Minimalni končni modeli prostorov

Filip Bezjak
Mentor: dr. Petar Pavešić

23. marec 2023

1 Simpleksi

Simpleks ali n-simpleks je n-razsežni analog trikotnika. Točka je 0-simpleks, 1-simpleks je daljica, 2-simpleks je trikotnik, 3-simpleks je tetraeder. n-simpleks definiramo kot množico svojih $n+1$ oglišč. *Simplicialni kompleks* K je sestavljen iz množice oglišč V_K in množice simpleksov S_K, sestavljene iz končnih nepraznih podmnožic od V_k, pri čemer je vsak element S_k simpleks in vsaka podmnožica simpleksa je simpleks. Pišemo $\sigma \in K$ in $v \in K$, če je $\sigma \in S_K$ ter $v \in V_K$. Dimenzija K je enaka supremumu dimenzij njegovih simpleksov, n-dimenzionalnemu simpleksialnemu kompleksu rečemo tudi n-*kompleks*. Omejili se bomo samo na končne komplekse, torej $n \in \mathbb{N}$.

Če je simpleks σ vsebovan v simpleksu τ, mu rečemo *face??* od τ, rečemo mu *proper face*, če $\tau \neq \sigma$. Simpleksu rečemo *maksimalen simpleks*, če ni $proper face$ nobenemu drugemu simpleksu. Subkompleks $L \in K$ simplicialnega kompleksa K je Simplicialni kompleks, tak da $V_L \subseteq V_K$ in $S_L \subseteq S_K$

Naj bo $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ n-simpleks. Zaprt simpleks $\bar{\sigma}$ je množica formalnih konveksnih combinacij $\Sigma_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$ pri čemer je $\alpha_i \geq 0$ za vsak $0 \leq i \leq n$ in $\Sigma \alpha_i = 1$. Zaprt simpleks je metričen prostor z metriko

$$d(\sum_{v \in K} \alpha_v v, \sum_{v \in K} \beta_v v) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha_v - \beta_v)^2} \tag{1}$$

Geometrijska realizacija $|K|$ simplicialnega kompleksa K je množica formalnih konveksnih kombinacij $\sum_{v \in K} \alpha_v v$, takih da je $\{v | \alpha_v > 0\}$ simpleks v K. Na $|K|$ lahko gledamo kot unijo zaprtih simpleksov $\bar{\sigma}$, za $\sigma \in K$. Množica $U \subseteq |K|$ je odprta natanko tedaj, ko je $U \cap \hat{\sigma}$ odprta, glede na metriko na $\hat{\sigma}$, za vsak $\sigma \in K$, lahko zato na $|K|$ definiramo metriko tako kot pri **??**. Če $L \subseteq K$, potem je $|L| \subseteq |K|$ zaprta podmnožica.

Polihedron/eder?? je geometrijska realizacija Simplicialnega kompleksa $|K|$, *triangulacija* poliedra X pa je simplicialni kompleks, katerega geometrijska realizacija je homeomorfna X.

Ker metrika na $|K|$ sovpada z metriko na $\bar{\sigma}$, za vsak $\sigma \in K$, sledi, da je preslikava f iz $|K|$ v nek topološki prostor X zvezna, natanko tedaj, ko je $f|_{\bar{\sigma}} : \bar{\sigma} \to X$ zvezna za vsak $\sigma \in K$. Tudi $H : |K| \times I \to X$ je zvezna, natanko tedaj, ko je zvezna $H|_{\bar{\sigma}\times I} : \bar{\sigma} \times I \to X$, za vsak $\sigma \in K$.

Simplicial preslikava $\phi : K \to L$, med simplicialnima kompleksoma K in L, je preslikava med oglјišči, $V_K \to V_L$, ki slika simplekse v simplekse. Preslikava ϕ inducira zvezno preslikavo med kompleksoma $|\phi| : |K| \to |L|$, kot $|\phi| : \sum\limits_{v\in K} \alpha_v v \mapsto \sum\limits_{v\in K} \alpha_v \phi(v)$.

Baricentrična subdivizija simplicialnega kompleksa K je simplicialni kompleks K', čigar ogljišča so simpleksi $\sigma \in K$, simpleksi v K' so pa verige simpleksov v K, urejenih z inkluzijo. Torej $\sigma' \in K'$, če $\sigma' = \{\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n\}$ in $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq ... \subsetneq \sigma_n$. *Baricenter* simpleksa $\sigma \in K$ je točka $b(\sigma) = \sum\limits_{v\in\sigma} \frac{v}{\#\sigma}$.

Definirajmo linearno preslikavo $S_K : |K'| \to |K|$, s predpisom $S_K(\sigma) = b(\sigma)$. Linearnost pomeni, da velja $S_K(\sum\limits_{\sigma\in\sigma'} a_\sigma \sigma) = \sum\limits_{\sigma\in\sigma'} a_\sigma S_K(\sigma)$.

Primer 1. Naj bo $K = \sigma = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ 3-simpleks.

Slika

Poglejmo si preslikavo $S_K : |K'| \to |K|$. Naj bo x tako kot na sliki. Potem je $K'_x :=$ *support(x)* $= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ in $x = \sum\limits_{\sigma\in K'_x} \alpha_{i_\sigma} \sigma$. Zato

$$\begin{aligned} S_K(x) &= S_K(\sum_{\sigma\in K'_x} \alpha_{i_\sigma} \sigma) = \sum_{\sigma\in K'_x} \alpha_{i_\sigma} S_K(\sigma) \\ &= \alpha_1 S_K(\{a\}) + \alpha_2 S_K(\{a, b\}) + \alpha_3 S_K(\{a, b, c\}) \\ &= \alpha_1 a + \alpha_2 \frac{a + b}{2} + \alpha_3 \frac{a + b + c}{3}. \end{aligned}$$

Preslikava S_K je očitno homeomorfizem.