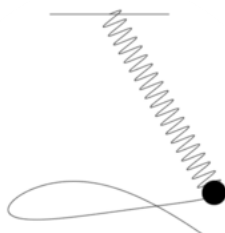


POHYBOVÉ ROVNICE



Odvození pohybových rovnic užitých v aplikaci

Obsah

1	Odvození pohybových rovnic užitých v aplikaci	3
1.1	Vrhy	3
1.2	Matematické kyvadlo	3
1.3	Pružina	4
1.4	Kapitzovo kyvadlo	4
1.5	Landauův vozíček	5
1.6	Elastické kyvadlo	6
1.7	Dvojité kyvadlo	7
1.8	Newtonův gravitační zákon	8
1.9	Schwarzschildova metrika	9
1.10	Lissajousovy obrazce	10
1.11	Spojená kyvadla	10
1.12	Lorenzův atraktor	11

Odvození pohybových rovnic užitých v aplikaci

1.1 Vrh

V souboru „Vrh“ je jedno těleso s pohybovou rovnicí pro pohyb v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pro jednotlivé složky zrychlení, a tedy i pohybové rovnice, platí

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0; \\ \ddot{y} &= -g.\end{aligned}\tag{1.1}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti polohy tělesa na čase.

1.2 Matematické kyvadlo

V souboru „Matematické kyvadlo“ je těleso s pohybovou rovnicí matematického kyvadla v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pohybové rovnice matematického kyvadla naleznou pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžian platí $L = T - V$. Závaží budu popisovat v polárních souřadnicích, jelikož se v nich pohybuje pouze ve směru φ . Je-li l délka závěsu, pak pro potenciální energii V vzhledem k úrovni úchyty platí

$$V = -mgl \cos \varphi,$$

kde m je hmotnost závaží. Kinetická energie T je potom

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Nyní je možné sestavit lagranžián a dosadit ho do Lagrangeových rovnic:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0.$$

Pohybové rovnice matematického kyvadla tedy jsou

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi; \\ \ddot{r} &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

V souboru je přidán také graf závislosti výchylky φ na čase.

1.3 Pružina

V souboru „Pružina“ je těleso s pohybovou rovnicí závaží o hmotnosti m na nehmotné pružině o tuhosti k v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Závaží se pohybuje pouze ve svislém směru y . Celková síla na něj působící je $F = -ky - mg$ a je dána součtem síly pružiny a tíhové síly. Z Newtonova zákona síly lze získat pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0; \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m}y - g.\end{aligned}\tag{1.3}$$

V souboru je přidán také graf závislosti výchylky y na čase.

1.4 Kapititzovo kyvadlo

V souboru „Kapititzovo kyvadlo“ je těleso s pohybovou rovnicí kyvadla v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$, přičemž jeho úchyt kmitá ve směru y s frekvencí ν . Toto kyvadlo je zajímavé proto, že dokáže kmitat v převrácené pozici, tedy nad bodem úchytu.

Pohybové rovnice naleznou pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Pro popis kyvadla postačí pouze výchylka φ v polárních souřadnicích. Vertikální pohyb úchytu totiž zajistím posunutím počátku souřadnic ve směru y o okamžitou výchylku úchytu, pro kterou platí $a_0 = a \cos \nu t$, kde a je amplituda

výchylky úchytu. Je-li l délka závěsu, pak pro souřadnice závaží vzhledem k bodu, kdy má úchyt maximální kladnou výchylku, platí

$$x = l \sin \varphi;$$

$$y = -l \cos \varphi - a \cos \nu t.$$

Má-li závaží hmotnost m , potom lze psát kinetickou energii jako $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ a potenciální jako $V = -mgy$. Pro lagranžiián tedy platí

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mlav\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \nu t + \frac{1}{2}ma^2\nu^2 \sin^2 \nu t + mg(l \cos \varphi + a \cos \nu t).$$

Po jeho dosazení do Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

získám pohybovou rovnici pro φ ve tvaru

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g + a\nu^2 \cos \nu t}{l} \sin \varphi. \quad (1.4)$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti výchylky φ a její časové derivace $\dot{\varphi}$ na čase.

1.5 Landauův vozíček

V souboru „Landauův vozíček“ jsou dvě tělesa, která svými pohybovými rovnicemi představují kyvadlo v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$ s úchytem pohyblivým ve vodorovném směru.

Pohybové rovnice naleznou pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžiián platí $L = T - V$. Výchylku úchytu budu popisovat souřadnicí x a výchylku kyvadla souřadnicí φ . Délka závěsu bude l , hmotnost závaží m_z a hmotnost vozíčku, na kterém je úchyt, bude m_v . Potenciální energii závaží vzhledem k úchytu zde lze určit podobně jako u jiných kyvadel, platí pro ni tedy

$$V = -m_z gl \cos \varphi.$$

Kinetická energie je potom dána součtem kinetických energií vozíčku a závaží. V tomto případě se vyplatí převést souřadnice závaží do kartézských. Pro kinetickou energii tedy platí

$$T = \frac{1}{2}m_v\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_z\dot{x}_z^2 + \frac{1}{2}m_z\dot{y}_z^2,$$

kde $x_z = x + l \cos \varphi$ a $y_z = l \sin \varphi$. Lagrangeovou funkci $L = T - V$ je pak možné psát jako

$$L = \frac{1}{2}(m_v + m_z)\dot{x}^2 + m_z l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2}m_z l^2 \dot{\varphi}^2 + m_z gl \cos \varphi.$$

Po jeho dosazení do Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

vznikne soustava rovnic

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{l} (\ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi);$$

$$\ddot{x} = -\frac{m_z l}{m_v + m_z} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi),$$

jejímž řešením lze získat pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{\sin \varphi (g(m_v + m_z) + m_z l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)}{l(m_v + m_z - m_z \cos^2 \varphi)}; \\ \ddot{x} &= \frac{m_z \sin \varphi (l \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi)}{m_v + m_z - m_z \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti polohy, rychlosti a zrychlení na čase.

1.6 Elastické kyvadlo

V souboru „Elastické kyvadlo“ je těleso s pohybovou rovnicí kyvadla se závěsem v podobě nehmotné pružiny v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pohybové rovnice naleznou pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžian platí $L = T - V$. Závaží budu popisovat v polárních souřadnicích, výchylka pružiny tedy bude r a výchylka kyvadla bude φ . Kinetická energie potom bude dána součtem kinetických energií v těchto směrech. Je-li m hmotnost závaží, k tuhost pružiny a l klidová délka pružiny, pak pro kinetickou energii platí

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (l + r)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Potenciální energii lze získat součtem potenciální energie pružiny a potenciální energie v tíhovém poli, platí tedy

$$V = \frac{1}{2} k r^2 - m g (l + r) \cos \varphi.$$

Nyní stačí dosadit Lagrangeovou funkci $L = T - V$ do Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

a získat tak pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= -\frac{1}{l+r}(2\dot{\varphi}\dot{r} + g \sin \varphi); \\ \ddot{r} &= (l+r)\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{m}r + g \cos \varphi.\end{aligned}\tag{1.6}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti polohy, rychlosti a zrychlení na čase.

1.7 Dvojité kyvadlo

V souboru „Dvojité kyvadlo“ jsou dvě tělesa, která svými pohybovými rovnicemi představují kyvadlo s úchytem na závaží jiného kyvadla v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pohybové rovnice naleznou pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Výchylku prvního kyvadla označím φ_1 a výchylku druhého, které je zavěšené na prvním, označím φ_2 . Jejich hmotnosti pak budou m_1 a m_2 a délky závěsů l_1 a l_2 . Potenciální energie soustavy vzhledem k úchyty prvního kyvadla je rovna součtu potenciálních energií obou závaží vzhledem k tomuto bodu, platí tedy

$$V = -m_1 l_1 g \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2).$$

Kinetická energie je potom dána součtem kinetických energií obou závaží. Zde se vyplatí převést souřadnice závaží do kartézských. Pro kinetickou energii tedy platí

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2,$$

kde

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \varphi_1; & x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2; \\ y_1 &= -l_1 \cos \varphi_1; & y_2 &= -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2.\end{aligned}$$

Lagrangeovou funkci $L = T - V$ je pak možné po úpravě psát jako

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ (m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 + m_2gl_2 \cos \varphi_2.\end{aligned}$$

Po jeho dosazení do Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

vznikne soustava rovnic pro $\ddot{\varphi}_1$ a $\ddot{\varphi}_2$, jejímž řešením lze získat pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= \frac{Al_2 - B \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{Cl_1l_2 - l_1 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)}; \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{A \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - BC}{\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) - l_2C},\end{aligned}\tag{1.7}$$

kde pro A , B a C platí

$$\begin{aligned}A &= -Cg \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2); \\ B &= l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - g \sin \varphi_2; \\ C &= \frac{m_1 + m_2}{m_2 l_2}.\end{aligned}$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti výchylek na čase.

1.8 Newtonův gravitační zákon

V souboru „Newtonův gravitační zákon“ jsou čtyři tělesa, která svými pohybovými rovnicemi představují tělesa navzájem se gravitačně ovlivňující dle Newtonova gravitačního zákona.

Podle Newtonova zákona působí na těleso o hmotnosti m s polohovým vektorem \mathbf{r} vzhledem k centrálnímu tělesu o hmotnosti M síla

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r},$$

kde G je gravitační konstanta. V aplikaci postačí popis v souřadnicích x a y . Vzdálenost od centrálního tělesa je tedy $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pokud jsou x_1 a y_1 souřadnice tělesa o hmotnosti m a centrální těleso má souřadnice x_0 a y_0 , pak platí $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ a jednotlivé složky síly jsou

$$\begin{aligned}F_x &= -G \frac{mM}{r^3} (x_1 - x_0); \\ F_y &= -G \frac{mM}{r^3} (y_1 - y_0),\end{aligned}$$

pohybové rovnice potom

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -G \frac{M}{r^3} (x_1 - x_0); \\ \ddot{y} &= -G \frac{M}{r^3} (y_1 - y_0).\end{aligned}$$

Tyto vztahy je ale potřeba zobecnit pro N navzájem na sebe působících těles. Síla působící na jedno těleso tak bude dána součtem sil, kterými na něj působí ostatní tělesa.

Pro pohybové rovnice k -tého tělesa tedy platí

$$\begin{aligned}\ddot{x}_k &= -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{m_i (x_k - x_i)}{((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \ddot{y}_k &= -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{m_i (y_k - y_i)}{((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}\tag{1.8}$$

kde m_i jsou hmotnosti jednotlivých těles a x_i a y_i jejich souřadnice.

1.9 Schwarzschildova metrika

V souboru „Schwarzschildova metrika“ je těleso s pohybovou rovnicí testovací částice pohybující se časoprostorem popsán Schwarzschildovou metrikou. Schwarzschildova metrika je řešením Einstejných rovnic gravitačního pole, jenž popisuje gravitační pole v okolí hmotného tělesa ve vakuu, které je sféricky symetrické, nerotující a bez elektrického náboje. Je-li tímto tělesem černá díra, pak se jedná o Schwarzschildovu černou díru.

V souřadnicovém systému (t, r, θ, ϕ) pro Schwarzschildovu metriku platí

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ je Schwarzschildův poloměr, přičemž G je gravitační konstanta a M je hmotnost centrálního tělesa. Pro nalezení pohybových rovnic je nutné nejprve spočítat Christoffelovy symboly a následně je dosadit do rovnice geodetiky, k tomu ale je třeba převést metriku do tvaru metrického tenzoru. To lze učinit užitím vztahu $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, z něhož je zřejmé, že metrický tenzor má tvar

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

platí-li $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ a $x^3 = \phi$. Potřebný je také inverzní tvar $g^{\alpha\beta}$, který je možné získat pouhým převrácením prvků na diagonále, jelikož se jedná o diagonální matici.

Nyní stačí spočítat Christoffelovy symboly

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (g_{\xi\alpha,\beta} + g_{\xi\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\xi})$$

a dosadit je do rovnice geodetiky

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

Výsledné pohybové rovnice jsou

$$\begin{aligned}
\ddot{t} &= -\frac{r_s \dot{t} \dot{r}}{r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}; \\
\ddot{r} &= -\frac{c^2 r_s}{2r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{r_s}{2r(r - r_s)} \dot{r}^2 + (r - r_s) \dot{\theta}^2 + (r - r_s) \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta; \\
\ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta; \\
\ddot{\phi} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\phi}}{r} - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

1.10 Lissajousovy obrazce

V souboru „Lissajousovy obrazce“ je těleso s takovými pohybovými rovnicemi, aby jeho trajektorie vytvářela Lissajousovy obrazce. Ty vznikají skládáním dvou navzájem kolmých kmitů harmonických oscilátorů. Pro jejich pohybové rovnice platí

$$\begin{aligned}
x &= A_1 \sin \omega_1 t; \\
y &= A_2 \sin \omega_2 t + \Delta\varphi,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

kde A_1 a A_2 jsou amplitudy oscilátorů, ω_1 a ω_2 jsou jejich úhlové frekvence a $\Delta\varphi$ je fázový posun. Tvar Lissajousových obrazců pak lze měnit úpravou poměru $\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

1.11 Spojená kyvadla

V souboru „Spojená kyvadla“ jsou dvě tělesa s pohybovými rovnicemi dvou pružinou spojených kyvadel v homogenním tíhovém poli o tíhovém zrychlení $\mathbf{g} = (0, -g)$.

Pohybové rovnice systému naleznou pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, přičemž pro lagranžián platí $L = T - V$. Kyvadla budu popisovat jejich výchylkami φ_1 a φ_2 . Jejich délky označím l_1 a l_2 a hmotosti závaží pak m_1 a m_2 . Vzdálenost mezi úchyty kyvadel je d . Pružina je zachycena za závaží kyvadel, je nehmotná, má tuhost k a klidovou délku l_0 .

Kinetická energie systému je dána součtem kinetických energií kyvadel, platí pro ni

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2.$$

Potenciální energie je potom dána součtem potenciální energie pružiny a potenciální energie závaží v tíhovém poli, takže platí

$$V = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2,$$

kde l je okamžitá délka pružiny, tedy vzdálenost mezi závažími kyvadel. Její druhou mocninu l^2 lze psát jako

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2 + d^2 - 2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2d(l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2).$$

Nyní už stačí jen dosadit lagranžian $L = T - V$ do Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

a získat tak pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 - \frac{k(l-l_0)}{m_1 l_1 l} (l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + d \cos \varphi_1); \\ \ddot{\varphi}_2 &= -\frac{g}{l_2} \sin \varphi_2 + \frac{k(l-l_0)}{m_2 l_2 l} (l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + d \cos \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

V souboru jsou přidány také grafy závislosti výchylek φ_1 a φ_2 na čase.

1.12 Lorenzův atraktor

V souboru „Lorenzův atraktor“ je těleso s takovými pohybovými rovnicemi, aby jeho trajektorie vytvářela Lorenzův atraktor. Pro tyto pohybové rovnice platí

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x); \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y; \\ \dot{z} &= xy - \beta z. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Parametry σ , ρ a β jsou v souboru zvoleny jako $\sigma = 10$, $\rho = 28$ a $\beta = \frac{8}{3}$. V souboru jsou přidány také grafy závislosti, na kterých je možné sledovat atraktor z různých úhlů.