UNIVERSIDADE DO MINHO

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

TRABALHO PRÁTICO 1

DRONE

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional
13 de novembro de 2020

(a) Ana Catarina Canelas
A93872

(b) Ana Filipa Pereira
A89589

(c) Carolina Santejo
A89500

(d) Raquel Costa
A89464

Conteúdo

Introdução

No âmbito da Unidade Curricular de Modelos Determinísticos de Investigação Operacional, desenvolvemos o 1º Trabalho Prático proposto para este ano Ano Letivo. Neste trabalho abordamos o problema do "Drone", sendo este bastante semelhante ao problema do Carteiro Chinês. O cenário apresentado consiste na inspeção de todas as linhas de alta tensão pelo drone de modo a verificar se há vegetação a interferir com as mesmas. Para que o drone consiga realocar-se para fazer a inspeção de uma nova linha não é necessário seguir as linhas de alta tensão, bastando fazer o percurso mais curto através do ar. É fornecida também uma tabela com as distâncias Euclidianas necessárias á resolução deste desafio.

Na resolução deste problema, recorremos ao software de programação linear *LPSolve*.

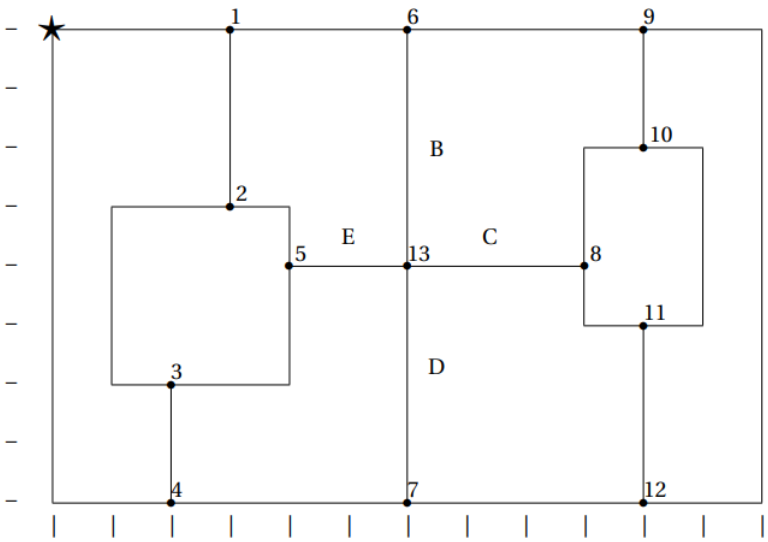


Figura 1 - Grafo Inicial

Objetivo Principal:

O principal objetivo trata-se de encontrar a solução ótima para o problema. Para tal temos de encontrar um caminho que comece e acabe no ponto inicial ao qual chamamos de "ponto estrela", e, além disso, calcular a distância mínima percorrida pelo drone, sendo que este tem de passar por todas as linhas de alta tensão (correspondem a arestas do grafo - Grafo Inicial) pelo menos uma vez. É importante referir também que cada aresta/linha pode ser percorrida mais de uma vez, e em qualquer sentido.

Grafo do Grupo

Após retirar as arestas pedidas no enunciado de acordo com o conjunto de regras dado, segue-se o grafo resultante (feito a partir do número A89589). Este é o grafo em que todo o trabalho se baseia.

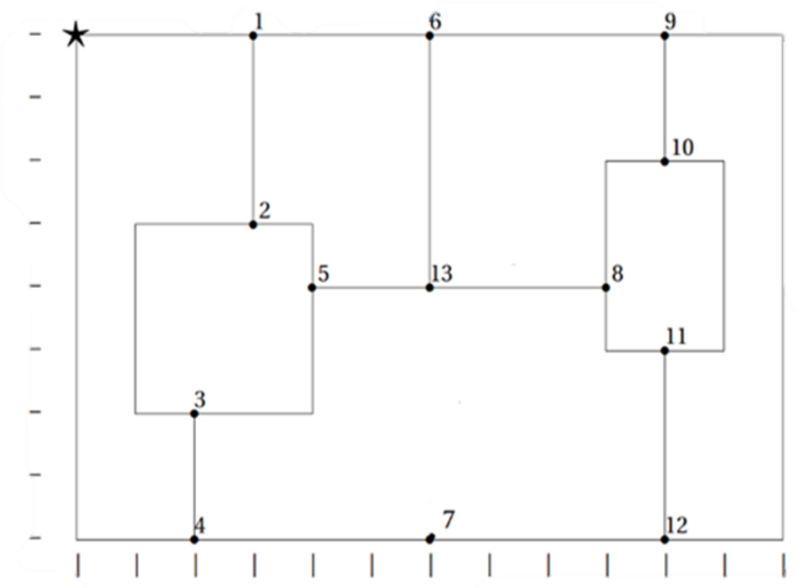


Figura 2 - Grafo Resultante

Formulação do Problema

Para formular o problema, recorremos a alguns conceitos abordados nas aulas relativos à teoria dos grafos que explicaremos de seguida. Um grafo é *Euleriano* se for ligado e se o grau de todos os seus vértices for par. Este tipo de grafo, permite que partindo de um vértice qualquer, possamos percorrer todas as arestas passando por elas apenas uma única vez. Isto no nosso problema seria uma solução ideal, no entanto não é aplicável pois como foi dito é necessário que o grafo tenha todos os vértices de grau par, e o apresentado anteriormente tem 12 vértices de grau ímpar. É possível perceber que será obrigatório repetir algumas arestas, sendo que a dúvida agora recai em saber que arestas repetir (ou arestas aéreas a percorrer), tendo em conta que queremos minimizar o custo. Esta duplicação é feita de modo a que o grafo resultante tenha todos os vértices de grau par. De forma a resolver isto, recorremos aos emparelhamentos. Um emparelhamento é uma enumeração de pares formados por vértices de grau ímpar que traduzem uma possibilidade de arestas a adicionar ao grafo de forma a que este passe a ter um circuito *Euleriano*. Desta forma, podemos perceber que o emparelhamento ótimo é aquele, que entre todas as opções, representa o conjunto de arestas “extra” a percorrer com menor custo.

Variáveis de decisão

Como já foi referido, o nosso grafo tem 12 vértices de grau ímpar. Dado que queremos ter em conta todas as possibilidades de pares entre esses mesmos vértices de grau ímpar, o modelo de programação linear terá 66 variáveis de decisão. Estas V.D são do tipo Xij que representa o par formado pelos vértices i e j (vértices de grau ímpar), sendo que estas variáveis são binárias, uma vez que o objetivo é saber se o par estará ou não no emparelhamento ótimo. Na realidade, cada variável de decisão traduz uma possibilidade de aresta(s) a adicionar ao grafo de forma a tornar os vértices i e j de grau par. Além disto, a escolha das arestas depende do seu custo logo os coeficientes de cada uma das V.D corresponde à menor distância entre os vértices que formam o par.

Função Objetivo

Visto que queremos encontrar o emparelhamento ótimo, a função objetivo será obrigatoriamente de minimização (minimiza o custo dos pares de vértices a escolher) e dará como resultado o custo total mínimo dos caminhos “extra” a percorrer pelo *drone*.

Restrições

Temos de garantir que o emparelhamento escolhido não contém pares diferentes com vértices em comum. Caso isto acontecesse, verificar-se-ia uma de duas situações: ou o vértice torna-se par, mas foram adicionadas arestas desnecessárias que representam um aumento distância total percorrida, ou então o vértice poderá continuar a ser de grau ímpar, não resolvendo o problema inicial. Deste modo, foi necessária uma restrição para cada vértice de grau ímpar, que impede que se selecionem duas variáveis de decisão com valores de índice em comum.

Modelo de Programação Linear

Variáveis de decisão

Como já foi referido, Xij traduz uma possibilidade de aresta(s) a adicionar ao grafo, no processo de o tornar *Euleriano*. Visto que os pares são formados apenas pelos vértices de grau ímpar, i e j têm de pertencer a um grupo restrito. Além disto não é permitido ter $i = j$ pois isso não representaria nenhuma aresta e como não se consideram pares repetidos, temos em conta $j > i$ de forma a evitar que sejam selecionados em simultâneo, pares como $X12$ e $X21$ (ambas as formas representam o mesmo par).

$$\mathrm{Xij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall\, \mathrm{i}, \mathrm{j} \in \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13\}, \qquad \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \wedge \mathrm{j} > \mathrm{i}$$

Parâmetros

Os parâmetros são os dados do sistema que não podem ser alterados. Neste problema em específico é percetível que os parâmetros são:

- A distância entre dois vértices e consequentemente Cij, que traduz a distância *Euclidiana* entre os vértices i e j (que poderá coincidir com uma linha de alta tensão).

Função Objetivo

A função objetivo é de minimização pois queremos encontrar o emparelhamento de menor custo.

$$min\ z = \sum_{\mathrm{i}=1}^{5} \sum_{j=i+1}^{6} Cij * Xij + \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=8}^{13} Cij * Xij + \sum_{i=8}^{12} \sum_{j=i+1}^{13} Cij * Xij$$

Restrições

As restrições garantem que o emparelhamento é formado apenas por pares válidos, ou seja, como foi explicado anteriormente, temos de garantir que o vértice v (de grau ímpar) está incluído em um e um só par desse mesmo emparelhamento ótimo. Na restrição abaixo, não temos em quanta a ordem dos vértices no emparelhamento (por exemplo, temos $X21$ ao invés de $X12$, mas é indiferente pois representam a mesma parelha).

Sejam $V1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $V2 = \{8,9,10,11,12,13\}$.

Sujeito a $\sum_{\mathrm{j} \in \mathrm{V1}/\{\mathrm{i}\}} Xij + \sum_{\mathrm{j} \in \mathrm{V2}/\{\mathrm{i}\}} Xij = 1\ ,\ \forall\ i\ \in \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12\}$

LP Solve

Ficheiro de *Input*

Source | Matrix | Options | Result

```
/* Objective function */
// xij -> emparelhamento. = caso não seja escolhido. 1 Caso seja.

min: 3 x12 + 6.08 x13 + 8.06 x14 + 4.12 x15 + 3 x16 + 7.21 x18 + 7 x19 + 7.28 x1_10 + 8.60 x1_11 + 10.63 x1_12 + 5 x1_13 + 3.16 x23
   + 5.10 x24 + 1.41 x25 + 4.24 x26 + 6.08 x28 + 7.62 x29 + 7.07 x2_10 + 7.28 x2_11 + 8.60 x2_12 + 3.16 x2_13 + 2 x34 + 2.83 x35
   + 7.21 x36 + 7.28 x38 + 10 x39 + 8.94 x3_10 + 8.06 x3_11 + 8.25 x3_12 + 4.47 x3_13 + 4.47 x45 + 8.94 x46 + 8.06 x48 + 11.31 x49
   + 10 x4_10 + 8.54 x4_11 + 8 x4_12 + 5.66 x4_13 + 4.47 x56 + 5 x58 + 7.21 x59 + 6.32 x5_10 + 6.08 x5_11 + 7.21 x5_12 + 2 x5_13
   + 5 x68 +  4 x69 + 4.47 x6_10 + 6.40 x6_11 + 8.94 x6_12 + 4 x6_13 + 4.12 x89 + 2.24 x8_10 + 1.41 x8_11 + 4.12 x8_12 + 3 x8_13
   + 2 x9_10 + 5 x9_11 + 8 x9_12 + 5.66 x9_13 + 3 x10_11 + 6 x10_12 + 4.47 x10_13 + 3 x11_12 + 4.12 x11_13 + 5.66 x12_13 ;

/* Variable bounds */
/*Garantir que as parelhas são válidas*/
Vertice1: x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x18 + x19 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_13 = 1 ;
Vertice2: x12 + x23 + x24 + x25 + x26 + x28 + x29 + x2_10 + x2_11 + x2_12 + x2_13 = 1 ;
Vertice3: x13 + x23 + x34 + x35 + x36 + x38 + x39 + x3_10 + x3_11 + x3_12 + x3_13 = 1 ;
Vertice4: x14 + x24 + x34 + x45 + x46 + x48 + x49 + x4_10 + x4_11 + x4_12 + x4_13 = 1 ;
Vertice5: x15 + x25 + x35 + x45 + x56 + x58 + x59 + x5_10 + x5_11 + x5_12 + x5_13 = 1 ;
Vertice6: x16 + x26 + x36 + x46 + x56 + x68 + x69 + x6_10 + x6_11 + x6_12 + x6_13 = 1 ;
Vertice8: x18 + x28 + x38 + x48 + x58 + x68 + x89 + x8_10 + x8_11 + x8_12 + x8_13 = 1 ;
Vertice9: x19 + x29 + x39 + x49 + x59 + x69 + x89 + x9_10 + x9_11 + x9_12 + x9_13 = 1 ;
Vertice10: x1_10 + x2_10 + x3_10 + x4_10 + x5_10 + x6_10 + x8_10 + x9_10 + x10_11 + x10_12 + x10_13 = 1 ;
Vertice11: x1_11 + x2_11 + x3_11 + x4_11 + x5_11 + x6_11 + x8_11 + x9_11 + x10_11 + x11_12 + x11_13 = 1 ;
Vertice12: x1_12 + x2_12 + x3_12 + x4_12 + x5_12 + x6_12 + x8_12 + x9_12 + x10_12 + x11_12 + x12_13 = 1 ;
Vertice13: x1_13 + x2_13 + x3_13 + x4_13 + x5_13 + x6_13 + x8_13 + x9_13 + x10_13 + x11_13 + x12_13 = 1 ;


bin x12 , x13 , x14 , x15 , x16 , x18 , x19 , x1_10 , x1_11 , x1_12 , x1_13 ;
bin x23 , x24 , x25 , x26 , x28 , x29 , x2_10 , x2_11 , x2_12 , x2_13 ;
bin x34 , x35 , x36 , x38 , x39 , x3_10 , x3_11 , x3_12 , x3_13 ;
bin x45 , x46 , x48 , x49 , x4_10 , x4_11 , x4_12 , x4_13 ;
bin x56 , x58 , x59 , x5_10 , x5_11 , x5_12 , x5_13 ;
bin x68 , x69 , x6_10 , x6_11 , x6_12 , x6_13 ;
bin x89 , x8_10 , x8_11 , x8_12 , x8_13 ;
bin x9_10 , x9_11 , x9_12 , x9_13 ;
bin x10_11 , x10_12 , x10_13 ;
bin x11_12 , x11_13 ;
bin x12_13 ;
```

Figura 3 - Input dado no LPSolve

Ficheiro de *Output*

Source | Matrix | Options | Result

Objective | Constraints | Sensitivity

Variables	MILP ...	result
	14,41	14,41
x9_10	1	1
x8_13	1	1
x34	1	1
x25	1	1
x16	1	1
x11_12	1	1
x9_13	0	0
x9_12	0	0
x9_11	0	0
x8_12	0	0
x8_11	0	0
x8_10	0	0
x89	0	0
x6_13	0	0
x6_12	0	0
x6_11	0	0
x6_10	0	0
x69	0	0
x68	0	0
x5_13	0	0
x5_12	0	0
x5_11	0	0
x5_10	0	0
x59	0	0
x58	0	0
x56	0	0
x4_13	0	0
x4_12	0	0
x4_11	0	0
x4_10	0	0
x49	0	0
x48	0	0
x46	0	0
x45	0	0
x3_13	0	0
x3_12	0	0
x3_11	0	0
x3_10	0	0
x39	0	0
x38	0	0
x36	0	0
x35	0	0
x2_13	0	0
x2_12	0	0
x2_11	0	0
x2_10	0	0
x29	0	0
x28	0	0
x26	0	0
x24	0	0
x23	0	0
x1_13	0	0
x1_12	0	0
x1_11	0	0
x1_10	0	0
x19	0	0
x18	0	0
x15	0	0
x14	0	0
x13	0	0
x12_13	0	0
x12	0	0
x11_13	0	0
x10_13	0	0
x10_12	0	0
x10_11	0	0

Figura 4 - Output do LPSolve

A solução ótima é o emparelhamento de cardinal 6 correspondente a {(1,6), (2,5), (3,4), (8,13), (9,10), (11,12)} e o custo total do emparelhamento ótimo é 14.41 (unidades de distância).

Solução Ótima

Tendo em conta o resultado dado pelo *LPSolve* sabemos quais os pares que devem ser formados entre os vértices de modo a que todos estes sejam de grau par e assim possamos encontrar um percurso ótimo e o seu custo (que é a menor distância que o drone pode percorrer dadas restrições impostas). Sendo assim, obtemos então o seguinte grafo (Figura 5).

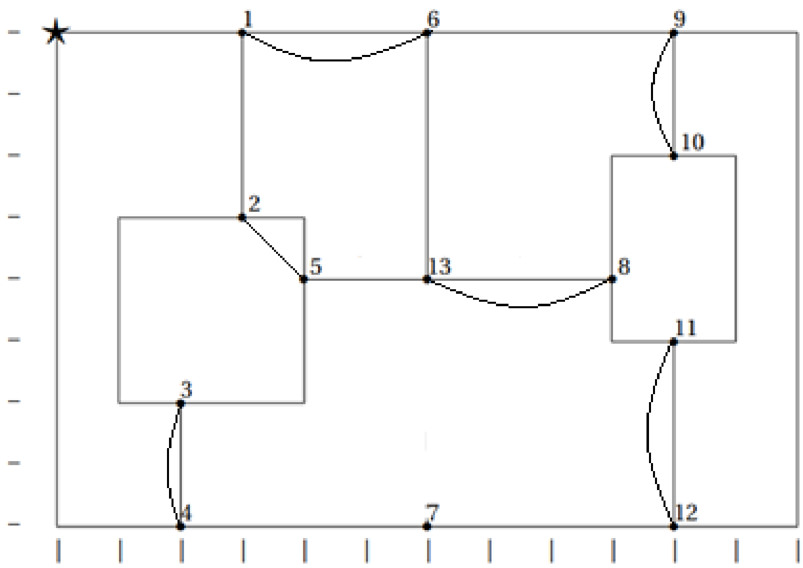


Figura 5 - Grafo Final

Tal como é possível observar o grafo é ligado e todos os seus vértices são de grau par, trata-se então de um grafo Euleriano. Sabemos então que é possível percorrer todas as arestas e passar por elas apenas uma só vez.

Existem várias possibilidades de percursos a realizar, sabendo agora quais as linhas de tensão que iremos repetir, as arestas diagonais a percorrer, e as linhas de tensão por onde o drone apenas passa uma vez, obtemos o seguinte exemplo de percurso (Figura 6).

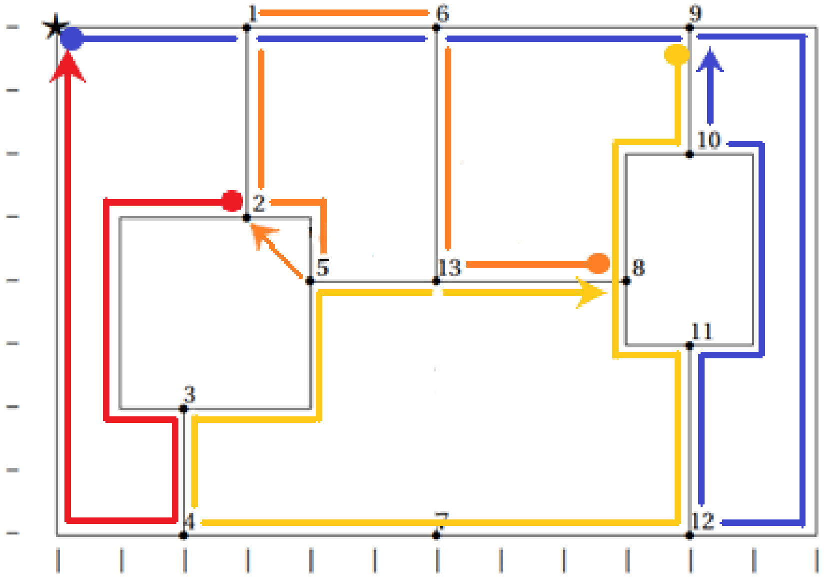


Figura 6 - Possibilidade de Percurso

Percurso:

Roxo ⟶ **Amarelo** ⟶ **Laranja** ⟶ **Vermelho**;

Isto é:

★ ⟶ 1 ⟶ 6 ⟶ 9 ⟶ 12 ⟶ 11 ⟶ 10 ⟶ 9 ⟶ 10 ⟶ 8 ⟶ 11 ⟶ 12 ⟶ 7 ⟶ 4 ⟶ 3 ⟶ 5 ⟶ 13 ⟶ 8 ⟶ 13 ⟶ 6 ⟶ 1 ⟶ 2 ⟶ 5 ⟶ 2 ⟶ 3 ⟶ 4 ⟶ ★

Sabendo que a soma da distância de cada aresta do grafo inicial é:

$$8 + 8 + 12 + 12 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 5 = 81$$

E que o resultado obtido no LP Solver é 14.41. Então a distância total percorrida é:

$$81 + 14.41 = \mathbf{95.41}$$

Análise Final

Interpretação da solução ótima

Como se pode verificar na Figura 4, foram escolhidos os valores das variáveis de decisão pelo LP Solve, para que o custo total do emparelhamento seja mínimo. Existem seis variáveis com valor 1, isto significa que cada uma delas corresponde, à duplicação da(s) aresta(s) que compõem o caminho mais curto entre os vértices de cada par, no grafo inicial para o tornar Euleriano. As que têm valor 0 não são incluídas pois não correspondem à solução ótima. Neste caso concreto, o caminho mais curto entre cada um dos vértices de cada par é composto por apenas uma aresta (seja ela linha de tensão ou aresta diagonal).

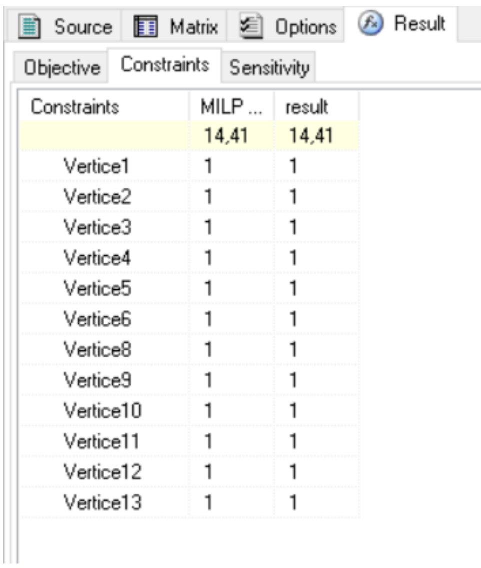
Validação do Modelo

Após calcular o resultado ótimo no *LP Solve* foi necessário verificar que a solução obtida satisfaz todas a condições idealizadas inicialmente e se adequa ao sistema na realidade. Assim, para validar o modelo foram efetuadas as seguintes verificações:

- Nenhuma distância é negativa ou nula (Figura 8);

$$distancia\ total\ percorrida > 0 \equiv\ 95.41 > 0$$

- Os emparelhamentos escolhidos não têm vértices repetidos, ou seja, para cada vértice foi escolhido apenas um arco (Figura 7);



Constraints	MILP ...	result
	14,41	14,41
Vertice1	1	1
Vertice2	1	1
Vertice3	1	1
Vertice4	1	1
Vertice5	1	1
Vertice6	1	1
Vertice8	1	1
Vertice9	1	1
Vertice10	1	1
Vertice11	1	1
Vertice12	1	1
Vertice13	1	1

Figura 7 - Resultado das Restrições

- Todos os vértices do grafo têm grau par (Figura 5);
- É possível efetuar um percurso (com origem e destino no vértice ★) que passa em todas as arestas necessárias apenas uma vez, acrescentado unicamente os emparelhamentos selecionados (solução ótima – Figura 6);
- O valor da distância total percorrida é o mínimo possível de acordo com todas as restrições. De acordo com o percurso escolhido temos:

$$distancia\ percorrida = 3+3+4+2+8+2+3+1+3+1+2+2+1+3+1+3+4+4+2+2+2+2+3+3+4+3+3+1+1+1.41+2+3+1+2+2+8 = 95.41 \equiv solução\ ótima = 95.41$$

- A distância total percorrida pelo drone é admissível (o valor resultante é realista), por exemplo, o seu valor é maior do que a soma do comprimento de todas as arestas do grafo inicial (arestas que o drone é obrigado a percorrer).

$$distancia\ total\ percorrida > soma\ \ arestas\ grafo\ inicial \equiv\ 95.41 > 81$$

		x	3	3	2	2	4	6	6	9	10	10	10	10	6
		y	8	5	2	0	4	8	0	4	8	6	3	0	4
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	8	1	0,00	3,00	6,08	8,06	4,12	3,00	8,54	7,21	7,00	7,28	8,60	10,63	5,00
3	5	2	3,00	0,00	3,16	5,10	1,41	4,24	5,83	6,08	7,62	7,07	7,28	8,60	3,16
2	2	3	6,08	3,16	0,00	2,00	2,83	7,21	4,47	7,28	10,00	8,94	8,06	8,25	4,47
2	0	4	8,06	5,10	2,00	0,00	4,47	8,94	4,00	8,06	11,31	10,00	8,54	8,00	5,66
4	4	5	4,12	1,41	2,83	4,47	0,00	4,47	4,47	5,00	7,21	6,32	6,08	7,21	2,00
6	8	6	3,00	4,24	7,21	8,94	4,47	0,00	8,00	5,00	4,00	4,47	6,40	8,94	4,00
6	0	7	8,54	5,83	4,47	4,00	4,47	8,00	0,00	5,00	8,94	7,21	5,00	4,00	4,00
9	4	8	7,21	6,08	7,28	8,06	5,00	5,00	5,00	0,00	4,12	2,24	1,41	4,12	3,00
10	8	9	7,00	7,62	10,00	11,31	7,21	4,00	8,94	4,12	0,00	2,00	5,00	8,00	5,66
10	6	10	7,28	7,07	8,94	10,00	6,32	4,47	7,21	2,24	2,00	0,00	3,00	6,00	4,47
10	3	11	8,60	7,28	8,06	8,54	6,08	6,40	5,00	1,41	5,00	3,00	0,00	3,00	4,12
10	0	12	10,63	8,60	8,25	8,00	7,21	8,94	4,00	4,12	8,00	6,00	3,00	0,00	5,66
6	4	13	5,00	3,16	4,47	5,66	2,00	4,00	4,00	3,00	5,66	4,47	4,12	5,66	0,00

Figura 8 - Tabelas de Distâncias Euclidianas entre os vértices

Reflexão Crítica

A abordagem realizada para tratar o problema em causa foi escolhida após ter sido feita uma comparação com outra resolução encontrada pelo grupo previamente. Com o decorrer do projeto, apercebemo-nos de que este primeiro modelo encontrado não se tratava de uma solução eficiente. Em primeiro lugar, esta solução abarcava 180 variáveis do tipo $Xijk$ representando o número de vezes que cada aresta entre um par de vértices é percorrida, sendo i e j os vértices da aresta em causa e k seria "A" se a aresta fosse aérea ou "L" caso se tratasse de uma linha de tensão (Figura 9). Além disso foram considerados os dois sentidos em que a aresta pode ser percorrida e também o vértice 7. Sendo isto desnecessário, uma vez que o 7 é um ponto que apenas pertence à aresta entre os vértices 4 e 12 do grafo do grupo.

```
int x01L , x10L , x02A , x20A , x03A , x30A , x04A , x40A ;
int x04L , x40L , x05A , x50A , x07A , x70A , x08A , x80A;
int x0_10A , x10_0A , x0_11A , x11_0A , x0_12A , x12_0A ;
int x0_13A , x13_0A , x12L , x21L , x16L , x61L , x13A , x31A ;
int x14A , x41A , x15A , x51A , x17A , x71A , x18A , x81A ;
int x1_10A , x10_1A , x1_11A , x11_1A , x1_12A , x12_1A , x1_13A , x13_1A ;
int x23A , x32A , x23L , x32L , x25A , x52A , x25L , x52L , x24A , x42A ;
int x26A , x62A , x27A , x72A , x28A , x82A , x29A , x92A ;
int x2_10A , x10_2A , x2_11A , x11_2A , x2_12A , x12_2A , x2_13A , x13_2A;
int x35A , x53A , x35L , x53L , x34L , x43L , x36A , x63A , x37A , x73A;
int x38A , x83A , x39A , x93A , x3_10A , x10_3A , x3_11A , x11_3A ;
int x3_12A , x12_3A , x3_13A , x13_3A , x47L , x74L , x45A , x54A ;
int x46A , x64A , x48A , x84A , x49A , x94A , x4_10A , x10_4A ;
int x4_11A , x11_4A , x4_12A , x12_4A , x4_13A , x13_4A , x5_13L , x13_5L ;
int x56A , x65A , x57A , x75A , x59A , x95A , x5_10A , x10_5A;
int x5_11A , x11_5A , x5_12A , x12_5A , x6_13L , x13_6L , x69L , x96L;
int x67A , x76A , x68A , x86A , x6_10A , x10_6A , x6_11A , x11_6A;
int x6_12A , x12_6A , x7_12L , x12_7L , x78A , x87A , x79A , x97A ;
int x7_10A , x10_7A , x7_11A , x11_7A , x7_13A , x13_7A , x8_13L , x13_8L ;
int x8_10L , x10_8L , x8_11L , x11_8L , x8_10A , x10_8A , x8_11A , x11_8A ;
int x89A , x98A  , x8_12A , x12_8A , x9_10L , x10_9L , x9_12L , x12_9L ;
int x9_13A , x13_9A , x10_11L , x11_10L , x10_11A , x11_10A ;
int x10_13A , x13_10A , x11_12L , x12_11L , x11_13A , x13_11A , x12_13A , x13_12A ;
```

Figura 9 - Variáveis do Modelo Anterior

A função objetivo (Figura 10), tal como a função que foi proposta pelo grupo para a resolução do problema, é de minimização, onde cada variável multiplica pela distância da aresta representada.

```
min: 3 x01L + 3 x10L + 4.24 x02A + 4.24 x20A + 6.32 x03A + 6.32 x30A + 8.25 x04A + 8.25 x40A
   + 10 x04L + 10 x40L + 5.66 x05A + 5.66 x50A + 10 x07A + 10 x70A + 9.85 x08A + 9.85 x80A
   + 10.2 x0_10A + 10.2 x10_0A + 10.3 x0_11A + 10.3 x11_0A + 12.81 x0_12A + 12.81 x12_0A
   + 7.21 x0_13A + 7.21 x13_0A + 3 x12L + 3 x21L + 3 x16L + 3 x61L + 6.08 x13A + 6.08 x31A
   + 8.06 x14A + 8.06 x41A + 4.12 x15A + 4.12 x51A + 8.54 x17A + 8.54 x71A + 7.21 x18A + 7.21 x81A
   + 7.28 x1_10A + 7.28 x10_1A + 8.60 x1_11A + 8.60 x11_1A + 10.63 x1_12A + 10.63 x12_1A + 5 x1_13A + 5 x13_1A
   + 3.16 x23A + 3.16 x32A + 6 x23L + 6 x32L + 1.41 x25A + 1.41 x52A + 2 x25L + 2 x52L + 5.10 x24A + 5.10 x42A
   + 4.24 x26A + 4.24 x62A + 5.83 x27A + 5.83 x72A + 6.08 x28A + 6.08 x82A + 7.62 x29A + 7.62 x92A
   + 7.07 x2_10A + 7.07 x10_2A + 7.28 x2_11A + 7.28 x11_2A + 8.60 x2_12A + 8.60 x12_2A + 3.16 x2_13A + 3.16 x13_2A
   + 2.83 x35A + 2.83 x53A + 4 x35L + 4 x53L + 2 x34L + 2 x43L + 7.21 x36A + 7.21 x63A + 4.47 x37A + 4.47 x73A
   + 7.28 x38A + 7.28 x83A + 10 x39A + 10 x93A + 8.94 x3_10A + 8.94 x10_3A + 8.06 x3_11A + 8.06 x11_3A
   + 8.25 x3_12A + 8.25 x12_3A + 4.47 x3_13A + 4.47 x13_3A + 4 x47L + 4 x74L + 4.47 x45A + 4.47 x54A
   + 8.94 x46A + 8.94 x64A + 8.06 x48A + 8.06 x84A + 11.31 x49A + 11.31 x94A + 10 x4_10A + 10 x10_4A
   + 8.54 x4_11A + 8.54 x11_4A + 5.66 x4_13A + 5.66 x13_4A + 2 x5_13L + 2 x13_5L
   + 4.47 x56A + 4.47 x65A + 4.47 x57A + 4.47 x75A + 7.21 x59A + 7.21 x95A + 6.32 x5_10A + 6.32 x10_5A
   + 6.08 x5_11A + 6.08 x11_5A + 7.21 x5_12A + 7.21 x12_5A + 4 x6_13L + 4 x13_6L + 4 x69L + 4 x96L
   + 5 x68A + 5 x86A + 4.47 x6_10A + 4.47 x10_6A + 6.40 x6_11A + 6.40 x11_6A
   + 8.94 x6_12A + 8.94 x12_6A + 4 x7_12L + 4 x12_7L + 5 x78A + 5 x87A + 8.94 x79A + 8.94 x97A
   + 7.21 x7_10A + 7.21 x10_7A + 5 x7_11A + 5 x11_7A + 4 x7_13A + 4 x13_7A + 3 x8_13L + 3 x13_8L
   + 3 x8_10L + 3 x10_8L + 2 x8_11L + 2 x11_8L + 2.24 x8_10A + 2.24 x10_8A + 1.41 x8_11A + 1.41 x11_8A
   + 4.12 x89A + 4.12 x98A + 4.12 x8_12A + 4.12 x12_8A + 2 x9_10L + 2 x10_9L + 12 x9_12L + 12 x12_9L
   + 5.66 x9_13A +5.66 x13_9A + 5 x10_11L + 5 x11_10L +  3 x10_11A + 3 x11_10A
   + 4.47 x10_13A + 4.47 x13_10A + 3 x11_12L + 3 x12_11L + 4.12 x11_13A + 4.12 x13_11A + 5.66 x12_13A + 5.66 x13_12A ;
```

Figura 10 - Função Objetivo do Modelo Anterior

Em relação às restrições focamo-nos em dois pontos fulcrais:

- Todas as arestas (linhas de alta tensão) do grafo têm de ser percorridas pelo menos uma vez (Figura 11);
- O número de entradas num vértice, ou seja, o número de arestas convergentes, tem de ser igual ao número de saídas, arestas divergentes (Figura 12). Isto é:

$$X10L = X01L \iff X10L - X01L = 0$$

```
arestaA: x01L + x10L >= 1;
arestaB: x04L + x40L >= 1;
arestaC: x12L + x21L >= 1;
arestaD: x23L + x32L >= 1;
arestaE: x25L + x52L >= 1;
arestaF: x35L + x53L >= 1;
arestaG: x34L + x43L >= 1;
arestaH: x5_13L + x13_5L >= 1;
arestaI: x47L + x74L >= 1;
arestaJ: x16L + x61L >= 1;
arestaK: x6_13L + x13_6L >= 1;
arestaL: x69L + x96L >= 1;
arestaM: x13_8L + x8_13L >= 1;
arestaN: x7_12L + x12_7L >= 1;
arestaO: x9_12L + x12_9L >= 1;
arestaP: x9_10L + x10_9L >= 1;
arestaQ: x11_12L + x12_11L >= 1;
arestaR: x8_10L + x10_8L >= 1;
```

Figura 11 - 1ª Restrição do Modelo Anterior

```
vertice0: x10L + x40L + x20A + + x30A + x40A + x50A + x70A + x80A + x10_0A + x11_0A + x12_0A + x13_0A
        - x01L -x04L - x02A - x03A - x04A - x05A - x07A - x08A - x0_10A - x0_11A - x0_12A - x0_13A = 0 ;

vertice1: x61L + x01L + x21L + x31A + x41A + x51A + x71A + x81A + x10_1A + x11_1A + x12_1A + x13_1A
        - x16L - x10L - x12L - x13A - x14A - x15A - x17A - x18A - x1_10A - x1_11A - x1_12A - x1_13A = 0 ;

vertice2: x12L + x32L + x52L + x02A + x32A + x52A + x42A + x62A + x72A + x82A + x92A + x10_2A + x11_2A + x12_2A + x13_2A
        - x21L - x23L - x25L - x20A - x23A - x25A - x24A - x26A - x27A - x28A - x29A - x2_10A - x2_11A - x2_12A - x2_13A = 0 ;

vertice3: x23L + x43L + x53L + x03A + x13A + x23A + x53A + x63A + x73A + x83A + x93A + x10_3A + x11_3A + x12_3A + x13_3A
        - x32L - x34L - x35L - x30A - x31A - x32A - x35A - x36A - x37A - x38A - x39A - x3_10A - x3_11A - x3_12A - x3_13A = 0 ;

vertice4: x04L + x34L + x74L + x04A + x14A + x24A + x54A + x64A + x84A + x94A + x10_4A + x11_4A + x13_4A
        - x40L - x43L - x47L - x40A - x41A - x42A - x45A - x46A - x48A - x49A - x4_10A - x4_11A - x4_13A = 0 ;

vertice5: x25L + x35L + x13_5L + x05A + x15A + x25A + x35A + x45A + x65A + x75A + x95A + x10_5A + x11_5A + x12_5A
        - x52L - x53L - x5_13L - x50A - x51A - x52A - x53A - x54A - x56A - x57A - x59A - x5_10A - x5_11A - x5_12A = 0 ;

vertice6: x16L + x96L + x13_6L + x26A + x36A + x46A + x56A + x86A + x10_6A + x11_6A + x12_6A
        - x61L - x69L - x6_13L - x62A - x63A - x64A - x65A - x68A - x6_10A - x6_11A - x6_12A  = 0 ;

vertice7: x47L + x12_7L + x07A + x17A + x27A + x37A + x57A + x87A + x97A + x10_7A + x11_7A + x13_7A
        - x74L - x7_12L - x70A - x71A - x72A - x73A - x75A - x78A - x79A - x7_10A - x7_11A - x7_13A = 0 ;

vertice8: x10_8L + x11_8L + x13_8L + x08A + x18A + x28A + x38A + x48A + x68A + x78A + x98A + x10_8A + x11_8A + x12_8A
        - x8_10L - x8_11L - x8_13L - x80A - x81A - x82A - x83A - x84A - x86A - x87A - x89A - x8_10A - x8_11A - x8_12A = 0 ;

vertice9: x69L + x10_9L + x12_9L + x29A + x39A + x49A + x59A + x79A + x89A + x13_9A
        - x96L - x9_10L - x9_12L - x92A - x93A - x94A - x95A - x97A - x98A - x9_13A = 0;

vertice10: x9_10L + x8_10L + x11_10L + x0_10A + x1_10A + x2_10A + x3_10A + x4_10A + x5_10A + x6_10A + x7_10A + x8_10A + x11_10A + x13_10A
         - x10_9L - x10_8L - x10_11L - x10_0A - x10_1A - x10_2A - x10_3A - x10_4A - x10_5A - x10_6A - x10_7A - x10_8A - x10_11A - x10_13A = 0 ;

vertice11: x8_11L + x10_11L + x12_11L + x0_11A + x1_11A + x2_11A + x3_11A + x4_11A + x5_11A + x6_11A + x7_11A + x8_11A + x10_11A + x13_11A
         - x11_8L - x11_10L - x11_12L - x11_0A - x11_1A - x11_2A - x11_3A - x11_4A - x11_5A - x11_6A - x11_7A - x11_8A - x11_10A - x11_13A = 0 ;

vertice12: x11_12L + x7_12L + x9_12L + x0_12A + x1_12A + x3_12A + x5_12A + x6_12A + x8_12A + x13_12A
         - x12_11L - x12_7L - x12_9L - x12_0A - x12_1A - x12_3A - x12_5A - x12_6A - x12_8A - x12_13A = 0 ;

vertice13: x5_13L + x6_13L + x8_13L + x0_13A + x1_13A + x2_13A + x3_13A + x4_13A + x7_13A + x9_13A + x10_13A + x11_13A + x12_13A
         - x13_5L - x13_6L - x13_8L - x13_0A - x13_1A - x13_2A - x13_3A - x13_4A - x13_7A - x13_9A - x13_10A - x13_11A - x13_12A = 0 ;
```

Figura 12 - 2ª Restrição do Modelo Anterior

Tal como é possível observar estes dois conjuntos de restrições incluem inúmeras hipóteses e variáveis fazendo com que este modelo esteja mais propício a erros, diminuindo desta forma a sua eficácia e aumentando a sua complexidade. Na 1ª Restrição nós consideramos que as arestas têm de ser percorridas pelo menos uma vez. Isto é algo repetitivo, uma vez que o objetivo do problema é que todas essas arestas sejam percorridas. O que nós necessitamos de saber é quais as arestas que devem ser repetidas e quais os percursos aéreos a tomar de forma a que o drone consiga percorrer todas as linhas de alta tensão. É importante salientar que também é desnecessário considerarmos o sentido que cada aresta poderá ser percorrida, uma vez que não se trata de um grafo orientado.

Finalmente, o output dado pelo *LPSolve* foi o seguinte:

Source | Matrix | Options | Result

Objective | Constraints | Sensitivity

Variables	MILP ...	MILP ...	MILP ...	MILP ...	MILP ...	MILP ...	MILP ...	r...
	110,11	109,31	107,29	106,78	103,54	101,29	95,41	95,41
x01L	1	1	1	1	1	1	1	1
x40L	1	1	1	1	1	1	1	1
x12L	1	1	1	1	1	1	1	1
x16L	1	1	1	1	1	1	1	1
x61L	0	0	0	0	1	1	1	1
x23L	1	1	1	1	1	1	1	1
x52A	1	1	1	1	1	1	1	1
x25L	1	1	1	1	1	1	1	1
x35L	1	1	1	1	1	1	1	1
x34L	1	1	1	1	1	1	1	1
x43L	0	0	0	0	0	0	1	1
x74L	1	0	1	0	0	1	1	1
x5_13L	1	1	1	1	1	1	1	1
x13_6L	1	0	1	0	0	1	1	1
x69L	1	1	1	1	0	1	1	1
x12_7L	1	0	1	0	0	1	1	1
x8_13L	1	1	1	1	1	1	1	1
x13_8L	0	0	0	0	1	0	1	1
x10_8L	0	0	1	1	1	1	1	1
x8_11L	1	1	1	1	1	1	1	1
x9_10L	1	1	2	1	1	1	1	1
x10_9L	1	0	0	0	1	1	1	1
x9_12L	1	0	0	0	0	1	1	1
x11_10L	0	0	0	1	1	1	1	1
x11_12L	0	1	1	1	1	0	1	1
x12_11L	1	0	0	1	1	1	1	1
x10L	0	0	0	0	0	0	0	0
x02A	0	0	0	0	0	0	0	0
x20A	0	0	0	0	0	0	0	0
x03A	0	0	0	0	0	0	0	0
x30A	0	0	0	0	0	0	0	0
x04A	0	0	0	0	0	0	0	0
x40A	0	0	0	0	0	0	0	0
x04L	0	0	0	0	0	0	0	0
x05A	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 13 - Resultado do Modelo Anterior

Observando os dados resultantes verificamos que a última coluna foi obtida através de múltiplas iterações até alcançar a solução ótima. Esta coluna encontra-se organizada de forma decrescente, logo, podemos concluir que em todas as variáveis com resultado diferente de 0, as respetivas arestas foram percorridas pelo menos uma vez. Como as únicas variáveis que apresentam uma solução são iguais a 1, significa que essas arestas apenas foram percorridas uma vez, já que a variável $Xijk$ representa o nº de vezes que uma aresta é percorrida.

Analisando agora a solução ótima vemos que as arestas percorridas são as mesmas que o grupo obteve com a S.O do modelo apresentado neste projeto, tal como a distância total percorrida. É importante referir que este fator reforça novamente a validação do nosso modelo.

Comparando ambos os modelos, vemos que o modelo mais recente, e proposto pelo grupo para a resolução do problema, é aquele que melhor traduz as regras de funcionamento do sistema, de uma forma simples, clara e objetiva. Nessa resolução apenas consideramos as arestas que queremos repetir ou os percursos aéreos a tomar, excluindo assim as linhas de alta tensão (arestas do grafo) que o drone já tem de percorrer obrigatoriamente uma vez. Sendo que, o fator decisivo neste problema é como o drone irá reposicionar-se e tomar certos caminhos de forma a percorrer todas as linhas, considerando sempre o menor custo possível na distância percorrida. Desta forma, ao contrário do modelo antigo, o custo que nós queremos descobrir é o custo da distância das "arestas extras" que têm de ser percorridas de forma a conseguir passar por todas as linhas, tendo em conta que o custo das arestas já definidas é de 81 unidades de distância.

Assim sendo, nós acabamos por considerar menos variáveis do que no modelo antigo. Já que nesse, além dos percursos aéreos e das linhas de alta tensão, incluímos também o sentido em que cada aresta é percorrida, prejudicando assim a eficiência na sua resolução, uma vez que, essa abordagem aplica-se melhor aos grafos orientados.

Conclusão

Concluímos então, no final de analisarmos as duas resoluções, que realmente aquela que foi apresentada e elaborada é a resolução mais adequada, pois é aquela que inclui menos variáveis e traduz a medida desejada de eficiência, tendo como base a Teoria dos Grafos. Na nossa opinião, ambas as resoluções foram importantes, de forma a permitir-nos ter um sentido crítico do nosso trabalho, a encontrarmos espaço para melhoria e, consequentemente, a um maior aproveitamento da unidade curricular.