STRUKTURY IMPLEMENTACE ČÍSLICOVÝCH FILTRŮ

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Kurz: **Signálové procesory**

Autor: Petr Sysel

Lektor: Petr Sysel

evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vytvoření této videopřednášky bylo podpořeno projektem č. CZ.1.07/2.2.00/28.0098
Evropského sociálního fondu a státním rozpočtem České republiky.

Obsah přednášky

Rozdělení číslicových filtrů

Rozlišujeme dva základní typy číslicových filtrů:

- nerekurzivní – bez zpětných vazeb:
  - označují se také jako s konečnou impulsní charakteristikou FIR (Finite Impulse Response) nebo plovoucí průměr MA – Moving Average,
- rekurzivní – se zpětnými vazbami:
  - označují se také jako s nekonečnou impulsní charakteristikou IIR (Infinite Impulse Response),
  - v případě čistě rekurzivních algoritmů se označují jako autoregresivní AR – autoregresive,
  - v případě, že obsahují také přímé vazby, označují se jako ARMA – Autoregresive Moving Average.

Implementace číslicových filtrů typu FIR

Základní vlastnosti číslicových filtrů typu FIR:

- jedná se o čistě nerekurzivní číslicové systémy v jejichž diferenční rovnici $a_{s-1} = a_{s-2} = \ldots a_1 = a_0 = 0$,
- přenosová funkce má pouze nulové body a $(N-1)$násobného pólu v počátku souřadnic

$$H(z) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} h[k] z^k}{z^{N-1}},$$

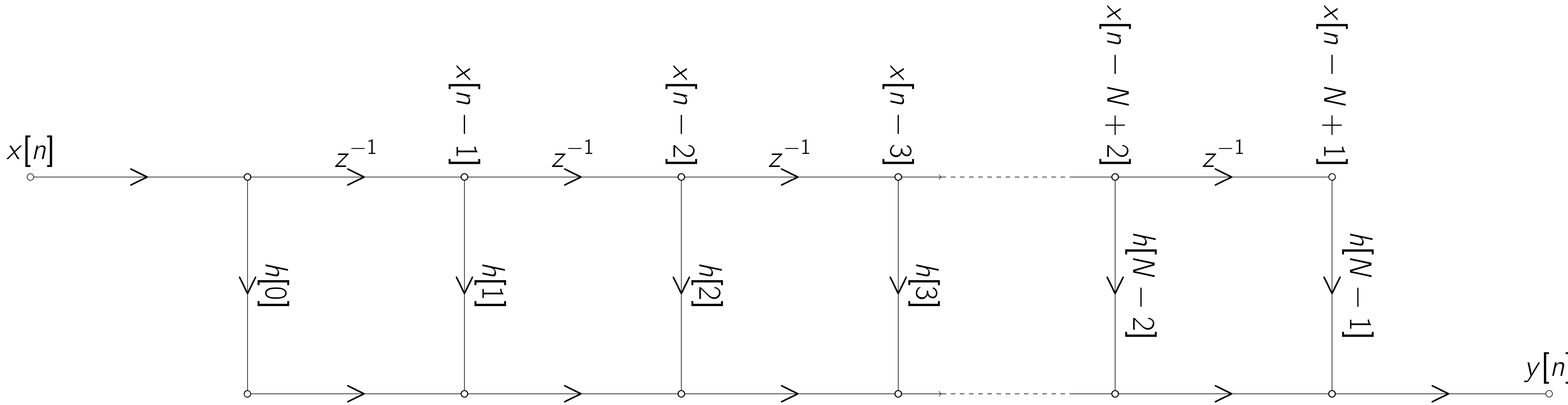
- póly leží vždy uvnitř jednotkové kružnice, proto jsou filtry vždy stabilní,
- pokud je impulsní charakteristika symetrická nebo antisymetrická, je fázová kmitočtová charakteristika lineární,
- pro zadané toleranční schéma je řád systému několikanásobně větší než u IIR filtru.

Implementace číslicových filtrů typu FIR

- Nejčastěji jsou implementovány přímo z diferenční rovnice

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m],$$

- popis pomocí grafu signálových toků



Implementace číslicových filtrů typu FIR

- Při implementaci v signálovém procesoru využijeme modulo adresování,
- do jednoho bloku uložíme koeficienty impulsní charakteristiky,
- do druhého bloku ukládáme vzorky signálu,
- nejstarší vzorek je vždy přepsán hodnotou nového vzorku,
- v případě symetrické nebo antisymetrické impulsní charakteristiky je možné výpočet urychlit,
- filtry jsou obecně také méně citlivé na kvantování, ale hodnoty koeficientů je nutné upravit do rozsahu registrů.

Implementace číslicových filtrů typu IIR

Základní vlastnosti filtrů typu IIR:

- ve struktuře jsou také zpětné vazby,
- přenosová funkce má nulové body i póly

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{r} b_k z^k}{\sum_{l=0}^{s} a_l z^l},$$

- póly mohou ležet mimo jednotkovou kružnici a filtr může být nestabilní,
- fázová kmitočtová charakteristika není lineární,
- pro zadané toleranční schéma je řád systému několikanásobně menší než u FIR filtru.

Implementace číslicových filtrů typu IIR

- Filtr typu IIR s reálnými koeficienty druhého řádu s reálnými koeficienty má tvar
$$H(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z^1 + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0},$$
- často se celá přenosová funkce dělí koeficientem a_2 tak, aby byl roven 1,
- hodnota koeficientu a_1 je maximálně dvě:

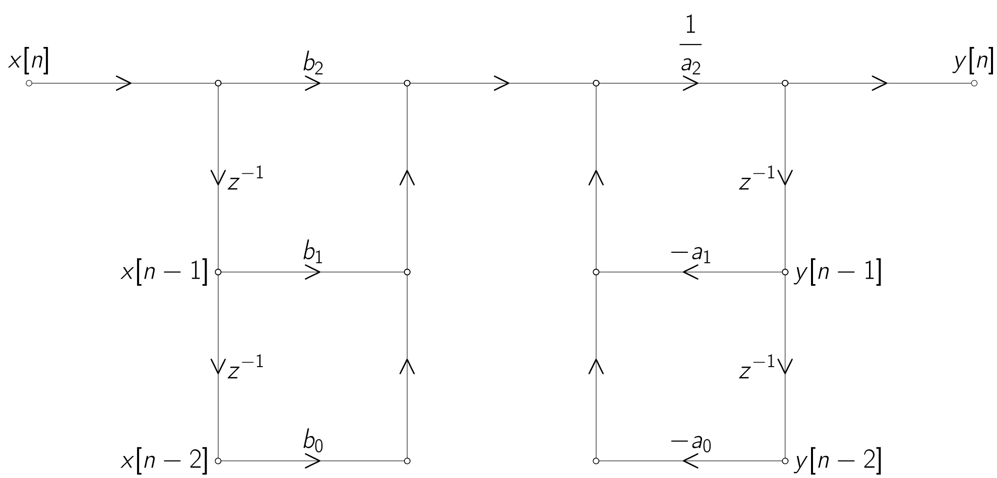
$$\begin{aligned}(z-p_i)(z-p_i^*) &= (z - Re\{p_i\} - \mathrm{j}Im\{p_i\})(z - Re\{p_i\} + \mathrm{j}Im\{p_i\}) \\ &= z^2 - 2Re\{p_i\}z + \left(Re\{p_i\}^2 + Im\{p_i\}^2\right),\end{aligned}$$

- pokud je koeficient a_1 mimo rozsah zlomkového doplňku, dělí se celá přenosová funkce 2 $\Rightarrow$ výstup bude podělen dvakrát.

Graf signálových toků

- Po převodu přenosové funkce do časové oblasti získáme diferenční rovnici

$$y[n] = \frac{1}{a_2}\left(b_2x[n] + b_1x[n-1] + b_0x[n-2]\right.$$
$$\left. -a_1y[n-1] - a_0y[n-2]\right),$$



Kanonické a nekanonické struktury

- Uvedená struktura má dvakrát větší počet zpožďovacích členů než je řád filtru,
- to zvyšuje požadavky na velikost paměti, ve které budou uchovány hodnoty zpožděných vzorků,
- takové struktury se označují jako *nekanonické*,
- struktury, které mají stejný počet zpožďovacích členů jako je řád filtru, se označují jako *kanonické*.

Druhá kanonická forma

- Přenosovou funkci podělíme největší mocninou z

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}},$$

- přenosovou funkci rozšíříme o obraz stavových proměnných a rozdělíme na dvě části

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)}\frac{V(z)}{V(z)} = \frac{V(z)}{X(z)}\frac{Y(z)}{V(z)}, \\ \frac{V(z)}{X(z)} &= \frac{1}{a_2 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}, \\ \frac{Y(z)}{V(z)} &= \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1}. \end{aligned}$$

Druhá kanonická forma

- Dostaneme dvě rovnice

$$
\begin{aligned}
V(z) &= \frac{1}{a_2}X(z) - \frac{a_1}{a_2}V(z)z^{-1} - \frac{a_0}{a_2}V(z)z^{-2},\\
Y(z) &= b_2V(z) + b_1V(z)z^{-1} + b_0V(z)z^{-2},
\end{aligned}
$$

- zpětná transformace $\mathcal{Z}$

$$
\begin{aligned}
v[n] &= \frac{1}{a_2}x[n] - \frac{a_1}{a_2}v[n-1] - \frac{a_0}{a_2}v[n-2],\\
y[n] &= b_2v[n] + b_1v[n-1] + b_0v[n-2],
\end{aligned}
$$

- zavedeme stavové proměnné

$$
\begin{aligned}
v_1[n] &= v[n-2],\\
v_2[n] &= v[n-1],\\
v_2[n+1] &= v[n].
\end{aligned}
$$

Druhá kanonická forma

- Upravené rovnice

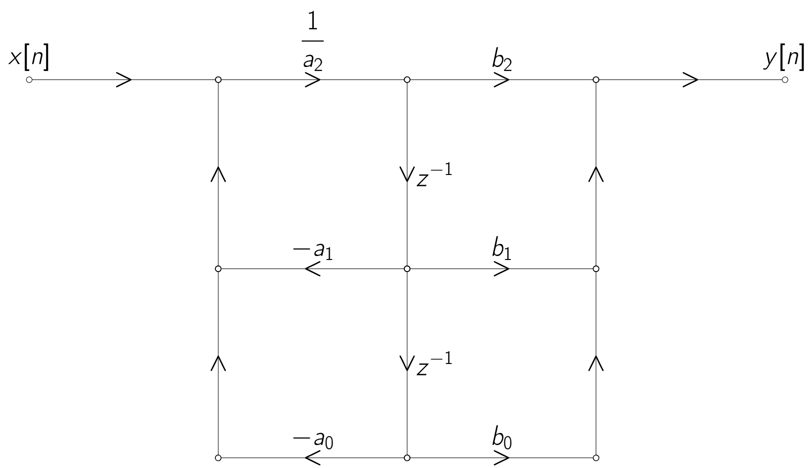
$$
\begin{aligned}
v_2[n+1] &= \frac{1}{a_2}x[n] - \frac{a_1}{a_2}v_2[n] - \frac{a_0}{a_2}v_1[n],\\
v_1[n+1] &= v_2[n],
\end{aligned}
$$

$$
y[n] = b_2 v_2[n+1] + b_1 v_2[n] + b_0 v_1[n],
$$

$$
\begin{aligned}
y[n] = {} & \frac{b_2}{a_2}x[n] + \left(b_1 - a_1\frac{b_2}{a_2}\right) v_2[n] + \\
& + \left(b_0 - a_0\frac{b_2}{a_2}\right) v_1[n].
\end{aligned}
$$

Druhá kanonická forma

$$
\begin{aligned}
v_2[n+1] &= \frac{1}{a_2}x[n] - \frac{a_1}{a_2}v_2[n] - \frac{a_0}{a_2}v_1[n], \\
v_1[n+1] &= v_2[n], \\
y[n] &= \frac{b_2}{a_2}x[n] + \left(b_1 - a_1\frac{b_2}{a_2}\right)v_2[n] + \left(b_0 - a_0\frac{b_2}{a_2}\right)v_1[n].
\end{aligned}
$$



První kanonická forma

- Vyjdeme přímo z diferenční rovnice

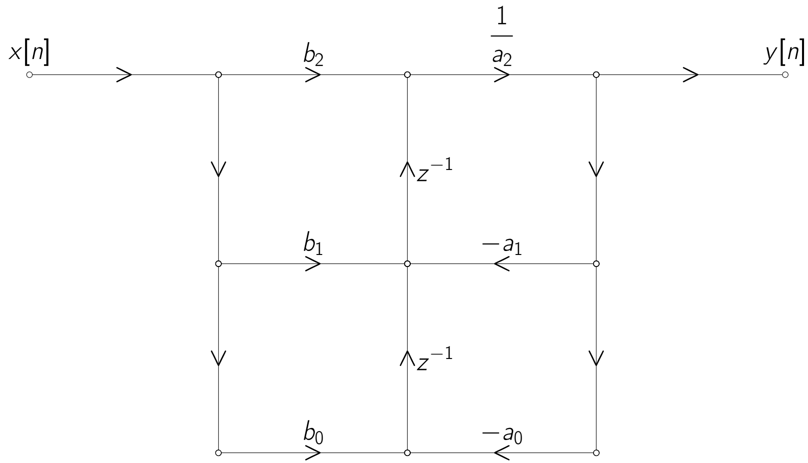
$$
\begin{aligned}
y[n] \;=\; & \frac{b_2}{a_2}x[n] + \frac{b_1}{a_2}x[n-1] + \frac{b_0}{a_2}x[n-2] - \\
& -\frac{a_1}{a_2}y[n-1] - \frac{a_0}{a_2}y[n-2],
\end{aligned}
$$

- sloučíme členy se stejným zpožděním

$$
\begin{aligned}
y[n] = \frac{b_2}{a_2}x[n] \;&+\; \frac{1}{a_2}\left\{(b_1x[n-1] - a_1y[n-1]) + \right. \\
&+\; \left.(b_0x[n-2] - a_0y[n-2])\right\}.
\end{aligned}
$$

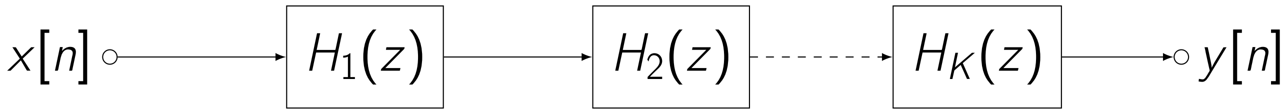
První kanonická forma

$$
\begin{aligned}
v_1[n+1] &= b_1x[n] - a_1y[n] + v_2[n],\\
v_2[n+1] &= b_0x[n] - a_0y[n],\\
y[n] &= \frac{b_2}{a_2}x[n] + \frac{1}{a_2}v_1[n].
\end{aligned}
$$



Třetí kanonická forma

- Přenosovou funkci rozdělím na několik sekcí druhého řádu zapojených sériově

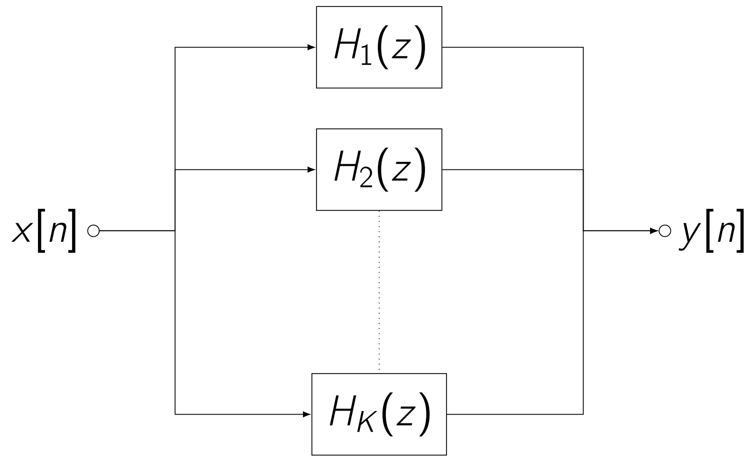


- celková přenosová funkce

$$H(z) = \prod_{i=1}^{K} H_i(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot \ldots \cdot H_K(z).$$

Čtvrtá kanonická forma

- Přenosovou funkci rozdělím na několik sekcí druhého řádu zapojených paralelně

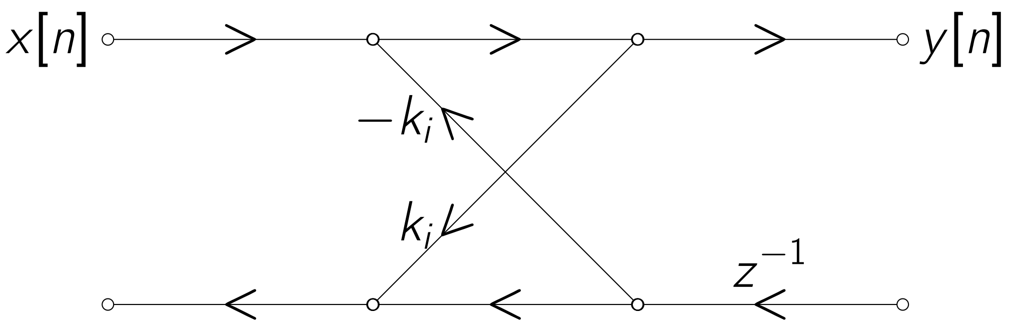


- celková přenosová funkce

$$H(z) = \sum_{i=1}^{K} H_i(z) = H_1(z) + H_2(z) + \ldots + H_K(z).$$

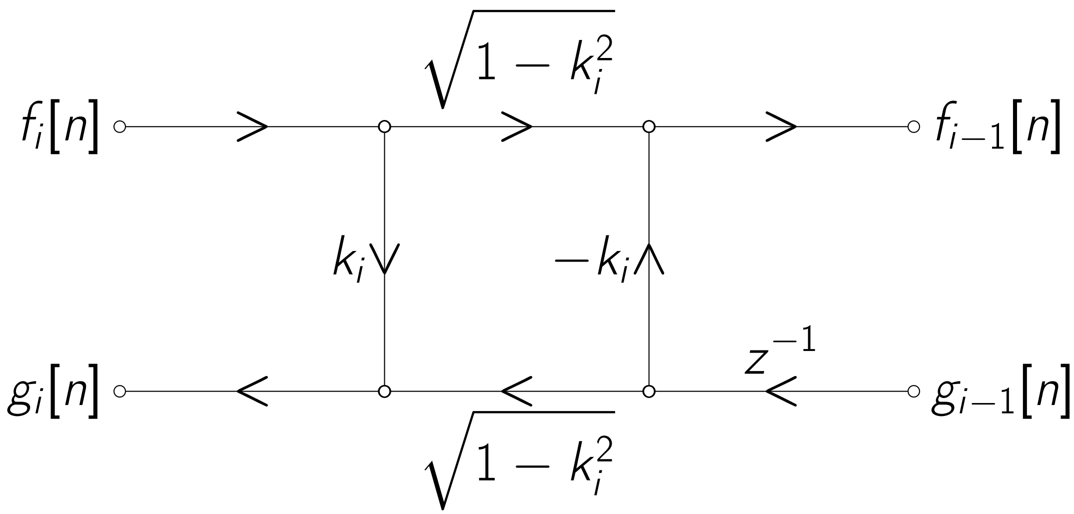
Křížová struktura – Lattice

- Systém mající pouze dva póly,
- používá se u řečových syntezátorů pro dobré šumové vlastnosti,
- koeficienty jsou koeficienty odrazu,
- teoretická realizace:



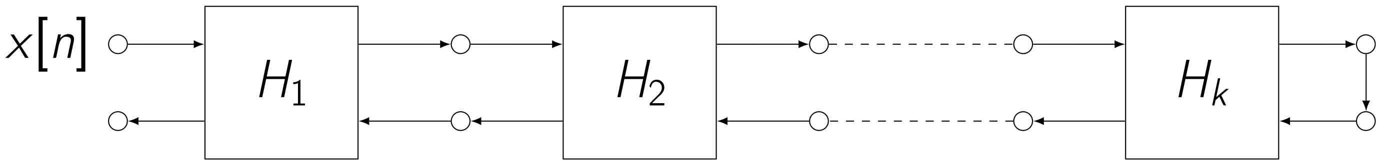
Křížová struktura – Lattice

- Praktická realizace:



Křížová struktura

- Vyšší řád dosáhneme kaskádním zapojením dvojbranů,
- koeficienty α_i určují nulové body.



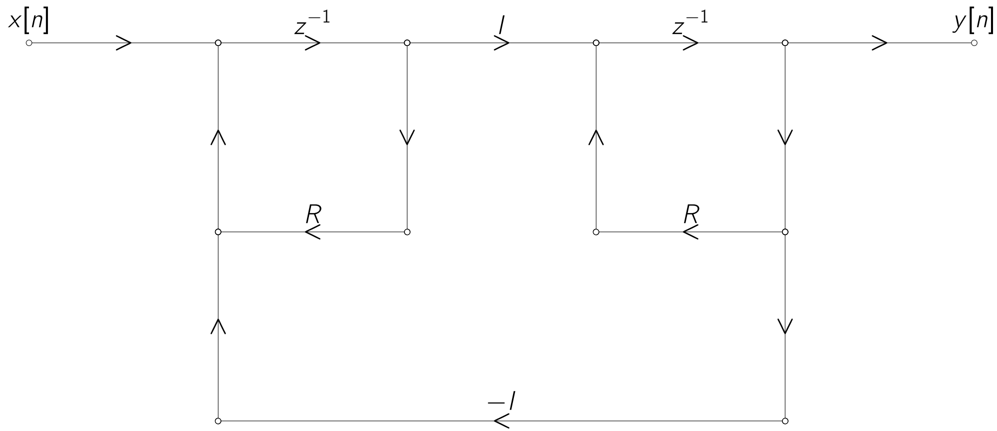
Vazební struktura

- Výhodou je, že rozložení nulových bodů a pólů po kvantování je rovnoměrné v celé rovině z,
- systém 2. řádu,
- koeficienty přímo udávají reálnou a imaginární složku pólů,
- přenosová funkce má tvar

$$H(z) = \frac{I}{z^2 - 2Rz + (R^2 + I^2)}.$$

Vazební struktura

$$\begin{aligned} v_1[n+1] &= x[n] + Rv_1[n] - Iv_2[n] \\ y[n] = v_2[n+1] &= Rv_2[n] + Iv_1[n], \end{aligned}$$



Děkuji za pozornost