Minimalni končni modeli prostorov

Filip Bezjak
Mentor: dr. Petar Pavešić

23. marec 2023

Izrek 1. *McCordov Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $f : X \to Y$ zvezna. Če je zožitev*

$$f|_{f^{-1}} : f^{-1}(U) \to U$$

Šibka homotopska ekvivalenca za vsako bazno množico U, potem je $f : X \to Y$ šibka homotopska ekvivalenca.

Opomba 1. *Izrek ne velja le za zožitev na bazne množice, ampak tudi na vsako basis like open cover, torej za vsako pokritje, ki je baza za kako drugo topologijo.*

Definicija 1. Naj bo X končen T_0 prostor. *Simplicialni kompleks $\mathcal{K}(X)$ prirejen X*, je simplicialni kompleks, čigar simpleksi so neprazne verige v X. Če je $f : X \to Y$ zvezna preslikava med dvema T_0 prostoroma. *prirejena simplicialna preslikava* $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ definiramo kot $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$.

Vidimo, če je $f : X \to Y$ zvezna , je $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ simplicialna, saj ohranja ureditev in slika verige v verige.

Iema 1. *Naj bo $x \in X$ in naj bo $L = X \setminus U_x \subseteq \mathcal{K}(X)$. Potem se vsak $\alpha \in \mathcal{K}(X) \setminus |L|$ da napisati, kot $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$, za $\beta \in \mathcal{K}(U_x)$, $\gamma \in |L|$ in $0 < t \leq 1$, pri čemer je α zvezno odvisna od β, γ in t. β, γ in t so enolični.*

Dokaz. L je subkompleks, ki ga napenjajo ogljišča, ki niso v U_x. Za vsak $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i, \text{ pri čemer } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

za $u_i \in U_x$ in $v_i \in X \setminus U_x$ in $\alpha_i \in \mathbb{R}$, za $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ in $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. S t označimo $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i$, torej je $1 - t = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i$ in $0 < t \leq 1$.

Potem $\beta = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i / t \in \mathcal{K}(U_x)$, saj je $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i / t = 1$ in podobno $\gamma = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i / (1-t) \in \mathcal{K}(X \setminus U_x)$. Zveznost in enoličnost sledi iz konstrukcije. $\square$

Izrek 2. *$\mathcal{K}$-McCordova preslikava je šibka homotopska ekvivalenca za vsak končen T_0-prostor.*

Dokaz. Definirajmo retrakcijo $r : U_x \to \{x\}$ kot $r(y) = x$, za vsak $y \in X$. Ker je x maksimum v U_x, je $r \geq 1_X$, zato je po izreku **??** $r \simeq 1_X$, zato je U_x kontraktibilna množica. Dokazali bomo, da je za vsak $x \in X$, $\mu_X^{-1}(U_x)$ odprta in kontraktibilna. S tem bomo pokazali, da je μ_X zvezna in da so zožitve $\mu_X|_{\mu_X^{-1}(U_x)} : \mu_X^{-1}(U_x) \to U_x$ šibke homotopske ekvivalence.

Naj bo $x \in X$ in naj bo $L = X \setminus U_x \subseteq \mathcal{K}(X)$. L je torej subkompleks, ki ga napenjajo ogljišča, ki niso v U_x. Trdimo, da

$$\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|.$$

Pokažimo najprej, da $\mu_X^{-1}(U_x) \subseteq |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. Naj bo $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$, torej je $\min(\mathit{support}(\alpha)) \in U_x$, zato $\mathit{support}(\alpha)$ vsebuje ogljišče iz U_x, zato $\alpha \notin |L|$, torej $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$.

Pokažimo še, da $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \subseteq \mu_X^{-1}(U_x)$. Naj $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ Če $\alpha \notin |L|$, potem obstaja $y \in \mathit{support}(X)$, tak, da $y \in U_x$, zato je $\min(\mathit{support}(X)) \leq y \leq x$, zato je $\mu_X(\alpha) \in U_x$, zato $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$. Ker je L zaprta podmnožica $\mathcal{K}(X)$, je $\mu_X^{-1}(U_x)$ odprta.

Pokažimo, da je $\mu_X^{-1}(U_x)$ kontrabilna. Prvo pokažimo, da je $|\mathcal{K}(U_x)|$ krepak deformacijski retrakt od $|\mathcal{K}(X)|$. Naj bo $i : |\mathcal{K}(U_x)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ inkluzija. Če je $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$, potem je po lemi **??** $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$, za $\beta \in \mathcal{K}(U_x)$, $\gamma \in |L|$ in $0 < t \leq 1$. Definirajmo $r : |\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \to \mathcal{K}(U_x)$ kot $r(\alpha) = \beta$. Ker je α zvezna in je zožitev $r|_{(|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \overline{\sigma}} : (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ zvezna, za vsak $\sigma \in \mathcal{K}(X)$, sledi in je da je r zvezna. Definirajmo zdaj linearno homotopijo $H : (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \times I \to (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|)$ med $1_{(|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|)}$ in ir kot

$$H(\alpha, s) = (1-s)\alpha + s\beta.$$

H je dobro definirana, in zvezna, saj je vsaka zožitev

$$H|_{((|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \overline{\sigma}) \times I} : ((|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \overline{\sigma}) \times I \to \overline{\sigma}$$

dobro definirana in zvezna, $\sigma \in \mathcal{K}(X)$.

Ker je vsak element iz U_x primerljiv z x, je $\mathcal{K}(U_x)$ simplicialni stožec, zato je po trditvi **??** $|\mathcal{K}(U_x)|$ kontraktibilen in zato je kontraktibilen tudi $\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. $\square$

Definicija 2. Naj bo K končen simplicialni kompleks. Končen T_0- prostor $\chi(K)$ prirejen k K je delno urejena množica simpleksov v K, urejena glede na inkluzijo. Naj bo $phi : K \to L$ preslikava med simplicialnima kompleksoma, potem preslikavo $\chi(phi) : \chi(K) \to \chi(L)$ definiramo kot $\chi(phi)(\sigma) = \phi(\sigma)$ za vsak simpleks $\sigma \in K$

Primer 1. *primer iz knjige.*

Iema 2. *Naj bo $f : X \to Y$ zvezna preslikava med dvema T_0 prostoroma, potem naslednji diagram komutira*

Dokaz.

$$\begin{aligned} f\mu_X(\alpha) &= f(min(support(\alpha))) \stackrel{*}{=} min(f(support(\alpha))) \\ &= min(support(|\mathcal{K}(f)(\alpha))) = \mu_Y|\mathcal{K}(f)|(\alpha) \end{aligned}$$

Pri čemer $*$ velja zaradi zveznosti f, druge enakosti pa veljajo kar po definiciji. □

Če je K končen kompleks, potem je $\mathcal{K}(\chi(K))$ prva baricentrična subdivizija. definirajmo χ-*McCordovo preslikavo* $\mu_K = \mu_{\chi(K)} S_K^{-1} : |K| \to \chi(K)$. Ker je kompozitum dveh šibkih homotopskih ekvivalenc tudi šibka homotopska ekvivalenca, takoj sledi naslednji izrek.

Izrek 3. *$\chi - McCordovapreslkava\mu_K$ je šibka homotopska ekvivalenca za vsak končen simplicialni kompleks K.*

Trditev 1. *Naj bo $\phi : K \to L$ simplicialna preslikava med končnima kompleksoma. Potem naslednji diagram komutira do homotopije natančno*

Dokaz. Najprej poiščimo homotopijo med $|\phi| s_K$ in $s_L|\phi'|$ Naj bo $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\}$ simpleks v K' in naj bo $\sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \sigma_r$ veriga simpleksov K. Naj bo α točka v zaprtem simpleksu $\overline{S}$. Potem je $S_K(\alpha) \in \overline{\sigma_r} \subseteq |K|$ in $|\phi| S_K(\alpha) \in \overline{\phi_r} \subseteq |L|$. Velja pa tudi $|\phi'|(\alpha) \in \{\phi\sigma_1, \phi\sigma_2, \cdots, \phi\sigma_r\}$ in potem $S_L|\phi'|(\alpha) \in \overline{\phi(\sigma_r)}$. Zato je linearna homotopija

$$H : |K'|$$

□

1 Zanke v Hassejevem diagramu

Pokazali bomo, kako se fundamentalna grupa končnega T_0 prostora izraža preko prirejenega Hassejevega diagrama. Hassejev diagram končnega T_0 prostora X označimo z $H(X)$, z $E(H(X))$ pa označimo množico njegovih robov.

Edge path simplicialnega kompleksa K je zaporedje $(v_0, v_1)(v_1, v_2), ..., (v_{r-1}, v_r)$ urejenih parov ogljišč, pri čemer je $\{v_1, v_{i+1}\}$ simpleks za vsak i. Če *edge path* vsebuje dva zaporedna para (v_i, v_{i+1}) in $(v_{i+1,v\ i+2})$ in je $\{v_i, v_{i+1,v\ i+2}\}$ simpleks, potem ju lahko zamenjamo z parom (v_i, v_{i+1}) in dobimo ekvivalentno a krajšo pot. Za poti $(v_0, v_1)(v_1, v_2), ..., (v_{r-1}, v_r)$ in $(u_0, u_1)(u_1, u_2), ..., (u_{s-1}, u_s)$ definiramo stik poti.....??? Omejili se bomo na zanke, torej poti, ki se začnejo in končajo z v_0. Z $E(K, v_0)$ označimo množico ekvivalenčnih razredov zank z začetno točko v_0.....

Naj bo (X, x_0) končen pointed T_0 prostor. Urejen par $e = (x, y)$ imenujemo $H - rob$ od X, če $(x, y) \in E(\mathcal{H}(\mathcal{X}))$, ali $(y, x) \in E(H(X))$. Točki x rečem *začetek* x in označimo $x = \mathfrak{o}(e)$, točki y pa *konec* od e, pznačimo $\mathfrak{e}(e) = y$