

# Analiza Przeżycia

## Raport 2

Wiktor Niedźwiedzki (258882)  
Filip Michewicz (282239)

8 grudnia 2025 Anno Domini

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Lista 5</b>	<b>4</b>
1.1	Zadanie 1 . . . . .	4
1.1.1	Estymator Kaplana-Meiera . . . . .	4
1.1.2	Estymator Fleminga-Harringtona . . . . .	5
1.2	Zadanie 2 . . . . .	6
1.3	Zadanie 3 . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Lista 6</b>	<b>13</b>
2.1	Zadanie 1 . . . . .	13
2.2	Zadanie 2 . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Lista 7</b>	<b>15</b>
3.1	Zadanie 1 . . . . .	15
3.2	Zadanie 2 . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Lista 8</b>	<b>19</b>
4.1	Zadanie 1 . . . . .	19
4.2	Zadanie 2 . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Zadania dodatkowe</b>	<b>24</b>
5.1	Zadanie 1 . . . . .	24
5.2	Zadanie 2 . . . . .	28
5.3	Zadanie 3 . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>

## Spis wykresów

1	Estymator Kaplana-Meiera dla danych dotyczących leków . . . . .	5
2	Estymator Fleminga-Harringtona dla danych dotyczących leków . . . . .	6
3	Estymator Kaplana-Meiera wraz z ogonem Browna, Hollandera i Kowara dla danych dotyczących leków . . . . .	8
4	Histogram oszacowań funkcji przeżycia w punktach $t_0$ oraz $2t_0$ - liczność próby $n = 30$ . . . .	10
5	Histogram oszacowań funkcji przeżycia w punktach $t_0$ oraz $2t_0$ - liczność próby $n = 50$ . . . .	11
6	Histogram oszacowań funkcji przeżycia w punktach $t_0$ oraz $2t_0$ - liczność próby $n = 100$ . . .	11
7	Wagi testów nieparametrycznych dla porównania rozkładów czasów przeżycia - Mayo Clinic .	22
8	Estymator Kaplana-Meiera dla danych dotyczących pacjentek z rakiem jajnika - Mayo Clinic	22
9	Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych klinicznych pacjentów . . . . .	35
10	Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych dotyczących leków - lek A . . . . .	35
11	Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych dotyczących leków - lek B . . . . .	36
12	Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych dotyczących pacjentów z rakiem jajnika - typ II . . . . .	36
13	Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych dotyczących pacjentów z rakiem jajnika - typ IIIA . . . . .	37

## Spis tabel

1	Wartości $p$ testu Shapiro-Wilka dla oszacowań funkcji przeżycia w punktach $t_0$ oraz $2t_0$ . . .	12
2	Średni czas życia estymowany metodami Kaplana-Meiera oraz Fleminga-Harringtona . . . . .	14

3	Realizacje przedziałów przeżycia dla pacjentek z rakiem jajnika typu II i typu IIIA - Mayo Clinic - $\tau = 1460$ . . . . .	18
4	Realizacje przedziałów przeżycia dla pacjentek z rakiem jajnika typu II i typu IIIA - Mayo Clinic - $\tau = 1825$ . . . . .	18
5	Wartości $p$ -value dla testów czasu do progresji choroby weryfikujących hipotezę o jednakowym rozkładzie w grupach pacjentek rakowych kliniki Mayo Clinic . . . . .	20
6	Porównanie asymptotycznych punktowo przedziałów ufności funkcji przeżycia - długość przedziału	27
7	Porównanie asymptotycznych punktowo przedziałów ufności funkcji przeżycia - prawdopodobieństwo pokrycia . . . . .	27

# 1 Lista 5

Lista obejmuje estymatory funkcji przeżycia dla danych niecenzurowanych, w szczególności estymator Kaplana–Meiera oraz estymator Fleminga–Harringtona, zarówno bez korekty, jak i z ogonem estymowanym według propozycji Browna, Hollandera i Kowara. Dodatkowo przeprowadzono oszacowanie wartości funkcji przeżycia w chwili cenzurowania oraz w dwukrotności czasu cenzurowania, na podstawie symulacji dla danych generowanych z uogólnionego rozkładu wykładniczego  $\mathcal{GE}(\lambda, \alpha)$ .

## 1.1 Zadanie 1

W tym zadaniu wygenerowano wykres estymatorów Kaplana–Meiera oraz Fleminga–Harringtona funkcji przeżycia dla danych z zadania 3 z listy 2, których opis przedstawiono w poprzednim raporcie.

### 1.1.1 Estymator Kaplana–Meiera

Estymator Kaplana–Meiera jest nieparametrycznym estymatorem funkcji przeżycia, opartym na iloczynie warunkowych prawdopodobieństw przeżycia kolejnych chwil zdarzeń. Definiuje się go jako

$$\hat{S}(t) = \prod_{i: t_{(i)} \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{r_i}\right),$$

gdzie:

$$r_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{[t_{(i)}, \infty)}(t_j), \quad d_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{t_{(i)}\}}(t_j) \mathbf{1}_{\{1\}}(\delta_j).$$

Wielkość  $r_i$  to liczba obserwacji, które w chwili  $t_{(i)}$  pozostają w stanie ryzyka, czyli dotrwały do czasu  $t_{(i)}$  bez wcześniejszego zdarzenia ani cenzurowania i mogą jeszcze doświadczyć zdarzenia w tym momencie, natomiast  $d_i$  to liczba zdarzeń (niezależnych od cenzurowania) zachodzących dokładnie w czasie  $t_{(i)}$ .

Estymator Kaplana–Meiera nie został zdefiniowany ręcznie w tym raporcie, lecz jego implementacja znajduje się w bibliotece `survival` w pakiecie R. Funkcja `survfit` domyślnie dopasowuje dane w formacie `Surv`, czyli takim, w którym określone są czasy obserwacji oraz wskaźniki cenzurowania, i domyślnie używa estymatora Kaplana–Meiera.

Poniżej przedstawiono blok kodu w R, który realizuje estymację funkcji przeżycia za pomocą tego estymatora:

```
surv.A <- Surv(df.A$times, df.A$deltas)
surv.B <- Surv(df.B$times, df.B$deltas)

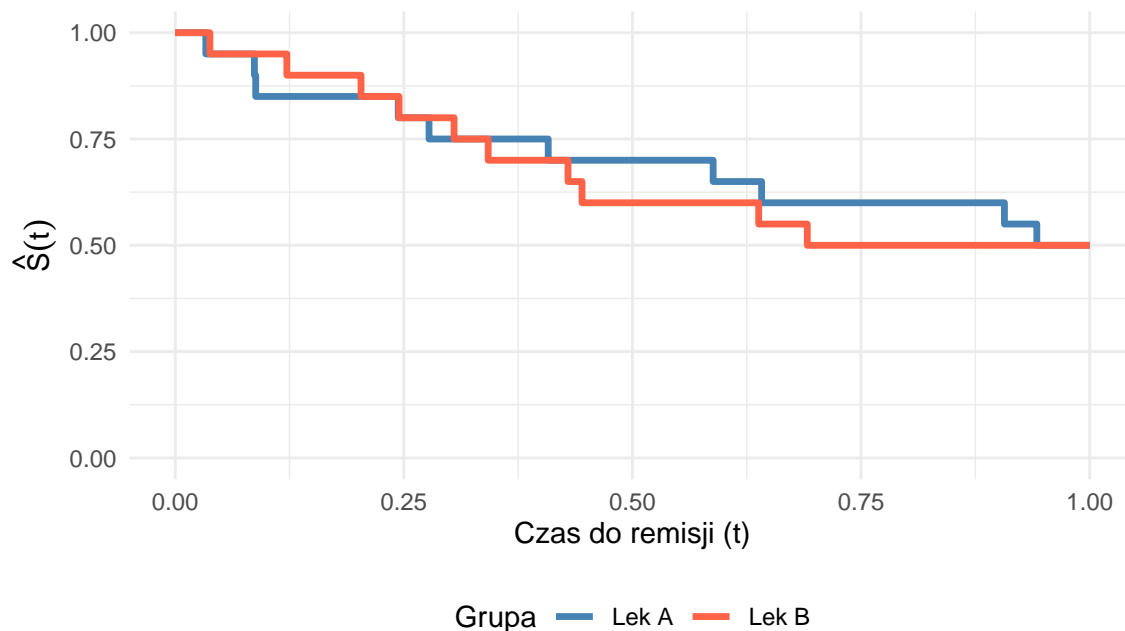
# Estymator Kaplana–Meiera
fit.KM.A <- survfit(surv.A ~ 1)
fit.KM.B <- survfit(surv.B ~ 1)

# Ramki danych do wykresu
plot.A <- data.frame(time = c(0, fit.KM.A$time),
                     surv = c(1, fit.KM.A$surv),
                     group = "A")

plot.B <- data.frame(time = c(0, fit.KM.B$time),
                     surv = c(1, fit.KM.B$surv),
                     group = "B")

plot.df <- rbind(plot.A, plot.B)
```

Poniżej przedstawiono wykres estymowanej funkcji przeżycia uzyskanej przy użyciu estymatora Kaplana–Meiera dla danych z zadania 3 z listy 2.



Wykres 1: Estymator Kaplana–Meiera dla danych dotyczących leków

Wykres 1. przedstawia estymowaną funkcję przeżycia za pomocą estymatora Kaplana–Meiera. Dane w obu przypadkach są prawostronnie cenzurowane typu I, zatem największe wartości w zbiorach danych są cenzurowane, a po ostatnim pełnym (niecenzurowanym) czasie występują obserwacje cenzurowane, przez co estymator nie jest określony dla  $t > t_{(n)}$ . Dlatego do czasu  $t \leq t_{(n)}$  estymator Kaplana–Meiera jest dobrze określony. W przypadku gdyby obserwacja  $t_{(n)}$  była kompletna, to dla  $t > t_{(n)}$  estymator wynosiłby  $\hat{S}(t) = 0$ .

### 1.1.2 Estymator Fleminga–Harringtona

Estymator Fleminga–Harringtona jest estymatorem funkcji przeżycia, opartym na zależności między funkcją przeżycia a funkcją skumulowanego hazardu; wykorzystuje estymator funkcji hazardu, a w konsekwencji skumulowanej funkcji hazardu zaproponowany przez Nelsona–Aalena. Szczegóły dotyczące konstrukcji estymatora i jego relacji do funkcji skumulowanego hazardu przedstawiono na wykładzie. Funkcję przeżycia estymuje się według wzoru:

$$\tilde{S}(t) = \exp \left( - \sum_{j: t_{(j)} \leq t} \frac{d_j}{r_j} \right), \quad 0 \leq t \leq t_{(n)}$$

gdzie  $d_j$  to liczba zdarzeń w chwili  $t_{(j)}$ , a  $r_j$  - liczba obserwacji pozostających w stanie ryzyka w czasie  $t_{(j)}$ .

Podobnie jak w poprzednim podpunkcie, estymator Fleminga–Harringtona nie został zdefiniowany ręcznie w tym raporcie, lecz jego implementacja znajduje się w bibliotece `survival` w pakiecie R. Tym razem w funkcji `survfit` zastosowano opcję `type = "fleming-harrington"`.

Poniżej przedstawiono blok kodu w R, który realizuje estymację funkcji przeżycia za pomocą tego estymatora:

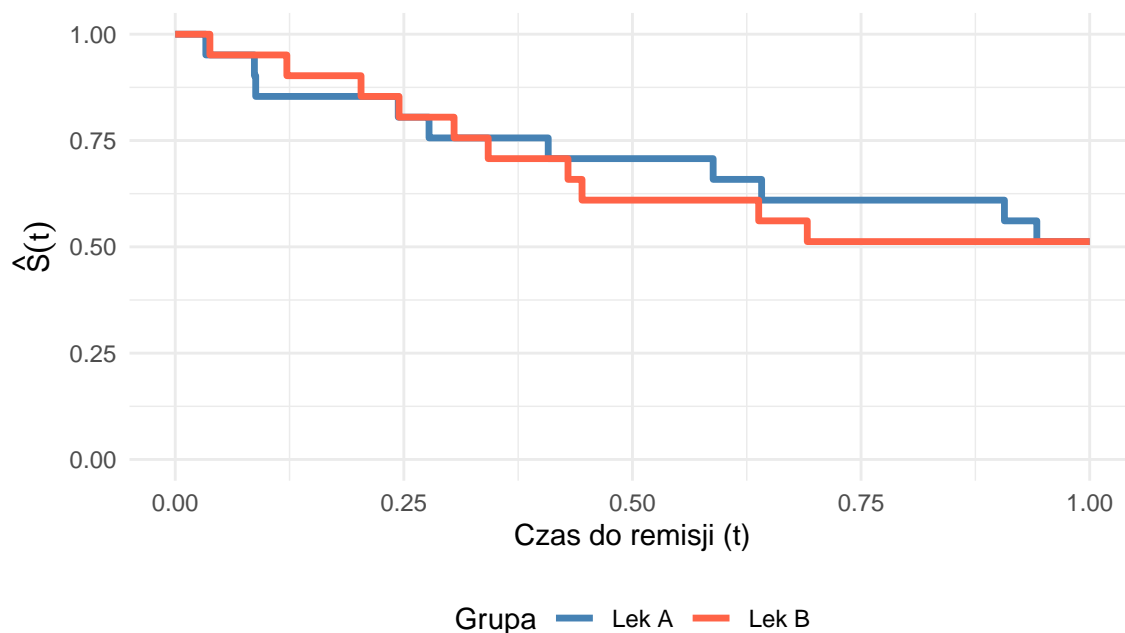
```
# Estymator Fleminga-Harringtona
fit.FH.A <- survfit(surv.A ~ 1, type = "fleming-harrington")
fit.FH.B <- survfit(surv.B ~ 1, type = "fleming-harrington")
```

```
# Ramki danych do wykresu
plot.A <- data.frame(time = c(0, fit.FH.A$time),
                     surv = c(1, fit.FH.A$surv),
                     group = "A")

plot.B <- data.frame(time = c(0, fit.FH.B$time),
                     surv = c(1, fit.FH.B$surv),
                     group = "B")

plot.df <- rbind(plot.A, plot.B)
```

Poniżej przedstawiono wykres estymowanej funkcji przeżycia uzyskanej przy użyciu estymatora Fleminga-Harringtona.



Wykres 2: Estymator Fleminga-Harringtona dla danych dotyczących leków

Wykres 2. przedstawia estymowaną funkcję przeżycia za pomocą estymatora Fleminga-Harringtona. Uwagi dotyczące bycia dobrze określonym są analogiczne jak do estymatora Kaplana-Meiera.

Obydwa estymatory dają podobne wyniki. W krótkim czasie lek B wydaje się korzystniejszy (wyższa funkcja przeżycia, dłuższy czas do remisji), natomiast dla  $t > 0,5$  bardziej efektywny staje się lek A. Do dokładniejszej analizy warto zastosować, np. test Kołmogorowa-Smirnowa.

## 1.2 Zadanie 2

Zadanie dotyczy generowania wykresu funkcji przeżycia estymowanej metodą Kaplana-Meiera, z uwzględnieniem oszacowania ogona funkcji przeżycia, zaproponowanego przez Browna, Hollandera i Kowara.

Brown, Hollander i Kowar sugerowali oszacowanie ogona funkcji przeżycia przez odpowiednio dobraną funkcję przeżycia rozkładu wykładniczego, taką, aby w punkcie  $t^+$  (ostatnim zarejestrowanym czasie) była równa  $S(t^+)$ .

Po krótkich obliczeniach przeprowadzonych na wykładzie otrzymuje się:

$$\hat{S}(t) = \exp\left(\frac{\ln \hat{S}(t^+)}{t^+} t\right), \quad t > t^+.$$

Dla  $t \leq t^+$  stosuje się klasyczny estymator Kaplana–Meiera.

Poniżej przedstawiono blok kodu w R, który umożliwia estymację funkcji przeżycia wraz z uwzględnieniem ogona.

```
BHK.tail <- function(df, end = 3, type = "kaplan-meier") {
  # Estymator KM
  fit <- survfit(Surv(df$times, df$deltas) ~ 1, type = type)
  df.complete <- data.frame(time = fit$time,
                             surv = fit$surv)

  # Ogin
  t.plus <- tail(df.complete$time, 1)
  S.plus <- tail(df.complete$surv, 1)

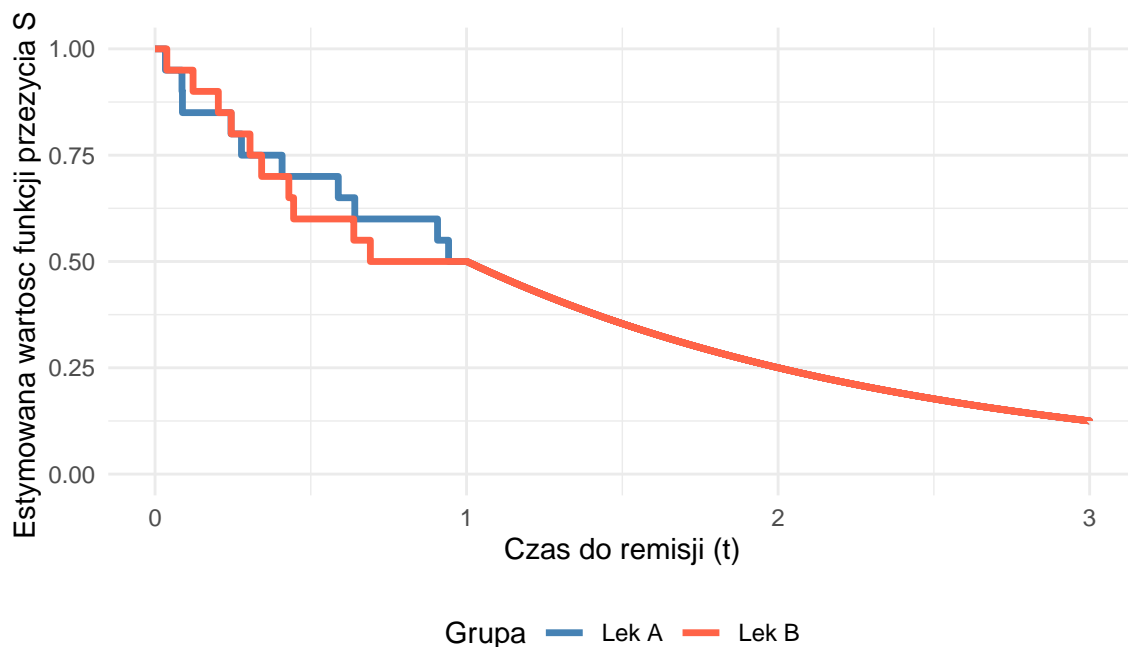
  theta <- -log(S.plus) / t.plus

  # Generowanie ogona
  time.tail <- seq(t.plus, end, length.out = 1000)
  surv.tail <- exp(-theta * time.tail)
  df.tail <- data.frame(time = time.tail, surv = surv.tail)

  df.complete <- rbind(df.complete, df.tail)

  # Dodanie punktu początkowego
  df.complete <- rbind(data.frame(time = 0, surv = 1), df.complete)
  return(df.complete)
}
```

Poniżej przedstawiono wykres estymowanej funkcji przeżycia uzyskanej przy użyciu estymatora Kaplana–Meiera wraz z ogonem dla danych z zadania 3 z listy 2.



Wykres 3: Estymator Kaplana-Meiera wraz z ogonem Browna, Hollandera i Kowara dla danych dotyczących leków

Wykres 3. przedstawia estymator Kaplana–Meiera wraz z ogonem zaproponowanym przez Browna, Hollandera i Kowara dla danych dotyczących leków. Do czasu ostatniej obserwacji kompletnej wykorzystano klasyczny estymator Kaplana–Meiera, natomiast dla czasów przekraczających tę obserwację wartość funkcji przeżycia (tzw. ogon) estymowana jest przy użyciu odpowiednio dobranej funkcji wykładniczej. Warto zauważyć, że estymowana funkcja jest ciągła w punkcie  $t^+$ . Ze względu na to, że  $t_A^+ = t_B^+ = t_0 = 1$ , ogony w obu grupach pokrywają się.

### 1.3 Zadanie 3

Zadanie polega na wygenerowaniu  $M = 1000$  zbiorów danych cenzurowanych I-go typu z uogólnionego rozkładu wykładniczego  $\mathcal{GE}(\lambda, \alpha)$  dla  $\alpha = 2$  i  $\lambda = 2$ , przy liczebnościach próby  $n = 30, 50, 100$ . Wartość  $t_0$  przyjęto równą wartości oczekiwanej rozkładu  $\mathcal{GE}(\lambda, \alpha)$  [1]:

$$t_0 = \frac{(\psi(\alpha + 1) - \psi(1))}{\lambda}$$

gdzie  $\psi(\cdot)$  jest funkcją digamma, tj. logarytmiczną pochodną funkcji gamma.

Na podstawie wygenerowanych zbiorów danych oszacowano wartość funkcji przeżycia w punktach  $t_0$  i  $2t_0$ , korzystając z estymatora Kaplana–Meiera z uwzględnieniem ogona estymowanego zgodnie z propozycją Browna, Hollandera i Kowara. Ostatecznie wygenerowano histogramy oszacowań w tych punktach dla każdego  $n$  i oceniono, czy istnieją podstawy do przypuszczenia, że estymator Kaplana–Meiera jest asymptotycznie normalny.

Konstrukcja estymatora Kaplana–Meiera wraz z “ogonem” została omówiona w dwóch poprzednich zadaniach i nie będzie tutaj ponownie przytaczana.

Poniżej przedstawiono blok kodu w pakiecie R wyznaczający, za pomocą estymatora Kaplana–Meiera z “ogonem”, estymowaną wartość funkcji przeżycia w punkcie  $t$ .



```

KM.surv.value <- function(df, type = "kaplan-meier", t) {
  # Estymator KM
  fit <- survfit(Surv(df$times, df$deltas) ~ 1, type = type)
  event_idx <- which(fit$n.event > 0)
  df.complete <- data.frame(time = fit$time[event_idx],
                           surv = fit$surv[event_idx])

  df.complete <- data.frame(time = fit$time, surv = fit$surv)

  t_plus <- tail(df.complete$time, 1)

  if (t <= t_plus) {
    value <- df.complete$surv[max(which(df.complete$time <= t))]
  } else {
    S_plus <- tail(df.complete$surv, 1)

    theta <- -log(S_plus) / t_plus

    value <- exp(-theta * t)
  }
  return(value)
}

```

Poniżej przedstawiono blok kodu w pakiecie R przeprowadzający opisaną na początku zadania symulację. W trakcie obliczeń zapisywane są estymowane wartości funkcji przeżycia w punktach  $t_0$  oraz  $2t_0$ . Na podstawie wyników sporządzono stosowne histogramy.

```

M <- 1000
n_values <- c(30, 50, 100)
alpha <- 2
lambda <- 2

t0 <- (digamma(alpha + 1) - digamma(1)) / lambda

results_t0 <- list()
results_2t0 <- list()

for (n in n_values) {
  surv_t0 <- numeric(M)
  surv_2t0 <- numeric(M)

  m <- 0
  while (m < M) {
    # generowanie danych cenzurowanych I typu
    cenzurowane <- GE.cenzurowanie_I_typu(t0, alpha, lambda, n)
    if (sum(cenzurowane$deltas) == 0) {
      next
    }
    m <- m + 1

    # estymator KM z "ogonem" w t0
    surv_t0[m] <- KM.surv.value(cenzurowane, t = t0)

    # estymator KM z "ogonem" w 2*t0

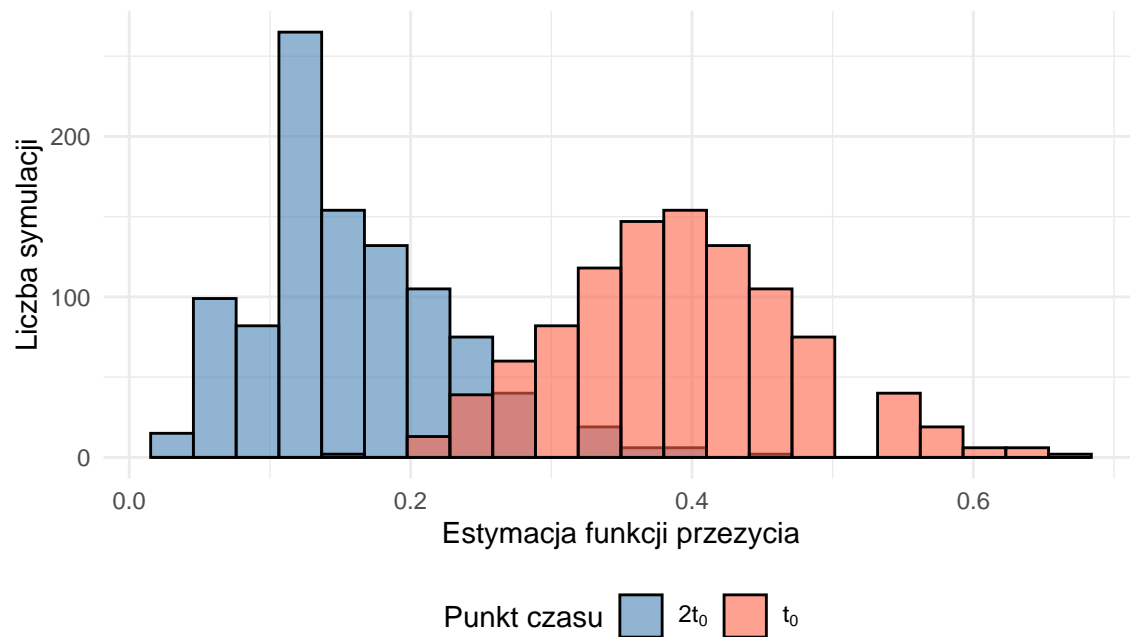
```

```

surv_2t0[m] <- KM.surv.value(cenzurowane, t = 2*t0)
}

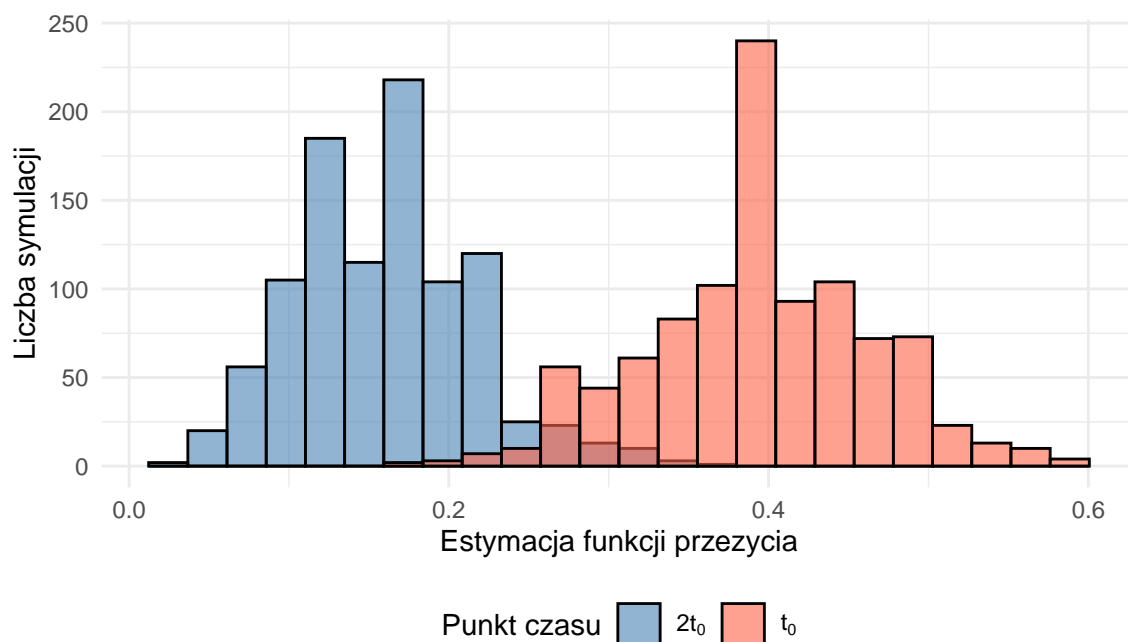
results_t0[[as.character(n)]] <- surv_t0
results_2t0[[as.character(n)]] <- surv_2t0
}

```

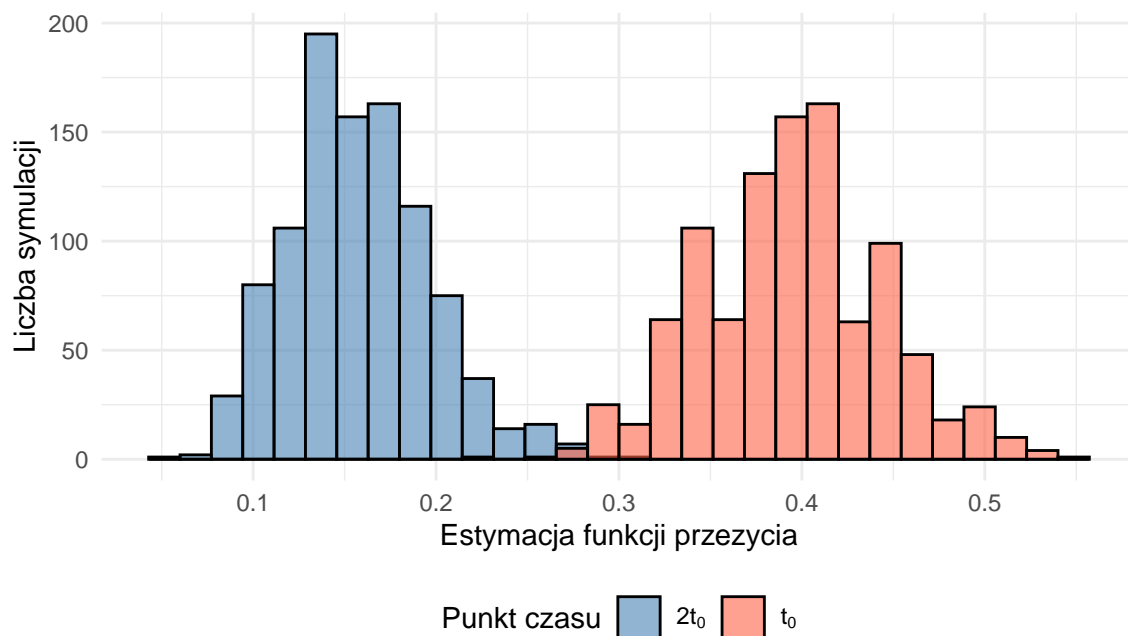


Wykres 4: Histogram oszacowań funkcji przeżycia w punktach  $t_0$  oraz  $2t_0$  - licznosc próby  $n = 30$

Wykres 4. przedstawia estymowaną wartość funkcji przeżycia w punktach  $t_0$  oraz  $2t_0$  dla próby o licznosci  $n = 30$ . Estymowane wartości dla  $2t_0$  są mniejsze niż dla  $t_0$  co zgadza się z oczekiwaniami.



Wykres 5. przedstawia estymowaną wartość funkcji przeżycia w punktach  $t_0$  oraz  $2t_0$  dla próby o licznosci  $n = 50$ . W porównaniu z próbą o licznosci  $n = 30$  przedstawionej na Wykresie 4. estymowane wartości przesunęły się ku mniejszym wartościom.



Wykres 6. przedstawia estymowaną wartość funkcji przeżycia w punktach  $t_0$  oraz  $2t_0$  dla próby o licznosci  $n = 100$ . Podobnie jak na poprzednim Wykresie wraz ze wzrostem próby wartości przesunęły się ku mniejszym wartościom.

Wraz ze wzrostem liczności próby, histogramy z poprzednich wykresów układają się w kształt dzwonowy charakterystyczny dla rozkładu normalnego. To z kolei pozwala przypuszczać, że estymator Kaplana–Meiera jest asymptotycznie normalny w punktach  $t_0$  oraz  $2t_0$ . Do dalszej analizy wykorzystano test Shapiro-Wilka, który w pakiecie R dostępny jest w funkcji `shapiro.test` z pakietu `stats`.

Tabela 1: Wartości  $p$  testu Shapiro-Wilka dla oszacowań funkcji przeżycia w punktach  $t_0$  oraz  $2t_0$

n	$t_0$	$2t_0$
30	0.000000015	0.0e+00
50	0.000036425	0.0e+00
100	0.003136258	1.2e-08

Z Tabeli 1. można odczytać że dla wszystkich przypadków  $p$ -value jest równe zero lub bliskie zera, a zatem dla prawie każdego poziomu  $\alpha$  powinno się odrzucić hipotezę o normalności rozkładów, zarówno dla punktu  $t_0$ , jak i  $2t_0$ .

## 2 Lista 6

Lista dotyczy estymacji średniego czasu życia w oparciu o estymatory Kaplana–Meiera oraz Fleminga–Harringtona, z uwzględnieniem szacowania “ogona” zaproponowanego przez Browna, Hollandera i Kowara. Dodatkowo dokonano estymacji średniego czasu życia dla danych pochodzących z zadania 3 z listy 2.

### 2.1 Zadanie 1

Zadanie polega na zdefiniowaniu funkcji obliczającej średni czas życia w oparciu o estymatory Kaplana–Meiera oraz Fleminga–Harringtona, z uwzględnieniem ogona wykładniczego według propozycji Browna, Hollandera i Kowara. Ze względu na podobieństwo wyglądu wynikowego estymatora dla obu metod, obliczenia zostaną przeprowadzone w uogólnionym przypadku.

Wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $X$ , absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue’a, można oszacować na dwa sposoby:

1. Obliczając

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx,$$

gdzie  $f(x)$  jest funkcją gęstości rozkładu zmiennej losowej ( $X$ ).

2. Jeżeli rozkład  $X$  ma nośnik  $(0, \infty)$ , to obliczając:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} S(x) dx,$$

czyli poprzez całkowanie ogona funkcji przeżycia  $S(x)$ .

Jako że zarówno estymator Kaplana–Meiera, jak i Fleminga–Harringtona są estymatorami funkcji przeżycia, wartość oczekiwaną zmiennej losowej można oszacować za pomocą wzoru:

$$\hat{\mu} = \int_0^{\infty} \hat{S}(x) dx,$$

gdzie  $\hat{S}(x)$  oznacza estymowaną funkcję przeżycia, a  $\hat{\mu}$  - średni czas życia.

Ze względu na to że  $\hat{S}(x)$  na przedziale  $(0, t^+)$  jest funkcją schodkową, dlatego  $\hat{\mu}$  będzie obliczana według wzoru:

$$\hat{\mu} = \sum_{i: t_{(i)} \leq t^+} \hat{S}(t_{(i-1)}) (t_{(i)} - t_{(i-1)}), \quad t_{(0)} := 0,$$

gdzie  $\hat{S}(t_{(i)})$  to wartość estymatora funkcji przeżycia w chwili  $t_{(i)}$ , a sumowanie jest wykonywane tylko do czasu ostatniej obserwacji  $t^+$ . Powyżej  $t^+$  obydwie estymatory są nieokreślone.

Jeżeli natomiast estymator będzie zawierał “ogon” według propozycji Browna, Hollandera i Kowara należy powiększyć wartość  $\hat{\mu}$  o wartość oczekiwaną na tym właśnie “ogonie”.

$$\begin{aligned} \int_{t^+}^{\infty} e^{-\theta t} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{t^+}^b e^{-\theta t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\theta} e^{-\theta t} \right]_{t^+}^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\theta} e^{-\theta b} + \frac{1}{\theta} e^{-\theta t^+} \right) = \frac{e^{-\theta t^+}}{\theta} = \frac{S(t^+) \cdot t^+}{-\ln S(t^+)} \end{aligned}$$

Ostatecznie estymowana wartość oczekiwana obliczana jest ze wzoru:

$$\hat{\mu} = \sum_{i:, t_{(i)} \leq t^+} \hat{S}(t_{(i)-1}) (t_{(i)} - t_{(i-1)}) - \frac{S(t^+) \cdot t^+}{\ln S(t^+)}, \quad t_{(0)} := 0, \quad \hat{S}(t_{(0)}) = 1$$

Poniżej przedstawiono blok kodu w R obliczający średni czas życia. Parametr `type` pozwala wybrać, czy obliczenia mają być wykonane dla estymatora Kaplana–Meiera czy Fleminga–Harringtona, natomiast parametr `tail` określa, czy ma być uwzględniony ogon wykładniczy według propozycji Browna, Hollandera i Kowara.

```
expected.life <- function(df, type = "kaplan-meier", tail = FALSE) {
  fit <- survfit(Surv(df$times, df$deltas) ~ 1, type = type)

  df.complete <- data.frame(time = c(0, fit$time),
                             surv = c(1, fit$surv))

  # dyskretna całka
  dt <- diff(df.complete$time)
  surv_val <- head(df.complete$surv, -1)
  integral.KM <- sum(surv_val * dt)

  # ogon wykładniczy
  if (tail) {
    t_plus <- tail(df.complete$time, 1)
    S_plus <- tail(df.complete$surv, 1)
    theta <- -log(S_plus) / t_plus
    tail_integral <- S_plus / theta
    return(integral.KM + tail_integral)
  }

  return(integral.KM)
}
```

## 2.2 Zadanie 2

Zadanie polega na wykorzystaniu napisanej w poprzednim zadaniu funkcji do oszacowania średniego czasu do emisji choroby pacjentów leczonym lekiem A i lekiem B na podstawie danych z zadania 3 z listy 2.

Wyniki przedstawiono w tabelach poniżej.

Tabela 2: Średni czas życia estymowany metodami Kaplana–Meiera oraz Fleminga–Harringtona

	Lek A	Lek B
Kaplan–Meier	1.432	1.394
Fleming–Harrington	1.484	1.447

Tabela 2. przedstawia średni czas życia estymowany metodami Kaplana–Meiera oraz Fleminga–Harringtona, wraz z szacowanym ogonem sposobem Browna, Hollandera i Kowara. W obu grupach estymatory wskazują, że średni czas życia w grupie przyjmującej lek A jest większy niż w grupie przyjmującej lek B. Estymator Fleminga–Harringtona zwraca nieco wyższe wartości średniego czasu życia niż estymator Kaplana–Meiera, co wynika z samej konstrukcji estymatora i sposobu ważenia obserwacji cenzurowanych.

### 3 Lista 7

Lista polega na napisaniu funkcji która na podstawie danych cenzurowanych losowo oblicza dolną i górną granicę przedziału ufności dla średniego czasu życia na zadanym poziomie ufności  $1 - \alpha$  oraz dla określonej wartości  $\tau$ , która odzwierciedla naszą wiedzę a priori o maksymalnym czasie do wystąpienia zdarzenia. Następnie, wykorzystując rzeczywiste dane z badania Mayo Clinic dotyczące czasu do progresji choroby w dwóch grupach pacjentek, zastosowano tę funkcję do wyznaczenia przedziałów ufności dla wybranych wartości  $\tau$  i porównano otrzymane wyniki między grupami.

#### 3.1 Zadanie 1

Zadanie polega na zdefiniowaniu funkcji, która dla zadanych danych, poziomu istotności  $\alpha$  oraz wartości  $\tau$  (odzwierciedlającej naszą wiedzę a priori o maksymalnym czasie do wystąpienia zdarzenia) zwraca dolną i górną granicę przedziału ufności dla średniego czasu życia, na poziomie ufności  $1 - \alpha$ .

Do wyznaczenia przedziałów ufności skorzystano z twierdzenia że, jeśli  $F$  i  $G$  są dystrybuantami odpowiednio czasu życia i czasu cenzurowania, ciągłymi na przedziale  $[0, T]$ , a ponadto  $F(T) < 1$ , to zachodzi zbieżność

$$\frac{\hat{\mu}_\tau - \mu}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\mu}_\tau)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Wynika z tego, że przedział ufności postaci  $[T_L, T_U]$ , gdzie

$$T_L = \hat{\mu}_\tau - z(1 - \alpha/2)\sqrt{\hat{V}(\hat{\mu}_\tau)},$$

$$T_U = \hat{\mu}_\tau + z(1 - \alpha/2)\sqrt{\hat{V}(\hat{\mu}_\tau)},$$

jest asymptotycznym punktowym przedziałem ufności dla wartości średniej  $\mu$  rozkładu czasu życia na poziomie ufności  $1 - \alpha$ . Zmienna  $z(q)$  oznacza kwantyl rzędu  $q$  standardowego rozkładu normalnego.

Estymator  $\hat{\mu}_\tau$  średniego czasu życia ograniczonego do punktu  $\tau$  (restricted mean survival time) jest definiowany jako:

$$\hat{\mu}_\tau = \int_0^\tau \hat{S}(t) dt,$$

gdzie  $\hat{S}(t)$  oznacza estymator Kaplan–Meiera funkcji przeżycia.

Wariancja estymatora  $\hat{\mu}_\tau$  jest przybliżana za pomocą wzoru:

$$\hat{V}(\hat{\mu}_\tau) = \sum_{i=1}^D \left( \int_{s_i}^\tau \hat{S}(t) dt \right)^2 \frac{d_i}{r_i(r_i - d_i)}.$$

gdzie

$$r_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{[s_i, \infty)}(t_j) \quad d_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{s_i\}}(t_j) \mathbf{1}_{\{1\}}(\delta_j),$$

a  $D$  oznacza liczbę zaobserwowanych (niecenzurowanych) zdarzeń, natomiast  $s_i = t_{(i)}$  jest  $i$ -tą statystyką porządkową czasów zdarzeń.

Wielkość  $r_i$  to liczba jednostek znajdujących się w stanie ryzyka w chwili  $t_{(i)}$ , czyli obserwacji, które dotrwały do tego czasu bez wcześniejszego zdarzenia lub cenzurowania. Z kolei  $d_i$  to liczba (niecenzurowanych) zdarzeń występujących dokładnie w chwili  $t_{(i)}$ .

Poniżej przedstawiono blok kodu w języku R zawierający funkcję, która oblicza wartości  $\int_{s_i}^{\tau} \hat{S}(t) dt$  oraz estymator wariancji  $\hat{V}(\hat{\mu}_{\tau})$ , a następnie wyznacza granicę dolną  $T_L$  i górną  $T_U$  asymptotycznego przedziału ufności dla średniego czasu życia, dla zadanego zbioru danych, poziomu istotności  $\alpha$  oraz wartości  $\tau$ .

```
integrate.S <- function(df, a, b) {

  fit <- survfit(Surv(df$times, df$deltas) ~ 1)
  event_idx <- which(fit$n.event > 0)

  df.complete <- data.frame(
    time = c(0, fit$time[event_idx]),
    surv = c(1, fit$surv[event_idx])
  )

  Time <- df.complete$time
  Surv <- df.complete$surv

  # a za ostatnim skokiem - całkowanie po stałej wartości
  if (a >= tail(Time, 1))
    return((b - a) * tail(Surv, 1))

  # Pierwszy punkt > a
  t_idx_candidates <- which(Time > a)
  t_idx <- min(t_idx_candidates)
  prev_idx <- max(1, t_idx - 1) # KM(a) = wartość z poprzedniego skoku

  # pierwszy fragment całki: od a do najbliższego punktu siatki
  integral.S <- Surv[prev_idx] * (Time[t_idx] - a)

  # b przed ostatnim skokiem
  if (b <= tail(Time, 1)) {
    # ostatni punkt < b
    T_idx_candidates <- which(Time < b)
    T_idx <- max(T_idx_candidates)

    # fragment końcowy: od ostatniego punktu < b do b
    integral.S <- integral.S + Surv[T_idx] * (b - Time[T_idx])

    dt <- diff(df.complete$time)
    surv_val <- head(df.complete$surv, -1)

    # środkowa część sumy prostokątów
    if (T_idx - 1 >= t_idx)
      integral.S <- integral.S + sum(surv_val[t_idx:(T_idx - 1)] * dt[t_idx:(T_idx - 1)])
  } else {
    # jeżeli b poza zakresem KM - dopisujemy punkt (b, S.last)
    df.complete <- rbind(df.complete, data.frame(time = b, surv = tail(Surv, 1)))
    dt <- diff(df.complete$time)
    surv_val <- head(df.complete$surv, -1)
  }
}
```



```

    # całkowanie po całej reszcie przedziału
    integral_S <- integral_S + sum(surv_val[t_idx:length(surv_val)] * dt[t_idx:length(dt)])
  }

  return(integral_S)
}

var.estimator <- function(df, tau) {
  Time <- df$times
  Deltas <- df$deltas
  event_times <- sort(unique(Time[Deltas == 1]))
  result <- 0

  for (i in 1:length(event_times)) {
    t_i <- event_times[i]
    d <- 0
    r <- sum(Time >= t_i)
    for (j in 1:length(Time)) {
      if (Time[j] == t_i & Deltas[j] == 1) {
        d <- d + 1
      }
    }
    if (r > d)
      result <- result + (integrate.S(df, t_i, tau))^2 * d / (r * (r - d))
  }
  return(result)
}

confidence.interval <- function(df, alfa, tau) {
  mu <- integrate.S(df, 0, tau)
  kwantyl <- qnorm(1 - alfa / 2)
  std.dev <- sqrt(var.estimator(df, tau))
  T.L <- mu - kwantyl * std.dev
  T.U <- mu + kwantyl * std.dev
  return(data.frame(T.L = T.L, T.U = T.U))
}

```

## 3.2 Zadanie 2

Zadanie polega na wyznaczeniu realizacji przedziałów ufności, na poziomie ufności 0.95 ( $\alpha = 0.05$ ), dla średniego czasu do progresji choroby w dwóch grupach pacjentek kliniki Mayo Clinic, obejmujących pacjentki chore na raka jajnika w II oraz IIIA stadium choroby.

W przypadku pacjentek w stadium II czasy (w dniach) do progresji choroby były następujące: 28, 89, 175, 195, 309, 377+, 393+, 421+, 447+, 462, 709+, 744+, 770+, 1106+, 1206+. Symbol „+” oznacza obserwację prawostronnie cenzurowaną.

Dla pacjentek w stadium IIIA czasy (w dniach) wynosiły: 34, 88, 137, 199, 280, 291, 299+, 300+, 309, 351, 358, 369, 369, 370, 375, 382, 392, 429+, 451, 1119+.

Ze względu na fakt, że progresja chorób nowotworowych zależy od wielu czynników, w szczególności indywidualnych, trudno jest ustalić jednoznacznie “sensowne” maksymalne czasy do progresji choroby. Dlatego przedziały ufności wyznaczono dla dwóch wartości parametru  $\tau$ :  $\tau = 1460$  oraz  $\tau = 1825$ , odpowiadających odpowiednio 4 i 5 latom (przy przyjęciu uproszczenia: 1 rok = 365 dni). Następnie porównano uzyskane

przedziały ufności dla obu grup i obu wartości  $\tau$ .

```
times.II <- c(28, 89, 175, 195, 309, 377, 393, 421, 447, 462, 709, 744, 770,
             1106, 1206)
deltas.II <- c(1,1,1,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0)
df.II <- data.frame(times = times.II, deltas = deltas.II)

times.III <- c(34, 88, 137, 199, 280, 291, 299, 300, 309, 351, 358, 369, 369,
              370, 375, 382, 392, 429, 451, 1119)
deltas.III <- c(1,1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,1,0,1,0)
df.III <- data.frame(times = times.III, deltas = deltas.III)

tau = 1460
Ci.II.1 <- confidence.interval(df.II, 0.05, tau)
Ci.III.1 <- confidence.interval(df.III, 0.05, tau)

tau = 1825
Ci.II.2 <- confidence.interval(df.II, 0.05, tau)
Ci.III.2 <- confidence.interval(df.III, 0.05, tau)
```

Tabela 3: Realizacje przedziałów przeżycia dla pacjentek z rakiem jajnika typu II i typu IIIA - Mayo Clinic -  $\tau = 1460$

Grupa	$T_L$	$T_U$
Typ II	578.769	1252.253
Typ IIIA	235.024	584.384

Z Tabeli 3 wynika, że przedział ufności dla pacjentek z rakiem typu II jest szerszy niż dla pacjentek z rakiem typu IIIA. Prawdopodobnie wynika to z faktu, że grupa typu II obejmuje mniej zarejestrowanych obserwacji, w tym mniej obserwacji kompletnych. Dodatkowo, niższe stadium choroby charakteryzuje się większymi wartościami czasu - różnica między minimalną wartością dla typu II a maksymalną dla typu IIIA wynosi zaledwie 5.615. Obserwacja ta odpowiada rzeczywistym danym: wyższy stopień zaawansowania nowotworu wiąże się z szybszą progresją choroby.

Tabela 4: Realizacje przedziałów przeżycia dla pacjentek z rakiem jajnika typu II i typu IIIA - Mayo Clinic -  $\tau = 1825$

Grupa	$T_L$	$T_U$
Typ II	680.117	1556.460
Typ IIIA	213.670	669.613

Z Tabeli 4. można odczytać odmienne zachowanie przedziałów ufności dla poszczególnych grup. W przypadku pacjentek z nowotworem typu II zarówno dolna, jak i górna granica przedziału wzrosły, przy czym górna granica zwiększyła się wyraźnie bardziej niż dolna. W przypadku raka typu IIIA górna granica również wzrosła, natomiast dolna uległa obniżeniu. Zmiany w grupie typu IIIA są mniejsze niż w grupie typu II, co sugeruje bardziej stabilne zachowanie estymatora funkcji przeżycia w ogonie rozkładu.

Analizując estymacje można zauważyć, że dla raka typu II wartość czasu przeżycia była większa niż jego wariancja, natomiast dla typu IIIA sytuacja była odwrotna. Wspólną cechą obu grup jest wydłużenie przedziałów ufności, co wskazuje na zwiększoną niepewność estymacji przy dłuższym czasie obserwacji.

## 4 Lista 8

Lista polega na weryfikacji hipotezy o jednakowym rozkładzie czasu do progresji choroby w dwóch badanych grupach pacjentek, przy użyciu testów logrank, Gehana-Breslowa, Tarone'a-Warego i Peto-Peto, porównaniu otrzymanych wartości poziomów krytycznych oraz na naszkicowaniu wykresów estymatorów Kaplana-Meiera funkcji przeżycia dla czasu do progresji choroby w obu grupach wraz z funkcjami wagowymi użytymi w statystykach testowych.

### 4.1 Zadanie 1

W zadaniu dokonano wyliczenia wartości  $p$ -value dla hipotezy o jednakowym rozkładzie czasu do progresji choroby w dwóch badanych grupach pacjentek, z podziałem na sposób dobierania wagi.

Na początek dokonano konkatencji poszczególnych prób  $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_k$ , gdzie  $\mathbb{X}_j = (X_{j1}, \dots, X_{jn_j})$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Z tak połączonych prób wyznaczono (unikalne) czasy zdarzeń, których liczbę oznaczono przez  $D$ , i uporządkowano je rosnąco:  $t_1 < t_2 < \dots < t_D$ .

Statystyka testowa opiera się na sumie ważonych różnic między oszacowanymi hazardami w momentach  $t_i$ . Oszacowania te wyznaczane są za pomocą estymatora Nelsona-Aalena funkcji hazardu:

$$Z_j(\tau) = \sum_{i=1}^D W_j(t_i) \left( \frac{d_{ij}}{r_{ij}} - \frac{d_i}{r_i} \right), \quad \text{gdzie:}$$

- $d_{ij}$  – liczba zdarzeń w czasie  $t_i$  z próby  $\mathbb{X}_j$ ,
- $r_{ij}$  – liczba jednostek w stanie ryzyka w czasie  $t_i$  w  $j$ -tej grupie,
- $d_i = \sum_{j=1}^k d_{ij}$ ,
- $r_i = \sum_{j=1}^k r_{ij}$ .

W zadaniu przyjęto funkcję wagi jako  $W_j(t_i) = r_{ij}W(t_i)$ , wtedy statystyka  $Z_j(\tau)$  ma postać:

$$Z_j(\tau) = \sum_{i=1}^D W(t_i) \left( d_{ij} - r_{ij} \frac{d_i}{r_i} \right).$$

Wariancję takiej statystyki estymuje się przez:

$$\hat{\sigma}_{jj} = \sum_{i=1}^D W^2(t_i) d_i \frac{r_{ij}}{r_i} \left( 1 - \frac{r_{ij}}{r_i} \right) \left( \frac{r_i - d_i}{r_i - 1} \right),$$

kowariancję natomiast estymuje się przez:

$$\hat{\sigma}_{jg} = - \sum_{i=1}^D W^2(t_i) d_i \frac{r_{ij} r_{ig}}{r_i^2} \left( \frac{r_i - d_i}{r_i - 1} \right).$$

Statystyka testowa do weryfikacji rozpatrywanych hipotez konstruowana jest w oparciu o dowolne  $k - 1$  wybranych statystyk  $Z_j(\tau)$  i ma postać:

$$Z^2 = (Z_1(\tau), \dots, Z_{k-1}(\tau)) \Sigma^{-1} (Z_1(\tau), \dots, Z_{k-1}(\tau))^T,$$

gdzie macierz  $\Sigma$  jest utworzona z odpowiednich elementów  $\hat{\sigma}_{jj}$  oraz  $\hat{\sigma}_{jg}$ .

Udowodniono, że jeżeli hipoteza  $H_0$  jest spełniona, to rozkład statystyki  $Z^2$  dąży według rozkładu do rozkładu chi-kwadrat z  $k - 1$  stopniami swobody, gdy  $n_1 \rightarrow \infty, \dots, n_{k-1} \rightarrow \infty$ . Korzystając z tego faktu, można obliczyć wartość poziomu krytycznego:

$$p = 1 - F_{\chi_{k-1}^2}(z^2),$$

gdzie  $F_{\chi_{k-1}^2}$  jest dystrybuantą rozkładu chi-kwadrat z  $k - 1$  stopniami swobody, a  $z^2$  realizacją statystyki  $Z^2$ .

W zadaniu dokonano czterech testów ze względu na dobraną postać funkcji  $W(t_i)$ :

- test logrank:  $W(t_i) \equiv 1$ ,
- test Gehana–Breslowa:  $W(t_i) = r_i$ ,
- test Peto–Peto:  $W(t_i) = \prod_{t_j \leq t_i} \left(1 - \frac{d_j}{r_j + 1}\right)$ ,
- test Tarone’a–Ware’a:  $W(t_i) = \sqrt{r_i}$ .

Tabela 5: Wartości  $p$ -value dla testów czasu do progresji choroby weryfikujących hipotezę o jednakowym rozkładzie w grupach pacjentek rakowych kliniki Mayo Clinic

Test	p-value
logrank	0.019
Gehan-Breslow	0.134
Peto-Peto	0.098
Tarone-Ware	0.055

Z Tabeli 5. wynika, że na ustalonym poziomie istotności  $\alpha = 0.05$  hipoteza o jednakowym rozkładzie czasu do progresji powinna zostać odrzucona jedynie w przypadku testu logrank. Wartości  $p$ -value dla poszczególnych funkcji wag różnią się między sobą, co wynika bezpośrednio z ich konstrukcji:

- **logrank** traktuje wszystkie zdarzenia równoważnie, wykrywając globalne różnice między grupami, nawet jeśli ujawniają się one późno,
- **Gehan-Breslow** przypisuje większą wagę wcześniejszym czasom - jeżeli różnice między grupami pojawiają się późno, test staje się na nie mniej wrażliwy,
- **Tarone-Ware** jest kompromisem między logrank a Gehan-Breslow - zmniejsza różnice między wagami, nakładając na nie pierwiastek,
- **Peto-Peto** dla poszczególnych czasów uwzględnia nie tylko aktualne zdarzenie, ale również wszystkie wcześniejsze oraz informację o liczbie zdarzeń w połączonych próbach, które wystąpiły w tym samym czasie.

Podsumowując, istotność wykazana przez test logrank wskazuje na globalną różnicę w przebiegu czasu do zdarzenia między grupami, natomiast brak istotności w pozostałych testach odzwierciedla fakt, że lokalne lub czasowo rozłożone różnice są mniej wyraźne.

## 4.2 Zadanie 2

Zadanie polega na naszkicowaniu wykresów estymatorów Kaplana–Meiera funkcji przeżycia dla dwóch grup oraz unormowanych funkcji wagowych testów logrank, Gehan-Breslow, Tarone-Ware i Peto-Peto. Na podstawie wykresów należy przeanalizować, jak kształt funkcji przeżycia i przypisane wagi wpływają na wartości  $p$ -value oraz wnioski dotyczące istotności różnic między grupami.

Poniżej przedstawiono blok kodu w R, który oblicza dla każdego zaobserwowanego czasu zdarzenia liczby jednostek w stanie ryzyka i liczby zdarzeń, a następnie na ich podstawie generuje unormowane funkcje wag.

```

# Uzupełnienie danych o wartości r_i i d_i
df.cancer$r <- 0
df.cancer$d <- 0
for(i in 1:nrow(df.cancer)){
  df.cancer[i, "r"] <- sum(df.cancer$times >= df.cancer[i, "times"])
  df.cancer[i, "d"] <- sum(df.cancer$times == df.cancer[i, "times"] &
                        df.cancer$deltas==1)
}

# Unikalne zdarzenia
df.cancer.unique <- df.cancer[!duplicated(df.cancer$times) &
                             df.cancer$deltas==1,]

# Wagi testu logrank
df.cancer.unique$lg <- 1

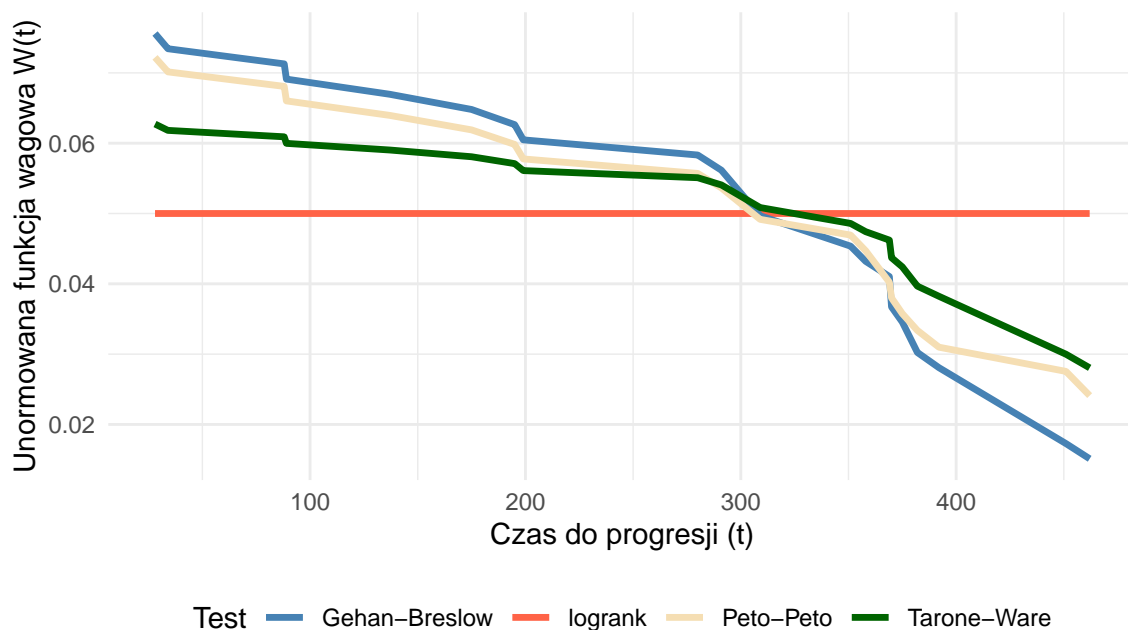
# Wagi testu Gehana-Breslowa
df.cancer.unique$GB <- df.cancer.unique$r

# Wagi testu Peto-Peto
df.cancer.unique$PP <- 0
for(i in 1:nrow(df.cancer.unique)){
  czas <- df.cancer.unique[i, "times"]
  iloczyn <- 1
  for(j in 1:nrow(df.cancer.unique)){
    if(df.cancer.unique[j, "times"] <= czas){
      dj <- df.cancer.unique[j, "d"]
      rj <- df.cancer.unique[j, "r"]
      iloczyn <- iloczyn * (1 - dj/(rj + 1))
    }
  }
  df.cancer.unique[i, "PP"] <- iloczyn
}

# Wagi testu Tarone'a-Were'a
df.cancer.unique$TW <- sqrt(df.cancer.unique$r)

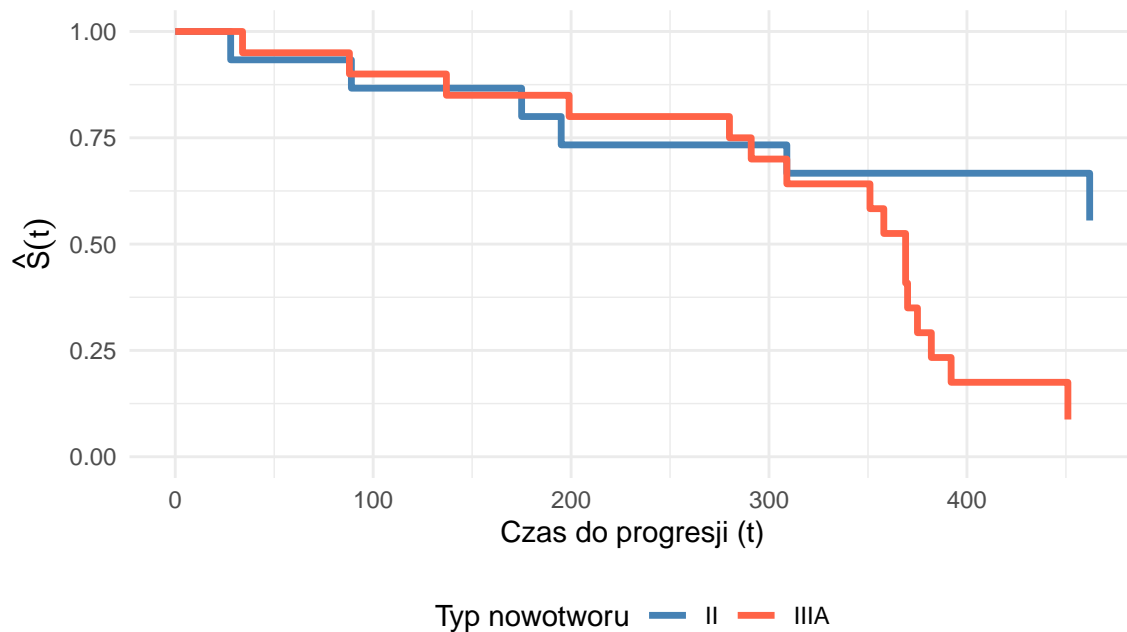
# Unormowanie wag
df.cancer.unique$lg <- df.cancer.unique$lg/sum(df.cancer.unique$lg)
df.cancer.unique$GB <- df.cancer.unique$GB/sum(df.cancer.unique$GB)
df.cancer.unique$PP <- df.cancer.unique$PP/sum(df.cancer.unique$PP)
df.cancer.unique$TW <- df.cancer.unique$TW/sum(df.cancer.unique$TW)

```



Wykres 7: Wagi testów nieparametrycznych dla porównania rozkładów czasów przeżycia - Mayo Clinic

Na Wykresie 7. widać, jakie unormowane wagi przypisuje każdy z testów dla poszczególnych czasów. Dla  $t \approx 320$  wagi testów Gehan-Breslow, Peto-Peto i Tarone-Ware przecinają krzywą wag testu logrank, co oznacza, że dla zdarzeń o czasie większym niż 320 przypisywane jest mniejsze znaczenie niż przy teście logrank.



Wykres 8: Estymator Kaplana-Meiera dla danych dotyczących pacjentek z rakiem jajnika - Mayo Clinic

Na Wykresie 8. można zauważyć, że estymatory przeżycia Kaplana-Meiera dla obu zbiorów danych pacjentek rakowych są dość zbliżone do czasu  $t \approx 320$ . Po tym punkcie funkcje przeżycia gwałtownie spadają, co oznacza, że w tym okresie występuje progresja choroby dla wielu pacjentek. To skutkuje spadkiem wag testów

Gehan-Breslow, Peto-Peto i Tarone-Ware w późniejszych momentach czasu, co oznacza, że późne zdarzenia mają mniejszy wpływ na wartość statystyki testowej w porównaniu do testu logrank. W konsekwencji główny wkład do obliczenia wartości  $p$  pochodzi ze zdarzeń występujących wcześniej, zanim funkcje przeżycia drastycznie spadną.

Ze względu na spadek wag testów Gehan-Breslow, Peto-Peto i Tarone-Ware dla późnych czasów, istotność statystyczna opiera się głównie na wcześniejszych zdarzeniach. W tym przypadku najbardziej reprezentatywne jest  $p$ -value z testu logrank, który równomiernie uwzględnia wszystkie zdarzenia, co widać na Wykresie 8. estymatorów Kaplana-Meiera.

## 5 Zadania dodatkowe

### 5.1 Zadanie 1

Zadanie polega na dokonaniu symulacji porównujących asymptotyczne punktowo przedziały ufności, które oparte będą na własnościach asymptotycznych estymatora Kaplana-Meiera oraz metodzie delta. Rozważane będą trzy przekształcenia:

- liniowe:  $g(x) = x$
- logarytmiczne:  $g(x) = \ln(x)$
- logit:  $g(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Jeżeli  $F$  i  $G$  są odpowiednio dystrybuantami czasu życia i czasu cenzury ciągłymi na przedziale  $[0; T]$ , oraz  $F(T) < 1$ , to dla każdego  $t \in (0, T)$ :

$$\frac{\hat{S}_n(t) - S(t)}{\sigma_n(t)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Jednakże wartość odchylenia standardowego  $\sigma_n(t)$  nie jest znana. Rozwiązaniem tego problemu jest oszacowanie asymptotycznej wariancji  $\sigma_n^2(t)$  przez formułę Greenwooda:

$$\hat{\sigma}_n^2(t) = \hat{S}^2(t) \sum_{i:t_{(i)} \leq t} \frac{\delta_{(i)}}{(n-i+1)(n-i)} \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}_n^2(t) = \hat{S}^2(t) \sum_{i:t_{(i)} \leq t} \frac{d_i}{r_i(r_i - d_i)} \quad (2)$$

dla każdego  $t < t_{(n)}$ . Wzór (1) stanowi szczególny przypadek, gdy z prawdopodobieństwem 1 obserwacje się nie powtarzają, w (2) natomiast niektóre już mogą.

Metoda delta mówi nam, że jeżeli ciąg estymatorów  $(X_n)_{n \geq 1}$  spełnia asymptotyczną normalność:

$$\sqrt{n}(X_n - \vartheta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

gdzie  $\vartheta$  i  $\sigma^2$  są pewnymi stałymi, oraz funkcja  $g$  jest różniczkowalna w punkcie  $\vartheta$  i  $g'(\vartheta) \neq 0$ , to ciąg  $(g(X_n))_{n \geq 1}$ , spełnia:

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\vartheta)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, [g'(\vartheta)]^2 \sigma^2\right).$$

W przypadku połączenia metody delta z własnościami asymptotycznymi estymatora Kaplana-Meiera, dochodzi się do następującego wniosku:

$$\frac{g(\hat{S}_n(t)) - g(S(t))}{g'(\hat{S}_n(t)) \hat{\sigma}_n(t)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

W powyższym przekształceniu składnik  $\sqrt{n}$  został pominięty, gdyż ta “informacja zawiera się” w estymatorze  $\hat{\sigma}_n(t) = \sqrt{\hat{\sigma}_n^2(t)}$ . Na jego podstawie można wyznaczyć asymptotycznie punktowy przedział ufności dla wartości funkcji przeżycia  $S$  w punkcie  $t$  na poziomie ufności  $1 - \alpha$ , który jest postaci:

$$T_L = g^{-1}\left(g(\hat{S}_n(t)) - z\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) g'(\hat{S}_n(t)) \hat{\sigma}_n(t)\right),$$



$$T_U = g^{-1} \left( g \left( \hat{S}_n(t) \right) + z \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) g' \left( \hat{S}_n(t) \right) \hat{\sigma}_n(t) \right),$$

gdzie  $z(\cdot)$  jest funkcją kwantylową standardowego rozkładu normalnego.

Symulację przeprowadzono dla danych generowanych z rozkładu  $\mathcal{GE}(1, 2)$ , losowo cenzurowanych zmiennymi z rozkładu  $\mathcal{E}(0.7)$ , przy  $t = 1.2$ , dla próbek o licznosci  $n \in \{30, 50, 100\}$ , wykonując 1000 powtórzeń przy poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ . Dla zwiększenia wiarygodności przedziały dla różnych przekształceń wyznaczano na tych samych danych.

Poniżej przedstawiono blok kodu w R realizujący symulację:

```
interval <- function(data, t, type="x", alpha=0.05){

  if(t >= max(data$times)) stop("t must be less than the
                                maximum time in the data")

  if(type == "x"){
    g <- function(x) return(x)
    g_inv <- function(y) return(y)
    g_der <- function(x) return(1)
  }
  else if(type == "log"){
    g <- function(x) return(log(x))
    g_inv <- function(y) return(exp(y))
    g_der <- function(x) return(1/x)
  }
  else if(type == "logit"){
    g <- function(x) return(log(x/(1-x)))
    g_inv <- function(y) return(1-1/(exp(y)+1))
    g_der <- function(x) return(1/(x*(1-x)))
  }
  else stop("Invalid option, choose one of the following:
            \"x\", \"log\", \"logit\"")

  fit <- survfit(Surv(times, deltas) ~ 1, data = data)
  fit <- data.frame(n.event = fit$n.event,
                    times = fit$time,
                    surv = fit$surv)
  fit_subset <- fit[fit$times <= t,]
  sum <- 0

  if(length(unique(data$times)) != nrow(data)){
    for(time in fit_subset$time){
      r <- sum(data$times >= time)
      d <- sum(data$times == time & data$deltas == 1)
      sum <- sum + d/(r*(r-d))
    }
  }
  else{
    n <- nrow(fit)
    for(i in 1:nrow(fit_subset)){
      sum <- sum + fit_subset$n.event[i]/((n-i+1)*(n-i))
    }
  }

  St_estimation <- min(fit_subset$surv)
```

```

variance <- sum * min(St_estimation)^2
g_St_estimation <- g(St_estimation)
g_der_St_estimation <- g_der(St_estimation)
quantile <- qnorm(1-alpha/2)
aux_variable <- quantile*g_der_St_estimation*sqrt(variance)

TL <- g_St_estimation - aux_variable
TU <- g_St_estimation + aux_variable

return(c(g_inv(TL), g_inv(TU)))
}

# Symulacje
simulation <- function(theta, alpha1, lambd, t, n, M=1000, alpha=0.05){
  m <- 0
  length_x <- 0
  interval_x <- 0
  length_log <- 0
  interval_log <- 0
  length_logit <- 0
  interval_logit <- 0
  St <- EW_survival(t, alpha=1, beta=1/lambd, gamm=alpha1)

  while(m<M){
    generated_data <- GE_cenzurowanie_losowe(theta, alpha1, lambd, n)
    if(t >= max(generated_data$times)) next

    # type="x"
    est_interval <- interval(generated_data, t, type="x", alpha=alpha)
    lower <- est_interval[1]
    upper <- est_interval[2]
    if(lower <= St & St <= upper) interval_x <- interval_x+1
    length_x <- length_x + (upper-lower)

    # type="log"
    est_interval <- interval(generated_data, t, type="log", alpha=alpha)
    lower <- est_interval[1]
    upper <- est_interval[2]
    if(lower <= St & St <= upper) interval_log <- interval_log+1
    length_log <- length_log + (upper-lower)
    m <- m+1

    # type="logit"
    est_interval <- interval(generated_data, t, type="logit", alpha=alpha)
    lower <- est_interval[1]
    upper <- est_interval[2]
    if(lower <= St & St <= upper) interval_logit <- interval_logit+1
    length_logit <- length_logit + (upper-lower)
  }
  return(list("length" = c(length_x/M, length_log/M, length_logit/M),
             "interval" = c(interval_x/M, interval_log/M, interval_logit/M)))
}

```

```

df1 <- data.frame()
df2 <- data.frame()
number_of_observations <- c(30, 50, 100)
for(n in number_of_observations){
  wynik <- simulation(0.7, 2, 1, 1.2, n)
  df1 <- rbind(df1, wynik[[1]])
  df2 <- rbind(df2, wynik[[2]])
}

rownames(df1) <- as.character(number_of_observations)
rownames(df2) <- as.character(number_of_observations)

```

Tabela 6: Porównanie asymptotycznych punktowo przedziałów ufności funkcji przeżycia - długość przedziału

n	$g(x) = x$	$g(x) = \ln(x)$	$g(x) = \ln(\frac{x}{1-x})$
30	0.464	0.485	0.435
50	0.362	0.371	0.348
100	0.260	0.263	0.254

Wyniki przedstawione w Tabeli 6. pokazują, że długość przedziału ufności maleje wraz ze wzrostem liczności próby. Świadczy to o rosnącej precyzji estymacji funkcji przeżycia metodą Kaplana–Meiera. Dla dowolnej próby o długości  $n$  najszersze przedziały uzyskano przy zastosowaniu przekształcenia logarymicznego, natomiast najwęższe - po zastosowaniu transformacji logit.

Tabela 7: Porównanie asymptotycznych punktowo przedziałów ufności funkcji przeżycia - prawdopodobieństwo pokrycia

n	$g(x) = x$	$g(x) = \ln(x)$	$g(x) = \ln(\frac{x}{1-x})$
30	0.927	0.928	0.960
50	0.931	0.944	0.955
100	0.943	0.947	0.953

Wyniki przedstawione w Tabeli 7. pokazują, że wraz ze wzrostem liczności próby prawdopodobieństwo pokrycia może zarówno rosnąć, jak i maleć, co świadczy o stabilizacji wyników.

Na poziomie ufności 95% przekształcenie logit wykazuje niewielkie przeszacowanie, natomiast transformacje liniowa i logarymiczna - niedoszacowanie. Można jednak przypuszczać, że wraz ze wzrostem liczby prób wyniki zbliżą się do zadanego poziomu ufności. Podobnie jak wcześniej, transformacja logit pozostaje najlepszym wyborem.

Podsumowując wyniki z obu tabel, najbardziej korzystną transformacją jest funkcja logit. Wybór między brakiem przekształcenia a przekształceniem logarytmicznym zależy od priorytetu: krótszego przedziału ufności czy większego prawdopodobieństwa pokrycia.

## 5.2 Zadanie 2

Estymatory Kaplana-Meiera oraz Fleminga-Harringtona są funkcjami schodkowymi. W stosunkowo małych próbach często obserwuje się szerokie przedziały czasu, w których estymator jest stały - praktycznie i interpretacyjnie bywa to niepożądane i statystykom trudno jest wytłumaczyć praktykom na przykładzie Wykresu 1. grupy leku A dlaczego prawdopodobieństwo przeżycia do chwili  $t = 0.7$  jest równe prawdopodobieństwu przeżycia do chwili  $t = 0.8$ .

Rossa i Zieliński [2] zaproponowali lokalne „wygładzenie” estymatora Kaplana-Meiera poprzez dopasowanie funkcji gęstości rozkładu Weibulla w niewielkim otoczeniu każdego punktu skoku.

### Zasada działania estymatora

**Krok 1.** Konstrukcja wartości środkowych

1. Niech  $T_0 = 0$  oraz  $KM(T_0) = 1$ , a

$$T_{(1)} < T_{(2)} < \dots < T_{(N-1)}$$

będą uporządkowanymi czasami obserwacji, gdzie  $T_{(1)}, \dots, T_{(N-1)}$  oznaczają momenty skoków klasycznego estymatora Kaplana-Meiera, natomiast  $T_{(N)}$  jest ostatnim czasem w próbie (zdarzeniem lub cenzurowaniem). Wartości  $KM(T_{(j)})$  oznaczają wartość estymatora Kaplana-Meiera w chwili  $T_{(j)}$ , tj. tuż po wystąpieniu skoku.

2. Dla każdego  $j = 1, \dots, N-1$  wartość środkową definiuje się jako średnią arytmetyczną dwóch kolejnych wartości estymatora:

$$KM'_j = \frac{KM(T_{(j-1)}) + KM(T_{(j)})}{2}.$$

3. W przypadku ostatniego czasu skoku  $T_{(N)}$  wartość  $KM'_N$  definiuje się jako:

$$KM'_N = \begin{cases} \frac{KM(T_{(N)})}{2}, & \delta_N = 1, \\ KM(T_{(N)}), & \delta_N = 0. \end{cases}$$

### Krok 2. Obliczanie wag

Dla dowolnego  $t \geq 0$  definiuje się wektor wag

$$\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t)).$$

Wagi zależą od parametru  $m$  — liczby “sąsiadów” (liczb całkowitych) — oraz od położenia  $t$  względem przedziałów między momentami skoków estymatora. Wagi te będą użyte w następnych krokach przy regresji liniowej.

Rozróżnia się trzy przypadki dla różnych  $m$ :

- A) Gdy  $m = 2$  wagi są zawsze “punktowe”, a sam estymator przyjmuje odmienną, uproszczoną postać. Szczegóły przedstawiono w dalszej części.
- B) Gdy  $m$  jest nieparzyste tzn.  $m = 2k + 1$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$ . Wagi definiuje się następująco:

W pierwszej kolejności zdefiniowano indeks  $j$  opisujący, w którym przedziale znajduje się  $t$ :

$$j = \begin{cases} 0, & t \leq T_{(1)}, \\ N, & t > T_{(N)}, \\ i \in 1, \dots, N-1, & T_{(i)} < t \leq T_{(i+1)} \end{cases}$$

1. Jeżeli  $j \leq k$  (t blisko początku) - krawędź lewa:

$$w_1(t) = w_2(t) = \dots = w_m(t) = 1,$$

oraz

$$w_{m+1}(t) = \dots = w_N(t) = 0.$$

2. Jeżeli  $j \geq N - k$  (t blisko końca) - krawędź prawa:

$$w_{N-m+1}(t) = w_{N-m+2}(t) = \dots = w_N(t) = 1,$$

oraz

$$w_1(t) = \dots = w_{N-m}(t) = 0.$$

3. Jeżeli  $k < j < N - k$  (t jest dostatecznie daleko od krawędzi i otoczenie o rozmiarze  $m$  mieści się w zakresie indeksów) - przypadek środkowy:

3. Jeżeli  $k < j < N - k$  (t jest dostatecznie daleko od krawędzi i otoczenie o rozmiarze  $m$  mieści się w zakresie indeksów) - przypadek środkowy:

1. Blok jednostkowy (dokładnie  $m$  indeksów) Dla indeksów  $i \in j - k, j - k + 1, \dots, j + k$  przyjmuje się  $w_i(t) = 1$ .
2. Dwa brzegowe indeksy sąsiednie (ewentualne wagi ułamkowe) Jeśli istnieje indeks lewy ( $j - k \geq 1$ )

$$i_{\text{lewy}} = j - k,$$

to jego waga zależy liniowo od położenia  $t$  w przedziale  $(T_{(j)}, T_{(j+1)})$ :

$$w_{i_{\text{lewy}}}(t) = \frac{T_{(j+1)} - t}{T_{(j+1)} - T_{(j)}}.$$

Jeśli istnieje indeks prawy ( $j + k + 1 \leq N$ )

$$i_{\text{prawy}} = j + k + 1,$$

to jego waga wynosi

$$w_{i_{\text{prawy}}}(t) = \frac{t - T_{(j)}}{T_{(j+1)} - T_{(j)}}.$$

3. Pozostałe wagi

Wszystkie pozostałe składowe wektora wag przyjmują wartość 0.

C) Gdy  $m$  jest parzyste tzn.  $m = 2k$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}_+$ . Wagi definiuje się następująco:

W pierwszej kolejności zdefiniowano indeks  $j$  opisujący, w którym przedziale znajduje się  $t$ :

$$j = \begin{cases} 0, & t \leq T_{(1)}/2, \\ N, & t > (T_{(N-1)} + T_{(N)})/2, \\ i \in 1, \dots, N-1, & (T_{(i-1)} + T_{(i)})/2 < t \leq (T_{(i)} + T_{(i+1)})/2 \end{cases}$$

1. Jeżeli  $j \leq k$  (t blisko początku) - krawędź lewa:

$$w_1(t) = w_2(t) = \dots = w_m(t) = 1,$$

oraz

$$w_{m+1}(t) = \dots = w_N(t) = 0.$$

2. Jeżeli  $j \geq N - k + 1$  (t blisko końca) - krawędź prawa:

$$w_{N-m+1}(t) = w_{N-m+2}(t) = \dots = w_N(t) = 1,$$

oraz

$$w_1(t) = \dots = w_{N-m}(t) = 0.$$

3. Jeżeli  $k < j < N - k + 1$  ( $t$  jest dostatecznie daleko od krawędzi i otoczenie o rozmiarze  $m$  mieści się w zakresie indeksów) - przypadek środkowy:

1. Blok jednostkowy (dokładnie  $m$  indeksów) Dla indeksów  $i \in j - k + 1, j - k + 2, \dots, j + k$  przyjmuje się  $w_i(t) = 1$ .
2. Dwa brzegowe indeksy sąsiednie (ewentualne wagi ułamkowe) Jeśli istnieje indeks lewy ( $j - k \geq 1$ )

$$i_{\text{lewy}} = j - k,$$

to jego waga zależy liniowo od położenia  $t$  w przedziale  $(T_{(j)}, T_{(j+1)})$ :

$$w_{i_{\text{lewy}}}(t) = \frac{\frac{1}{2}(T_{(j)} + T_{(j+1)}) - t}{\frac{1}{2}(T_{(j+1)} - T_{(j-1)})}.$$

Jeśli istnieje indeks prawy ( $j + k \leq N$ )

$$i_{\text{prawy}} = j + k,$$

to jego waga wynosi

$$w_{i_{\text{prawy}}}(t) = \frac{t - \frac{1}{2}(T_{(j)} + T_{(j+1)})}{\frac{1}{2}(T_{(j+1)} - T_{(j-1)})}.$$

3. Pozostałe wagi

Wszystkie pozostałe składowe wektora wag przyjmują wartość 0.

**Krok 3.** Interpolacja liniowa oraz ważona regresja liniowa

W pierwszej kolejności obliczono log-czasy zdarzeń oraz ich log-log przeżycia, które następnie stanowią dane wejściowe do lokalnej regresji liniowej budującej estymator Rossy-Zielińskiego.

$$X_j = \log T_{(j)}, \quad Y_j = \log(-\log(KM'_j)),$$

W przypadku  $m = 2$  i w ustalonej chwili  $t$  obliczono log- $t$ :

$$X = \log t$$

Estymator  $S_2(t)$  jest liniową transformacją log-log:

$$Y(t) = \begin{cases} Y_1 + \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1), & 0 < t \leq T_{(1)}, \\ Y_j + \frac{Y_{j+1} - Y_j}{X_{j+1} - X_j}(X - X_j), & T_{(j)} < t \leq T_{(j+1)}, \\ Y_{N-1} + \frac{Y_N - Y_{N-1}}{X_N - X_{N-1}}(X - X_{N-1}), & t > T_{(N)} \text{ i } \delta_N = 1, \\ \text{nieokreślony,} & t > T_{(N)} \text{ i } \delta_N = 0. \end{cases}$$

W przypadku  $m > 2$  i w ustalonej chwili  $t$ , dysponuje się wektorem wag:

$$\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t)),$$

Dopasowanie lokalnego modelu Weibulla odbywa się przez zastosowanie ważonej regresji liniowej w przestrzeni transformowanej:

$$Y_i = aX_i + b + \varepsilon_i,$$

gdzie parametry  $a = a(t)$  i  $b = b(t)$  wyznacza się jako rozwiązanie problemu:

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^N w_i(t) [Y_i - (aX_i + b)]^2.$$

Wynikiem są lokalne estymatory:

$$\hat{a}(t), \quad \hat{b}(t),$$

które interpretuje się jako lokalne parametry kształtu i skali rozkładu Weibulla dopasowanego w “otoczeniu” punktu  $t$  przy użyciu wag opisanych wcześniej.

#### **Krok 4.** Transformacja odwrotna

W przypadku  $m = 2$  wartość estymatora Rossy-Zielińskiego definiuje się jako:

$$\hat{S}_2(t) = \exp(-\exp(Y(t))).$$

W przypadku  $m > 2$  rekonstruuje się lokalną funkcję przeżycia, korzystając z postaci funkcji przeżycia rozkładu Weibulla:

$$S(t) = \exp(-\exp(a)t^b).$$

Estymator Rossy-Zielińskiego definiuje się jako:

$$\hat{S}_m(t) = \exp(-\exp(\hat{a}(t))t^{\hat{b}(t)}).$$

Otrzymana funkcja jest lokalnie wygładzona, a stopień wygładzenia kontroluje parametr  $m$ , który określa szerokość okna oraz sposób formowania wag.

Poniżej przedstawiono blok kodu w języku R implementujący estymator Rossy-Zielińskiego wraz z przykładowym generowaniem wykresów funkcji przeżycia.

```
rossa.zielinski.estimator <- function(df, m = 2) {
  # Funkcja pomocnicza do liczenia wag (dla m > 2)
  compute_weights <- function(Time, t, m) {
    N <- length(Time)
    w <- rep(0, N)

    # m = 2k + 1 - nieparzyste
    if (m %% 2 == 1) {
      k <- (m - 1) / 2
      if (t <= Time[1]) {
        j <- 0
      } else if (t > Time[N]) {
        j <- N
      } else {

```

```

    j <- max(which(Time < t))
  }
  # generowanie wag
  if (j <= k) {
    w[1:m] <- 1
  }
  else if (j >= N - k) {
    w[(N - m + 1):N] <- 1
  }
  else {
    idx_unit <- (j - k + 1):(j + k)
    w[idx_unit] <- 1
    # przypadki brzegowe
    if ((j - k) >= 1) {
      w[j - k] <- (Time[j + 1] - t) / (Time[j + 1] - Time[j])
    }
    if ((j + k + 1) <= N) {
      w[j + k + 1] <- (t - Time[j]) / (Time[j + 1] - Time[j])
    }
  }
  # m = 2k - parzyste
} else {
  k <- m / 2
  if (t <= (Time[1]/2)) {
    j <- 0
  } else if (t > (Time[N-1] + Time[N])/2) {
    j <- N
  } else {
    j <- which((Time[-1] + Time[-N])/2 >= t)[1]
  }
  # generowanie wag
  if (j <= k) {
    w[1:m] <- 1
  } else if (j >= N - k + 1) {
    w[(N - m + 1):N] <- 1
  } else {
    idx_unit <- (j - k + 1):(j + k - 1)
    w[idx_unit] <- 1

    # przypadki brzegowe
    if ((j - k) >= 1) {
      w[j - k] <- (0.5*(Time[j] + Time[j + 1]) - t) /
        0.5 * (Time[j + 1] - Time[j - 1])
    }
    if ((j + k) <= N) {
      w[j + k] <- (t - 0.5*(Time[j - 1] + Time[j])) /
        0.5 * (Time[j + 1] - Time[j - 1])
    }
  }
}
}
return(w)
}

```



```

# wartości środkowe KM'
fit <- survfit(Surv(df$times, df$deltas) ~ 1)
Time <- fit$time[fit$n.event > 0]
Time <- c(Time, tail(fit$time, 1))
KM <- fit$surv[fit$n.event > 0]
KM <- c(KM, tail(fit$surv, 1))
N <- length(Time)

KMO <- numeric(N)
for (i in 1:(N-1)) {
  if (i == 1) {
    KMO[i] <- (1 + KM[i]) / 2
  } else {
    KMO[i] <- (KM[i-1] + KM[i]) / 2
  }
}
last_delta <- fit$n.event[which(fit$time == Time[N])]
if (last_delta == 1) {
  KMO[N] <- KM[N] / 2
} else {
  KMO[N] <- KM[N]
}

X <- log(Time)
Y <- log(-log(KMO))

# Funkcja estymatora
estimator <- function(x.eval) {
  S <- numeric(length(x.eval))

  for (i in seq_along(x.eval)) {
    x <- x.eval[i]
    Xx <- log(x)

    # Estymator dla m = 2
    if (m == 2) {
      if (x <= Time[1]) {
        Yx <- Y[1] + (Y[2]-Y[1]) / (X[2]-X[1]) * (Xx - X[1])
      } else if (x > Time[N]) {
        last_delta <- fit$n.event[which(fit$time == Time[N])]
        if (last_delta == 1) {
          Yx <- Y[N-1] + (Y[N]-Y[N-1]) / (X[N]-X[N-1]) * (Xx - X[N-1])
        } else {
          Yx <- NA
        }
      } else {
        j <- max(which(Time < x))
        Yx <- Y[j] + (Y[j+1]-Y[j]) / (X[j+1]-X[j]) * (Xx - X[j])
      }
      if (is.na(Yx)) {
        S[i] <- NA
      } else {
        S[i] <- exp(-exp(Yx))
      }
    }
  }
}

```

```

    }
  } else {
    # Klasyczny przypadek  $m > 2$  z wagami i regresją
    w <- compute_weights(Time, x, m)
    reg <- lm(Y ~ X, weights = w)
    a <- coef(reg)[1]
    b <- coef(reg)[2]
    S[i] <- exp(-exp(a) * x^b)
    S[i] <- max(min(S[i], 1), 0)
  }
}
return(S)
}
return(estimator)
}

rz.estimator.plot <- function(df, m = 2, to = 3) {
  estimator <- rossa.zielinski.estimator(df, m)

  time <- seq(0, to, length.out = 1000)
  surv <- estimator(time)

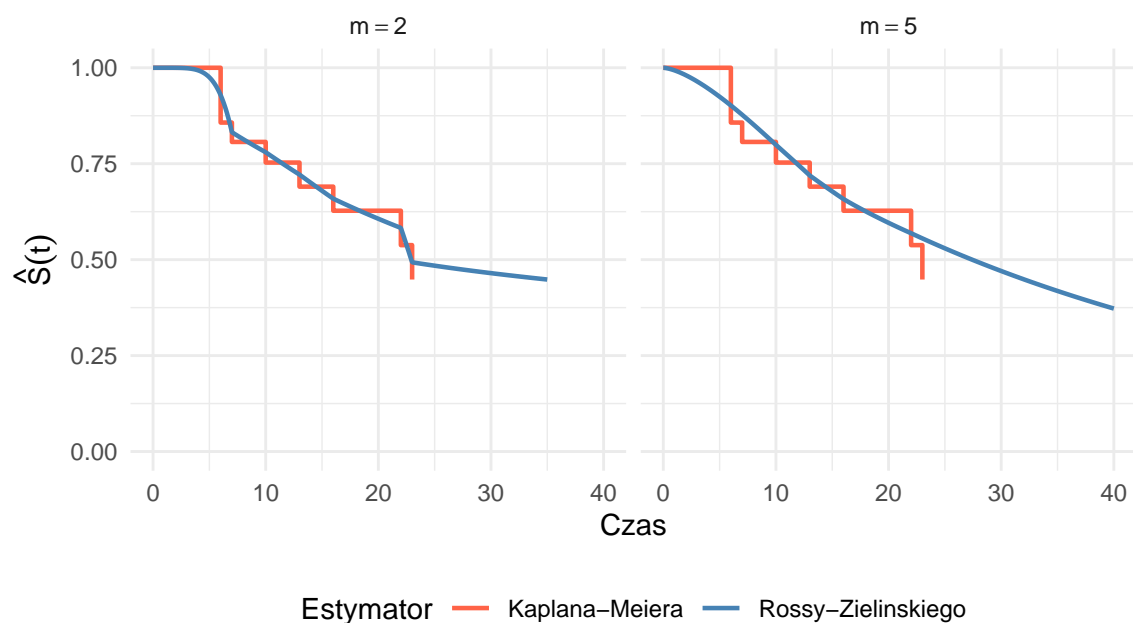
  plot.df <- data.frame(time = time, surv = surv)

  ggplot(plot.df, aes(x = time, y = surv)) +
    geom_line(color = "tomato", linewidth = 1) +
    scale_y_continuous(limits = c(0, 1)) +
    labs(title = "Estymator Rossa-Zieliński",
         x = "Czas do zdarzenia (t)",
         y = "Funkcja przeżycia S(t)") +
    theme_minimal()
}

```

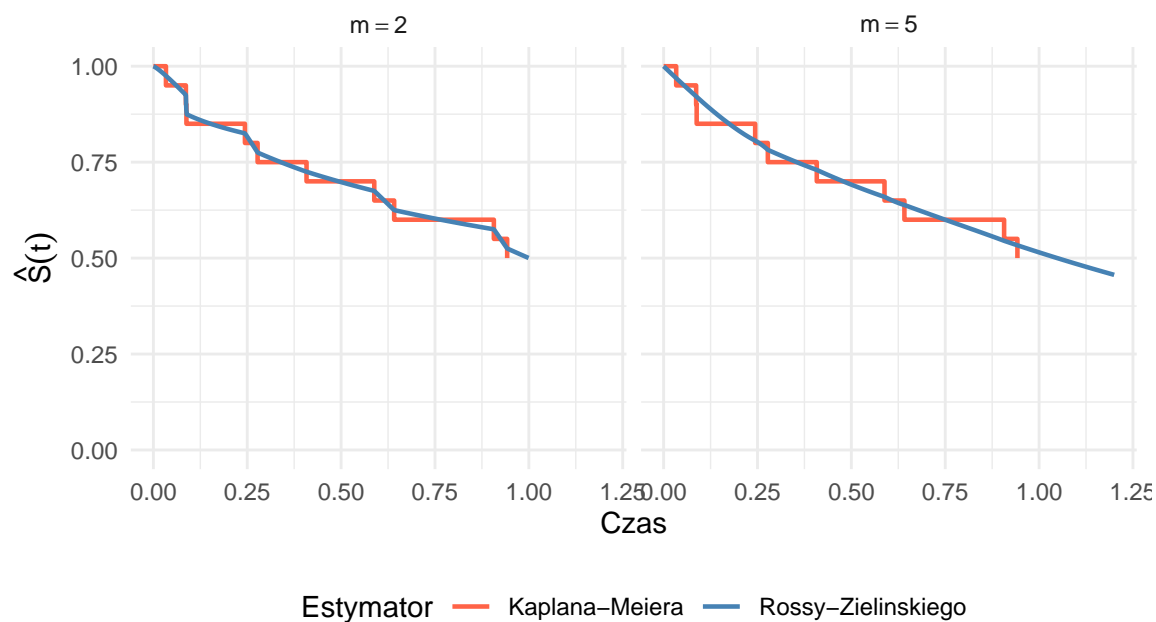
Porównano graficznie estymator Kaplana-Maiera z jego ulepszoną wersją: estymatorem Rossy-Zielińskiego.

W tym celu sporządzono wykresy dla danych klinicznych pacjentów przedstawionych w artykule Rossy-Zielińskiego, a także dla danych z zadania 3 z listy 2 oraz z zadania 2 z listy 7.



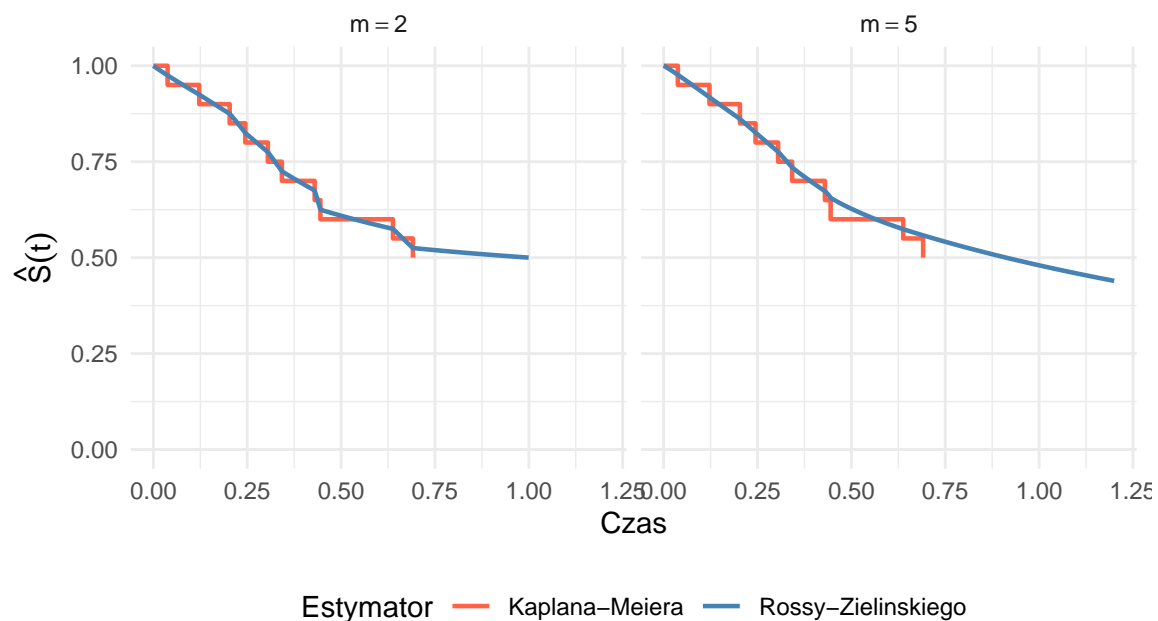
Wykres 9: Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych klinicznych pacjentów

Z Wykresu 9. można odczytać, że generowane wykresy są bardzo podobne do tych przedstawionych w artykule. Można przypuszczać, że opracowany algorytm działa poprawnie.



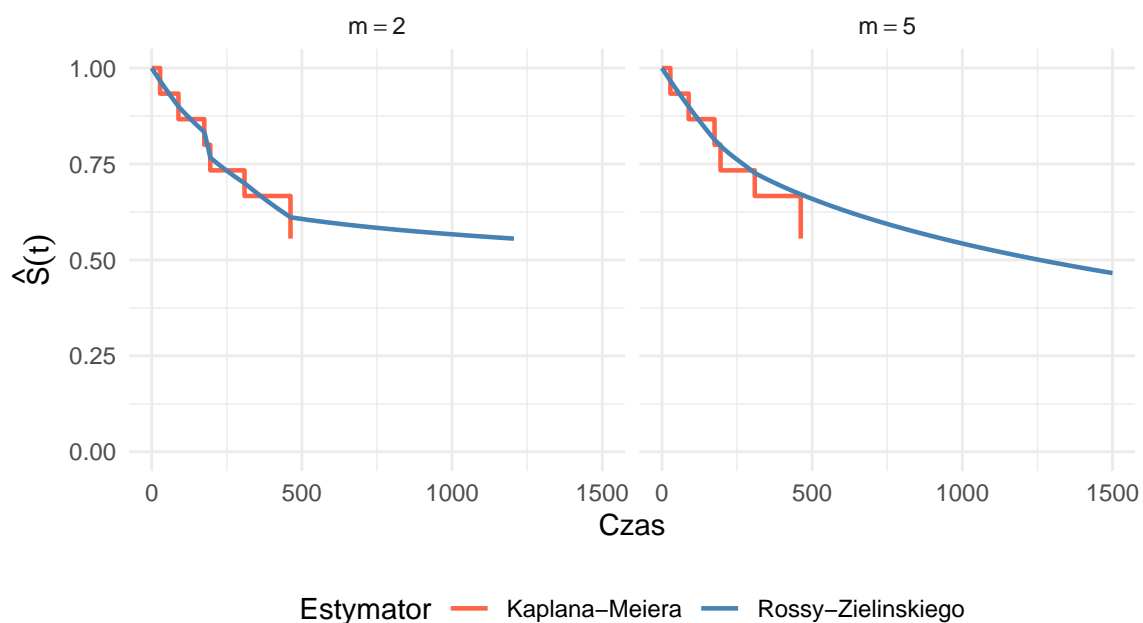
Wykres 10: Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych dotyczących leków - lek A

Wykres 10. pokazuje, w jaki sposób estymator wygładza klasyczny estymator Kaplana-Meiera dla danych dotyczących leków - lek A.



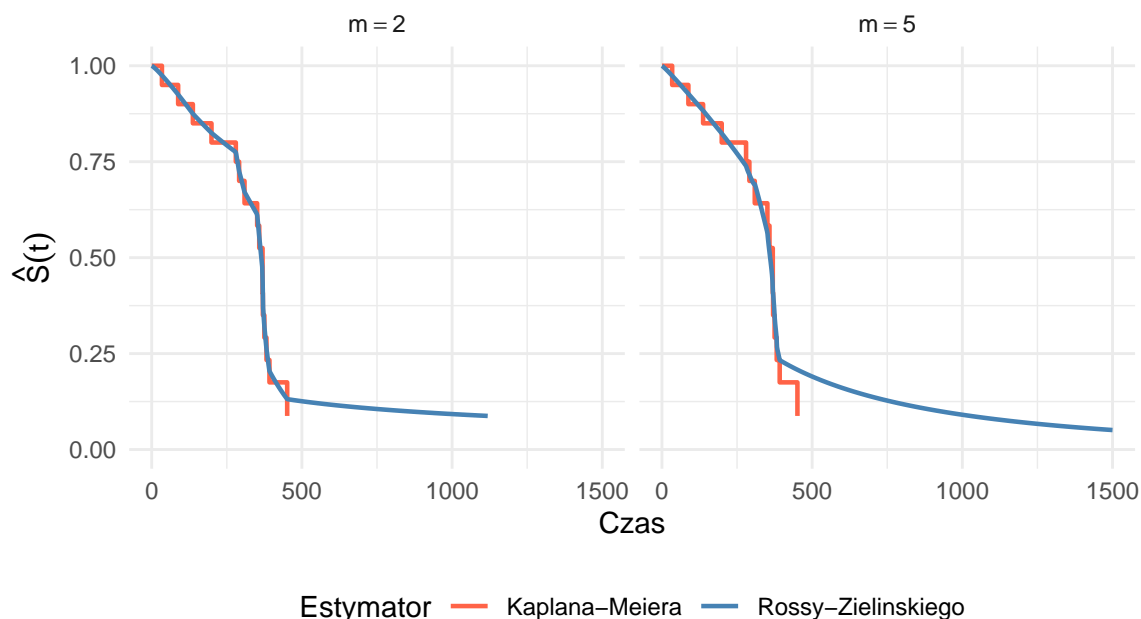
Wykres 11: Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych dotyczących leków - lek B

Wykres 11. pokazuje, w jaki sposób estymator wygladza klasyczny estymator Kaplana-Meiera dla danych dotyczących leków - lek B.



Wykres 12: Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych dotyczących pacjentów z rakiem jajnika - typ II

Wykres 12. pokazuje, w jaki sposób estymator wygladza klasyczny estymator Kaplana-Meiera dla danych dotyczących pacjentów z rakiem jajnika typu II.



Wykres 13: Porównanie wstymatora Kaplana-Meiera oraz Rossy-Zielińskiego dla zbioru danych dotyczących pacjentów z rakiem jajnika - typ IIIA

Wykres 13. pokazuje, w jaki sposób estymator wygładza klasyczny estymator Kaplana-Meiera dla danych dotyczących pacjentów z rakiem jajnika typu IIIA. Tym razem czasy są znacznie krótsze, a estymator dla wartości powyżej ostatniej obserwacji “odbija” w prawo. Można zauważyć, że dla  $m = 5$  estymator “odbija” nieco wcześniej.

Podsumowując, estymator Rossy-Zielińskiego sprawnie wygładza funkcję przeżycia estymowaną przez Kaplana-Meiera, dobrze dopasowując ją w okolicach czasów zdarzeń, jednocześnie eliminując nagłe skoki i fluktuacje wynikające z małych prób. Dzięki temu estymator daje bardziej stabilny i ciągły obraz ryzyka przeżycia, ułatwiając interpretację oraz porównania między grupami pacjentów.

### 5.3 Zadanie 3

Zadanie wyprowadzenia ścisłych własności asymptotycznych dla tego estymatora jest bardzo trudne, a autorzy [2] wręcz sugerują, że może być niemożliwe do uzyskania w interesującej formie. Jednak twierdzą oni, że dla dużej liczności próby  $n$ , tym samym dla dużej liczby  $N$ , ich estymator będzie zachowywał się jak estymator Kaplana-Meiera, tym samym zachowując jego asymptotyczne własności. Informacja ta znajduje się na końcu trzeciej sekcji, strona 10.

## 6 Bibliografia

- [1] R. D. Gupta i D. Kundu, *Generalized Exponential Distributions*, Australian & New Zealand Journal of Statistics, 41(2):173–188, 1999, PDF.
- [2] Agnieszka Rossa i Ryszard Zieliński, *A Simple Improvement of the Kaplan-Meier Estimator*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 31(1):147-158, 2002, DOI: 10.1081/STA-120002440.