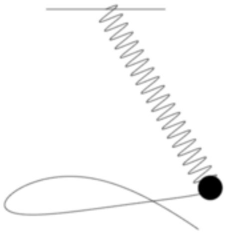
Pohybové rovnice



Odvození pohybových rovnic užitých v aplikaci

Filip Cihlář

Verze: 1.0.1

Obsah

Odvození pohybových rovnic užitých v aplikaci

1.1 Vrhy

V souboru „Vrhy“ je jedno těleso s pohybovou rovnicí pro pohyb v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pro jednotlivé složky zrychlení, a tedy i pohybové rovnice, platí

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0; \\ \ddot{y} &= -g. \end{aligned} \tag{1.1}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti polohy tělesa na čase.

1.2 Matematické kyvadlo

V souboru „Matematické kyvadlo“ je těleso s pohybovou rovnicí matematického kyvadla v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pohybové rovnice matematického kyvadla naleznu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Závaží budu popisovat v polárních souřadnicích, jelikož se v nich pohybuje pouze ve směru φ. Je-li l délka závěsu, pak pro potenciální energii V vzhledem k úrovni úchytu platí

$$V = -mgl\cos\varphi,$$

kde m je hmotnost závaží. Kinetická energie T je potom

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Nyní je možné sestavit lagranžián a dosadit ho do Lagrangeových rovnic:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0;$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0.$$

Pohybové rovnice matematického kyvadla tedy jsou

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\sin\varphi; \\ \ddot{r} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

V souboru je přidán také graf závislosti výchylky φ na čase.

1.3 Pružina

V souboru „Pružina“ je těleso s pohybovou rovnicí závaží o hmotnosti m na nehmotné pružině o tuhosti k v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Závaží se pohybuje pouze ve svislém směru y. Celková síla na něj působící je $F = -ky - mg$ a je dána součtem síly pružiny a tíhové síly. Z Newtonova zákona síly lze získat pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0; \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m}y - g. \end{aligned} \tag{1.3}$$

V souboru je přidán také graf závislosti výchylky y na čase.

1.4 Kapitzovo kyvadlo

V souboru „Kapitzovo kyvadlo“ je těleso s pohybovou rovnicí kyvadla v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$, přičemž jeho úchyt kmitá ve směru y s frekvencí ν. Toto kyvadlo je zajímavé proto, že dokáže kmitat v převrácené pozici, tedy nad bodem úchytu.

Pohybové rovnice naleznu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Pro popis kyvadla postačí pouze výchylka φ v polárních soužadnicích. Vertikální pohyb úchytu totiž zajistím posunutím počátku souřadnic ve směru y o okamžitou výchylku úchytu, pro kterou platí $a_0 = a\cos\nu t$, kde a je amplituda výchylky úchytu. Je-li l délka závěsu, pak pro souřadnice závaží vzhledem k bodu, kdy má úchyt maximální kladnou výchylku, platí

$$x = l \sin \varphi;$$

$$y = -l \cos \varphi - a \cos \nu t.$$

Má-li závaží hmotnost m, potom lze psát kinetickou energii jako $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$ a potenciální jako $V = -mgy$. Pro lagranžián tedy platí

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m l a \nu \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \nu t + \frac{1}{2} m a^2 \nu^2 \sin^2 \nu t + m g \left(l \cos \varphi + a \cos \nu t\right).$$

Po jeho dosazení do Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

získám pohybovou rovnici pro φ ve tvaru

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g + a \nu^2 \cos \nu t}{l} \sin \varphi. \tag{1.4}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti výchylky φ a její časové derivace $\dot{\varphi}$ na čase.

1.5 Landauův vozíček

V souboru „Landauův vozíček“ jsou dvě tělesa, která svými pohybovými rovnicemi představují kyvadlo v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$ s úchytem pohyblivým ve vodorovném směru.

Pohybové rovnice naleznu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Výchylku úchytu budu popisovat souřadnicí x a výchylku kyvadla souřadnicí φ. Délka závěsu bude l, hmotnost závaží m_{z} a hmotnost vozíčku, na kterém je úchyt, bude m_{v}. Potenciální energii závaží vzhledem k úchytu zde lze určit podobně jako u jiných kyvadel, platí pro ni tedy

$$V = -m_{\mathrm{z}} g l \cos \varphi.$$

Kinetická energie je potom dána součtem kinetických energií vozíčku a závaží. V tomto případě se vyplatí převést souřadnice závaží do kartézských. Pro kinetickou energii tedy platí

$$T = \frac{1}{2} m_{\mathrm{v}} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{z}} \dot{x}_{\mathrm{z}}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{z}} \dot{y}_{\mathrm{z}}^2,$$

kde $x_{\mathrm{z}} = x + l \cos \varphi$ a $y_{\mathrm{z}} = l \cos \varphi$. Lagrangeovou funkci $L = T - V$ je pak možné psát jako

$$L = \frac{1}{2} \left(m_{\mathrm{v}} + m_{\mathrm{z}}\right) \dot{x}^2 + m_{\mathrm{z}} l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} m_{\mathrm{z}} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_{\mathrm{z}} g l \cos \varphi.$$

Po jeho dosazení do Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

vznikne soustava rovnic

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{l}\left(\ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi\right);$$

$$\ddot{x} = -\frac{m_{\mathrm{z}} l}{m_{\mathrm{v}} + m_{\mathrm{z}}}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right),$$

jejímž řešením lze získat pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= -\frac{\sin\varphi\left(g(m_{\mathrm{v}} + m_{\mathrm{z}}) + m_{\mathrm{z}} l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)}{l\left(m_{\mathrm{v}} + m_{\mathrm{z}} - m_{\mathrm{z}}\cos^2\varphi\right)};\\ \ddot{x} &= \frac{m_{\mathrm{z}}\sin\varphi\left(l\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi\right)}{m_{\mathrm{v}} + m_{\mathrm{z}} - m_{\mathrm{z}}\cos^2\varphi}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti polohy, rychlosti a zrychlení na čase.

1.6 Elastické kyvadlo

V souboru „Elastické kyvadlo“ je těleso s pohybovou rovnicí kyvadla se závěsem v podobě nehmotné pružiny v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pohybové rovnice naleznu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Závaží budu popisovat v polárních souřadnicích, výchylka pružiny tedy bude r a výchylka kyvadla bude φ. Kinetická energie potom bude dána součtem kinetických energií v těchto směrech. Je-li m hmotnost závaží, k tuhost pružiny a l klidová délka pružiny, pak pro kinetickou energii platí

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(l + r\right)^2\dot{\varphi}^2.$$

Potenciální energii lze získat součtem potenciální energie pružiny a potenciální energie v tíhovém poli, platí tedy

$$V = \frac{1}{2}kr^2 - mg\left(l + r\right)\cos\varphi.$$

Nyní stačí dosadit Lagrangeovou funkci $L = T - V$ do Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

a získat tak pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= -\frac{1}{l+r}\left(2\dot{\varphi}\dot{r} + g\sin\varphi\right);\\ \ddot{r} &= (l+r)\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m}r + g\cos\varphi.\end{aligned} \tag{1.6}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti polohy, rychlosti a zrychlení na čase.

1.7 Dvojité kyvadlo

V souboru „Dvojité kyvadlo“ jsou dvě tělesa, která svými pohybovými rovnicemi představují kyvadlo s úchytem na závaží jiného kyvadla v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pohybové rovnice naleznu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Výchylku prvního kyvadla označím φ_1 a výchylku druhého, které je zavěšené na prvním, označím φ_2. Jejich hmotnosti pak budou m_1 a m_2 a délky závěsů l_1 a l_2. Potenciální energie soustavy vzhledem k úchytu prvního kyvadla je rovna součtu potenciálních energií obou závaží vzhledem k tomuto bodu, platí tedy

$$V = -m_1 l_1 g\cos\varphi_1 - m_2 g\left(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\right).$$

Kinetická energie je potom dána součtem kinetických energií obou závaží. Zde se vyplatí převést souřadnice závaží do kartézských. Pro kinetickou energii tedy platí

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2,$$

kde

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1\sin\varphi_1; & x_2 &= l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2;\\ y_1 &= -l_1\cos\varphi_1; & y_2 &= -l_1\cos\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2.\end{aligned}$$

Lagrangeovou funkci $L = T - V$ je pak možné po úpravě psát jako

$$\begin{aligned} L =& \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) +\\ &+ (m_1+m_2)g l_1\cos\varphi_1 + m_2 g l_2\cos\varphi_2.\end{aligned}$$

Po jeho dosazení do Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

vznikne soustava rovnic pro $\ddot{\varphi}_1$ a $\ddot{\varphi}_2$, jejímž řešením lze získat pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= \frac{Al_2 - B\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{Cl_1 l_2 - l_1 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)};\\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{A\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - BC}{\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) - l_2 C},\end{aligned} \tag{1.7}$$

kde pro A, B a C platí

$$\begin{aligned}A &= -Cg\sin\varphi_1 - \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2);\\ B &= l_1\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - g\sin\varphi_2;\\ C &= \frac{m_1 + m_2}{m_2 l_2}.\end{aligned}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti výchylek na čase.

1.8 Newtonův gravitační zákon

V souboru „Newtonův gravitační zákon“ jsou čtyři tělesa, která svými pohybovými rovnicemi představují tělesa navzájem se gravitačně ovlivňující dle Newtonova gravitačního zákona.

Podle Newtonova zákona působí na těleso o hmotnosti m s polohovým vektorem $\mathbf{r}$ vzhledem k centrálnímu tělesu o hmotnosti M síla

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r},$$

kde G je gravitační konstanta. V aplikaci postačí popis v souřadnicích x a y. Vzdálenost od centrálního tělesa je tedy $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pokud jsou x_1 a y_1 souřadnice tělesa o hmotnosti m a centrální těleso má souřadnice x_0 a y_0, pak platí $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ a jednotlivé složky síly jsou

$$\begin{aligned}F_x &= -G\frac{mM}{r^3}(x_1 - x_0);\\ F_y &= -G\frac{mM}{r^3}(y_1 - y_0),\end{aligned}$$

pohybové rovnice potom

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -G\frac{M}{r^3}(x_1 - x_0);\\ \ddot{y} &= -G\frac{M}{r^3}(y_1 - y_0).\end{aligned}$$

Ty to vztahy je ale potřeba zobecnit pro N navzájem na sebe působících těles. Síla působící na jedno těleso tak bude dána součtem sil, kterými na něj působí ostatní tělesa.

Pro pohybové rovnice k-tého tělesa tedy platí

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k &= -G\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \frac{m_i(x_k - x_i)}{((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \ddot{y}_k &= -G\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \frac{m_i(y_k - y_i)}{((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

kde m_i jsou hmotnosti jednotlivých těles a x_i a y_i jejich souřadnice.

1.9 Schwarzschildova metrika

V souboru „Schwarzschildova metrika" je těleso s pohybovou rovnicí testovací částice pohybující se časoprostorem popsaném Schwarzschildovou metrikou. Schwarzschildova metrika je řešením Einsteinových rovnic gravitačního pole, jenž popisuje gravitační pole v okolí hmotného tělesa ve vakuu, které je sféricky symetrické, nerotující a bez elektrického náboje. Je-li tímto tělesem černá díra, pak se jedná o Schwarzschildovu černou díru.

V souřadnicovém systému (t, r, θ, ϕ) pro Schwarzschildovu metriku platí

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2,$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a $r_\mathrm{s} = \frac{2GM}{c^2}$ je Schwarzschildův poloměr, přičemž G je gravitační konstanta a M je hmotnost centrálního tělesa. Pro nalezení pohybových rovnic je nutné nejprve spočítat Christoffelovy symboly a následně je dosadit do rovnice geodetiky, k tomu ale je třeba převést metriku do tvaru metrického tenzoru. To lze učinit užitím vztahu $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta$, z něhož je zřejmé, že metrický tenzor má tvar

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

platí-li $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ a $x^3 = \phi$. Potřebný je také inverzní tvar $g^{\alpha\beta}$, který je možné získat pouhým převrácením prvků na diagonále, jelikož se jedná o diagonální matici.

Nyní stačí spočítat Christoffelovy symboly

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\xi}\left(g_{\xi\alpha,\beta} + g_{\xi\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\xi}\right)$$

a dosadit je do rovnice geodetiky

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

Výsledné pohybové rovnice jsou

$$
\begin{aligned}
\ddot{t} &= -\frac{r_\mathrm{s}\dot{t}\dot{r}}{r^2\left(1-\frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)};\\
\ddot{r} &= -\frac{c^2 r_\mathrm{s}}{2r^2}\left(1-\frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{r_\mathrm{s}}{2r(r-r_\mathrm{s})}\dot{r}^2 + (r-r_\mathrm{s})\dot{\theta}^2 + (r-r_\mathrm{s})\dot{\phi}^2\sin^2\theta;\\
\ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta;\\
\ddot{\phi} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

1.10 Lissajousovy obrazce

V souboru „Lissajousovy obrazce“ je těleso s takovými pohybovými rovnicemi, aby jeho trajektorie vytvářela Lissajousovy obrazce. Ty vznikají skládáním dvou navzájem kolmých kmitů harmonických oscilátorů. Pro jejich pohybové rovnice platí

$$
\begin{aligned}
x &= A_1\sin\omega_1 t;\\
y &= A_2\sin\omega_2 t + \Delta\varphi,
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

kde A_1 a A_2 jsou amplitudy oscilátorů, ω_1 a ω_2 jsou jejich úhlové frekvence a $\Delta\varphi$ je fázový posun. Tvar Lissajousových obrazců pak lze měnit úpravou poměru $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

1.11 Spojená kyvadla

V souboru „Spojená kyvadla“ jsou dvě tělesa s pohybovými rovnicemi dvou pružinou spojených kyvadel v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pohybové rovnice systému naleznu pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Kyvadla budu popisovat jejich výchylkami φ_1 a φ_2. Jejich délky označím l_1 a l_2 a hmotnosti závaží pak m_1 a m_2. Vzdálenost mezi úchyty kyvadel je d. Pružina je zachycena za závaží kyvadel, je nehmotná, má tuhost k a klidovou délku l_0.

Kinetická energie systému je dána součtem kinetických energií kyvadel, platí pro ni

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2.$$

Potenciální energie je potom dána součtem potenciální energie pružiny a potenciální energie závaží v tíhovém poli, takže platí

$$V = -m_1 g l_1\cos\varphi_1 - m_2 g l_2\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2,$$

kde l je okamžitá délka pružiny, tedy vzdálenost mezi závažími kyvadel. Její druhou mocninu l^2 lze psát jako

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + d^2 - 2l_1 l_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + 2d\left(l_1 \sin\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2\right).$$

Nyní už stačí jen dosadit lagranžián $L = T - V$ do Lagrangeových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

a získat tak pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{g}{l_1}\sin\varphi_1 - \frac{k\left(l - l_0\right)}{m_1 l_1 l}\left(l_2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + d\cos\varphi_1\right); \\ \ddot{\varphi}_2 &= -\frac{g}{l_2}\sin\varphi_2 + \frac{k\left(l - l_0\right)}{m_2 l_2 l}\left(l_1 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + d\cos\varphi_2\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti výchylek φ_1 a φ_2 na čase.

1.12 Lorenzův atraktor

V souboru „Lorenzův atraktor“ je těleso s takovými pohybovými rovnicemi, aby jeho trajektorie vytvářela Lorenzův atraktor. Pro tyto pohybové rovnice platí

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma\left(y - x\right); \\ \dot{y} &= x\left(\rho - z\right) - y; \\ \dot{z} &= xy - \beta z. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Parametry σ, ρ a β jsou v souboru zvoleny jako $\sigma = 10$, $\rho = 28$ a $\beta = \frac{8}{3}$. V souboru jsou přidány také grafy závislosti, na kterých je možné sledovat atraktor z různých úhlů.