Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej

Sprawozdanie z Laboratorium: Optymalizacja – Metoda Złotego Podziału

Przedmiot: Metody Numeryczne

Kierunek: Inżynieria Obliczeniowa

Autor: Filip Rak

Prowadzący przedmiot: dr hab. inż. Marcin Hojny

Data: 7 czerwca 2024

Numer lekcji: 12

Grupa laboratoryjna: 4

Wstęp teoretyczny

Metoda złotego podziału jest techniką numeryczną odnajdywania ekstremum, minimum lub maksimum funkcji w wyznaczonym przedziale. Metoda działa poprzez sukcesywne zmniejszanie przedziału, co czyni ją wolną, ale niezawodną. W poniższej implementacji metoda została wykorzystana do szukania minimum.

Idea algorytmu

Funkcja f w przedziale $[a, b]$ posiada dokładnie jedno minimum. Minimum odnajdujemy poprzez kolejne podziały zadanego przedziału. W tym celu obliczamy wartości funkcji w dwóch punktach x_L i x_R, gdzie $a < x_L < x_R < b$.

- Jeżeli $f(x_L) > f\ (x_R)$ to szukane minimum znajduje się w przedziale $[x_L, b]$.
- Jeżeli $f(x_L) < f\ (x_R)$ to szukane minimum znajduje się w przedziale $[a, x_R]$.
- Przedział zawężamy do momentu uzyskania oczekiwanej dokładności, warunkiem jest: $(b - a) > \varepsilon$, gdzie ε jest ustaloną dokładnością.

Wartość $x_L$obliczamy z wykorzystaniem poniższego wzoru.

$$x_L = b - \varphi(b - a) \tag{1}$$

Adekwatnie $x_r$obliczamy następująco.

$$x_L = a + \varphi(b - a) \tag{2}$$

Gdzie w przypadku obu wzorów liczba φ równa jest wartości złotego podziału.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.61803398875 \tag{3}$$

Implementacja

Metoda została zaimplementowana w języku C++, w postaci funkcji `goldenSectionSearch`.

Funkcja przyjmuje następujące argumenty:
- Początek przedziału `double a`.
- Koniec przedziału `double b`.
- Wskaźnik do badanej funkcji `(*f)(double)`.
- Stopień dokładności `double epsilon`.

Zwracaną wartością jest odnalezione minimum typu `double`.

Reprezentacja funkcji matematycznej

Poniżej znajduje się przykładowa reprezentacja funkcji matematycznej jaka może być przyjęta przez funkcję `goldenSectionSearch`.

```
double function(double x)
{
    return sin(x);
}
```

Pełna definicja funkcji `goldenSectionSearch`

```
double goldenSectionSearch(double a, double b,
double (*f)(double), double epsilon)
{
    // Initialization for search range
    double x_l = b - PHI * (b - a);
    double x_p = a + PHI * (b - a);

    // Search loop
    while ((b - a) > epsilon)
    {
        // Min on right
        if (f(x_l) > f(x_p))
        {
            a = x_l;
            x_l = x_p;
            x_p = a + PHI * (b - a);
        }

        // Min on left
        else
        {
            b = x_p;
            x_p = x_l;
            x_l = b - PHI * (b - a);
        }
    }

    // Return the average of the two
    return (a + b) / 2;
}
```

Omówienie elementów funkcji `goldenSectionSearch`

W pierwszym kroku funkcja inicjalizuje punkty badania po lewej i prawej stronie, z wykorzystaniem wzoru pierwszego i drugiego. Przy czym zmienna `PHI` jest stałą globalną będąca wynikiem wzoru trzeciego.

```
double x_l = b - PHI * (b - a);
double x_p = a + PHI * (b - a);
```

Funkcja następnie przechodzi do pętli, która będzie wykonywać pracę do uzyskania zamierzonej dokładności.

```
while ((b - a) > epsilon)
```

Funkcja następnie sprawdza, w którym punkcie występuje mniejsza wartość.

```
if (f(x_l) > f(x_p))
{ }

else
{ }
```

W przypadku w którym instrukcja warunkowa `if` zwróci prawdę. minimum znajduje się w przedziale $[x_L, b]$. Przedział zostaje zawężony w prawym kierunku

```
a = x_l;
x_l = x_p;
x_p = a + PHI * (b - a);
```

W systuacji przeciwnej przedział zostanie zawężony w kierunku lewym

```
b = x_p;
x_p = x_l;
x_l = b - PHI * (b - a);
```

Po wyjściu z pętli zwracana jest średnia z a i b.

```
return (a + b) / 2;
```

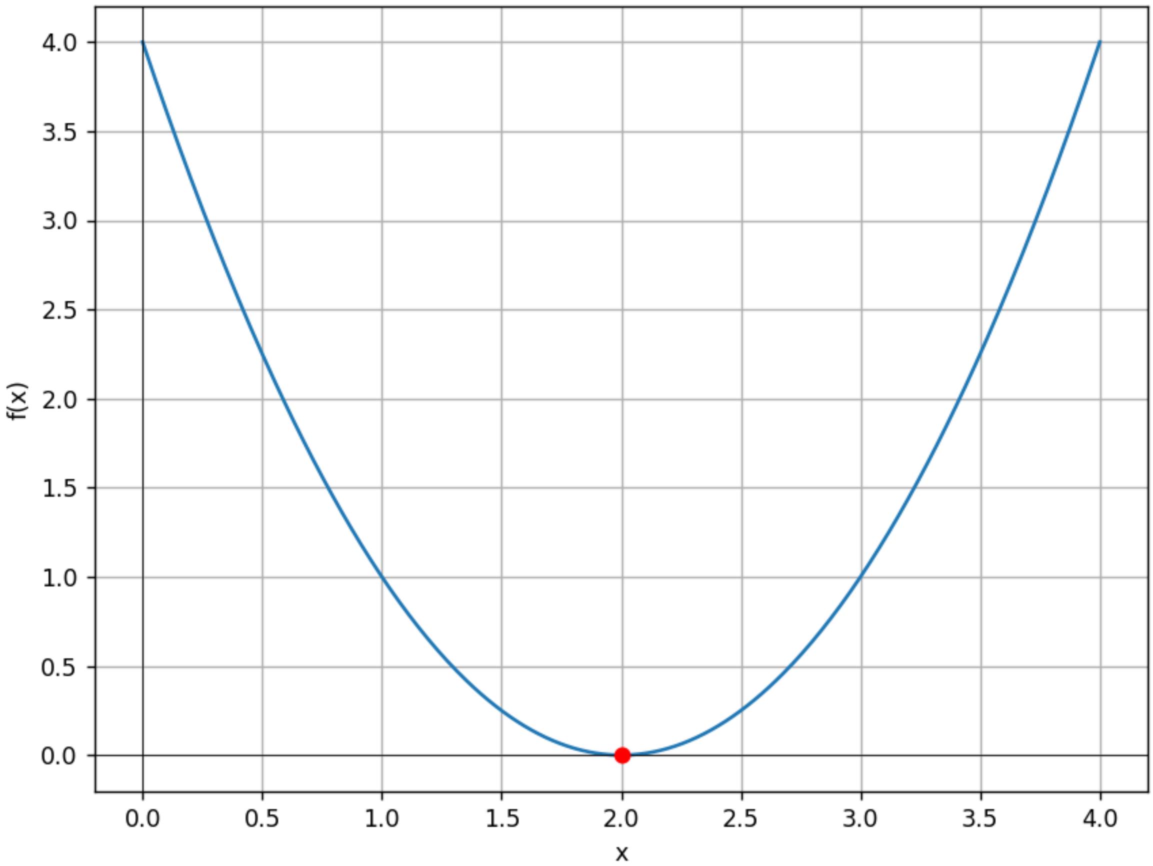
Testy na wybranych przykładach

Zaimplementowana metoda zostały przetestowana pod kątem jakości wyników na tle starannie wybranych funkcji. Wyniki zostały obliczone z dokładnością $\varepsilon = 1e - 10$.

Test 1: Funkcja kwadratowa

Dane:

- Funkcja: $f(x) = (x - 2)^2$
- Przedział: $[0, 4]$
- Oczekiwany wynik: $x = 2$
- Wynik `goldenSectionSearch`: $x = 2$

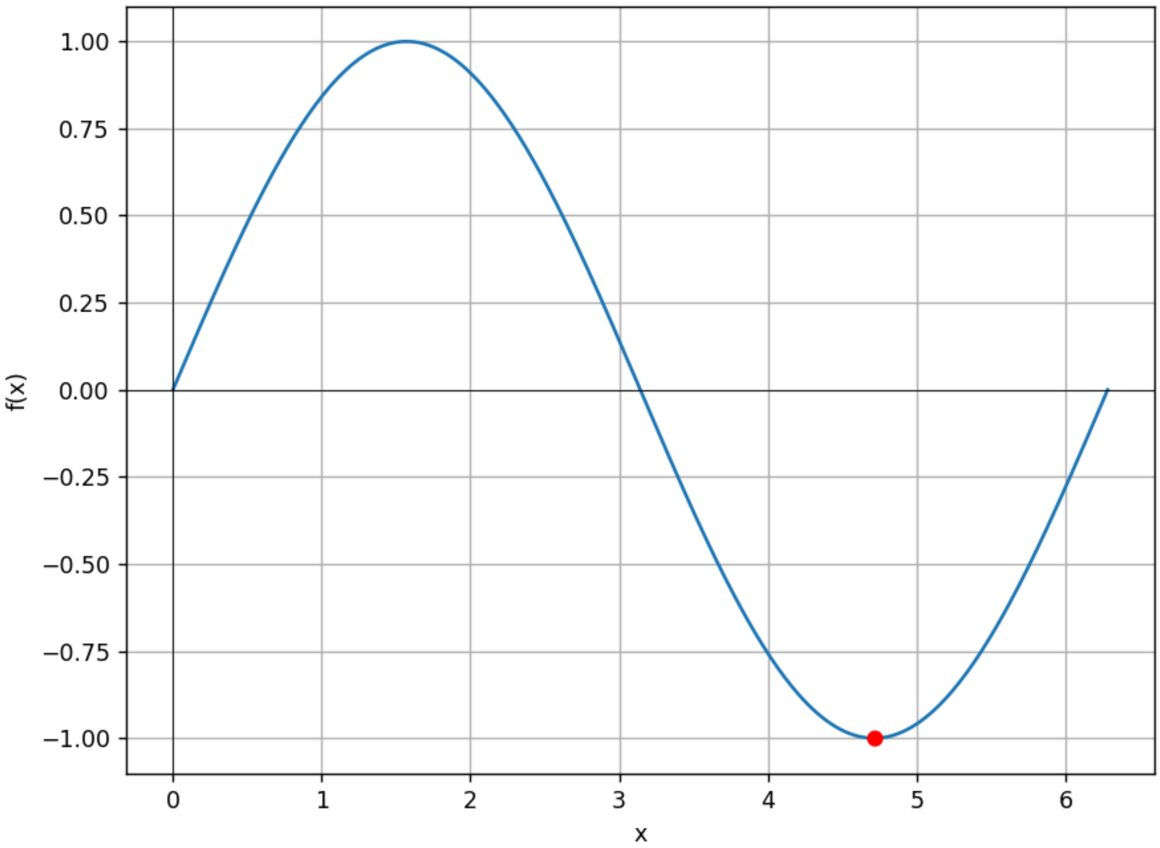


Wykres 1: Funkcja kwadratowa

Test 2: Funkcja sinusoidalna

Dane:

- Funkcja: $f(x) = \sin(x)$
- Przedział: $[0, 2\pi]$
- Oczekiwany wynik: $x = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71239$
- Wynik `goldenSectionSearch`: $x = 4.71239$

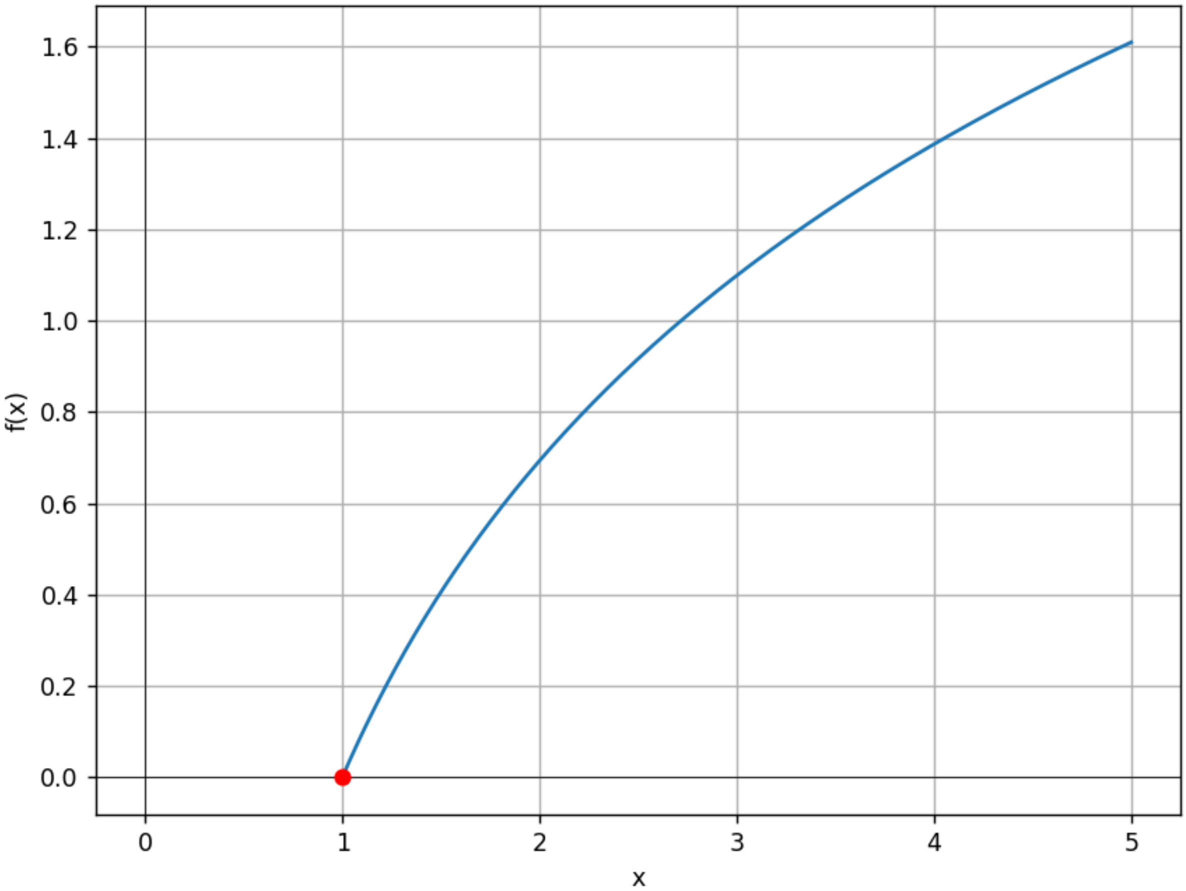


Wykres 2: Funkcja sinusoidalna

Test 3: Funkcja logarytmiczna

Dane:

- Funkcja: $f(x) = \ln(x)$
- Przedział: $[1, 5]$
- Oczekiwany wynik: $x = 1$
- Wynik `goldenSectionSearch`: $x = 1$

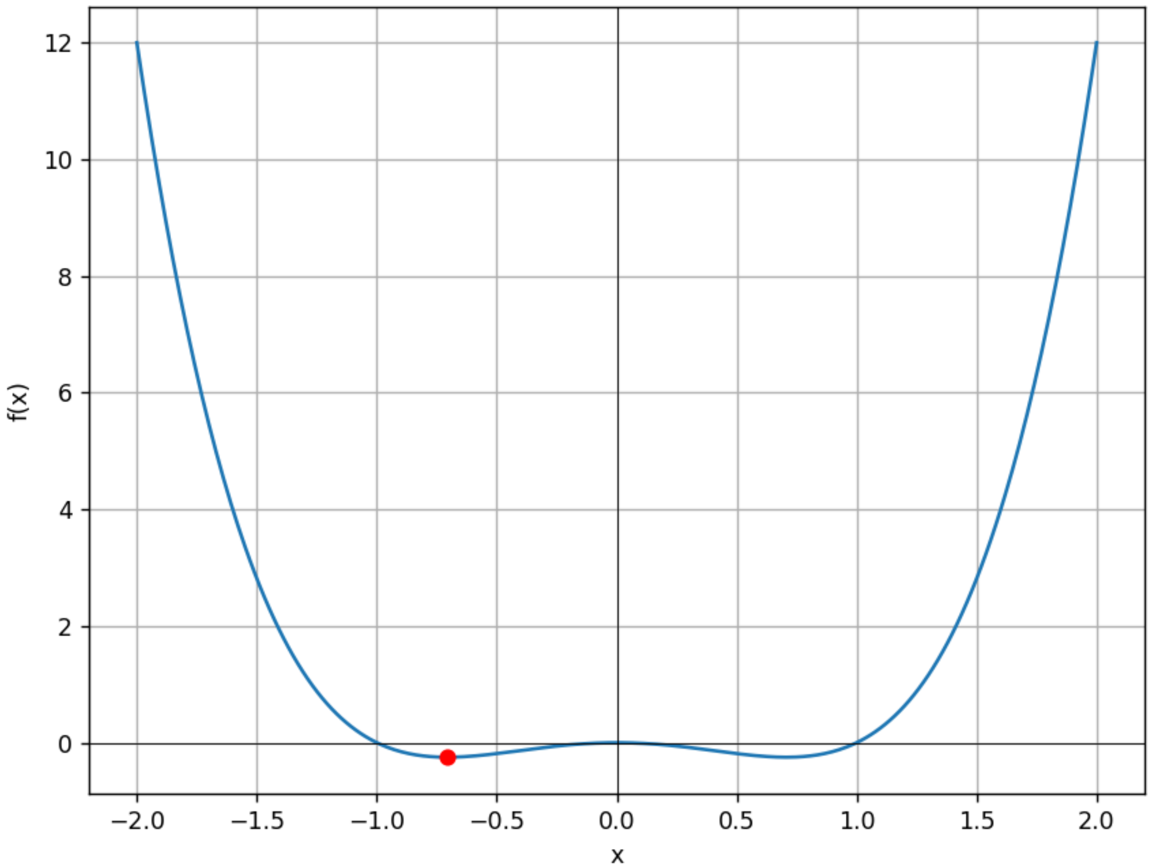


Wykres 3: Funkcja logarytmiczna

Test 4: Funkcja o dwóch minimach

Dane:

- Funkcja: $f(x) = \mathrm{x}^4 - x^2$
- Przedział: $[-2, 2]$
- Oczekiwany wynik: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.707$
- Wynik `goldenSectionSearch`: $x = -0.707107$

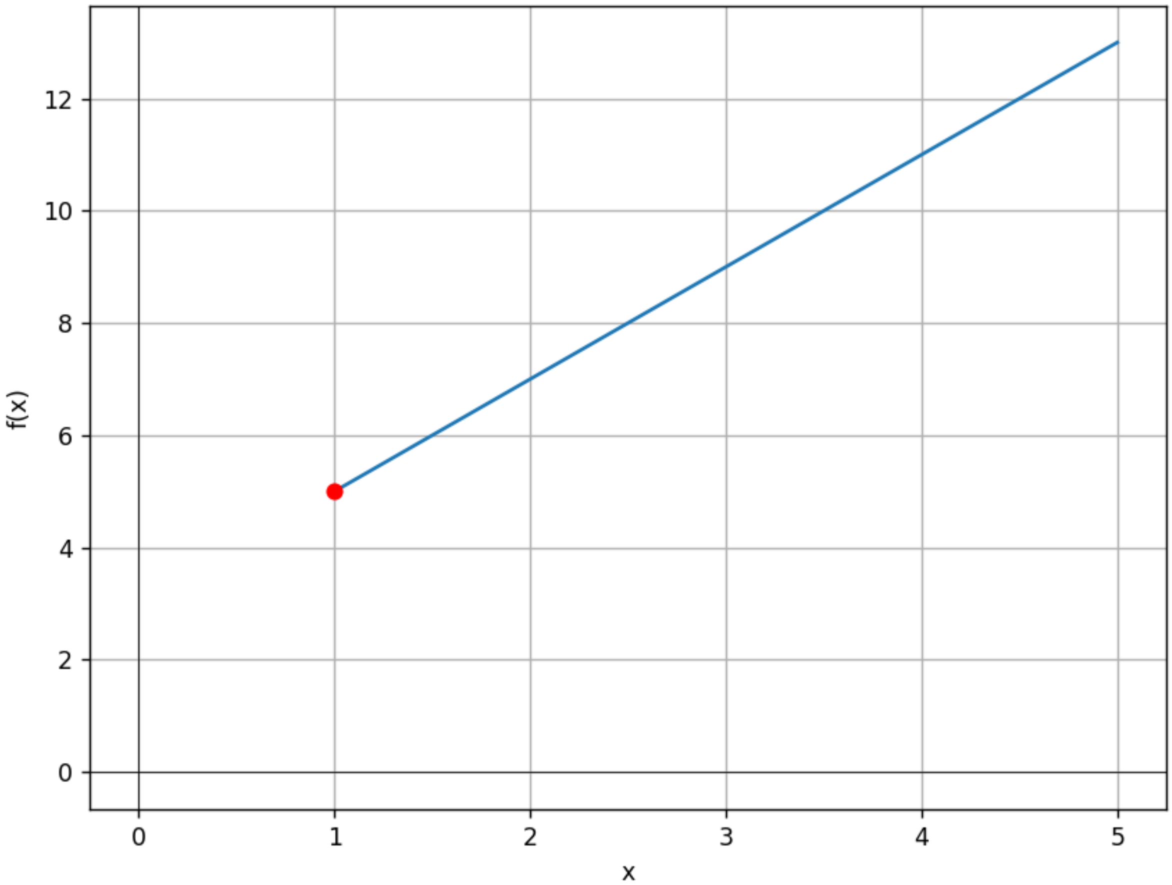


Wykres 4: Funkcja o dwóch minimach

Test 5: Funkcja liniowa

Dane:

- Funkcja: $f(x) = 2x + 3$
- Przedział: $[1, 5]$
- Oczekiwany wynik: $x = 1$
- Wynik `goldenSectionSearch`: $x = 1$

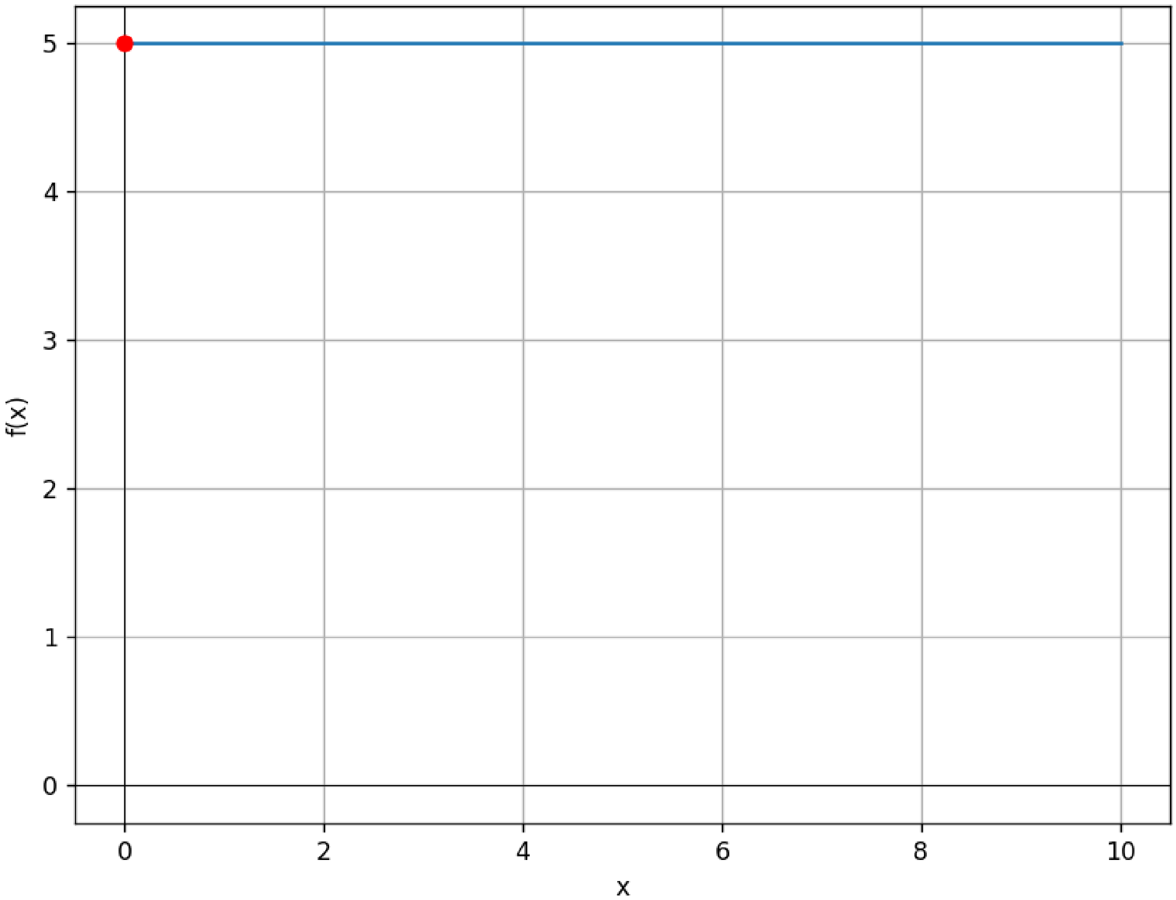


Wykres 5: Funkcja liniowa

Test 6: Funkcja stała

Dane:

- Funkcja: $f(x) = 5$
- Przedział: $[0, 10]$
- Oczekiwany wynik: Dowolny punkt w przedziale, ponieważ funkcja jest stała.
- Wynik `goldenSectionSearch`: $x = 4.19397e - 11$



Wykres 6: Funkcja stała

Test 1	Test 2	Test 3	Test 4	Test 5	Test 6	
2	4.71239	1	± 0.707	1	<0, 10>	**Oczekiwany wynik**
2	4.71239	1	-0.707	1	$4.1e - 11$	`goldenSectionSearch`

Tabela 1: Podsumowanie wyników

Opracowanie wyników

Zaimplementowana metoda Złotego Podziału została przetestowana na różnorodnych funkcjach matematycznych, a wyniki potwierdzają jej skuteczność w lokalizowaniu minimum lokalnego w zadanym przedziale z bardzo wysoką dokładnością ($\varepsilon = 1e - 10$). Poniżej znajduje się analizę wyników dla każdego z testów.

Test 1: Funkcja kwadratowa

- **Wynik:** Metoda z powodzeniem znalazła minimum funkcji kwadratowej, gdzie wynik $x = 2$ idealnie pokrywa się z oczekiwanym wynikiem teoretycznym. Precyzja wyniku do poziomu epsilon pokazuje, że metoda jest wydajna dla funkcji parabolicznych.

Test 2: Funkcja sinusoidalna

- **Wynik:** Dla funkcji sinusoidalnej, algorytm skutecznie wyznaczył minimum globalne w przedziale $[0,2\pi]$, co pokrywa się z oczekiwanym wynikiem $x = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71239$. Wynik jest matematycznie dokładny, co demonstruje zdolność metody do pracy z funkcjami okresowymi.

Test 3: Funkcja logarytmiczna

- **Wynik:** W przypadku funkcji logarytmicznej, algorytm poprawnie zlokalizował minimum w punkcie $x = 1$, co jest zgodne z oczekiwaniami. Wynik pokazuje, że metoda radzi sobie również z funkcjami nieliniowymi, które rosną w jednym kierunku.

Test 4: Funkcja o dwóch minimach

- **Wynik:** Wynik algorytmu $x = -0.707107$ jest jednym z dwóch oczekiwanych wyników $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.707$. To potwierdza, że algorytm może efektywnie znajdować minimum lokalne w funkcjach z wieloma minimami, pomimo iż skupia się na jednym z nich co jest typowym zachowaniem.

Test 5: Funkcja liniowa

- **Wynik:** Dla funkcji liniowej algorytm zwrócił wynik $x = 1$, co jest minimum teoretycznym na lewym krańcu przedziału. Wynik ten potwierdza, że metoda skutecznie identyfikuje minimum funkcji liniowej w określonym przedziale.

Test 6: Funkcja stała

- **Wynik:** Algorytm zwrócił $x = 4.19397e - 11$, co jest prawidłowym wynikiem, ponieważ każdy punkt w przedziale jest minimum funkcji stałej. Wynik ten ilustruje, że metoda może obsługiwać przypadki, gdzie gradient funkcji wynosi zero w całym przedziale.

Wnioski

Metoda Złotego Podziału wykazała wysoką skuteczność i dokładność w lokalizowaniu minimum funkcji w szerokim zakresie przypadków testowych, od prostych funkcji liniowych i stałych, po bardziej złożone przypadki funkcji z wieloma minimami lokalnymi. Wyniki potwierdzają jej uniwersalność i przydatność w praktycznych zastosowaniach inżynierskich i naukowych, szczególnie tam, gdzie wymagana jest precyzyjna lokalizacja ekstremów w określonych przedziałach.