V tem poglavju bomo definirali nekaj osnovnih konstrukcij iz algebraične topologije in jih uporabili na simplicialnih kompleksih in končnih ter splošnih topoloških prostorih

Join Topoloških prostorov X in Y je topološki prostor $X * Y = X \times Y \times I/_{\sim}$, pri čemer $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ in $(x_1, y, 1) \sim (x2, y, 1)$. Torej $X \times Y \times \{0\}$ strnemo na X in $X \times Y \times \{1\}$ na Y. Intuitivno, to pomeni, da vsako točko na X z intervalom povežemo z vsako točko na Y Posebna primera joina sta stožec"CX, ki je join točke in prostora X,

$$\{\bullet\} * X = X \times I/_{(X \times \{0\})}$$

in *suspenzija* ΣX, ki je join X in prostora na dveh točkah, S^0.

$$\Sigma X = S^0 * X = X \times I/_{(X \times \{0\}, X \times \{1\})}$$

Naj bosta X in Y topološka prostora in $x_0 \in X$ ter $y_0 \in Y$, potem je *Wedge sum* $X \bigvee Y$ kvocient disjunktne unije $X \bigsqcup Y$, pri katerem identificiramo x_0 in y_0. Na primer $S^1 \bigvee S^1$ je prostor, ki ga dobimo, če staknemo dve krožnici v eni točki in je homeomorfen "**8**".

Simplicialni "Join" $K * L$ (včasih tudi KL) kompleksov K in L z disjunktnima množicama ogljišč je kompleks

$$K * L = K \cup L \cup \{\sigma \cup \tau | \sigma \in K, \tau \in L\}$$

Primer 1. *simplicialni join dveh 1-simpleksov je 3 simpleks. Slika?*

Simplicialni stožec aK z bazo K je join K in ogljišča $a \notin K$ Za vsaka končna simplicialna kompleksa K in L velja, da je geometrijska realizacija $|K * L|$ homeomorfna topološkemu joinu $|K| * |L|$!!!dokaz?!!.

Če je K 0-kompleks z dvema ogljiščema, potem je $|K * L| = |K| * |L| = S^0 * |L| = \Sigma|L|$.

Definicija 1. *Ne-Hausdorffov join* $X \circledast Y$ *dveh končnih* T_0- *prostorov* X *in* Y *je disjunktna unija* $X \bigsqcup Y$, *v kateri pustimo ureditev v* X *in v* Y *in nastavimo* $x \leq y$ *za vsaka* $x \in X$ *in* $y \in Y$.

Ta join je asociativen in v splošnem ni komutativen, tako kot pri topološkem joinu imamo posebna primera ne-Hausdorffovega stožca $\mathbb{C}(X) = X \circledast D^0$ in ne Hausdorffova Suspenzija $\mathbb{S}(X) = X \circledast S^0$. D^0 pomeni 0 dimenzionalni disk, kar je točka.

Ne-Hausdorffova suspenzija reda n je definirana rekurzivno, kot $\mathbb{S}(\mathbb{S}(X))$.

Opomba 1. *Velja* $\mathcal{K}(X \circledast Y) = \mathcal{K}(Y) * \mathcal{K}(X)$

Dokaz. Najprej poiščimo homotopijo med $|\varphi|s_K$ in $s_L|\varphi'|$ Naj bo $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\}$ simpleks v K' in naj bo $\sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_r$ veriga simpleksov K. Naj bo α točka v zaprtem simpleksu $\overline{S}$. Potem je $S_K(\alpha) \in \overline{\sigma_r} \subseteq |K|$ in $|\varphi|S_K(\alpha) \in \overline{\varphi_r} \subseteq |L|$. Velja pa tudi $|\varphi'|(\alpha) \in \overline{\varphi(\sigma_1), \varphi(\sigma_2), \cdots, \varphi(\sigma_r)\}}$ in potem $S_L|\varphi'|(\alpha) \in \overline{\varphi(\sigma_r)}$. Zato je linearna homotopija

$$H : |K'| \times I \to |L|$$

$$\text{H: } (\alpha, t) \mapsto (1-t)|\varphi|S_K(\alpha) + tS_L|\varphi'|(\alpha)$$

zvezna in dobro definirana in zato $|\varphi|S_K(\alpha) \simeq S_L|\varphi'|$. Iz leme **??** potem sledi

$$\begin{aligned} \mu_L|\varphi| &= \mu_{\chi(L)}S_L^{-1}|\varphi| \simeq \mu_{\chi(L)}|\varphi'|S_K^{-1} = \\ &= \chi(\varphi)\mu_{\chi(K)}S_K^{-1} = \chi(\varphi)\mu_K \end{aligned}$$

$\square$