

Universidade do Minho
Licenciatura em Engenharia Informática

Investigação Operacional
Trabalho Prático 2 - Grupo 72

André Silva - A87958 Armando Silva - A87949
Filipa Rebelo - A90234 Joana Oliveira - A87956
 João Nunes - A87972

Maio 2022



Conteúdo

1	Introdução	3
2	Problema associado ao Grupo	4
3	Formulação do Problema	6
3.1	Descrição do problema e objetivos	6
3.2	Variáveis de decisão	7
3.3	Restrições	7
3.4	Função objetivo	7
4	Modelo de Fluxos em Rede	8
5	Software de Optimização em Rede	9
5.1	Ficheiro de <i>input</i>	9
5.2	Ficheiro de <i>output</i>	11
6	Interpretação da Solução	12
6.1	Análise da solução	12
6.2	Escalonamento das equipas	12
7	Validação do Modelo	14
7.1	Admissibilidade da solução	14
7.2	Adequação ao contexto real	14
8	Conclusão	15

Lista de Figuras

1	Tempos de deslocação	4
2	Custos de deslocação	4
3	Quadro de compatibilidades	5
4	Grafo de compatibilidades	5
5	Rede formulada	8
6	Correspondência de vértices do problema com os usados no RELAX4	8
7	Ficheiro de <i>input</i> utilizado no <i>software</i> RELAX4	10
8	Informações iniciais no ficheiro de <i>output</i>	11
9	Solução originada pelo <i>software</i> RELAX4, escrita no ficheiro de <i>output</i>	11
10	Escalonamento da equipa 1	13
11	Escalonamento da equipa 2	13

1 Introdução

No âmbito da unidade curricular de Investigação Operacional, neste segundo e último trabalho prático, foi-nos proposta a formulação e modelação de um problema de fluxos em rede.

Este problema consiste em atribuir serviços a efetuar a clientes, distribuídos geograficamente, a equipas. O objetivo final pretendido é que encontremos a solução com o menor custo total da operação possível, incluindo os custos de deslocação e de utilização dos veículos.

Para nos auxiliar durante a resolução deste problema, foram fornecidos dois quadros com os tempos e os custos de deslocação. Utilizamos também o *software* de optimização em rede RELAX4.

O presente relatório explica com pormenor todo o problema, os procedimentos realizados até à solução e a própria solução obtida.

2 Problema associado ao Grupo

A primeira tarefa deste projeto consiste em definir o problema que o nosso grupo terá de realizar. Para tal, tendo em conta que o nosso maior número de inscrição é 90234 temos A=9, B=0, C=2, D=3 e E=4.

Com os valores associados às letras ABCDE descobertos, começamos por estabelecer os tempos do início do serviço do cliente 1 e 8:

- $a_1 = B + 1 \Leftrightarrow a_1 = 0 + 1 \Leftrightarrow a_1 = 1$;
- $a_8 = C + 1 \Leftrightarrow a_8 = 2 + 1 \Leftrightarrow a_8 = 3$.

De seguida, passamos para a remoção de clientes:

- $D = 3$ não é par, logo não removemos o cliente 3;
- $E = 4$ é par, logo removemos o cliente 4.

Depois de termos todos os parâmetros bem definidos, construímos os quadros finais que vão ser utilizados para a resolução do problema pelo grupo. Apresentamos a seguir, os quadros construídos em que o vermelho representa os clientes removidos.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	A	4	1	2	2	3	2	1	0	3	1
2	B		3	5	3	3	2	3	4	2	5
3	C			3	2	3	2	0	1	1	2
4	D			1	3	3	3	2	3	1	
5	E				2	1	2	2	2	2	
6	F					2	3	3	3	4	
7	G						2	2	2	3	
8	H							1	1	1	
9	I								3	2	
10	J									4	

Figura 1. Tempos de deslocação

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	A	13	5	6	5	10	7	5	0	7	1
2	B		11	14	10	8	6	11	13	4	15
3	C			8	6	10	6	0	5	6	2
4	D			4	8	8	8	6	11	4	
5	E				6	4	6	5	7	6	
6	F					5	10	10	8	11	
7	G						10	7	5	9	
8	H							5	6	9	
9	I								7	9	
10	J									10	

Figura 2. Custos de deslocação

Construímos também, um quadro e um grafo de compatibilidades. As compatibilidades tratam-se de todas as ligações possíveis entre clientes que satisfazem a seguinte condição: $ai + tij \leq aj$, em que ai e aj representa a hora de início do serviço do respetivo cliente e tij representa o tempo de deslocação entre o cliente i e j .

Apresentamos agora o quadro e o respetivo grafo de compatibilidades para o problema do nosso grupo, em que cada letra representa um cliente diferente. De salientar que, o quadro de compatibilidades possui o custo da deslocação entre os clientes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	A	13	5		5	10	7	5	0	7
2	B				10		6			
3	C		11		6		6			6
4	D		14		4	8	8			11
5	E									
6	F				6		5			
7	G				4					
8	H		11	0	6	10	10			6
9	I		13	5	5	10	7	5		7
10	J		4		7		5			

Figura 3. Quadro de compatibilidades

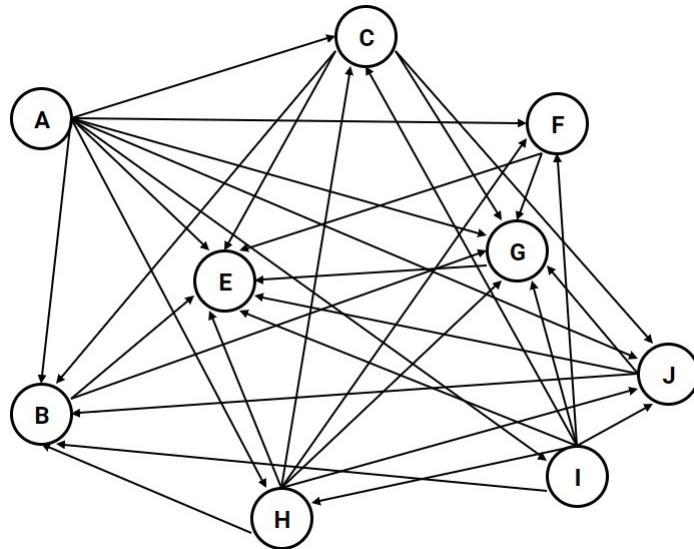


Figura 4. Grafo de compatibilidades

3 Formulação do Problema

Depois do problema ter sido bem estruturado, apresentamos agora a sua pormenorizada descrição com todos os seus aspectos relevantes e o objetivo final pretendido. Apresentamos também as implementações das variáveis de decisão, das restrições e da função objetivo.

3.1 Descrição do problema e objetivos

Este é um problema de escalonamento fixo, uma vez que temos horários de serviço que precisam de ser cumpridos e tempos de deslocação entre clientes, o que limita os deslocamentos entre eles. De salientar que, a duração do serviço nos clientes é desprezada e que o deslocamento entre eles vai ser realizado por equipas da empresa, sendo que é também preciso descobrir o número de equipas necessário. Cada deslocação tem ainda um custo específico que tem como objetivo ser minimizado, sendo esta a solução ótima pretendida.

Para a resolução deste problema, devemos criar uma rede que contém o grafo de compatibilidades, apresentado na figura 4, e incluir dois vértices, ponto de partida e de chegada da sede da empresa.

Precisamos ainda, de alterar a maneira como é introduzido o grafo de compatibilidades na nossa rede. Ou seja, é fundamental introduzirmos uma segunda vez todos os clientes, desta vez com uma linha que acompanha as letras, por exemplo A' e B' . As possíveis deslocações entre os clientes passam a ser apresentadas entre os vértices sem linha e com linha, por exemplo B possui um arco com E' e G' em vez de com E e G .

Esta rede vai também possuir valores associados aos arcos que representam o custo da deslocação entre eles. Este custo tem o objetivo de ser minimizado, nunca esquecendo que todos os serviços têm de ser realizados atempadamente.

Acrescentamos ainda que todos os vértices têm de ser percorridos apenas uma vez, por alguma das equipas disponibilizadas. Isto significa que o fluxo de entrada e de saída tem de ser igual a 1, pelo que vamos ter de introduzir uma oferta e procura de 1 aos vértices dos clientes. Garantimos assim que todos os clientes vão ser atendidos pelas equipas.

Para descobrirmos quantas equipas são necessárias para obtermos a solução com o menor custo possível, introduzimos uma oferta de valor 10 no K , ponto de partida das equipas, e uma procura de valor 10 no K' , ponto de chegada das equipas. Adicionamos também, um arco entre estes dois vértices com um custo de 0, desta forma as equipas que não serão necessárias vão utilizar este arco e não vão influenciar a solução ótima obtida.

3.2 Variáveis de decisão

No contexto deste problema, decidimos implementar variáveis binárias que nos vão indicar quais os arcos entre os clientes que foram percorridas pelas equipas. Caso a variável tenha valor 1, o custo desta deslocação vai ser adicionado ao custo total. No caso da variável ter valor 0, o custo não vai ser adicionado ao custo total.

3.3 Restrições

Como já foi referido anteriormente, uma das restrições é que cada equipa tem de iniciar o seu percurso no ponto de partida da sede da empresa e tem de acabar no ponto de chegada da sede da empresa. Outra restrição adicionada, é que cada cliente apenas pode ser percorrido uma vez por qualquer equipa, ou seja o fluxo de entrada e de saída tem de ser igual a 1.

3.4 Função objetivo

Como o objetivo deste problema é minimizar o custo total das deslocações das equipas com os clientes, a função será de minimização. Assim, a função objetivo vai conter as variáveis de decisão com os custos associados a cada uma. Deste modo, apenas vamos somar os custos das variáveis de decisão com valor 1, ou seja, vamos somar os custos das deslocações realizadas pelas equipas.

4 Modelo de Fluxos em Rede

Passamos para a modelação da rede formulada na secção anterior. Apresentamos a seguir uma imagem com essa rede, com todos os arcos representados e com todas as procura e ofertas introduzidas nos vértices.

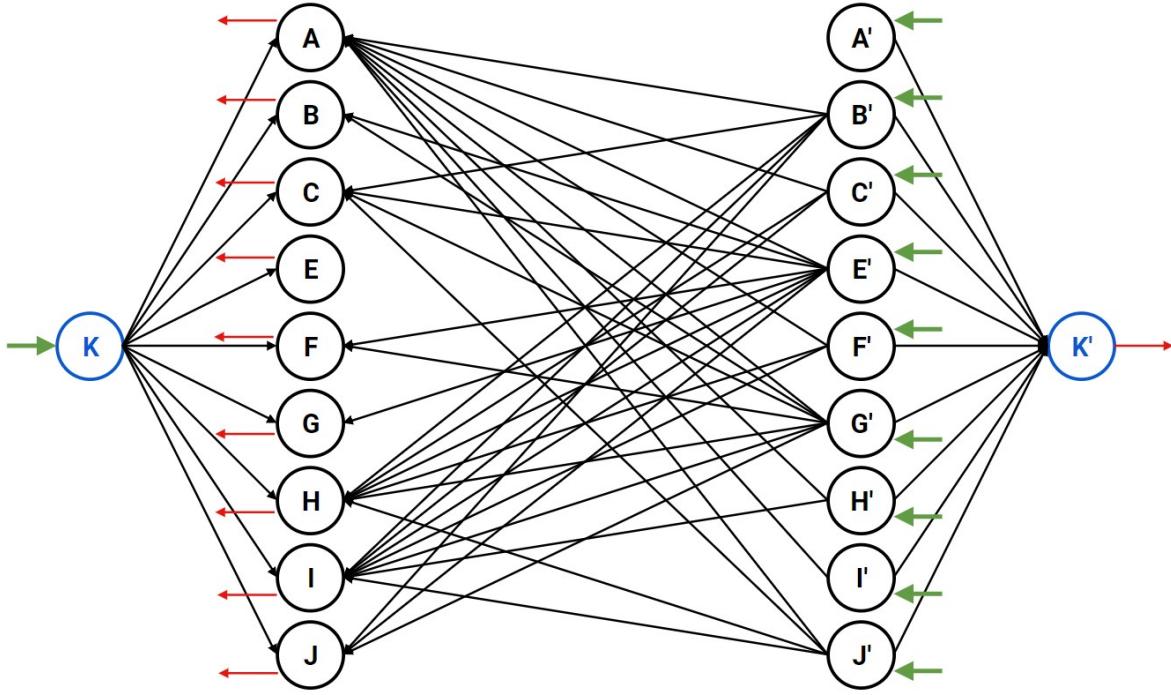


Figura 5. Rede formulada

Acrescentamos que, ambos os vértices da sede da empresa estão apresentados com cor azul, as setas com cor verde representam a oferta desse vértice, as setas com cor vermelha representam a procura (consumo) desse vértice. Infelizmente não conseguimos adicionar os custos associados a cada arco na imagem, devido à sobreposição dos mesmos.

Esta rede está com a nomenclatura utilizada no RELAX4, isto é, por exemplo o cliente A é o vértice 1. Para facilitar a interpretação da rede exibida, construímos a seguinte tabela com as respetivas correspondências.

Problema	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
RELAX4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	21
Problema	A'	B'	C'	D'	E'	F'	G'	H'	I'	J'	K'
RELAX4	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22

Figura 6. Correspondência de vértices do problema com os usados no RELAX4

5 *Software* de Optimização em Rede

Depois de toda a formulação e modelação da rede, construímos um ficheiro válido de *input* para o RELAX4 e, de seguida, apresentamos o ficheiro de *output* produzido por este *software*.

5.1 Ficheiro de *input*

Ficheiro de texto em que cada linha tem um significado específico para o *software* RELAX4.

A primeira linha representa o número de vértices considerado e a segunda linha contém o número de arcos inseridos, respetivamente 22 e 51. A seguir, vão ser introduzidos todos esses 51 arcos no seguinte formato ' $V1\ V2\ CT\ CP$ ', em que $V1$ e $V2$ são os vértices que estão nessa ligação no sentido da mesma, ou seja, do vértice $V1$ para o $V2$, CT é o custo desse deslocamento e representa a capacidade total (limite superior) de fluxo que pode ser transportado nesse arco.

De seguida, vão ser introduzidos, linha a linha, por ordem crescente, a oferta ou procura dos vértices, sendo que a oferta é representada por números positivos e a procura por números negativos. No caso de não haver nem oferta nem procura, utilizamos o valor 0.

De salientar, que cada arco tem uma capacidade infinita que no RELAX4 representamos pelo valor 1000. Garantimos que os clientes apenas são visitados uma vez ao introduzirmos oferta de valor 1 nos vértices sem linha e procura de valor 1 nos vértices com linha. Desta forma, a capacidade infinita não influencia na solução do problema pretendida.

Acrescentamos também que, qualquer equipa em serviço tem um custo extra com valor de 1 ao voltar para a sede de empresa. Esse valor foi incrementado ao custo dos arcos que conectam com o vértice K' .

Apresentamos a seguir, na próxima página, o ficheiro construído de *input* para o *software* RELAX4 utilizado para obter a solução ótima do nosso problema.

```

1  22
2  51
3  11 2 13 1000
4  11 3 5 1000
5  11 5 5 1000
6  11 6 10 1000
7  11 7 7 1000
8  11 8 5 1000
9  11 9 0 1000
10 11 10 7 1000
11 12 5 10 1000
12 12 7 6 1000
13 13 2 11 1000
14 13 5 6 1000
15 13 7 6 1000
16 13 10 6 1000
17 16 5 6 1000
18 16 7 5 1000
19 18 2 11 1000
20 18 3 0 1000
21 18 5 6 1000
22 18 6 10 1000
23 18 7 10 1000
24 18 10 6 1000
25 19 2 13 1000
26 19 3 5 1000
27 19 5 5 1000
28 19 6 10 1000
29 19 7 7 1000
30 19 8 5 1000
31 19 10 7 1000
32 20 2 4 1000
33 20 5 7 1000
34 20 7 5 1000
35 21 22 0 1000
36 21 1 1 1000
37 21 2 15 1000

```

(a) Linhas 1 a 37

```

38  21 3 2 1000
39  21 5 6 1000
40  21 6 11 1000
41  21 7 9 1000
42  21 8 9 1000
43  21 9 9 1000
44  21 10 10 1000
45  11 22 2 1000
46  12 22 16 1000
47  13 22 3 1000
48  15 22 7 1000
49  16 22 12 1000
50  17 22 10 1000
51  18 22 10 1000
52  19 22 10 1000
53  20 22 11 1000
54  -1
55  -1
56  -1
57  0
58  -1
59  -1
60  -1
61  -1
62  -1
63  -1
64  1
65  1
66  1
67  0
68  1
69  1
70  1
71  1
72  1
73  1
74  10
75  -10

```

(b) Linhas 38 a 75

Figura 7. Ficheiro de *input* utilizado no *software* RELAX4

5.2 Ficheiro de *output*

```

NUMBER OF NODES = 22, NUMBER OF ARCS = 51
DEFAULT INITIALIZATION USED
*****
Total algorithm solution time = 0.00447010994 sec.
OPTIMAL COST = 56.
NUMBER OF ITERATIONS = 7
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 1
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 1
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 1
*****

```

Figura 8. Informações iniciais no ficheiro de *output*

```

s 56.
f 11 2 0
f 11 3 0
f 11 5 0
f 11 6 0
f 11 7 0
f 11 8 0
f 11 9 1
f 11 10 0
f 12 5 0
f 12 7 1
f 13 2 0
f 13 5 0
f 13 7 0
f 13 10 1
f 16 5 1
f 16 7 0
f 18 2 0
f 18 3 1
f 18 5 0
f 18 6 0
f 18 7 0
f 18 10 0
f 19 2 0
f 19 3 0
f 19 5 0

```

(a) Parte 1

```

f 19 6 0
f 19 7 0
f 19 8 1
f 19 10 0
f 20 2 1
f 20 5 0
f 20 7 0
f 21 22 8
f 21 1 1
f 21 2 0
f 21 3 0
f 21 5 0
f 21 6 1
f 21 7 0
f 21 8 0
f 21 9 0
f 21 10 0
f 11 22 0
f 12 22 0
f 13 22 0
f 15 22 1
f 16 22 0
f 17 22 1
f 18 22 0
f 19 22 0
f 20 22 0

```

(b) Parte 2

Figura 9. Solução originada pelo *software* RELAX4, escrita no ficheiro de *output*

Ficheiro de *output* produzido pelo *software* que apresenta, no formato ' $V1\ V2\ F$ ' em que $V1$ e $V2$ representam o arco percorrido e F o fluxo que percorreu esse arco. Antes aparece ainda o total do custo somado na solução apresentada. Na secção seguinte, iremos pegar neste ficheiro e interpretar o resultado obtido para o problema em questão.

6 Interpretação da Solução

Obtido o resultado da execução do modelo do problema no *software* RELAX4, passamos para a análise e construção da solução obtida, apresentada na figura 9.

6.1 Análise da solução

Conseguimos deduzir, por uma análise feita ao ficheiro de *output* apresentado na figura 9, o número das equipas que foram utilizadas e os respetivos deslocamentos das equipas aos clientes.

Sobre o número de equipas, observamos que passou um fluxo de valor 8 no arco, de custo 0 e capacidade infinita, entre $K(21)$ e $K'(22)$. Este arco, como já foi referido, permite que as equipas que não são utilizadas não saiam da sede da empresa. Concluimos assim que, como foram disponibilizadas 10 equipas e 8 não saíram da sede da empresa, a solução óptima utiliza apenas **2 equipas**.

Acerca dos deslocamentos realizados por essas equipas, conseguimos visualizar que alguns dos arcos possuem um fluxo de valor 1, o que significa que foram percorridos por alguma equipa. Esses arcos são, $11(A') \Rightarrow 9(I)$, $12(B') \Rightarrow 7(G)$, $13(C') \Rightarrow 10(J)$, $16(F') \Rightarrow 5(E)$, $18(H') \Rightarrow 3(C)$, $19(I') \Rightarrow 8(H)$, $20(J') \Rightarrow 2(B)$, $21(K) \Rightarrow 22(K')$, $21(K) \Rightarrow 1(A)$, $21(K) \Rightarrow 6(F)$, $15(E') \Rightarrow 22(K')$ e $17(G') \Rightarrow 22(K')$.

De uma forma mais simples, podemos dizer que existem estes dois percursos:

- (1) **K - A - I - H - C - J - B - G - K.**
- (2) **K - F - E - K.**

No topo da figura 9 está o custo total da solução óptima que neste caso é **56**. Relembreamos que o custo fixo das equipas entrarem em serviço já foi adicionado a todos os arcos dos clientes que conectam com o K' , ponto de chegada na sede da empresa.

6.2 Escalonamento das equipas

Para facilitar a visualização da solução obtida decidimos construir um quadro para cada equipa com os clientes que percorreu, os arcos e os custos associados e também o custo total final.

Apresentamos a seguir duas imagens com os respetivos quadros.

j	cliente	aj (1/4 hora)	aj (hora do serviço)	tempo deslocação	custo deslocação
	Keleirós	0	09:00	[KA]: 1	1
1	Ana	1	09:15	[AI]: 0	0
9	Inês	2	09:30	[IH]: 1	5
8	Helena	3	09:45	[HC]: 0	0
3	Carlos	4	10:00	[CJ]: 1	6
10	José	5	10:15	[JB]: 2	4
2	Beatriz	7	10:45	[BG]: 2	6
7	Gonçalo	9	11:15	[GK]: 3	9
	Keleirós	12	12:00		1
custo de operação da equipa 1					32

Figura 10. Escalonamento da equipa 1

j	cliente	aj (1/4 hora)	aj (hora do serviço)	tempo deslocação	custo deslocação
	Keleirós	0	09:00	[KF]: 4	11
6	Francisca	6	10:30	[FE]: 2	6
5	Eduardo	10	11:30	[EK]: 2	6
	Keleirós	12	12:00		1
custo de operação da equipa 2					24

Figura 11. Escalonamento da equipa 2

Com estes quadros conseguimos verificar que percorremos todos os clientes apenas uma vez e conseguimos verificar que o cálculo do custo da solução ótima obtida no ficheiro *output* está correta. Desta forma, confirmamos que o custo fixo por equipa está a ser devidamente contado.

7 Validação do Modelo

De modo a validar o modelo construído, o grupo decidiu focar-se em verificar se a solução é admissível e se se adequa ao contexto real.

7.1 Admissibilidade da solução

Para verificarmos se a solução é admissível, esta tem de satisfazer as seguintes condições (restrições):

- Todos os clientes têm de ser percorridos apenas uma vez por qualquer equipa;
- Todas as equipas têm de iniciar e acabar o seu trabalho na sede da empresa.

Com base na figura 10 e 11, verificamos que os seguintes clientes foram percorridos pelas equipas, A, B, C, E, F, G, H, I, J. Observamos também que estes foram apenas percorridos uma vez por uma das duas equipas. Desta forma, a solução **satisfaz a primeira condição**.

Nas mesmas figuras 10 e 11, conseguimos também observar que ambas as equipas começam e acabam na sede da empresa, Keleirós (K), e como tal a solução também **satisfaz a segunda condição**.

Como satisfaz a primeira e a segunda condição, a **solução é admissível**.

7.2 Adequação ao contexto real

A solução enquadra-se com o problema num contexto real, por apresentar o número das equipas necessárias e o percurso de cada uma, para cumprirem com todos os serviços apresentados. Não esquecendo que a solução obtida é a solução com o menor custo possível, tendo em conta as restrições propostas na sua formulação, o que ajudaria qualquer empresa no contexto real a diminuir substancialmente os seus custos.

8 Conclusão

Dado por concluído o segundo e último trabalho prático desta unidade curricular, consideramos importante realçar todos os pontos positivos e negativos, e ainda, efetuar uma análise crítica final do trabalho realizado.

O grupo considera que este projeto ajudou a consolidar vários conceitos que foram lecionados nas aulas teóricas e práticas e que foram utilizados para a resolução do mesmo. Queremos salientar que o grupo sentiu mais dificuldades na conversão da formulação pretendida para o ficheiro de *input* do *software* RELAX4. Dificuldades essas que foram ultrapassadas com sucesso, depois de múltiplas tentativas e com um estudo mais aprofundado sobre o funcionamento do *software*.

O relatório está bem construído com todos os detalhes e aspetos importantes deste projeto. A solução que obtemos é válida e, neste caso, é a ótima do problema.

Para concluir, dado que o trabalho realizado cumpre com todos os requisitos propostos mesmo com as diversas dificuldades sentidas, o grupo considera que este está positivo.