Vliv kvantování

Kurz: Signálové procesory

Autor: Petr Sysel

Lektor: Petr Sysel

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vytvoření této videopřednášky bylo podpořeno projektem č. CZ.1.07/2.2.00/28.0098
Evropského sociálního fondu a státním rozpočtem České republiky.

Obsah přednášky

Analýza vlivu kvantování

- Stochastický způsob
- Deterministický způsob

Kvantování vstupního signálu

Kvantování mezivýsledků

- Mezní cykly z kvantování
- Mezní cykly z přetečení

Kvantování koeficientů

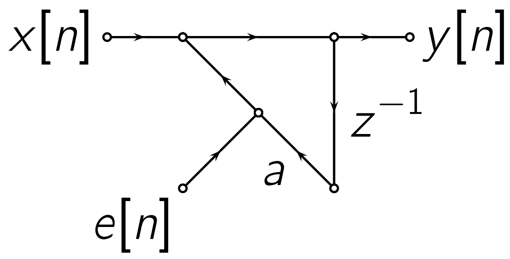
- Rozdělení na sekce 2. řádu

Možnosti analýzy vlivu kvantování

- Statistické metody:
  - kvantování je nahrazeno jednoduchým součtovým modelem,
  - předpokladem je statistická nezávislost kvantovacích šumu v různých místech algoritmu a nekorelovanost kvantovacího šumu a užitečného signálu,
  - lze určit odezvu na kvantovací šumy.
- Deterministické metody:
  - kvantování popisují jako nelineární operaci,
  - pro řešení nelze použít lineární metody,
  - používají se pro odhady mezí kvantovacích chyb.

Stochastický způsob vyjádření kvantování

- Graf signálových toků doplním o zdroj kvantovacího šumu



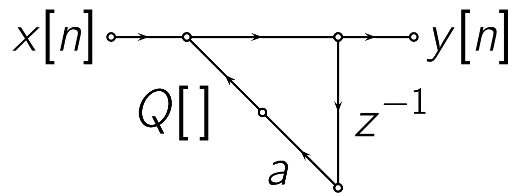
- výhodou je, že obvod zůstane lineární.

Stochastický model vyjádření kvantování

- Nemusíme znát přesné hodnoty zpracovávaného signálu $x[n]$,
- a tedy neznáme ani přesné hodnoty chybového signálu $e[n]$,
- musí však být splněny následující předpoklady:
  - posloupnost chybových vzorků $e[n]$ je stacionární náhodný proces,
  - jednotlivé vzorky $e[n]$ nejsou vzájemně korelovány,
  - chybový signál $e[n]$ není korelován se vstupním signálem $x[n]$,
  - rozložení hustoty pravděpodobnosti chybového signálu je rovnoměrné v celém rozsahu kvantovací chyby $(-q/2; q/2)$, resp. $(-q; 0)$.
- Předpoklady jsou nejlépe splněny pro vstupní signály, které mají charakter blízký náhodným signálům, např. akustické signálu (řeč, hudba).

Deterministický způsob vyjádření kvantování

- Graf signálových toků doplním o nelineární blok kvantování



- nevýhodou je, že obvod se stane nelineárním a musí se používat metody řešení nelineárních obvodů.

Místa vzniku problémů vlivem pevné délky slova

Kvantování projeví u algoritmů číslicového zpracování při:

- Kvantování vstupního signálu:
  - vstupní signál má známé parametry,
  - přesnost lze upravit použitým převodníkem.
- Kvantování koeficientů:
  - kvantování koeficientů musí být součástí návrhu,
  - ovlivňuje přenosovou funkci a stabilitu algoritmu.
- Kvantování mezivýsledků:
  - má náhodný charakter, protože závisí na konkrétním vstupním signálu,
  - nejvíce vadí přetečení a následná saturace nebo nulování.

Kvantování vstupního signálu

- Střední hodnota kvantovací chyby je rovna:

zaokrouhlení	usekávání
$m_{\mathrm{R}} = 0$	$m_{\mathrm{T}} = -\frac{q}{2}$.

- Rozptyl kvantovacího šumu je roven:

$$\sigma_{\mathrm{R}}^2 = \int_{-q/2}^{q/2} (x - m_{\mathrm{R}})^2 \, p(x)\mathrm{d}x = \frac{q^2}{12} = \sigma_{\mathrm{T}}^2.$$

- Poměr signálu od kvantovacího šumu je roven:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\mathrm{R}}^2} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\frac{q^2}{12}} = 6{,}02N + 10{,}79 + 10 \log_{10} \sigma_x^2.$$

Kvantování vstupního signálu

- Poměr signálu od kvantovacího šumu vzrůstá s počtem bitů,
- poměr signálu od kvantovacího šumu vzrůstá s rozptylem (energií) vstupního signálu,
- rozptyl hodnot vstupního signálu je však omezen rozsahem čísel,
- navíc u některých algoritmů může mít výstupní signál větší rozptyl než vstupní,
- v takovém případě je nutné vstupní signál zeslabit vážením (scaling) koeficientem $\beta < 1$,
- potom

$$SNR = 10\log_{10}\frac{\beta^2\sigma_x^2}{\sigma_{\mathrm{R}}^2} = 10{,}79 + 6{,}02N + 10\log_{10}\sigma_x^2 + 20\log_{10}\beta.$$

- Protože $\beta < 1$, tak poslední člen má záporné znaménko,
- vážení snižuje hodnotu odstupu signálu od kvantovacího šumu.

Kvantování mezivýsledků

- Po každé operaci násobení nebo součtu dochází ke kvantování a případně i k saturaci

0,875	0.111	0,875	0,875	0.111	0,875
·0,750	0.110	0,750	+0,750	0.110	0,750
0,65625	0.101010	0,65625	1,625	1.001	−0,875
	0.101	0,625		0.111	0,875

- největší problémy kvantování a saturace způsobuje u rekurzivních algoritmů, protože kvantovací šum se vrací do algoritmu a může způsobovat až vznik mezních (limitních) cyklů.

Mezní cykly

- U rekurzivních algoritmů může díky kvantování být výstup nenulový i v případě nulového vstupu,
- $y[n] = x[n] - \frac{6}{8}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2]$, $x[n] = \frac{7}{8}\delta[n]$

n	$x[n]$	$-\frac{6}{8}y[n-1]$	$\frac{1}{8}y[n-2]$	$y[n]$
0	$\frac{7}{8} = 0.111$	0.000000	0.000000	$0.111 = \frac{7}{8}$
1	0.000	$-\frac{42}{64} = 1.010110$	0.000000	$1.011 = -\frac{5}{8}$
2	0.000	$\frac{30}{64} = 0.011110$	$\frac{7}{64} = 0.000111$	$0.101 = \frac{5}{8}$
3	0.000	$-\frac{30}{64} = 1.100010$	$-\frac{5}{64} = 1.111011$	$1.100 = -\frac{4}{8}$
4	0.000	$\frac{24}{64} = 0.011000$	$\frac{5}{64} = 0.000101$	$0.100 = \frac{4}{8}$
5	0.000	$-\frac{24}{64} = 1.101000$	$-\frac{4}{64} = 1.111100$	$1.101 = -\frac{3}{8}$
6	0.000	$\frac{18}{64} = 0.010010$	$\frac{4}{64} = 0.000100$	$0.011 = \frac{3}{8}$
7	0.000	$-\frac{18}{64} = 1.101110$	$-\frac{3}{64} = 1.111101$	$1.101 = -\frac{3}{8}$
8	0.000	$\frac{18}{64} = 0.010010$	$\frac{3}{64} = 0.000011$	$0.011 = \frac{3}{8}$

- u nerekurzivních algortimů mezní cykly nastat nemohou, protože neobsahují zpětné vazby.

Mezní cykly z kvantování

- V případě rekurzivního algoritmu 1. řádu je výstup dán

$$y[n] = -[ay[n-1]]_{\mathrm{Q}} + x[n],$$

- v případě zaokrouhlení platí

$$|[ay[n-1]]_{\mathrm{R}} - ay[n-1]| \leq 0.5q,$$

- tedy aby došlo k mezním cyklům musí platit

$$|[ay[n-1]]_{\mathrm{R}}| = |y[n-1]|\,.$$

- Vlivem kvantování dojde jakoby k posunutí pólu na jednotkovou kružnici $|a| = 1$,

Mezní cykly z kvantování

- Po dosazení do první rovnice lze zjistit maximální hodnotu amplitudy mezního cyklu jako
$$|y[n-1]| \leq \frac{0{,}5q}{1-|a|},$$
- čím blíže bude pól jednotkové kružnici, tím větší amplitudu budou mezní cykly mít,
- v případě $|a| < 0{,}5$ mezní cykly nenastanou,
- perioda bude podle znaménka a:
  - $a > 0$ pak perioda je rovna 1,
  - $a < 0$ pak perioda je rovna 2.

Mezní cykly z kvantování

- V případě rekurzivního algoritmu druhého řádu bude amplituda mezních cyklů rovna
$$|y[n-2]| \leq \frac{0{,}5q}{1-|a_2|},$$
- vlivem kvantování dojde k jakoby posunu pólu na jednotkovou kružnici,
- perioda mezních cyklů bude dána polohou původního pólu,
- čím blíže bude pól jednotkové kružnici, tím větší amplitudu budou mezní cykly mít,
- v případě $|a_2| < 0{,}5$ mezní cykly nenastanou.
- V případě usekávání by v předchozím příkladě nenastaly. Obecně však mohou mít dvakrát větší velikost z důvodu dvojnásobné kvantovací chyby.

Mezní cykly z přetečení

- Pokud nebudeme uvažovat saturaci je výstup roven

$$y[n] = [-a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + x[n]]_{\mathrm{OV}}\,,$$

- aby nemohlo dojít k přetečení, musí platit

$$|a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]| < 1,$$

- tedy musí platit

$$|a_1| + |a_2| < 1,$$

- pokud podmínka platit nebude, mohou nastat mezní cykly z přetečení s amplitudou

$$|y[n]| \leq \frac{2}{1 - a_1 - a_2}, a_1 < 0, a_2 < 0,$$

nebo

$$|y[n]| \leq \frac{2}{1 + a_1 - a_2}, a_1 > 0, a_2 < 0.$$

Mezní cykly z přetečení

- V některých případech může dojít k mezním cyklům i při použití saturace.
- Amplituda je vždy mnohonásobně větší než v případě mezních cyklů z kvantování.

Kvantování koeficientů

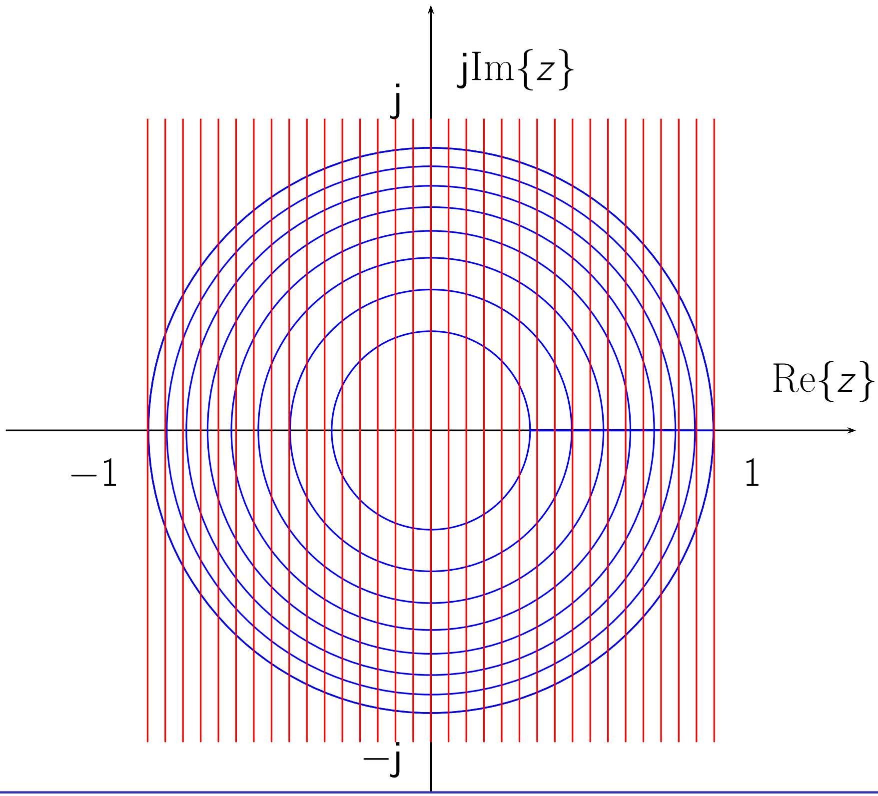
- Kvantování koeficientů způsobí změnu přenosové funkce,
- dojde ke změně kmitočtové charakteristiky,
- dojde ke změně polohy nulových bodů a pólů,
- uvažujme systém 2. řádu s komplexně sdruženými póly $p_{1,2} = re \pm \mathrm{j}im$

$$\begin{aligned}(z - p_1)(z - p_2) &= (z - (re + \mathrm{j}im))(z - (re - \mathrm{j}im)) = \\ &= z^2 - (re + \mathrm{j}im)z - (re - \mathrm{j}im)z + \\ &\quad +(re + \mathrm{j}im)(re - \mathrm{j}im) = \\ &= z^2 - 2rez + (re^2 + im^2)\end{aligned}$$

- po kvantování musí být

$$\begin{aligned}|2re| &= k \cdot 2^{-b}, \\ |re^2 + im^2| &= k \cdot 2^{-b}, \\ k &\in 0, 1, \ldots, 2^b - 1.\end{aligned}$$

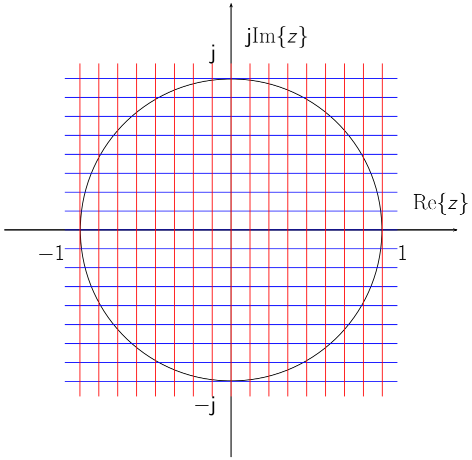
Poloha nulových bodů a pólů



Poloha nulových bodů a pólů

- V případě vazební struktury však platí, že koeficienty jsou přímo reálná a imaginární složka pólu,
- proto rozložení nulových bodů a pólů bude jiné

$$\begin{aligned} re &= k\,2^{-b}, \\ im &= k\,2^{-b}. \end{aligned}$$



Rozdělení na sekce druhého řádu

- Filtry vyššího řádu jsou mnohem citlivější na vlivy kvantování, protože hodnoty koeficientů jsou závislé i na součinech reálných nebo imaginárních složek dvou nebo více pólů,
- proto se vyšší řády rozkládají do sekcí 2. řádu,
- vždy dva komplexně sdružené póly a dva komplexně sdružené nulové body sloučím do jedné přenosové funkce,
- aby se zabránilo vzniku přetečení, je mezi sekcemi signál násoben konstantou $k_i < 1$.

$$x[n] \xrightarrow{k_1} \boxed{H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})} \xrightarrow{k_2} \boxed{H_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})} \dashrightarrow y[n]$$

Určení váhovací konstanty k

- Uvažujme, že vstupní signál $x[n]$ je omezen v rozsahu zlomkového čísla $|x[n]| < 1$
- uvažujme, že číslicový filtr má vzorky impulsní charakteristiky $h[n]$,
- potom absolutní hodnota výstupního signálu

$$
\begin{aligned}
|y[n]| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]|\,|x[n-m]| \\
|y[n]| &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]|
\end{aligned}
$$

- nutnou a postačující podmínkou, aby byl výstupní signál omezen v rozsahu zlomkového čísla $|y[n]| < 1$, je, že vstupní signál musí být vynásoben konstantou

$$k_1 = \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]|}.$$

Určení váhové konstanty k

- Uvedená podmínka je sice nutná a postačující, ale je až příliš přísná pro reálné signály (vystihuje nejhorší případ $|x[n]| = 1$, který je málo pravděpodobný),
- pro úzkopásmové signály je vhodnější určit váhový koeficient na základě maximální hodnoty modulové kmitočtové charakteristiky $\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|$ (maximální zesílení pro nějaký kmitočet ω)

$$k_2 = \frac{1}{A_x \max\limits_{0 \leq \omega \leq \pi} \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|},$$

- tento výpočet je nejpoužívanější.

Určení váhové konstanty k

- Poslední a nejméně přísnou podmínkou je, že omezíme nikoliv absolutní hodnotu, ale energii výstupního signálu
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 \leq k_3^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2,$$
- s použitím Parsevalova teorému lze odvodit
$$k_3 = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2}}.$$
- Zřejmě platí
$$k_1 \leq k_2 \leq k_3.$$