Minimalni končni modeli prostorov

Filip Bezjak
Mentor: dr. Petar Pavešić

7. maj 2023

1 Uvod

Moja tema sodi na področje algebraične topologije na končnih prostorih. Topologije na končnih prostorih so večkrat spregledane, saj je vsaka T_1 topologija na končnem prostoru diskretna. Če pa lastnosti T_1 ne zahtevamo, postanejo veliko bolj zanimive.

2 Homotopska in šibka homotopska ekvivalenca

Ena izmed glavnih nalog algebraične topologije je iskanje prostorov, ki so si na nek način podobni oziroma ekvivalentni. Prvi pojem podobnosti, ki ga spoznamo je homeomorfizem. Dva prostora sta homeomorfna, če lahko enega zvezno spremenimo v drugega in pri tem prostora ne lepimo in ga ne trgamo, oziroma če med njima obstaja homeomorfizem. Ekvivalenco med dvema prostoroma pa lahko definiramo na načine, ki so veliko širši kot homeomorfizem. Na primer torus $S^1 \times B^2$ in sfera S^1 imata podobno obliko, vendar nista homeomorfna. Zato bomo definirali homotopsko in šibko homotopsko ekvivalenco, ki bosta povezali prostore s podobnimi oblikami.

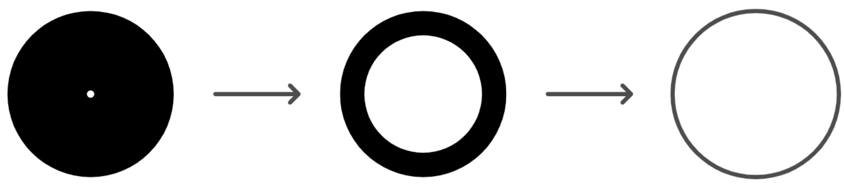
Spomnimo se, *homotopija* je taka družina preslikav $f_t(x) : X \to Y$, da je prirejena preslikava $F(x,t) : X \times I \to Y$, definirana kot $F(x,t) = f_t(x)$, zvezna. Rečemo, da sta preslikavi f_0 in f_1 homotopni in pišemo $f_0 \simeq f_1$

Definicija 1. Preslikava $f : X \to Y$ je *homotopska ekvivalenca* prostorov X in Y, če obstaja preslikava $g : Y \to X$, taka da je $fg \simeq 1_Y$ in $gf \simeq 1_X$. Preslikavo g imenujemo *homotopski inverz od f*. Če taka preslikava f obstaja, rečemo, da sta prostora X in Y *homotopsko ekvivalentna*, oziroma, da imata isti *homotopski tip*.

Definicija 2. Naj bo $A \subseteq X$. Preslikavo $r : X \to A$ za katero velja $r|_A = 1_A$ imenujemo *retrakcija*, podprostor A pa retrakt prostora X. Podprostor $A \subseteq X$ je *deformacijski retrakt*, če obstaja homotopija $H : X \times I \to X$ med 1_X in preslikavo ir, kjer je $r : X \to A$ retrakcija, $i : A \to X$ pa inkluzija. Homotopijo H imenujemo *deformacijska retrakcija.* Če homotopija H miruje na množici A jo imenujemo *krepka deformacijska retrakcija* prostor A pa *krepki deformacijski* retrakt prostora X. Za prostor X rečemo, da je *kontraktibilen*, če obstaja deformacijska retrakcija na točko.

Če je $A \subseteq X$ in je A deformacijski retrakt od X, potem sta X in A homotopsko ekvivalentna prostora. Res, če je $i : A \to X$ inkluzija, $r : X \to A$ retrakcija, potem je $ri = 1_A$ in $ir \simeq 1_X$. Eden izmed načinov, da preverimo, ali sta prostora A in B homotopsko ekvivalentna, je, da poiščemo prostor X, ki vsebuje A in B, kot deformacijska retrakta.

Homotopija $f_t : X \to X$, ki nam da krepko deformacijsko retrakcijo prostora X na podprostor A, ima lastnost, da velja $f_t|_A = 1_A$, za vse t. V splošnem, homotopija $f_t : X \to Y$, katere zožitev na podprostor $A \subseteq X$ je neodvisna od t imenujemo *homotopija relativno* A. Krepka deformacijskia retrakcija X na A je torej homotopija med retraktom ir in identiteto 1_X, relativno A, kjer je $r : X \to A$ retrakt in $i : A \to X$ inkluzija.



Slika 1: Punktiran disk se deformacijsko retrakira na robno sfero S^1

Šibko homotopsko ekvivalenco pa opišemo preko homotopskih grup, ki jih bomo definirali v nadaljevanju. Prva homotopska grupa se imenuje fundamentalna grupa in je grupa ekvivalenčnih razredov zank v prostoru, tj. poti z enako začetno in končno točko.

Pot v prostoru X je zvezna preslikava $f : I \to X$, pri čemer je I enotski interval $[0, 1]$. Poti sta si homotopni, če lahko eno zvezno deformiramo v drugo, brez da bi premaknili krajišči poti.

Definicija 3. Homotopija poti v X je družina preslikav $f_t : I \to X, 0 \leq t \leq 1$, taka da

- sta krajišči $f_t(0) = x_0$ in $f_t(1) = x_1$ neodvisni od t in
- je prirejena preslikava $F : I \times X \to X$ definirana s $F(t, s) = f_t(s)$ zvezna.

Za poti f_1 in f_0, ki sta povezani s homotopiijo f_t rečemo, da sta homotopni in označimo $f_1 \simeq f_0$.

Trditev 1. *Relacija homotopije na poteh s fiksnima krajiščema je ekvivalenčna relacija za vsak topološki prostor.*

Dokaz. Preveriti moramo 3 lastnosti ekvivalenčnih relacij, refleksivnost, simetričnost in tranzitivnost.

Najprej preverimo refleksivnost. Naj bo $f : I \to X$ pot v prostoru X. Homotopijo definiramo kot $f_t(s) = f(s)$.

Naj velja $f \simeq g$ in naj bo $f_t(s)$ homotopija med f in g, torej $f_0 = f$ in $f_1 = g$. Homotopijo med g in f definiramo kot $g_t(s) = f_{1-t}(s)$. Velja $g_0 = f_1 = g$ in $g_1 = f_0 = f$ in ker je $g_t(s)$ kompozitum zveznih preslikav, je zvezna. Sledi, da je relacija homotopije simetrična.

Naj bodo f, g in h poti v X in naj velja $f \simeq g$ in $g \simeq h$. in naj bo $f_t(s)$ homotopija med f in g in $g_t(s)$ homotopija med g in h. Definirajmo

$$h_t(s) = \begin{cases} f_{2t}(s), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g_{2t-1}(s), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Velja $h_0 = f_0 = f$ in $h_1 = g_1 = h$, ker je $h_t(s)$ sestavljena iz dveh zveznih poti, ki se ujemata na preseku, je zvezna, sledi, da je relacija tranzitivna. $\square$

Za poljubni poti $f, g : I \to X$, za kateri velja $f(1) = g(0)$ lahko definiramo njun stik $f \cdot g$, ki preteče f in g z dvojno hitrostjo v enotskem intervalu.

$$f \cdot g(s) \begin{cases} f(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Definirajmo še *reparametrizacijo* poti f kot kompozitum $f\varphi$, kjer je $\varphi : I \to I$ neka zvezna preslikava, za katero velja $\varphi(0) = 0$ in $\varphi(1) = 1$. Reparametrizacija poti ohranja homotopski razred, saj sta $f\varphi$ in f povezani preko $f\varphi_t$, pri čemer je $\varphi_t(s) = (1-t)\varphi(s) + ts$. Vidimo, da $\varphi_t(s)$ leži med $\varphi(s)$ in s, torej na I, zato je $f\varphi_t(s)$ dobro definirana.

Če se omejimo samo na poti $f : I \to X$ z enako začetno in končno točko $f(0) = f(1) = x_0$, govorimo o zankah, za x_0 pa rečemo, da je izhodišče. Množico vseh homotopskih razredov $[f]$, z izhodiščem x_0 označimo z $\pi_1(X, x_0)$.

Izrek 1. *$\pi_1(X, x_0)$ opremljena s produktom $[f][g] = [f \cdot g]$ je grupa.*

Dokaz. Najprej preverimo dobro definiranost produkta. Naj velja $[f] = [f']$, preko homotopije f_t in $[g] = [g']$ preko g_t. Potem sta $f \cdot g$ in $f' \cdot g'$ homotopni preko $h_t(s) = f_t \cdot g_t$. Vidimo, da $h_0 = f_0 \cdot g_0 = f \cdot g$ in $h_1 = f_1 \cdot g_1 = f' \cdot g'$. Ker je $f_t(1) = g_t(0)$ za vsak t in sta $f_t(s)$ in $g_t(s)$ zvezni, sledi, da je tudi $h_t(s)$ zvezna, torej velja $[f \cdot g]$=$[f' \cdot g']$.

Naj bodo f, g in h poti v X in naj bo $f(1) = g(0)$ in $g(1) = h(0)$, potem sta oba stika $(f \cdot g) \cdot h$ in $f \cdot (g \cdot h)$ definirana, $(f \cdot g) \cdot h$ pa je reparametrizacija poti $f \cdot (g \cdot h)$ preko odsekoma linearne funkcije

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s, & s \in [0, \frac{1}{4}], \\ s + \frac{1}{4}, & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{s}{2} + \frac{1}{2}, & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

zato sta poti homotopni, torej je množenje v $\pi_1(X, x_0)$ asociativno.

Naj bo f pot v X in naj bo c konstantna pot definirana s $c(s) = f(1)$, fc je reparametrizacija f preko

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s, & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

zato velja $fc \simeq f$, podobno velja tudi $cf \simeq f$, kjer je c konstantna pot $c(s) = f(0)$. Sklepamo, da je $c(s) = x_0$ dvostranska enota v grupi $\pi_1(X, x_0)$

Inverz poti f definiramo kot $\bar{f}(s) = f(1 - s)$. Definirajmo $h_t = f_t \cdot \bar{f}_t$, pri čemer je

$$f_t(s) = \begin{cases} f(s), & s \in [0, 1 - t] \\ f(1 - t), & s \in [1 - t, 1] \end{cases}$$

Ker je $h_0 = f \cdot \bar{f}$ in $h_1 = f(0) = c$, sledi, da je $f \cdot \bar{f}$ homotopna konstantni poti v x_0. Če f zamenjamo z $\bar{f}$, sledi, da $\bar{f} \cdot f \simeq c$, zato je $[\bar{f}]$ obojestranski inverz od $[f]$. □

Kot že povedano, tej grupi pravimo fundamentalna grupa prostora X, z izhodiščem x_0. $\pi_1(X, x_0)$ je prva v zaporedju analogogno definiranih homotopskih grup $\pi_n(X, x_0)$, pri katerih namesto iz I slikamo iz n-dimenzionalne kocke I^n.

Naj bo I^n n-dimenzionalna kocka. Rob ∂I^n od I^n je podprostor točk pri katerih je vsaj ena koordinata enaka 1 ali 0. Definirajmo $\pi_n(X, x_0)$, množico homotopskih razredov preslikav $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ pri čemer velja $f(\partial I^n) = x_0$.

Za $n \geq 2$ posplošimo stik definiran pri fundamentalni grupi.

$$f \cdot g(s) \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Izrek 2. *$\pi_n(X, x_0)$ opremljena s produktom $[f][g] = [f \cdot g]$ je grupa za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz te trditve je enak dokazu za $n = 1$, saj je v stik poti vpletena le prva komponenta poti.

Definicija 4. Topološka prostora X in Y sta *šibko homotopsko ekvivalentna*, če obstaja preslikava $f : X \to Y$, ki inducira izomorfizen $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Preslikavi f rečemo *šibka homotopska ekvivalenca.*

Homeomorfni prostori so homotopsko ekvivalentni, homotopsko ekvivalentni prostori so tudi šibsko homotopsko ekvivalentni. Obratno v splošnem ne velja.

3 Simpleksi

Simpleks ali n-simpleks je n-razsežni analog trikotnika. Točka je 0-simpleks, 1-simpleks je daljica, 2-simpleks je trikotnik, 3-simpleks je tetraeder. n-simpleks definiramo kot množico svojih $n+1$ oglišč. *Simplicialni kompleks* K je sestavljen iz množice oglišč V_K in množice simpleksov S_K, sestavljene iz končnih nepraznih podmnožic od V_K, pri čemer je vsak element S_k simpleks in vsaka podmnožica simpleksa je simpleks. Pišemo $\sigma \in K$ in $v \in K$, če je $\sigma \in S_K$ ter $v \in V_K$. Dimenzija K je enaka maksimumu dimenzij njegovih simpleksov, n-dimenzionalnemu simpleksialnemu kompleksu rečemo tudi *n-kompleks.* Omejili se bomo samo na končne komplekse, torej $n \in \mathbb{N}$.

Če je simpleks σ vsebovan v simpleksu τ, mu rečemo *lice* od τ, rečemo mu *pravo lice*, če $\tau \neq \sigma$. Simpleksu rečemo *maksimalen simpleks*, če ni pravo lice nobenemu drugemu simpleksu. Subkompleks $L \in K$ simplicialnega kompleksa K je simplicialni kompleks, tak da $V_L \subseteq V_K$ in $S_L \subseteq S_K$

Naj bo $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ n-simpleks. Zaprt simpleks $\bar{\sigma}$ je množica formalnih konveksnih kombinacij $\Sigma_{i=0}^n \alpha_i v_i$ pri čemer je $\alpha_i \geq 0$ za vsak $0 \leq i \leq n$ in $\Sigma_{i=0}^n \alpha_i = 1$. Zaprt simpleks je metričen prostor z metriko

$$d(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2}. \tag{1}$$

Če so v_i linearno neodvisne točke v $\mathbb{R}^m$ za nek $m \geq n$, potem je $\bar{\sigma}$ homeomorfen prostoru $\{\Sigma_{i=0}^n \alpha_i v_i, | \Sigma_{i=0}^n \alpha_i = 1 \text{ in } \alpha_i \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$, kar pomeni, da lahko vsak zaprt simpleks predstavimo kot podprostor $\mathbb{R}^m$ z evklidsko topologijo.

Geometrijska realizacija $|K|$ simplicialnega kompleksa K je množica formalnih konveksnih kombinacij $\sum\limits_{v \in K} \alpha_v v$, takih da je $\{v | \alpha_v > 0\}$ simpleks v K in $\Sigma_{v \in K} \alpha_v = 1$. Rečemo, da $|K|$ realizira K. Za točko $x \in |K|$ označimo $\operatorname{supp}(x) = \{v | \alpha_v > 0\}$, tej množici pravimo nosilec od x. Topologijo na $\bar{\sigma}$ definiramo na naslednji način. $U \subseteq |K|$ je odprta, natanko tedaj, ko je $U \cap \bar{\sigma}$ odprta, za vsak $\sigma \in K$. Kot prej, če so $v \in K$ linearno neodvisne točke v $\mathbb{R}^m$ za nek $m \geq |V_K|$, potem je $|K|$ homeomorfen prostoru $\{\Sigma_{v \in K}^n \alpha_v v | \Sigma_{v \in K}^n \alpha_v = 1,\ \alpha_i \geq 0 \text{ in } \{v | \alpha_v > 0\} \text{ je simpleks v } K\} \subseteq \mathbb{R}^m$, kar spet pomeni, da lahko vsak simplicialni kompleks predstavimo kot podprostor v $\mathbb{R}^{|V_K|}$ z evklidsko topologijo. Če $L \subseteq K$, potem je $|L| \subseteq |K|$ zaprta podmnožica.

Opomba 1. *Če je K $n-$kompleks, potem se ga da realizirati v $\mathbb{R}^{2n+1}$. To pomeni, da obstaja podprostor v $\mathbb{R}^{2n+1}$, ki je homeomorfen $|K|$. Vsak graf je geometrijska realizacija $1-$kompleksa, zato ga lahko realiziramo v $\mathbb{R}^{2 \cdot 1+1} = \mathbb{R}^3$, kar je pa znano dejstvo iz teorije grafov.*

Polieder je geometrijska realizacija Simplicialnega kompleksa $|K|$, *triangulacija* poliedra X pa je simplicialni kompleks, katerega geometrijska realizacija je homeomorfna X.

Ker topologija na $|K|$ sovpada z topologijo na $\bar{\sigma}$, za vsak $\sigma \in K$ in je $U \subseteq |K|$ odprta, natanko tedaj, ko je $U \cap \bar{\sigma}$ odprta, za vsak $\sigma \in K$, sledi, da je preslikava f iz $|K|$ v nek topološki prostor X zvezna, natanko tedaj, ko je $f|_{\bar{\sigma}} : \bar{\sigma} \to X$ zvezna za vsak $\sigma \in K$. Tudi $H : |K| \times I \to X$ je zvezna, natanko tedaj, ko je zvezna $H|_{\bar{\sigma} \times I} : \bar{\sigma} \times I \to X$, za vsak $\sigma \in K$.

Simplicialna preslikava $\varphi : K \to L$, med simplicialnima kompleksoma K in L, je preslikava med oglišči, $V_K \to V_L$, ki slika simplekse v simplekse. Preslikava φ inducira zvezno preslikavo med kompleksoma $|\varphi| : |K| \to |L|$, kot $|\varphi| : \sum\limits_{v \in K} \alpha_v v \mapsto \sum\limits_{v \in K} \alpha_v \varphi(v)$.

Primer 1. simplicialna preslikava

Baricentrična subdivizija simplicialnega kompleksa K je simplicialni kompleks K', čigar oglišča so simpleksi $\sigma \in K$, simpleksi v K' so pa verige simpleksov v K, urejenih z inkluzijo. Torej $\sigma' \in K'$, če $\sigma' = \{\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n\}$ in $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq ... \subsetneq \sigma_n$. *Težišče* simpleksa $\sigma \in K$ je točka $b(\sigma) = \sum\limits_{v \in \sigma} \frac{v}{\# \sigma}$.

Definirajmo linearno preslikavo $S_K : |K'| \to |K|$, s predpisom $S_K(\sigma) = b(\sigma)$. Linearnost pomeni, da velja $S_K(\sum\limits_{\sigma \in \sigma'} a_\sigma \sigma) = \sum\limits_{\sigma \in \sigma'} a_\sigma S_K(\sigma)$.

Primer 2. Naj bo $K = \sigma = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ 3-simpleks.

Slika

Poglejmo si preslikavo $S_K : |K'| \to |K|$. Naj bo x tako kot na sliki. Potem je $K'_x := \text{supp}(x) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ in $x = \sum\limits_{\sigma \in K'_x} \alpha_{i_\sigma} \sigma$. Zato

$$\begin{aligned} S_K(x) &= S_K(\sum_{\sigma \in K'_x} \alpha_{i_\sigma} \sigma) = \sum_{\sigma \in K'_x} \alpha_{i_\sigma} S_K(\sigma) \\ &= \alpha_1 S_K(\{a\}) + \alpha_2 S_K(\{a, b\}) + \alpha_3 S_K(\{a, b, c\}) \\ &= \alpha_1 a + \alpha_2 \frac{a + b}{2} + \alpha_3 \frac{a + b + c}{3}. \end{aligned}$$

Preslikava S_K je očitno homeomorfizem.

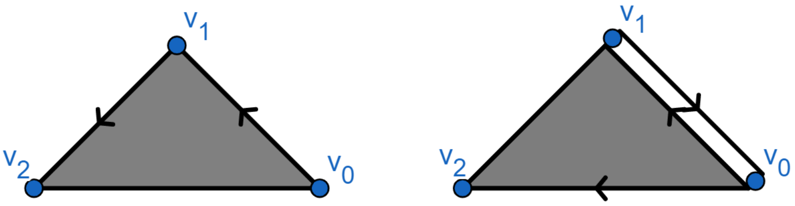
Izrek 3. *Simplicial approximation theorem. Naj bosta K in L simplicialna kompleksa in naj bo $f : |K| \to |L|$ zvezna. Potem obstaja $n \in N$ in simplicialna preslikava $g : K^n \to L$, taka da je $|g|$ homotopna f.*

3.1 Poti v simplicialnem kompleksu

Rob simplicialnega kompleksa K je urejeni par $e = (v_0, v_1)$, tak da je $\{v_0, v_1\}$ Simpleks v K. Oglišču v_0 rečemo *začetek* e in označimo $v_0 = \mathfrak{o}(e)$, oglišču v_1 pa *konec* od e, označimo $\mathfrak{e}(e) = v_1$. *Lomljenka* dolžine n je zaporedje $(e_0, e_1, ..., e_n)$ robov v K (lahko tudi prazno), za katerega velja, da je $\mathfrak{e}(e_i) = \mathfrak{o}(e_i + 1)$, za vsak $0 \leq i \leq n - 1$ Lomljenka je sklenjena, če $\mathfrak{e}(e_0) = \mathfrak{o}(e_n)v_0$, Oglišču v_0 rečemo izhodišče. Če sta $\xi = (e_0, e_1, ..., e_n)$ in $\xi' = (e'_0, e'_1, ..., e'_m)$, in velja $\mathfrak{e}(e_n) = \mathfrak{o}(e'_0)$ definiramo stik lomljenk $\xi\xi'$ kot $(e_0, e_1, ..., e_n e'_0, e'_1, ..., e'_m)$.

Lomljenki $\cdots (v_i, v_{i+1})(v_{i+1}, v_{i+2}) \cdots$ in $\cdots (v_i, v_{i+2}) \cdots$ sta preprosto ekvivalentni,če je $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$ simpleks v K. Lomljenki ξ_0 in ξ_n sta ekvivalentni, če obstaja zaporedje lomljenk $\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_n$, pri katerem sta ξ_i in ξ_{i+1} preprosto ekvivalentni za vsak $0 \leq i < n$

Naj bo K simplicialni kompleks in v_0 oglišče v K. Z $E(K, v_0)$ označimo množico ekvivalenčnih razredov sklenjenih lomljenk z izhodiščem v v_0. Ekvivalenčni razred sklenjene lomljenke ξ označimo z $[\xi]$.



Slika 2: lomljenki $(v_0, v_1)(v_1, v2)$ in $(v_0, v_1)(v_1, v_0)(v_0, v_2)$ sta ekvivalentni.

Trditev 2. *Množica $E(K, v_0)$ z množenjem, ki ga inducira stik lomljenk, tvori grupo.*

Dokaz. Dobra definiranost množenja in asociativnost sta očitni. Identiteta je ekvivalenčni razred poti (v_0, v_0). Inverz od $(e_0, e_1, ..., e_{n-1}, e_n)$ je $(e^{-1}, e_{n-1}^{-1}, ..., e_1^{-1}$, $\mathrm{e}^{-1})$, kjer $(v_i, v_{i+1})^{-1} = (v_{i+1}, v_i)$. $\square$

Izrek 4. *$E(K, v_0)$ je izomorfna $\pi_1(|K|, v_0)$*

Dokaz. dokazzzz $\square$

4 Končni topološki prostori in delno urejene množice

Končni topološki prostor je topološki prostor s končno mnogo točkami, *šibko urejena* množica je množica s tranzitivno in z refleksivno relacijo. Če je relacija še antisimetrična, dobimo *delno* ureditev.

Naj bo X končni topološki prostor. Za vsako točko $x \in X$ obstaja najmanjša odprta množica U_x, ki jo vsebuje, oziroma presek vseh odprtih množic, ki vsebujejo x. Ta množica je odprta, saj je topologija zaprta za končne preseke. Točke uredimo s pravilom $x \leq y$, če $U_x \subseteq U_y$. S tem dobimo šibko ureditev. Antisimetričnost po definiciji sovpada z lastnostjo T_0, zato, relacija postane delna ureditev, natanko takrat, ko je topologija T_0.

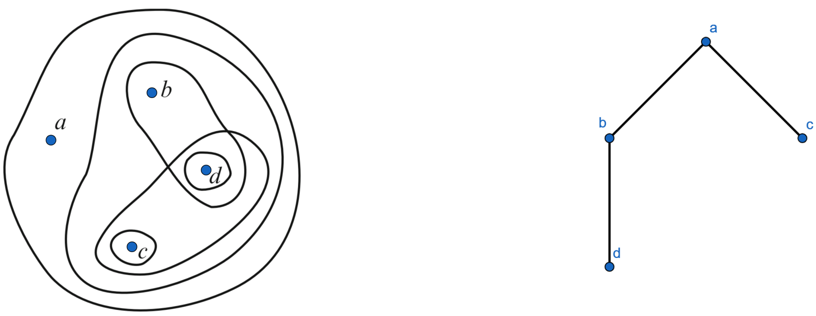
Obratno, naj bo X šibko urejena množica. Na njej lahko definiramo topologijo z bazo $\{y \in X | y \leq x\}_{x \in X}$. Če je $y \leq x$, je y vsebovan v vsaki bazni množici, ki vsebuje x, torej je $y \in U_x$. Po drugi strani, če je $y \in U_x$, potem je $y \in \{y \in X | y \leq x\}$, torej velja, da je $y \leq x$ natanko tedaj ko je $y \in U_x$. Iz tega je razvidno, da so končni prostori in šibke ureditve enaki objekti, gledani z drugačnega stališča.

Delno urejene množice praviloma predstavljamo s Hassejevimi diagrami.

Definicija 5. *Hassejev diagram* delno urejene množice X je usmerjen graf, katerega oglišča so točke, povezave pa so urejeni pari (x, y), taki, da je $x < y$ in ne obstaja tak z, da bi veljalo $x < z < y$.

Povezave (x, y) ne rišemo s puščico iz x v y, ampak bomo x in y povezali z ravno črto in y pisali nad x. Če je (x, y) povezava v Hassejevem diagramu končne delno urejene množice, rečemo, da y *pokrije* x in pišemo $x \prec y$.

Primer 3. Naj bo $X = \{a, b, c, d\}$ končen prostor, s topologijo $\tau = \{\emptyset, X, \{b, d\},$ {c},{d},{b,c,d}, c,d}}.$Topologija je \mathrm{T}_0$, zato je X tudi delno urejena množica.



Slika 3: Odprte množice v X in prirejen Hassejev diagram.

Definicija 6. Element $x \in X$ je *maksimalni element* delno urejene množice X, če $\forall y \in X, y \geq x \Rightarrow y = x$, x je *maksimum* v X, če $\forall y \in X, x \geq y$.

Končna delno urejena množica ima maksimum, natanko tedaj, ko ima enoličen maksimalni element. *Minimalni element* in *minimum* definiramo analogno.

Elementa x in y sta *primerljiva*, če je $x \leq y$ ali $y \leq x$. *Veriga* v X je podmožica $S \subseteq X$, v kateri je vsak par elementov primerljiv, *antiveriga* v X je podmožica $S \subseteq X$, v kateri ni noben par elementov primerljiv.

Odprtim množicam v X ustrezajo *navzdol zaprte množice*, zaprtim pa *navzgor zaprte množice.* Podmnožica U šibko urejene množice X je navzdol zaprta, če $\forall x \in X$, iz $y \leq x$, sledi da $y \in U$. Navzgor zaprte množice definiramo analogno. Z F_x definiramo zaprtje množice $\{x\}$. $F_x = \{y \in X; y \geq x\}$. Vidimo, da $y \in F_x \Leftrightarrow x \in U_y$.

Tudi morfizmi šibko urejenih množic in morfizmi končnih topoloških prostorov sovpadajo. Morfizem šibko urejene množice je preslikava, ki ohranja ureditev torej $f : X \to Y$, za katero iz $x \leq x'$ sledi $f(x) \leq f(x')$ za vsaka $x, x' \in X$. Morfizmi topoloških prostorov so pa zvezne preslikave.

Trditev 3. *Funkcija $f : X \to Y$ med končnima prostoroma je zvezna, natanko tedaj, ko ohranja ureditev.*

Dokaz. Naj bo f zvezna in naj $x \leq x'$ za $x, x' \in X$. Zaradi zveznosti je $f^{-1}(U_{f(x')})$ odprta. Ker velja $f(x') \in U_{f(x')}$, sledi, da $x' \in f^{-1}(U_{f(x')})$, ker je to navzdol zaprta množica, je tudi $x \in f^{-1}(U_{f(x')})$, na enakosti uporabimo f in dobimo $f(x) \in U_{f(x')}$, torej $f(x) \leq f(x')$ in f ohranja ureditev.

Naj bo zdaj f preslikava, ki ohranja ureditev. Pokažimo, da je $f^{-1}(U_y)$ down set za vsako bazno množico U_y. Naj bo $x \leq x'$ in $x' \in f^{-1}(U_y)$, torej $f(x') \in U_y$, ker f ohranja ureditev in je U_y navzdol zaprta, sledi da $f(x) \in U_y$, zato je $x \in f^{-1}(U_y)$, torej je $f^{-1}(U_y)$ navzdol zaprta, torej odprta.

$\square$

Iema 1. *Za vsaki primerljivi točki $x, y \in X$ v končnem prostoru X obstaja pot od x do y, tj. preslikava $\alpha : I \to X$, za katero velja $\alpha(0) = x$ in $\alpha(1) = y$.*

Dokaz. Naj bo $x \leq y$. Definirajmo $\alpha : I \to X$, z $\alpha([0, 1)) = x$ in $\alpha(1) = y$ in naj bo $U \in X$ odprta. Če je U vsebuje y, mora vsebovati tudi x, zato je praslika od U ali $\emptyset$ ali $[0, 1)$ ali pa I, ki so pa vse odprte v I, zato je α pot od x do y. $\square$

Ta lema nam pove, da v končnih prostorih obstajajo netrivialne poti, zato v splošnem fundamentalna grupa končnega prostora ni trivialna.

Naj bosta X in Y končni šibki ureditvi. Z Y^X označimo končno množico zveznih preslikav iz X v Y in jo opremimo z ureditvijo po točkah in sicer $f \leq g$, če velja $f(x) \leq g(x), \forall x \in X$. S tem dobimo na Y^X delno ureditev in topologijo. *Ograja* v X je zaporedje $x_0, x_1, ..., x_n$ točk v X, taka, da sta vsaki zaporedni točki primerljivi. X je *order connected*, če za vsaki točki $x, y \in X$ obstaja ograja, ki se začne z x in konča z y.

Iema 2. *Naj bo X končen prostor. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- *X je povezan prostor.*

- *X je order-connected šibka ureditev.*

- *X je povezan s potmi.*

Dokaz. Če je X order connected, potem je po lemi **??**, povezan tudi s potmi. Dokazati je treba le še da order-connectedness sledi iz povezanosti. Naj bo torej X povezan, $x \in X$ in $A = \{y \in X | \text{obstaja ograja med } x \text{ in } y\}$. Če je $z \leq x$, potem je tudi $z \in A$, zato je A navzdol zaprta. Analogno pokažemo, da je A navzgor zaprta. Ker je X povezan, sledi, da $A = X$, zato je X order connected. □

Trditev 4. *Naj bosta $f, g : X \to Y$ preslikavi med končnima prostoroma in $A \subseteq X$, potem je $f \simeq g$ rel A, natanko tedaj, ko obstaja ograja $f = f_0 \leq f_1 \geq ...f_n = g$, taka da $f_i|_A = f|_A$. Če je $A = \emptyset$, dobimo navadno homotopijo med f in g*

Dokaz. Obstoj homotopije $H : f \simeq g$ rel A je ekvivalenten obstoju take poti $\alpha : I \to Y^X$, da velja $\alpha(t)|_A = f|_A$, kar je ekvivalentno obstoju poti $\alpha : I \to M$, kjer je $M \subseteq Y^X$, taka množica, ki vsebuje preslikave, ki na A sovpadajo z f. Po lemi **??** to pomeni, da obstaja ograja med f in g v M. □

Trditev 5. *Naj bo X končen prostor in naj bo X_0 kvocient $X/_\sim$, pri čemer $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ in $y \leq x$. Potem je $X_0 \in T_0$, kvocientna projekcija $q : X \to X_0$ pa je homotopska ekvivalenca.*

Dokaz. Naj bo $i : X_0 \to X$ katerakoli preslikava, da velja $qi = 1_{X_0}$, i ohranja ureditev, zato je zvezna. Ker velja tudi $iq \leq 1_X$, je i homotopski inverz od q.

Naj bosta $x, y \in X$ taka, da $q(x) \leq q(y)$. Po definiciji je $iq \leq 1_X$ in $iq \geq 1_X$, zato je $x \leq iq(x) \leq iq(y) \leq y$. Če velja še $q(y) \leq q(x)$, potem je tudi $y \leq x$, ampak potem je $q(x) = q(y)$, zato je šibka ureditev na X_0 antisimetrična, torej je $X_0 \in T_0$. □

Ker je $iq \leq 1_X$ ter iq in 1_X sovpadata na X_0 je po trditvi **??** $iq \simeq 1_{X_0}$ rel X_0, zato je X_0 krepki deformacijski retrakt od X.

Definicija 7. Točka $x \in X$ je *navzdol odvečna*, če ima $\bar{U}_x = \{y \in X | y < x\}$ maksimum in *navzgor odvečna*, če ima $\bar{F}_x\{y \in X | y > x\}$ minimum. Točka je odvečna, če je eno ali drugo.

Navzgor odvečne točke v Hassejevem diagramu so tiste, ki imajo izhodno stopnjo enako ena, navzdol odvečne, pa tiste, ki imajo vhodno stopnjo enako ena.

Trditev 6. *Naj bo X T_0 prostor in $x \in X$ odvečna točka, potem je $X \backslash \{x\}$ krepki deformacijski retrakt od X.*

Dokaz. Recimo, da je x navzdol odvečna točka, in naj bo y maksimum v U_x. Definirajmo retrakcijo $r : X \to X \backslash \{x\}$ z $r(x') = x'$ za $x' \neq x$ in $r(x) = y$, r ohranja red, saj je $x \leq y$. Če z $i : X \backslash \{x\} \to X$ označimo inkluzijo, je $ir \leq 1_X$, zato je po lemi **??** je potem $ir \simeq 1_x$ rel $X \backslash \{x\}$. Če je x navzgor odvečna točka, je dokaz analogen. □

Definicija 8. T_0 prostor je *minimalen*, če nima odvečnih točk. krepki deformacijski retrakt prostora X, ki je minimalen prostor imenujemo *jedro* končnega prostora X.

Končnemu prostoru X postopoma odstranjujemo odvečne točke in s tem v vsakem koraku dobimo prostor, ki je homotopsko ekvivalenten prostoru X, zato je jedro krepki deformacijski retrak začetnega prostora, torej mu je homotopsko ekvivalenten. Seveda so tudi vsa jedra istega prostora homotopsko ekvivalentna.

Izrek 5. *Naj bo X končen minimalen prostor. Preslikava $f : X \to X$ je homotopna identiteti, natanko tedaj, ko je $f = 1_X$.*

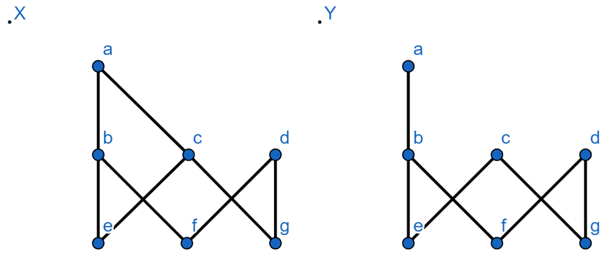
Dokaz. Po izreku **??** lahko predpostavimo, ali $f \leq 1_X$ ali $f \geq 1_X$. Pa recimo, da $f \leq 1_X$. Naj bo $x \in X$, trditev dokažimo z indukcijo na število elementov v U_x. Če $U_x = \{x\}$, potem je $f(x) = x$, saj f ohranja ureditev, če $U_x \neq \{x\}$, potem je po indukcijski predpostavki $f|_{\hat{U}_x} = 1_{\hat{U}_x}$. Če $f(x) = x$, potem je $f(x) \in \hat{U}_x$ in $\forall y < x, y = f(y) \leq f(x)$, torej je $f(x)$ maksimum od $\hat{U}_x$ in je x navzdol odvečna točka, kar je pa v protislovju z minimalnostjo prostora X. Če je $f \geq 1_X$, je dokaz podoben. □

Posledica 1. *Homotopska ekvivalenca med minimalnima končnima prostoroma je homeomorfizem. Jedro končnega prostora je enolično do homeomorfizma in dva končna prostora sta homotopsko ekvivalentna natanko tedaj, ko imata homeomorfno jedro.*

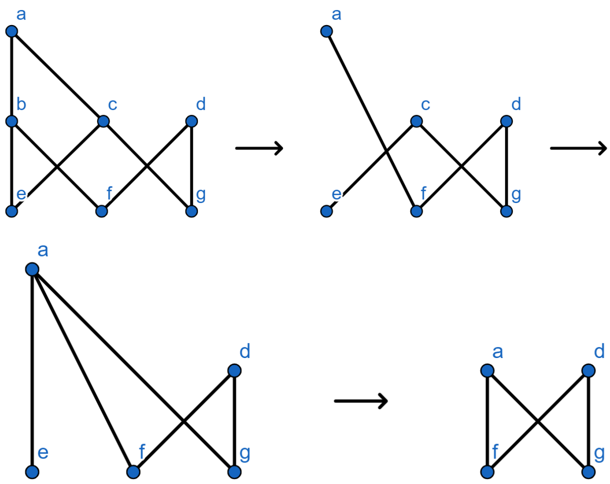
Dokaz. Naj bo $f : X \to Y$ homotopska ekvivalenca med končnima prostoroma in $g : Y \to X$ njen inverz. Potem $fg \simeq 1_Y$ in $gf \simeq 1_X$, po trditvi **??** je potem $fg = 1_Y$ in $gf = 1_X$, torej je g inverz od f in f je homeomorfizem. Če sta X_0 in X_1 dve jedri končnega prostora X, sta sta homotopsko ekvivalentni, torej med njima obstaja homotopska ekvivalenca f, ki je tudi homeomorfizem, torej sta jedri homeomorfni. Prostora X in Y sta homotopsko ekvivalentna, natanko tedaj, ko imata homotopsko ekvivalentni jedri, kar pa je tedaj, ko sta jedri homeomorfni. □

Primer 4. Naj bosta X in Y končna T_0 prostora.

Naslednjo zaporedje diagraov, nam pokaže, kako pridemo do jedra prostora X, z odstranjevanjem odvečnih točk. Točka b je navzgor odvečna v X,



c je navzgor odvečna v $X\backslash\{b\}$, e je pa navzgor odvečna v $X\backslash\{b, c\}$. Prostor $X\backslash\{b, c, e\}$ je minimalen končen prostor in je jedro od X.



Po drugi strani pa je a navzdol odvečna v Y in $Y\backslash\{a\}$ je minimalen. X in Y nista homotopsko ekvivalentna, saj njuni jedri nista homeomorfni.

5 Minimalni modeli prostorov

Definicija 9. Končni topološki prostor je *model* prostora X, če mu je šibko homotopsko ekvivalenten. Model je *minimalen*, če ima izmed vseh modelov najmanjšo kardinalnost.

Definicija 10. Naj bo X končen T_0 prostor. *Simplicialni kompleks* $\mathcal{K}(X)$ *prirejen* X, je simplicialni kompleks, čigar simpleksi so neprazne verige v X. Če je $f : X \to Y$ zvezna preslikava med dvema T_0 prostoroma. *prirejena simplicialna preslikava* $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ definiramo kot $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$.

Vidimo, če je $f : X \to Y$ zvezna, je $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ simplicialna, saj ohranja ureditev in slika verige v verige. Točka α v geometrijski realizaciji $|(X)|$ je konveksna kombinacija oblike $\alpha = t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_rx_r$, pri čemer $\sum_{i=1}^r t_i = 1$, $t_i \geq 0$ in velja, da je $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ veriga v X. Nosilec α je množica supp(α)$= \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. Pomembno vlogo igra preslikava $\alpha \mapsto x_1$.

Definicija 11. Naj bo X končen T_0 prostor, Definirajmo $\mathcal{K}$-*McCordovo* preslikavo $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$, z $\mu_X(\alpha) = \min(\text{supp}(\alpha))$.

Izrek 6. ***McCordov*** *Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $f : X \to Y$ zvezna. Če je zožitev*

$$f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$$

šibka homotopska ekvivalenca za vsako bazno množico U, potem je $f : X \to Y$ šibka homotopska ekvivalenca.

Opomba 2. *Izrek ne velja le za zožitev na bazne množice, ampak tudi na vsako bazi podobno pokritje, torej za vsako pokritje, ki je baza za kako drugo topologijo.*

Iema 3. *Naj bo $x \in X$ in naj bo $L = X \setminus U_x \subseteq \mathcal{K}(X)$. Potem se vsak $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ da napisati, kot $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$, za $\beta \in |\mathcal{K}(U_x)|$, $\gamma \in |L|$ in $0 < t \leq 1$, pri čemer je α zvezno odvisna od β, γ ter t in β, γ ter t so enolično določeni.*

Dokaz. L je subkompleks, ki ga napenjajo oglišča, ki niso v U_x. Za vsak $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i, \text{ za } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

za $u_i \in U_x$, $v_i \in X \setminus U_x$ in za nek $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. S t označimo $\sum_{i=1}^r \alpha_i$, torej je $1 - t = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i$ in $0 < t \leq 1$. Potem $\beta = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i / t \in |\mathcal{K}(U_x)|$, saj je $\sum_{i=1}^r \alpha_i / t = 1$ in podobno $\gamma = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i / (1-t) \in |\mathcal{K}(X \setminus U_x)|$. Zveznost in enoličnost sledi iz konstrukcije.

□

Izrek 7. *$\mathcal{K}$-McCordova preslikava je šibka homotopska ekvivalenca za vsak končen T_0-prostor.*

Dokaz. Definirajmo retrakcijo $r : U_x \to \{x\}$ kot $r(y) = x$, za vsak $y \in X$. Ker je x maksimum v U_x, je $r \geq 1_X$, zato je po trditvi **??** $r \simeq 1_X$, torej je

U_x kontraktibilna množica. Dokazali bomo, da je za vsak $x \in X$, $\mu_X^{-1}(U_x)$ odprta in kontraktibilna. S tem bomo pokazali, da je μ_X zvezna in da so zožitve $\mu_X|_{\mu_X^{-1}(U_x)} : \mu_X^{-1}(U_x) \to U_x$ šibke homotopske ekvivalence, kar pa po McCordovem izreku **??** pomeni, da je preslikava μ_X šibka homotopska ekvivalenca.

Naj bo $x \in X$ in naj bo $L = X \setminus U_x \subseteq \mathcal{K}(X)$. L je torej subkompleks, ki ga napenjajo oglišča, ki niso v U_x. Trdimo, da

$$\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|.$$

Pokažimo najprej, da $\mu_X^{-1}(U_x) \subseteq |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. Naj bo $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$, torej je $\min(\mathrm{supp}(\alpha)) \in U_x$, zato $\mathrm{supp}(\alpha)$ vsebuje oglišče iz U_x, zato $\alpha \notin |L|$, torej $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$.

Pokažimo še, da $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \subseteq \mu_X^{-1}(U_x)$. Naj $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. Če $\alpha \notin |L|$, potem obstaja $y \in \mathrm{supp}(\alpha)$, tak, da $y \in U_x$, zato je $\min(\mathrm{supp}(\alpha)) \leq y \leq x$, zato je $\mu_X(\alpha) \in U_x$ in $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$. Ker je $|L|$ zaprta podmnožica $|\mathcal{K}(X)|$, je $\mu_X^{-1}(U_x)$ odprta.

Pokažimo, da je $\mu_X^{-1}(U_x)$ kontrabilna. Prvo pokažimo, da je $|\mathcal{K}(U_x)|$ krepki deformacijski retrakt od $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. Naj bo $i : |\mathcal{K}(U_x)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ inkluzija. Če je $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$, potem je po lemi **??** $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$, za $\beta \in |\mathcal{K}(U_x)|$, $\gamma \in |L|$ in $0 < t \leq 1$. Definirajmo $r : |\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \to |\mathcal{K}(U_x)|$ kot $r(\alpha) = \beta$. Ker je α zvezna in je zožitev $r|_{(|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \overline{\sigma}} : (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ zvezna, za vsak $\sigma \in \mathcal{K}(X)$, sledi da je r zvezna. Definirajmo zdaj linearno homotopijo $H : (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \times I \to (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|)$ med $1_{(|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|)}$ in ir kot

$$H(\alpha, s) = (1-s)\alpha + s\beta.$$

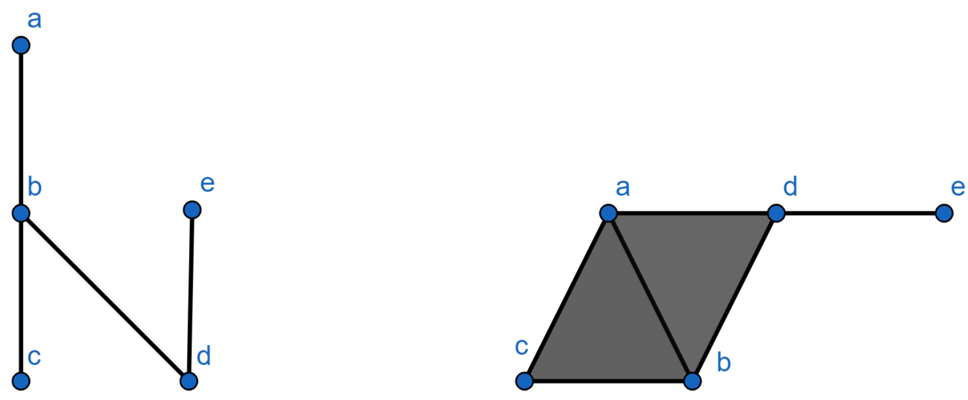
H je dobro definirana, in zvezna, saj je vsaka zožitev

$$H|_{((|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \overline{\sigma}) \times I} : ((|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \overline{\sigma}) \times I \to \overline{\sigma}$$

dobro definirana in zvezna, $\sigma \in \mathcal{K}(X)$.

Ker je vsak element iz U_x primerljiv z x, je $\mathcal{K}(U_x)$ simplicialni stožec, zato je po trditvi **??** $|\mathcal{K}(U_x)|$ kontraktibilen in zato je kontraktibilna tudi $\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. □

Če imamo končen topološki prostor X, mu priredimo simplicialni kompleks $\mathcal{K}(X)$, Geometrijska realizacija $|\mathcal{K}(X)|$ tega kompleksa pa je šibko homotopsko ekvivalentna začetnemu prostoru X. Torej lahko za vsak prostor, ki je homeomorfen geometrijski realizaciji nekega simplicialnega kompleksa, najdemo njegov končen model tj. končen topološki prostor, ki mu je šibko homotopsko ekvivalenten.



Slika 4: Končen prostor in njegov prirejen simplicialni kompleks, ki mu je šibko homotopsko ekvivalenten.

Definicija 12. Naj bo K končen simplicialni kompleks. Končen T_0- prostor $\chi(K)$ prirejen k K je delno urejena množica simpleksov v K, urejena glede na inkluzijo. Naj bo $\varphi : K \to L$ simplicialna preslikava, potem preslikavo $\chi(\varphi) : \chi(K) \to \chi(L)$ definiramo kot $\chi(\varphi)(\sigma) = \varphi(\sigma)$ za vsak simpleks $\sigma \in K$

Primer 5. primer preslikave

Iema 4. *Naj bo $f : X \to Y$ zvezna preslikava med dvema T_0 prostoroma, potem naslednji diagram komutira*

$$\begin{tikzcd}
|\mathcal{K}(X)| \arrow[r, "|\mathcal{K}(f)|"] \arrow[d, "\mu_X"'] & |\mathcal{K}(Y)| \arrow[d, "\mu_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
f\mu_X(\alpha) &= f(\min(\mathrm{supp}(\alpha))) \overset{*}{=} \min(f(\mathrm{supp}(\alpha))) \\
&= \min(\mathrm{supp}(|\mathcal{K}(f)(\alpha))) = \mu_Y|\mathcal{K}(f)|(\alpha)
\end{aligned}$$

Pri čemer $*$ velja zaradi zveznosti f, druge enakosti pa veljajo kar po definiciji. □

Če je K končen kompleks, potem je $\mathcal{K}(\chi(K))$ prva baricentrična subdivizija. definirajmo *χ-McCordovo preslikavo* $\mu_K = \mu_{\chi(K)} S_K^{-1} : |K| \to \chi(K)$. Ker je kompozitum dveh šibkih homotopskih ekvivalenc tudi šibka homotopska ekvivalenca, takoj sledi naslednji izrek.

Izrek 8. *χ-McCordova preslkava μ_K je šibka homotopska ekvivalenca za vsak končen simplicialni kompleks K.*

Trditev 7. *Naj bo $\varphi : K \to L$ simplicialna preslikava med končnima kompleksoma. Potem naslednji diagram komutira do homotopije natančno*

$$\begin{tikzcd}
|K| \arrow[r, "|\varphi|"] \arrow[d, "\mu_K"'] & |L| \arrow[d, "\mu_L"] \\
\chi(K) \arrow[r, "\chi(\varphi)"] & \chi(L)
\end{tikzcd}$$

Dokaz. Najprej poiščimo homotopijo med $|\varphi|s_K$ in $s_L|\varphi'|$, kjer je $\varphi' = \mathcal{K}\chi(\varphi)$ preslikava med baricentričnima subdivizijama K' in L'. Naj bo $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\}$ simpleks v K' in naj bo $\sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_r$ veriga simpleksov iz K. Naj bo α točka v zaprtem simpleksu $\overline{S}$. Potem je $S_K(\alpha) \in \overline{\sigma_r} \subseteq |K|$ in $|\varphi|S_K(\alpha) \in \overline{\varphi_r} \subseteq |L|$. Velja pa tudi $|\varphi'|(\alpha) \in \ \varphi(\sigma_1), \varphi(\sigma_2), \cdots, \varphi(\sigma_r)\}$ in potem $S_L|\varphi'|(\alpha) \in \overline{\varphi(\sigma_r)}$. Zato je linearna homotopija

$$H : |K'| \times I \to |L|$$

$$\text{H: } (\alpha, t) \mapsto (1-t)|\varphi|S_K(\alpha) + tS_L|\varphi'|(\alpha)$$

zvezna in dobro definirana in zato $|\varphi|S_K(\alpha) \simeq S_L|\varphi'|$. Iz leme **??** sledi, da naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd}
|\mathcal{K}(\chi(K))| \arrow[r, "|\mathcal{K}(\chi(\varphi)|"] \arrow[d, "\mu_{\chi(K)}"'] & |\mathcal{K}(\chi(L))| \arrow[d, "\mu_{\chi(L)}"] \\
\chi(K) \arrow[r, "\chi(\varphi)"] & \chi(L)
\end{tikzcd}$$

in zato

$$\begin{aligned}
\mu_L|\varphi| = \mu_{\chi(L)}S_L^{-1}|\varphi| &\simeq \mu_{\chi(L)}|\varphi'|S_K^{-1} \\
= \chi(\varphi)\mu_{\chi(K)}S_K^{-1} &= \chi(\varphi)\mu_K
\end{aligned}$$

$\square$

Iz lastnosti 2 od 3 (to je treba še dokazati) in dejstva, da je preslikava, ki je homotopna šibki homotopski ekvivalenci isto šibka homotopska ekvivalenca, takoj sledi naslednja trditev.

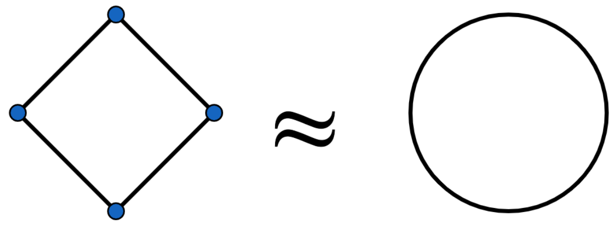
Trditev 8. *Naj bo $\varphi : K \to L$ simplicialna preslikava med končnima kompleksoma, potem je $|\varphi|$ šibka homotopska ekvivalenca, natanko tedaj, ko je $\chi(\varphi)$ šibka homotopska ekvivalenca.*

6 Konstrukcije novih topoloških prostorov

V tem poglavju bomo definirali nekaj osnovnih konstrukcij iz algebraične topologije in jih uporabili na simplicialnih kompleksih ter končnih in splošnih topoloških prostorih. S S^n označimo $n-$dimenzionalno sfero.

Spoj Topoloških prostorov X in Y je topološki prostor $X * Y = X \times Y \times I/_{\sim}$, pri čemer $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ in $(x_1, y, 1) \sim (x2, y, 1)$. Torej $X \times Y \times \{0\}$ strnemo na X in $X \times Y \times \{1\}$ na Y. Intuitivno, to pomeni, da vsako točko na X z intervalom povežemo z vsako točko na Y. Poseben primer spoja je *suspenzija* ΣX, ki je spoj X in prostora na dveh točkah, S^0.

$$\Sigma X = S^0 * X = X \times I/_{(X\times\{0\}, X\times\{1\})}$$



Slika 5: Suspenzija ΣS^0 je homeomorfna S^1. V splošnem velja $\Sigma S^n = S^{n+1}$

Naj bosta X in Y topološka prostora in $x_0 \in X$ ter $y_0 \in Y$, potem je *Šop* $X \bigvee Y$ kvocient disjunktne unije $X \bigsqcup Y$, pri katerem identificiramo x_0 in y_0. Na primer $S^1 \bigvee S^1$ je prostor, ki ga dobimo, če staknemo dve krožnici v eni točki in je homeomorfen "**8**".

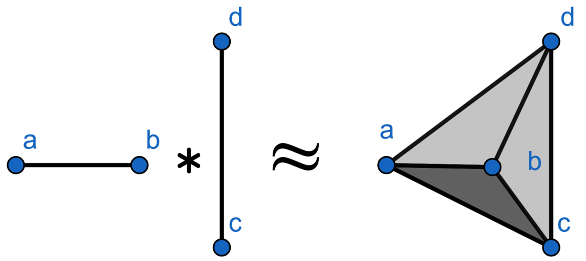
Simplicialni spoj $K * L$ kompleksov K in L z disjunktnima množicama oglišč je kompleks.

$$K * L = K \cup L \cup \{\sigma \cup \tau | \sigma \in K, \tau \in L\}$$

Simplicialni stožec aK z bazo K je spoj K in oglišča $a \notin K$

Trditev 9. *Naj bosta K in L končna simplicialna kompleksa, potem velja, da je geometrijska realizacija $|K * L|$ homeomorfna topološkemu spoju $|K| * |L|$.*

Dokaz. dokazzz $\square$



Slika 6: Spoj dveh 1−simpleksov je 3−simpleks.

Če je K 0-kompleks z dvema ogliščema, potem je $|K * L| = |K| * |L| = S^0 * |L| = \Sigma|L|$.

Definicija 13. *Ne-Hausdorffov spoj* $X \circledast Y$ dveh končnih T_0−prostorov X in Y je disjunktna unija $X \bigsqcup Y$, v kateri pustimo ureditev v X in v Y in nastavimo $x \leq y$ za vsaka $x \in X$ in $y \in Y$.

Ta spoj je asociativen in v splošnem ni komutativen, tako kot pri topološkem in simplicialnem spoju imamo poseben primer ne-Hausdorffovega ne-Hausdorffove Suspenzije $\mathbb{S}(X) = X \circledast S^0$.

Ne-Hausdorffova suspenzija reda n je definirana rekurzivno, kot $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}(\mathbb{S}^{n-1}(X))$.

Opomba 3. *Velja* $\mathcal{K}(X \circledast Y) = \mathcal{K}(Y) * \mathcal{K}(X)$.

7 Minimalni model sfere

Definicija 14. Končni topološki prostor je *model* prostora X, če mu je šibko homotopsko ekvivalenten. Model je *minimalen*, če ima izmed vseh modelov najmanjšo kardinalnost.

Spomnimo se, da je minimalni končni prostor, prostor brez odvečnih točk, ker pa je vsak končen prostor homotopsko ekvivalenten svojemu jedru, sledi, da je vsak minimalni končni model prostora tudi minimalen končen prostor.

Trditev 10. *Končen prostor* $\mathbb{S}^n(S^0)$ *je končni model n-dimenzionalne sfere* S^n *za vsak* $n \geq 0$

Dokaz. Vemo že, da je $\mathbb{S}^n(S^0)$ šibko homotopsko ekvivalenten $|\mathcal{K}(\mathbb{S}^n(S^0))|$, po opombi **??** in trditvi **??** pa velja $|\mathcal{K}(\mathbb{S}^n(S^0))| = |\mathcal{K}(\underbrace{S^0 \circledast S^0 \circledast \cdots \circledast S^0}_{n+1\text{-krat}})| = |\mathcal{K}(S^0) * \mathcal{K}(S^0) * \cdots * \mathcal{K}(S^0)| = |\mathcal{K}(S^0)| * |\mathcal{K}(S^0)| * \cdots * |\mathcal{K}(S^0)| = S^0 * S^0 * \cdots * S^0 = S^n$ □

Zdaj bomo še dokazali, da je $\mathbb{S}^n(S^0)$ minimalni končni model za S^n. Še več, pokazali bomo, da ima vsak prostor, šibko homotopsko ekvivalenten S^n vsaj $2n+2$ točk, če ima pa natanko $2n+2$ točk pa je homeomorfen $\mathbb{S}^n(S^0)$.

Definicija 15. *Višina* $\mathrm{ht}(X)$ končne delno urejene množice je ena manj kot dožina najdaljše verige v X. Z $\#X$ pa označimo število elementov v X.

Dimenzija prirejenega kompleksa $\mathcal{K}(X)$ je enaka $\mathrm{ht}(X)$.

Izrek 9. *Naj bo* $X \neq *$ *minimalen prostor, potem ima vsaj* $2\,\mathrm{ht}(X)+2$ *točk. Če ima natanko* $2\,\mathrm{ht}(X)+2$ *točk, potem je homeomorfen* $\mathbb{S}^{\mathrm{ht}(X)}(S^0)$

Dokaz. Naj bo $x_0 < x_1 < \cdots < x_h$ veriga dolžine $h = \mathrm{ht}(X)$. Ker je X minimalen, x_i ni odvečna točka za noben $0 \leq i < h$. Potem za vsak $0 \leq i < h$ obstaja y_{i+1}, tak da $y_{i+1} > x_i$ (1) in $y_{i+1} \ngeq x_{i+1}$. Trdimo, da so vse točke y_i med seboj različne, za vsak $0 < i \leq h$ in da nobena ni enaka x_j za noben $0 \leq j \leq h$.

Ker $y_{i+1} > x_i$, sledi, da $y_{i+1} \neq x_j$ za noben $j \leq i$, ker velja tudi $y_{i+1} \ngeq x_{i+1}$ pa sledi, da $y_{i+1} \neq x_j$ za noben $j > i$

Če je $y_{i+1} = y_{j+1}$ za nek $i < j$, potem je $y_{i+1} = y_{j+1} \geq x_j \geq x_{i+1}$, kar je pa v protislovju z $y_{i+1} \ngeq x_{i+1}$.

Ker je vsak končen prostor z minimumom ali z maksimumom kontraktibilen in je $X \neq *$, minimalen prostor, sledi da X nima minimuma, torej mora obstajati točka $y_0 \in X$, za katero velja $y_0 \ngeq x_0$. Zato je y_0 različna od drugih $2h+1$ točk in zato $\#X \geq 2h+2$. Predpodstavimo zdaj, da ima X natanko $2h+2$ točk, torej

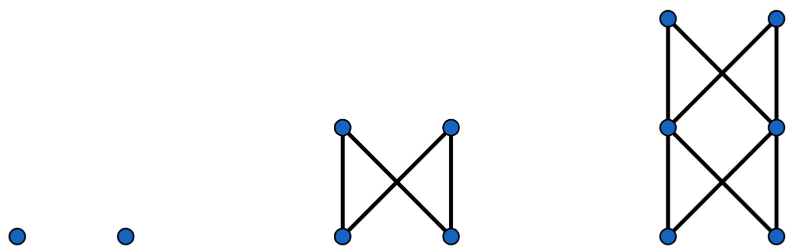
$$X = \{x_0, x_1, \cdots x_h, y_0, y_1, \cdots y_h,\}$$

Če bi bil $x_i < y_i$, za $0 < i \leq h$ bi bilo to v nasprotju z maksimalnostjo verige $x_0 < \cdots < x_h$, saj bi potem veljalo $x_{i-1} < y_i < x_i$. Tudi $y_i \ngtr x_i$ za $0 \leq i \leq h$ zaradi (1), zato sta x_i in y_i neprimerljiva za $0 \leq i \leq h$.

Z indukcijo na j pokažimo, da $y_i < x_j$ in $y_i < y_j$za vse $i < j$. Za $j = 0$ ni kaj za dokazovati. Naj bo $0 \leq k < h$ in recimo, da trditev drži za $j = k$, dokažimo, da drži tudi za $j = k+1$. Ker x_{k+1} ni navzdol odvečna, obstaja z, da $z < x_{k+1}$ in $z \nleq x_k$, ker sta x_{k+1} in y_{k+1} neprimerljiva, velja tudi $z \neq y_{k+1}$. Iz indukcijske predpodstavke sledi, da je vsaka točka, z izjemo y_k in y_{k+1}, večja od x_{k+1} ali manjša od x_k. Ker $y_{k+1} \nleq x_{k+1}$, je potem $z = y_k$ in zato $y_k < x_{k+1}$. Dokažimo še, da $y_k \leq y_{k+1}$. Ker y_{k+1} ni navzdol odvečna, obstaja $w \in X$, da je $w < y_{k+1}$ in $w \nleq x_k$. Iz indukcijske predpodstavke in dejstva, da $y_{k+1} \ngeq x_{k+1}$, sklepamo, da $w = y_k$ in zato $y_k < y_{k+1}$. Za $i < k$ pa velja $y_i < x_k < x_{k+1}$ in $y_i < x_k < y_{k+1}$.

Dokazali smo, da za vsak $i < j$, velja $y_i < x_j$, $y_i < y_j$, $x_i < x_j$ in $x_i < y_j$ ter da sta x_i in y_i neprimerljiva za vsak $0 \leq j \leq h$. To je pa ureditev v $\mathbb{S}^h(S^0)$ in zato je X homeomorfen $\mathbb{S}^h(S^0)$.

$\square$



Slika 7: Minimalni modeli za S^0, S^1 in S^2.

Ker je $\mathbb{S}^n(S^0)$ model za S^n, čigar višina je enaka n in ima $2n+2$ točk, je $\mathbb{S}^n(S^0)$ minimalni model za S^n. Model je enoličen, saj je vsak model za S^n na $2n+2$ točkah homeomorfen $\mathbb{S}^n(S^0)$.

8 Zanke v Hassejevem diagramu

Pokazali bomo, kako se fundamentalna grupa končnega T_0 prostora izraža preko prirejenega Hassejevega diagrama. Hassejev diagram končnega T_0 prostora X označimo z $\mathcal{H}(X)$, z $E(\mathcal{H}(X))$ pa označimo množico njegovih robov.

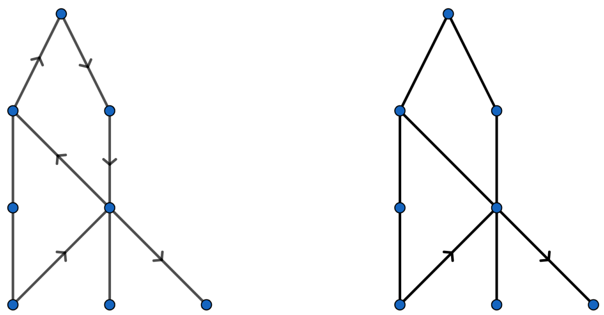
Definicija 16. Naj bo (X, x_0) končen pointed T_0 prostor. Urejen par $e = (x, y)$ imenujemo $\mathcal{H}-$rob od X, če $(x, y) \in E(\mathcal{H}(\mathcal{X}))$, ali $(y, x) \in E(\mathcal{H}(X))$. Točki x rečemo *začetek* x in označimo $x = \mathfrak{o}(e)$, točki y pa *konec* od e, označimo $\mathfrak{e}(e) = y$. *Inverz* $\mathcal{H}-$roba $e = (x, y)$ je $\mathcal{H}-$rob $e^{-1} = (y, x)$

$\mathcal{H}-$pot v (X, x_0) je zaporedje (lahko tudi prazno), $\mathcal{H}-$robov $\xi = e_1 e_2 \cdots e_n$, za katerega velja, da je $\mathfrak{e}(e_i) = \mathfrak{o}(e_{i+1})$, za vsak $0 \leq i \leq n-1$. Začetek $\mathcal{H}-$poti ξ je $\mathfrak{o}(\xi) = e_1$, konec pa $\mathfrak{e}(\xi) = e_n$, začetek in konec prazne poti je

$\mathfrak{o}(\emptyset) = \mathfrak{e}(\emptyset) = x_0$ Če je $\xi = e_1, e_2 \cdots e_n$ $\mathcal{H}-$pot, definiramo $\overline{\xi} = e_n^{-1}, \cdots e_2^{-1} e_n^{-1}$. Če sta ξ in ξ' $\mathcal{H}-$poti in velja $\mathfrak{e}(\xi) = \mathfrak{e}(\xi')$, lahko definiramo produktno $\mathcal{H}-$pot $\xi\xi'$, kot zaporednje $\mathcal{H}-$robov v ξ, ki mu sledi zaporednje $\mathcal{H}-$robov v ξ'.

Za $\mathcal{H}-$pot $\xi = e_1 e_2, \cdots e_n$ pravimo, da je *monotona*, če je $e_i \in E(\mathcal{H}(X))$ za vsak $1 \leq i \leq n$ ali pa je $e_i^{-1} \in E(\mathcal{H}(X))$ za vsak $1 \leq i \leq n$. *Zanka* iz x_0 je $\mathcal{H}-$pot , ki se začne in konča v x_0. Za zanki ξ in ξ' rečemo, da sta blizu, če obstajajo monotone $\mathcal{H}-$poti $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, take, da sta množici $\{\xi, \xi'\}$ in $\{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4, \xi_1\xi_4\}$ enaki.

Rečemo, da sta zanki ξ in ξ' $\mathcal{H}-$ekvivalentni, če obstaja končno zaporednje zank $\xi = \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n = \xi'$, tako da sta vsaki zaporedni zanki blizu. Z $\langle \xi \rangle$ označimo $\mathcal{H}-$ ekvivalenčni razred zanke ξ in z $\mathscr{H}(X, x_0)$ množico teh razredov.



Slika 8: Primer poti ki sta blizu

Izrek 10. *Naj bo (X, x_0) končen pointed T_0 prostor. Potem je množenje $\langle \xi \rangle \langle \xi' \rangle = \langle \xi\xi' \rangle$ dobro definirano in inducira grupno strukturo na $\mathscr{H}(X, x_0)$*

Dokaz. Dobra definiranost in asociativnost sta očitni, enota je $\langle \emptyset \rangle$. Naj bosta ξ in ξ' poti, e $\mathcal{H}-$rob in $\mathfrak{e}(\xi) = \mathfrak{o}(\xi') = \mathfrak{o}(e)$. potem sta poti $\langle \xi\xi' \rangle$ in $\langle \xi e e^{-1} \xi' \rangle$ blizu, saj je e monotona pot. Iz tega takoj sledi, da je inverz od $\langle e_1 e_2 ... e_n \rangle$ enak $\langle e_n^{-1} ... e_2^{-1} e_1^{-1} \rangle$. $\square$

Izrek 11. *Naj bo (X, x_0) končen pointed T_0 prostor. Potem je grupa sklenjenih lomljenk $E(\mathcal{K}(X), x_0)$ izomorfna $\mathscr{H}(X, x_0)$.*

Dokaz. Definirajmo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{H}(X, x_0) &\to E(\mathcal{K}(X), x_0) \\ \langle e_1 e_2 ... e_n \rangle &\mapsto [e_1 e_2 ... e_n] \\ \emptyset &\mapsto [(x_0, x_0)] \end{aligned}$$

.

Najprej pokažimo, da je φ dobro definiran. Naj bosta zanki $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ in $\xi_1\xi_4$ blizu in naj bosta $\xi_2 = e_1e_2...e_n$ in $\xi_3 = e'_1e'_2...e'_m$ monotoni $\mathcal{H}-$poti. Potem velja

$$\begin{aligned}[\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4] &= [\xi_1e_1e_2...e_{n-1}(\mathfrak{o}(e_n)\mathfrak{e}(e_n))\xi_3\xi_4] \\ &= [\xi_1e_1e_2...e_{n-2}(\mathfrak{o}(e_{n-1})\mathfrak{e}(e_n))\xi_3\xi_4] = \cdots = [\xi_1(\mathfrak{e}(\xi_1)\mathfrak{e}(e_n))\xi_3\xi_4],\end{aligned}$$

saj je $\{\mathfrak{o}(e_{n-1}), \mathfrak{o}(e_{n-1+1}), \mathfrak{e}(e_{n-i+1})\}$, analogno

$$[\xi_1(\mathfrak{e}(\xi_1)\mathfrak{e}(e_n))\xi_3\xi_4] = [\xi_1(\mathfrak{e}(\xi_1)\mathfrak{e}(e_n))(\mathfrak{o}(e'_1)\mathfrak{o}(\xi_4))\xi_4]$$

in zato

$$\begin{aligned}[\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4] &= [\xi_1(\mathfrak{e}(\xi_1)\mathfrak{e}(e_n))(\mathfrak{o}(e'_n)\mathfrak{o}(\xi_4))\xi_4] \\ &= [\xi_1(\mathfrak{e}(\xi_1)\mathfrak{e}(e_n))(\mathfrak{e}(e_n)\mathfrak{e}(\xi_1))\xi_4] = [\xi_1(\mathfrak{e}(\xi_1)\mathfrak{e}(\xi_1))\xi_4] = [\xi_1\xi_4].\end{aligned}$$

Obratno, če je $\xi = (x_0, x_1)(x_1, x_2)...(x_{n-1}, x_n)$ lomljenka v $\mathcal{K}(X)$ z $x_0 = x_n$, potem sta x_i in x_{i-1} primerljiva za vsak $1 \leq i \leq n$, zato lahko najdemo monotone $\mathcal{H}-$poti $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$, take da $\mathfrak{o}(x_{i-1}) = \mathfrak{e}(x_i)$ za $1 \leq i \leq n$. Definirajmo

$$\begin{aligned}\psi : E(\mathcal{K}(X), x_0) &\to \mathscr{H}(X, x_0), \\ [\xi] &\mapsto \langle \xi_1, \xi_2, ...\xi_n \rangle.\end{aligned}$$

Definicija je neodvisna od izbire $\mathcal{H}-$poti ξ_i, saj če se izbiri razlikujeta za kak $i = k$, potem sta $\xi_1...\xi_k...\xi_n$ in $\xi_1...\xi'_k...\xi_n$ $\mathcal{H}-$ekvivalentni, saj sta obe blizu $\xi_1...\xi_k\xi_k^{-1}\xi_k...\xi_n$, torej $\langle \xi_1...\xi_k...\xi_n \rangle = \langle \xi_1...\xi'_k...\xi_n \rangle$

Definicija je neodvisna od izbire predstavnika. Recimo da sta $\xi(x, y)(y, z)\xi'$ in $\xi(x, z)\xi'$ ekvivalentni lomljenki v $\mathcal{K}(X)$, ki se začneta in končata v x_0, pri čemer sta ξ in ξ' lomljenki, x, y in z pa so primerljivi. Če y leži med x in z, lahko najdemo monotono $\mathcal{H}-$pot od x do z, ki vsebuje y in nadomesti $\mathcal{H}-$pot od x do y in od y do z in zato je ψ ekvivalentno definirana na $\xi(x, y)(y, x)\xi'$ in $\xi(x, z)\xi'$. Če je $z \leq x \leq y$ lahko poiščemo monotone $\mathcal{H}-$poti α od x do y in β od z do x, potem bo $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ nadomestila pot (y, z) in $\overline{\beta}$ bo nadomestila pot (x, z). Dokazati moramo le še, da velja $\langle \gamma\alpha\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma' \rangle = \langle \gamma\overline{\beta}\gamma \rangle$, za $\mathcal{H}-$poti γ in γ', kar je pa trivialno. Preostale kombinacije x, y in z dokažemo analogno.

Očitno sta φ in ψ drug drugemu inverzna in zato sta izomorfizma. $\square$

Ker sta grupi $E(\mathcal{K}(X), x_0)$ in $\pi_1(|\mathcal{K}(X)|, x_0)$ izomorfni, takoj sledi naslednji rezultat.

Posledica 2. *Naj bo (X, x_0) končen pointed T_0 prostor, potem $\pi_1(X, x_0) = \mathscr{H}(X, x_0)$.*

9 Minimalni modeli grafov

Graf v topologiji je topološki prostor, ki ga dobimo iz običajnega grafa $G = (E, V)$, če oglišča iz V zamenjamo s točkami in vsako povezavo $e \in E$, $e = xy$, za $x, y \in V$, zamenjamo z enotskim intervalom, pri čemer identificiramo 0 in x ter 1 in y. Graf je torej geometrijska realizacija enodimenzionalnega simplicialnega kompleksa. Graf je končen, če ima končno mnogo oglišč.

Brez dokaza bomo upoštevali dejstvo, da je za enodimenzionalne poliedre šibki homotopski tip odvisen le od fundamente grupe, kar pomeni, da sta sta prostora šibko homotopsko ekvivalentna, natanko tedaj, ko imata izomorfni fundamentalni grupi.

Definicija 17. Naj bo K simplicialni kompleks dimenzije n in naj s_m označuje število $m-$simpleksov v K. *Eulerjeva karakteristika* $\chi(K)$ simplicialnega kompleksa K, je $\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^m s_m$

Če se omejimo na enodimenzionalne simplicialne komplekse oziroma grafe, potem je eulerjeva karakteristika enaka $V - E$, kjer je V število oglišč, E pa število robov v grafu. Eulerjeva karakteristika dreves je enaka 1.

Trditev 11. *Naj bo G topološki graf in e njegova povezava. Potem je $G \times \{0\} \cup e \times I$ deformacijski retrakt od $G \times I$.*

Dokaz. Obstaja retrakcija $r : I \times I \to I \times \{0\} \cup \partial I \times I$, na primer radialna projekcija iz točke $(1/2, 2) \in I \times \mathbb{R}$. Ta retrakcija nam porodi deformacijsko retrakcijo $r_t^1 = tr + (1 - t)1$, ta deformacijska retrakcija nam porodi deformacijsko retrakcijo $G \times I \to G \times \{0\} \cup V \cup e \times I$, kjer je V množica ogliščč grafa. Ker je $\{v\} \times I \sim!!I$ kontraktibilna, obstaja deformacijska retrakcija $r_t^2 : G \times \{0\} \cup V \cup e \times I \to G \times \{0\} \cup e \times I$. Če izvedemo r_t^1 v času $[0, 1/2]$ in r_t^2 v $[1/2, 1]$, dobimo deformacijsko retrakcijo $r_t : G \times I \to G \times \{0\} \cup e \times I$. Retrakcija je zvezna, saj je zvezna kot zožitev na vse robove in na vsa oglišča v G, oziroma na vse zaprte simplekse. $\square$

Trditev 12. *Naj bo G končen topološki graf in $e = \{u, v\}$ povezava v grafu za $u \neq v$, potem se vsak par preslikav $G \times \{0\} \to G$ in $e \times I \to G$, ki sovpada na $e \times \{0\}$, da razširiti do preslikave $G \times I \to G$*

Dokaz. Ker je e zaprt v G, lahko preslikavi združimo v preslikavo $G \times \{0\} \cup e \times I \to G$, ki je zvezna, saj je zvezna na zaprtih podprostorih $G \times \{0\}$ in $e \times I$. Če to komponiramo z retrakcijo $G \times I \to G \times \{0\} \cup e \times I$, dobimo razširitev $G \times I \to G$. $\square$

Recimo, da imamo preslikavo $f_0 : G \to G$ in homotopijo $f_t : e \to G$, preslikave $f_0|A$, potem nam ta trditev pove, da lahko to homotopijo razširimo do homotopije $f_t : G \to G$ dane preslikave f_0.

Trditev 13. *Naj bo G končen topološki graf in $e = \{u, v\}$ povezava v grafu za $u \neq v$. Potem sta prostora G in $G/_e$ homotopsko ekvivalentna.*

Dokaz. Naj bo $i : e \to G$ inkluzija. Povezava e je kontraktibilna, torej obstaja homotopija $r_t : e \to e$ in $r_0 = 1_e$. Naj bo $f_t : G \to G$ razširitev homotopije ir_t in naj velja $f_0 = 1_G$.

Ker $f_t(e) \subseteq e$, zato kompozicija $qf_t : G \to G/_e$ slika e v točko, zato obstaja $\bar{f}_t : G/_e \to G/_e$, taka da velja $gf_t = \bar{f}_t q$. Pri $t = 1$ je $f_1(e)$ enaka točki, v katero se e kontrakira. Zato f_1 inducira preslikavo $g : G/_e \to G$, da velja $gq = f_1$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G/_e \arrow[r, "\bar{f}_t"] & G/_e \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G/_e \arrow[r, "\bar{f}_1"] \arrow[ur, "g"] & G/_e \end{tikzcd}$$

Ker velja $qg(\bar{x}) = qgq(x) = qf_1(x) = \bar{f}_1 q(x) = \bar{f}_1(\bar{x})$, sledi, da je $qg = \bar{f}_1$. Zato sta q in g homotopska inverza, saj je $gq = f_1 \simeq f_0 = 1_G$ in $qg = \bar{f}_1 \simeq \bar{f}_0 = 1_{G/_e}$ $\square$

Posledica 3. *Naj bo G končen graf, in naj bo T vpeto drevo. Potem sta prostora G in $G/_T$ homotopsko ekvivalentna.*

Naj bo T vpeto drevo grafa G. Velja $\chi(T) = 1$. G dobimo iz T tako, da mu dodajamo povezave oziroma $1-$simplekse, zato $\chi(G) = 1 - n$, kjer je n število povezav v G, ki niso v T. Prostor $G/_e$ dobimo iz G, tako da krajišči povezave zlepimo v eno točko, povezavo pa izbrišemo, torej ima nov prostor eno oglišče in eno povezavo manj, zato se eulerjeva karakteristika ohranja. $G/_T$ je prostor z enim ogliščem x_0 in n povezavami, ki se začnejo in končajo v istem oglišču, torej je homeomorfen šopu $n = 1 - \chi(G)$ krožnic, kar označimo z $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$.

Posledica 4. *Šibki homotopski tip grafa je odvisen le od eulerjeve karakteristike*

Minimalni model grafa je torej enak minimalnemu modelu $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$. Poglejmo si fundamentalno grupo $\pi_1(\bigvee_{i=1}^{n} S^1, x_0)$, kjer je x_0 točka, v kateri so krožnice staknjene. Vsak ekvivalenčni razred zank predstavimo z zaporedjem krožnic, ki jih prepotuje in s smerjo v kateri gre čez krožnico. Če s s_i označimo ekvivalenčni razred zanke čez $i-$to krožnico, potem lahko ekvivalenčni zank predstavimo kot zaporedje $s_{i_1}^{j_1} s_{i_2}^{j_2} \cdots s_{i_m}^{j_m}$, za $m \in N$ in $j \in \{-1, 1\}$. Tu j označuje smer po kateri gremo čez krožnico. Stik zank $s_{i_1}^{j_1} \cdots s_{i_m}^{j_m}$ in $s_{k_1}^{l_1} \cdots s_{k'_m}^{l_h}$ pa je ekvivalenten stiku zaporedij $s_{i_1}^{j_1} \cdots s_{i_m}^{j_m} s_{k_1}^{l_1} \cdots s_{k'_m}^{l_h}$. Seveda velja $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$, kjer 1 predstavlja trivialno zanko. Torej vidimo, da je fundamentalna grupa $\pi_1(\bigvee_{i=1}^{n} S^1, x_0)$ enaka prosti grupi z n generatorji, ki jo označimo z F_n.

Trditev 14. *Naj bo X povezan topološki prostor in naj $x, x_0 \in X, x \neq x_0$, taka da x ni niti maksimalen, niti minimalen. Potem inkluzija asociiranih simplicialnih kompleksov $\mathcal{K}(X \backslash \{x\}) \subseteq \mathcal{K}(X)$ inducira epimorfizem*

$$i_\star : E(\mathcal{K}(X \backslash \{x\}), x_0) \to E(\mathcal{K}(X), x_0)$$

med njunima grupama sklenjenih lomljenk.

Dokaz. Pokazati moramo, da je vsaka lomljenka v $\mathcal{K}(X)$ z izhodiščem x_0 ekvivalentna neki drugi lomljenki, ki ne gre skozi x. Recimo, da je $y \leq x$ in je $(y, x)(x, z)$ lomljenka v $\mathcal{K}(X)$. Če je $x \leq z$, potem je $(y, z)(x, z) \equiv (y, z)$, saj je $\{x, y, z\}$ simpleks. Če je pa $z < x$, potem obstaja $w > x$, saj x ni maksimalen. Zato je $(y, x)(x, z) \equiv (y, x)(x, w)(w, x)(x, z) \equiv (y, w)(w, z)$. Če je $y \geq x$ je dokaz analogen. □

Če povezanemu prostoru X postopoma odstranjujemo točke, ki niso minimalne ali maksimalne, v vsakem koraku dobimo epimorfizem med fundamentalnima grupama, ki pa ni nujno izomorfizem, saj imamo lahko v $\mathcal{K}(X \backslash \{x\})$ dve neekvivalentni zanki, ki sta v $\mathcal{K}(X)$ ekvivalentni.

Posledica 5. *Naj bo X povezan končen T_0 prostor. Potem obstaja povezan T_0 prostor $Y \subseteq X$, višine kvečjemu 1 in epimorfizem iz $\pi_1(Y, x)$ v $\pi_1(X, x)$.*

Trditev 15. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Če je X minimalen model za $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$, potem* $\mathrm{ht}(X) = 1$.

Dokaz. Naj bo X minimalen model za $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$. Potem obstaja povezan T_0 podprostor $Y \subseteq X$ višine 1 in epimorfizem iz $\pi_1(Y, x)$ v $\pi_1(X, x) = F_n$. Ker je $\mathrm{ht}(Y) = 1$, je Y model grafa, torej $\pi_1(Y, x) = F_m$, za $m \geq n$.

V $\mathcal{H}(Y)$ imamo m robov, ki niso v vpetem drevesu prirejenega grafa $\mathcal{K}(Y)$, zato lahko odstranimo $m - n$ robov iz $\mathcal{H}(Y)$ tako, da ostane povezan in dobljen prostor Z je model za $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$.

Velja $\#Z = \#Y \leq \#X$, ampak ker je X končen minimalen model, mora veljati $\#X \leq \#Z$ in zato $X = Z$, torej je višina X enaka 1. □

Z $\#X$ bomo označevali število elementov v množici X.

Naj bo X minimalen model za $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$. Vpeljimo naslednje oznake, $i := \#\{y \in X | y \text{ je minimalen}\}$ in $j := \#\{y \in X | y \text{ je maksimalen}\}$. Potem $\#X = i + j$ in $\#E(\mathcal{H}(X)) \leq ij$. Ker je $\chi(X) = 1 - n$, velja $n \leq 1 - (i + j) + ij = (i - 1)(j - 1)$. Navedimo glavni izrek razdelka.

Izrek 12. *Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Končen T_0−prostor X je minimalni model za $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$ natanko tedaj, ko je* $\mathrm{ht}(X) = 1$, $\#X \geq \min\{i + j | (i - 1)(j - 1) \geq n\}$ *in* $\#E(\mathcal{H}(X)) = \#X + n - 1$.

Dokaz. Pokazali smo že, da če je X minimalen model za $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$, potem $\mathrm{ht}(X) = 1$ in $\#X = \min\{i + j | (i - 1)(j - 1) \geq n\}$. Če sta i in j taka, da $(i - 1)(j - 1) \geq n$, potem definiramo prostor $Y = \{x_1, x_2, ...x_i, y_1, y_2, ...y_j\}$ z ureditvijo $y_k < x_l$ za vse k in l, ki je model za $\bigvee_{i=1}^{(i-1)(j-1)} S^1$. Potem lahko odstranimo $(i-1)(j-1)-n$ robov iz $\mathcal{H}(X)$ in tako dobimo povezan prostor kardinalnosti $i + j$, ki je model za $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$. Torej $\#X \leq \#Y = i + j$. To drži za vsaka i in j, za katera velja $n \leq (i - 1)(j - 1)$, zato $\#X = \min\{i + j | (i - 1)(j - 1) \geq n\}$, zaradi minimalnosti X. $\#E(\mathcal{H}(X)) = \#X + n - 1$ pa sledi, ker $\chi(X) = 1 - n$.

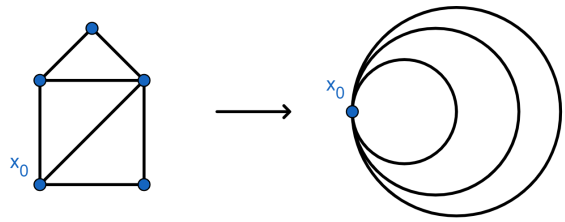
Dokažimo še v drugo smer. Naj velja $\mathrm{ht}(X) = 1$, $\#X = \min\{i + j | (i - 1)(j - 1) \geq n\}$ in $\#E(\mathcal{H}(X)) = \#X + n - 1$. Dokazati moramo le, da je X povezan, saj potem iz prve in tretje predpodstavke sledi, da je X model za $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$, iz druge pa sledi, da je model minimalen.

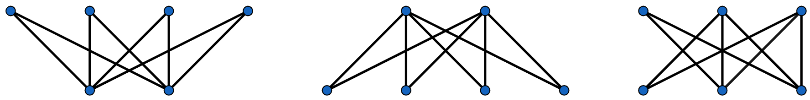
Naj bodo X_l komponente povezanosti od X, za $1 \leq l \leq k$. Z M_l označimo množico maksimalnih elementov v X_l, z m_l pa $X \backslash M_l$. Naj $i = \sum_{l=1}^{k} \#M_l$ in $j = \sum_{l=1}^{k} \#m_l$. Ker $i + j = \#X = \min\{s + t | (s - 1)(t - 1) \geq n\}$, sledi, da $(i-2)(j-1) < n = \#E(\mathcal{H}(X)) - \#X + 1 = \#E(\mathcal{H}(X)) - (i+j) + 1$ in zato $ij - \#E(\mathcal{H}(X)) < j - 1$. To pomeni, da se $\mathcal{K}(X)$ od polnega dvodelnega grafa $(\cup m_l, \cup M_l)$ razlikuje v manj kot $j - 1$ robovih. Ker za $r \neq l$ ne obstaja povezava med ogliščem v m_l in ogliščem v M_r, velja

$$j - 1 > \sum_{l=1}^{k} \#M(j - \#m_l) \geq \sum_{l=1}^{k} (j - \#m_l) = (k - 1)j.$$

Zato $k = 1$ in dokaz je končan. $\square$

Primer 6. Graf na sliki ima eulerjevo karakteristiko enako -2, zato je homotopsko ekvivalenten spoju 3 krožnic, $\bigvee_{i=1}^{3} S^1$. Vsak model za $\bigvee_{i=1}^{3} S^1$ ima 6





točk in 8 robov, ker obstajajo trije nehomeomorfni končni prostori s temi lastnosti vidimo, da graf v splošnem nima enolično določenega minimalnega modela.