

1 Simpleksi

Simpleks ali n -simpleks je n -razsežni analog trikotnika. Točka je 0-simpleks, 1-simpleks je daljica, 2-simpleks je trikotnik, 3-simpleks je tetraeder. n -simpleks definiramo kot množico svojih $n + 1$ oglišč. *Simplicialni kompleks* K je sestavljen iz množice oglišč V_K in množice simpleksov S_K , sestavljene iz končnih nepraznih podmnožic od V_K , pri čemer je vsak element S_k simpleks in vsaka podmnožica simpleksa je simpleks. Pišemo $\sigma \in K$ in $v \in K$, če je $\sigma \in S_K$ ter $v \in V_K$. Dimenzija K je enaka maksimumu dimenzij njegovih simpleksov, n -dimenzionalnemu simpleksialnemu kompleksu rečemo tudi n -kompleks. Omejili se bomo samo na končne komplekse, torej $n \in \mathbb{N}$.

Če je simpleks σ vsebovan v simpleksu τ , mu rečemo *lice* od τ , rečemo mu *pravo lice*, če $\tau \neq \sigma$. Simpleksu rečemo *maksimalen simpleks*, če ni pravo lice nobenemu drugemu simpleksu. Subkompleks $L \in K$ simplicialnega kompleksa K je Simplicialni kompleks, tak da $V_L \subseteq V_K$ in $S_L \subseteq S_K$.

Naj bo $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ n -simpleks. Zaprt simpleks $\bar{\sigma}$ je množica formalnih konveksnih kombinacij $\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$ pri čemer je $\alpha_i \geq 0$ za vsak $0 \leq i \leq n$ in $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$. Zaprt simpleks je metričen prostor z metriko

$$d(\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=0}^n \beta_i v_i) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i)^2}. \quad (1)$$

Če so v_i linearno neodvisne točke v \mathbb{R}^m za nek $m \geq n$, potem je $\bar{\sigma}$ homeomorfen prostoru $\{\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$, kar pomeni, da lahko vsak zaprt simpleks predstavimo kot podprostor \mathbb{R}^m z evklidsko topologijo.

Geometrijska realizacija $|K|$ simplicialnega kompleksa K je množica formalnih konveksnih kombinacij $\sum_{v \in K} \alpha_v v$, takih da je $\{v | \alpha_v > 0\}$ simpleks v K in $\sum_{v \in K} \alpha_v = 1$. Rečemo, da $|K|$ realizira K . Za točko $x \in |K|$ označimo $\text{supp } x = \{v | \alpha_v > 0\}$, tej množici pravimo nosilec od x . Topologijo na $\bar{\sigma}$ definiramo na naslednji način. $U \subseteq |K|$ je odprta, natanko tedaj, ko je $U \cap \bar{\sigma}$ odprta, za vsak $\sigma \in K$. Kot prej, če so $v \in K$ linearno neodvisne točke v \mathbb{R}^m za nek $m \geq |V_K|$, potem je $|K|$ homeomorfen prostoru $\{\sum_{v \in K} \alpha_v v | \sum_{v \in K} \alpha_v = 1, \alpha_i \geq 0 \text{ in } \{v | \alpha_v > 0\} \text{ je simpleks v } K\} \subseteq \mathbb{R}^m$, kar spet pomeni, da lahko vsak simplicialni kompleks predstavimo kot podprostor v $\mathbb{R}^{|V_K|}$ z evklidsko topologijo. Če $L \subseteq K$, potem je $|L| \subseteq |K|$ zaprta podmnožica.

Opomba 1. Če je K n -kompleks, potem se ga da realizirati v \mathbb{R}^{2n+1} . To pomeni, da obstaja podprostor v \mathbb{R}^{2n+1} , ki je homeomorfen $|K|$. Vsak graf je geometrijska realizacija 1-kompleksa, zato ga lahko realiziramo v $\mathbb{R}^{2 \cdot 1 + 1} = \mathbb{R}^3$, kar je pa znano dejstvo iz teorije grafov.

Polieder je geometrijska realizacija Simplicialnega kompleksa $|K|$, *triangulacija* poliedra X pa je simplicialni kompleks, katerega geometrijska realizacija je homeomorfna X .

Ker topologija na $|K|$ sovpada z topologijo na $\bar{\sigma}$, za vsak $\sigma \in K$ in je $U \subseteq |K|$ odprta, natanko tedaj, ko je $U \cap \bar{\sigma}$ odprta, za vsak $\sigma \in K$, sledi, da je preslikava f iz $|K|$ v nek topološki prostor X zvezna, natanko tedaj, ko je $f|_{\bar{\sigma}} : \bar{\sigma} \rightarrow X$ zvezna za vsak $\sigma \in K$. Tudi $H : |K| \times I \rightarrow X$ je zvezna, natanko tedaj, ko je zvezna $H|_{\bar{\sigma} \times I} : \bar{\sigma} \times I \rightarrow X$, za vsak $\sigma \in K$.

Simplicialna preslikava $\phi : K \rightarrow L$, med simplicialnima kompleksoma K in L , je preslikava med oglišči, $V_K \rightarrow V_L$, ki slika simplekse v simplekse. Preslikava ϕ inducira zvezno preslikavo med kompleksoma $|\phi| : |K| \rightarrow |L|$, kot $|\phi| : \sum_{v \in K} \alpha_v v \mapsto \sum_{v \in K} \alpha_v \phi(v)$.

Primer 1. simplicialna preslikava

Baricentrična subdivizija simplicialnega kompleksa K je simplicialni kompleks K' , čigar oglišča so simpleksi $\sigma \in K$, simpleksi v K' so pa verige simpleksov v K , urejenih z inkluzijo. Torej $\sigma' \in K'$, če $\sigma' = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ in $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_n$. *Težišče* simpleksa $\sigma \in K$ je točka $b(\sigma) = \sum_{v \in \sigma} \frac{v}{\#\sigma}$.

Definirajmo linearno preslikavo $S_K : |K'| \rightarrow |K|$, s predpisom $S_K(\sigma) = b(\sigma)$. Linearnost pomeni, da velja $S_K(\sum_{\sigma \in \sigma'} a_\sigma \sigma) = \sum_{\sigma \in \sigma'} a_\sigma S_K(\sigma)$.

Primer 2. Naj bo $K = \sigma = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ 3-simpleks.

Slika

Poglejmo si preslikavo $S_K : |K'| \rightarrow |K|$. Naj bo x tako kot na sliki. Potem je $K'_x := \text{supp } x = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ in $x = \sum_{\sigma \in K'_x} \alpha_{i_\sigma} \sigma$. Zato

Preslikava S_K je očitno homeomorfizem.