уравнения. 1965. Т. 1. № 8. С. 1007-1015.  
4.

Chernousko F.L.,  
Reshmin S.A.  
Time-optimal  
swing-up feed-  
back control of a  
pendulum // Non-  
linear Dynamics.  
2007. V. 47. № 1-  
3. P. 65-73.

5. Решмин С.А.,  
Черноусько Ф.Л.  
Оптимальное по  
быстродействию  
управление пе-  
ревернутым ма-  
ятником в форме  
синтеза // Изв.  
РАН. Теория и  
системы управ-  
ления. 2006. №  
3. С. 51-62.
6. Решмин С.А.,  
Черноусько Ф.Л.  
Оптимальный по  
быстродействию  
синтез управле-  
ния нелинейным  
маятником // Изв.  
РАН. Теория и  
системы управ-  
ления. 2007. №  
1. С. 13-22.
7. Решмин С.А.  
Поиск главного  
бифуркационного  
значения макси-  
мального управ-  
ляющего момен-  
та в задаче син-  
теза оптимально-  
го управления

маятником // Изв.  
РАН. Теория и  
системы управ-  
ления. 2008. №  
2. С. 5-20.