Minimalni končni modeli prostorov

Filip Bezjak
Mentor: dr. Petar Pavešić

7. maj 2023

1 Uvod

Moja tema sodi na področje algebraične topologije na končnih prostorih. Topologije na končnih prostorih so večkrat spregledane, saj je vsaka T_1 topologija na končnem prostoru diskretna. Če pa lastnosti T_1 ne zahtevamo, postanejo veliko bolj zanimive.

2 Končni topološki prostori in delno urejene množice

Končni topološki prostor je topološki prostor s končno mnogo točkami, *šibko urejena* množica je množica s tranzitivno in z refleksivno relacijo. Če je relacija še antisimetrična, dobimo *delno* ureditev.

Naj bo X končni topološki prostor. Za vsako točko $x \in X$ obstaja najmanjša odprta množica U_x, ki jo vsebuje, oziroma presek vseh odprtih množic, ki vsebujejo x. Ta množica je odprta, saj je topologija zaprta za končne preseke. Točke uredimo s pravilom $x \leq y$, če $U_x \subseteq U_y$. S tem dobimo šibko ureditev. Relacija postane delna ureditev, natanko takrat, ko je topologija t_0, in disktretna, ko je topologija T_1.

Obratno, naj bo X šibko urejena množica. Na njej lahko definiramo topologijo z bazo $\{y \in X | y \leq x\}_{x \in X}$. Če je $y \leq x$, je y vsebovan v vsaki bazni množici, ki vsebuje x, torej je $y \in U_x$. Po drugi strani, če je $y \in U_x$, potem je $y \in \{y \in X | y \leq x\}$, torej velja, da je $y \leq x$ natanko tedaj ko je $y \in U_x$. Iz tega je razvidno, da so končni prostori in šibke ureditve enaki objekti, gledani z drugačnega stališča.

Definicija 1. Točka $x \in X$ je *navzdol odpravljiva*, če ima $\{y \in X | y \leq x\}$ maksimum in *navzgor odpravljiva*, če ima $\{y \in X | y \geq x\}$ minimum. Točka je odpravljiva, če je eno ali drugo.

Definicija 2. T_0 prostor je *minimalen*, če nima odpravljivih točk.

3 Homotopska in šibka homotopska ekvivalenca

Pot v prostoru X je zvezna preslikava $f : I \to X$, pri čemer je I enotski interval $[0, 1]$. Poti sta si homotopni, če lahko eno zvezno deformiramo v drugo, brez da bi premaknili krajišči poti.

Definicija 3. Homotopija poti v X je družina preslikav $f_t : I \to X, 0 \leq t \leq 1$, taka da

- sta krajišči $f_t(0) = x_0$ in $f_t(1) = x_1$ neodvisni od t in
- je prirejena preslikava $F : I \times X \to X$ definirana s $F(s, t) = f_t(s)$ zvezna.

Za preslikavi f_1 in f_0, ki sta povezani s homotopiijo f_t rečemo, da sta homotopni in označimo $f_1 \simeq f_0$.

Definicija 4. Preslikava $f : X \to Y$ je *homotopska ekvivalenca* prostorov X in Y, če obstaja preslikava $g : Y \to X$, taka da je $fg \simeq \mathbb{1}$ in $gf \simeq \mathbb{1}$. Rečemo, da sta si prostora X in Y *homotopsko ekvivalentna.*

Izrek 1. *relacija homotopije na poteh s fiksnima krajiščema je ekvivalenčna relacija za vsak topološki prostor.*

Za poljubni poti $f, g : I \to X$, za kateri velja $f(1) = g(0)$ lahko definiramo produkt $f \cdot g$, ki preteče f in g z dvojno hitrostjo v enotskem intervalu.

$$f \cdot g(s) \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Če se omejimo samo na poti $f : I \to X$ z enako začetno in končno točko $f(0) = f(1) = x_0$, govorimo o zankah, za x_0 pa rečemo, da je bazna točka. Množico vseh homotopskih razredov $[f]$, z bazno točko x_0 označimo z $\pi_1(X, x_0)$.

Izrek 2. $\pi_1(X, x_0)$ *opremljena s produktom* $[f][g] = [f \cdot g]$ *je grupa.*

Tej grupi pravimo fundamentalna grupa prostora X, z bazno točko x_0. $\pi_1(X, x_0)$ je prva v zaporedju analogogno definiranih grup $\pi_n(X, x_0)$, pri katerih namesto iz I slikamo iz n-dimenzionalne kocke I^n.

Naj bo I^n n-dimenzionalna kocka. Rob ∂I^n od I^n je podprostor točk pri katerih je vsaj ena koordinata enaka 1 ali 0. Definirajmo $\pi_n(X, x_0)$, množico homotopskih razredov preslikav $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ pri čemer velja $f(\partial I^n) = x_0$.

Za $n \geq 2$ posplošimo množenje definirano pri fundamentalni grupi.

$$f \cdot g(s) \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n), & 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Izrek 3. $\pi_n(X, x_0)$ *opremljena s produktom* $[f][g] = [f \cdot g]$ *je grupa za vsak* $n \in \mathbb{N}$.

Grupam $\pi_n(X, x_0)$ pravimo *homotopske grupe*.

Definicija 5. Topološka prostora sta *šibko homotopsko ekvivalentna*, če so njune homotopske grupe izomorfne za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Homotopsko ekvivalentni prostori so si tudi šibsko homotopsko ekvivalentni.

Definicija 6. Preslikava je *šibka homotopska ekvivalenca*, če preko kompozicije inducira izomorfizem na vse homotopske grupe.

4 Simpleksi

Simpleks ali n-simpleks je n-razsežni analog trikotnika. Točka je 0-simpleks, 1-simpleks je daljica, 2-simpleks je trikotnik, 3-simpleks je tetraeder. n-simpleks definiramo kot množico svojih $n + 1$ oglišč.

Simplicialni kompleks K je sestavljen iz množice oglišč V_K in množice simpleksov S_K, sestavljene iz končnih nepraznih podmnožic od V_k, pri čemer je vsak element S_k simpleks in vsaka podmnožica simpleksa je simpleks.

Naj bo $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ n-simpleks. Zaprt Simpleks $\bar{\sigma}$ je množica formalnih konveksnih combinacij $\Sigma_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$ pri čemer je $\alpha_i \geq 0$ za vsak $0 \leq i \leq n$ in $\Sigma \alpha_i = 1$. Zaprt simpleks je metričen prostor z metriko

$$d\Big(\sum_{v \in K} \alpha_v v, \sum_{v \in K} \beta_v v\Big) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha_v - \beta_v)^2}$$

Geometrijska realizacija $|K|$ simplicialnega kompleksa K je množica formalnih konveksnih kombinacij $\sum_{v \in K} \alpha_v v$, takih da je $\{v | \alpha_v > 0\}$ simpleks v K.

5 Minimalni modeli prostorov

Definicija 7. Končni topološki prostor je *model* prostora X, če mu je šibko homotopsko ekvivalenten. Model je *minimalen*, če ima izmed vseh modelov najmanjšo kardinalnost.

Izrek 4. *Homotopska ekvivalenca med minimalnima T_0 prostoroma je homeomorfizem.*

Izrek 5. *Naj bo X T_0 prostor in x navzdol odpravljiva točka, tedaj je $r : X \to X - \{x\}$,*

$$r(u) = \begin{cases} u, & u \neq x \\ max(u), & u = x \end{cases}$$

homotopska ekvivalenca.

Preslikavo lahko analogno definiramo za navzgor odpravljive točke, le da namesto v *max(u)* slikamo v *min(u)*. Iz poljubnega modela prostora torej dobimo minimalnega, s postopnim odstranjevanjem odpravljivih točk.

Definicija 8. Vsak končen T_0-prostor X ima *prirejen* simplicialni kompleks $\mathcal{K}(X)$, katerega simpleksi so neprazne verige v prirejeni delni urejenosti na X.

Točka α v geometrijski realizaciji $|\mathcal{K}(\mathcal{X})|$ je konveksna kombinacija oblike $\alpha = t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_rx_r$, pri čemer $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$, za vsak $1 \leq i \leq r$, $t_i \geq 0$ in velja, da je $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ veriga v X. Nosilec α je množica *support*(α)= $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. Pomembno vlogo igra preslikava $\alpha \mapsto x_1$.

Definicija 9. Naj bo X končen T_0 prostor, Definirajmo $\mathcal{K}$-*McCordovo* preslikavo $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$, z $\mu_X(\alpha) = \min(support(\alpha))$.

Izrek 6. *$\mathcal{K}$-McCordova preslikava je šibka homotopska ekvivalenca za vsak končen T_0-prostor.*

Moja naloga v tem delu bo poiskati minimalne končne modele sfer in grafov.