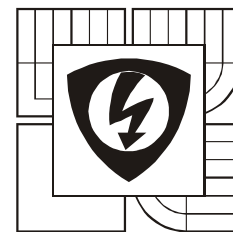


Generování a detekce harmonického signálu



Kurz: Signálové procesory

Autor: Petr Sysel

Lektor: Petr Sysel



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vytvoření této videopřednášky bylo podpořeno projektem č. CZ.1.07/2.2.00/28.0098
Evropského sociálního fondu a státním rozpočtem České republiky.

Obsah přednášky

Generace harmonického signálu

- Tabulkou hodnot

- První kanonická struktura

- Vazební struktura

Detekce harmonického signálu

- Goertzelův algoritmus

Implementace Fourierovy transformace

- Motýlek decimace v čase u FFT

- Motýlek decimace v kmitočtu u FFT

- Good-Thomas algoritmus

Generace harmonického signálu

- Harmonický signál lze generovat z Look Up Table tabulky hodnot,
- pro pevně zadaný kmitočet je tabulka naplněna vzorky jedné periody nebo půl periody,
- tabulku lze také použít pro generování signálu o různém kmitočtu změnou posouvání v tabulce,
- velikost tabulky se volí malá z důvodů náročnosti na paměť, což ale omezuje přesnost kmitočtu generovaného signálu,
- často je přímo z výroby v procesoru uloženo např. 256 vzorků půl periody funkce sinus.

Generace harmonického signálu

- Za předpokladu, že tabulka obsahuje M hodnot funkce \sin

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{M}, n = 0, 1, \dots, M-1, \right)$$

- pokud budeme se zadaným vzorkovacím kmitočtem vyčítat všechny vzorky z tabulky, generujeme signál o kmitočtu

$$f = \frac{F_S}{M},$$

- což je také nejnižší kmitočet, který lze takto generovat,
- pokud se budeme v tabulce hodnot pohybovat po násobcích k , bude generovaný signál mít kmitočet

$$f = \frac{F_S}{M}k,$$

- pro dvojnásobné rozlišení kmitočtů se ukládá jen půlperioda – pouze při dosažení konce tabulky je nutné změnit znaménko.

Generování harmonického signálu

- Ke generování harmonického signálu lze také použít rezonátor s póly umístěnými na jednotkové kružnici

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 2 \cos \left(2\pi \frac{f}{F_S} \right) z + 1},$$

- vstupním signálem je potom Diracův impuls nebo je možné rezonátor rozkmitat pouze nastavením počátečních hodnot stavových proměnných,
- tím je možné generovat také signály s fázovým zpožděním,
- při uvažování pevné řádové čárky dojde vlivem kvantování koeficientu $b_1 = -2 \cos \left(2\pi \frac{f}{F_S} \right)$ ke změně kmitočtu,
- kmitočet výstupního signálu je však obecně mnohem přesnější než v případě generování z tabulky hodnot.

Realizace rezonátoru v první kanonické formě

- Stavové rovnice první kanonické formy přejdou u rezonátoru do tvaru

$$\begin{aligned}y[n] &= v_1[n] \\v_1[n+1] &= -a_1 y[n] + v_2 \\v_2[n+1] &= -y[n]\end{aligned}$$

- po kvantování je koeficient $a_0 = 1$, proto je systém stále na mezi stability a amplituda kmitů je stálá,
- po kvantování se změní koeficient a_1 , dojde k posunutí pólu po jednotkové kružnici a výstupní signál bude mít kmitočet

$$f = \arccos\left(\frac{-Q[a_1]}{2}\right) \frac{F_S}{2\pi},$$

- největší vliv má kvantování na změnu kmitočtu v okolí 0 a $\frac{F_S}{2}$,

Realizace rezonátoru ve vazební struktuře

- Stavové rovnice vazební struktury přejdou u rezonátoru do tvaru

$$v_1[n+1] = \sin\left(2\pi\frac{f}{F_S}\right) v_2[n] + \cos\left(2\pi\frac{f}{F_S}\right) v_1[n]$$

$$v_2[n+1] = \cos\left(2\pi\frac{f}{F_S}\right) v_2[n] - \sin\left(2\pi\frac{f}{F_S}\right) v_1[n]$$

$$y[n] = v_1$$

- po kvantování se změní reálná i imaginární složka pólů,
- po kvantování se pól může dostat vně jednotkové kružnice, pak amplituda bude narůstat – lze ošetřit saturací, ale dojde k oříznutí signálu,
- po kvantování se pól může dostat i dovnitř jednotkové kružnice, pak amplituda signálů bude klesat.

Realizace rezonátoru ve vazební struktuře

- Po kvantování bude mít výstupní signál kmitočet

$$f = \arctan \left(\frac{I}{R} \right) \frac{F_S}{2\pi},$$

- chyba kmitočtu je rozložena přibližně rovnoměrně v celém rozsahu od 0 do $\frac{F_S}{2}$,
- pro počáteční fázi signálu φ je nutné nastavit počáteční hodnoty stavových proměnných

$$v_1[0] = \cos(\varphi), v_2[0] = \frac{\cos \left(2\pi \frac{f}{F_S} + \varphi \right) - Rv_1[0]}{I}.$$

Detekce harmonického signálu

- V mnoha aplikacích není nutné počítat celé spektrum, ale postačuje zjistit modul (popř. fázi) vybraných harmonických složek,
- typickým příkladem je tónová volba používaná v telefonní technice

DTMF	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz	1633 Hz
697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
852 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D

- typická délka volby je 50 ms a typická mezera mezi číslicemi je také mezera 50 ms.

Detekce harmonického signálu

- Vzorek diskretní Fourierovy transformace pro složku k je roven

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}},$$

- rovnici můžeme rozšířit 1 ve tvaru $e^{j \frac{2\pi kN}{N}}$,
- složku k diskretní Fourierovy transformace délky N dostaneme

$$X_N(k) = y_k[m]|_{m=N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h_k[m-n]|_{m=N}.$$

kde

$$h_k[N-n] = e^{-j \frac{2\pi k(n-N)}{N}}.$$

Goertzelův algoritmus

- Hodnotu k . složky diskrétní Fourierovy transformace dostaneme jako N . vzorek výstupního signálu filtru s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}},$$

- diferenční rovnice by obsahovala komplexní násobení

$$y_k[m] = x[m] + e^{j\frac{2\pi k}{N}} y_k[m-1],$$

- abychom vyloučili komplexní násobení, přenosovou funkci rozšíříme komplexně sdruženým pólem

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + z^{-2}},$$

- v případě realizace druhou kanonickou formou je komplexní násobení možné provádět na výstupu jen jednou za N vzorků.

Goertzelův algoritmus

- Pokud nás nezajímá fázový posun, lze algoritmus upravit tak, aby výstup byl úměrný modulu spektra

$$|y_k[N]|^2 = v_1^2[N] + v_1^2[N-1] - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) v_1[N]v_1[N-1],$$

kde

$$v_1[n+1] = x[n] + 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) v_1[n] - v_2[n],$$

- v rovnici už figurují pouze reálné koeficienty.

Příklad Goertzelova algoritmu

- Pro detekci DTMF se často volí $N = 205$, což při vzorkovacím kmitočtu $F_S = 8\,000\text{ Hz}$ odpovídá přibližně 25 ms,
- pro tuto délku lze určit koeficient $b_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ jako:

kmitočet [Hz]	697	770	852	941	1209	1336	1477	1633
k	18	20	22	24	31	34	38	42
$(b_1)_{10}$	1,703275	1,635585	1,562297	1,482867	1,163138	1,008835	0,790074	0,559454
$(\frac{1}{2}b_1)_{16}$	6D02	68B2	63FD	5EE7	4A71	4091	3291	23CE

- většina koeficientů je větší než 1, proto se dělí 2,
- pokud dvě po sobě následující výstupní hodnoty přesáhnou zvolený práh, označí se detekce jako platná.

Rozšíření pro neceločíselná k

- Pokud $k \notin \mathbb{Z}$, pak

$$e^{j2\pi k \frac{N}{N}} \neq 1,$$

- lze ale použít

$$e^{j2\pi k \frac{N}{N}} e^{-j2\pi k \frac{N}{N}} = 1,$$

- odvození je potom stejné, ale výsledek se musí násobit

$$e^{-j2\pi k \frac{N}{N}} = e^{-j2\pi k},$$

- pokud nás nezajímá fáze, pak násobení uvedenou konstantou není nutné.

Základy Fourierovy transformace

- Přímá diskrétní Fourierova transformace je definována vztahem

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, \dots, N-1,$$

- zpětná diskrétní Fourierova transformace je definována vztahem

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

- uvažujme délku transformace $N = 4$

$$S(k) = \sum_{n=0}^3 s[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Odvození decimace v čase DIT

- Sumu lze rozepsat do tvaru

$$k = 0 : S(0) = s[0] + s[1] + s[2] + s[3],$$

$$k = 1 : S(1) = s[0] + s[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}} + s[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}2} + s[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}3},$$

$$k = 2 : S(2) = s[0] + s[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}2} + s[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}4} + s[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}6},$$

$$k = 3 : S(3) = s[0] + s[1]e^{-j\frac{2\pi}{4}3} + s[2]e^{-j\frac{2\pi}{4}6} + s[3]e^{-j\frac{2\pi}{4}9},$$

- využijeme periodicity exponenciální funkce

$$e^{-j(\alpha+2k\pi)} = e^{-j\alpha},$$

a symetrie

$$e^{-j(\alpha+\pi)} = -e^{-j\alpha}.$$

Odvození decimace v čase DIT

- Po úpravách dostaneme

$$k = 0 : S(0) = s[0] + s[2] + (s[1] + s[3]),$$

$$k = 1 : S(1) = s[0] - s[2] + (s[1] - s[3]) e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

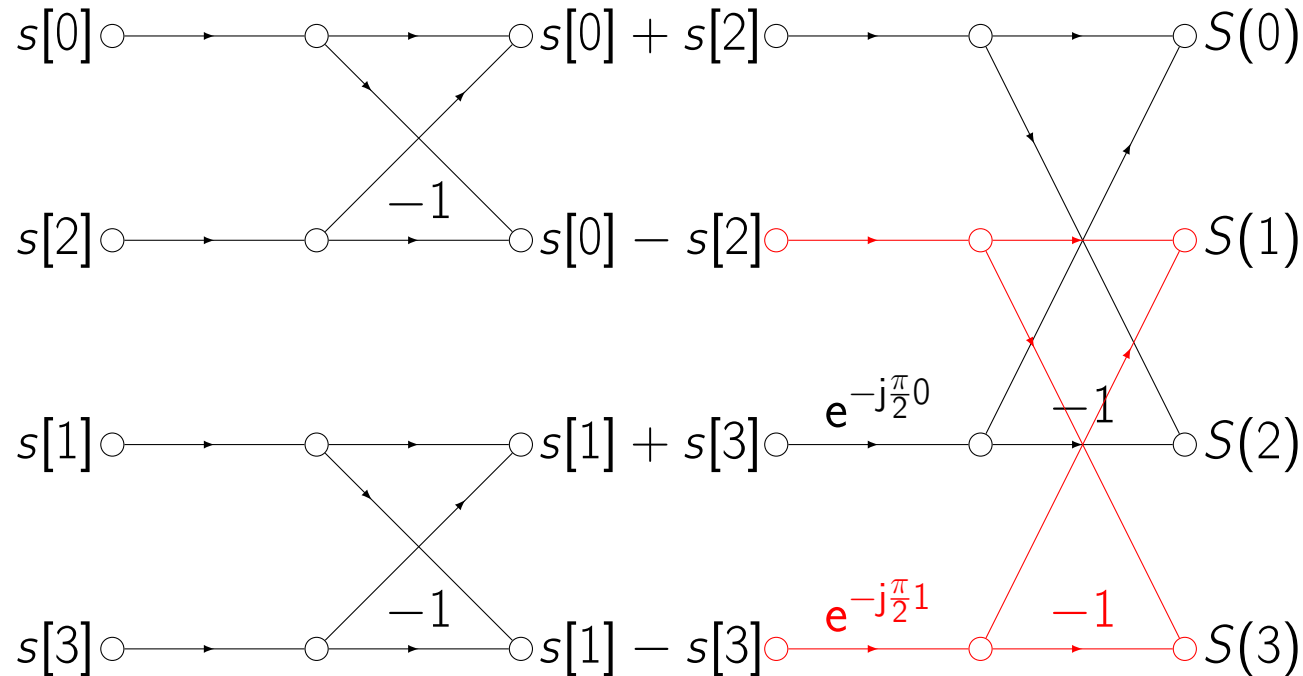
$$k = 2 : S(2) = s[0] + s[2] - (s[1] + s[3]),$$

$$k = 3 : S(3) = s[0] - s[2] - (s[1] - s[3]) e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

- vidíme, že si rovnice jsou podobné:
 - nejprve vypočítáme $S'(0) = s[0] + s[2]$, $S'(1) = s[0] - s[2]$
a podobně $S'(2) = s[1] + s[3]$, $S'(3) = s[1] - s[3]$,
 - poté vypočítáme $S(0) = S'(0) + S'(2)$, $S(2) = S'(0) - S'(2)$
a podobně $S(1) = S'(1) + S'(3)e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $S(4) = S'(1) - S'(3)e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Odvození decimace v čase DIT

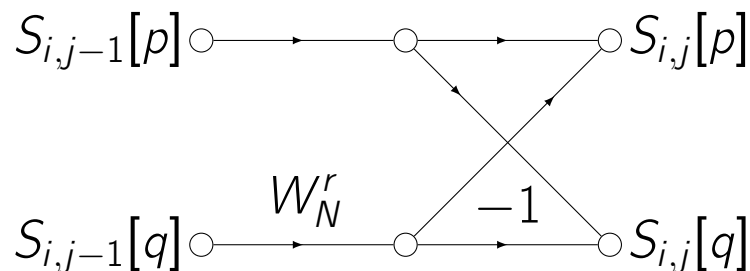
- Graf signálových toků



- vstupní data jsou v bitově reverzním pořadí.

Zavedení motýlku

- Základní blok rychlé Fourierovy transformace se označuje jako motýlek (butterfly)



- rozdělení na motýlky je možné, pokud délka transformace je rovna mocnině dvou $N = 2^m$, tedy $m = \log_2 N$,
- index j označuje číslo stupně, $j = 1, 2, \dots, m$,
- index i označuje číslo sekce ve stupni $i = 1, 2, \dots, 2^{m-j}$,
- koeficient W_N^r označuje tzv. twiddle faktor $W_N^r = e^{-j\frac{2\pi}{N}r}$, kde číslo motýlku v sekci $r = 0, 1 \cdot 2^{m-j}, 2 \cdot 2^{m-j}, \dots, (2^{j-1} - 1) \cdot 2^{m-j}$.

Zavedení motýlku

- Všechny hodnoty jsou komplexní čísla

$$S_{i,j-1}[p] = c + jd,$$

$$S_{i,j-1}[q] = e + jf,$$

$$W_N^r = u + jv,$$

$$S_{i,j}[p] = C + jD,$$

$$S_{i,j}[q] = E + jF,$$

- potom stavové rovnice pro výpočet jednoho motýlku jsou

$$C = c + ue - vf,$$

$$D = d + uf + ve,$$

$$E = c - ue + vf = c + c - c - ue + vf = 2c - C,$$

$$F = d - uf - ve = d + d - d - uf - ve = 2d - D.$$

Implementace v signálovém procesoru

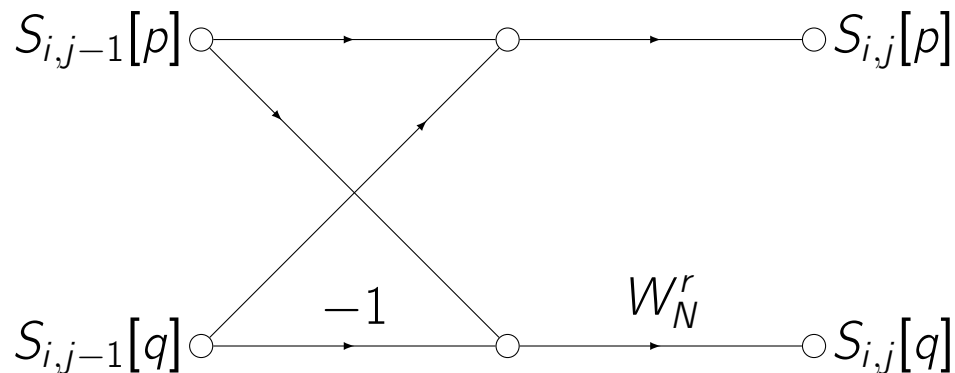
- Absolutní hodnota twiddle faktoru má maximální hodnotu 1, tzn. že výstup každého stupně může být maximálně dvojnásobný než vstup,
- aby se zabránilo vzniku přetečení, je možné:
 - podělit vstupní signál hodnotou $2^m = N$ – vede ke ztrátě přesnosti,
 - dělit výstup každého stupně 2 – výsledné hodnoty budou děleny $2^m = N$,
 - dělit výstup stupně, u kterého jsou hodnoty větší než 0,5.
- Hodnota $u = \cos\left(-\frac{2\pi}{N}r\right)$ může nabývat i hodnoty 1, která je mimo rozsah dvojkového doplňku – do paměti uložíme hodnoty $-u$, (hodnoty $v = \sin\left(-\frac{2\pi}{N}r\right)$ jsou v rozsahu dvojkového doplňku).

Podpora u některých procesorů

- Některé procesory podporují zvláštní instrukce optimalizované pro FFT – např. 56F8xx `subl a,d,b x:(r1)+,ad`, která
 - vynásobí hodnotu registru `d` hodnotou 2 a odečte hodnotu registru `a`, výsledek uloží do registru `b`,
 - hodnotu z paměti na adrese v registru `r1` uloží do registrů `a` a `d`,
 - zvýší adresu v registru `r1`.
- často podporují bitově reverzní adresování.

Decimace v kmitočtu DIF

- Podobně lze odvodit algoritmus decimace v kmitočtu,
- při tomto algoritmu jsou vzorky vstupního signálu v přirozeném pořadí a bitově reverzní jsou kmitočtové vzorky,
- operace motýlku má tvar:



Analýza kvantování

- Oba výstupy každého motýlky jsou zatíženy kvantovacím šumem,
- vzhledem k tomu, že se počítá s komplexními čísly, tak každá chyba má čtyři příspěvky od kvantování po násobení

$$e_p = e_q = e_1 + e_2 + e_3 + e_4,$$

- rozptyl chyby pak bude roven

$$\sigma_e^2 = 4 \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2B}}{3},$$

- vstupní signál postupně prochází $N - 1$ motýlky a za předpokladu, že jednotlivé chyby jsou nezávislé, bude celkový rozptyl roven

$$\sigma_e^2 = 4(N - 1) \frac{2^{-2B}}{12} \approx \frac{N 2^{-2B}}{3},$$

- odstup signálu od šumu pak bude

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10 \log_{10} \sigma_x^2 + 10 \log_{10} (3 \cdot 2^{2B}) - 10 \log_{10} (N - 1).$$

Cooley a Tuckey pro délku jinou než mocnina 2

- Výše popsany algoritmus odvodili Cooley a Tuckey,
- vstupní posloupnost je dělena na dvě s poloviční délkou,
- podobně lze postupovat i pro jiné délky než mocnina dvou - např. $5120 =$

$5 \cdot 1024$:

0	5	10	...
1	6	11	...
2	7	12	...
3	8	13	...
4	9	14	...

- poté provedeme fourierovu transformaci podél řádků (nebo sloupců),

Coolley a Tuckey pro délku jinou než mocnina 2

- vzorky přenásobíme korekční konstantou

$e^{j2\pi 0 \cdot 0/5}$	$e^{j2\pi 1 \cdot 0/5}$
$e^{j2\pi 0 \cdot 1/5}$	$e^{j2\pi 1 \cdot 1/5}$
$e^{j2\pi 0 \cdot 2/5}$	$e^{j2\pi 1 \cdot 2/5}$
$e^{j2\pi 0 \cdot 3/5}$	$e^{j2\pi 0 \cdot 3/5}$
$e^{j2\pi 0 \cdot 4/5}$	$e^{j2\pi 0 \cdot 4/5}$...	$e^{j2\pi i \cdot j/5}$

- provedeme fourierovu transformaci podél sloupců (nebo řádků),
- vypočítané vzorky spektra jsou poskládány kolmo na původní směr rozdělení

0	1	2	...
1024	1025	1026	...
...

Good a Thomas pro délku jinou než mocnina dvou

- Jiná možnost rozdělení je využití periodicity a symetrie exponenciální funkce

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

- předpokládejme, že délka transformace je dána součinem $N = N_1 N_2$,
- potom podle čínské zbytkové věty (Chinese remainder theorem) můžeme provést reindexaci

$$S(k_1 N_1^{-1} N_1 + k_2 N_2^{-1} N_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left(\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x[n_1 N_1^{-1} + n_2 N_2^{-1}] e^{-j2\pi \frac{n_2 k_2}{N_2}} \right) e^{-j2\pi \frac{n_1 k_1}{N_1}}$$

- tím opět rozdělíme jednu transformaci na dvě.

Good a Thomas pro délku jinou než mocnina dvou

- Hodnota N_1^{-1} je inverzní hodnota k N_1 v modulo N_2 aritmetice

$$\begin{aligned}(N_1^{-1}N_1) \bmod N_2 &= 1 \\ (N_2^{-1}N_2) \bmod N_1 &= 1\end{aligned}$$

- nevýhoda je, že vzorky jsou uspořádány mnohem složitěji,
- výhoda je, že není nutné přenásobení korekční konstantou.