

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Filip Bezjak

Minimalni končni modeli prostorov

Delo diplomskega seminarja

Mentor: dr. Petar Pavešić

Ljubljana, 2023

KAZALO

1. Uvod	4
2. Homotopska in šibka homotopska ekvivalenca	4
3. Simplicialni kompleksi	7
3.1. Poti v simplicialnem kompleksu	9
4. Končni topološki prostori in delno urejene množice	9
5. McCordova preslikava	14
6. Konstrukcije novih topoloških prostorov	16
7. Minimalni model sfere	17
8. Zanke v Hassejevem diagramu	20
9. Minimalni modeli grafov	22
Slovar strokovnih izrazov	25
Literatura	26

Minimalni končni modeli prostorov

POVZETEK

Za končen topološki prostor F rečemo, da je končen model prostora X , če obstaja šibka homotopska ekvivalenca $f: X \rightarrow F$. Model je minimalen, če ima izmed vseh modelov najmanjšo kardinalnost. Končnim T_0 topološkim prostorom lahko priredimo simplicialne komplekse. Eden izmed glavnih izrekov v delu nam pa pove, da je geometrijska realizacija tega kompleksa šibko homotopsko ekvivalentna začetnemu prostoru. S tem dobimo orodje za iskanje končnih modelov prostorov. V tem delu bomo poiskali minimalne modele topoloških sfer in končnih grafov.

Minimal finite models

ABSTRACT

We say that a finite topological space is a model of a topological space if they are weak homotopy equivalent. A model is minimal if it has the smallest cardinality of all models of a space. Every finite T_0 space has its associated simplicial complex. One of the main theorems of this graduate thesis states that the geometric realization of the associated simplicial complex is weak homotopy equivalent to the initial space. This gives us a tool to find finite models of spaces. In this thesis, we will find minimal models of topological spheres and finite graphs.

Math. Subj. Class. (2020): 55U10

Ključne besede: Končen topološki prostor, šibka homotopska ekvivalenca, homotopska ekvivalenca, delno urejena množica, simplicialni kompleks, graf, sfera

Keywords: Finite topological space, weak homotopy equivalence, homotopy equivalence, partially ordered set, simplicial complex, graph, sphere

1. UVOD

Tema dela sodi na področje algebraične topologije. Topologije na končnih prostorih so večkrat spregledane, saj je vsaka T_1 topologija na končnem prostoru diskretna. Če pa lastnosti T_1 ne zahtevamo, postanejo veliko bolj zanimive. Vsaka končna T_0 topologija nam enolično določa neko delno ureditev in obratno. Torej so končni topološki prostori in delne ureditve močno povezani. Tej povezanosti rečemo korenspondenca Alexandrova, ki jo bomo podrobneje predstavili v razdelku 4. Preden se lotimo minimalnih modelov prostorov, moramo najprej definirati homotopsko in šibko homotopsko ekvivalenco 2 ter simplicialne komplekse 3. V razdelku 5 je dokazan glavni izrek dela, izrek 5.6, ki pravi, da je končen topološki prostor šibko homotopsko ekvivalenten geometrijski realizaciji prirejenega simplicialnega kompleksa. Ker delno urejene množice predstavimo s Hassejevim diagramom, bomo tudi končne topološke prostore predstavljali na tak način. Ker pa je šibki homotopski tip enorazsežnega prostora odvisen le od fundamentalne grupe, bomo vpeljali poti oziroma zanke v Hassejeve diagrame 8. Grupa ekvivalenčnih razredov teh zank pa je izomorfna fundamentalni grupi prostora, kateremu smo priredili delno ureditev. Temeljni vir diplomskega dela je knjiga *Algebraic Topology of Finite Spaces and Applications* [2].

2. HOMOTOPSKA IN ŠIBKA HOMOTOPSKA EKVIVALENCA

Ena izmed glavnih nalog algebraične topologije je iskanje prostorov, ki so si na neki način podobni oziroma ekvivalentni. Prvi pojem podobnosti, ki ga spoznamo je homeomorfizem. Dva prostora sta homeomorfna, če lahko enega zvezno spremenimo v drugega in pri tem prostora ne lepimo in ga ne trgamo oziroma če med njima obstaja homeomorfizem. Ekvivalenco med dvema prostoroma pa lahko definiramo na načine, ki so veliko širši kot homeomorfizem. Na primer torus $S^1 \times B^2$ in sfera S^1 imata podobno obliko, vendar nista homeomorfna. Zato bomo definirali homotopsko in šibko homotopsko ekvivalenco, ki bosta povezali prostore s podobnimi oblikami.

Spomnimo se, *homotopija* je taka družina preslikav $f_t(x): X \rightarrow Y$, da je prirejena preslikava $F(x, t): X \times I \rightarrow Y$, definirana kot $F(x, t) = f_t(x)$, zvezna. Rečemo, da sta preslikavi f_0 in f_1 homotopni in pišemo $f_0 \simeq f_1$. Z I bomo označevali enotski interval $[0, 1]$.

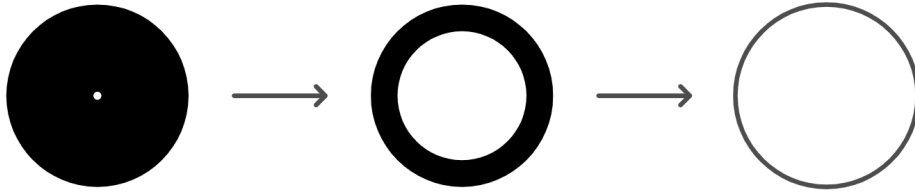
Definicija 2.1. Preslikava $f: X \rightarrow Y$ je *homotopska ekvivalenca* prostorov X in Y , če obstaja preslikava $g: Y \rightarrow X$, za katero velja $fg \simeq 1_Y$ in $gf \simeq 1_X$. Preslikavo g imenujemo *homotopski inverz* f . Če taka preslikava f obstaja, rečemo, da sta prostora X in Y *homotopsko ekvivalentna* oziroma, da imata isti *homotopski tip*.

Definicija 2.2. Naj bo $A \subseteq X$. Preslikavo $r: X \rightarrow A$ za katero velja $r|_A = 1_A$ imenujemo *retrakcija*, podprostor A pa retrakt prostora X . Podprostor $A \subseteq X$ je *deformacijski retrakt*, če obstaja homotopija $H: X \times I \rightarrow X$ med 1_X in preslikavo ir , kjer je $r: X \rightarrow A$ retrakcija, $i: A \rightarrow X$ pa inkluzija. Homotopijo H imenujemo *deformacijska retrakcija*. Če homotopija H miruje na množici A jo imenujemo *kreпка deformacijska retrakcija*, prostor A pa *kreпка deformacijski retrakt* prostora X . Za prostor X rečemo, da je *kontraktibilen*, če obstaja deformacijska retrakcija na točko oziroma če je identiteta homotopna kaki konstantni preslikavi.

Če je $A \subseteq X$ in je A deformacijski retrakt od X , potem sta X in A homotopsko ekvivalentna prostora. Res, če je $i: A \rightarrow X$ inkluzija, $r: X \rightarrow A$ retrakcija, potem je $ri = 1_A$ in $ir \simeq 1_X$. Da sta prostora A in B homotopsko ekvivalentna pogosto

pokažemo tako, da najdemo večji prostor X , ki vsebuje A in B kot deformacijska retrakta.

Homotopija $f_t: X \rightarrow X$, ki nam da krepko deformacijsko retrakcijo prostora X na podprostor A , ima lastnost, da velja $f_t|_A = 1_A$, za vse t . V splošnem, homotopija $f_t: X \rightarrow Y$, katere zožitev na podprostor $A \subseteq X$ je neodvisna od t imenujemo *homotopija relativno A* in pišemo $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$. Krepka deformacijska retrakcija X na A je torej homotopija med retraktom ir in identiteto 1_X relativno A , kjer je $r: X \rightarrow A$ retrakt in $i: A \rightarrow X$ inkluzija.



SLIKA 1. Punktiran disk se deformacijsko retrakira na robno sfero S^1

Šibko homotopsko ekvivalenco pa opišemo preko homotopskih grup, ki jih bomo definirali v nadaljevanju. Prva homotopska grupa se imenuje fundamentalna grupa. Je grupa ekvivalenčnih razredov zank v prostoru, tj. poti z enako začetno in končno točko.

Pot v prostoru X je zvezna preslikava $f: I \rightarrow X$. Poti sta homotopni, če med njima obstaja homotopija rel $\{0, 1\}$.

Definicija 2.3. *Homotopija poti* v X je družina preslikav $f_t: I \rightarrow X, 0 \leq t \leq 1$, za katero velja

- krajišči $f_t(0) = x_0$ in $f_t(1) = x_1$ sta neodvisni od t in
- prirejena preslikava $F: I \times X \rightarrow X$ definirana s $F(t, s) = f_t(s)$ je zvezna.

Za poti f_1 in f_0 , ki sta povezani s homotopijo f_t rečemo, da sta homotopni in označimo $f_1 \simeq f_0$.

Trditev 2.4. *Relacija homotopije na poteh s fiksnima krajiščema je ekvivalenčna relacija za vsak topološki prostor.*

Dokaz. Preveriti moramo refleksivnost, simetričnost in tranzitivnost.

Najprej preverimo refleksivnost. Naj bo $f: I \rightarrow X$ pot v prostoru X . Homotopijo definiramo kot $f_t(s) = f(s)$.

Naj velja $f \simeq g$ in naj bo $f_t(s)$ homotopija med f in g , torej $f_0 = f$ in $f_1 = g$. Homotopijo med g in f definiramo kot $g_t(s) = f_{1-t}(s)$. Velja $g_0 = f_1 = g$ in $g_1 = f_0 = f$. Ker je $g_t(s)$ kompozitum zveznih preslikav, je zvezna. Sledi, da je relacija homotopije simetrična.

Naj bodo f, g in h poti v X in naj velja $f \simeq g$ in $g \simeq h$. Naj bo $f_t(s)$ homotopija med f in g in $g_t(s)$ homotopija med g in h . Definirajmo

$$h_t(s) = \begin{cases} f_{2t}(s), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ g_{2t-1}(s), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Velja $h_0 = f_0 = f$ in $h_1 = g_1 = h$. Ker je $h_t(s)$ sestavljena iz dveh zveznih poti, ki se ujemata na preseku, je zvezna, sledi, da je relacija tranzitivna. \square

Za poljubni poti $f, g: I \rightarrow X$, za kateri velja $f(1) = g(0)$ lahko definiramo njen stik $f \cdot g$, ki preteče f in g z dvojno hitrostjo v enotskem intervalu.

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s - 1), & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Definirajmo še *reparametrizacijo* poti f kot kompozitum $f\varphi$, kjer je $\varphi: I \rightarrow I$ neka zvezna preslikava, za katero velja $\varphi(0) = 0$ in $\varphi(1) = 1$. Reparametrizacija poti ohranja homotopski razred, saj sta $f\varphi$ in f povezani preko $f\varphi_t$, pri čemer je $\varphi_t(s) = (1 - t)\varphi(s) + ts$. Vidimo, da $\varphi_t(s)$ leži med $\varphi(s)$ in s , torej na I , zato je $f\varphi_t(s)$ dobro definirana.

Če se omejimo samo na poti $f: I \rightarrow X$ z enako začetno in končno točko $f(0) = f(1) = x_0$, govorimo o zankah. Za x_0 rečemo, da je izhodišče. Množico vseh homotopskih razredov $[f]$ z izhodiščem x_0 označimo s $\pi_1(X, x_0)$.

Izrek 2.5. $\pi_1(X, x_0)$ opremljena s produktom $[f][g] = [f \cdot g]$ je grupa.

Dokaz. Najprej preverimo dobro definiranost produkta. Naj velja $[f] = [f']$, preko homotopije f_t in $[g] = [g']$ preko g_t . Potem sta $f \cdot g$ in $f' \cdot g'$ homotopna preko $h_t(s) = f_t \cdot g_t$. Vidimo, da $h_0 = f_0 \cdot g_0 = f \cdot g$ in $h_1 = f_1 \cdot g_1 = f' \cdot g'$. Ker je $f_t(1) = g_t(0)$ za vsak t in sta $f_t(s)$ in $g_t(s)$ zvezna, sledi, da je tudi $h_t(s)$ zvezen. Torej velja $[f \cdot g] = [f' \cdot g']$.

Naj bodo f, g in h poti v X in naj bo $f(1) = g(0)$ in $g(1) = h(0)$. Potem sta oba stika $(f \cdot g) \cdot h$ in $f \cdot (g \cdot h)$ definirana, $(f \cdot g) \cdot h$ pa je reparametrizacija poti $f \cdot (g \cdot h)$ preko odsekoma linearne funkcije.

Naj bo f pot v X in naj bo c konstantna pot definirana s $c(s) = f(1)$, $f \cdot c$ je reparametrizacija f preko

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s, & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

zato velja $f \cdot c \simeq f$. Podobno velja tudi $c \cdot f \simeq f$, kjer je c konstantna pot $c(s) = f(0)$. Sklepamo, da je $c(s) = x_0$ dvostranska enota v grupi $\pi_1(X, x_0)$

Inverz poti f definiramo kot $\bar{f}(s) = f(1 - s)$. Definirajmo $h_t = f_t \cdot \bar{f}_t$, pri čemer je

$$f_t(s) = \begin{cases} f(s), & s \in [0, 1 - t], \\ f(1 - t), & s \in [1 - t, 1]. \end{cases}$$

Ker je $h_0 = f \cdot \bar{f}$ in $h_1 = f(0) = c$, sledi, da je $f \cdot \bar{f}$ homotopen konstantni poti v x_0 . Če f zamenjamo z \bar{f} , sledi, da $\bar{f} \cdot f \simeq c$, zato je $[\bar{f}]$ obojestranski inverz od $[f]$. \square

Kot že povedano, tej grupi pravimo fundamentalna grupa prostora X , z izhodiščem x_0 . Grupa $\pi_1(X, x_0)$ je prva v zaporedju analogno definiranih homotopskih grup $\pi_n(X, x_0)$, pri katerih namesto iz I slikamo iz n -razsežne kocke I^n .

Naj bo I^n n -razsežna kocka. Rob ∂I^n od I^n je podprostor točk pri katerih je vsaj ena koordinata enaka 1 ali 0. Definirajmo $\pi_n(X, x_0)$, množico homotopskih razredov preslikav $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, pri čemer velja $f(\partial I^n) = x_0$.

Za $n \geq 2$ posplošimo stik definiran pri fundamentalni grupi.

$$f \cdot g(s) \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Izrek 2.6. $\pi_n(X, x_0)$ opremljena s produktom $[f][g] = [f \cdot g]$ je grupa za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz te trditve je podoben dokazu za $n = 1$, saj je v stik poti vpletena le prva komponenta poti.

Definicija 2.7. Naj bosta X in Y s potmi povezana topološka prostora. X in Y sta šibko homotopsko ekvivalentna, če obstaja preslikava $f: X \rightarrow Y$, ki inducira izomorfizem $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. Preslikavi f rečemo šibka homotopska ekvivalenca.

Homeomorfni prostori so homotopsko ekvivalentni, homotopsko ekvivalentni prostori so tudi šibko homotopsko ekvivalentni. Dokaz te trditve lahko najdemo v [3, razdelka 1.1 in 4.1]. Obratno v splošnem ne velja.

3. SIMPLICIALNI KOMPLEKSI

Definicija 3.1. Simplicialni kompleks K je podan z množico oglišč $V = V_K$ in množico $S = S_K$ končnih nepraznih podmnožic V , imenovanih *simpleksi*, ki ustrezajo pogoju, da je vsaka podmnožica simpleksa tudi simpleks. Pišemo $\sigma \in K$ in $v \in K$, če je $\sigma \in S_K$ ter $v \in V_K$.

Dimenzija simpleksa σ je enaka ena manj od števila njegovih oglišč. Simpleksu dimenzije n rečemo n -simpleks. Dimenzija simplicialnega kompleksa K je enaka maksimumu dimenzij njegovih simpleksov, n -razsežnemu simplicialnemu kompleksu rečemo tudi n -kompleks. Omejili se bomo samo na končne komplekse, torej $n \in \mathbb{N}$.

Podkompleks $L \subseteq K$ simplicialnega kompleksa K je simplicialni kompleks, za katerega velja $V_L \subseteq V_K$ in $S_L \subseteq S_K$.

Naj bo $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ n -simpleks. Zaprt simpleks $\bar{\sigma}$ je množica formalnih konveksnih kombinacij $\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$ pri čemer je $\alpha_i \geq 0$ za vsak $0 \leq i \leq n$ in $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$. Zaprt simpleks je metričen prostor z metriko

$$(1) \quad d\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=0}^n \beta_i v_i\right) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i)^2}.$$

Če so v_i linearno neodvisne točke v \mathbb{R}^m za neki $m \geq n$, potem je $\bar{\sigma}$ homeomorfen prostoru $\left\{\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i, \mid \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \text{ in } \alpha_i \geq 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^m$. To pomeni, da lahko vsak zaprt simpleks predstavimo kot podprostor \mathbb{R}^m z evklidsko topologijo.

Geometrijska realizacija $|K|$ simplicialnega kompleksa K je množica formalnih konveksnih kombinacij $\sum_{v \in V_K} \alpha_v v$, takih da je $\{v \mid \alpha_v > 0\}$ simpleks v K in $\sum_{v \in V_K} \alpha_v = 1$. Rečemo, da $|K|$ realizira K . Za točko $\alpha = \sum_{v \in V_K} \alpha_v v \in |K|$ označimo $\text{supp}(\alpha) = \{v \mid \alpha_v > 0\}$, tej množici pravimo nosilec od α . Topologijo na $|K|$ definiramo na naslednji način. $U \subseteq |K|$ je odprta natanko tedaj, ko je $U \cap \bar{\sigma}$ odprta v $\bar{\sigma}$, za vsak

$\sigma \in K$. Kot prej, če so $v \in K$ linearno neodvisne točke v \mathbb{R}^m za neki $m \geq |V_K|$, potem je $|K|$ homeomorfen prostoru

$$\left\{ \sum_{v \in K} \alpha_v v \mid \sum_{v \in K} \alpha_v = 1, \alpha_i \geq 0 \text{ in } \{v \mid \alpha_v > 0\} \text{ je simpleks v } K \right\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

To pomeni, da lahko vsak simplicialni kompleks predstavimo kot podprostor v $\mathbb{R}^{|V_K|}$ z evklidsko topologijo. Če velja $L \subseteq K$, potem je $|L| \subseteq |K|$ zaprta podmnožica.

Opomba 3.2. Če je K n -kompleks, potem se ga da realizirati v \mathbb{R}^{2n+1} . To pomeni, da obstaja podprostor v \mathbb{R}^{2n+1} , ki je homeomorfen $|K|$. Vsak enostaven graf je geometrijska realizacija 1-kompleksa, zato ga lahko realiziramo v $\mathbb{R}^{2 \cdot 1 + 1} = \mathbb{R}^3$, kar je pa znano dejstvo iz teorije grafov.

Polieder je geometrijska realizacija simplicialnega kompleksa. *Triangulacija* poliedra X je simplicialni kompleks, katerega geometrijska realizacija je homeomorfna X .

Preslikava f iz $|K|$ v neki topološki prostor X je zvezna natanko tedaj, ko je $f|_{\bar{\sigma}}: \bar{\sigma} \rightarrow X$ zvezna za vsak $\sigma \in K$, saj je $U \subseteq |K|$ odprta natanko tedaj, ko je $U \cap \bar{\sigma}$ odprta v $\bar{\sigma}$, za vsak $\sigma \in K$. Tudi $H: |K| \times I \rightarrow X$ je zvezna natanko tedaj, ko je zvezna $H|_{\bar{\sigma} \times I}: \bar{\sigma} \times I \rightarrow X$, za vsak $\sigma \in K$.

Simplicialna preslikava $\varphi: K \rightarrow L$, med simplicialnima kompleksoma K in L , je preslikava med oglišči, $V_K \rightarrow V_L$, ki slika simplekse v simplekse. Preslikava φ inducira zvezno preslikavo med kompleksoma $|\varphi|: |K| \rightarrow |L|$, kot $|\varphi|: \sum_{v \in K} \alpha_v v \mapsto \sum_{v \in K} \alpha_v \varphi(v)$.

Trditev 3.3. Naj bosta K in L simplicialna kompleksa in naj bosta $f, g: |K| \rightarrow |L|$ zvezni preslikavi, za kateri velja, da za vsak $\alpha \in |K|$ obstaja $\sigma \in L$, da $f(\alpha), g(\alpha) \in \bar{\sigma}$. Potem sta f in g homotopni.

Dokaz. Preslikava $H: |K| \times I \rightarrow |L|$, definirana kot $H(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$ je dobro definirana, ker $f(x)$ in $g(x)$ ležita v istem zaprtem simpleksu. H je zvezna natanko tedaj, ko je zvezna zožitev $H|_{\bar{\sigma} \times I}: \bar{\sigma} \times I \rightarrow |L|$, za vsak $\sigma \in K$. Zožitev pa je zvezna, saj je kompozitum dveh zveznih preslikav. Torej zveznost H sledi iz zveznosti f in g . □

Definicija 3.4. Simplicialni preslikavi $\varphi, \psi: K \rightarrow L$ sta *bližnji*, če je za vsak $\sigma \in K$, $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$ simpleks v L .

Če sta φ in ψ bližnji, potem $|\varphi|$ in $|\psi|$ zadostita predpostavkam v trditvi 3.3, saj če velja $x \in \bar{\sigma}$, potem $|\varphi|(x)$ in $|\psi|(x)$ ležita v $\overline{\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)}$. Takoj sledi naslednja posledica.

Posledica 3.5. Če sta φ in ψ bližnji, sta $|\varphi|$ in $|\psi|$ homotopni.

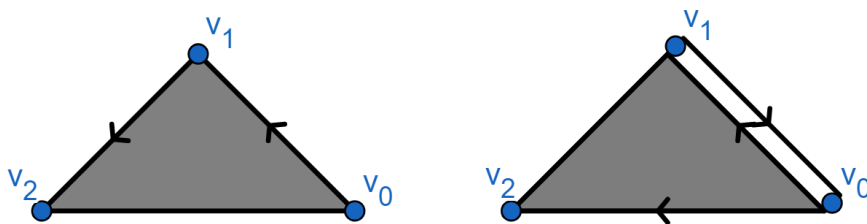
Simplicialni stožec z vrhom v je simplicialni kompleks K z ogliščem v , za katerega velja, da je $\sigma \cup \{v\} \in K$, za vsak simpleks $\sigma \in K$.

Posledica 3.6. Če je K simplicialni stožec, potem je $|K|$ kontraktibilen.

Dokaz. Naj bo v vrh od $|K|$. Po definiciji simplicialnega stožca, je simplicialna preslikava, ki slika vsako oglišče v v , bližnja identiteti. Zato je identiteta v $|K|$ homotopna konstantni preslikavi. □

3.1. Poti v simplicialnem kompleksu. Rob simplicialnega kompleksa K je urejeni par $e = (v_0, v_1)$, za katerega velja, da je $\{v_0, v_1\}$ simpleks v K . Oglišču v_0 rečemo *začetek* e in označimo $v_0 = \mathbf{o}(e)$, oglišču v_1 pa *konec* e , označimo $\mathbf{e}(e) = v_1$. Lomljenka dolžine n je stik $n + 1$ robov v K $e_0 e_1 \cdots e_n$, za katerega velja, da je $\mathbf{e}(e_i) = \mathbf{o}(e_{i+1})$, za vsak $0 \leq i \leq n - 1$. Lomljenka je sklenjena, če velja $\mathbf{o}(e_0) = \mathbf{e}(e_n)$. Oglišču v_0 rečemo izhodišče. Če sta $\xi = e_0 e_1 \cdots e_n$ in $\xi' = e'_0 e'_1 \cdots e'_m$ lomljenki in velja $\mathbf{e}(e_n) = \mathbf{o}(e'_0)$ definiramo stik lomljenk kot $\xi \xi' = e_0 e_1 \cdots e_n e'_0 e'_1 \cdots e'_m$.

Lomljenki $\cdots (v_i, v_{i+1})(v_{i+1}, v_{i+2}) \cdots$ in $\cdots (v_i, v_{i+2}) \cdots$ sta *elementarno ekvivalentni*, če je $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$ simpleks v K . Lomljenki ξ_0 in ξ_n sta ekvivalentni, če obstaja zaporedje lomljenk $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, pri katerem sta ξ_i in ξ_{i+1} elementarno ekvivalentni za vsak $0 \leq i < n$.



SLIKA 2. lomljenki $(v_0, v_1)(v_1, v_2)$ in $(v_0, v_1)(v_1, v_0)(v_0, v_2)$ sta ekvivalentni.

Naj bo K simplicialni kompleks in v_0 oglišče v K . Z $E(K, v_0)$ označimo množico ekvivalenčnih razredov sklenjenih lomljenk z izhodiščem v v_0 . Ekvivalenčni razred sklenjene lomljenke ξ označimo z $[\xi]$.

Trditev 3.7. Množica $E(K, v_0)$ z množenjem, ki ga inducira stik lomljenk, tvori grupo.

Dokaz. Asociativnost je očitna. Naj bo $[\xi_0] = [\xi_n]$ in $[\eta_0] = [\eta_n]$. Naj bosta $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ in $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ zaporedji lomljenk, v katerih sta sosednji lomljenki elementarno ekvivalentni. Potem je $\xi_0 \eta_0, \xi_1 \eta_0, \dots, \xi_n \eta_0, \xi_n \eta_1, \dots, \xi_n \eta_n$ zaporedje lomljenk v katerem sta sosednji preprosto ekvivalentni in zato velja $[\xi_0 \eta_0] = [\xi_n \eta_n]$. Enota je ekvivalenčni razred poti (v_0, v_0) . Inverz od $e_0 e_1 \cdots e_{n-1} e_n$ je $e_n^{-1} e_{n-1}^{-1} \cdots e_1^{-1} e_0^{-1}$, kjer $(v_i, v_{i+1})^{-1} = (v_{i+1}, v_i)$. \square

Izrek 3.8. $E(K, v_0)$ je izomorfna $\pi_1(|K|, v_0)$

Dokaz lahko najdemo v [1, razdelek 3.6]

4. KONČNI TOPOLOŠKI PROSTORI IN DELNO UREJENE MNOŽICE

Končen topološki prostor je topološki prostor s končno mnogo točkami, *šibko urejena* množica je množica s tranzitivno in z refleksivno relacijo. Če je relacija še antisimetrična, dobimo *delno* ureditev.

Naj bo X končen topološki prostor in $x \in X$. Družina vseh odprtih množic, ki vsebujejo x je končna, zato je njen presek U_x najmanjša odprta množica, ki vsebuje x . Točke uredimo s pravilom $x \leq y$, če $U_x \subseteq U_y$. S tem dobimo šibko ureditev. Antisimetričnost po definiciji sovпада z lastnostjo T_0 , zato relacija postane delna

ureditev natanko takrat, ko je topologija T_0 .

Obratno, naj bo končna X šibko urejena množica. Na njej lahko definiramo topologijo z bazo $\{y \in X \mid y \leq x\}_{x \in X}$. Če je $y \leq x$, je y vsebovan v vsaki bazni množici, ki vsebuje x , torej je $y \in U_x$. Po drugi strani, če je $y \in U_x$, potem je $y \in \{y \in X \mid y \leq x\}$, torej velja, da je $y \leq x$ natanko tedaj, ko je $y \in U_x$. S tem dobimo zvezo med končnimi prostori in končnimi šibkimi ureditvami.

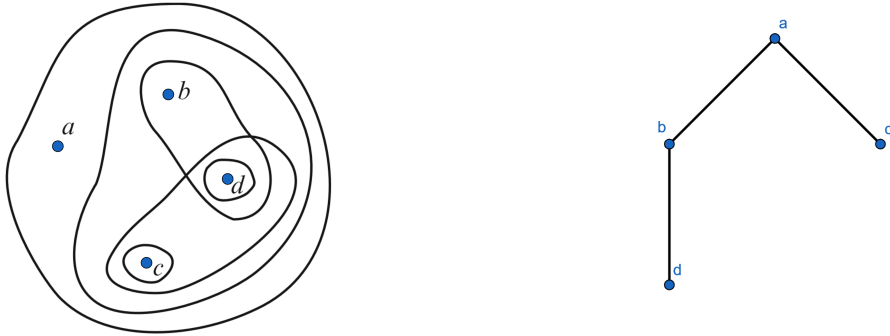
Omejili se bomo na končne T_0 –prostore in na končne delne ureditve. V nadaljevanju ne bomo več razlikovali med delnimi ureditvami in T_0 –prostori, kar pomeni, da za prostor X in $x, y \in X$, $x \leq y$ pomeni ureditev v prirejeni delni urejenosti oziroma, da velja $x \in U_y$.

Delno urejene množice pogosto predstavljamo s Hassejevimi diagrami, zato bomo tudi končne T_0 –prostore predstavljali na tak način.

Definicija 4.1. *Hassejev diagram* delno urejene množice X je usmerjen graf, katerega oglišča so točke, povezave pa so urejeni pari (x, y) , za katere velja, da je $x < y$ in ne obstaja tak z , da bi veljalo $x < z < y$.

Povezave (x, y) ne rišemo s puščico iz x v y , ampak bomo x in y povezali z ravno črto in y pisali nad x . Če je (x, y) povezava v Hassejevem diagramu končne delno urejene množice, rečemo, da y *pokrije* x in pišemo $x \prec y$.

Primer 4.2. Naj bo $X = \{a, b, c, d\}$ končen prostor, s topologijo $\tau = \{\emptyset, X, \{b, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}\}$. Topologija je T_0 , zato je X tudi delno urejena množica.



SLIKA 3. Odprte množice v X in prirejen Hassejev diagram.

◇

Definicija 4.3. Element $x \in X$ je *maksimalni element* delno urejene množice X , če za vsak $y \in X$, iz $y \geq x$ sledi $y = x$, x je *maksimum* v X , če za vsak $y \in X$ velja $x \geq y$.

Končna delno urejena množica ima maksimum natanko tedaj, ko ima enoličen maksimalni element. *Minimalni element* in *minimum* definiramo analogno.

Elementa x in y sta *primerljiva*, če je $x \leq y$ ali $y \leq x$. *Veriga* v X je podmnožica $S \subseteq X$, v kateri je vsak par elementov primerljiv, *antiveriga* v X je podmnožica $S \subseteq X$, v kateri ni noben par elementov primerljiv.

Odprtim množicam v X ustrezajo *navzdol zaprte množice*, zaprtim pa *navzgor zaprte množice*. Podmnožica U delno urejene množice X je navzdol zaprta, če za vsak $x \in U$, iz $y \leq x$, sledi da $y \in U$. Navzgor zaprte množice definiramo analogno. Vidimo, da $y \in \overline{\{x\}} \Leftrightarrow x \in U_y$. Zato velja $\overline{\{x\}} = \{y \in X; y \geq x\}$.

Tudi morfizmi delno urejenih množic in morfizmi končnih topoloških prostorov sovpadajo. Morfizem delno urejene množice je preslikava, ki ohranja ureditev, oziroma monotona preslikava, torej $f: X \rightarrow Y$, za katerega iz $x \leq x'$ sledi $f(x) \leq f(x')$ za vsaka $x, x' \in X$. Morfizmi topoloških prostorov so pa zvezne preslikave.

Trditev 4.4. *Preslikava $f: X \rightarrow Y$ med končnima prostoroma je zvezna natanko tedaj, ko je monotona.*

Dokaz. Naj bo f zvezna in naj $x \leq y$ za $x, y \in X$. Potem je $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$. Iz zveznosti pa sledi, da velja $f(y) \in f(\overline{\{y\}}) \subseteq f(\overline{\{x\}}) \subseteq \overline{f(\{x\})}$ in zato velja $f(x) \leq f(y)$.

Naj bo zdaj f monotona preslikava in $A \subseteq X$ poljubna množica. Dokažimo da velja $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Če je $x \in \overline{A}$, potem je $x \geq y$ za neki $y \in A$. Torej za poljuben $x \in \overline{A}$ dobimo $f(x) \geq f(y) \in f(A)$ in zato je $f(x) \in \overline{f(A)}$. □

Lema 4.5. *Za vsaki primerljivi točki $x, y \in X$ v končnem prostoru X obstaja pot od x do y , tj. preslikava $\alpha: I \rightarrow X$, za katero velja $\alpha(0) = x$ in $\alpha(1) = y$.*

Dokaz. Naj bo $x \leq y$. Definirajmo $\alpha: I \rightarrow X$, z $\alpha([0, 1)) = x$ in $\alpha(1) = y$ in naj bo $U \subseteq X$ odprta. Če U vsebuje y , mora vsebovati tudi x , zato je praslika od U ali \emptyset ali $[0, 1)$ ali pa I , ki so pa vse odprte v I , zato je α pot od x do y .

Če je pa $x \geq y$, definiramo $\alpha: I \rightarrow X$, z $\alpha((0, 1]) = y$ in $\alpha(0) = x$. Za odprto množico $U \subseteq X$ so možne praslike \emptyset , $(0, 1]$ in I , ki so vse odprte v I . □

Ta lema nam pove, da v končnih prostorih obstajajo netrivialne poti, zato v splošnem fundamentalna grupa končnega prostora ni trivialna.

Naj bosta X in Y delni ureditvi. Z Y^X označimo končno množico zveznih preslikav iz X v Y in jo opremimo z ureditvijo po točkah in sicer $f \leq g$, če velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in X$. S tem dobimo na Y^X delno ureditev in topologijo, ki je enaka kompaktno-odprti topologiji.

Ograja v X je zaporedje x_0, x_1, \dots, x_n točk v X , za katero velja, da sta vsaki zaporedni točki primerljivi. X je *urejenostno povezan*, če za vsaki točki $x, y \in X$ obstaja ograja, ki se začne z x in konča z y .

Lema 4.6. *Naj bo X končen T_0 -prostor. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- X je povezan prostor.
- X je urejenostno povezana delna ureditev.
- X je povezan s potmi.

Dokaz. Če je X urejenostno povezan, potem je po lemi 4.5 povezan tudi s potmi. Dokazati je treba le še da urejenostna povezanost sledi iz povezanosti. Naj bo torej X povezan, $x \in X$ in $A = \{y \in X \mid \text{obstaja ograja med } x \text{ in } y\}$. Če je $z \leq x$, potem je tudi $z \in A$, zato je A navzdol zaprta. Analogno pokažemo, da je A navzgor zaprta. Ker je X povezan, sledi, da $A = X$, zato je X urejenostno povezan. □

Trditev 4.7. Naj bosta $f, g: X \rightarrow Y$ preslikavi med končnima prostoroma in $A \subseteq X$, potem je $f \simeq g$ rel A natanko tedaj, ko obstaja ograja $f = f_0 \leq f_1 \geq \dots \geq f_n = g$, za katero velja, $f_i|_A = f|_A$. Če je $A = \emptyset$, dobimo navadno homotopijo med f in g .

Dokaz. Obstoj homotopije $H: f \simeq g$ rel A je ekvivalenten obstoju take poti $\alpha: I \rightarrow Y^X$, da velja $\alpha(t)|_A = f|_A$, kar je ekvivalentno obstoju poti $\alpha: I \rightarrow M$, kjer je $M \subseteq Y^X$ množica, ki vsebuje preslikave, ki na A sovpadajo z f . Po lemi 4.6 to pomeni, da obstaja ograja med f in g v M . \square

Trditev 4.8. Naj bo X končen prostor in naj bo X_0 kvocient X/\sim , pri čemer $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ in $y \leq x$. Potem je $X_0 \in T_0$, kvocientna projekcija $q: X \rightarrow X_0$ pa je homotopska ekvivalenca.

Dokaz. Naj bo $i: X_0 \rightarrow X$ preslikava, za katero velja $qi = 1_{X_0}$, i je monotona, zato je zvezna. Ker velja tudi $iq \leq 1_X$, je i homotopski inverz od q .

Naj bosta $x, y \in X$ taka, da $q(x) \leq q(y)$. Po definiciji je $iq \leq 1_X$ in $iq \geq 1_X$, zato je $x \leq iq(x) \leq iq(y) \leq y$. Če velja še $q(y) \leq q(x)$, potem je tudi $y \leq x$, ampak potem je $q(x) = q(y)$, zato je šibka ureditev na X_0 antisimetrična, torej je $X_0 \in T_0$.

Ker je $iq \leq 1_X$ ter iq in 1_X sovpadata na $i(X_0)$ je po trditvi 4.7 $iq \simeq 1_{X_0}$ rel X_0 , zato je X_0 krepki deformacijski retrakt od X . \square

Trditev nam pove, da je vsak končen topološki prostor homotopsko ekvivalenten končnemu prostoru, ki ima lastnost T_0 . Zato smo se v poglavju lahko omejili na T_0 -prostore in prirejene delne ureditve.

Definicija 4.9. Točka $x \in X$ je *navzdol odvečna*, če ima $\widehat{U}_x := \{y \in X | y < x\}$ maksimum in *navzgor odvečna*, če ima $\widehat{\{x\}} := \{y \in X | y > x\}$ minimum. Točka je odvečna, če je eno ali drugo.

Navzgor odvečne točke v Hassejevem diagramu so tiste, ki imajo izhodno stopnjo enako ena, navzdol odvečne, pa tiste, ki imajo vhodno stopnjo enako ena.

Trditev 4.10. Naj bo X T_0 -prostor in $x \in X$ odvečna točka, potem je $X \setminus \{x\}$ krepki deformacijski retrakt od X .

Dokaz. Recimo, da je x navzdol odvečna točka, in naj bo y maksimum v \widehat{U}_x . Definirajmo retrakcijo $r: X \rightarrow X \setminus \{x\}$ z $r(x') = x'$ za $x' \neq x$ in $r(x) = y$ in z $i: X \setminus \{x\} \rightarrow X$ označimo inkluzijo. Ker je r monotona, saj je $x \leq y$, je tudi zvezna. Poleg tega je $ir \leq 1_X$, zato iz trditve 4.7 sledi $ir \simeq 1_{X \setminus \{x\}}$ rel $X \setminus \{x\}$. Za navzgor odvečne točke je dokaz analogen. \square

Definicija 4.11. T_0 -prostor je *minimalen*, če nima odvečnih točk. Krepki deformacijski retrakt prostora X , ki je minimalen prostor imenujemo *jedro* končnega prostora X .

Končnemu prostoru X postopoma odstranjujemo odvečne točke in s tem v vsakem koraku dobimo prostor, ki je homotopsko ekvivalenten prostoru X , zato je jedro krepki deformacijski retrakt začetnega prostora, torej mu je homotopsko ekvivalenten. Seveda so tudi vsa jedra istega prostora homotopsko ekvivalentna.

Izrek 4.12. Naj bo X končen minimalen prostor. Preslikava $f: X \rightarrow X$ je homotopna identiteti natanko tedaj, ko je $f = 1_X$.

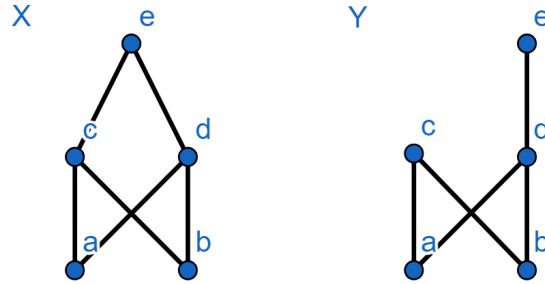
Dokaz. Po trditvi 4.7 lahko predpostavimo, da je $f \leq 1_X$ ali $f \geq 1_X$. Pa recimo, da velja $f \leq 1_X$. Za $x \in X$ dokažemo $f(x) = x$ z indukcijo na število elementov

v U_x . Če je $U_x = \{x\}$, potem je $f(x) = x$, saj je preslikava f monotona. Če $U_x \neq \{x\}$, potem je po indukcijski predpostavki $f|_{\widehat{U}_x} = 1_{\widehat{U}_x}$. Če je $f(x) = x$, potem je $f(x) \in \widehat{U}_x$ in za vsak $y < x$, velja $y = f(y) \leq f(x)$, torej je $f(x)$ maksimum v \widehat{U}_x in je x navzdol odvečna točka, kar je pa v protislovju z minimalnostjo prostora X . Če je $f \geq 1_X$, je dokaz podoben. \square

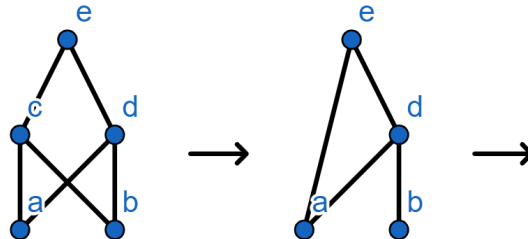
Posledica 4.13. *Homotopska ekvivalenca med minimalnima končnima prostoroma je homeomorfizem. Jedro končnega prostora je enolično do homeomorfizma in dva končna prostora sta homotopsko ekvivalentna natanko tedaj, ko sta njuni jedri homeomorfni.*

Dokaz. Naj bo $f: X \rightarrow Y$ homotopska ekvivalenca med končnima prostoroma in $g: Y \rightarrow X$ njen inverz. Potem velja $fg \simeq 1_Y$ in $gf \simeq 1_X$. Po izreku 4.12 je potem $fg = 1_Y$ in $gf = 1_X$, torej je g inverz od f in f je homeomorfizem. Če sta X_0 in X_1 dve jedri končnega prostora X , sta homotopsko ekvivalentni. Zato med njima obstaja homotopska ekvivalenca f , ki je tudi homeomorfizem. Torej sta jedri homeomorfni. Prostora X in Y sta homotopsko ekvivalentna natanko tedaj, ko imata homotopsko ekvivalentni jedri, kar pa je tedaj, ko sta jedri homeomorfni. \square

Primer 4.14. Naj bosta X in Y končna T_0 -prostora. Naslednje zaporedje diagramov,

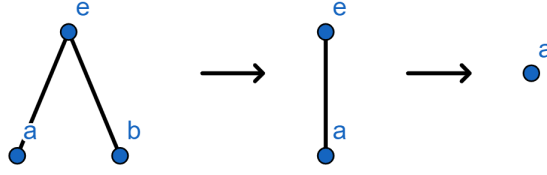


nam pokaže, kako pridemo do jedra prostora X , z odstranjevanjem odvečnih točk. Točka c je navzgor odvečna v X , d je navzgor odvečna v $X \setminus \{c\}$, b je navzgor odvečna v $X \setminus \{d, c\}$, e je pa navzdol odvečna v $X \setminus \{d, c, b\}$. Prostor $\{a\}$ je minimalen končen prostor in je jedro od X . Vidimo, da je X kontraktibilen.



Po drugi strani pa je e navzdol odvečna v Y in $Y \setminus \{e\}$ je minimalen. X in Y nista homotopsko ekvivalentna, saj njuni jedri nista homeomorfni.

\diamond



5. MCCORDOVA PRESLIKAVA

Definicija 5.1. Končen topološki prostor F je *model* prostora X , če obstaja šibka homotopska ekvivalenca $f: X \rightarrow F$. Model je *minimalen*, če ima izmed vseh modelov najmanjšo kardinalnost.

Definicija 5.2. Naj bo X končen T_0 -prostor. *Simplicialni kompleks* $\mathcal{K}(X)$ prirejen X , je simplicialni kompleks, čigar simpleksi so neprazne verige v X . Če je $f: X \rightarrow Y$ zvezna preslikava med dvema T_0 -prostoroma, je *prirejena simplicialna preslikava* $\mathcal{K}(f): \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ definirana kot $\mathcal{K}(f)(A) = f(A)$, kjer je $A \in \mathcal{K}(X)$ veriga, $A = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ in $f(A) = \{f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.

Če je $f: X \rightarrow Y$ zvezna, je $\mathcal{K}(f): \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ simplicialna, saj je monotona in slika verige v verige. Točka α v geometrijski realizaciji $|\mathcal{K}(X)|$ je konveksna kombinacija oblike $\alpha = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r$, pri čemer je $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ in velja, da je $v_1 < v_2 < \dots < v_r$ veriga v X . Nosilec α je množica $\text{supp}(\alpha) = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$. Pomembno vlogo igra preslikava $\alpha \mapsto v_1$.

Definicija 5.3. Naj bo X končen T_0 -prostor, Definirajmo *McCordovo* preslikavo, $\mu_X: |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$, z $\mu_X(\alpha) = \min(\text{supp}(\alpha))$.

Izrek 5.4. McCord [2, izrek 1.4.2] *Naj bo X splošen in Y končen topološki prostor in naj bo $f: X \rightarrow Y$ zvezen. Če je zožitev*

$$f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \rightarrow U$$

šibka homotopska ekvivalenca za vsako minimalno odprto množico $U \subseteq Y$, je $f: X \rightarrow Y$ šibka homotopska ekvivalenca.

Lema 5.5. *Naj bo $x \in X$ in naj bo $L = \mathcal{K}(X \setminus U_x) \subseteq \mathcal{K}(X)$. Potem se vsak $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ da napisati, kot $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$, za $\beta \in |\mathcal{K}(U_x)|$, $\gamma \in |L|$ in $0 < t \leq 1$. Koeficienti β, γ in t so enolično določeni.*

Dokaz. L je podkompleks, ki ga napenjajo oglišča, ki niso v U_x . Za vsak $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ velja

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i, \text{ za } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

za $u_i \in U_x$, $v_i \in X \setminus U_x$ in za neki $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. S t označimo $\sum_{i=1}^r \alpha_i$, torej je $1-t = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i$ in $0 < t \leq 1$. Potem velja $\beta = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i / t \in |\mathcal{K}(U_x)|$, saj je $\sum_{i=1}^r \alpha_i / t = 1$ in podobno velja $\gamma = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i / (1-t) \in |\mathcal{K}(X \setminus U_x)|$. Enoličnost sledi iz konstrukcije.

□

Izrek 5.6. *McCordova preslikava $\mu_X: |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$ je šibka homotopska ekvivalenca za vsak končen T_0 -prostor X .*

Dokaz. Definirajmo konstantno preslikavo $c: U_x \rightarrow U_x$ kot $c(y) = x$, za vsak $y \in U_x$. Ker je x maksimum v U_x , je $c \geq 1_X$, zato je po trditvi 4.7 $c \simeq 1_X$, torej je U_x kontraktibilna množica. Dokazali bomo, da je za vsak $x \in X$, $\mu_X^{-1}(U_x)$ odprta in kontraktibilna. S tem bomo pokazali, da je μ_X zvezna in da so zožitve $\mu_X|_{\mu_X^{-1}(U_x)}: \mu_X^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$ šibke homotopske ekvivalence, kar pa po McCordovem izreku 5.4 pomeni, da je preslikava μ_X šibka homotopska ekvivalenca.

Naj bo $x \in X$ in naj bo $L = \mathcal{K}(X \setminus U_x) \subseteq \mathcal{K}(X)$. L je torej podkompleks, ki ga napenjajo oglišča, ki niso v U_x . Trdimo, da velja

$$\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|.$$

Pokažimo najprej, da $\mu_X^{-1}(U_x) \subseteq |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. Naj bo $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$, torej je $\min(\text{supp}(\alpha)) \in U_x$, zato $\text{supp}(\alpha)$ vsebuje oglišče iz U_x , zato velja $\alpha \notin |L|$, torej je $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$.

Pokažimo še, da $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \subseteq \mu_X^{-1}(U_x)$. Naj $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. Če $\alpha \notin |L|$, potem obstaja $y \in \text{supp}(\alpha)$, za katerega velja, da $y \in U_x$, zato je $\min(\text{supp}(\alpha)) \leq y \leq x$, torej je $\mu_X(\alpha) \in U_x$ in $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$. Ker je $|L|$ zaprta podmnožica $|\mathcal{K}(X)|$, je $\mu_X^{-1}(U_x)$ odprta.

Pokažimo, da je prasluka $\mu_X^{-1}(U_x)$ kontrabilna. Prvo pokažimo, da je $|\mathcal{K}(U_x)|$ krepki deformacijski retrakt od $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. Naj bo $i: |\mathcal{K}(U_x)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ inkluzija. Če je $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$, potem po lemi 5.5 velja $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$, za $\beta \in |\mathcal{K}(U_x)|$, $\gamma \in |L|$ in $0 < t \leq 1$. Definirajmo $r: |\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \rightarrow |\mathcal{K}(U_x)|$ kot $r(\alpha) = \beta$. Ker je α zvezen in je zožitev $r|_{(|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma}}: (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma} \rightarrow |\mathcal{K}(U_x)|$ zvezna, za vsak $\sigma \in \mathcal{K}(X)$, sledi, da je r zvezen. Definirajmo zdaj linearno homotopijo $H: (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \times I \rightarrow (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|)$ med $1_{(|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|)}$ in ir kot

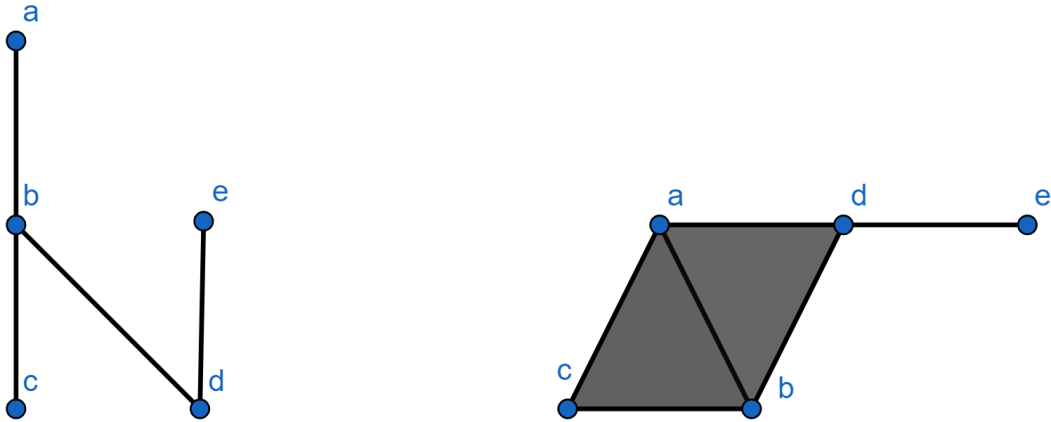
$$H(\alpha, s) = (1-s)\alpha + s\beta.$$

H je dobro definirana, in zvezna, saj je vsaka zožitev

$$H|_{(|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma} \times I}: ((|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma}) \times I \rightarrow |\mathcal{K}(U_x)|$$

dobro definirana in zvezna, za vsak $\sigma \in \mathcal{K}(X)$.

Ker je vsak element iz U_x primerljiv z x , je $\mathcal{K}(U_x)$ simplicialni stožec, zato je po trditvi 3.6 $|\mathcal{K}(U_x)|$ kontraktibilen in zato je kontraktibilna tudi $\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. \square



SLIKA 4. Končen prostor in geometrijska realizacija prirejenega simplicialnega kompleksa v \mathbb{R}^2 , ki mu je šibko homotopsko ekvivalentna.

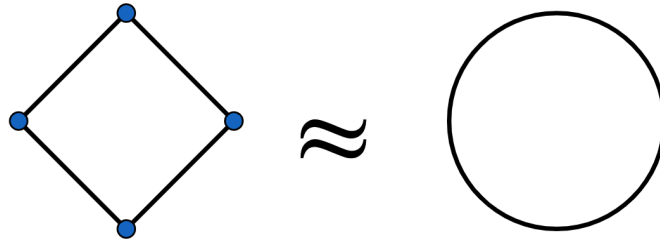
Če imamo končen topološki prostor X , mu priredimo simplicialni kompleks $\mathcal{K}(X)$. Geometrijska realizacija $|\mathcal{K}(X)|$ tega kompleksa pa je šibko homotopsko ekvivalentna začetnemu prostoru X . Torej lahko za vsak prostor, ki je homeomorfen geometrijski realizaciji simplicialnega kompleksa, prirejenega nekemu končnemu topološkemu prostoru, najdemo njegov končen model tj. končen topološki prostor, ki mu je šibko homotopsko ekvivalenten.

6. KONSTRUKCIJE NOVIH TOPOLOŠKIH PROSTOROV

V tem poglavju bomo definirali nekaj osnovnih konstrukcij iz algebraične topologije in jih uporabili na simplicialnih kompleksih ter končnih in splošnih topoloških prostorih. S S^n označimo n -razsežno sfero.

Spoj topoloških prostorov X in Y je topološki prostor $X * Y = X \times Y \times I / \sim$, pri čemer velja $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ za vsak $x \in X$ in vsaka $y_1, y_2 \in Y$ ter $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$ za vsak $y \in Y$ in vsaka $x_1, x_2 \in X$. Torej $X \times Y \times \{0\}$ strnemo na X in $X \times Y \times \{1\}$ na Y . Spoj si lahko predstavljamo, kot unijo daljic, katerih je eno krajišče v X , drugo pa v Y in so njihove notranjosti paroma disjunktne. Poseben primer spoja je *suspenzija* ΣX , ki je spoj X in prostora na dveh točkah, S^0 .

$$\Sigma X = S^0 * X = X \times I / (X \times \{0\}, X \times \{1\})$$



SLIKA 5. Suspenzija ΣS^0 je homeomorfna S^1 . V splošnem velja $\Sigma S^n = S^{n+1}$.

Naj bosta X in Y topološka prostora. Naj bo $x_0 \in X$ in $y_0 \in Y$. Potem je *šop* $X \vee Y$ kvocient disjunktne unije $X \sqcup Y$, pri katerem identificiramo x_0 in y_0 . Na primer $S^1 \vee S^1$ je prostor, ki ga dobimo, če staknemo dve krožnici v eni točki in je homeomorfen "8".

Simplicialni spoj $K * L$ kompleksov K in L z disjunktima množicama oglišč je kompleks

$$K * L = K \cup L \cup \{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in K, \tau \in L\}.$$

Simplicialni stožec aK z bazo K je simplicialni spoj K in oglišča $a \notin K$.

Trditev 6.1. Naj bosta K in L končna simplicialna kompleksa, potem je geometrijska realizacija $|K * L|$ homeomorfna topološkemu spoju $|K| * |L|$.

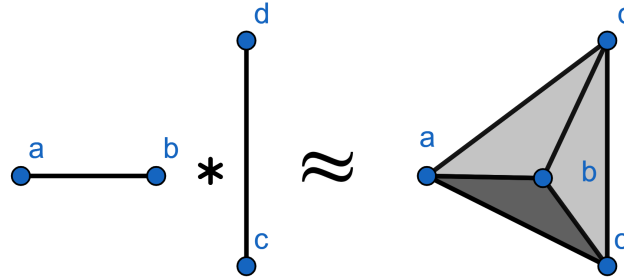
Dokaz. Definirajmo $f: |K| \times |L| \times I \rightarrow |K * L|$, kot $f(k, l, j) = jk + (1 - j)l$. Če je $k = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ in $l = \sum_{i=1}^m \beta_i u_i$, potem je $\{v_i \mid \alpha_i > 0\}$ simpleks v K in $\{u_i \mid \beta_i > 0\}$ simpleks v L ter $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^m \beta_i = 1$. Zato je $\{v_i \mid \alpha_i > 0\} \cup \{u_i \mid \beta_i > 0\}$ simpleks v $K * L$ in $\sum_{i=1}^n \alpha_i j + \sum_{i=1}^m \beta_i (1 - j) = 1$. Torej je f dobro definiran. Velja tudi $f(k, l, 0) = l$, neodvisno od k in $f(k', l', 1) = k'$, neodvisno od l' , torej f slika

ekvivalenčne razrede v točke. Ker sta K in L končna kompleksa, je $|K| \times |L| \times I$ kompaktna. Torej f slika iz kompakta v T_2 prostor in je zato zaprt. Preslikava f je zaprta in surjektivna, zato je kvocientna. Naredi iste identifikacije kot q , zato je inducirana preslikava \bar{f} dobro definirana in je homeomorfizem.

$$\begin{array}{ccc} |K| \times |L| \times I & \xrightarrow{f} & |K * L| \\ q \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ |K| * |L| & & \end{array}$$

□

Če je K 0-kompleks z dvema ogliščema, potem je $|K * L| = |K| * |L| = S^0 * |L| = \Sigma|L|$.



SLIKA 6. Geometrijska realizacija simplicialnega spoja dveh 1-simpleksov je homeomorfna geometrijski realizaciji 3-simpleksa.

Definicija 6.2. *Ne-Hausdorffov spoj $X \otimes Y$ dveh končnih T_0 -prostorov X in Y , je disjunktna unija $X \sqcup Y$, v kateri pustimo ureditev v X in v Y in postavimo $x \leq y$ za vsaka $x \in X$ in $y \in Y$.*

Ta spoj je asociativen in v splošnem ni komutativen. Tako kot pri topološkem in simplicialnem spoju imamo poseben primer ne-Hausdorffove suspenzije $\mathbb{S}(X) = X \otimes S^0$.

Ne-Hausdorffova suspenzija reda n je definirana rekurzivno, kot $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}(\mathbb{S}^{n-1}(X))$.

Opomba 6.3. Velja $\mathcal{K}(X \otimes Y) = \mathcal{K}(Y) * \mathcal{K}(X)$.

7. MINIMALNI MODEL SFERE

Spomnimo se, da je minimalni končen prostor, prostor brez odvečnih točk. Ker je pa vsak končen prostor homotopsko ekvivalenten svojemu jedru, sledi, da je vsak minimalni končen model prostora tudi minimalen končen prostor.

Trditev 7.1. *Končen prostor $\mathbb{S}^n(S^0)$ je končen model n -razsežne sfere S^n za vsak $n \geq 0$*

Dokaz. Vemo že, da je $\mathbb{S}^n(S^0)$ šibko homotopsko ekvivalenten $|\mathcal{K}(\mathbb{S}^n(S^0))|$, po opombi 6.3 in trditvi 6.1 pa velja $|\mathcal{K}(\mathbb{S}^n(S^0))| = |\mathcal{K}(\underbrace{S^0 \otimes S^0 \otimes \cdots \otimes S^0}_{n+1\text{-krat}})| = |\mathcal{K}(S^0) * \mathcal{K}(S^0) * \cdots * \mathcal{K}(S^0)| = |\mathcal{K}(S^0)| * |\mathcal{K}(S^0)| * \cdots * |\mathcal{K}(S^0)| = S^0 * S^0 * \cdots * S^0 = S^n$. □

Zdaj bomo še dokazali, da je $\mathbb{S}^n(S^0)$ minimalni končen model za S^n . Natančneje, pokazali bomo, da ima vsak prostor, šibko homotopsko ekvivalenten S^n , vsaj $2n + 2$ točk. Če ima pa natanko $2n + 2$ točk pa je homeomorfen $\mathbb{S}^n(S^0)$.

Definicija 7.2. Višina $\text{ht}(X)$ končne delno urejene množice je ena manj kot dožina najdaljše verige v X . Z $\#X$ pa označimo število elementov v X .

Dimenzija prirejenega kompleksa $\mathcal{K}(X)$ je enaka $\text{ht}(X)$.

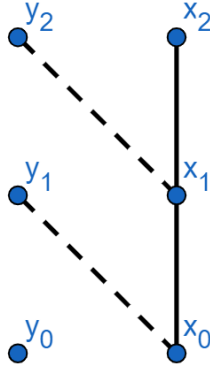
Izrek 7.3. Naj bo $X \neq *$ minimalen prostor, potem ima vsaj $2 \text{ht}(X) + 2$ točk. Če ima natanko $2 \text{ht}(X) + 2$ točk, potem je homeomorfen $\mathbb{S}^{\text{ht}(X)}(S^0)$.

Dokaz. Naj bo $x_0 < x_1 < \dots < x_h$ veriga dolžine $h + 1$ za $h = \text{ht}(X)$. Ker je X minimalen, x_i ni odvečna točka za noben $0 \leq i < h$. Potem za vsak $0 \leq i < h$ obstaja y_{i+1} , tak da $y_{i+1} > x_i$ in $y_{i+1} \not\geq x_{i+1}$. Trdimo, da so vse točke y_i med seboj različne, za vsak $0 < i \leq h$ in da nobena ni enaka x_j za noben $0 \leq j \leq h$.

Ker $y_{i+1} > x_i$, sledi, da $y_{i+1} \neq x_j$ za noben $j \leq i$. Ker velja tudi $y_{i+1} \not\geq x_{i+1}$ pa sledi, da $y_{i+1} \neq x_j$ za noben $j > i$.

Če je $y_{i+1} = y_{j+1}$ za neki $i < j$, potem je $y_{i+1} = y_{j+1} \geq x_j \geq x_{i+1}$. To je pa v protislovju z $y_{i+1} \not\geq x_{i+1}$.

Ker je vsak končen prostor z minimumom ali z maksimumom kontraktibilen in je $X \neq *$, minimalen prostor, sledi da X nima minimuma. Zato mora obstajati točka $y_0 \in X$, za katero velja $y_0 \not\geq x_0$.



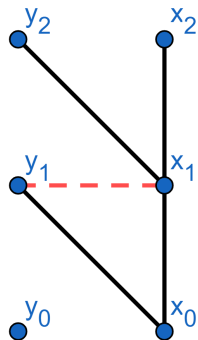
SLIKA 7. Dokaz je morda malo zahtevnejši, zato ga bomo ponazorili na primeru, ko je višina X enaka 2. Če je X višine 2, imamo verigo x -ov dolžine 3. Točki y_1 in y_2 morata obstajati, ker x_0 in x_1 nista navzgor odvečna. Točka y_0 pa obstaja, ker X ni kontraktibilen prostor.

Zato je y_0 različna od drugih $2h + 1$ točk in zato je $\#X \geq 2h + 2$. Predpodstavimo zdaj, da ima X natanko $2h + 2$ točk, torej

$$X = \{x_0, x_1, \dots, x_h, y_0, y_1, \dots, y_h\}.$$

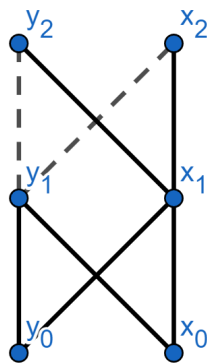
Če bi bil $x_i > y_i$, za $0 < i \leq h$, bi bilo to v nasprotju z maksimalnostjo verige $x_0 < \dots < x_h$, saj bi potem veljalo $x_{i-1} < y_i < x_i$. Tudi $y_i \not\geq x_i$, za $0 \leq i \leq h$, zato sta x_i in y_i neprimerljiva za $0 \leq i \leq h$.

Z indukcijo na j pokažimo, da $y_i < x_j$ in $y_i < y_j$ za vse $i < j$. Za $j = 0$ ni kaj za dokazovati. Naj bo $0 \leq k < h$ in recimo, da trditev drži za $j = k$, dokažimo, da drži tudi za $j = k + 1$. Ker x_{k+1} ni navzdol odvečna, obstaja z , da $z < x_{k+1}$



SLIKA 8. x_1 ni večji od y_1 , saj bi potem imeli verigo dolžine 4, $x_0 < y_1 < x_1 < x_2$. Tudi y_1 ni večji od x_1 , saj potem v Hassejevem diagramu ne bi bilo povezave med x_0 in x_1 . Torej sledi, da v diagramu ni vodoravnih povezav.

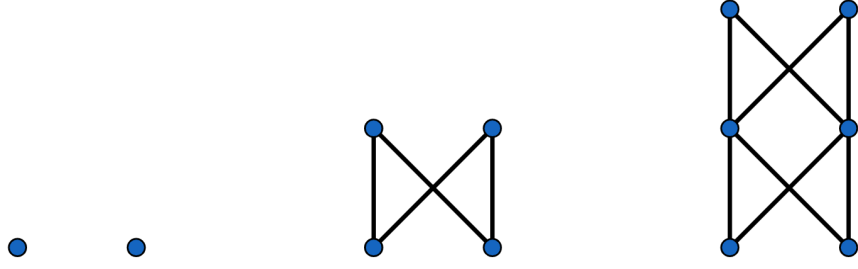
in $z \not\leq x_k$. Ker sta x_{k+1} in y_{k+1} neprimerljiva, velja tudi $z \neq y_{k+1}$. Iz indukcijske predpostavke sledi, da je vsaka točka, z izjemo y_k in y_{k+1} , večja od x_{k+1} ali manjša od x_k . Ker $y_{k+1} \not\leq x_{k+1}$, je potem $z = y_k$ in zato velja $y_k < x_{k+1}$. Dokažimo še, da $y_k \leq y_{k+1}$. Ker y_{k+1} ni navzdol odvečna, obstaja $w \in X$, da je $w < y_{k+1}$ in $w \not\leq x_k$. Iz indukcijske predpostavke in dejstva, da $y_{k+1} \not\leq x_{k+1}$, sklepamo, da velja $w = y_k$ in zato velja $y_k < y_{k+1}$. Za $i < k$ pa velja $y_i < x_k < x_{k+1}$ in $y_i < x_k < y_{k+1}$.



SLIKA 9. Pokažimo inducijski korak iz $j = 1$ v $j = 2$. Ker x_2 in y_2 nista navzdol odvečni, obstajata $w < x_2$ in $z < y_2$. Edina možna izbira za w in z je y_1 , torej velja $y_1 < x_2$ in $y_1 < y_2$.

Dokazali smo, da za vsak $i < j$, velja $y_i < x_j$, $y_i < y_j$, $x_i < x_j$ in $x_i < y_j$ ter da sta x_i in y_i neprimerljiva za vsak $0 \leq j \leq h$. To je pa ureditev v $\mathbb{S}^h(S^0)$ in zato je X homeomorfen $\mathbb{S}^h(S^0)$. □

Ker je $\mathbb{S}^n(S^0)$ model za S^n , čigar višina je enaka n in ima $2n + 2$ točk, je $\mathbb{S}^n(S^0)$ minimalni model za S^n . Model je enoličen, saj je vsak model za S^n na $2n + 2$ točkah homeomorfen $\mathbb{S}^n(S^0)$.



SLIKA 10. Minimalni modeli za S^0 , S^1 in S^2 .

8. ZANKE V HASSEJEVEM DIAGRAMU

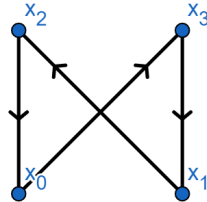
Pokazali bomo, kako se fundamentalna grupa končnega T_0 –prostora izraža preko prirejenega Hassejevega diagrama. Hassejev diagram končnega T_0 –prostora X označimo z $\mathcal{H}(X)$, z $E(\mathcal{H}(X))$ pa označimo množico njegovih robov.

Definicija 8.1. Naj bo (X, x_0) končen T_0 –prostor z izhodiščno točko. Urejen par $e = (x, y)$ imenujemo \mathcal{H} –rob od X , če je $(x, y) \in E(\mathcal{H}(X))$, ali $(y, x) \in E(\mathcal{H}(X))$. Točki x rečemo *začetek* x in označimo $x = \mathfrak{o}(e)$, točki y pa *konec* od e , označimo $\mathfrak{e}(e) = y$. Inverz \mathcal{H} –roba $e = (x, y)$ je \mathcal{H} –rob $e^{-1} = (y, x)$.

\mathcal{H} –pot v (X, x_0) je stik (lahko tudi prazen) \mathcal{H} –robov $\xi = e_1 e_2 \cdots e_n$, za katerega velja, da je $\mathfrak{e}(e_i) = \mathfrak{o}(e_{i+1})$, za vsak $0 \leq i \leq n - 1$. Začetek \mathcal{H} –poti ξ je $\mathfrak{o}(\xi) = e_1$, konec pa $\mathfrak{e}(\xi) = e_n$. Začetek in konec prazne poti je $\mathfrak{o}(\emptyset) = \mathfrak{e}(\emptyset) = x_0$. Če je $\xi = e_1 e_2 \cdots e_n$ \mathcal{H} –pot, definiramo $\bar{\xi} = e_n^{-1} \cdots e_2^{-1} e_1^{-1}$. Če sta ξ in ξ' \mathcal{H} –poti in velja $\mathfrak{e}(\xi) = \mathfrak{e}(\xi')$, lahko definiramo produktno \mathcal{H} –pot $\xi \xi'$, kot stik \mathcal{H} –robov v ξ , ki mu sledi stik \mathcal{H} –robov v ξ' .

Za \mathcal{H} –pot $\xi = e_1 e_2 \cdots e_n$ pravimo, da je *monotona*, če je $e_i \in E(\mathcal{H}(X))$ za vsak $1 \leq i \leq n$ ali pa je $e_i^{-1} \in E(\mathcal{H}(X))$ za vsak $1 \leq i \leq n$. Za poti ξ in ξ' rečemo, da sta blizu, če obstajajo \mathcal{H} –poti $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, za katere velja, da sta ξ_2 in ξ_3 monotoni in sta množici $\{\xi, \xi'\}$ in $\{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4, \xi_1 \xi_4\}$ enaki. Rečemo, da sta poti ξ in ξ' \mathcal{H} –ekvivalentni, če obstaja končno zaporedje poti $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = \xi'$, za katero velja, sta vsaki zaporedni poti blizu.

Zanka iz x_0 je \mathcal{H} –pot, ki se začne in konča v x_0 . Z $\langle \xi \rangle$ označimo \mathcal{H} –ekvivalenčni razred zanke ξ in s $\mathcal{H}(X, x_0)$ množico teh razredov.

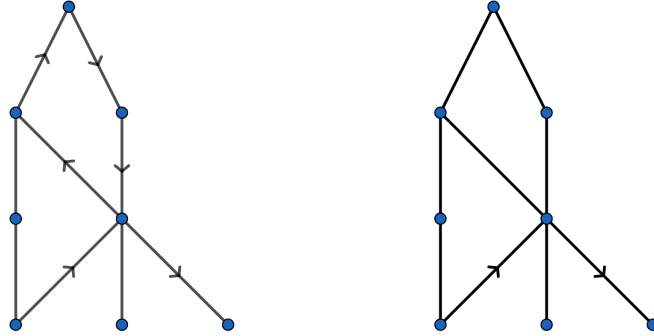


SLIKA 11. Netrivialna zanka $\xi = (x_0, x_3)(x_3, x_1)(x_1, x_2)(x_2, x_0)$.

Izrek 8.2. Naj bo (X, x_0) končen T_0 –prostor z izhodiščno točko. Potem je množenje $\langle \xi \rangle \langle \xi' \rangle = \langle \xi \xi' \rangle$ dobro definirano in inducira grupno strukturo na $\mathcal{H}(X, x_0)$.

Dokaz. Dobra definiranost in asociativnost sta očitni, enota je $\langle \emptyset \rangle$. Naj bosta ξ in ξ' poti, e \mathcal{H} –rob in $\mathfrak{e}(\xi) = \mathfrak{o}(\xi') = \mathfrak{o}(e)$ ter $\mathfrak{o}(\xi) = \mathfrak{e}(\xi) = x_0$. Potem sta zanki

$\langle \xi \xi' \rangle$ in $\langle \xi e e^{-1} \xi' \rangle$ blizu, saj je e monotona pot. Iz tega takoj sledi, da je inverz od $\langle e_1 e_2 \cdots e_n \rangle$ enak $\langle e_n^{-1} \cdots e_2^{-1} e_1^{-1} \rangle$. \square



SLIKA 12. Primer poti ki sta blizu.

Izrek 8.3. Naj bo (X, x_0) končen T_0 –prostor z izhodiščno točko. Potem je grupa sklenjenih lomljenk $E(\mathcal{K}(X), x_0)$ izomorfna $\mathcal{H}(X, x_0)$.

Dokaz. Definirajmo

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{H}(X, x_0) &\rightarrow E(\mathcal{K}(X), x_0). \\ \langle e_1 e_2 \cdots e_n \rangle &\mapsto [e_1 e_2 \cdots e_n], \\ \emptyset &\mapsto [(x_0, x_0)]. \end{aligned}$$

Najprej pokažimo, da je φ dobro definiran. Naj bosta zanki $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ in $\xi_1 \xi_4$ blizu in naj bosta $\xi_2 = e_1 e_2 \cdots e_n$ in $\xi_3 = e'_1 e'_2 \cdots e'_m$ monotoni \mathcal{H} –poti. Potem velja

$$\begin{aligned} [\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4] &= [\xi_1 e_1 e_2 \cdots e_{n-1} (\mathfrak{o}(e_n) \mathfrak{e}(e_n)) \xi_3 \xi_4] \\ &= [\xi_1 e_1 e_2 \cdots e_{n-2} (\mathfrak{o}(e_{n-1}) \mathfrak{e}(e_n)) \xi_3 \xi_4] = \cdots = [\xi_1 (\mathfrak{e}(\xi_1) \mathfrak{e}(e_n)) \xi_3 \xi_4], \end{aligned}$$

saj je $\{\mathfrak{o}(e_{n-i-1}), \mathfrak{o}(e_{n-i}), \mathfrak{e}(e_n)\}$ simpleks v $\mathcal{K}(X)$, analogno

$$[\xi_1 (\mathfrak{e}(\xi_1) \mathfrak{e}(e_n)) \xi_3 \xi_4] = [\xi_1 (\mathfrak{e}(\xi_1) \mathfrak{e}(e_n)) (\mathfrak{o}(e'_1) \mathfrak{o}(\xi_4)) \xi_4]$$

in zato

$$\begin{aligned} [\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4] &= [\xi_1 (\mathfrak{e}(\xi_1) \mathfrak{e}(e_n)) (\mathfrak{o}(e'_n) \mathfrak{o}(\xi_4)) \xi_4] \\ &= [\xi_1 (\mathfrak{e}(\xi_1) \mathfrak{e}(e_n)) (\mathfrak{e}(e_n) \mathfrak{e}(\xi_1)) \xi_4] = [\xi_1 (\mathfrak{e}(\xi_1) \mathfrak{e}(\xi_1)) \xi_4] = [\xi_1 \xi_4]. \end{aligned}$$

Obratno, če je $\xi = (x_0, x_1)(x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n)$ lomljenka v $\mathcal{K}(X)$ z $x_0 = x_n$, potem sta x_i in x_{i-1} primerljiva za vsak $1 \leq i \leq n$. Zato lahko najdemo monotone \mathcal{H} –poti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, take da $\mathfrak{o}(x_{i-1}) = \mathfrak{e}(x_i)$ za $1 \leq i \leq n$. Definirajmo

$$\begin{aligned} \psi: E(\mathcal{K}(X), x_0) &\rightarrow \mathcal{H}(X, x_0), \\ [\xi] &\mapsto \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle. \end{aligned}$$

Definicija je neodvisna od izbire \mathcal{H} –poti ξ_i , saj če se izbiri razlikujeta za kak $i = k$, potem sta $\xi_1 \cdots \xi_k \cdots \xi_n$ in $\xi_1 \cdots \xi'_k \cdots \xi_n$ \mathcal{H} –ekvivalentni, saj sta obe blizu $\xi_1 \cdots \xi_k \xi_k^{-1} \xi'_k \cdots \xi_n$. Zato velja $\langle \xi_1 \cdots \xi_k \cdots \xi_n \rangle = \langle \xi_1 \cdots \xi'_k \cdots \xi_n \rangle$.

Definicija je neodvisna od izbire predstavnika. Recimo da sta $\xi(x, y)(y, z)\xi'$ in $\xi(x, z)\xi'$ ekvivalentni lomljenki v $\mathcal{K}(X)$, ki se začneta in končata v x_0 , pri čemer sta ξ in ξ' lomljenki, x, y in z pa so primerljivi. Če y leži med x in z , lahko najdemo monotono \mathcal{H} -pot od x do z , ki vsebuje y in nadomesti \mathcal{H} -pot od x do y in od y do z . Zato je ψ ekvivalentno definiran na $\xi(x, y)(y, x)\xi'$ in $\xi(x, z)\xi'$. Če je $z \leq x \leq y$ lahko poiščemo monotoni \mathcal{H} -poti α od x do y in β od z do x , potem bo $\alpha\bar{\beta}$ nadomestila pot (y, z) in $\bar{\beta}$ bo nadomestila pot (x, z) . Dokazati moramo le še, da velja $\langle \gamma\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma' \rangle = \langle \gamma\bar{\beta}\gamma' \rangle$, za \mathcal{H} -poti γ in γ' , kar je pa trivialno. Preostale kombinacije x, y in z dokažemo analogno.

Očitno sta φ in ψ drug drugemu inverzna in zato sta izomorfizma. \square

Ker sta, po izreku 3.8, grupi $E(\mathcal{K}(X), x_0)$ in $\pi_1(|\mathcal{K}(X)|, x_0)$ izomorfni, takoj sledi naslednji rezultat.

Posledica 8.4. *Naj bo (X, x_0) končen T_0 -prostor z izhodiščno točko, potem $\pi_1(X, x_0) = \mathcal{H}(X, x_0)$.*

9. MINIMALNI MODELI GRAFOV

Graf v topologiji je topološki prostor, ki ga dobimo iz običajnega grafa $G = (E, V)$, če oglišča iz V zamenjamo s točkami in vsako povezavo $e \in E$, $e = xy$, za $x, y \in V$, zamenjamo z daljico, ki ima eno krajišče v x , drugo pa v y . Graf je torej geometrijska realizacija enorazsežnega simplicialnega kompleksa. Graf je končen, če ima končno mnogo oglišč.

Definicija 9.1. Naj bo K simplicialni kompleks dimenzije n in naj s_m označuje število m -simpleksov v K . Eulerjeva karakteristika $\chi(K)$ simplicialnega kompleksa K , je $\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_i$.

Če se omejimo na enorazsežne simplicialne komplekse oziroma grafe, potem je Eulerjeva karakteristika enaka $V - E$, kjer je V število oglišč, E pa število robov v grafu. Eulerjeva karakteristika dreves je enaka 1.

Dokažimo zdaj, da sta graf G in njegov kvocient G/e homotopsko ekvivalentna.

Trditev 9.2. *Naj bo G topološki graf in e njegova povezava. Potem je $G \times \{0\} \cup e \times I$ deformacijski retrakt od $G \times I$.*

Dokaz. Obstaja retrakcija $r: I \times I \rightarrow I \times \{0\} \cup \partial I \times I$, na primer radialna projekcija iz točke $(1/2, 2) \in I \times \mathbb{R}$. Ta retrakcija nam porodi deformacijsko retrakcijo $tr + (1-t)1$. Ta deformacijska retrakcija nam pa porodi deformacijsko retrakcijo $r_t^1: G \times I \rightarrow G \times \{0\} \cup (V \cup e) \times I$, kjer je V množica oglišč grafa. Ker je $\{v\} \times I$ kontraktibilna, za vsako oglišče v , obstaja deformacijska retrakcija $r_t^2: G \times \{0\} \cup V \cup e \times I \rightarrow G \times \{0\} \cup e \times I$. Če izvedemo r_t^1 v času $[0, 1/2]$ in r_t^2 v $[1/2, 1]$, dobimo deformacijsko retrakcijo $r_t: G \times I \rightarrow G \times \{0\} \cup e \times I$. Retrakcija je zvezna, saj je zvezna kot zožitev na vse robove in na vsa oglišča v G oziroma na vse zaprte simplekse. \square

Trditev 9.3. *Naj bo G končen topološki graf in $e = \{u, v\}$ povezava v grafu za $u \neq v$, potem se vsak par preslikav $G \times \{0\} \rightarrow G$ in $e \times I \rightarrow G$, ki sovpada na $e \times \{0\}$, da razširiti do preslikave $G \times I \rightarrow G$.*

Dokaz. Ker je e zaprta v G , lahko preslikavi združimo v preslikavo $G \times \{0\} \cup e \times I \rightarrow G$, ki je zvezna, saj je zvezna na zaprtih podprostorih $G \times \{0\}$ in $e \times I$. Če to komponiramo z retrakcijo $G \times I \rightarrow G \times \{0\} \cup e \times I$, dobimo razširitev $G \times I \rightarrow G$. \square

Recimo, da imamo preslikavo $f_0: G \rightarrow G$ in homotopijo $f_t: e \rightarrow G$, preslikave $f_0|_e$. Potem nam ta trditev pove, da lahko to homotopijo razširimo do homotopije $f_t: G \rightarrow G$ dane preslikave f_0 .

Trditev 9.4. *Naj bo G končen topološki graf in $e = \{u, v\}$ povezava v grafu za $u \neq v$. Potem sta prostora G in G/e homotopsko ekvivalentna.*

Dokaz. Naj bo $i: e \rightarrow G$ inkluzija. Povezava e je kontraktibilna, torej obstaja homotopija $r_t: e \rightarrow e$ za $r_0 = 1_e$. Naj bo $f_t: G \rightarrow G$ razširitev homotopije ir_t in naj velja $f_0 = 1_G$.

Ker $f_t(e) \subseteq e$, zato kompozicija $qf_t: G \rightarrow G/e$ slika e v točko, zato obstaja preslikava $\bar{f}_t: G/e \rightarrow G/e$, za katero velja $qf_t = \bar{f}_tq$. Pri $t = 1$ je $f_1(e)$ enaka točki, v katero se e kontrakira. Zato f_1 inducira preslikavo $g: G/e \rightarrow G$, da velja $gq = f_1$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_t} & G \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ G/e & \xrightarrow{\bar{f}_t} & G/e \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_1} & G \\ q \downarrow & \nearrow g & \downarrow q \\ G/e & \xrightarrow{\bar{f}_1} & G/e \end{array}$$

Ker velja $qg(\bar{x}) = qgq(x) = qf_1(x) = \bar{f}_1q(x) = \bar{f}_1(\bar{x})$, sledi, da je $qg = \bar{f}_1$. Zato sta q in g homotopska inverza, saj je $qg = f_1 \simeq f_0 = 1_G$ in $qg = \bar{f}_1 \simeq \bar{f}_0 = 1_{G/e}$. \square

Posledica 9.5. *Naj bo G končen graf, in naj bo T vpeto drevo. Potem sta prostora G in G/T homotopsko ekvivalentna.*

Naj bo T vpeto drevo grafa G . Velja $\chi(T) = 1$. G dobimo iz T tako, da mu dodajamo povezave oziroma 1-simplekse, zato je $\chi(G) = 1 - n$, kjer je n število povezav v G , ki niso v T . Prostor G/e dobimo iz G , tako da krajišči povezave zlepimo v eno točko, povezavo pa izbrišemo. Torej ima nov prostor eno oglišče in eno povezavo manj, zato se Eulerjeva karakteristika ohranja. G/T je prostor z enim ogliščem x_0 in n povezavami, ki se začnejo in končajo v istem oglišču. Torej je homeomorfen šopu $n = 1 - \chi(G)$ krožnic, kar označimo z $\bigvee_{i=1}^n S^1$. Minimalni model

grafa je torej enak minimalnemu modelu $\bigvee_{i=1}^n S^1$.

Poglejmo si fundamentalno grupo $\pi_1(\bigvee_{i=1}^n S^1, x_0)$, kjer je x_0 točka, v kateri so krožnice staknjene. Vsak ekvivalenčni razred zank predstavimo z zaporedjem krožnic, ki jih prepotujemo in s smerjo v kateri gremo čez krožnico. Če s s_i označimo ekvivalenčni razred zanke čez i -to krožnico, potem lahko ekvivalenčni razred zanke predstavimo kot zaporedje $s_{i_1}^{j_1} s_{i_2}^{j_2} \cdots s_{i_m}^{j_m}$, za $m \in \mathbb{N}$ in $j \in \{-1, 1\}$. Tu j označuje smer po kateri gremo čez krožnico. Stik zank $s_{i_1}^{j_1} \cdots s_{i_m}^{j_m}$ in $s_{k_1}^{l_1} \cdots s_{k'_m}^{l'_m}$ pa je ekvivalenten stiku zaporedij $s_{i_1}^{j_1} \cdots s_{i_m}^{j_m} s_{k_1}^{l_1} \cdots s_{k'_m}^{l'_m}$. Seveda velja $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$, kjer 1 predstavlja trivialno zanko. Torej vidimo, da je fundamentalna grupa $\pi_1(\bigvee_{i=1}^n S^1, x_0)$ enaka prosti grupi z n generatorji, ki jo označimo z F_n . Podroben izračun fundamentalne grupe šopa krožnic lahko najdemo v [3, razdelek 1.1].

Vsak graf je homotopsko ekvivalenten $\bigvee_{i=1}^n S^1$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalna grupa $\bigvee_{i=1}^n S^1$ pa je enaka $F(n)$. Iz tega sledi, da sta dva grafa homotopsko ekvivalentna natanko tedaj, ko sta njuni fundamentalni grupi izomorfni. Dobimo naslednjo posledico.

Posledica 9.6. Šibki homotopski tip grafa je odvisen le od Eulerjeve karakteristike.

Trditev 9.7. Naj bo X končen povezan topološki prostor in naj bosta $x, x_0 \in X$, za katera velja $x \neq x_0$ in x ni niti maksimalen niti minimalen. Potem inkluzija prirejenih simplicialnih kompleksov $\mathcal{K}(X \setminus \{x\}) \subseteq \mathcal{K}(X)$ inducira epimorfizem

$$i_*: E(\mathcal{K}(X \setminus \{x\}), x_0) \rightarrow E(\mathcal{K}(X), x_0)$$

med njunima grupama sklenjenih lomljenk.

Dokaz. Pokazati moramo, da je vsaka lomljenka v $\mathcal{K}(X)$ z izhodiščem x_0 , ekvivalentna neki drugi lomljenki, ki ne gre skozi x . Recimo, da je $y \leq x$ in je $(y, x)(x, z)$ lomljenka v $\mathcal{K}(X)$. Če je $x \leq z$, potem je $(y, x)(x, z) \equiv (y, z)$, saj je $\{x, y, z\}$ simpleks. Če je pa $z < x$, potem obstaja $w > x$, saj x ni maksimalen. Zato je $(y, x)(x, z) \equiv (y, x)(x, w)(w, x)(x, z) \equiv (y, w)(w, z)$. Če je $y \geq x$ je dokaz analogen. \square

Če povezanemu prostoru X postopoma odstranjujemo točke, ki niso minimalne ali maksimalne, v vsakem koraku dobimo epimorfizem med fundamentalnima grupama. Epimorfizem ni nujno izomorfizem, saj imamo lahko v $\mathcal{K}(X \setminus \{x\})$ dve neekvivalentni zanki, ki sta v $\mathcal{K}(X)$ ekvivalentni.

Posledica 9.8. Naj bo X povezan končen T_0 -prostor. Potem obstaja povezan T_0 -prostor $Y \subseteq X$, višine kvečjemu 1 in epimorfizem iz $\pi_1(Y, x)$ v $\pi_1(X, x)$.

Trditev 9.9. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Če je X minimalen model za $\bigvee_{i=1}^n S^1$, potem je $\text{ht}(X) = 1$.

Dokaz. Naj bo X minimalen model za $\bigvee_{i=1}^n S^1$. Potem obstaja povezan T_0 -podprostor $Y \subseteq X$ višine 1 in epimorfizem iz $\pi_1(Y, x_0)$ v $\pi_1(X, x_0) = F_n$. Ker je $\text{ht}(Y) = 1$, je Y model grafa, torej velja $\pi_1(Y, x_0) = F_m$, za $m \geq n$.

V $\mathcal{H}(Y)$ imamo m robov, ki niso v vpetem drevesu prirejenega grafa $\mathcal{K}(Y)$, zato lahko odstranimo $m - n$ robov iz $\mathcal{H}(Y)$ tako, da ostane povezan in je dobljen prostor Z model za $\bigvee_{i=1}^n S^1$.

Velja $\#Z = \#Y \leq \#X$, ampak ker je X končen minimalen model, mora veljati $\#X \leq \#Z$ in zato je $X = Z$, torej je višina X enaka 1. \square

Naj bo X minimalen model za $\bigvee_{i=1}^n S^1$. Vpeljimo naslednje oznake, $i := \#\{y \in X \mid y \text{ je minimalen}\}$ in $j := \#\{y \in X \mid y \text{ je maksimalen}\}$. Potem velja $\#X = i + j$ in $\#E(\mathcal{H}(X)) \leq ij$. Ker je $\chi(X) = 1 - n$, velja $n \leq 1 - (i + j) + ij = (i - 1)(j - 1)$. Navedimo glavni izrek razdelka.

Izrek 9.10. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Končen T_0 -prostor X je minimalni model za $\bigvee_{i=1}^n S^1$ natanko tedaj, ko je $\text{ht}(X) = 1$, $\#X = \min\{i + j \mid (i - 1)(j - 1) \geq n\}$ in $\#E(\mathcal{H}(X)) = \#X + n - 1$.

Dokaz. Pokazali smo že, da če je X minimalen model za $\bigvee_{i=1}^n S^1$, potem je $\text{ht}(X) = 1$ in $\#X \geq \min\{i + j \mid (i - 1)(j - 1) \geq n\}$. Če sta i in j taka, da $(i - 1)(j - 1) \geq n$, potem definiramo prostor $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_i, y_1, y_2, \dots, y_j\}$ z ureditvijo $y_k < x_l$ za

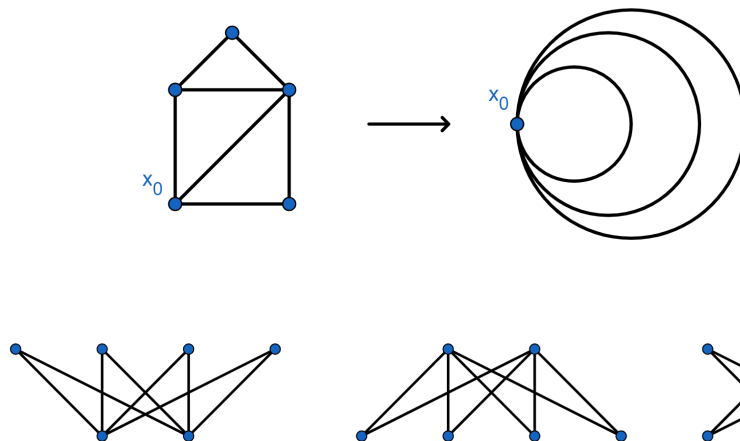
vse k in l , ki je model za $\bigvee_{i=1}^{(i-1)(j-1)} S^1$. Potem lahko odstranimo $(i-1)(j-1) - n$ robov iz $\mathcal{H}(Y)$ in tako dobimo povezan prostor kardinalnosti $i+j$, ki je model za $\bigvee_{i=1}^n S^1$. Torej velja $\#X \leq \#Y = i+j$. To drži za vsaka i in j , za katera velja $n \leq (i-1)(j-1)$, zato velja $\#X = \min\{i+j \mid (i-1)(j-1) \geq n\}$, zaradi minimalnosti X . $\#E(\mathcal{H}(X)) = \#X + n - 1$ pa sledi, ker $\chi(X) = 1 - n$.

Dokažimo še v drugo smer. Naj velja $\text{ht}(X) = 1$, $\#X = \min\{i+j \mid (i-1)(j-1) \geq n\}$ in $\#E(\mathcal{H}(X)) = \#X + n - 1$. Dokazati moramo le, da je X povezan, saj potem iz prve in tretje predpostavke sledi, da je X model za $\bigvee_{i=1}^n S^1$, iz druge pa sledi, da je model minimalen.

Naj bodo X_l komponente povezanosti od X , za $1 \leq l \leq k$. Z M_l označimo množico maksimalnih elementov v X_l , z m_l pa $X \setminus M_l$. Naj $i = \sum_{l=1}^k \#M_l$ in $j = \sum_{l=1}^k \#m_l$. Ker $i+j = \#X = \min\{s+t \mid (s-1)(t-1) \geq n\}$, sledi, da $(i-2)(j-1) < n = \#E(\mathcal{H}(X)) - \#X + 1 = \#E(\mathcal{H}(X)) - (i+j) + 1$ in zato velja $ij - \#E(\mathcal{H}(X)) < j-1$. To pomeni, da se $\mathcal{K}(X)$ od polnega dvodelnega grafa $(\cup m_l, \cup M_l)$ razlikuje v manj kot $j-1$ robovih. Ker za $r \neq l$ ne obstaja povezava med ogliščem v m_l in ogliščem v M_r , velja

$$j-1 > \sum_{l=1}^k \#M_l(j - \#m_l) \geq \sum_{l=1}^k (j - \#m_l) = (k-1)j.$$

Zato velja $k=1$ in dokaz je končan. \square



Primer 9.11. Graf na sliki ima Eulerjevo karakteristiko enako -2 , zato je homotopsko ekvivalenten šopu 3 krožnic, $\bigvee_{i=1}^3 S^1$. Vsak model za $\bigvee_{i=1}^3 S^1$ ima 6 točk in 8 robov. Ker obstajajo trije nehomeomorfni končni prostori s temi lastnosti vidimo, da graf v splošnem nima enolično določenega minimalnega modela. \diamond

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

edge path lomljenka
edge path group grupa sklenjenih lomljenk
down set navzdol zaprta množica
Euler characteristic Eulerjeva karakteristika

homotopy equivalence homotopska ekvivalenca
join spoj
simplicial complex simplicialni kompleks
up set navzgor zaprta množica
weak homotopy equivalence šibka homotopska ekvivalenca
wedge sum šop
 \mathcal{H} -path \mathcal{H} -pot

LITERATURA

- [1] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer, New York, 1995.
- [2] J.A. Barmak, *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, Lecture notes in mathematics, Springer, Berlin, 2011.
- [3] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.