1 Logik

1.1 Zahlensysteme: Definition und Überblick

Ein **Zahlensystem** definiert, wie Zahlen durch Ziffern dargestellt werden. In **Stellenwertsystemen** besitzt jede Ziffer, abhängig von ihrer Position, einen bestimmten Wert. Das bekannteste Beispiel ist das **Dezimalsystem** (Basis 10). Für die Informatik sind daneben vor allem das **Binär-** (Basis 2), **Oktal-** (Basis 8) und **Hexadezimalsystem** (Basis 16) wichtig.

Zahlensystem	**Basis**	**Ziffern pro Stelle**	**Beispiel**
Binär	2	$0, 1$	$1010_2 = 10_{10}$
Oktal	8	0–7	$12_8 = 10_{10}$
Dezimal	10	0–9	$10_{10} = 10_{10}$
Hexadezimal	16	0–9, A–F (A=10,...,F=15)	$A_{16} = 10_{10}$

Tabelle 1: Überblick über zentrale Stellenwertsysteme

Aufbau. Alle diese Systeme sind *positional*. Beispiel Hexadezimal:

$$A3_{16} \; = \; A \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 10 \cdot 16 + 3 = 163_{10}.$$

Im Binärsystem gilt analog

$$1010_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 2 + 0 = 10_{10}.$$

1.2 Umrechnung zwischen Zahlensystemen

Von beliebig nach Dezimal. Eine Zahl wird als Summe ihrer Ziffern mal Potenzen der Basis gebildet. Beispiel:

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13_{10}.$$

Von Dezimal in ein anderes System. Man dividiert wiederholt durch die neue Basis und notiert die Reste. Beispiel ($13_{10} \to$Binär):

$$\begin{array}{rcll} 13 \div 2 & = & 6 & \text{Rest } 1 \\ 6 \div 2 & = & 3 & \text{Rest } 0 \\ 3 \div 2 & = & 1 & \text{Rest } 1 \\ 1 \div 2 & = & 0 & \text{Rest } 1 \end{array}$$

Reste von unten nach oben gelesen $\Rightarrow$ 1101_2.

Da $8 = 2^3$, fasst man dreier-Blöcke in Binär direkt zu Oktalziffern zusammen; für Hex gilt dasselbe mit Vierer-Blöcken, weil $16 = 2^4$.

1.3 Darstellung negativer Binärzahlen

Vorzeichenbit. Bei fester Bitlänge steht das höchstwertige Bit (MSB) für das Vorzeichen (0=+, 1=–). Beispiel mit 8 Bit: $+5 = 00000101_2$, $-5 = 10000101_2$.

Komplementdarstellungen.

- *Einerkomplement:* Bits invertieren, z. B. $+5 = 0101_2 \;\; \to \;\; -5 = 1010_2$. Problem: Doppel-Null ($0000_2$ und 1111_2).
- *Zweierkomplement:* Einerkomplement +1. $0101_2 \;\to\; 1010_2 + 1 = 1011_2$ ist -5. Nur *eine* Null; Addition/Subtraktion funktioniert ohne Spezialfälle.

1.4 Addition und Subtraktion im Binärsystem

Addition funktioniert wie im Dezimalsystem, Übertrag bei Summe ≥ 2. Beispiel:

$$0101_2 + 0011_2 = 1000_2 = 8_{10}.$$

Subtraktion wird als Addition mit dem Zweierkomplement des Subtrahenden realisiert:

$$0111_2\ (7) + 1011_2\ (-5) = 00010_2 \;\Rightarrow\; 2_{10}.$$

1.5 ASCII und binäre Kodierung

ASCII kodiert 128 Zeichen mit 7 Bit (0–127). Beispiel: "HALLO"

$$\texttt{H} = 72,\ A = 65,\ L = 76,\ L = 76,\ O = 79$$

in Binär
`01001000 01000001 01001100 01001100 01001111.`

1.6 Aussagenlogik: Operatoren und Wahrheitstabelle

Grundoperatoren.

$$\neg A, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \oplus B, \quad A \to B, \quad A \leftrightarrow B$$

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Tabelle 2: Wahrheitstabelle für zwei Aussagen

1.7 Logische Gesetze und Identitäten

- **Kommutativität:** $A \wedge B = B \wedge A,\ A \vee B = B \vee A$
- **Assoziativität:** $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$, usw.
- **Distributivität:** $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- **Neutral-/Extremwerte:** $A \wedge 1 = A,\ A \vee 0 = A,\ A \wedge 0 = 0,\ A \vee 1 = 1$
- **De Morgan:** $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

1.8 Tautologie und Kontradiktion

- **Tautologie:** $A \vee \neg A$ ist immer wahr.
- **Kontradiktion:** $A \wedge \neg A$ ist immer falsch.

1.9 Beispielaufgaben

Beispiel 1: Tautologie prüfen. $X : \ (A \wedge (A \to B)) \to B$ ist eine Tautologie, siehe Tabelle:

A	B	$A \to B$	$A \wedge (A \to B)$	X
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Beispiel 2: Vereinfachung.

$$Y = \neg\big(A \wedge (\neg A \vee B)\big) \equiv \neg A \vee \neg(\neg A \vee B) \equiv \neg A \vee (A \wedge \neg B) \equiv (\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv 1 \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv \boxed{\neg A \vee}$$

1.10 Prädikatenlogik

Quantoren.

$$\forall x : P(x), \qquad \exists x : P(x)$$

Negation:

$$\neg\forall x : P(x) \ \equiv\ \exists x : \neg P(x), \qquad \neg\exists x : P(x) \ \equiv\ \forall x : \neg P(x).$$

Beispiel:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x + 1 > x \quad \text{(wahr)}, \qquad \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \quad \text{(wahr)}.$$