МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АПУ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №4

по дисциплине «Теория автоматического управления. Часть 2. Нелинейные системы»

Тема: Метод фазового пространства

Студент гр. 2392	____________________	Жук Ф.П.
Преподаватель	____________________	Имаев Д.Х.

Санкт-Петербург
2025

Цель работы.

Изучить поведение различных динамических систем (математического маятника, нелинейной системы управления, осциллятора Ван дер Поля и аттрактора Лоренца) с помощью анализа их фазовых портретов.

Обработка результатов эксперимента.

В ходе работы, была рассмотрена математическая модель маятника без трения, описываемая системой дифференциальных уравнений.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega;$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\, c\, sin(\theta).$$

Также была написанная функция drawPhasePortrait (рис. 1).

```
def drawPhasePortrait(
        args,
        deltaX = 1,
        deltaDX = 1,
        startX = 0,
        stopX = 5,
        startDX = 0,
        stopDX = 5,
        ts = 10,
        nt = 101
    ):
    for y0 in range(startX, stopX, deltaX):
        for dy0 in range(startDX, stopDX, deltaDX):
            sol = calcODE(args, y0, dy0, ts, nt)
            plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], 'b')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('dx/dt')
    plt.grid()
    plt.show()
```

Рис. 1 - Функция drawPhasePortrait

Аргументы функции:

- args — параметры ОДУ (см. шаг 1),
- deltaX — шаг начальных условий по горизонтальной оси (переменной состояния),

- deltaDX — шаг начальных условий по вертикальной оси (производной переменной состояния),
- startX — начальное значение интервала начальных условий,
- stopX — конечное значение интервала начальных условий,
- startDX — начальное значение интервала начальных условий,
- stopDX — конечное значение интервала начальных условий,
- ts — длительность решения,
- nt — число шагов в решении (= время интегрирования * шаг времени).

Далее были получены следующие фазовые портреты с разными параметрами времени, рисунок 2 – параметры по умолчанию, рисунок 3- изменённые параметры времени и увеличенным числом точек.

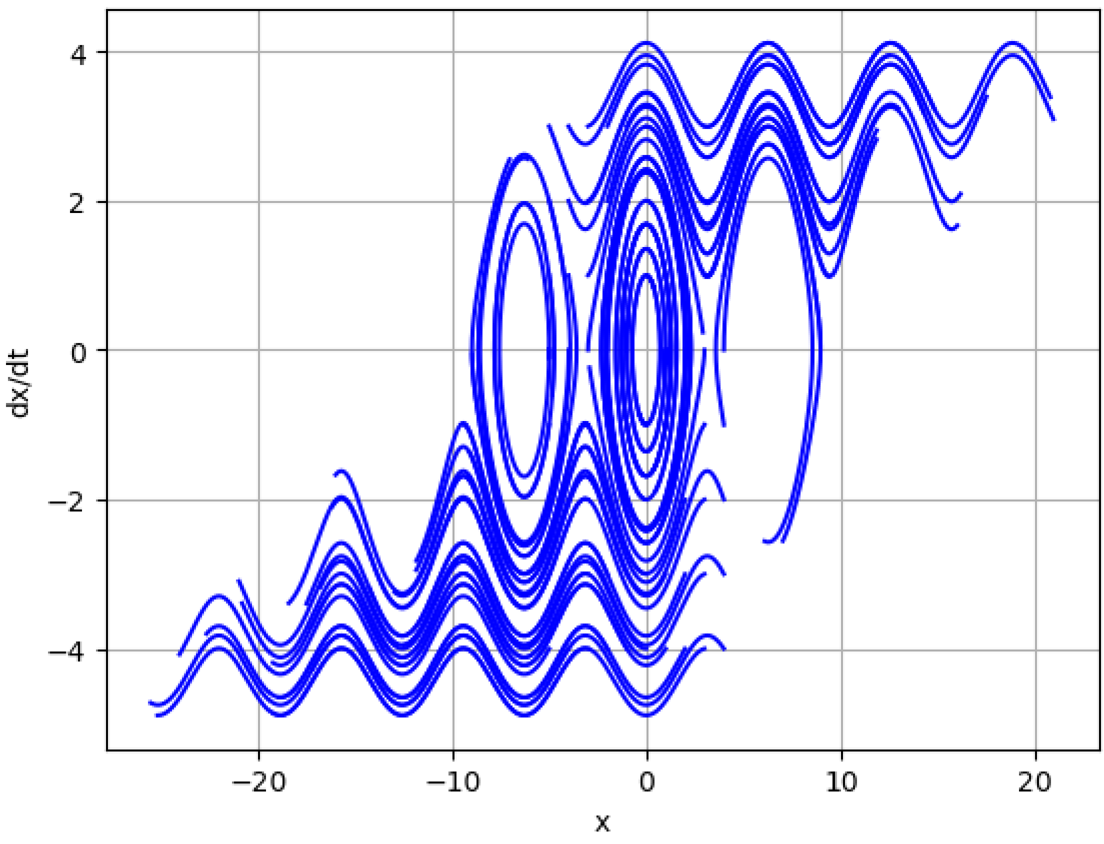

Рис. 2 - Фазовый портрет математического маятника

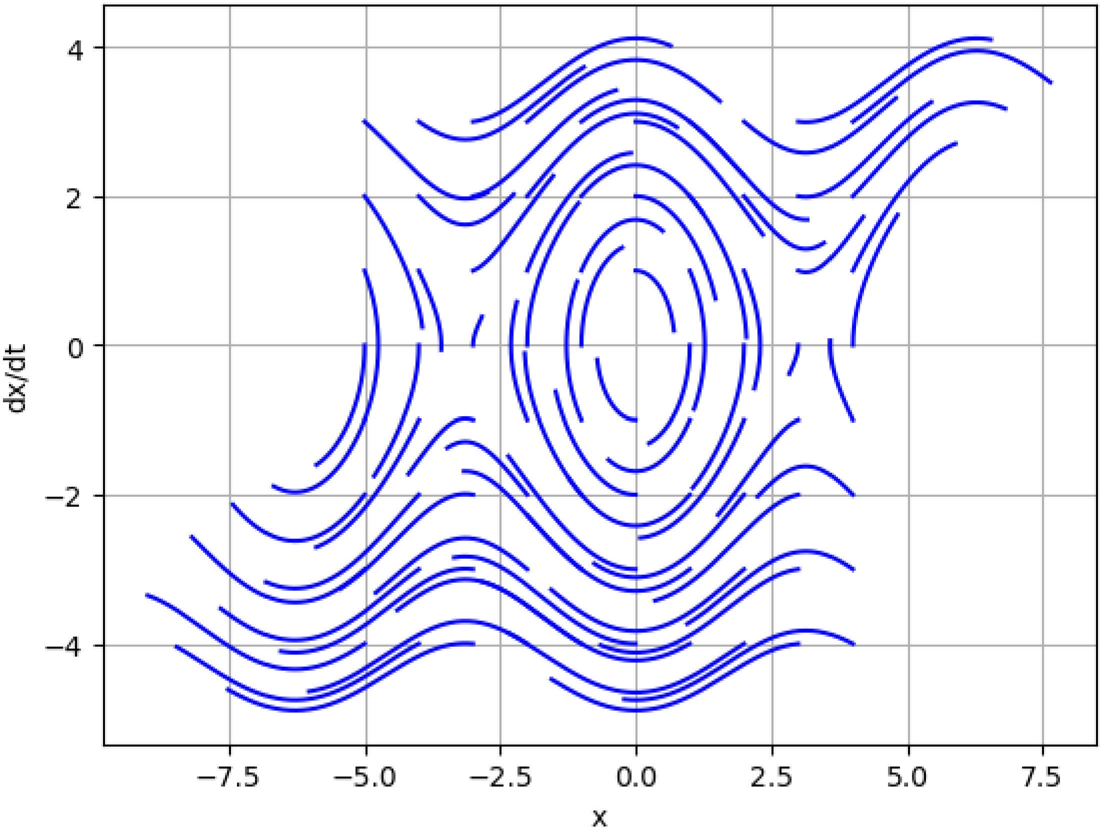

Рис. 3 - Фазовый портрет математического маятника

Далее был получен фазовый портет систем математического маятника с учетом вязкого трния. Рассматриваемая математическая модель маятника с учетом вязкого трния, описываемая системой дифференциальных уравнений.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega;$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -b\omega - \, mgl\, sin(\theta),$$

, где m = 0.2 $*$ $Nvar$, l = 5 / $Nvar$, b = 0.1 + 0.015 $*$ $Nvar$, $Nvar = 8$.

На полученном фазовом портрете (рис. 4) прослеживаются ключевые особенности системы с трением: все траектории постепенно закручиваются по спирали к устойчивым положениям равновесия (в нижнем положении). Особые точки (типа “седло”) являются неустойчивыми, но теперь траектории (в их окрестности) деммонстрируют себя иначе, не образуют замкнутых петель, а откланяються от этих точек.

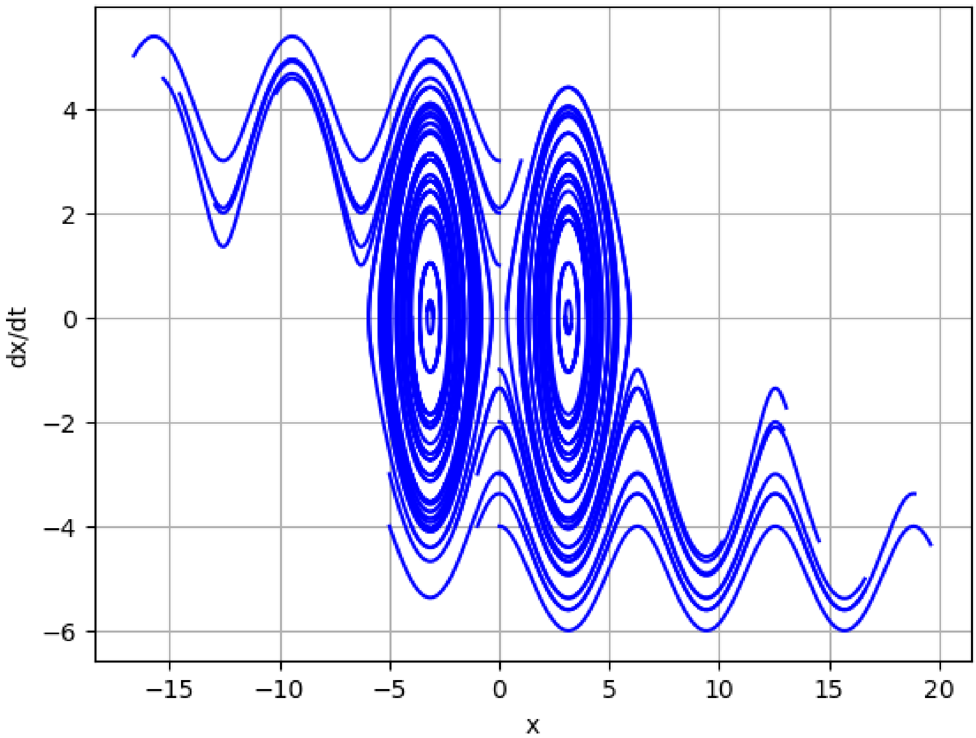

Рис. 4 - Фазовый портрет маятника с трением

Трение кординально изменяет поведение системы. В данном примере все траектории стремяться к точкам тавновесия вместо, бесконечных колебаний по замкнутым орбитам.

Далее была рассмотренна нелинейная модель структурная схема системы которой изображенна на рисунке 5.

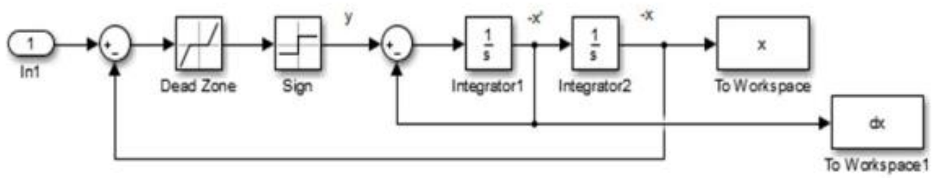

Рис.5 - Структурная схема системы

имеющая уравнение вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \begin{cases} 1 - v, \text{если } u - x > b \\ -1 - v, \text{если } u - x < -b \\ -v, \text{если } |u - x| \le b \end{cases} \end{cases}$$

, где b =0.2 * $Nvar$ + 0.2, $Nvar$ = 8.

Фазовый портрет нелинейной системы представлени на рисунке 6.

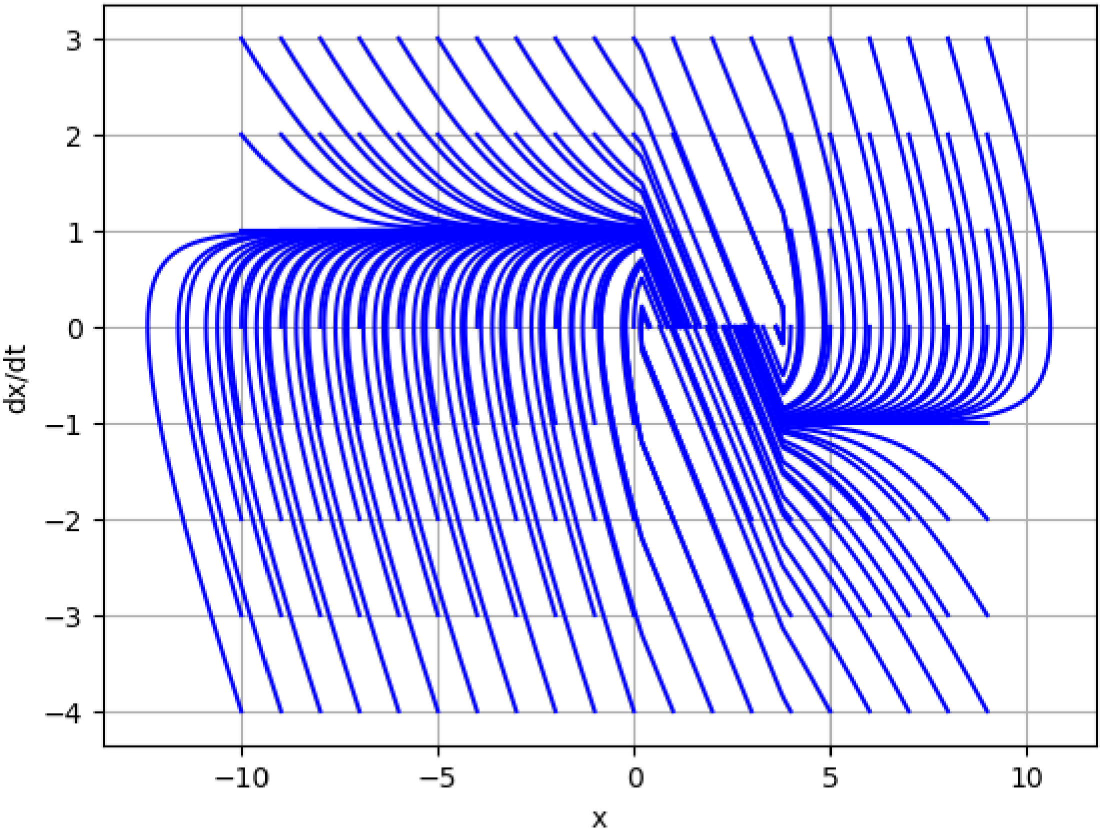

Рис. 6 - Фазовый портрет системы заданной схемой

Фазовый портрет этой системы демонстрирует три различных режима поведения:

1. При u-x > b - система стремится к установившемуся режиму с постоянной скоростью v = 1.
2. При u-x < -b - система асимптотически приближается к скорости v = -1.
3. При |u-x| <= b - система замедляется до полной остановки.

Если x > 0 сильно отличается от заданного значения u, система стремиться к значению +1 или -1. Если же x находится близко к u, система плавно стремится к 0.

Далее было рассмотренно уравнение генератора колебаний (осциллятора) предложены голландским инженером и физиком Бальтазаром ван дер Полем. Оно имееет уравнение.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu(1 - x^2)y - x. \end{cases}$$

Были проанализированны фазовый портрет с коэффициентами μ равными: 8, 4, 16, они предствленны на рисунках 7, 8, 9 сообведственно.

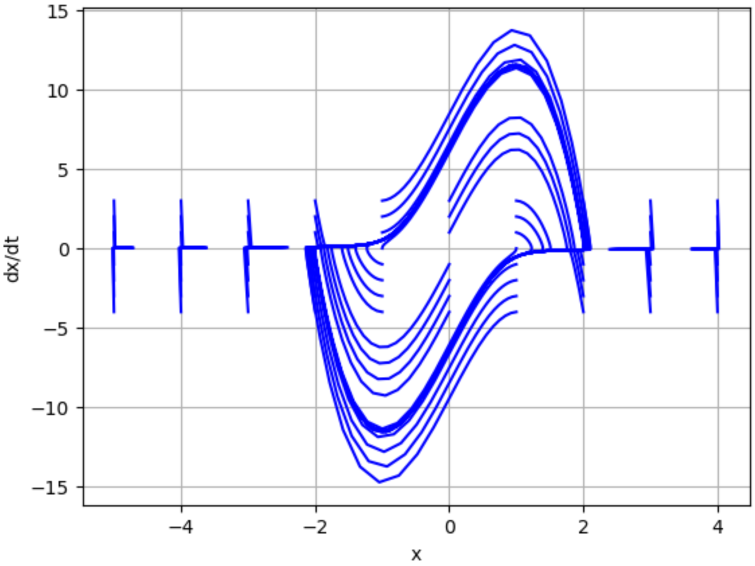

Рисунок 7 - Фазовый портрет при μ = 8

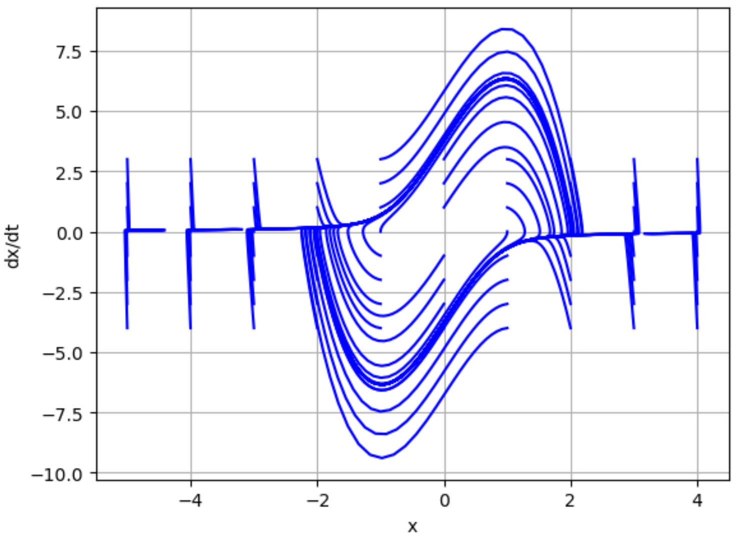

Рисунок 8 - Фазовый портрет при μ = 4

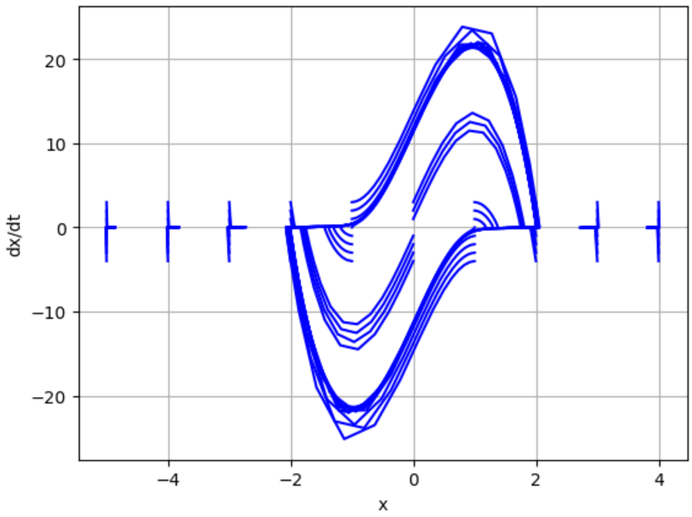

Рисунок 9 - Фазовый портрет при μ =16

При анализе изображений можно заметить, что с увеличение μ – цикл становится более вытянутым, колебания - более резкими и в итоге получаются релаксационные колебания с резкими скачками. При любом μ система всегда выходит на устойчивые колебания.

Далее был построен фазовый портрет аттрактора Лоренца (рис. 10) имеющий уравнение вида:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x); \\ y' = x(r - z) - y; \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

,где σ= 10, r = 28, b = 8/3 и начальных условий $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

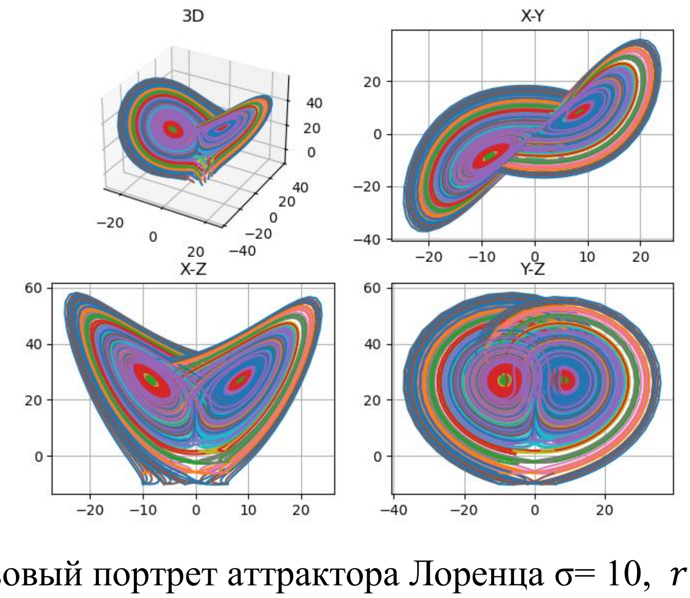

Рис. 10 - Фазовый портрет аттрактора Лоренца σ= 10, r = 28, b = 8/3

Далее исследовано влияние параметра r на поведение системы, при использовании только одного начального условия.

При уменьшении r до 8 (рис. 11) траектория быстро стремится к неподвижной точке, что соответствует нехаотическому поведению.

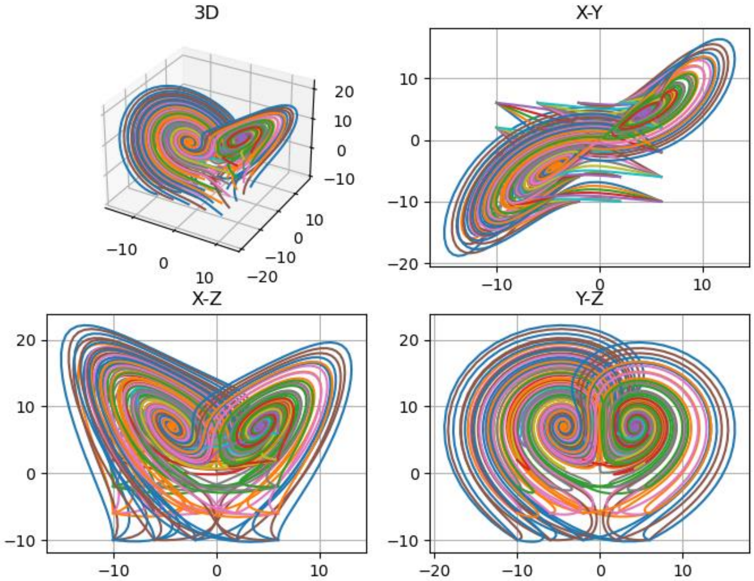

Рис. 11 - Фазовый портрет аттрактора Лоренца $\sigma = 10$, $r = 8$, $b = 8/3$

При увеличении r до 100 (рис. 12) наблюдается усиление хаотичности, увеличивается амплитуда колебаний, но сохраняет свою структуру. Траектория делает более резкие повороты и охватывает большую область фазового пространства.

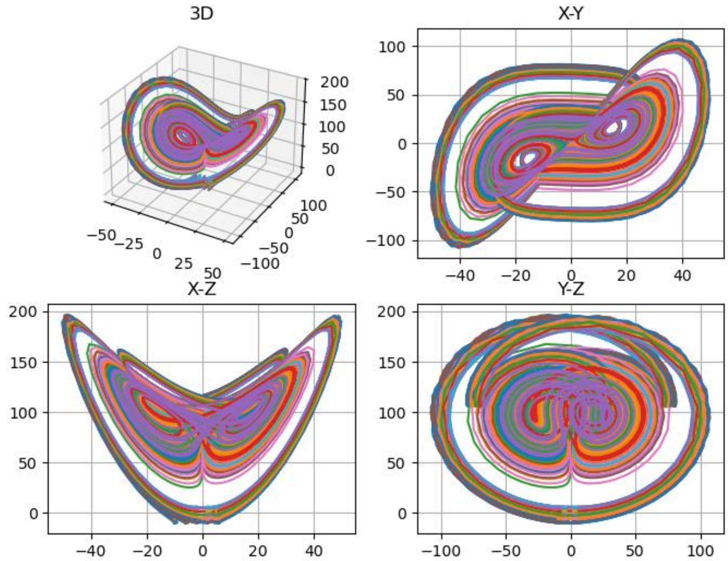

Рис. 12 - Фазовый портрет аттрактора Лоренца $\sigma = 10$, $r = 100$, $b = 8/3$

Выводы.

В рамках исследования был выполнен анализ фазовых портретов четырех динамических систем: математического маятника, нелинейной управляющей системы, осциллятора Ван дер Поля и аттрактора Лоренца. Для математического маятника установлены два ключевых типа поведения: в идеализированных условиях наблюдаются устойчивые периодические колебания, тогда как при введении трения все траектории асимптотически приближаются к положению равновесия. Нелинейная система управления проявила три дифференцированных сценария функционирования, определяемых степенью отклонения от целевого состояния. В случае осциллятора Ван дер Поля зафиксирована эволюция динамики: от плавных гармонических колебаний при малых параметрах к релаксационным циклам с выраженными скачкообразными переходами при их росте. Изучение аттрактора Лоренца выявило бифуркацию режимов — система способна демонстрировать как упорядоченную периодичность, так и детерминированный хаос, сохраняя при этом структурную устойчивость. Экспериментальные данные по всем исследуемым системам показали полную корреляцию с теоретическими моделями, подтвердив адекватность примененных методов анализа.