Analýza číslicových systémů

Kurz: Signálové procesory

Autor: Petr Sysel

Lektor: Petr Sysel

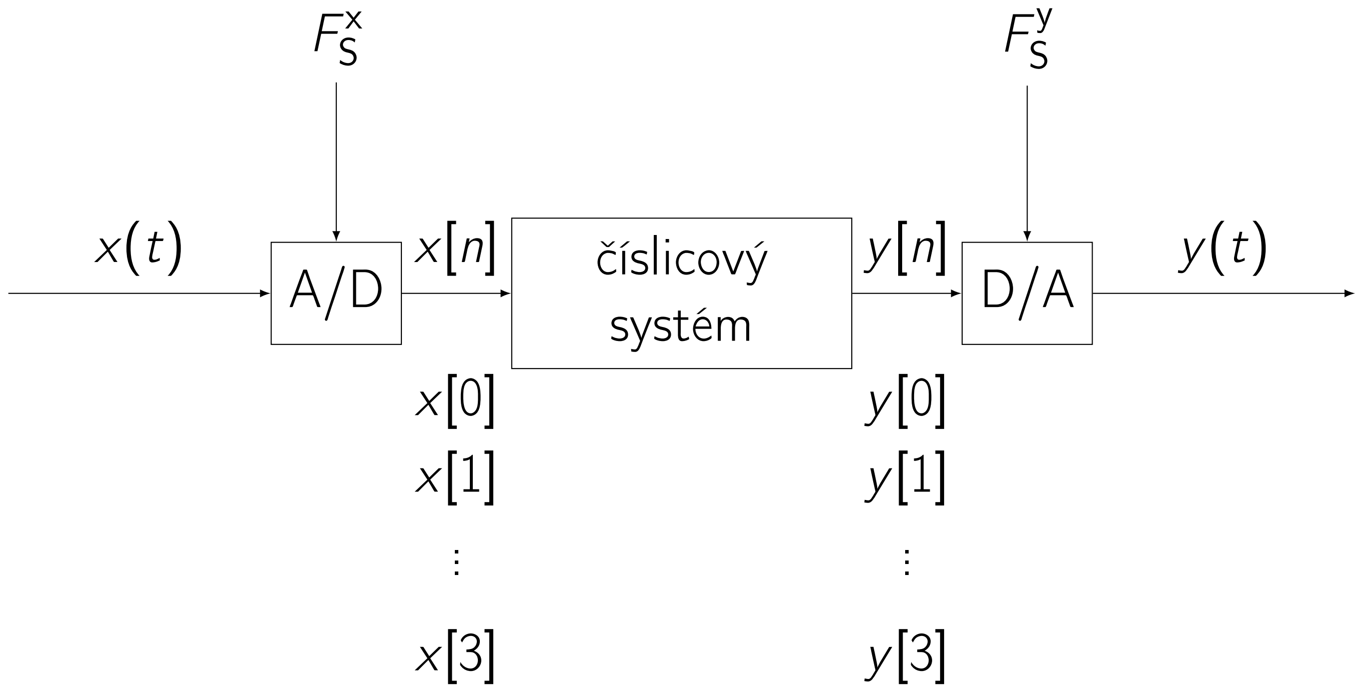
evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vytvoření této videopřednášky bylo podpořeno projektem č. CZ.1.07/2.2.00/28.0098
Evropského sociálního fondu a státním rozpočtem České republiky.

Obsah přednášky

Číslicový systém



Příklad číslicového systému

Je možné průměrování považovat za číslicový systém?

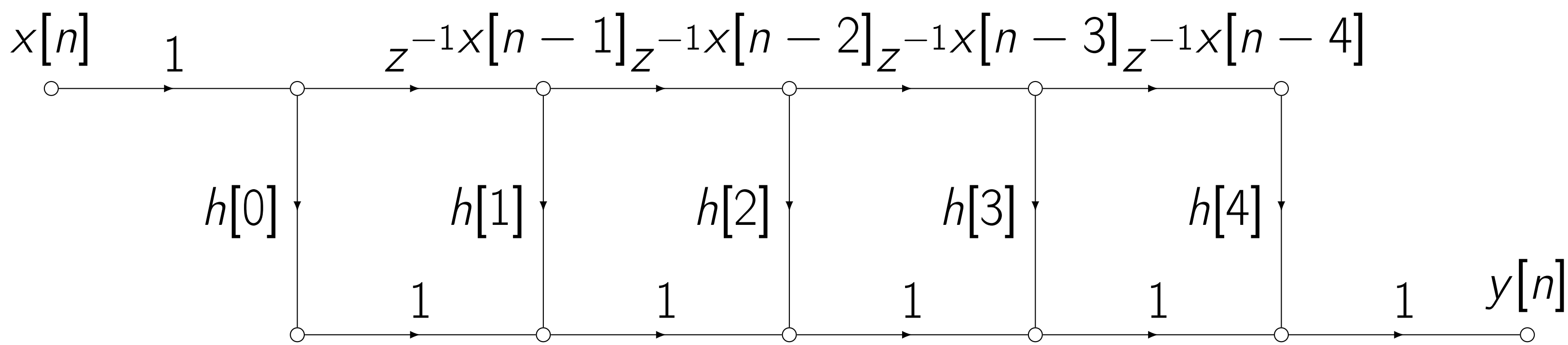
- Hodnoty průměrovaných vzorků jsou vyjádřeny čísly (kvantovaný),
- máme konečný počet hodnot (vzorkovaný),
- výstupní hodnotu vypočteme podle vztahu

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N} x[n-m],$$

Příklad číslicového systému

Je možné průměrování považovat za číslicový systém?

- symbolické zakreslení výpočtu



- aritmetický průměr je typickým představitelem číslicových systémů s konečnou impulsní charakteristikou FIR, nerekurzivních systémů, systémů typu moving average (MA),
- ve struktuře se nevyskytuje uzavřená smyčka.

Příklad číslicového systému

Je možné považovat bankovní účet za číslicový systém?

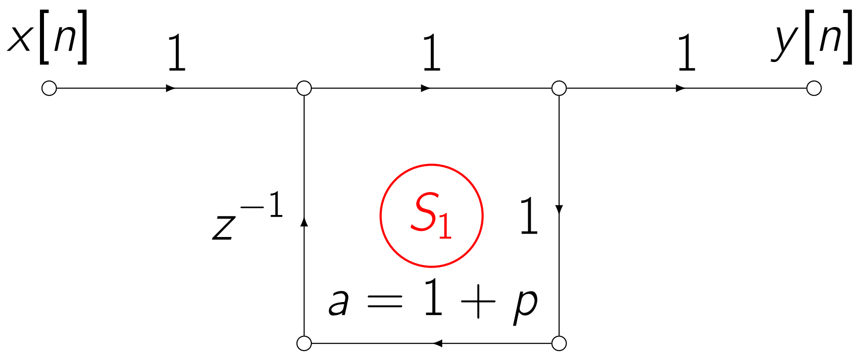
- Aktuální stav účtu považujme za aktuální hodnotu signálu,
- stav účtu může nabývat pouze násobky haléřů (kvantovaný),
- úročení se děje většinou jen jednou za den (vzorkovaný),
- stav na účtu je vypočten jako

$$y[n] = x[n] + (1 + p) \cdot y[n - 1],$$

Příklad číslicového systému

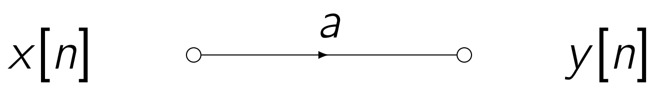
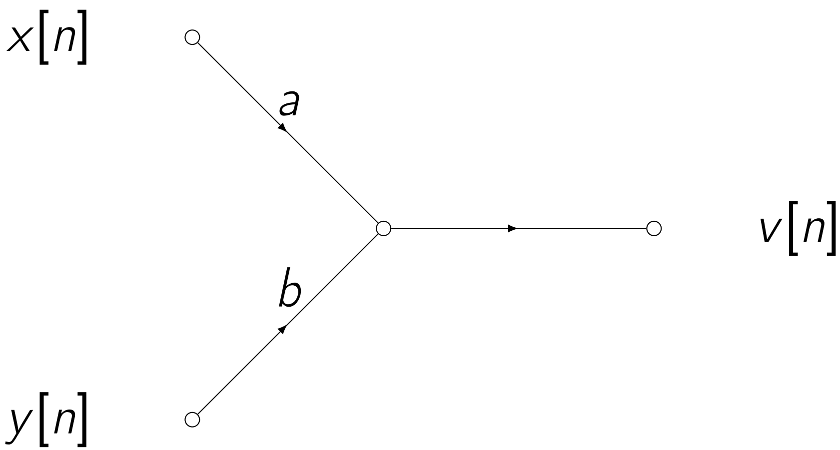
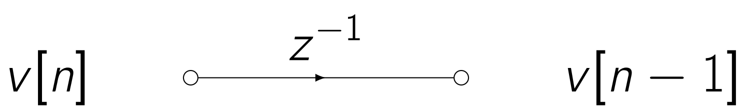
Je možné považovat bankovní účet za číslicový systém?

- symbolické zakreslení výpočtu



- typicky představitel číslicových systémů s nekonečnou impulsní charakteristikou IIR, rekurzivních systémů, systémů typu autoregresive AR,
- ve struktuře se vyskytuje uzavřená smyčka.

Graf signálových toků

	násobení konstantou $y[n] = a \cdot x[n]$
	součet $v[n] = a \cdot x[n] + b \cdot y[n]$
	zpoždění o jeden vzorek

Spojení časové oblasti $x[n]$ a oblasti z můžeme udělat, protože uvažujeme lineární systém, který podrobíme lineární transformaci.

Masonovo pravidlo

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{K} P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}$$

- Přenosová funkce ze vstupního na výstupní uzel je rovna podílu součtu přímých cest ze vstupního uzlu na výstup krát subdeterminant grafu, který se přímé cesty nedotýká, ku determinantu grafu.
- Determinant grafu je roven $\Delta = 1-$ součet přenosů všech jednoduchých smyček $+$ součet součinů přenosů dvojic jednoduchých smyček, které se vzájemně nedotýkají $-$ součet součinů trojic jednoduchých smyček, které se vzájemně nedotýkají $-$ součet součinů čtveřic ...

$$\Delta = 1 - \sum_i S_{1i} + \sum_j S_{2j} - \sum_k S_{3k} + \dots$$

Popis číslicového systému

- Číslicový systém je popsán rekurentní dererenční rovnicí

$$\begin{aligned} a_s y[n+s] &+ a_{s-1}y[n+s-1] + \ldots + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = \\ &= b_r x[n+r] + b_{r-1}x[n+r-1] + \ldots + b_1 x[n+1] + b_0 x[n], \end{aligned}$$

- příklad s průměrováním

$$\underbrace{1}_{a_3} y[n+3] = \underbrace{\frac{1}{4}}_{b_3} x[n+3] + \underbrace{\frac{1}{4}}_{b_2} x[n+2] + \underbrace{\frac{1}{4}}_{b_1} x[n+1] + \underbrace{\frac{1}{4}}_{b_0} x[n],$$

- příklad s bankovním účtem

$$\underbrace{1}_{a_1} y[n+1] \underbrace{-(1+p)}_{a_0} y[n] = \underbrace{1}_{b_1} x[n+1],$$

- počáteční podmínky

$$x[0], x[1], \ldots, x[r-1],$$
$$y[0], y[1], \ldots, y[s-1].$$

Transformace $\mathcal{Z}$

- Přímá transformace $\mathcal{Z}$ je definována

$$F(z) = \mathcal{Z}\left\{f[n]\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n] z^{-n},$$

- zpětná transformace $\mathcal{Z}$ je definována

$$f[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{F(z)\right\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z,$$

$$f[n] = \sum_m \operatorname*{res}_{z_m} \left(z^{n-1} F(z)\right).$$

- Pro residuum $k$násobného pólu platí

$$\operatorname*{res}_{z_m} \left(F(z)\right) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_m} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{(k-1)} \left((z - z_m)^k F(z)\right)$$

Vlastnosti transformace $\mathcal{Z}$

- Transformace je lineární

$$\mathcal{Z}\left\{a\cdot x[n]+b\cdot y[n]\right\}=a\cdot\mathcal{Z}\left\{x[n]\right\}+b\cdot\mathcal{Z}\left\{y[n]\right\},$$

počáteční podmínky

- věta o posunutí

$$f[n+s]\rightarrow z^{s}\left(F(z)-\sum_{i=0}^{s-1}f(i)\,z^{-i}\right),$$

- počáteční hodnota

$$f[0]=\lim_{n\rightarrow 0}f[n]=\lim_{z\rightarrow\infty}F(z),$$

- konečná hodnota

$$x[\infty]=\lim_{z\rightarrow 1}F(z),$$

- konvoluční teorém

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)H(z)\right\}=\sum_{m=0}^{n}x[n-m]h[m]=x[n]*h[n].$$

Příklad transformace diferenční rovnice

$$
\begin{aligned}
y[n+3] &= \tfrac{1}{4}x[n+3] + \tfrac{1}{4}x[n+2] + \tfrac{1}{4}x[n+1] + \tfrac{1}{4}x[n] \\
z^3\left(Y(z) - z^{-2}y[2] - z^{-1}y[1] - z^{-0}y[0]\right) &= \tfrac{1}{4}z^3\left(X(z) - z^{-2}x[2] - z^{-1}x[1] - z^{-0}x[0]\right) + \\
&\quad \tfrac{1}{4}z^2\left(X(z) - z^{-1}x[1] - z^{-0}x[0]\right) + \\
&\quad \tfrac{1}{4}z^1\left(X(z) - z^{-0}x[0]\right) + \tfrac{1}{4}X(z) \\
z^3Y(z) - z^1y[2] - z^2y[1] - z^3y[0] &= \tfrac{1}{4}z^3X(z) - \tfrac{1}{4}z^1x[2] - \tfrac{1}{4}z^2x[1] - \tfrac{1}{4}z^3x[0] + \\
&\quad \tfrac{1}{4}z^2X(z) - \tfrac{1}{4}z^1x[1] - \tfrac{1}{4}z^2x[0] + \\
&\quad \tfrac{1}{4}z^1X(z) - \tfrac{1}{4}z^1x[0]) + \tfrac{1}{4}X(z)
\end{aligned}
$$

Příklad transformace diferenční rovnice

$$
\begin{aligned}
z^3Y(z) - z^1y[2] - z^2y[1] - z^3y[0] &= \left(\tfrac{1}{4}z^3 + \tfrac{1}{4}z^2 + \tfrac{1}{4}z^1 + \tfrac{1}{4}\right) X(z) \; + \\
&\quad \tfrac{1}{4}z^3x[0] - z^2\left(\tfrac{1}{4}x[1] + \tfrac{1}{4}x[0]\right) - z^1\left(\tfrac{1}{4}x[2] + \tfrac{1}{4}x[1] + \tfrac{1}{4}x[0]\right) \\
z^3Y(z) &= \left(\tfrac{1}{4}z^3 + \tfrac{1}{4}z^2 + \tfrac{1}{4}z^1 + \tfrac{1}{4}\right) X(z) \; + \\
&\quad \tfrac{1}{4}z^3x[0] - z^2\left(\tfrac{1}{4}x[1] + \tfrac{1}{4}x[0]\right) - z^1\left(\tfrac{1}{4}x[2] + \tfrac{1}{4}x[1] + \tfrac{1}{4}x[0]\right) \; + \\
&\quad z^3y[0] + z^2y[1] + z^1y[2] \\
\underbrace{Y(z)}_{\text{obraz výstupního signálu}} &= \underbrace{\frac{\frac{1}{4}z^3+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{4}z^1-\frac{1}{4}}{z^3}X(z)}_{\text{vynucená odezva}} \; - \\
&\quad \underbrace{\frac{\frac{1}{4}z^3x[0]+z^2\left(\frac{1}{4}x[1]+\frac{1}{4}x[0]\right)+z^1\left(\frac{1}{4}x[2]+\frac{1}{4}x[1]+\frac{1}{4}x[0]\right)}{z^3}}_{\text{přechodná část vynucené odezvy}} \; + \\
&\quad \underbrace{\frac{z^3y[0]+z^2y[1]+z^1y[2]}{z^3}}_{\text{přirozená odezva}}
\end{aligned}
$$

Příklad transformace diferenční rovnice

$$
\begin{aligned}
y[n+1] &= x[n+1] + a\cdot y[n]\\
y[n+1] - a\cdot y[n] &= x[n+1]\\
z\left(Y(z) - z^{-0}y[0]\right) - a\cdot Y(z) &= z\left(X(z) - z^{-0}x[0]\right)\\
zY(z) - zy[0] - a\cdot Y(z) &= zX(z) - zx[0]\\
(z-a)\,Y(z) - zy[0] &= zX(z) - zx[0]\\
(z-a)\,Y(z) &= zX(z) - zx[0] + zy[0]\\
Y(z) &= \tfrac{z}{z+a}X(z) - \tfrac{zx[0]}{z+a} + \tfrac{zy[0]}{z+a}\\
\underbrace{Y(z)}_{\text{obraz výstupního signálu}} &= \underbrace{\tfrac{z}{z+a}X(z)}_{\text{vynucená odezva}} - \underbrace{\tfrac{zx[0]}{z+a}}_{\text{přechodná část vynucené odezvy}} + \underbrace{\tfrac{zy[0]}{z+a}}_{\text{přirozená odezva}}
\end{aligned}
$$

Transformace diferenční rovnice

$$a_s z^s Y(z) - a_s \sum_{i=0}^{s-1} y[i] z^{s-i} \quad + \quad \dots$$

$$+a_{s-1} z^{s-1} Y(z) - a_{s-1} \sum_{i=0}^{s-2} y[i] z^{s-1-i} \quad + \quad \dots + a_0 Y(z) =$$

$$= b_r z^r X(z) - b_r \sum_{i=0}^{r-1} x[i] z^{r-i} \quad + \quad \dots$$

$$+b_{r-1} z^{r-1} X(z) - b_{r-1} \sum_{i=0}^{r-2} x[i] z^{r-1-i} \quad + \quad \dots + b_0 X(z)$$

$$\sum_{i=0}^{s} a_i z^i Y(z) \;-\; \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=i}^{s} a_j y[j-i] \right) z^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} b_i z^i X(z) - \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=i}^{r} b_j x[j-i] \right) z^i$$

Řešení číslicového systému

$$Y(z) = \overbrace{\frac{\sum_{i=0}^{r} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{s} a_i z^i} X(z)}^{\textit{vynucená odezva}} + \underbrace{\frac{-\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=i}^{r} b_j x[j-i]\right) z^i}{\sum_{i=0}^{s} a_i z^i}}_{\textit{přechodná část vynucené odezvy}} + \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=i}^{s} b_j y[j-i]\right) z^i}{\sum_{i=0}^{s} a_i z^i}}_{\textit{přirozená odezva}}$$

Přenosová funkce číslicového systému

- Přirozená odezva je nenulová, pokud jsou nenulové počáteční podmínky pro výstupní signál $\exists y[k] \neq 0, k = 0, \ldots, s-1$,
- přechodná část vynucené odezvy je nenulová, pokud jsou nenulové počáteční podmínky pro vstupní signál $\exists x[k] \neq 0, k = 0, \ldots, r-1$,
- vynucená odezva je nenulová, pokud je nenulový vstupní signál,
- v případě nulových počátečních podmínek lze definovat přenosovou funkci v součtovém tvaru

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{r} b_i z^i}{\sum\limits_{j=0}^{s} a_j z^j}.$$

Součinový tvar přenosové funkce

- Vypočteme kořeny čitatele a jmenovatele přenosové funkce

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{r} b_i z^i}{\sum_{j=0}^{s} a_j z^j} = K \frac{\prod_{i=1}^{r} (z - z_{0i})}{\prod_{j=1}^{s} (z - z_{xj})},$$

- z_{0i} jsou nulové body přenosové funkce $H(z_{0i}) = 0$,
- z_{xj} jsou póly přenosové funkce $1/H(z_{xi}) = 0$,
- pokud jsou koeficienty přenosové funkce reálné, musí být nulové body a póly buď reálné, nebo se vyskytují v komplexně sdružených párech.

$$\begin{aligned}(z - re - \mathrm{j}im)(z - re + \mathrm{j}im) &= z^2 - re \cdot z + \mathrm{j}im \cdot z - re \cdot z + re^2 - \mathrm{j}re \cdot im \\ &\quad - \mathrm{j}im \cdot z + \mathrm{j}re \cdot im - \mathrm{j}^2 im \cdot im \\ &= z^2 - 2re \cdot z + \left(re^2 + im^2\right)\end{aligned}$$

Impulsní charakteristika

- Odezva systému na jednotkový impuls

$$x[n] = \delta[n] \;=\; \begin{cases} 1 \;\; \mathrm{pro}\; n = 0, \\ 0 \;\; \mathrm{pro}\; n \neq 0, \end{cases},$$

$$y[n] \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]h[m] = h[n],$$

- je rovna zpětné transformaci $\mathcal{Z}$ přenosové funkce

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{H(z)\right\}.$$

Vlastnosti impulsní charakter.

- Pokud $\forall a_{s-1}, \ldots, a_0 = 0$, pak

$$H(z) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} b_k z^k}{a_{N-1} z^{N-1}} = \underbrace{\frac{b_{N-1}}{a_{N-1}}}_{h[0]} z^0 + \underbrace{\frac{b_{N-2}}{a_{N-1}}}_{h[1]} z^{-1} + \ldots + \underbrace{\frac{b_1}{a_{N-1}}}_{h[N-2]} z^{-N+2} + \underbrace{\frac{b_0}{a_{N-1}}}_{h[N-1]} z^{-N+1}$$

- Impulsní charakteristika konečné délky a její vzorky jsou přímo koeficienty přenosové funkce.
- Finite Impulse Response – FIR.
- Pokud $\exists a_{s-1}, \ldots, a_0 \neq 0$, pak je impulsní charakteristika dána součtem exponenciálních funkcí a je nekonečná,
- Infinite Impulse Response – IIR.

Kauzalita číslicového systému

- Číslicový systém je kauzální, pokud hodnota odezvy $y[n]$ pro libovolné $n = n_0$ závislá pouze na vzorcích vstupního signálu $x[n]$ pro $n \leq n_0$,
- nutná a postačující podmínka pro impulsní charakteristiku

$$h[n] = 0, \mathrm{pro}\ n < 0,$$

- nutná a postačující podmínka pro přenosovou funkci

$$r \leq s.$$

Stabilita číslicového systému

- Číslicový systém je stabilní, když jeho odezva na omezený vstupní signál $|x[n]| < M < +\infty$ pro všechna $n \geq 0$ je také omezená

$$|y[n]| = \left|\sum_{m=0}^{\infty} x[n-m]h[m]\right| = \sum_{m=0}^{\infty} |x[n-m]|\ |h[m]| \leq M \sum_{m=0}^{\infty} |h[m]| < +\infty,$$

- nutná a postačující podmínka pro impulsní charakteristiku

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |h[m]| < +\infty.$$

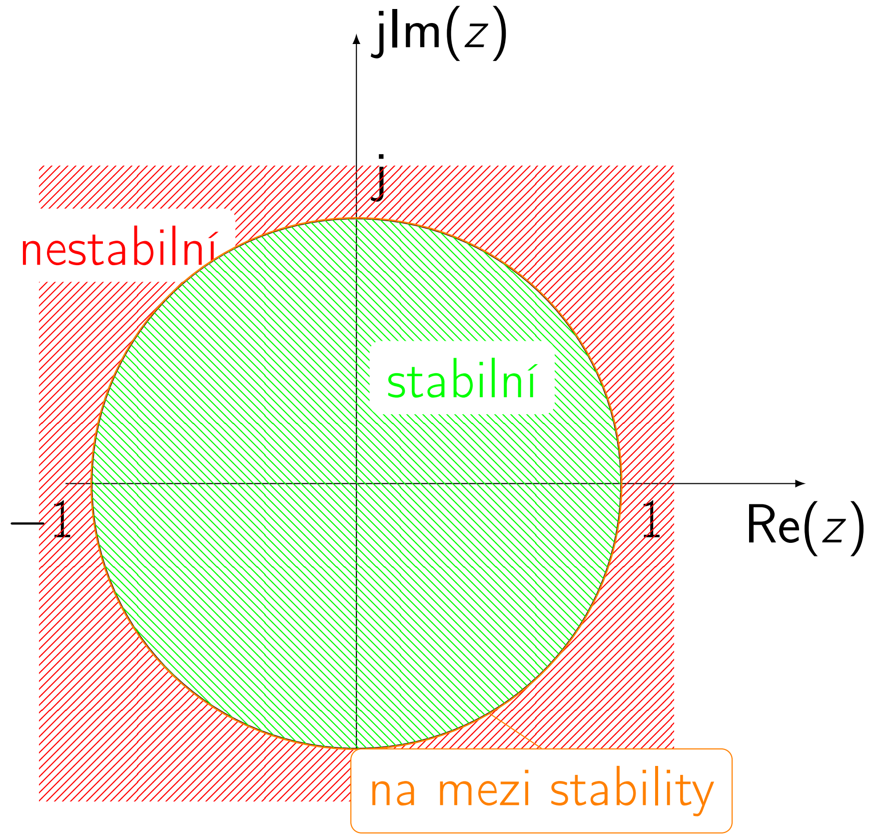
Podmínka stability

- Nutná a postačující podmínka pro přenosovou funkci

$$|z_{xj}| < 1, \mathrm{pro} j = 1, 2, \ldots, s,$$

- pokud póly přenosové funkce leží uvnitř jednotkové kružnice, pak je systém stabilní,
- pokud póly přenosové funkce leží mimo jednotkovou kružnici, pak je systém nestabilní,
- pokud póly leží na jednotkové kružnici, je systém na mezi stability.

Podmínka stability



Schurův-Cohnův test stability

- Pro vyšší řády je výpočetně náročné stanovit stabilitu na základě polohy pólů,
- při adaptivní filtraci nebo lineárně predikční analýze je vhodnější testovat stabilitu pomocí Schurova-Cohnova testu.
- Chceme zjistit, zda všechny kořeny polynomu

$$A(z) = z^N + a_{N-1}z + a_{N-2}z^2 + \dots a_0, a_N = 1,$$

  leží uvnitř jednotkové kružnice,
- sestavíme pomocný polynom

$$B(z) = z^N A\left(z^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{N} a_{N-k} z^k,$$

  který je reverzní nebo reciproční k polynomu $A(z)$.

Schurův-Cohnův test stability

- Postupně snižujeme řád polynomu $A_m(z)$, $m = N-1, N-2, \dots, 1$ podle vztahu
$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2},$$
kde koeficienty
$$K_m = a_m(0)$$
se označují jako koeficienty odrazu.
- Pokud $\forall\, |K_m| < 1$, pak všechny kořeny polynomu $A(z)$ leží uvnitř jednotkové kružnice.
- Snižování řádu lze přepsat
$$a_k^{(m-1)} = \frac{a_{k+1}^{(m)} - K_m a_{m-k-1}^{(m)}}{1 - K_m^2}, k = 0, 1, \dots, m-2.$$

Příklad testu stability

Rozhodněte, zda číslicový systém popsaný následující přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{z^4 + 0{,}8z^3 - 0{,}512z - 0{,}4096}{5z^5 + 11{,}2z^4 + 5{,}44z^3 - 0{,}384z^2 - 2{,}3552z - 1{,}2288}$$

je stabilní nebo ne.

Podmínkou stability je, aby modul všech kořenů jmenovatele (všech pólů) byl menší než 1. V případě polynomu 5. řádu je výhodnější než výpočet kořenů provést Schurův-Cohnův test stability.

Polynom jmenovatele musíme nejprve normalizovat do tvaru

$$A_5(z) = z^5 + 2{,}24z^4 + 1{,}088z^3 - 0{,}0768z^2 - 0{,}47104z - 0{,}24576.$$

Recipročí polynom je stejného řádu, ale má koeficienty v obráceném pořadí

$$B_5(z) = -0{,}24576z^5 - 0{,}47104z^4 - 0{,}0768z^3 + 1{,}088z^2 + 2{,}24z + 1.$$

Příklad testu stability

Koeficient odrazu je roven koeficientu $k_5 = a_5(0) = -0{,}24576$. Koeficienty u nejvyšší mocniny polynomu nižšího řádu je vždy roven 1.
Ostatní koeficienty určíme jako

$$
\begin{aligned}
a_4(3) &= \frac{a_5(4) - k_5 b_5(4)}{1 - k_5^2} = \frac{2{,}24 - (-0{,}24576)\cdot(-0{,}47104)}{1 - (-0{,}24576)^2} = 2{,}260784,\\
a_4(2) &= \frac{a_5(3) - k_5 b_5(3)}{1 - k_5^2} = \frac{1{,}088 - (-0{,}24576)\cdot(-0{,}0768)}{1 - (-0{,}24576)^2} = 1{,}137849,\\
a_4(1) &= \frac{a_5(2) - k_5 b_5(2)}{1 - k_5^2} = \frac{-0{,}0768 - (-0{,}24576)\cdot(1{,}088)}{1 - (-0{,}24576)^2} = 0{,}202838,\\
a_4(0) &= \frac{a_5(1) - k_5 b_5(1)}{1 - k_5^2} = \frac{-0{,}47104 - (-0{,}24576)\cdot(2{,}24)}{1 - (-0{,}24576)^2} = 0{,}08457.
\end{aligned}
$$

Koeficient $a_4(0)$ je současně koeficientem odrazu $k_4 = a_4(0) = 0{,}08457$.
Podobně snižujeme řád polynomu až do 1. řádu. Výsledky jsou v tabulce.

Příklad testu stability

$A_5(z)$	1,00000	2,24000	1,08800	−0,07680	−0,47104	−0,24576
$B_5(z)$	−0,24576	−0,47104	−0,07680	1,08800	2,24000	1,00000

$A_4(z)$	1,000000	2,260784	1,137849	0,202838	0,084570
$B_4(z)$	0,084570	0,202838	1,137849	2,260784	1,000000

$A_3(z)$	1,000000	2,259792	1,049125	0,011727
$B_3(z)$	0,011727	1,049125	2,259792	1,000000

$A_2(z)$	1,000000	2,247799	1,022766
$B_2(z)$	1,022766	2,247799	1,000000

$A_1(z)$	1,000000	1,111250

Děkuji za pozornost