UNIVERSIDADE DO MINHO

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

TRABALHO PRÁTICO 3

Método do Caminho Crítico

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional
4 de janeiro de 2021

(a) Ana Catarina Canelas
A93872

(b) Ana Filipa Pereira
A89589

(c) Carolina Santejo
A89500

(d) Raquel Costa
A89464

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Introdução

Este terceiro trabalho prático da disciplina de MDIO baseou-se na gestão de atividades de um projeto. Este projeto, definido pelo maior número de aluno do grupo, encontra-se dividido em 12 atividades numeradas de 0 a 11. Cada uma destas atividades possui uma determinada duração, além de puder possuir relações de precedência, ou seja, só será realizada se as atividades precedentes tiverem sido. Além disto há atividades que podem ser realizadas em simultâneo.

Além disto, foi necessário ter em conta que as atividades poderiam sofrer reduções, tendo estas um limite máximo (isto porque as atividades não são totalmente elásticas), sendo que cada redução implicaria um custo adicional. Havia duas formas de reduções, uma com custo c1 e outra com custo c2, sendo que apenas se poderia reduzir com c2, se se tivesse reduzido ao máximo com custo c1. Foi necessário ter em conta, que o aumento do custo em relação às reduções era dado por uma função contínua côncava, á exceção das atividades 7 e 9, nas quais o aumento de custo é ditado pela escolha de um conjunto discreto de opções.

Neste trabalho, na rede que representa o projeto, os nós do grafo correspondem às várias atividades.

Principais Objetivos

Este trabalho foi dividido em duas partes, nas quais foram definidos alguns objetivos:

Na primeira parte, foi necessário determinar o caminho crítico, da rede que representa o projeto, bem como a sua menor duração possível. Esta duração nada mais é que o comprimento do caminho crítico.

Na segunda parte, e tendo em conta que cada atividade poderia ser reduzida, e que isso implicaria custos, foi pedido que determinássemos que atividades devíamos reduzir a duração de forma a que o tempo mínimo de conclusão do projeto calculado na parte 1 diminuísse 3 unidades de tempo. Além disto, o custo total das reduções tinha de ser minimizado.

Desta forma, para resolver o desafio, foi necessário criar um modelo de programação linear inteira mista.

1ª Parte

Rede do projeto

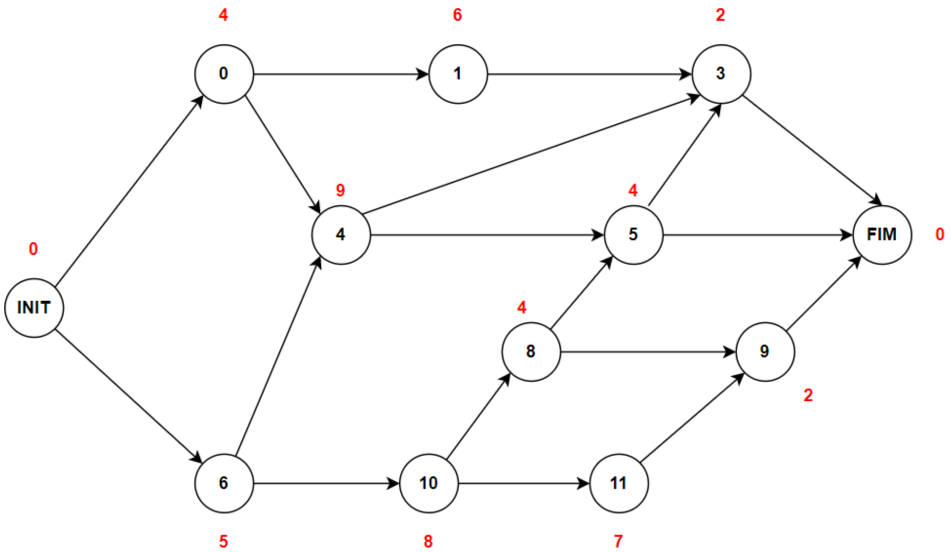

Figura 1 - Rede do Projeto

A Figura 1 revela a rede correspondente ao projeto do grupo, realçando que foram retiradas as atividades 2 e 7, tal como solicitado e de acordo com o maior número de aluno do grupo.

Os vértices init e fim são dois vértices que representam atividades sem duração de início e conclusão do projeto. Na figura, o valor associado a cada vértice corresponde á duração da atividade correspondente.

Caminho Crítico

Sabendo que o caminho crítico corresponde ao caminho mais longo entre o vértice que define o início do projeto e o vértice que define o fim, foi construído um modelo de programação linear utilizando variáveis de decisão xij associadas a cada arco (i, j) do grafo.

```
// xij -> variáveis binárias que indicam se o arco correspondente pertence ao caminho crítico
max: 4 x01 + 4 x04 + 5 x64 + 5 x68 + 5 x6_10 + 6 x13 + 9 x43 + 4 x53
   + 9 x45 + 4 x85 + 4 x89 + 8 x10_8 + 8 x10_11 + 7 x11_9 + 2 x3f + 4 x5f + 2 x9f;

//fluxo que entra no vértice = fluxo que sai
vertice_i: xi0 + xi6 = 1;
vertice_0: xi0 = x01 + x04;
vertice_1: x01 = x13;
vertice_3: x13 + x43 + x53 = x3f;
vertice_4: x04 + x64 = x45 + x43;
vertice_5: x45 + x85 = x53 + x5f;
vertice_6: xi6 = x64 + x68+ x6_10;
vertice_8: x68 + x10_8 = x85 + x89;
vertice_9: x89 + x11_9 = x9f;
vertice_10: x6_10 = x10_8 + x10_11;
vertice_11: x10_11 = x11_9;


bin xi0 , xi6 , x01 , x04 , x64 , x68 , x6_10 , x13;
bin x45, x43 , x85 , x89 , x10_8 , x10_4 , x11_9 , x3f , x5f , x9f;
```

Figura 2 - Input Ficheiro de Caminho Critico

No output deste ficheiro as variáveis de decisão que tomam o valor 1 na solução ótima definem o caminho mais longo entre os vértices i e f. E essas variáveis são: $x6\_10, x53, x85, x10\_8, xi6$. Obtemos, portanto, o seguinte grafo:

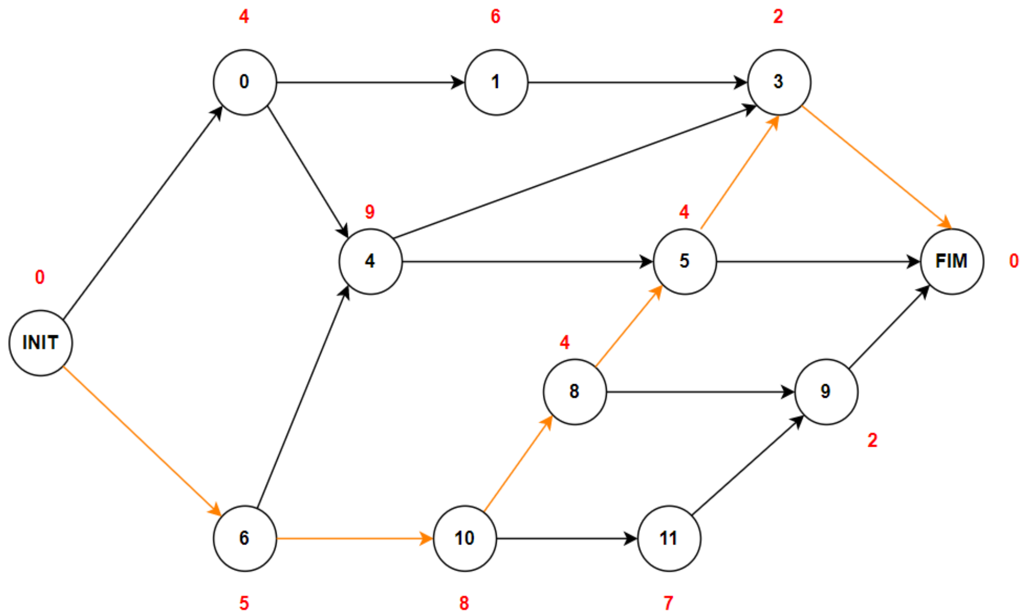

Figura 3 - Caminho Crítico

Na Figura 3, salienta-se com a cor- de-laranja o caminho crítico, que corresponde ao caminho mais longo na rede, desde o vértice init até ao vértice fim. O caminho é composto pelas atividades 6,10,8,5 e 3 sendo estas denominadas atividades críticas.

É de realçar que as atividades críticas são aquelas que devem ser controladas mais de perto, visto que um atraso numa delas dá origem inevitavelmente a um atraso no tempo de execução do projeto global.

Assim o menor tempo necessário para concluir o projeto é:

$$5 + 8 + 4 + 4 + 2 = 23\,U.T.$$

Diagrama de Gantt

Sendo que o objetivo é minimizar o tempo de execução do projeto, tendo em conta todas as precedências, construiu-se mais um modelo de programação matemática, onde cada variável de decisão t_i representa o tempo de início da atividade i. Desta forma o projeto termina no instante de tempo t_f, isto é, quando todas as atividades precedentes ao fim estiverem concluídas.

```
/* função objectivo */
min: tf ;
/* restrições */
arco_01: t1 >= t0 + 4 ;
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_04: t4 >= t0 + 4 ;
arco_13: t3 >= t1 + 6 ;
arco_53: t3 >= t5 + 4 ;
arco_43: t3 >= t4 + 9 ;
arco_3f: tf >= t3 + 2 ;
arco_64: t4 >= t6 + 5 ;
arco_68: t8 >= t6 + 5 ;
arco_45: t5 >= t4 + 9 ;
arco_5f: tf >= t5 + 4 ;
arco_i6: t6 >= ti + 0 ;
arco_85: t5 >= t8 + 4 ;
arco_9f: tf >= t9 + 2 ;
arco_89: t9 >= t8 + 4 ;
arco_610: t10 >= t6 + 5 ;
arco_108: t8 >= t10 + 8 ;
arco_119: t9 >= t11 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 + 8;
```

Figura 4 - Input Min tempo de Execução LPSolve

	23
t0	0
t1	4
t10	5
t11	13
t3	21
t4	8
t5	17
t6	0
t8	13
t9	20
tf	23
ti	0

Tabela 1 - Output do LPsolve

Sendo d_i o tempo de duração de uma atividade, então $t_i + d_i$ designa o tempo de conclusão da atividade i. Portanto, de acordo com o output obtido, construímos o seguinte Diagrama de Gantt.

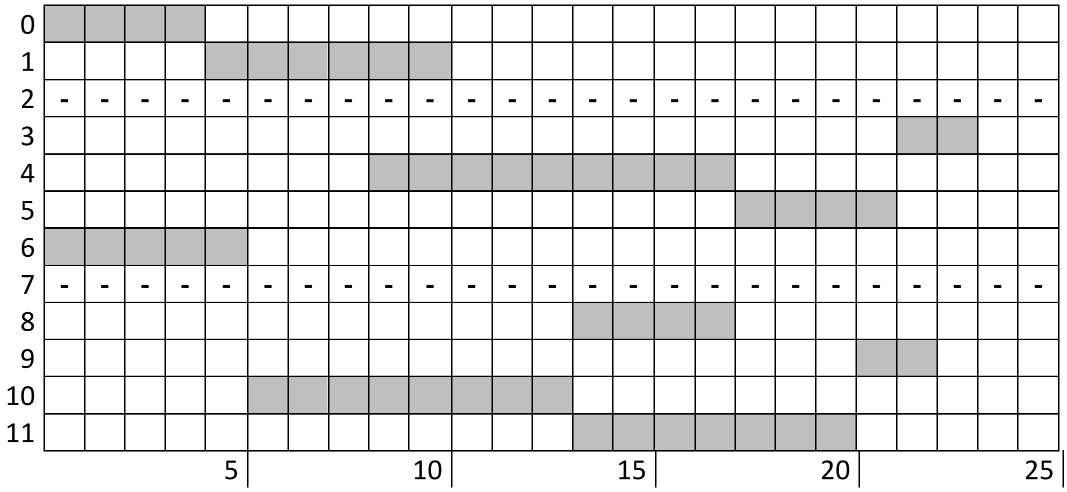

Tabela 2 - Diagrama de Gantt

Tal como podemos observar através do **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**, e da solução ótima obtida do Modelo:

$$t_f = 23\ (U.T)$$

Confirmando assim, o valor calculado anteriormente.

2ª Parte

Formulação do Problema

Na primeira parte deste projeto, foi calculado o tempo mínimo necessário para a conclusão do projeto em questão, sendo esta duração igual a 23 U.T. No entanto, o desafio do trabalho consistia em reduzir a duração calculada em 3.T, ou seja, determinar como devem ser reduzidas as durações das atividades para que o projeto passasse a ter uma duração de 20 U.T. São várias as possibilidades de resolução, sendo que o grupo decidiu definir uma função custo côncava por partes.

A redução para cada atividade, poderia ser representada por uma função com dois ramos. O ramo superior teria a função custo da redução apenas incluindo o custo c1, e o ramo 2 teria a função custo da redução incluindo o custo c2 e o valor do custo da redução total com c1.

Exemplificando com a atividade 0:

```
atividade 0:    200*r0 para r0<0.5
                100+100*(r0-0.5) para 0.5<=r0<=1
```

Figura 5 - Atividade 0

Seja r0 a redução da atividade 0. Caso, apenas se reduza a atividade com o custo c1, utiliza-se a função 200 * r0, sendo r0 uma redução inferior a 0.5. Por outro lado, caso de pretenda reduzir a atividade 0 também com o custo c2, temos de considerar que se reduziu ao máximo com o custo c1 e por isso temos de obrigatoriamente "pagar" essa redução máxima (neste caso é igual a 0.5 * 200 = 100). Além deste custo já garantido, temos de "pagar" também o que se reduziu com custo c2. É de realçar que se r0 estiver entre 0.5 e 1, significa que o tempo reduzido com custo c2 é igual a (r0 - 0.5), pois 0.5 é a redução máxima com custo c1. Desta forma, 100 + 100* (r0-0.5) devolve o custo extra de reduzir ao máximo a atividade 0 com o custo c1 e após isto, reduzir com custo c2.

Desta forma, foi possível, para as atividades 0,1,3,4,5,6,8,10 e 11, definir uma função custo por partes, que representa o custo de reduzir a atividade. Para a atividade 9, visto que apenas tínhamos um conjunto discreto de opções, foi necessário, apenas utilizar variáveis binárias, que assumiam o valor 1 se a opção que representam fosse escolhida.

Variáveis de Decisão

Para cada uma das atividades do projeto, à exceção da 9, foi necessário considerar que o custo de a reduzir poderia ser uma função por partes. Desta forma, utilizaram-se varáveis binárias que me indicavam que ramo da função custo seria tido em conta (o de cima, o debaixo ou nenhum). Foram precisas outras variáveis, que indicavam a redução sofreu uma atividade, sendo esta variável "decomposta" em duas, sendo que uma indicava o que se reduziu com custo 1 e a outra o que se reduziu com custo c2.

Para a atividade 9, apenas se utilizaram variáveis binárias, que representariam se uma ou nenhuma das opções de redução disponíveis era escolhida.

Restrições

Para resolver este problema tiveram de ser definidas várias restrições, sendo algumas relativas às funções por partes e outras relativas às relações de precedência.

Como já foi referido, há determinadas atividades que só podem ser efetuadas quando as atividades que as precedem terminarem a sua realização. Desta forma, foi necessário estipular restrições que garantiam que tal fenómeno acontecesse. O *tf* (tempo de conclusão do projeto) teria de ser igual a 20, pelo que foi preciso definir uma restrição para isto. Por outro lado, foi necessário definir restrições que impunham o seguinte: sendo *ti* o instante de início da atividade i, *ti* tem de ser obrigatoriamente superior ou igual ao instante em que termina a sua atividade precedente. Se a atividade i tiver várias atividades precedentes, então ti terá de ser superior ou igual ao instante de término da atividade que termina "mais tarde". No entanto não nos pudemos esquecer que as atividades podem sofrer reduções pelo que é preciso subtrair ao instante em que terminam, o tempo que essa atividade foi reduzida. Ou seja, se a atividade y terminava no instante 5 e sofreu redução de 2 U.T. então esta atividade passa a terminar no instante 5-2 = 3.

Para a atividade 9, existia apenas duas opções de escolha de redução, cada opção com um determinado custo. Desta forma, as restrições relativas a esta atividade basearam-se apenas em garantir que ambas as opções não poderiam ser escolhidas em simultâneo.

Para as outras atividades, foi preciso definir restrições relativas á modelação das funções custo por partes. Primeiro, foi preciso utilizar duas variáveis binárias, que não podiam ser ambas igual a 1. Isto porque, elas representam em que ramo da função custo desta atividade iriamos utilizar. Se estivéssemos no ramo de cima (apenas reduções com custo c1) então apenas a variável y1 (apenas um exemplo) era igual a 1. Caso contrário era y2 igual a 1. Se a atividade não fosse reduzida então ambas as variáveis binárias seriam iguais a zero. Por outro lado, foi preciso também definir uma variável que representasse a redução que uma atividade sofreu. Essa variável seria decomposta em duas: r1 (apenas para exemplo) representaria a redução com custo c1 e r2 representaria a redução com custo c2. É claro que se r2 tiver valor maior que zero, r1 será nula, pois como já foi explicado o custo de reduzir totalmente com custo c2 já é considerado no segundo ramo da função custo por partes dessa atividade. Foi preciso definir restrições que impunham entre que valores r1 e r2 poderiam estar. Além disto, existe a restrição que obriga a redução de uma atividade ser igual á de r1 e r2. Assim, e com estas restrições, foi possível moldar a função custo de todas as atividades que devolviam zero, caso a atividade não fosse reduzida, ou devolviam o valor a “pagar” pela redução dessa mesma atividade.

Função objetivo

Como já foi referido, o objetivo principal da segunda parte deste projeto consistiu em determinar que atividades deviam ter a sua duração diminuída, para que a duração global do projeto diminuísse 3 U.T e pagando o menor valor possível.

Visto que foi definida, para cada atividade uma função custo, que representa o valor pago por reduzir essa atividade, é lógico que a nossa função objetivo será a soma de todas as funções custo de cada uma das atividades. Assim, é devolvido o valor total que foi pago pelas reduções. Além disto, a F.O terá de ser de minimização dado que queremos o custo mínimo.

Modelo de Programação Linear Inteira Mista

Variáveis de decisão

Neste modelo estão presentes variáveis de decisão do tipo $y_{i,j}$ e $r_{i,j}$. A primeira é uma variável binária sendo que representa a escolha a escolha do ramo j na função custo por partes da atividade i. Quanto à segunda, representa uma variável real (e positiva) que, no contexto do problema, traduz a redução do tempo de realização que a atividade *i* sofreu, sendo que *j* indica se a redução foi apenas com custo *c1* ou se foi com custo *c1* e *c2*.

$I = \{0,1,3,4,5,6,8,9,10,11\}$

$$y_{i,j} \in \{0,1\}, \ \forall_i \in I \ \wedge \ \forall_j \in \{1,2\}$$

$$r_{i,j} \in \mathbb{R}, \ \forall_i \in I \ \wedge \ \forall_j \in \{1,2\}$$

Parâmetros

Os parâmetros de um modelo são os dados do problema que não podem ser alterados. Neste problema é possível identificar os parâmetros seguintes:

- A duração inicial T_i, em unidades de tempo [U.T.], da atividade i;
- Custo Normal, em unidades monetárias [U.M.], de uma atividade i;
- Custo suplementar $c_{1,i}$ [U.M.] para reduzir uma unidade de tempo da atividade i;
- Valor da máxima redução de tempo $M_{1,i}$ a um custo $c_{1,i}$;
- Custo suplementar $c_{2,i}$ [U.M.] para reduzir uma unidade de tempo da atividade i, após ter aplicado a máxima redução a um custo $c_{1,i}$;
- Valor da máxima redução de tempo $M_{2,i}$ a um custo $c_{2,i}$.

Função objetivo

A função objetivo é de minimização porque é necessário encontrar a solução que minimiza o custo da redução do tempo de execução do projeto. Consideremos o seguinte:

- ➔ a é o valor do termo independente em cada função nos ramos da função custo por partes de cada atividade i e, $y_{i,j}$, $r_{i,j}$ e $c_{j,i}$ as variáveis e parâmetro referidos acima.
- ➔ A atividade 9 tem duas opções discretas, sendo $a1$ o custo da primeira e $a2$ o custo da segunda.

Tendo isto em conta, obtemos o seguinte:

$I = \{0,1,3,4,5,6,8,10,11\}$

$$\min Z = (\sum_{i\,\in\,I}\sum_{j=1}^{2} a * y_{i,j} + c_{j,i} * r_{i,j}) + a1 * y_{9,1} + a2 * y_{9,2}$$

Restrições

Neste modelo estão presentes dois tipos de restrições diferentes sendo as primeiras alusivas à modelação das funções por partes, e as segundas à definição das relações de precedência entre duas atividades i e j (arco i->j do grafo) sendo que t_j designa o tempo inicial da atividade j após a redução da duração da atividade i. Pelas razões, já referidas neste relatório, para a atividade 9 basta garantir que ambas as opções de escolha não são simultaneamente verdadeiras. Além disto, para a atividade 9, se a opção 1 for escolhida então a redução desta atividade será igual a y9,1 (que toma o valor de 1 caso seja verdade e que é a redução que a primeira opção oferece). Caso seja escolhida a segunda opção a redução da atividade será 2* y9,2 que será igual 2 se y9,2 for verdade, sendo 2 a redução que a segunda opção oferece.

Seja $I = \{0,1,3,4,5,6,8,9,10,11\}$

$I1 = I \backslash \{9\}$

Sujeito a,

$$y_{i,1} + y_{i,2} \leq 1$$
$$r_{i1} = r_{i1,1} + r_{i1,2}$$

$$r_9 = y_{i,1} + 2 * y_{i,2}$$

$$0 \leq r_{i1,1} \leq M_{1,i1}$$
$$M_{1,i1} \leq r_{i1,2} \leq M_{2,i1}$$

$$t_f \leq 20$$

$$t_j \geq t_i - r_i + T_i$$

$$i \in I, i1 \in I1, j \in I \cup \{f\}$$

Ficheiro de Input

```
/* Objective function */
min:custo0 + custo1 + custo3 + custo4 + custo5 + custo6 + custo8 + custo9 + custo10 + custo11 ;

//Atividade 0
R01: y01+y02<=1;
R02: r0=r0_1+r0_2;

R03: 0*y01<=r0_1;
R04: r0_1<=0.5*y01;
R05: 0.5*y02<=r0_2;
R06: r0_2<=1*y02;

custo0=0*y01 + 200*r0_1 + 50*y02 + 100*r0_2;

//Atividade 1

R11: y11+y12<=1;
R12: r1=r1_1+r1_2;

R13: 0*y11<=r1_1;
R14: r1_1<=1*y11;
R15: 1*y12<=r1_2;
R16: r1_2<=2*y12;

custo1= 0*y11 + 600 * r1_1 + 300*y12 + 300r1_2;

//Atividade 3

R31: y31+y32<=1;
R32: r3=r3_1+r3_2;

R33: 0*y31<=r3_1;
R34: r3_1<=0.5*y31;
R35: 0.5*y32<=r3_2;
R36: r3_2<=1*y32;

custo3= 0*y31 + 200 * r3_1 + 50*y32 + 100r3_2;

//Atividade 4

R41: y41+y42<=11;
R42: r4=r4_1+r4_2;

R43: 0*y41<=r4_1;
R44: r4_1<=2*y41;
R45: 2*y42<=r4_2;
R46: r4_2<=3*y42;
custo4= 0*y41 + 800*r4_1 + 800*y42 + 400r4_2;


//Atividade 5

R51: y51+y52<=1;
R52: r5=r5_1+r5_2;

R53: 0*y51<=r5_1;
R54: r5_1<=0.5*y51;
R55: 0.5*y52<=r5_2;
R56: r5_2<=1*y52;

custo5= 0*y51 + 1600*r5_1 + 1200*y52 + 800r5_2;

//Atividade 6

R61: y61+y62<=1;
R62: r6=r6_1+r6_2;

R63: 0*y61<=r6_1;
R64: r6_1<=1*y61;
R65: 1*y62<=r6_2;
R66: r6_2<=2*y62;

custo6= 0*y61 + 180*r6_1 + 90*y62 + 90r6_2;

//Atividade 8

R81: y81+y82<=1;
R82: r8=r8_1+r8_2;

R83: 0*y81<=r8_1;
R84: r8_1<=0.5*y81;
R85: 0.5*y82<=r8_2;
R86: r8_2<=1*y82;

custo8=0*y81 + 200*r8_1 + 50*y82 + 100*r8_2;
```

```
//Atividade 9

R91: y91 + y92 <= 1;
R92: r9 = y91 + 2*y92;

custo9= 200*y91 + 400*y92;

//Atividade 10

R101: y101+y102<=1;
R102: r10=r10_1+r10_2;

R103: 0*y101<=r10_1;
R104: r10_1<=0.5*y101;
R105: 0.5*y102<=r10_2;
R106: r10_2<=1*y102;

custo10= 0*y101 + 1000*r10_1 + 250*y102 + 500r10_2;

//Atividade 11

R111: y111+y112<=1;
R112: r11=r11_1+r11_2;

R113: 0*y111<=r11_1;
R114: r11_1<=1*y111;
R115: 1*y112<=r11_2;
R116: r11_2<=2*y112;

custo11= 0*y111 + 600 * r11_1 + 300*y112 + 300r11_2;


Rf: tf <= 20;

// relações de precedência
// na restrição tj >= ti - ri + di, a fun<ão ti - ri + di designa
// o tempo de conclusão da actividade i após a redução da duração,
// de di para -ri + di

arco_01: t1 >= t0 - r0_1 - r0_2 + 4 ;
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_13: t3>= t1 - r1_1 - r1_2 + 6;
arco_04: t4 >= t0 - r0_1 - r0_2 + 4 ;
arco_53: t3 >= t5 - r5_1 - r5_2 + 4 ;
arco_3f: tf >= t3 - r3_1 - r3_2 + 2 ;
arco_45: t5 >= t4 - r4_1 - r4_2 + 9 ;
arco_43: t3 >= t4 - r4_1 - r4_2 + 9 ;
arco_64: t4 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5;
arco_68: t8 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5;
arco_5f: tf >= t5 - r5_1 - r5_2 + 4 ;
arco_i6: t6 >= ti + 0 ;
arco_85: t5 >= t8 - r8_1 - r8_2 + 4 ;
arco_9f: tf >= t9 - r9_1 - r9_2 + 2 ;
arco_89: t9 >= t8 - r8_1 - r8_2 + 4 ;
arco_610: t10 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5 ;
arco_108: t8 >= t10 - r10_1 - r10_2 + 8 ;
arco_119: t9 >= t11 - r11_1 - r11_2 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 - r10_1 - r10_2 + 8;


bin y01,y02,y11,y12,y31,y32,y41,y42,y51,y52,y61,y62,y81,y82,y91,y92,y101,y102,y111,y112;
```

Figura 6 - Input dado no LPSolve

Ficheiro output

Variables	MILP ...	result
	420	420
custo0	0	0
custo1	0	0
custo10	0	0
custo11	0	0
custo3	0	0
custo4	0	0
custo5	0	0
custo6	270	270
custo8	150	150
custo9	0	0
r0	0	0
r0_1	0	0
r0_2	0	0
r1	0	0
r10	0	0
r10_1	0	0
r10_2	0	0
r11	0	0
r11_1	0	0
r11_2	0	0
r1_1	0	0
r1_2	0	0
r3	0	0
r3_1	0	0
r3_2	0	0
r4	0	0
r4_1	0	0
r4_2	0	0
r5	0	0
r5_1	0	0
r5_2	0	0
r6	2	2
r6_1	0	0
r6_2	2	2
r8	1	1
r8_1	0	0
r8_2	1	1
r9	0	0
r9_1	0	0
r9_2	0	0
t0	0	0
t1	4	4
t10	3	3
t11	11	11
t3	18	18
t4	5	5
t5	14	14
t6	0	0
t8	11	11
t9	18	18
tf	20	20
ti	0	0
y01	0	0
y02	0	0
y101	0	0
y102	0	0
y11	0	0
y111	0	0
y112	0	0
y12	0	0
y31	0	0
y32	0	0
y41	0	0
y42	0	0
y51	0	0
y52	0	0
y61	0	0
y62	1	1
y81	0	0
y82	1	1
y91	0	0
y92	0	0

Figura 7 - Output do LPsolve

Pelos resultados obtidos no *LPSolve*, podemos concluir que o custo mínimo a pagar para reduzir a duração do projeto é igual a 420 U.M. Este custo corresponde a reduzir a atividade 6 em 2 U.T e pagar 270, e a reduzir a atividade 8 em 1 U.T pagando 150 U.T.

Na atividade 6, r6_1 = 0 e r6_2 = 2, o que significa que se reduziu esta atividade ao máximo com custo c1 e que depois se reduziu com custo c2. (a redução com c2 também foi a máxima possível e foi igual a 1)

Na atividade 8, r8_1 = 0 e r8_2 = 1, o que significa que se reduziu esta atividade ao máximo com custo c1 e que depois se reduziu com custo c2. (a redução com c2 também foi a máxima possível e foi igual a 0.5).

Além disto, é importante referir alguns pontos que chamaram a atenção do grupo:

- ➔ Existe uma solução ótima alternativa. Nesta solução, existe na mesma uma redução da atividade da atividade 6 com custo total de 270 U.M, mas a outra atividade reduzida é a 3 custo 150 U.M. e não a 8. Em ambos os casos, o custo ótimo é 420 U.M. Faz sentido que as reduções afetem atividades como a 3,6 ou 8 porque estas fazem parte do caminho crítico e por isso são atividades críticas.

- ➔ Enquanto o grupo realizava alguns testes, encontrou um fenómeno interessante. Nas restrições relativas ao tempo de início das atividades, verificamos que quando utilizávamos a restrição do tipo: *tj <= ti – ri + x*, em vez de: *tj <= ti – ri1 – ri2 + x (*maneira apresentada neste relatório*),* o *LPSolve* fornecia resultados aproximados. Por exemplo, o valor do custo ótimo dava 419.99(9) e não 420. O mesmo acontecia para as reduções das atividades. Após esclarecimento com a equipa docente, concluímos que isto ocorre, pois, o *LPSolve* verifica se as restrições são obedecidas a menos de uma tolerância. No entanto, consideramos os valores inteiros.

Plano de Execução

Diagrama de Gantt

Após encontrarmos a solução ótima, foi-nos permitido construir um plano de execução do projeto, designado por diagrama de Gantt. Ao contrário do diagrama feito anteriormente, este representa todas as atividades e as suas durações depois da respetiva redução. Observando a Tabela 3 e comparando com o diagrama anterior, podemos concluir que houve uma redução na atividade 6 de 2 U.T, e na atividade 8 de 1 U.T. Atingindo assim, o tempo de execução do projeto pretendido, isto é 20 U.T, uma vez que queríamos minimizar o tempo necessário para completar a execução de todo o projeto.

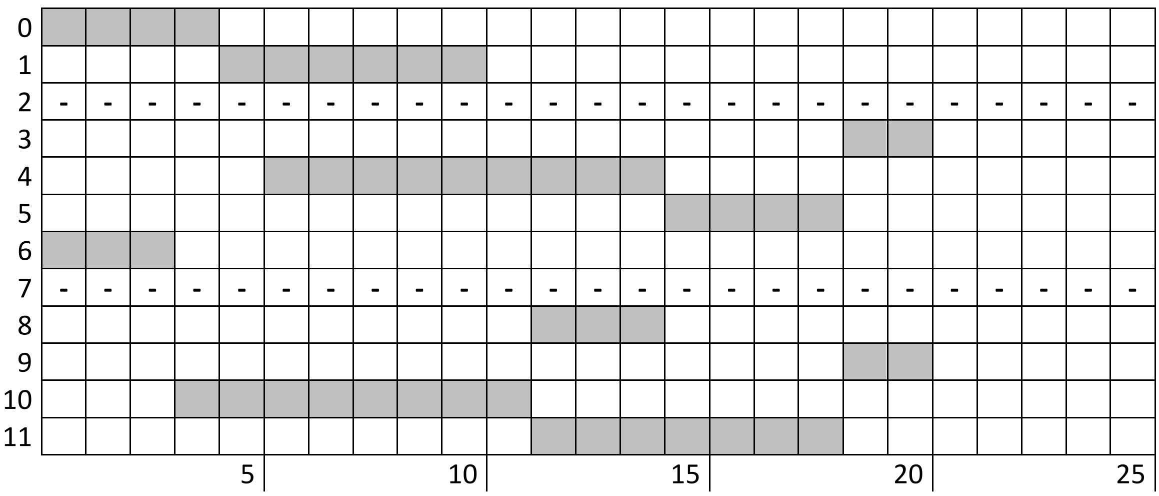

Tabela 3 - Diagrama de Gant c/redução

Validação do Modelo

Depois de obtermos a solução ótima foi necessário verificar se realmente esta solução obedece a todas as condições idealizadas. Desta forma, para validar o modelo fizemos as seguintes verificações:

- Se somarmos as reduções feitas nas atividades 6 e 8, temos de obter o valor que pretendíamos reduzir ao tempo de execução do projeto calculado na primeira parte deste trabalho prático. Isto é:

$$2 + 1 = 3\ (U.T)$$

- Em relação às restrições da modelação das funções custo por partes, basta apenas observar o output referente às atividades que foram reduzidas:

  - ✓ *r6_1 = 0* e *r6_2 = 2*
  - ✓ *r8_1 = 0* e *r8_2 = 1*

  Isto significa que estas atividades foram reduzidas ao máximo com custo c1 e que depois se reduziu com custo c2, obedecendo assim às restrições que foram definidas no modelo.

- Outro aspeto importante para validar o nosso modelo trata-se de verificar se este respeita as relações de precedência de entre as atividades, isto é, para uma dada atividade j, o seu tempo de início (t_i) deve ser posterior ao tempo de conclusão de cada uma das atividades i que a precedem. Se analisarmos o diagrama de Gantt e o grafo associado ao projeto, podemos ver que esta condição é verificada. Por exemplo, se analisarmos o caminho crítico obtido na 1ª Parte do Trabalho Prático:

$$ini \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow fim$$

  Podemos observar pelo diagrama de Gant, que cada uma destas atividades começa após a anterior já ter sido dada como concluída.

  Além disso, é possível observar também que o projeto termina no instante de tempo $tf = 20$, quando todas as atividades predecessoras imediatas da atividade fictícia fim estiverem concluídas

  Agora iremos substituir os valores obtidos no output, nas restrições do Modelo implementado, isto é, $tj\ >=\ ti\ -\ ri\ +\ di$, de modo a realizar uma verificação final desta condição, considerando que $ri\ =\ ri\_1\ +\ ri\_2$:

  - ✓ $arco_{01}$: $4\ \geq 0\ -\ 0\ +\ 4 \Leftrightarrow 4\ \geq 4$
  - ✓ $arco_{i0}$: $0\ \geq\ 0\ +\ 0\ \Leftrightarrow\ 0 \geq 0$
  - ✓ $arco_{13}$: $18 \geq\ 4\ -\ 0\ +\ 6\ \Leftrightarrow\ 18 \geq 10$
  - ✓ $arco_{04}$: $5\ \geq\ 0\ -\ 0\ +\ 4\ \Leftrightarrow\ 5 \geq 4$
  - ✓ $arco_{53}$: $18\ \geq\ 14\ -\ 0\ +\ 4\ \Leftrightarrow\ 18 \geq 18$
  - ✓ $arco_{3f}$: $20\ \geq\ 18\ -\ 0\ +\ 2\ \Leftrightarrow\ 20 \geq 20$
  - ✓ $arco_{45}$: $14\ \geq\ 5\ -\ 0\ +\ 9\ \ \Leftrightarrow\ 14 \geq 14$

- ✓ $arco_{43}$: $18 \geq 5 - 0 + 9 \Leftrightarrow 18 \geq 14$
- ✓ $arco_{64}$: $5 \geq 0 - 2 + 5 \Leftrightarrow 5 \geq 3$
- ✓ $arco_{68}$: $11 \geq 0 - 2 + 5 \Leftrightarrow 11 \geq 3$
- ✓ $arco_{5f}$: $20 \geq 14 - 0 + 4 \Leftrightarrow 20 \geq 18$
- ✓ $arco_{i6}$: $0 \geq 0 + 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0$
- ✓ $arco_{85}$: $14 \geq 11 - 1 + 4 \Leftrightarrow 14 \geq 14$
- ✓ $arco_{9f}$: $20 \geq 18 - 0 + 2 \Leftrightarrow 20 \geq 20$
- ✓ $arco_{89}$: $18 \geq 11 - 1 + 4 \Leftrightarrow 18 \geq 14$
- ✓ $arco_{610}$: $3 \geq 0 - 2 + 5 \Leftrightarrow 3 \geq 3$
- ✓ $arco_{108}$: $11 \geq 3 - 0 + 8 \Leftrightarrow 11 \geq 11$
- ✓ $arco_{119}$: $18 \geq 11 - 0 + 7 \Leftrightarrow 18 \geq 18$
- ✓ $arco_{1011}$: $11 \geq 0 - 0 + 8 \Leftrightarrow 11 \geq 8$

Deste modo, observamos que não existem incoerências no modelo apresentado. Além disso, o grupo teve outra possibilidade de validar o modelo, através de uma abordagem anterior realizada para este mesmo problema. É importante referir que escolhemos não usar este modelo feito numa fase inicial do Trabalho Prático, uma vez que, não traduz a medida de eficiência desejada pelo grupo, sendo que, o modelo mais recente e apresentado, aquele que melhor traduz as regras de funcionamento de uma forma mais clara e objetiva.

Iremos agora abordar de uma forma leviana o seu ficheiro de input e output de forma a perceber o raciocínio por detrás e as conclusões retiradas pelo grupo.

- ✓ <u>**Ficheiro Input**</u>

```
// custo associado à redução das durações das actividades
min: 200 r0_1 + 600 r1_1 + 200 r3_1 + 800 r4_1 + 1600 r5_1 + 180 r6_1 + 200 r8_1 +
   + 200 r9_1 + 1000 r10_1 + 600 r11_1 + 100 r0_2 + 300 r1_2 + 100 r3_2 + 400 r4_2 + 800 r5_2 + 90 r6_2
   + 100 r8_2 + 400 r9_2 + 500 r10_2 + 300 r11_2;

// tempo máximo para concluir o projecto
tf <= 20;

// relações de precedência
// na restrição tj >= ti - ri + di, a fun<ão ti - ri + di designa
// o tempo de conclusão da actividade i após a redução da duração,
// de di para -ri + di
arco_01: t1 >= t0 - r0_1 - r0_2 + 4 ;
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_13: t3>= t1 - r1_1 - r1_2 + 6;
arco_04: t4 >= t0 - r0_1 - r0_2 + 4 ;
arco_53: t3 >= t5 - r5_1 - r5_2 + 4 ;
arco_3f: tf >= t3 - r3_1 - r3_2 + 2 ;
arco_45: t5 >= t4 - r4_1 - r4_2 + 9 ;
arco_43: t3 >= t4 - r4_1 - r4_2 + 9 ;
arco_64: t4 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5;
arco_68: t8 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5;
arco_5f: tf >= t5 - r5_1 - r5_2 + 4 ;
arco_i6: t6 >= ti + 0 ;
arco_85: t5 >= t8 - r8_1 - r8_2 + 4 ;
arco_9f: tf >= t9 - r9_1 - 2 * r9_2 + 2 ;
arco_89: t9 >= t8 - r8_1 - r8_2 + 4 ;
arco_610: t10 >= t6 - r6_1 - r6_2 + 5 ;
arco_108: t8 >= t10 - r10_1 - r10_2 + 8 ;
arco_119: t9 >= t11 - r11_1 - r11_2 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 - r10_1 - r10_2 + 8;


//Atividade 0
// b - x < M y
  0.5 - r0_1 < 0.6 y0;
  r0_2 <= 0.6 - 0.6 * y0;
- r0_2 <= 0.6 - 0.6 * y0;

//Atividade 1
  1 - r1_1 < 1.1 y1;
  r1_2 <= 1.1 - 1.1 * y1;
- r1_2 <= 1.1 - 1.1 * y1;
```

```
//Atividade 3
  0.5 - r3_1 < 0.6 y3;
  r3_2 <= 0.6 - 0.6 * y3;
- r3_2 <= 0.6 - 0.6 * y3;

//Atividade 4
  2 - r4_1 < 2.1 y4;
  r4_2 <= 2.1 - 2.1 * y4;
- r4_2 <=  2.1 - 2.1 * y4;

//Atividade 5
  0.5 - r5_1 < 0.6 y5;
  r5_2 <= 0.6 - 0.6 * y5;
- r5_2 <=  0.6 - 0.6 * y5;

//Atividade 6
  1 - r6_1 < 1.1 y6;
  r6_2 <= 1.1 - 1.1 * y6;
- r6_2 <=  1.1 - 1.1 * y6;

//Atividade 8
  0.5 - r8_1 < 0.6* y8;
  r8_2 <= 0.6 - 0.6 * y8;
- r8_2 <=  0.6 - 0.6 * y8;

//Atividade 10
  0.5 - r10_1 < 0.6 y10;
  r10_2 <= 0.6 - 0.6 * y10;
- r10_2 <= 0.6 - 0.6 * y10;

//Atividade 11
  1 - r11_1 < 1.1 y11;
  r11_2 <= 1.1 - 1.1 * y11;
- r11_2 <= 1.1 - 1.1 * y11;


r9_1 + r9_2 <=1;

// reduções máximas permitidas
R1: r0_1 <= 1 ;
R2: r1_1 <= 2 ;
R3: r3_1 <= 1 ;
R4: r4_1 <= 3 ;
R5: r5_1 <= 1 ;
R6: r6_1 <= 2 ;
R7: r8_1 <= 1 ;
R8: r10_1 <= 1 ;
R9: r11_1 <= 2 ;
R13: r4_2 <= 1;
R14: r5_2 <= 0.5;
R15: r6_2 <= 1;
R16: r8_2 <= 0.5;
R17: r10_2 <= 0.5;
R18: r11_2 <= 1;

bin r9_1,r9_2,y0,y1,y3,y4,y5,y6,y8,y10,y11;
```

Figura 8 - LPsolve, input do modelo anterior

Neste modelo realizado inicialmente as funções não eram definidas por partes, mas tínhamos relações de implicação que obrigavam que caso a redução com custo c1 não fosse máxima então a redução com custo c2 seria obrigatoriamente zero. Além disso, definimos também um conjunto de restrições que impunham um limite máximo nas reduções. Relativamente às restrições das relações de precedência das atividades, o raciocínio era o mesmo que aplicamos no Modelo atual.

✓ **Ficheiro Output**

Variables	MILP ...	MILP ...	result
	449,9...	420	420
tf	20	20	20
t9	17	18	18
t3	18	18	18
t5	14	14	14
t8	10	11	11
t11	10	11	11
t4	5	5	5
t1	4	4	4
t10	2	3	3
r6_2	1	1	1
y0	1	1	1
y1	1	1	1
y3	1	1	1
y4	1	1	1
y5	1	1	1
y10	1	1	1
y11	1	1	1
r6_1	2	0,999...	0,999999999999998 ≈ 1
r8_1	0	0,5	0,5
r8_2	0	0,5	0,5
r0_1	0	0	0
r1_1	0	0	0
r3_1	0	0	0
r4_1	0	0	0
r5_1	0	0	0
r9_1	0	0	0
r10_1	0	0	0
r11_1	0	0	0
r0_2	0	0	0
r1_2	0	0	0
r3_2	0	0	0
r4_2	0	0	0
r5_2	0	0	0
r9_2	0	0	0
r10_2	0	0	0
r11_2	0	0	0
t0	0	0	0
ti	0	0	0
t6	0	0	0
y6	0	0	0
y8	1	0	0

Figura 9 - LPsolve, Output do modelo anterior

Tal como podemos observar, o valor da solução ótima trata-se do mesmo que obtemos com o modelo atual, isto é, o custo mínimo a pagar para reduzir a duração do projeto é igual a 420 U.M. Além disso, podemos ver também que as atividades cuja duração irá ser reduzida são também as atividades 6 e 8. Para ver o instante final de ambas as atividades após a redução de modo a verificar se correspondem ao resultado que obtivemos com o modelo atual usamos a expressão: $ti\ -\ ri\ +\ di$, para vermos a sua duração total teremos de subtrair ao seu instante inicial ti o instante final obtido:

- ✓ $t6 - r6\_1 - \ r6\_2 + d6 = \ 0 - 1 - 1 + 5 = 3$, isto é, a duração total é $3 - 0\ =\ 3$ U.T, tendo reduzido $r6_1 +\ r6_2 = 1 + 1 = 2$ U.T.
- ✓ $t8 - r8\_1 - \ r8\_2 + d8 = \ 11 - 0.5 - 0.5 + 4 = 14$, deste modo sua duração total é $14 - 11 = \ 3$ U.T, e reduziu $r8_1 +\ r8_2 = 0.5 + 0.5 = 1$ U.T.

Portanto, podemos concluir, que ambos os modelos chegaram à mesma solução ótima, reforçando novamente a validação do nosso modelo.

Conclusão

Ao longo deste projeto, foi possível consolidar todo o conhecimento adquirido na disciplina, relativamente à duração mínima de um projeto, o impacto das atividades críticas, e reduções de atividades com custos associados. O grupo teve sempre o cuidado de garantir que não haveria incoerências ou erros durante a formulação do modelo de programação de forma a termos confiança de que a solução obtida é a solução ótima. Assim, a equipa considera que realizou o trabalho com sucesso, obtendo o custo (mínimo) ótimo pedido no problema do enunciado.