UNIVERSIDADE DO MINHO

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

TRABALHO PRÁTICO 2

Exploração de Minas

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional
8 de dezembro de 2020

(a) Ana Catarina Canelas A93872

(b) Ana Filipa Pereira A89589

(c) Carolina Santejo A89500

(d) Raquel Costa A89464

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Introdução

No âmbito da Unidade Curricular de Modelos Determinísticos de Investigação Operacional desenvolvemos o segundo trabalho prático proposto para este semestre. De uma forma geral, consistiu em resolver um problema de escavação e exploração de uma mina. O cenário apresentado consiste numa mina bidimensional, dividida em 5 níveis. Cada nível está dividido em blocos. Alguns destes blocos possuem minério cujo valor associado é o seu proveito. No entanto, existem alguns pontos a realçar. O primeiro é que o ato de escavar um bloco implica um determinado custo, sendo que este depende do nível de profundidade onde o bloco se encontra (quanto mais fundo estiver o bloco, mais caro fica a sua escavação). O segundo ponto a ter em conta é que, por razões de segurança e estabilidade do terreno, para extrair um bloco é necessário remover os três blocos no nível de profundidade acima, o que está imediatamente por cima e os dois que lhe são adjacentes.

Para a resolução deste problema foi utilizado o ficheiro *Excel* disponibilizado com todos os dados necessários, além de se ter recorrido ao *software* de otimização de redes, *RelaX4*.

Objetivo Principal:

O objetivo deste projeto consiste em determinar o lucro máximo que se pode obter através da exploração de uma mina. Para tal, foi necessário encarar este desafio como um problema do fecho máximo de um grafo e, utilizando o *software* de otimização de redes relaX4, foi possível inferir a solução ótima, ou seja, o lucro máximo possível e qual o conjunto de blocos a remover, que maximiza esse lucro e que ao mesmo tempo respeita as restrições impostas.

Grelha do Grupo

Tal como pedido no enunciado, considerando ABCDE o número de inscrição do membro do grupo com o maior número, usamos os valores dos dígitos B, C, D, e E para o valor estimado de inventário dos respetivos blocos. Desta forma obtemos a grelha representada na Tabela 1, sendo o valor minério dos blocos o seguinte: B = 3, C = 8, D = 7 e E = 2.

Após isso, temos de subtrair ao valor minério de cada bloco, o seu custo de extração, sabendo que este está dependente do nível da sua profundidade. Obtendo assim os valores representados na Tabela 2.

						10	8				
_					12	14	15	40			_
_	_			16				20		_	_
_	_	_	3	18	3			8	_	_	_
_	_	_	_	20	7		2	_	_	_	_

Tabela 1 - Valor Minério

1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
2	_	-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	_
3	_	_	-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3	_	_
4	_	_	_	-1	14	-1	-4	-4	4	_	_	_
5	_	_	_	_	15	2	-5	-3	_	_	_	_

Tabela 2 – Lucro = valor minério - custo

Na Tabela 3 está representada a grelha à qual também tivemos acesso através do ficheiro Excel disponibilizado, com os blocos todos enumerados, sendo que cada um deles será um vértice do nosso grafo auxiliar. Os blocos destacados são aqueles cujo valor do minério está dependente dos valores de BCDE.

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
_	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	_
_	_	11	12	13	14	15	16	17	18	_	_
_	_	_	5	6	7	8	9	10	_	_	_
_	_	_	_	1	2	3	4	_	_	_	_

Tabela 3 - Número do vértice

Formulação do Problema

Estamos perante um problema de fecho máximo de um grafo, uma vez que existem vários vértices com um peso associado a cada um deles, e nós queremos descobrir um subconjunto desses mesmos vértices cuja soma do peso de cada um seja máxima, sendo esta a nossa solução ótima.

O peso de cada vértice é o lucro do bloco associado, que, por sua vez, é definido como sendo a diferença entre o valor de minério que nele existe (pode ser zero) e o custo de o escavar. Se a diferença for negativa, este bloco nunca será desejável, porque todo o seu lucro do minério servirá para pagar a sua extração. Por outro lado, se o lucro for positivo, ele é um bloco desejável, mas não é garantido que esteja na solução ótima, uma vez que temos de verificar se esse lucro chega para "pagar" a remoção de blocos que se encontrem nos níveis de profundidade acima.

No seguinte Figura 1 - Grafo G temos todos os vértices que representam os blocos existentes na mina, e os arcos entre esses mesmos vértices respeitando a regra de extração de um bloco, isto é para remover um bloco é necessário remover os três blocos no nível de profundidade acima. Os lucros de cada um são aqueles observados na Tabela 2 anteriormente.

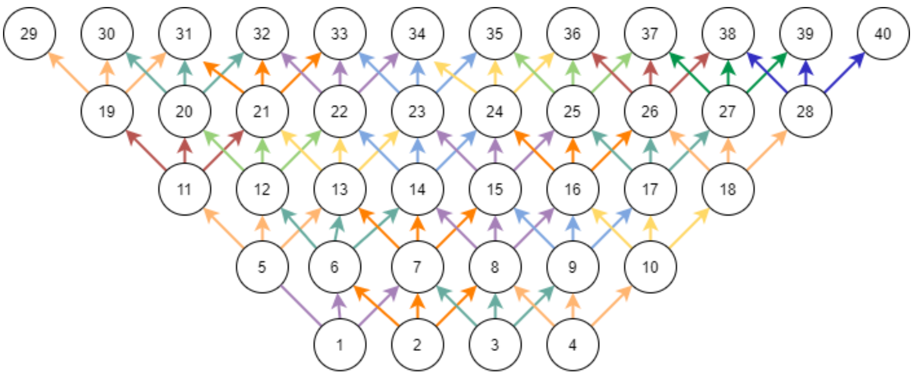

Figura 1 - Grafo G

Podemos determinar o fecho máximo do grafo G, e assim chegar à solução ótima, resolvendo um problema de fluxo máximo num grafo auxiliar G', onde iremos adicionar dois vértices: uma fonte S e um terminal T. Este grafo auxiliar não só irá ter arcos entre o vértice S e todos os outros vértices j, e cada um com um custo cj, como também irá ter arcos entre o vértice T e os restantes vértices j, que terão um custo |cj|, uma vez que o peso destes vértices é < 0. Todos os arcos pertencentes a G devem ter um valor igual a ∞ no grafo G'. O fecho máximo do grafo G é determinado pelo corte mínimo (S, T) do grafo G'. Sendo que, o fluxo máximo de um grafo é igual á capacidade do corte mínimo visto que os respetivos problemas são o dual um do outro.

É importante realçar que o valor que iremos obter para o fluxo máximo não equivale ao valor da solução ótima, isto é, o lucro máximo. Para tal, teremos de somar o lucro de todos os blocos escavados, depois de sabermos quais os blocos da mina que devem ser retirados de forma a obter o lucro máximo, ou seja, qual o subconjunto de vértices de G, cuja soma total dos seus pesos seja máxima. Desta maneira, para obtermos o lucro máximo, basta analisar o fluxo que sai de S para cada um dos vértices que representam blocos desejáveis

Variáveis de decisão

O nosso objetivo é saber que blocos da mina é que devemos extrair de maneira a maximizar o lucro e a respeitar as restrições impostas. Desta forma, nós queremos saber se um dado bloco estará presente ou não no conjunto ótimo, pelo que, consideramos que cada bloco será representado por uma variável binária. Caso a variável tenha o valor zero, o bloco correspondente não será escavado. Caso a variável tenha valor 1, o bloco correspondente será extraído. Existem 40 blocos na mina em questão, logo existem 40 variáveis de decisão.

Função objetivo

Visto que queremos escavar blocos da mina, de forma a obter o maior lucro possível, a função objetivo será de maximização. Desta forma, o coeficiente de cada uma das variáveis de decisão binárias na F.O será o lucro do bloco a que essa variável corresponde. Lembrando, que o lucro de um bloco é a diferença entre o valor do minério que ele tem (é zero caso não tenha) e o preço de escavar esse bloco.

Assim, para calcular o lucro máximo, apenas se soma os lucros dos blocos que são escavados (a sua variável de decisão toma o valor 1).

Restrições

Como já foi dito, escavar um bloco que se encontre num nível de profundidade superior a 1, implica que se tenha de escavar os 3 blocos que se encontram imediatamente acima. Isto leva a que seja obrigatório escavar blocos com lucro negativo e que por isso diminuem o valor do lucro final.

Além disto, é importante realçar que restrições impostas forçam a que haja uma ordem de escavação. Primeiro escavam-se os blocos que se encontram em cima, e só depois os que estão em baixo.

Rede do Problema de Fluxo Máximo

Tal como vimos anteriormente, para conseguirmos chegar à solução ótima do problema teríamos de resolver um problema de fluxo máximo numa rede. Portanto, foi necessário adicionar ao grafo G dois novos vértices, o S e o T, que representam a origem (por onde "entra" o fluxo) e o terminal (onde "sai" o fluxo), respetivamente, obtendo assim o seguinte grafo auxiliar G'.

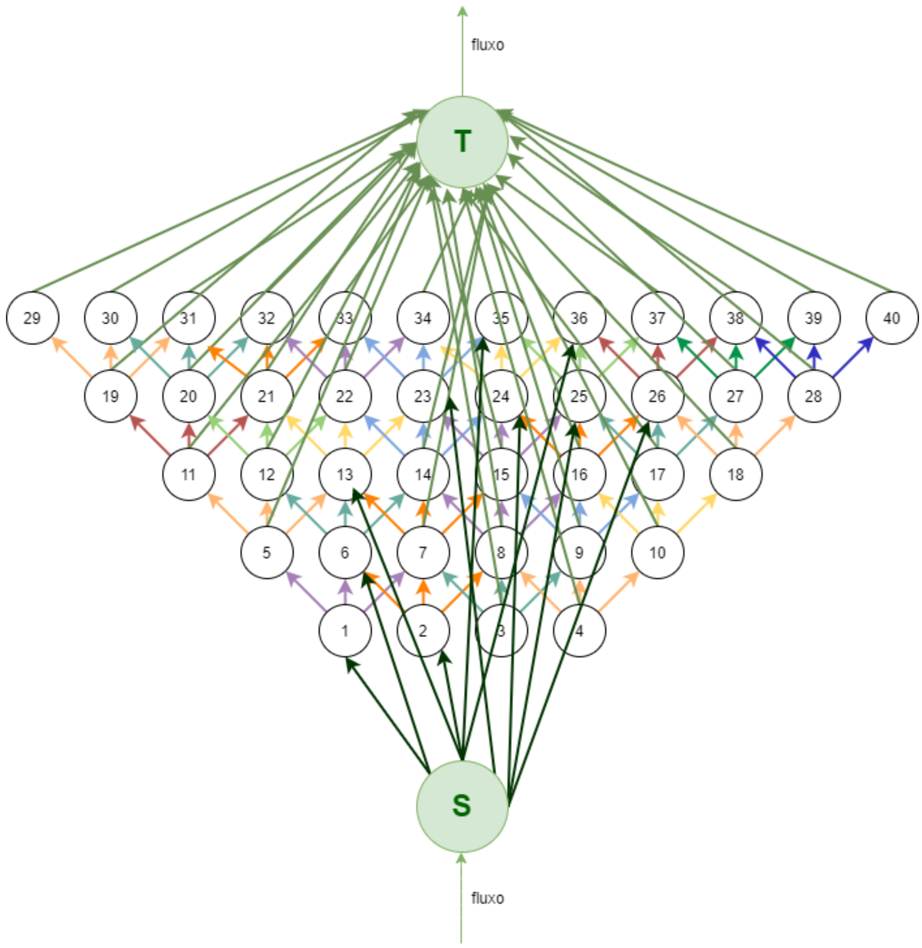

Figura 2 – Grafo auxiliar G': Rede do Problema de Fluxo Máximo

Primeiramente, ligou-se S a todos os vértices com um peso maior do 0, ou seja, aqueles que representam blocos desejáveis com lucro positivo. E ligaram-se os restantes vértices, isto é, aqueles com um peso menor do que 0 e que representam blocos com lucro negativo, a T. Além disso, tal como vimos, o arco que liga *S* e um dado vértice j tem capacidade igual ao lucro do bloco representado por esse vértice j, *e* o arco que liga um dado vértice *b* e *T,* tem capacidade igual ao módulo do lucro do bloco representado por esse vértice *b.* Os arcos entre vértices do grafo têm capacidade infinita.

É também bastante importante realçar que existe um arco (T, S), por onde se faz o retorno do fluxo, mas que não está representado nas figuras.

Ficheiro de Input

```
C:\Users\ASUS\Desktop\MIEI\3º Ano\1º Semestre\MDIO\Trabalho 2\RELAX4_2013\RELAX4 2013> type tp2.txt
42
125
100 1 0 15
100 2 0 2
100 6 0 14
100 10 0 4
100 13 0 13
100 17 0 17
100 23 0 10
100 24 0 12
100 25 0 13
100 26 0 38
100 35 0 9
100 36 0 7
1 5 0 1000
1 6 0 1000
1 7 0 1000
2 6 0 1000
2 7 0 1000
2 8 0 1000
3 7 0 1000
3 8 0 1000
3 9 0 1000
4 8 0 1000
4 9 0 1000
4 10 0 1000
5 11 0 1000
5 12 0 1000
5 13 0 1000
6 12 0 1000
6 13 0 1000
6 14 0 1000
7 13 0 1000
7 14 0 1000
7 15 0 1000
8 14 0 1000
8 15 0 1000
8 16 0 1000
9 15 0 1000
9 16 0 1000
9 17 0 1000
10 16 0 1000
10 17 0 1000
10 18 0 1000
11 19 0 1000
11 20 0 1000
11 21 0 1000
12 20 0 1000
12 21 0 1000
12 22 0 1000
13 21 0 1000
13 22 0 1000
13 23 0 1000
14 22 0 1000
14 23 0 1000
14 24 0 1000
15 23 0 1000
15 24 0 1000
15 25 0 1000
16 24 0 1000
16 25 0 1000
16 26 0 1000
17 25 0 1000
17 26 0 1000
17 27 0 1000
18 26 0 1000
18 27 0 1000
18 28 0 1000
19 29 0 1000
19 30 0 1000
19 31 0 1000
20 30 0 1000
20 31 0 1000
20 32 0 1000
21 31 0 1000
21 32 0 1000
21 33 0 1000
22 32 0 1000
22 33 0 1000
22 34 0 1000
23 33 0 1000
23 34 0 1000
23 35 0 1000
24 34 0 1000
24 35 0 1000
24 36 0 1000
25 35 0 1000
25 36 0 1000
25 37 0 1000
26 36 0 1000
26 37 0 1000
26 38 0 1000
27 37 0 1000
27 38 0 1000
27 39 0 1000
28 38 0 1000
28 39 0 1000
28 40 0 1000
3 101 0 5
4 101 0 3
5 101 0 1
7 101 0 1
8 101 0 4
9 101 0 4
11 101 0 3
12 101 0 3
14 101 0 3
15 101 0 3
16 101 0 3
18 101 0 3
19 101 0 2
20 101 0 2
21 101 0 2
22 101 0 2
27 101 0 2
28 101 0 2
29 101 0 1
30 101 0 1
31 101 0 1
32 101 0 1
33 101 0 1
34 101 0 1
37 101 0 1
38 101 0 1
39 101 0 1
```

```
40 101 0 1
101 100 -1 1000
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```

Figura 3 - Ficheiro de Input

O ficheiro de Input no software Relax4, trata-se de um ficheiro do tipo *.txt*. Nas primeiras duas linhas definimos a dimensão da nossa rede, incluindo o número de vértices (1ª linha) e o número de arcos do nosso grafo (2ª linha). De seguida, temos 125 linhas, equivalente ao nº de arcos, com uma listagem dos mesmos, onde consideramos o vértice origem desse arco, o vértice destino, o custo unitário de transporte, que neste caso será nulo, e a capacidade do arco que no caso daqueles que se encontram no meio do grafo será ∞, mas neste caso decidimos usar um valor suficientemente grande (1000) para indicar a capacidade infinita.

Relembramos ainda que os vértices 100 e 101, representam, respetivamente S e T.

Nas restantes linhas (42 linhas = nº de vértices), é onde definimos as ofertas e as procuras de cada vértice da rede, mas como não existe nem uma nem outra, consideramos o valor 0 para cada vértice.

Visto que o objetivo deste problema é maximizar o fluxo (minimizar o corte), teremos de associar a este arco um custo unitário de transporte igual a −1. Isto porque o software *Relax4* assume que todos os problemas são de minimização, tornando-se assim necessário minimizar a função simétrica.

Ficheiro de Output

```
Linha de comandos
C:\Users\ASUS\Desktop\MIEI\3º Ano\1º Semestre\MDIO\Trabalho 2\RELAX4_2013\RELAX4 2013> relax4 < tp2.txt
 END OF READING
 NUMBER OF NODES = 42, NUMBER OF ARCS = 125
 CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
 CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
 ***********************************
 TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
 TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
   100 1  11.
   100 2  2.
   100 6  9.
   100 10  4.
   100 13  8.
   100 17  4.
   100 25  1.
   1 5  7.
   1 7  4.
   2 8  2.
   5 11  6.
   6 12  6.
   6 14  3.
   7 15  3.
   10 16  1.
   10 18  3.
   11 19  3.
   12 20  3.
   13 21  4.
   13 22  4.
   17 26  1.
   17 27  3.
   19 29  1.
   20 30  1.
   21 31  1.
   21 33  1.
   22 32  1.
   22 34  1.
   25 37  1.
   26 38  1.
   27 39  1.
   5 101  1.
   7 101  1.
   8 101  2.
   11 101  3.
   12 101  3.
   14 101  3.
   15 101  3.
   16 101  1.
   18 101  3.
   19 101  2.
   20 101  2.
   21 101  2.
   22 101  2.
   27 101  2.
   29 101  1.
   30 101  1.
   31 101  1.
   32 101  1.
   33 101  1.
   34 101  1.
   37 101  1.
   38 101  1.
   39 101  1.
   101 100  39.
 OPTIMAL COST =  -39.
 NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 0
 NUMBER OF ITERATIONS =  79
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  18
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  3
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  18
 ***********************************
```

Figura 4 - Ficheiro de Output

Interpretação de Resultados

A Figura 4 representa o output dado pelo *software relaX4,* sendo importante realçar que o grupo decidiu identificar o vértice *s* com o número 100 e o vértice *t* com o número 101.

Através da análise da figura, podemos ver que o fluxo máximo/corte mínimo tem valor 39, além de conseguirmos determinar que blocos da mina devem ser escavados. Para isto, temos, em primeiro lugar, de ver o fluxo que passa pelos arcos que ligam *s* a vértices que representam blocos com lucro positivo.

Por exemplo, a linha "100 1 11" significa que o fluxo que passa no arco que liga o vértice *s* ao vértice 1, tem valor 11. Mas o que representa na realidade este 11? Representa, simplesmente quanto do lucro do bloco 1 vai ser gasto para pagar a remoção de blocos que se encontram em níveis superiores. Se esse custo for inferior ao lucro, então o bloco será escavado, pois mesmo gastando uma parte do seu valor, ainda obtemos algum lucro dele. Por outro lado, se o custo for igual ao lucro do bloco, então este não é desejável e por isso não será escavado, uma vez que não se obterá nenhum lucro dele. Isto acontece porque, todo o lucro desse bloco acabaria por ser gasto no processo de extração de outros blocos nos níveis superiores, sendo o seu impacto no valor da solução ótima (lucro máximo da mina), igual a zero.

Outra coisa a ter em conta, é que existem alguns arcos que partem de *s*, mas que não estão apresentados no *output*. Esta situação, significa que o fluxo que passa nesses arcos é nulo, ou seja, estes blocos com minério (e lucro positivo) não gastam nada do seu lucro para remover blocos que se encontrem em níveis superiores. Isto pode acontecer caso o bloco em questão esteja no nível de profundidade 1, e não haja blocos por cima que seja necessário remover, ou então acontece quando os blocos que se encontram por cima de um dado bloco *b* já foram removidos. Este custo de remoção foi pago com o lucro de outros blocos com minério (e lucro positivo) que já foram extraídos, e que tinham esses blocos nos níveis superiores, em comum com *b*. Visto que, nestas situações um bloco não gasta nada em processos de remoção, então obtém-se o seu lucro na totalidade, e por isso será escavado.

Além disto, é interessante referir, que analisando os fluxos que vão passando pelos arcos do grafo, podemos saber quais os blocos cuja remoção foi paga por um dado bloco *b* (bloco com minério e lucro positivo). A título de exemplo, vemos que o bloco 1 pagou a remoção dos blocos 5, 7, 11, 15, 19 e 29.

Solução Ótima

Primeiro, teremos de ver qual o fluxo que "passa" pelos arcos que saem de *S*. Este fluxo indica quanto do lucro de um bloco com minério foi gasto para "pagar" as escavações de blocos que se encontram em níveis superiores. Visto que o objetivo final é maximizar o lucro, se esse gasto for inferior ao lucro do bloco, então ele está na solução ótima e será escavado, obtendo-se um lucro igual á diferença entre o valor do minério nesse bloco e os gastos das remoções. Por outro lado, se o fluxo for igual ao lucro, então esse bloco, apesar de desejável á primeira vista (pois tem lucro positivo), não estará na solução ótima e não será escavado, isto porque todo o seu lucro serviria para pagar remoções de outros blocos, não se obtendo nenhum lucro dele, pelo que não fará sentido considerá-lo na solução ótima.

Desta forma, e analisando o *input* (ficheiro de texto) e *output* do relaX4 concluímos o seguinte:

```
TOTAL SOLUTION TIME =   0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION =   0. SECS.
  100 1  11.
  100 2  2.
  100 6  9.
  100 10  4.
  100 13  8.
  100 17  4.
  100 25  1.
  1 5  7
```

Figura 5 - Fluxo que passa nos arcos com origem em S

```
100 1 0 15
100 2 0 2
100 6 0 14
100 10 0 4
100 13 0 13
100 17 0 17
100 23 0 10
100 24 0 12
100 25 0 13
100 26 0 38
100 35 0 9
100 36 0 7
```

Figura 6 - Lucro dos blocos desejáveis

- O bloco 1 tem lucro de 15 u.m e gasta 11 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 4 u.m (15-11). O bloco é escavado.

- O bloco 2 tem lucro de 2 u.m e gasta 2 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 0 u.m. O bloco não é escavado.

- O bloco 6 tem lucro de 14 u.m e gasta 9 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 5 u.m. O bloco é escavado.

- O bloco 10 tem lucro de 4 u.m e gasta 4 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 0 u.m. O bloco não é escavado.

- O bloco 13 tem lucro de 13 u.m e gasta 8 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 5 u.m. O bloco é escavado.

- O bloco 17 tem lucro de 17 u.m e gasta 4 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 13 u.m. O bloco é escavado.

- O bloco 23 tem lucro de 10 u.m e gasta 0 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 10 u.m O bloco é escavado.

- O bloco 24 tem lucro de 12 u.m e gasta 0 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 12 u.m. O bloco é escavado.

- O bloco 25 tem lucro de 13 u.m e gasta 1 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 12 u.m. O bloco é escavado.

- O bloco 26 tem lucro de 38 u.m e gasta 0 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 38 u.m. O bloco é escavado.

- O bloco 35 tem lucro de 9 u.m e gasta 0 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 9 u.m. O bloco é escavado.

- O bloco 36 tem lucro de 7 u.m e gasta 0 u.m para remover outros blocos em níveis superiores, pelo que o seu proveito final será de 7 u.m. O bloco é escavado.

Vimos então, que tanto o vértice 2 como o 10, não poderão fazer parte da solução ótima, uma vez que o lucro destes blocos é igual ao fluxo dos arcos correspondentes. Tal como poderemos ver na seguinte Figura 7, que contém o subconjunto de vértices que representam a solução ótima salientados no Grafo G.

É de realçar ainda que, quando se diz que o bloco desejável *b* é extraído, isso implica que temos de remover também todos os blocos superiores de forma a respeitar as restrições impostas.

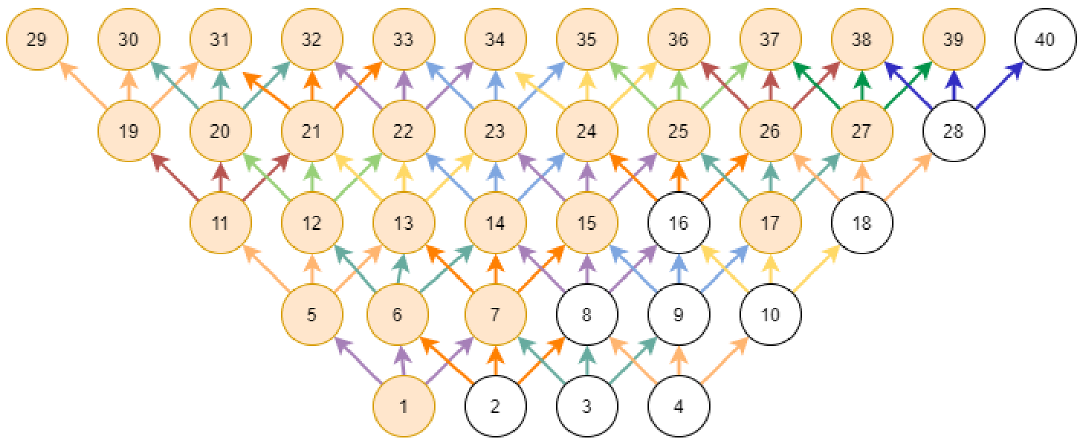

Figura 7 – Grafo G com os blocos a retirar salientados

Assim o lucro máximo que se obtém da mina é igual a:

$$(15-\mathbf{11})+(14-\mathbf{9})+(13-\mathbf{8})+(17-\mathbf{4})+(13-\mathbf{1})+10+12+38+9+7\ =\ 115$$

Seja S o conjunto de blocos desejáveis escavados, $\bar{S}$ o seu complemento e I o conjunto de blocos não desejáveis escavados. Vamos designar por l_j o lucro do bloco j, e por c_i o custo da remoção de um bloco i e todos os seus superiores.

$$\begin{aligned}
\text{lucro de operação} &= \sum_{j\in S} l_j - \sum_{i\in I} c_i \\
&= \sum_{j\in S} l_j + \sum_{j\in \bar{S}} l_j - \Big(\sum_{j\in \bar{S}} l_j + \sum_{i\in I} c_i\Big) \\
&= \sum_{j\in (S\cup \bar{S})} l_j - \text{capacidade do corte}
\end{aligned}$$

Logo, obtemos:

$$(9+7+10+12+13+38+13+17+14+15+2+4)-39 \;=\; 154-39=115$$

Como é possível observar no output dado pelo relaX4, o optimal cost tem valor de 39, que corresponde ao valor do fluxo máximo e do corte mínimo. Na figura 8, está a representação desse mesmo corte, que cria dois conjuntos de partição. Um tem o vértice s e todos os blocos escavados. A outra partição possui o vértice t e todos os blocos não escavados. Este optimal cost obtem-se somando o fluxo que passa pelos arcos saturados e que são intersetados por este corte.

Concluímos então que:

- Lucro de operação = 115
- Proveito = 154
- Custo de operação = 39

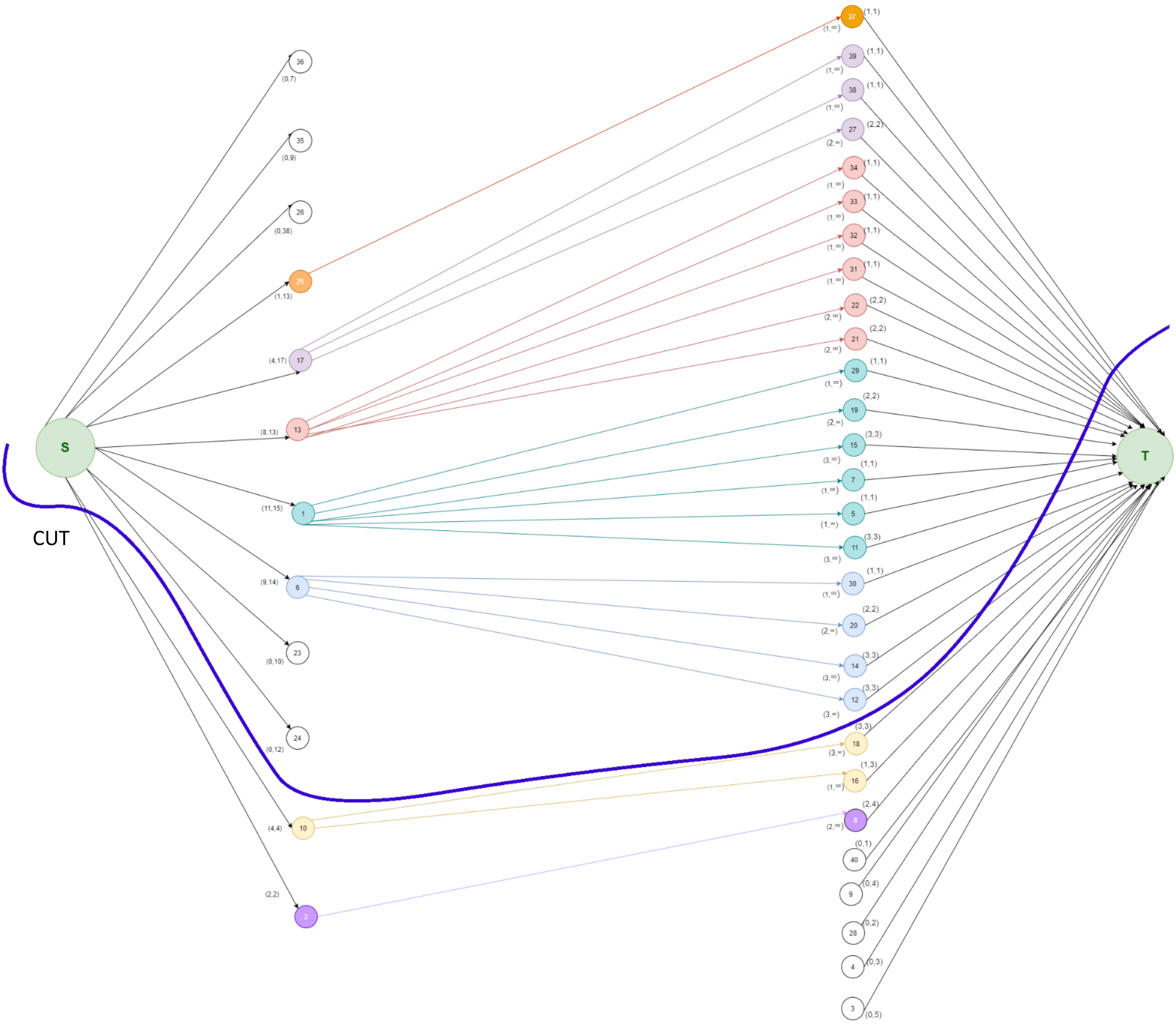

Figura 8 - Grafo com corte mínimo

NOTA: De forma a facilitar a análise do grafo, decidimos omitir arcos cujo fluxo que neles passa é nulo.

Validação do Modelo

De modo a validar o modelo, o grupo decidiu usar a ferramenta *LPsolve*, criando um ficheiro do tipo *lp* com o input a submeter ao software para obter a solução ótima do problema em questão. Aproveitando, desta forma, conhecimentos aplicados em trabalhos anteriores para conferir a solução obtida.

Primeiramente, construímos a função objetivo, associando a cada vértice o lucro correspondente, sabendo que o lucro consiste na diferença entre o valor minério do bloco e o seu custo de extração (Figura 9). Cada variável de decisão representa um vértice ou um bloco e pode tomar o valor de 0, caso seja um bloco que não é escavado, ou 1, caso aconteça o contrário.

```
/* Objective function */
// xi -> bloco i a retirar
max: 15 x1 + 2 x2   - 5 x3   -  3 x4  - 1 x5   + 14 x6  - 1 x7   - 4 x8  - 4 x9  + 4 x10
   - 3 x11 - 3 x12  + 13 x13 - 3 x14  - 3 x15  - 3 x16  + 17 x17 - 3 x18 - 2 x19 - 2 x20
   - 2 x21 - 2 x22  + 10 x23 + 12 x24 + 13 x25 + 38 x26 - 2 x27  - 2 x28 - 1 x29 - 1 x30
   - 1 x31 - 1 x32  - 1 x33  - 1 x34  + 9 x35  + 7 x36  - 1 x37  - 1 x38 - 1 x39 - 1 x40;
```

Figura 9 - Função Objetivo

De seguida, elaboramos as restrições de forma a garantir que quando queremos remover um certo bloco, os 3 blocos acima deverão também ser removidos. Sendo assim, como todos os blocos do nível 1 não têm blocos "em cima" deles, as restrições não serão aplicadas a este nível. Para tal, a cada variável subtraímos as variáveis que representam cada um dos vértices colocados "acima" do vértice em questão. Além disso, consideramos que o valor resultante desta diferença deverá ser menor ou igual que 0, uma vez que esta condição garante a ordem de extração de blocos (primeiro remove-se os de cima e depois os de baixo).

```
// Nível 5
   x1 - x5  <= 0;
   x1 - x6  <= 0;
   x1 - x7  <= 0;
   x2 - x6  <= 0;
   x2 - x7  <= 0;
   x2 - x8  <= 0;
   x3 - x7  <= 0;
   x3 - x8  <= 0;
   x3 - x9  <= 0;
   x4 - x8  <= 0;
   x4 - x9  <= 0;
   x4 - x10 <= 0;
```

Figura 11 - Restrições Nível 5

```
//Nível 4
   x5 - x11  <= 0;
   x5 - x12  <= 0;
   x5 - x13  <= 0;
   x6 - x12  <= 0;
   x6 - x13  <= 0;
   x6 - x14  <= 0;
   x7 - x13  <= 0;
   x7 - x14  <= 0;
   x7 - x15  <= 0;
   x8 - x14  <= 0;
   x8 - x15  <= 0;
   x8 - x16  <= 0;
   x9 - x15  <= 0;
   x9 - x16  <= 0;
   x9 - x17  <= 0;
   x10 - x16 <= 0;
   x10 - x17 <= 0;
```

Figura 10 - Restrições Nível 4

```
//Nível 3
    x11 - x19 <= 0;
    x11 - x20 <= 0;
    x11 - x21 <= 0;
    x12 - x20 <= 0;
    x12 - x21 <= 0;
    x12 - x22 <= 0;
    x13 - x21 <= 0;
    x13 - x22 <= 0;
    x13 - x23 <= 0;
    x14 - x22 <= 0;
    x14 - x23 <= 0;
    x14 - x24 <= 0;
    x15 - x23 <= 0;
    x15 - x24 <= 0;
    x15 - x25 <= 0;
    x16 - x24 <= 0;
    x16 - x25 <= 0;
    x16 - x26 <= 0;
    x17 - x25 <= 0;
    x17 - x26 <= 0;
    x17 - x27 <= 0;
    x18 - x26 <= 0;
    x18 - x27 <= 0;
    x18 - x28 <= 0;
```

Figura 13 - Restrições Nível 3

```
//Nível 2
    x19 - x29 <= 0;
    x19 - x30 <= 0;
    x19 - x31 <= 0;
    x20 - x30 <= 0;
    x20 - x31 <= 0;
    x20 - x32 <= 0;
    x21 - x31 <= 0;
    x21 - x32 <= 0;
    x21 - x33 <= 0;
    x22 - x32 <= 0;
    x22 - x33 <= 0;
    x22 - x34 <= 0;
    x23 - x33 <= 0;
    x23 - x34 <= 0;
    x23 - x35 <= 0;
    x24 - x34 <= 0;
    x24 - x35 <= 0;
    x24 - x36 <= 0;
    x25 - x35 <= 0;
    x25 - x36 <= 0;
    x25 - x37 <= 0;
    x26 - x36 <= 0;
    x26 - x37 <= 0;
    x26 - x38 <= 0;
    x27 - x37 <= 0;
    x27 - x38 <= 0;
    x27 - x39 <= 0;
    x28 - x38 <= 0;
    x28 - x39 <= 0;
    x28 - x40 <= 0;
```

Figura 12 - Restrições Nível 2

Finalmente, através do output que obtivemos (Figura 14) foi possível observar que as variáveis com valor 1, isto é, aquelas que representam os blocos que devem ser escavados de modo a obter o máximo lucro possível, são as mesmas que obtivemos com a solução ótima derivada através do output do *Relax4* (Figura 7).

Variables	MILP ...	r...
	115	115
x1	1	1
x5	1	1
x6	1	1
x7	1	1
x11	1	1
x12	1	1
x13	1	1
x14	1	1
x15	1	1
x17	1	1
x19	1	1
x20	1	1
x21	1	1
x22	1	1
x23	1	1
x24	1	1
x25	1	1
x26	1	1
x27	1	1
x29	1	1
x30	1	1
x31	1	1
x32	1	1
x33	1	1
x34	1	1
x35	1	1
x36	1	1
x37	1	1
x38	1	1
x39	1	1
x2	0	0
x3	0	0
x4	0	0
x8	0	0
x9	0	0
x10	0	0
x16	0	0
x18	0	0
x28	0	0
x40	0	0

Figura 14 - Output LPSolve

Além disso, tal como é possível observar o lucro máximo obtido com a solução ótima é 115. Poderemos comprovar esse resultado, somando os lucros associados a todos os vértices pertencentes a S.O (Tabela 4):

$$-1-1-1-1-1-1+9+7-1-1-1-2-2-2-2+10+12+13+38-2-3-3+13-3-3+17-1+14-1+15=115$$

-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
_	-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	_
_	_	-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3	_	_
_	_	_	-1	14	-1	-4	-4	4	_	_	_
_	_	_	_	15	2	-5	-3	_	_	_	_

Tabela 4 - Grelha com blocos que devem ser escavados

Outro fator pertinente na validação da solução ótima trata-se do cumprimento das restrições impostas. Através da rede do problema de fluxo máximo obtida, já com os respetivos blocos que deverão ser extraídos, pintados, de modo a obter o lucro máximo, e da prévia análise da distribuição do fluxo pelos vários blocos, resultante da interpretação do output, depreendemos que, todos os blocos integrantes da solução ótima têm os 3 blocos do nível acima adjacentes escavados, e estes sucessivamente.

Conclusão

Ao longo da realização deste projeto, foi possível consolidar diversos conceitos que foram lecionados nas aulas teóricas da cadeira de Modelos Determinísticos de Investigação Operacional, nomeadamente, o problema do fecho máximo de um grafo, que era o desafio deste trabalho. Para o solucionar resolveu-se o problema do fluxo máximo num grafo auxiliar, sendo que, com o auxílio do *software* otimização de redes, *relaX4*, fomos capazes de determinar que blocos da mina deviam ser removidos de forma a maximizar o lucro.

Desta forma, o grupo considera que realizou este trabalho prático com sucesso, dado que, com o auxílio do processo de validação do modelo, concluímos que a solução apresentada é, com certeza, a solução ótima.