

Analiza Przeżycia

Raport 3

Wiktor Niedźwiedzki (258882)
Filip Michewicz (282239)

21 stycznia 2026 Anno Domini

Spis treści

1 Dane lung	4
2 Lista 9	5
2.1 Model przyspieszonego czasu awarii (AFT)	5
2.2 Model proporcjonalnych hazardów (PH)	5
2.3 Zadanie 1	6
2.4 Zadanie 2	7
2.5 Zadanie 3	7
2.6 Zadanie 4	8
2.7 Zadanie 5	8
2.8 Zadanie 6	9
2.9 Zadanie 7	9
2.10 Zadanie 8	12
2.11 Zadanie 9	13
3 Lista 10	14
3.1 Model proporcjonalnych hazardów Coxa	14
3.2 Zadanie 1	14
3.3 Zadanie 2	15
3.4 Zadanie 3	15
3.5 Zadanie 4	16
3.6 Zadanie 5	18
3.7 Zadanie 6	20
4 Lista 11	21
4.1 Zadanie 1	21
4.2 Zadanie 2	21
5 Zadanie dodatkowe	22
5.1 Zadanie 1	22
5.2 Zadanie 2	22
6 Bibliografia	23

Spis wykresów

1 Estymacja funkcji przeżycia - model PH	8
2 Estymowane funkcje hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model PH .	11
3 Logarytmy estymowanych funkcji hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model PH	11
4 Różnica logarytmów estymowanych funkcji hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model PH	12
5 Porównanie estymowanych funkcji przeżycia - modele AFT oraz PH	13
6 Estymowana skumulowana funkcja hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model Cox'a	16
7 Logarytm estymowanej skumulowanej funkcji hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model Cox'a	17
8 Różnica logarytmów estymowanej skumulowanej funkcji hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model Cox'a	18
9 Estymacja funkcji przeżycia w modelu Coxa dla różnych charakterystyk - pacjentek	19
10 Porównanie estymowanych funkcji przeżycia - modele AFT, PH oraz Coxa	20

Spis tabel

1	Opis zmiennych w zbiorze danych lung	4
2	Współczynniki modelu AFT	7
3	Współczynniki modelu PH	9
4	Współczynniki modelu Coxa	15
5	Estymowana funkcja przeżycia dla czasu t = 300 w procentach - porównanie modeli	19

1 Dane *lung*

W sprawozdaniu każda lista wykorzystuje dane *lung* z pakietu *survival* w R, które dotyczą pacjentów z zaawansowanym rakiem płuc.

Zbiór danych *lung* zawiera **228** oraz **10** cech. Liczba brakujących danych wynosi **67**, z czego przypada ona na **61** pacjentów.

Znaczenie poszczególnych cech oraz ich typ przedstawiono w Tabeli 1.

Tabela 1: Opis zmiennych w zbiorze danych lung

Zmienna	Typ	Opis
inst	numeric	Kod instytucji
time	numeric	Czas przeżycia w dniach
status	factor	Cenzura (1 - cenzura, 2 - śmierć (dana kompletna))
age	numeric	Wiek w latach
sex	factor	Płeć (1 - mężczyzna, 2 - kobieta)
ph.ecog	factor	Skala ECOG według lekarza
ph.karno	numeric	Ocena pacjenta w skali Karnofsky'ego według lekarza
pat.karno	factor	Ocena pacjenta w skali Karnofsky'ego według pacjenta,
meal.cal	numeric	Kalorie spożywane podczas posiłków
wt.loss	numeric	Utrata masy ciała w ciągu ostatnich sześciu miesięcy

- Skala (sprawności) Karnofsky'ego - skala pozwalająca określić stan ogólny i jakość życia pacjenta z chorobą nowotworową kwalifikowanego do chemicznej i/ lub radioterapii. Skala ma rozpiętość od 100 do 0, gdzie 100 oznacza stan idealny, a 0 – śmierć. Skala opracowana przez Davida A. Karnofsky'ego oraz Josepha H. Burchenala w 1949 roku [1].
- Skala (sprawności) ECOG - skala pozwalająca określić stan ogólny i jakość życia pacjenta z chorobą nowotworową, ale stosowana też w geriatrii i psychiatrii, lub innych ciężkich i przewlekłych chorobach [2].

Porównanie skali ECOG ze skalą Karnofsky'ego:

- **ECOG 0** – 100, 90
- **ECOG 1** – 80, 70
- **ECOG 2** – 60, 50
- **ECOG 3** – 40, 30
- **ECOG 4** – 20, 10
- **ECOG 5** – 0

2 Lista 9

Lista skupia się na poznaniu modelów przyspieszonego czasu awarii oraz proporcjonalnych hazardów.

Niech $S_0(x)$ oraz $h_0(x)$ będą odpowiednio funkcjami przeżycia hazardu o znanych postaciach, które odpowiadają rozkładowi obserwowej zmiennej losowej X o zerowym wektorze charakterystyk. W przypadku zadań funkcje te będą odpowiadać rozkładowi Weibulla, jednakże można też przyjąć inne, co zostało uwzględnione w poniższych opisach.

2.1 Model przyspieszonego czasu awarii (AFT)

Modelem, w którym funkcja przeżycia $S(x|z)$ jednostki o wektorze charakterystyk z ma postać

$$S(x|z) = S_0(\exp(\beta^T z) x),$$

nazywamy modelem przyspieszonego czasu awarii (AFT - ang. *accelerated failure time*).

Funkcję $S_0(x)$ nazywamy bazową funkcją przeżycia, natomiast wyrażenie $\exp(\beta^T z)$ — czynnikiem przyspieszenia (skalującym czas).

Model AFT posiada następującą interpretację. Jeżeli z_1 oraz z_2 są dwoma wektorami charakterystyk, to prawdopodobieństwo przeżycia czasu x przez jednostkę o charakterystyce z_1 jest równe prawdopodobieństwu przeżycia czasu $\exp(\beta^T(z_1 - z_2))x$ przez jednostkę o charakterystyce z_2 . Oznacza to, że porównanie jednostek sprowadza się do odpowiedniego przeskalowania osi czasu.

W szczególności:

- jeżeli $\exp(\beta^T(z_1 - z_2)) > 1$ (tj. $\beta^T(z_1 - z_2) > 0$), to jednostka o charakterystyce z_1 ma większe prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia przed chwilą x niż jednostka o charakterystyce z_2 ,
- jeżeli $\exp(\beta^T(z_1 - z_2)) < 1$ (tj. $\beta^T(z_1 - z_2) < 0$), to jednostka o charakterystyce z_1 ma mniejsze prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia przed chwilą x niż jednostka o charakterystyce z_2 ,
- w szczególności, gdy $\exp(\beta^T(z_1 - z_2)) = 1$ (tj. $\beta^T(z_1 - z_2) = 0$), mamy $z_1 = z_2$.

Korzystając z zależności

$$h(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)},$$

model AFT można równoważnie zapisać w postaci

$$h(x|z) = h_0(\exp(\beta^T z) x) \exp(\beta^T z).$$

W praktyce, jako bazową funkcję przeżycia $S_0(x)$ w modelu AFT często przyjmuje się funkcję odpowiadającą rozkładowi Weibulla (w szczególnym przypadku rozkładowi wykładniczemu), Gomperta, lognormalnemu, logistycznemu oraz rozkładowi wartości ekstremalnych.

2.2 Model proporcjonalnych hazardów (PH)

W (parametrycznym) modelu proporcjonalnych hazardów (PH – ang. *proportional hazards*) funkcja hazardu $h(x|z)$ jednostki o wektorze charakterystyk z ma postać

$$h(x|z) = h_0(x) \exp(\beta^T z),$$

gdzie $h_0(x)$ oznacza bazową funkcję hazardu, a wektor parametrów β opisuje wpływ charakterystyk na intensywność wystąpienia zdarzenia.

Model proporcjonalnych hazardów zawsze ma nazwę bezpośrednio interpretacji. Jeżeli $z_1 = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1p})^T$ oraz $z_2 = (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2p})^T$ są dwoma wektorami charakterystyk, to

$$\frac{h(x|z_1)}{h(x|z_2)} = \exp(\beta^T(z_1 - z_2)),$$

czyli iloraz hazardów dwóch jednostek nie zależy od czasu x , a jedynie od różnicy ich charakterystyk. Oznacza to, że hazardy są proporcjonalne w całym horyzoncie obserwacji.

Korzystając z zależności pomiędzy funkcją hazardu a funkcją przeżycia

$$S(x) = \exp\left(-\int_0^x h(u) du\right),$$

model PH można równoważnie zapisać w postaci funkcji przeżycia:

$$S(x|z) = \exp\left(-\int_0^x h_0(u) \exp(\beta^T z) du\right) = [S_0(x)]^{\exp(\beta^T z)},$$

gdzie $S_0(x) = \exp(-\int_0^x h_0(u) du)$ jest bazową funkcją przeżycia.

W praktyce, jako bazową funkcję hazardu $h_0(x)$ w modelu PH często przyjmuje się funkcję odpowiadającą rozkładowi Weibulla (w szczególnym przypadku rozkładowi wykładniczemu), model o kawałkami stałym hazardzie, rozkład Gompertza oraz rozkład wartości ekstremalnych.

2.3 Zadanie 1

W tym zadaniu oszacowano parametry modelu przyspieszonego czasu awarii (AFT). Jako zmienną zależną przyjęto *time*, natomiast jako wektor charakterystyk: *age*, *sex*, *ph.ecog* oraz *ph.karno*. Do estymacji modelu wykorzystano funkcję *survreg* z pakietu *survival*.

Podczas konstruowania modelu uwzględniono fakt, że zmienne *sex* oraz *ph.ecog* mają charakter jakościowy (typ *factor*), natomiast zmienne *age* i *ph.karno* zostały poddane centrowaniu. Zabieg ten jest zalecany, gdyż poprawia własności numeryczne estymacji oraz interpretowalność parametrów modelu.

UWAGA Po ograniczeniu zbioru danych, od tego momentu każdorazowe odwołanie do wartości w skali ECOG będzie dotyczyło zmiennej *ph.ecog*, czyli oceny nadawanej przez lekarza. Analogicznie, stopień w skali Karnofsky'ego będzie oznaczał wartość zmiennej *ph.karno*, również ustalaną przez lekarza.

Po wyznaczeniu odpowiedniego podzbioru danych usunięto obserwacje zawierające braki danych. Liczba usuniętych wierszy wyniosła **2**.

```
lung_new <- na.omit(lung[c("time", "status", "age", "sex", "ph.ecog", "ph.karno")])

# Centrowanie danych
age_average <- mean(lung_new$age)
lung_new$age_new <- lung_new$age - age_average
ph.karno_average <- mean(lung_new$ph.karno)
lung_new$ph.karno_new <- lung_new$ph.karno - ph.karno_average

# Tworzenie modelu AFT
model.aft <- survreg(
  Surv(time, status) ~ age_new + as.factor(ph.ecog) +
    ph.karno_new + as.factor(sex),
  data = lung_new,
  dist = "weibull"
)
```

W poniższej tabeli przedstawiono współczynniki modelu. Ich interpretacja znajduje się w kolejnym zadaniu.

Tabela 2: Współczynniki modelu AFT

Charakterystyka	Wartość współczynnika β	$\exp(\beta)$
Wyraz wolny	6.301	545.215
Wiek	-0.009	0.991
ECOG 1	-0.422	0.656
ECOG 2	-0.926	0.396
ECOG 3	-1.687	0.185
Stopień Karnofsky'ego	-0.010	0.990
Płeć = 2 (kobieta)	0.408	1.504

2.4 Zadanie 2

W tym zadaniu zinterpretowane zostały wyznaczone współczynniki dla poszczególnych zmiennych. Współczynniki zostały przedstawione w Tabeli 2.

Interpretacja współczynników w modelu przyspieszonego czasu awarii (AFT) opiera się na czynniku przyspieszenia czasu, czyli wartości $\exp(\beta)$.

Wartości $\exp(\beta_i) < 1$ oznaczają skrócenie czasu przeżycia (przyspieszenie wystąpienia zdarzenia), natomiast $\exp(\beta_i) > 1$ oznaczają wydłużenie czasu przeżycia (spowolnienie zdarzenia) w porównaniu z jednostką odniesienia.

Wyraz wolny odpowiada bazowej funkcji przeżycia dla jednostki referencyjnej, której zmienne objaśniające przyjmują wartości odniesienia: wiek i stopień Karnofsky'ego równy średniej w próbce (po centrowaniu), ECOG = 0 oraz płeć żeńska. Wtedy przewidywany czas przeżycia tej jednostki opisuje funkcja

$$S_0 \left(\exp \left(\beta^T z_0 \right) t \right),$$

gdzie z_0 oznacza wektor zmiennych objaśniających przy wartościach odniesienia, a $\exp(\beta^T z_0) = 545.215$ pełni rolę czynnika skalującego oś czasu względem bazowej funkcji $S_0(t)$.

Współczynniki modelu AFT działają mnożnicowo na przewidywany czas przeżycia: przewidywany czas jednostki o charakterystykach z jest skalowany względem jednostki referencyjnej przez czynnik $\exp(\beta^T z) = \exp(\beta_1 z_1) \cdot \exp(\beta_2 z_2) \cdots \exp(\beta_p z_p)$. Oznacza to, że efekty wszystkich zmiennych łączą się poprzez mnożenie, wpływając jednocześnie na przewidywany czas przeżycia.

Każdy dodatkowy rok wieku powyżej średniej skraca przewidywany czas przeżycia o około 0,9% ($\exp(-0.009) \approx 0.991$). Analogicznie, każdy rok poniżej średniej wydłuża czas przeżycia.

W porównaniu z ECOG = 0, osoby z ECOG = 1 mają przewidywany czas przeżycia krótszy o około 34% ($\exp(-0.422) \approx 0.656$). W przypadku ECOG = 2 czas przeżycia jest krótszy o około 60% ($\exp(-0.926) \approx 0.396$), a dla ECOG = 3 – o około 82% ($\exp(-1.687) \approx 0.185$).

Każdy punkt mniejszy w skali Karnofsky'ego względem średniej skraca przewidywany czas przeżycia o około 1% ($\exp(-0.01) \approx 0.990$).

W porównaniu z mężczyznami, kobiety mają przewidywany czas przeżycia dłuższy o około 50% ($\exp(0.408) \approx 1.504$).

2.5 Zadanie 3

W tym zadaniu oszacowano funkcję przeżycia (w dniach) dla 70-letniej kobiety o stopniu sprawności fizycznej ECOG równym 1 oraz stopniu Karnofsky równym 90. Dane ciągle zostały wcześniej zcentrowane względem średnich w próbie.

```

beta <- unname((-model.aft$coefficients[-1]))
z <- c(70 - age_average, 1, 0, 0, 90 - ph.karno_average, 1)

mi <- model.aft$icoef[[1]]
sigma <- exp(model.aft$icoef[[2]])
alpha_aft <- 1 / sigma
lambda_aft <- exp(-alpha_aft * mi)

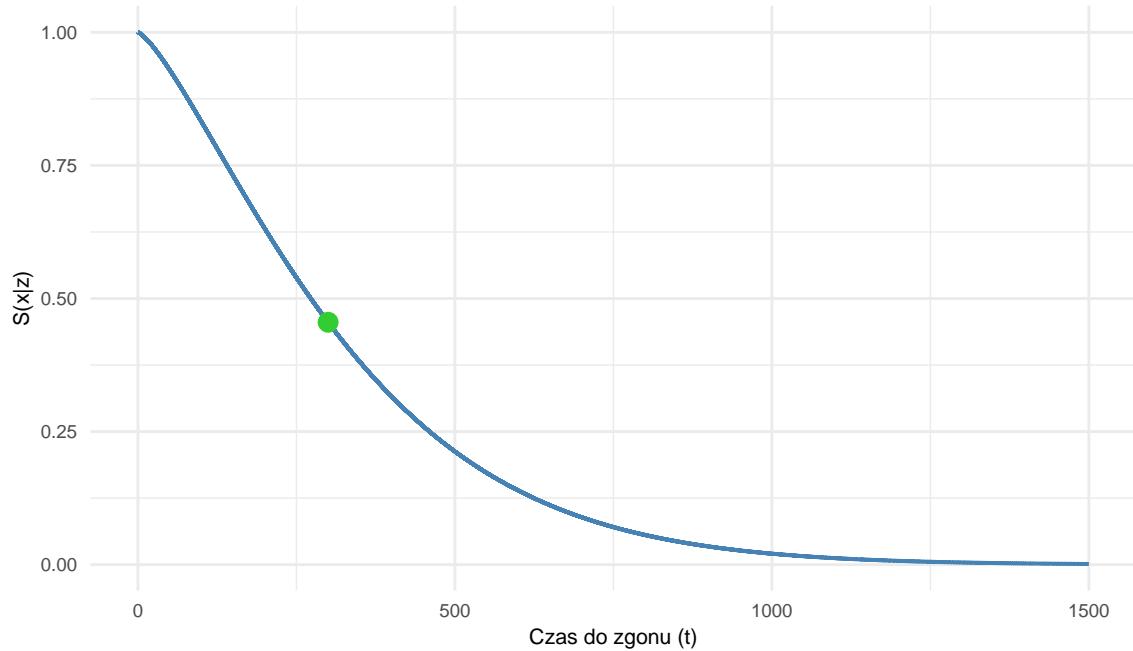
surv_fun_aft <- function(t, z) {
  theta_aft <- c(t(beta) %*% z)
  exp(-lambda_aft * exp(alpha_aft * theta_aft) * t^alpha_aft)
}

```

Na podstawie oszacowanej funkcji przeżycia można obliczyć prawdopodobieństwo, że czas życia kobiety przekroczy 300 dni. Estymacja wynosi **45.54 %**.

2.6 Zadanie 4

W tym zadaniu narysowano wykres estymowanej funkcji przeżycia z zadania 3.



Wykres 1: Estymacja funkcji przeżycia - model PH

Na Wykresie 1. widać, że szacowane prawdopodobieństwo przeżycia szybko maleje do ok. 500 dni, potem zaś prędkość ta znaczowo maleje. Od czasu $t = 1138$ estymowana szansa przeżycia spada poniżej 1%. Zielonym punktem zaznaczona została wcześniej wymieniona wartość estymowanego prawdopodobieństwa, że zgon kobiety nie nastąpi przed 300 dniem.

2.7 Zadanie 5

W tym zadaniu oszacowano parametry modelu proporcjonalnych hazardów (PH). Podobnie jak wcześniej, zmienną zależną jest *time*, a zmiennymi objaśniającymi: *age*, *sex*, *ph.ecog* oraz *ph.karno*. Podobnie jak wcze-

śniej, zmienne jakościowe traktowane są jako `factor`, natomiast zmienne ciągłe zostały zcentrowane.

```
model.ph <- phreg(
  Surv(time, status) ~ age_new + as.factor(ph.ecog) +
    ph.karno_new + as.factor(sex),
  data = lung_new,
  dist = "weibull"
)
```

W poniższej tabeli przedstawiono współczynniki modelu. Ich interpretacja znajduje się w kolejnym zadaniu.

Tabela 3: Współczynniki modelu PH

Charakterystyka	Wartość współczynnika β	$\exp(\beta)$
Wiek	0.012	1.012
ECOG 1	0.585	1.795
ECOG 2	1.285	3.615
ECOG 3	2.341	10.394
Stopień Karnofsky'ego	0.014	1.014
Płeć = 2 (kobieta)	-0.567	0.567
$\log(\text{scale})$	6.301	545.215
$\log(\text{shape})$	0.328	1.388

2.8 Zadanie 6

W tym zadaniu zinterpretowane zostały wyznaczone współczynniki dla poszczególnych zmiennych. Współczynniki zostały przedstawione w Tabeli 3.

Interpretacja współczynników w modelu PH opiera się na ilorazie hazardów, czyli wartości $\exp(\beta)$. Wartości $\exp(\beta_i) > 1$ oznaczają zwiększenie ryzyka wystąpienia zdarzenia (wyższy hazard), natomiast $\exp(\beta_i) < 1$ oznaczają zmniejszenie ryzyka (niższy hazard) w porównaniu z jednostką odniesienia.

Jednostka odniesienia to hipotetyczna jednostka, dla której wszystkie zmienne jakościowe przyjmują wartości referencyjne (ECOG = 0, płeć mężczyzna), a zmienne ciągłe są ustawione na wartości średnie w próbie (po centrowaniu). Współczynniki β opisują więc zmianę hazardu jednostki w stosunku do tej jednostki odniesienia.

Każdy dodatkowy rok życia zwiększa hazard zgonu o około 1,2% ($\exp(0.012) \approx 1.012$).

W porównaniu z ECOG = 0 osoby z ECOG = 1 mają hazard większy o około 79,5% ($\exp(0.585) \approx 1.795$), z ECOG = 2 - o około 261,5% ($\exp(1.285) \approx 3.615$), a z ECOG = 3 - o około 939,4% ($\exp(2.341) \approx 10.394$). Wyższe wartości ECOG oznaczają znacznie wyższe ryzyko zdarzenia, czyli krótszy przewidywany czas przeżycia.

Każdy punkt wyższy w skali Karnofsky'a zwiększa hazard o około 1,4% ($\exp(0.014) \approx 1.014$).

W porównaniu z mężczyznami, kobiety mają hazard mniejszy o około 43% ($\exp(-0.567) \approx 0.567$), co oznacza dłuższy przewidywany czas przeżycia.

Parametry `log(scale)` i `log(shape)` określają odpowiednio skalę i kształt bazowego rozkładu Weibulla przyjętego w modelu.

2.9 Zadanie 7

W tym zadaniu oszacowano dwie funkcje hazardu (w dniach) odpowiadające rozkładowi czasu życia 70-letnich kobiet o tej samej wartości stopnia Karnofsky'ego równym 90 oraz zróżnicowanej wartości charakterystyki ECOG wykłoszącym 1 oraz 2. Dane ciągłe zostały wcześniej zcentrowane względem średnich w próbie. Następnie porównano uzyskane estymacje funkcji hazardu.

Funkcje hazardu oszacowano w modelu proporcjonalnych hazardów z rozkładem Weibulla. Współczynniki regresji odpowiadają poszczególnym cechom jednostek, natomiast parametry kształtu i skali definiują bazową funkcję hazardu Weibulla:

$$h(t | z) = h_0(t) \exp(\beta^T z),$$

gdzie bazowy hazard Weibulla jest określony wzorem:

$$h_0(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1}, \quad \lambda = \exp(-\log(\text{scale}) \cdot \alpha), \quad \alpha = \exp(\log(\text{shape})).$$

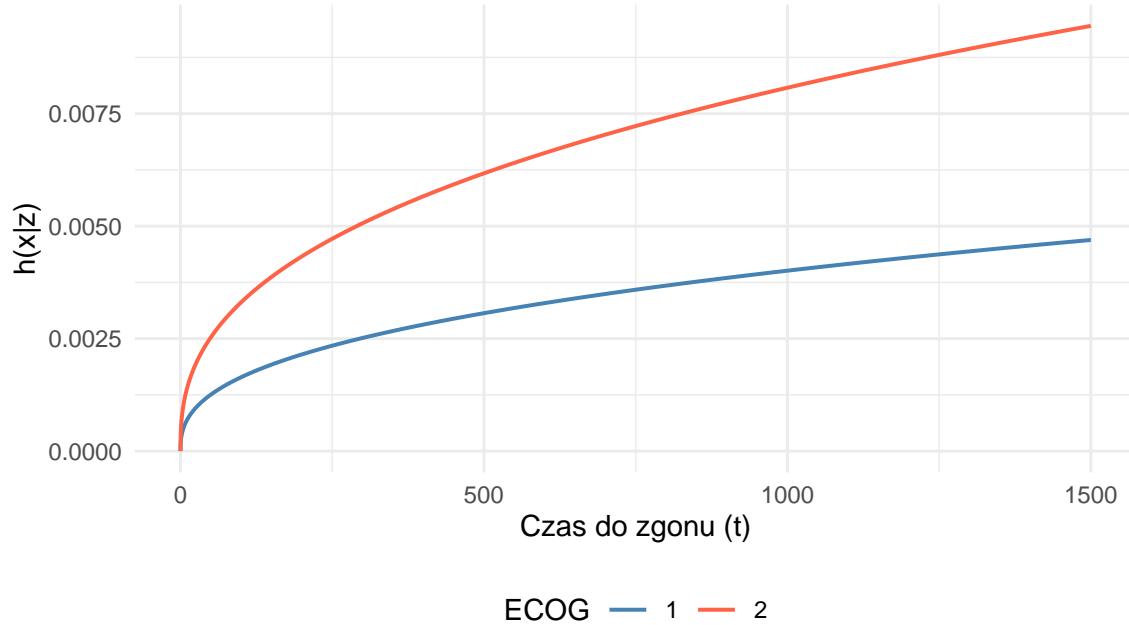
Wektor z zawiera wartości zmiennych objaśniających zcentrowanych względem średnich oraz zakodowanych zmiennych jakościowych. Bazowy hazard $h_0(t)$ opisuje tempo ryzyka w jednostce odniesienia (dla wszystkich zmiennych jakościowych przyjmujących wartości referencyjne i zmiennych ciągłych ustawionych na średnich), natomiast współczynniki β skalują go dla jednostek o innych wartościach cech.

```
beta <- unname(model.ph$coefficients[-c(7, 8)])
alpha_ph <- exp(model.ph$coefficients[["log(shape)"]])
mu <- model.ph$coefficients[["log(scale)"]]
lambda_ph <- exp(-mu * alpha_ph)

# 1 kobieta: ph.ecog=1
z1 <- c(70 - age_average, 1, 0, 0, 90 - ph.karno_average, 1)
theta_ph1 <- c(t(beta) %*% z)

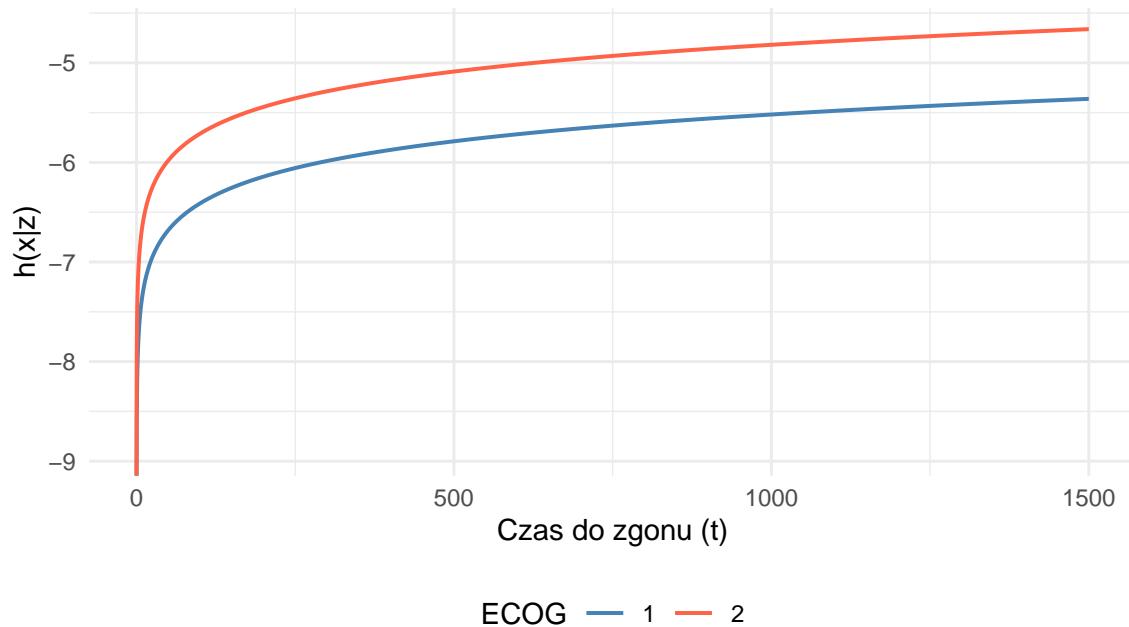
# 2 kobieta: ph.ecog=2
z2 <- c(70 - age_average, 0, 1, 0, 90 - ph.karno_average, 1)

hazard_fun_ph <- function(t, z) {
  theta_ph <- c(t(beta) %*% z)
  lambda_ph * alpha_ph * t^(alpha_ph - 1) * exp(theta_ph)
}
```



Wykres 2: Estymowane funkcje hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model PH

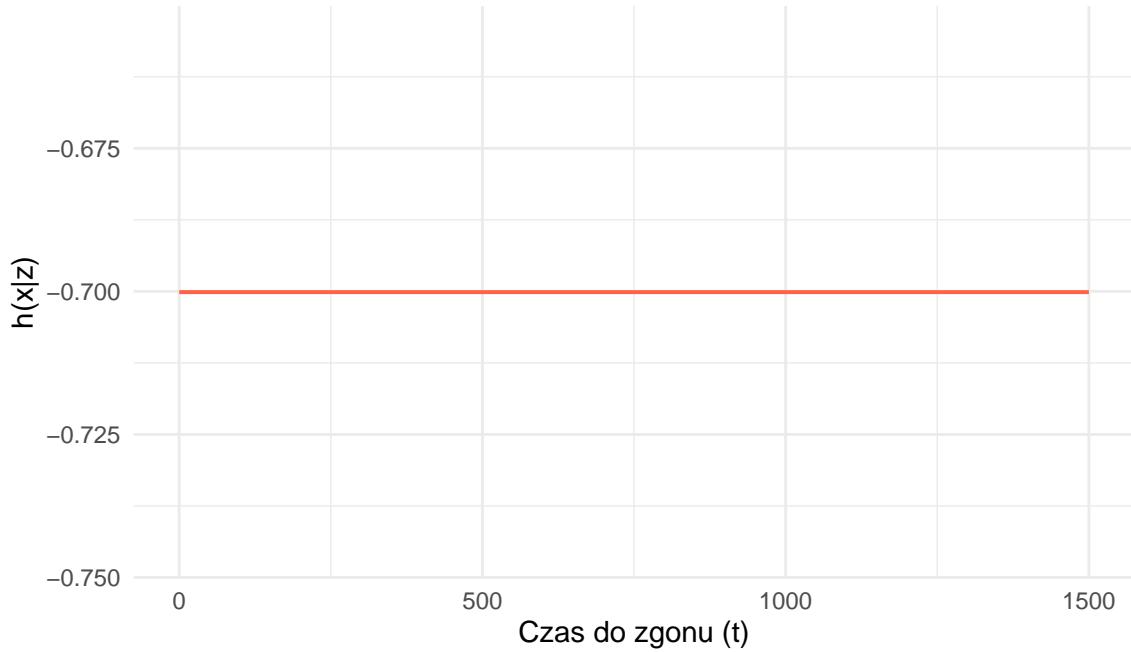
Z Wykresu 2. można odczytać, że funkcja hazardu dla kobiety o charakterystyce ECOG równej 2 jest zawsze wyższa niż dla tej drugiej. Oznacza to, że w jej przypadku ryzyko zgonu w każdym momencie jest wyższe.



Wykres 3: Logarytmy estymowanych funkcji hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model PH

Poszczególne krzywe funkcji log-hazardu na Wykresie 3. wydają się równoległe, co sugeruje, że iloraz hazard-

dów może być stały w czasie.



Wykres 4: Różnica logarytmów estymowanych funkcji hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model PH

Jak pokazano na wykresie 4. różnica logarytmów funkcji hazardu jest w przybliżeniu stała w czasie, co wskazuje na stałość ilorazu hazardów. W konsekwencji brak jest przesłanek empirycznych do odrzucenia założenia proporcjonalnych hazardów, a przyjęcie modelu proporcjonalnych hazardów w analizie można uznać za uzasadnione.

2.10 Zadanie 8

W tym zadaniu, w oparciu o wcześniej wyznaczone funkcje hazardu w modelu proporcjonalnych hazardów z bazowym rozkładem Weibulla, wyznaczono odpowiadające im funkcje przeżycia.

Dla rozkładu Weibulla oraz parametryzacji zastosowanej w modelu proporcjonalnych hazardów otrzymujemy bazową funkcję przeżycia

$$S_0(t) = \exp(-\lambda t^\alpha),$$

natomast funkcja przeżycia dla jednostki o wektorze cech (z) przyjmuje postać

$$S(t|z) = [S_0(t)]^{\exp(\beta^T z)} = \exp(-\lambda t^\alpha \exp(\beta^T z)).$$

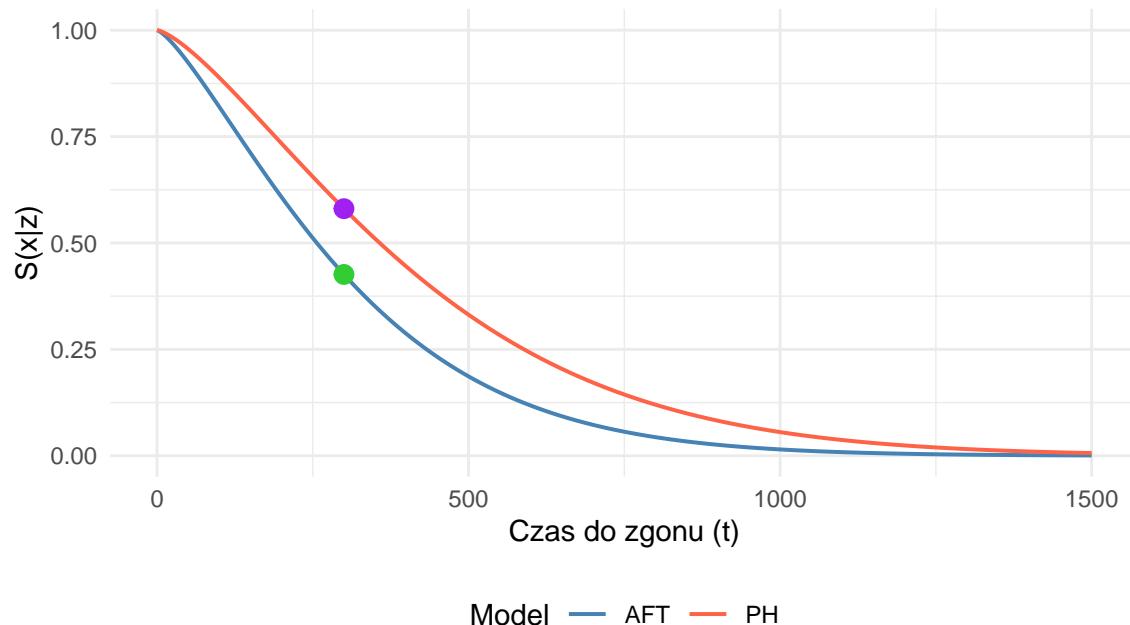
```
surv_fun_ph <- function(t, z) {
  theta_ph <- c(t(beta) %*% z)
  exp(-lambda_ph*t^alpha_ph*exp(theta_ph))
}
```

W oparciu o wyznaczone funkcje przeżycia obliczono estymowane prawdopodobieństwo, że kobiety przeżyją ponad 300 dni. Dla kobiety o stopniu sprawności w skali ECOG równym 2 wynosi ono **33.45%**, natomiast dla kobiety o stopniu sprawności w skali ECOG równym 1 — **58.06%**.

Otrzymana wartość dla kobiety o stopniu sprawności w skali ECOG równym 1 jest większa o **15.46%** w porównaniu z odpowiednią estymacją uzyskaną przy zastosowaniu modelu AFT, co wynika z odmiennej parametryzacji oraz interpretacji wpływu zmiennych objaśniających w obu modelach.

2.11 Zadanie 9

W tym zadaniu porównano funkcje przeżycia uzyskane za pomocą modeli AFT oraz PH dla 70-letniej kobiety o stopniu sprawności w skali Karnofsky'ego równym 90 oraz stopniu sprawności w skali ECOG równym 1.



Wykres 5: Porównanie estymowanych funkcji przeżycia - modele AFT oraz PH

Na Wykresie 5. widać wyraźną różnicę między modelem AFT a modelem PH. Estymowana funkcja przeżycia uzyskana za pomocą modelu przyspieszonego czasu awarii maleje szybciej niż funkcja oszacowana za pomocą modelu proporcjonalnych hazardów. Dopiero po czasie $t = 1250$ dni wartości obu funkcji można uznać za zbliżone. Maksymalna różnica między funkcjami wynosi około **15.91 p.p.**. Zaznaczone na wykresie punkty odpowiadają estymowanym prawdopodobieństwom przeżycia ponad 300 dni, których wartości podano wcześniej.

3 Lista 10

Lista polega na praktycznym zastosowaniu modelu proporcjonalnych hazardów Coxa do danych o czasie przeżycia. Celem jest oszacowanie parametrów modelu, interpretacja wpływu zmiennych na ryzyko zdarzenia, wyznaczenie bazowej funkcji hazardu i funkcji przeżycia, a także ocena prawdopodobieństwa przeżycia dla wybranych profili pacjentów oraz weryfikacja założeń modelu poprzez wizualizacje.

3.1 Model proporcjonalnych hazardów Coxa

Modelem, w którym funkcja hazardu jednostki o charakterystyce z ma postać

$$h_z(t) = h_0(t)\psi(z),$$

nazywamy modelem proporcjonalnych hazardów Coxa. Funkcja $h_0(t)$ to bazowa funkcja hazardu, zależna od czasu, ale niezależna od charakterystyk, przyjmująca wartości nieujemne. Funkcja $\psi(z)$ zależy wyłącznie od wektora charakterystyk z , jest nieujemna i zwykle przyjmuje postać parametryczną

$$\psi(z) = \exp(\beta^T z),$$

gdzie β to wektor nieznanych współczynników modelu. Wówczas funkcja hazardu przyjmuje postać

$$h_z(t) = h_0(t) \exp(\beta^T z),$$

co pozwala interpretować wpływ zmiennych objaśniających na ryzyko wystąpienia zdarzenia w sposób wzajemny.

Ryzyko względne między jednostką o charakterystyce z_1 a jednostką o charakterystyce z_2 definiuje się jako

$$\frac{h_{z_1}(t)}{h_{z_2}(t)} = \exp[\beta^T(z_1 - z_2)],$$

czyli jest stałe w czasie i zależy tylko od różnicy charakterystyk. Dzięki temu nazwa modelu – proporcjonalne hazardy – odzwierciedla fakt, że hazard jednostek są proporcjonalne w całym okresie obserwacji.

Mimo że model proporcjonalnych hazardów Coxa przypomina parametryczny model proporcjonalnych hazardów (PH), podstawowa różnica polega na tym, że w modelu Coxa nie zakłada się konkretnej postaci bazowego hazardu $h_0(t)$. W modelu PH bazowy hazard jest parametrycznie określony, natomiast w modelu Coxa pozostaje nieznany i może mieć dowolny kształt, co sprawia, że estymacja współczynników β jest oparta wyłącznie na względnych hazardach i obserwowanych czasach przeżycia.

3.2 Zadanie 1

Zadanie polega na oszacowaniu parametrów modelu proporcjonalnych hazardów Coxa. Jako zmienną zależną przyjęto *time*, natomiast jako wektor charakterystyk: *age*, *sex*, *ph.ecog* oraz *ph.karno*. Do estymacji modelu wykorzystano funkcję *coxph* z pakietu *survival*.

```
model.cox <- coxph(Surv(time, status) ~ age_new +
                      as.factor(ph.ecog) + ph.karno_new + as.factor(sex), data = lung_new)
```

W poniższej tabeli przedstawiono współczynniki modelu. Ich interpretacja znajduje się w kolejnym zadaniu.

Tabela 4: Współczynniki modelu Coxa

Charakterystyka	Wartość współczynnika β	$\exp(\beta)$
Wiek	0.013	1.013
ECOG 1	0.578	1.783
ECOG 2	1.240	3.455
ECOG 3	2.396	10.978
Stopień Karnofsky'ego	0.012	1.013
Płeć = 2 (kobieta)	-0.566	0.568

3.3 Zadanie 2

W tym zadaniu zinterpretowane zostały wyznaczone współczynniki dla poszczególnych zmiennych. Współczynniki zostały przedstawione w Tabeli 4. Interpretacja współczynników β_i w modelu Coxa opiera się na ryzyku względnym i hazardzie. Ryzyko względne jednostki o charakterystyce przesuniętej o jeden punkt względem średniej próbki wynosi $\exp(\beta_i)$. Oznacza to, że funkcja hazardu tej jednostki jest równa funkcji hazardu jednostki o średnich wartościach charakterystyk pomnożonej przez $\exp(\beta_i)$, niezależnie od czasu.

Dla wieku każda jednostka wieku powyżej średniego wieku zwiększa hazard zgonu o około 1.3% ($\beta = 0.01256$, $\exp(\beta) \approx 1.0126$).

Hazard zgonu kobiety jest około 43% mniejszy niż hazard mężczyzny ($\beta = -0.5657$, $\exp(\beta) \approx 0.568$).

Jednostka z ECOG równym 1 ma hazard zgonu około 78% wyższy niż jednostka z ECOG równym 0 ($\beta = 0.5781$, $\exp(\beta) \approx 1.783$). Jednostka z ECOG równym 2 ma hazard ponad trzykrotnie większy niż jednostka z ECOG równym 0 ($\beta = 1.2399$, $\exp(\beta) \approx 3.455$), a jednostka z ECOG równym 3 ma hazard niemal 11-krotnie wyższy ($\beta = 2.3959$, $\exp(\beta) \approx 10.978$).

Dla stopnia Karnofsky'ego każdy punkt powyżej średniego wyniku zwiększa hazard zgonu o około 1.25% ($\beta = 0.01242$, $\exp(\beta) \approx 1.0125$).

Efekty są multiplikatywne, zmiana w jednej zmiennej mnoży bazowy hazard $h_0(t)$ przez $\exp(\beta_i)$, a zmiany w różnych zmiennych działają razem poprzez iloczyn tych czynników, określając całkowity hazard jednostki.

3.4 Zadanie 3

Zadanie polega na oszacowaniu bazowej funkcji hazardu oraz bazowej funkcji przeżycia.

W przypadku modelu Coxa funkcja przeżycia jednostki o charakterystyce z ma postać

$$S_z(t) = [S_0(t)]^{\exp(\beta^T z)}.$$

Oszacowanie bazowej funkcji przeżycia uzyskuje się na podstawie oszacowanej bazowej funkcji hazardu

$$\hat{S}_0(t) = \exp \left[- \int_0^t \hat{h}_0(u) du \right] = \exp \left[-\hat{H}_0(t) \right].$$

Do oszacowania bazowej funkcji hazardu wykorzystuje się estymator Breslowa oparty na metodzie częstkowej wiarogodności

$$\hat{H}_0(t) = \sum_{\tau_i \leq t} \frac{1}{\sum_{j \in R(\tau_i)} \exp(\hat{\beta}^T z_j)},$$

gdzie $R(\tau_i)$ jest zbiorem ryzyka, czyli jednostek znajdujących się w ryzyku w chwili τ_i .

W pakiecie R w bibliotece `survival` estymację tę realizuje funkcja `basehaz()`.

```

basehaz_df <- basehaz(model.cox)

surv_df <- data.frame(surv = exp(-basehaz_df$hazard), time = basehaz_df$time)

```

3.5 Zadanie 4

Zadanie polega na oszacowaniu bazowych skumulowanych funkcji hazardu (w dniach) odpowiadających rozkładowi czasu życia dwóch 70-letnich kobiet o tej samej wartości stopnia Karnofsky'ego równym 90 oraz różnicowanej wartości charakterystyki ECOG wykłoszącym 1 oraz 2. Dane ciągłe zostały wcześniej zcentrowane względem średnich w próbie. Następnie porównano uzyskane estymacje skumulowanej funkcji hazardu.

W modelu Coxa skumulowana funkcja hazardu jednostki o charakterystyce z wyraża się wzorem

$$H_z(t) = H_0(t) \cdot \exp(\beta^T z),$$

Ten wzór wynika bezpośrednio z definicji modelu Coxa:

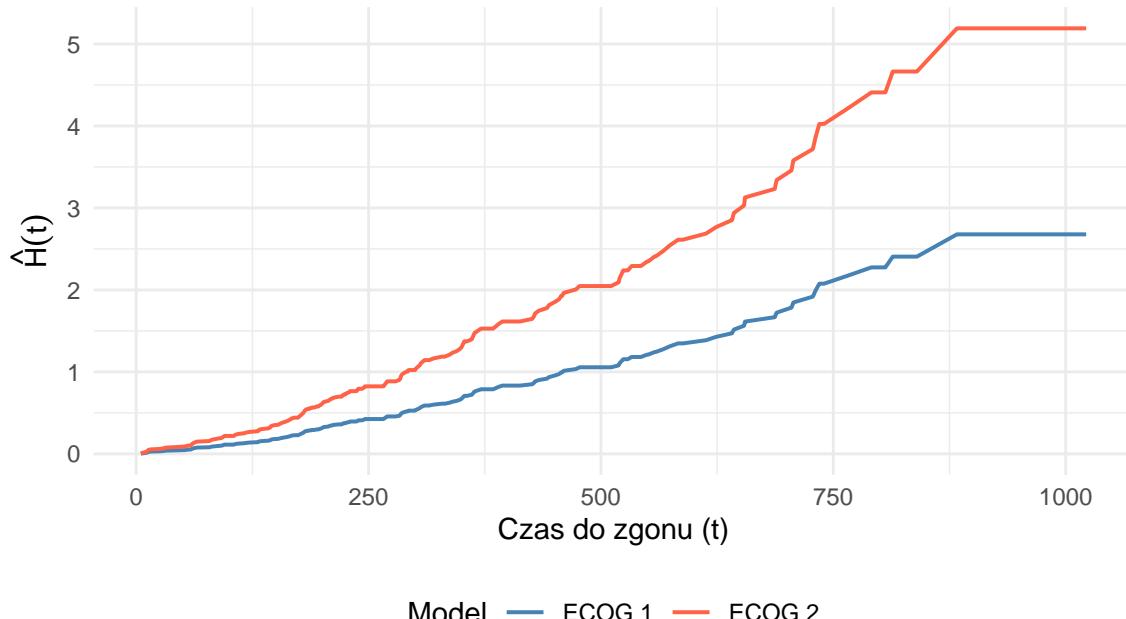
$$h_z(t) = h_0(t) \exp(\beta^T z) \Rightarrow H_z(t) = \int_0^t h_z(u) du = \int_0^t h_0(u) du \cdot \exp(\beta^T z) = H_0(t) \exp(\beta^T z).$$

```

cum_hazard <- function(model, z) {
  basehazard <- basehaz(model)
  hazard <- basehazard$hazard * exp(sum(model$coefficients * z))
  data.frame(time = basehazard$time, hazard = hazard, loghazard = log(hazard))
}

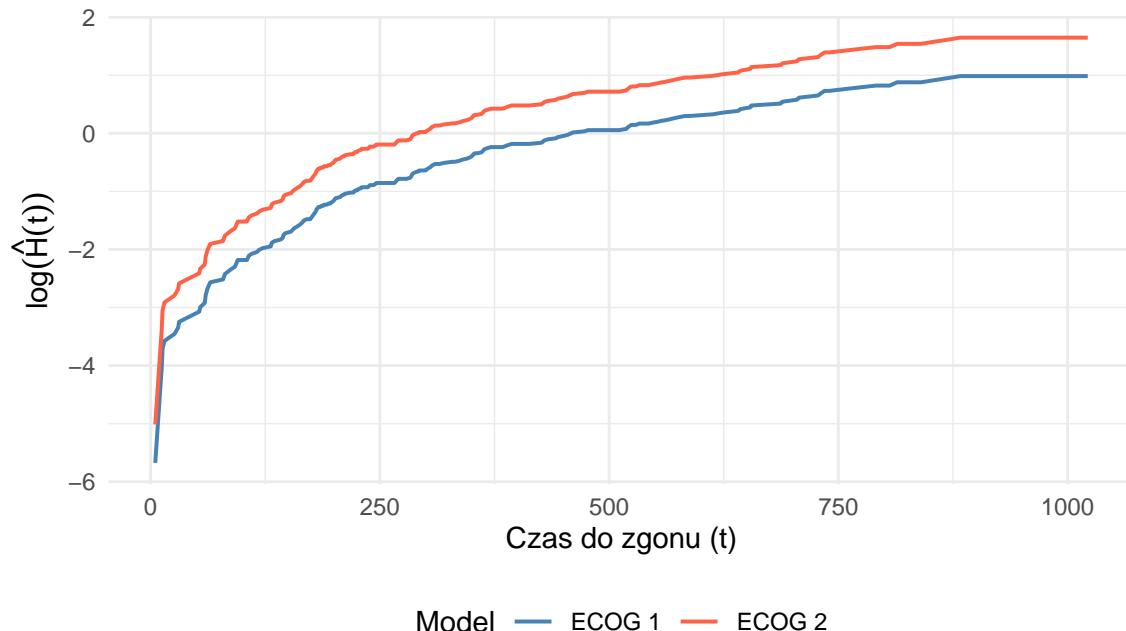
cum_hazard_1 <- cum_hazard(model.cox, z1)
cum_hazard_2 <- cum_hazard(model.cox, z2)

```



Wykres 6: Estymowana skumulowana funkcja hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model Cox'a

Z Wykresu 6. można odczytać że skumulowany hazard dla kobiety o charakterystyce ECOG równej 2, jest większy niż dla kobiety o charakterystyce ECOG równej 1, co oznacza, że do danego momentu czasu kobieta z gorszym stanem ogólnym zdrowia (ECOG = 2) zgromadziła większe łączne ryzyko zgonu, a w konsekwencji odpowiadająca jej funkcja przeżycia przyjmuje mniejsze wartości w porównaniu z funkcją przeżycia kobiety o charakterystyce ECOG = 1.



Wykres 7: Logarytm estymowanej skumulowanej funkcja hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model Cox'a

Na Wykresie 7. można zobaczyć, że logarytmy skumulowanej funkcji hazardu mają bardzo podobny kształt i wyglądają jakby były względem siebie przesunięte o stałą wartość w górę, co jest zgodne z założeniem modelu proporcjonalnych hazardów, zgodnie z którym różnica logarytmów skumulowanych hazardów nie zależy od czasu.



Wykres 8: Różnica logarytmów estymowanej skumulowanej funkcji hazardu dla odpowiednich charakterystyk 70-letnich kobiet - model Cox'a

Na Wykresie 8. przedstawiono różnicę logarytmów skumulowanej funkcji hazardu, która dla wszystkich argumentów pozostaje stała, co oznacza to, że iloraz skumulowanych hazardów nie zależy od czasu.

Można łatwo pokazać, że w modelu Coxa zachodzi

$$\frac{H_{z_1}(t)}{H_{z_2}(t)} = \frac{\exp(\beta^T z_1) H_0(t)}{\exp(\beta^T z_2) H_0(t)} = \exp(\beta^T (z_1 - z_2)) = \frac{h_{z_1}(t)}{h_{z_2}(t)}.$$

Po zalogarytmowaniu otrzymujemy

$$\log H_{z_1}(t) - \log H_{z_2}(t) = \beta^T (z_1 - z_2) = \log h_{z_1}(t) - \log h_{z_2}(t),$$

czyli różnica logarytmów skumulowanych funkcji hazardu oraz różnica logarytmów funkcji hazardu jest stała w czasie.

W konsekwencji, na podstawie wykresów nie ma podstaw do wątpienia w poprawność przyjętego modelu proporcjonalnych hazardów, gdyż założenie proporcjonalności hazardów jest spełnione.

3.6 Zadanie 5

Zadanie polega na oszacowaniu funkcji przeżycia (w dniach) odpowiadającej rozkładowi czasu życia 70-letnich kobiet o takiej samej o tej samej wartości stopnia Karnofsky'ego równym 90 oraz zróżnicowanej wartości charakterystyki ECOG wykoszącym 1 oraz 2. Dane ciągłe zostały wcześniej zcentrowane względem średnich w próbie.

```
surv_cox <- function(model, z){
  basehaz <- basehaz(model)
  hazard <- basehaz$hazard * exp(sum(model$coefficients * z))
  surv <- exp(-hazard)
```

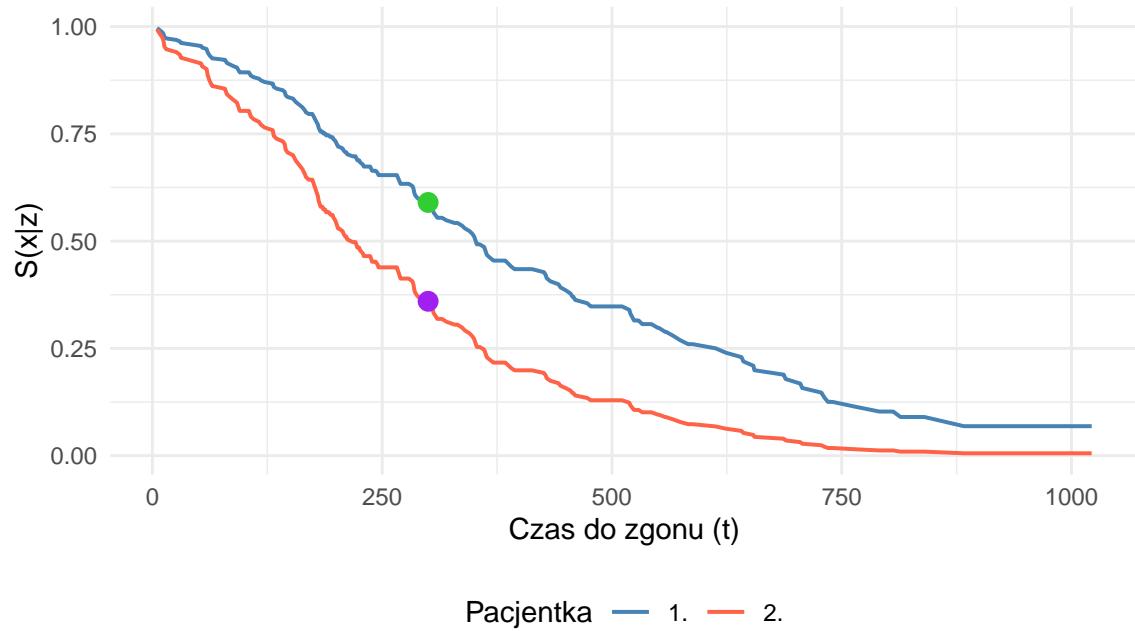
```

  data.frame(time = basehaz$time, survival = surv)
}

surv_at_time <- function(surv_df, t) {
  idx <- which.min(abs(surv_df$time - t))
  surv_df$survival[idx]
}

df_surv_z1 <- surv_cox(model.cox, z1)
df_surv_z2 <- surv_cox(model.cox, z2)

```



Wykres 9: Estymacja funkcji przeżycia w modelu Coxa dla różnych charakterystyk - pacjentek

Na Wykresie ??., widać różne funkcje przeżycia dla różnych charakterystyk - pacjentek. Prawdopodobieństwo przeżycia kobiety o niższej charakterystyce ECOG jest większe dla każdego czasu.

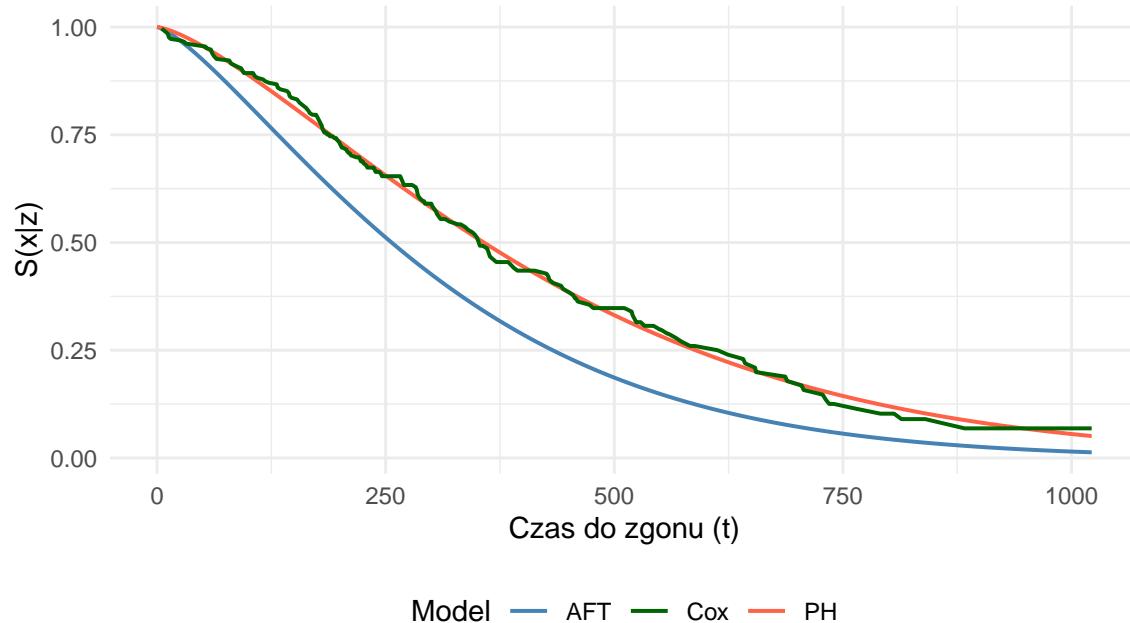
Tabela 5: Estymowana funkcja przeżycia dla czasu $t = 300$ w procentach - porównanie modeli

	AFT	PH	Cox
Pacjentka 1	42.60	58.06	59.01
Pacjentka 2	11.55	33.45	35.98

Porównując prawdopodobieństwa z Tabeli 5., można dojść do wniosku, że estymowane prawdopodobieństwa w modelu AFT są mniejsze niż w pozostałych dwóch modelach. Estymowane wartości dla modeli PH i Cox są do siebie bardzo zbliżone, co może sugerować, że nawet mimo braku założenia konkretnego rozkładu w modelu Coxa, wyniki są zbliżone do tych uzyskanych przy rozkładzie Weibulla stosowanym w modelu PH.

3.7 Zadanie 6

W tym zadaniu narysowano wykresy estymowanej funkcji przeżycia dla 70-letniej kobiety o stopniu sprawności fizycznej ECOG równym 1 oraz stopniu Karnofsky równym 90 dla modeli AFT, PH oraz Coxa.



Wykres 10: Porównanie estymowanych funkcji przeżycia - modele AFT, PH oraz Coxa

Na Wykresie 10. przedstawiono estymowane funkcje przeżycia, uzyskane za pomocą modeli AFT, PH oraz Coxa. Model AFT estymuje wartości funkcji przeżycia nieco mniejsze niż modele Coxa i PH. Modele PH i Coxa są do siebie bardzo podobne, co sugeruje, że założenie w modelu PH dotyczące rozkładu Weibulla było trafne.

4 Lista 11

TO DO

4.1 Zadanie 1

TO DO

4.2 Zadanie 2

TO DO

5 Zadanie dodatkowe

5.1 Zadanie 1

TO DO

5.2 Zadanie 2

TO DO

6 Bibliografia

- [1] *Skala Karnofsky'ego*, Wikipedia, https://pl.wikipedia.org/wiki/Skala_Karnofsky%C5%82ego, dostęp: 22.12.2025.
- [2] *Skala ECOG*, Wikipedia, https://pl.wikipedia.org/wiki/Skala_ECOG, dostęp: 22.12.2025.