

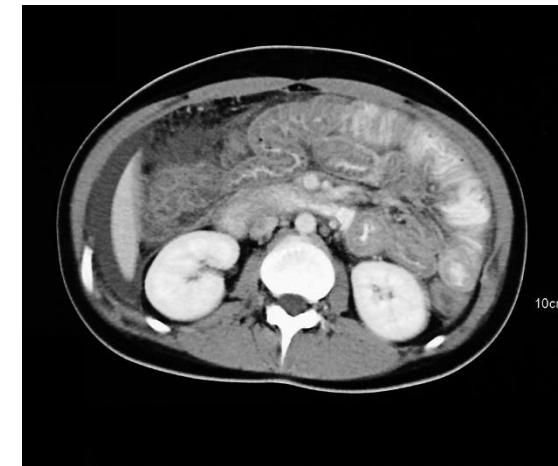
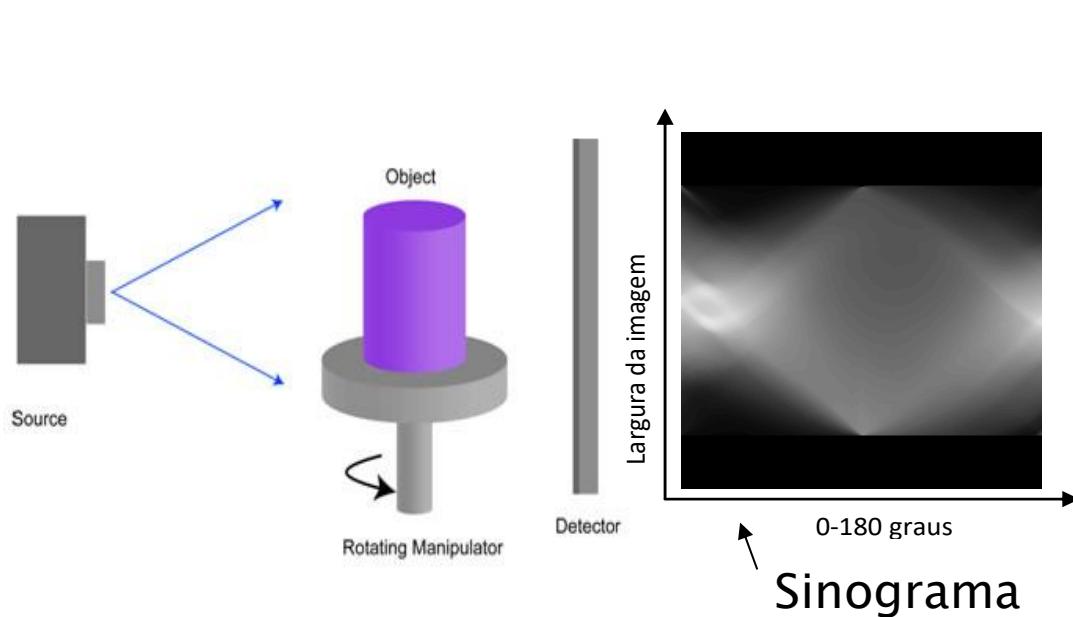
TRANSFORMADA DE RADON

André Damas Mora
FCT-UNL
2025-2026



Radon - Uma transformada Integral

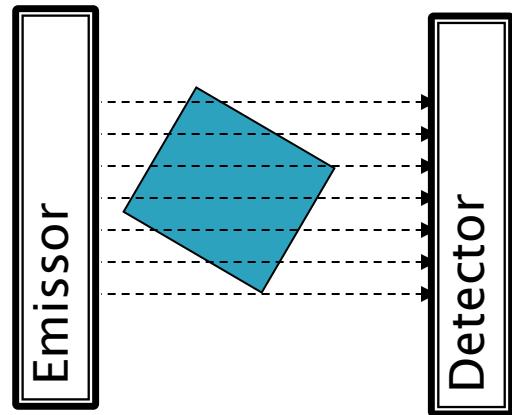
- ▶ É a transformada utilizada na construção e reconstrução de imagens de TAC a partir da informação dos sensores
- ▶ A transformada direta é constituída por um conjunto de projeções (integral) obtidas para diferentes graus



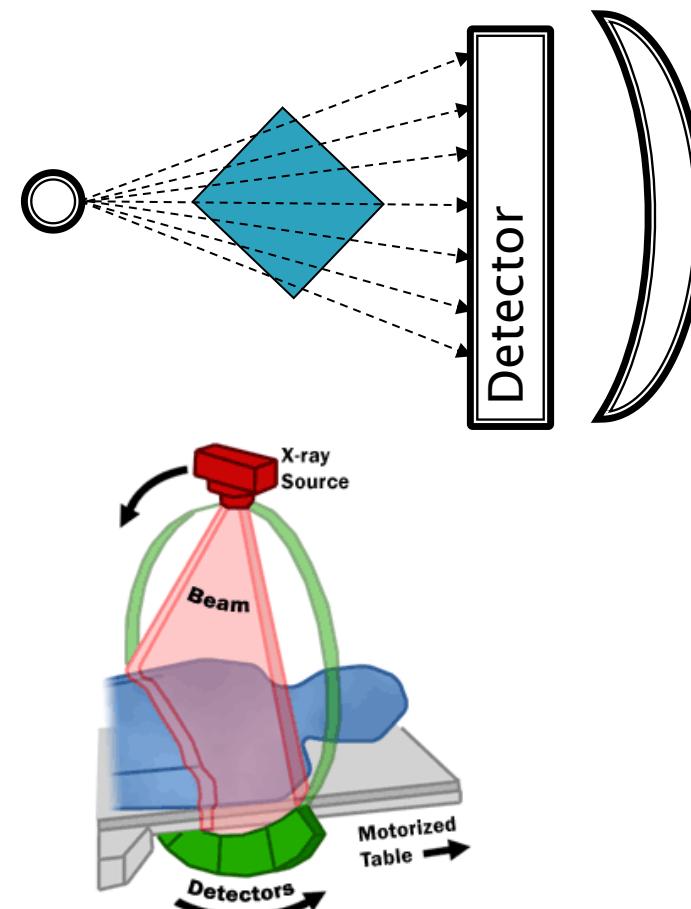
TAC

Tipos de Projeções

► Paralell



► Fan beam



Transformada Inversa – Projecção Paralela

- ▶ Versão simplificada: É conseguida através da soma de todas as projeções, seguida de uma normalização.

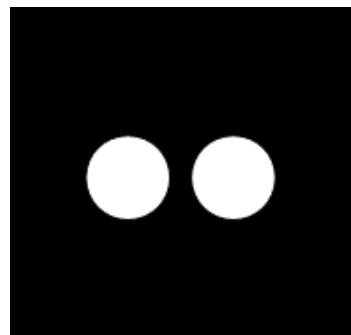
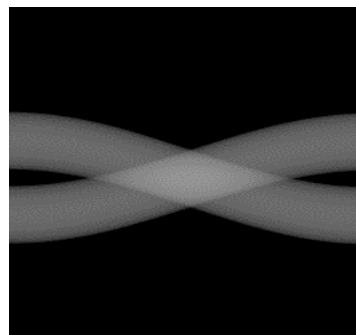
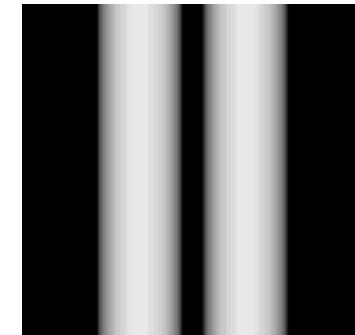


Imagen original



Sinograma

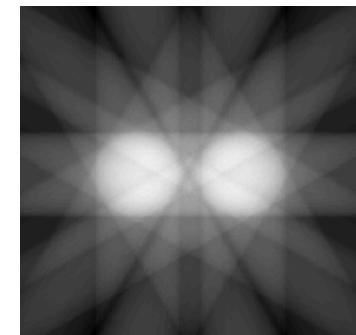


1 projecção



2 projecções

- ▶ Versão com melhores resultados usa filtragem no domínio da frequência

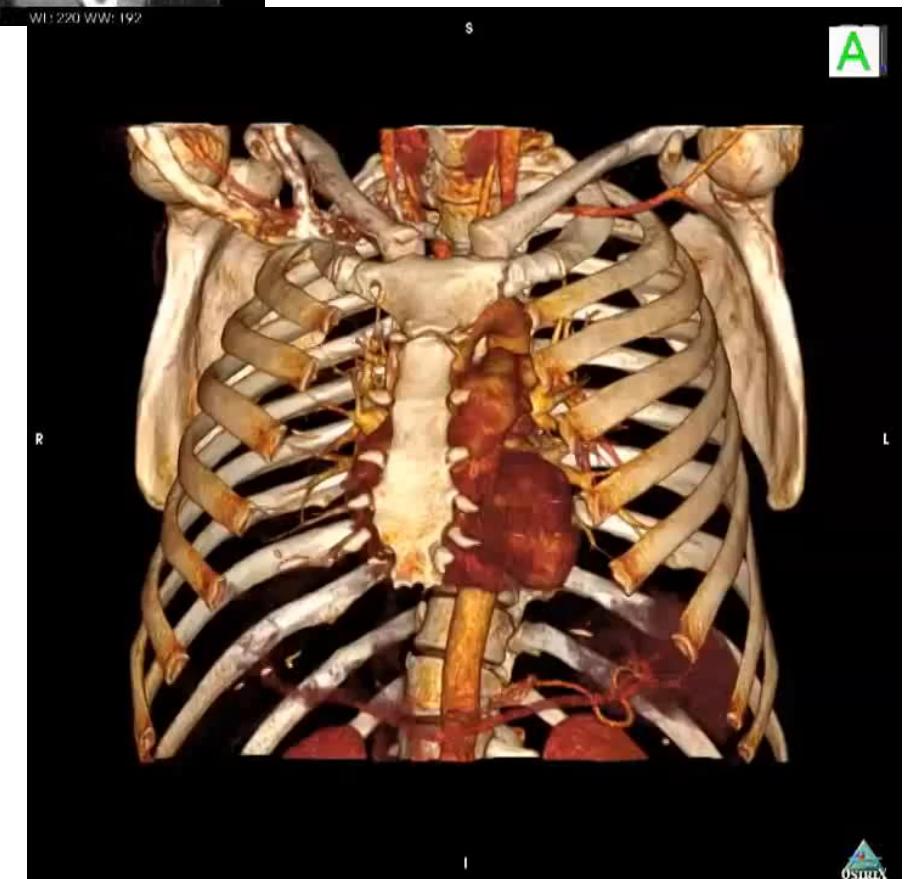
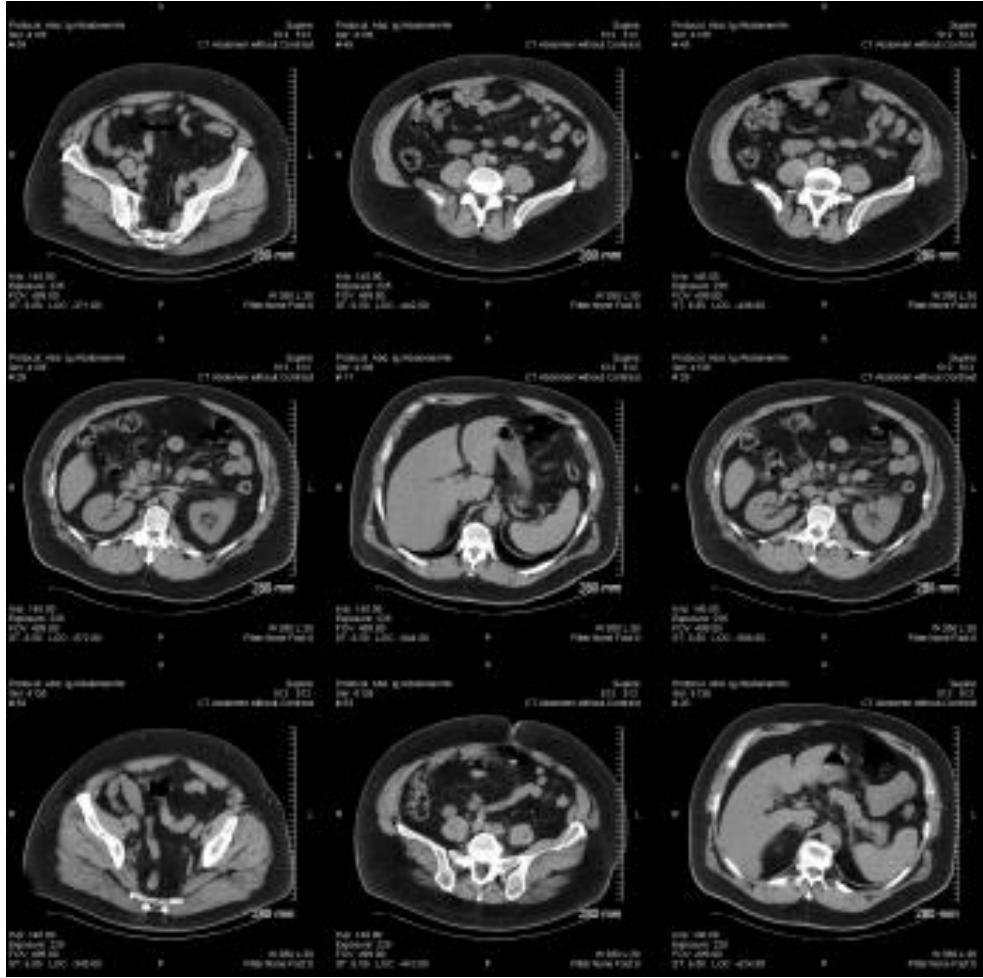


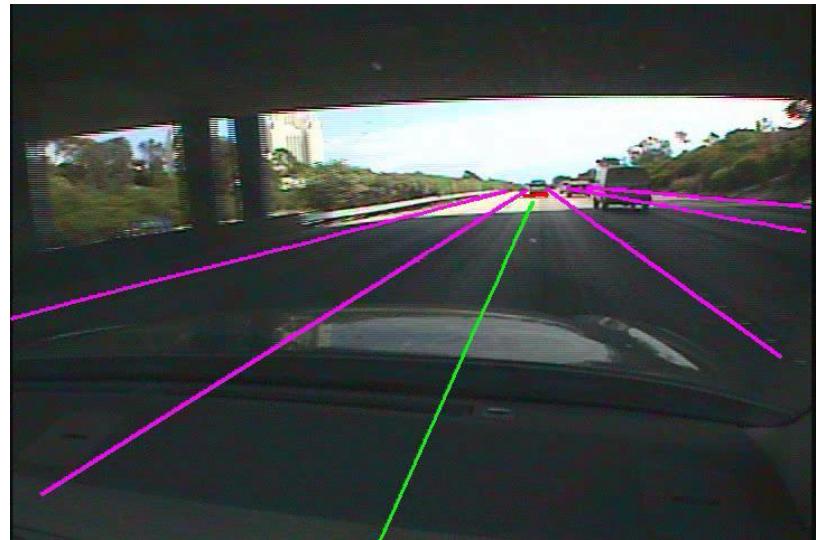
6 projecções



180 projecções

Exemplos





Transformada de Hough



Transformada de Hough

- ▶ Criado em 1972 foi criado como um método para detetar linhas e extensível a outras formas geométricas (círculos e elipses);
- ▶ Mais tarde em 1981 o método foi generalizado para detetar qualquer forma geométrica não analítica.
- ▶ Baseia-se num método de votação, após transformar a imagens para um novo domínio (domínio de parâmetros)

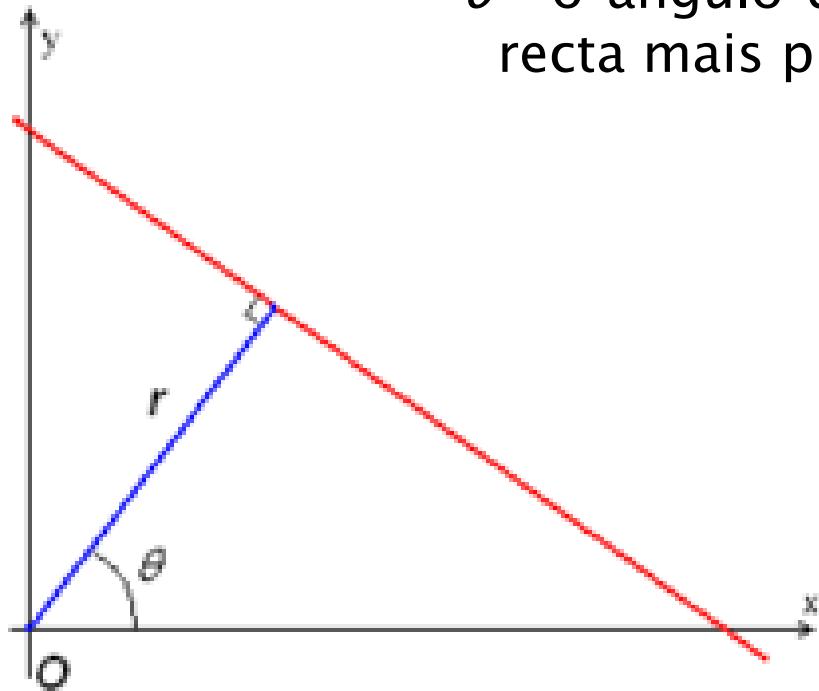
A equação de uma recta

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

Equação da recta usando por base r e θ

r - representa a distância da recta à origem

θ - o ângulo do vector que une a origem ao ponto da recta mais próximo da origem.



$$m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad b = \frac{r}{\sin \theta}$$

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)x + \frac{r}{\sin \theta}$$

$$y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}x + \frac{r}{\sin \theta}$$

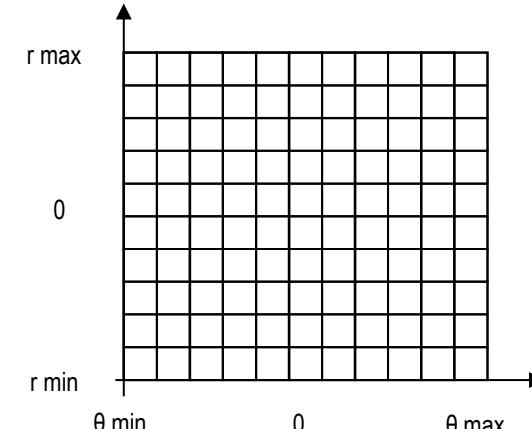
$$x \cos \theta + y \sin \theta = r$$

Determinação de linhas – transformada de Hough

- ▶ A transformada de Hough faz uma transformação do espaço (x, y) para o espaço de parâmetros (r, θ) que é dividido em “células de acumulação”.
- ▶ Para a transformação é utilizada a representação normal de uma recta:

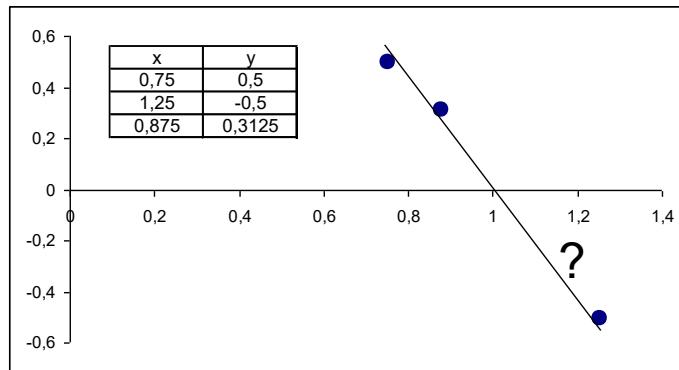
$$x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta = r$$

- ▶ Método: Para cada ponto (x, y) a interpolar, variar θ entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ e teremos uma sucessão de valores de r que darão um “voto” às células respectivas.

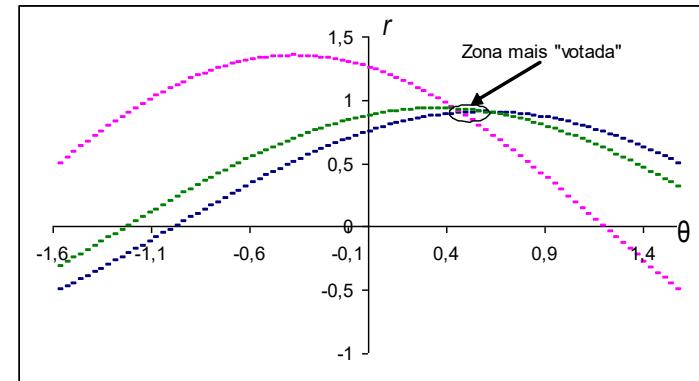


Transformada de Hough – exemplo para uma recta

- ▶ Suponha que pretende a recta que passa aproximadamente pelos pontos:



- ▶ A transformada de Hough variando θ dará:



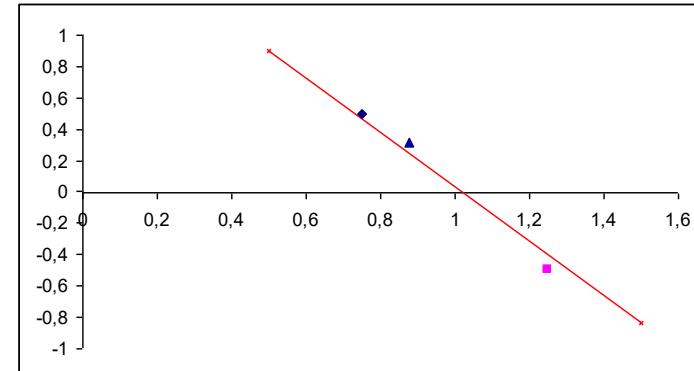
- ▶ Da zona mais votada podemos tirar:

θ	r
0,52	0,88

- ▶ O que nos leva à equação da recta:

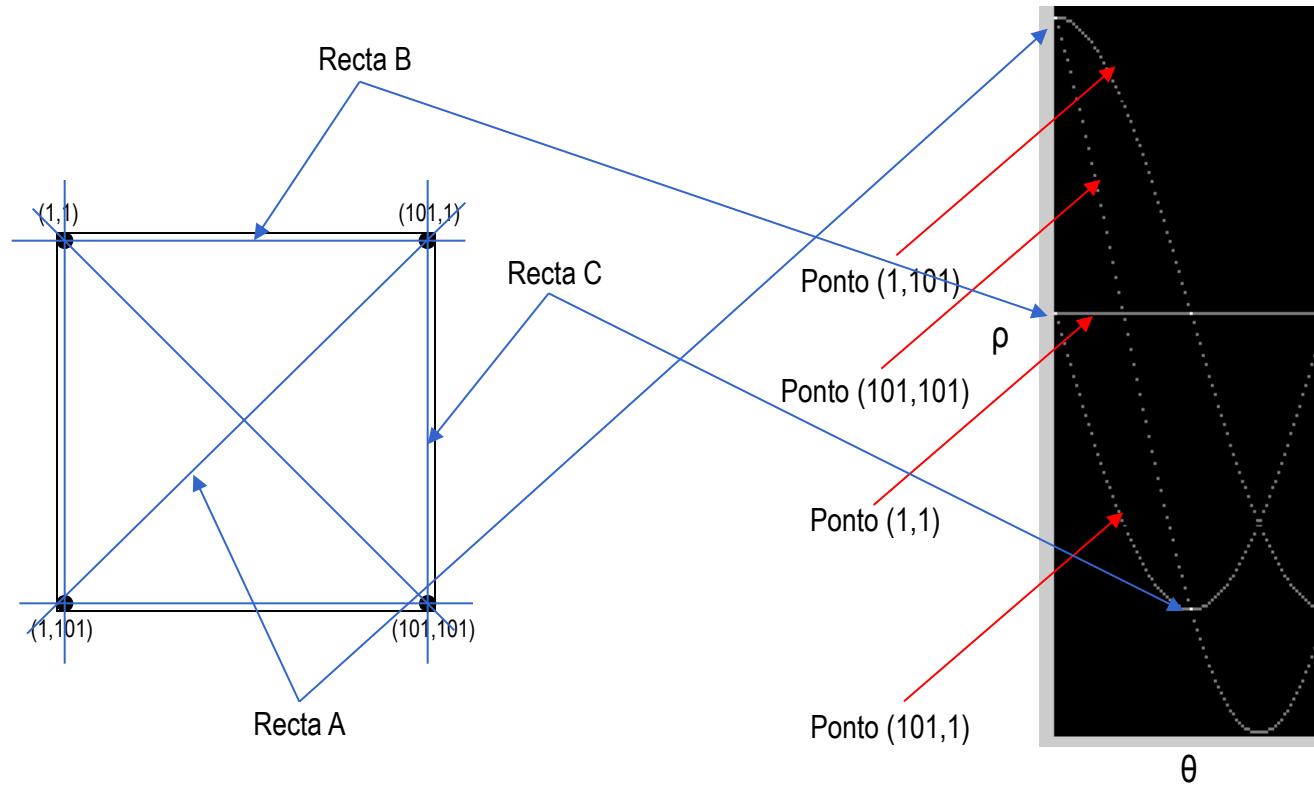
m	b
-1,732051	1,764049

- ▶ Que corresponde à recta:

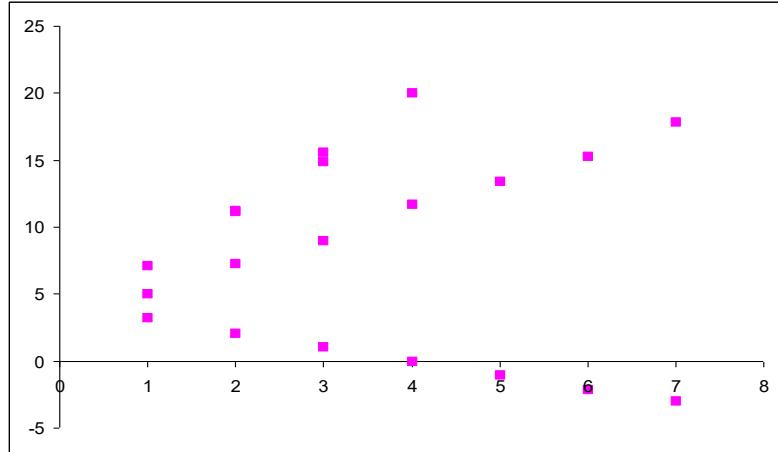


Transformada de Hough – outro exemplo

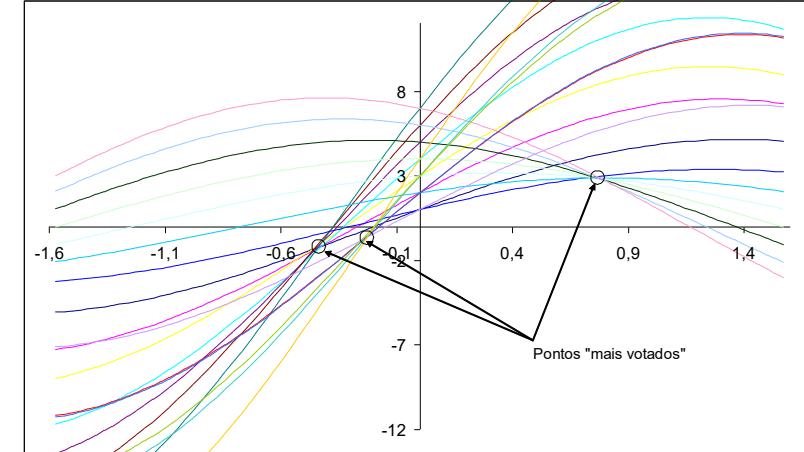
► Imagem:



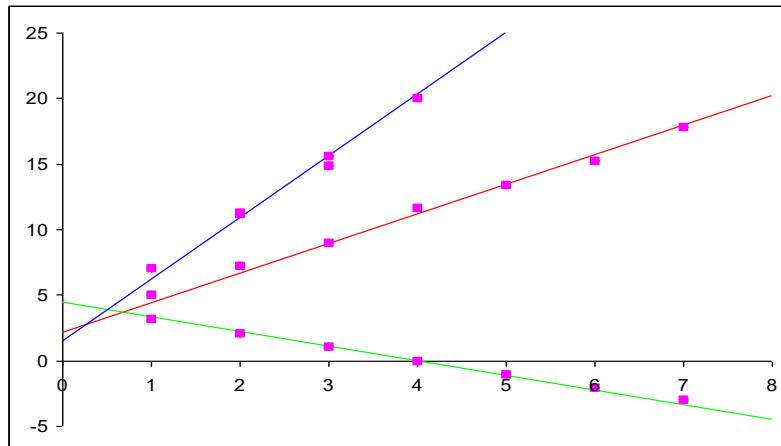
Transformada de Hough – exemplo para três rectas



Pontos que definem as rectas



Transformada de Hough correspondente



Rectas resultantes

Aplicações da transformada de Hough

- ▶ Determinação da linha de fronteira entre dois tons de cinzento numa imagem com ruído

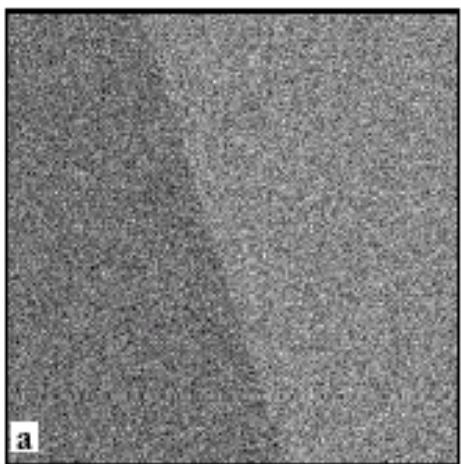


Imagen original com
ruído

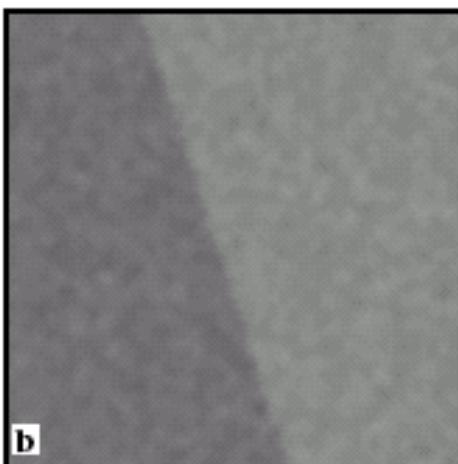
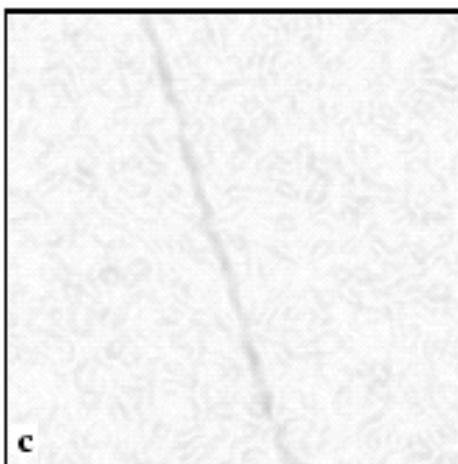
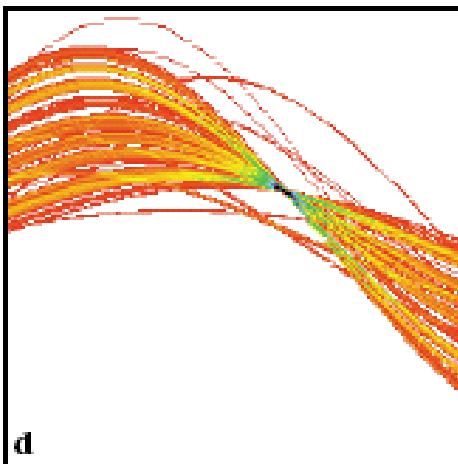


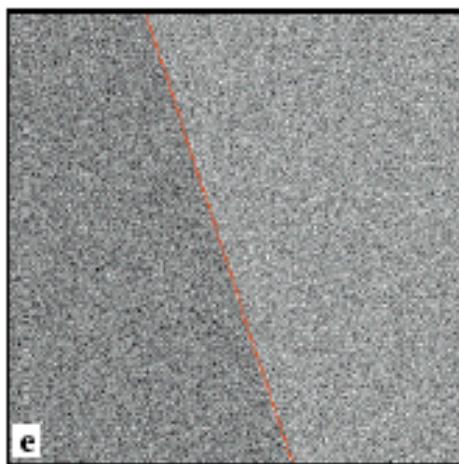
Imagen filtrada para
redução do ruído



Depois de aplicado um
filtro de Sobel



Transformada de Hough
(cor indica intensidade)



Linha definida pelo máximo
na transformada de Hough

Aplicações da transformada de Hough

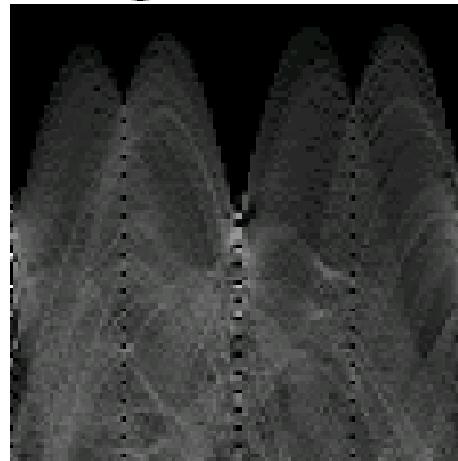
- ▶ Determinação da linhas principais numa imagem em tons de cinzento



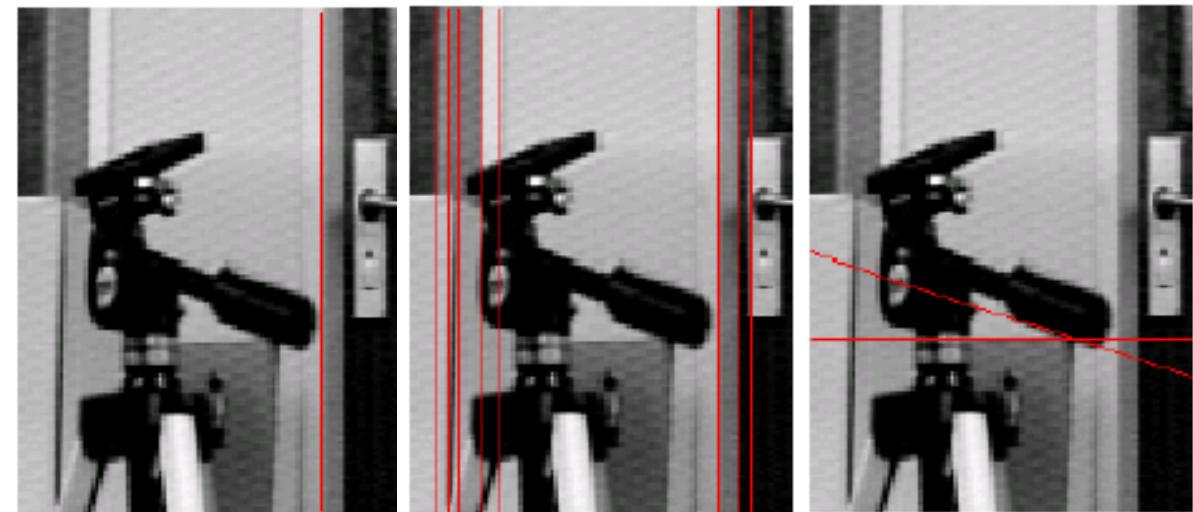
Imagen original



Arestas



Transformada de
Hough



Resultados 1
Maior reta

Resultados 2
maiores 8 retas

Resultados 3
*máiores retas na
horizontal*

Transformada de Hough Probabilística

- ▶ Método que visa reduzir o número de pontos a avaliar pela TH
- ▶ Diversas implementações:
 - Random sampling – Desvantagem saber a priori qual a percentagem de amostragem;
 - Adaptativa/Progressiva – processo the random sampling iterativo até atingir um número de contagens satisfatório;
 - Ganho depende do nível de threshold

Matas, J., C. Galambos, and J. Kittler. 2000. "Robust Detection of Lines Using the Progressive Probabilistic Hough Transform." *Computer Vision and Image Understanding* 78 (1). Academic Press: 119-37.
doi:10.1006/CVIU.1999.0831.

Voting Operations for HOUSE Image

l	Operations
SHT	3120
10^{-9}	1897
10^{-5}	1042

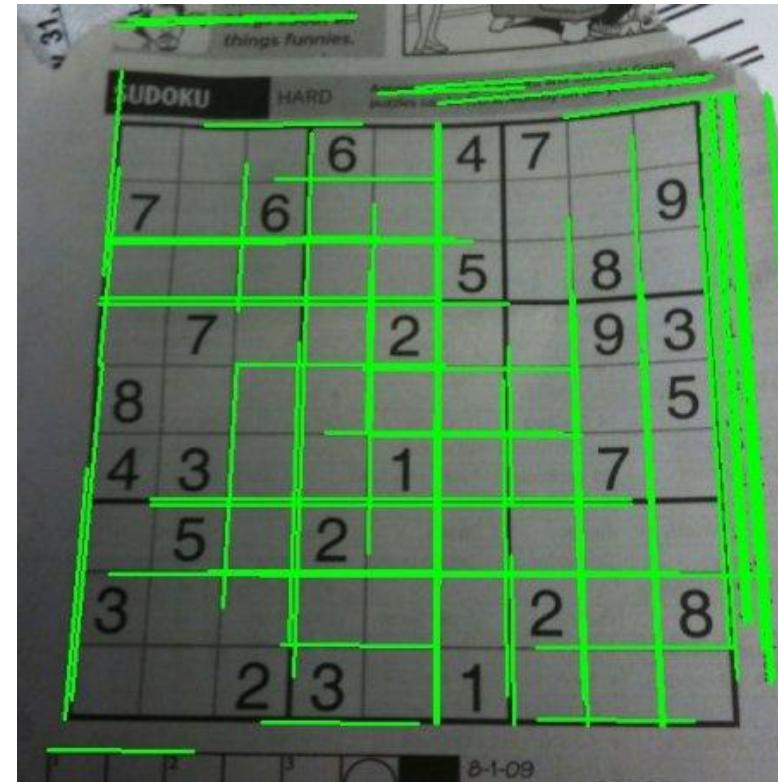
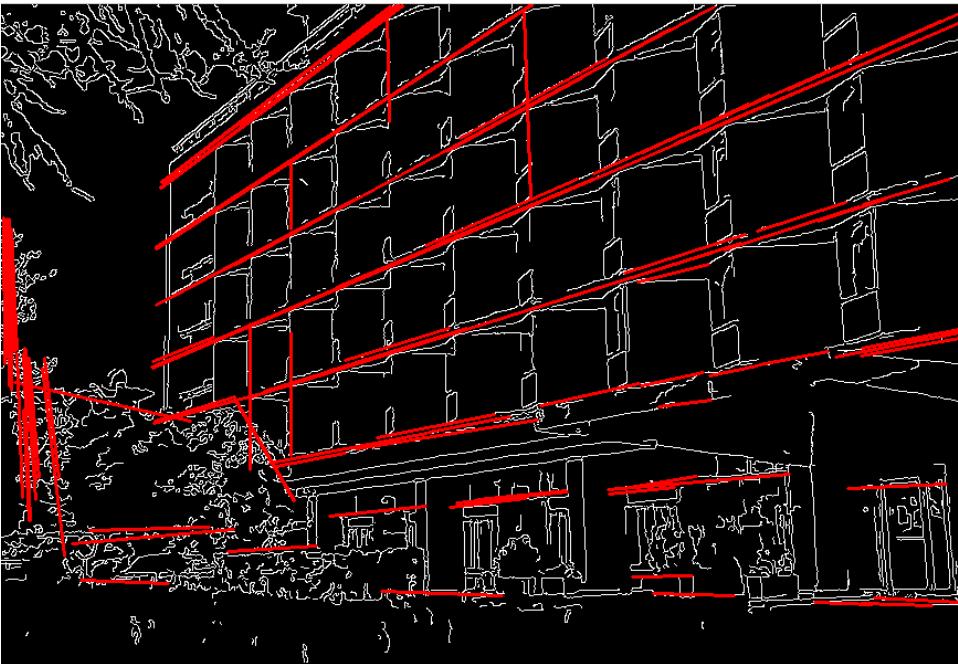
Segmentos de Recta por PPHT

Comece com uma imagem dos contornos

1. Se a imagem estiver vazia, então termine
2. Atualize o acumulador com um único pixel selecionado aleatoriamente da imagem dos contornos
3. Remova o pixel da imagem
4. Verifique se o pico mais alto no acumulador que foi modificado pelo novo pixel é maior que o limite Threshold. Se não, então vá para o ponto 1
5. Analise a linha especificada pelo pico no acumulador e localize o segmento mais longo de pixels que seja contínuo ou exibindo uma interrupção que não exceda um determinado limiar
6. Remova da imagem dos contornos os pixels do segmento de recta
7. Retire do acumulador todos os pixels da linha que votaram anteriormente
8. Se o segmento de recta for maior que o comprimento mínimo, adicione-o à lista de saída
9. Continue no ponto 1.

Transformada de Hough

Segmentos de Recta – exemplos



Outras formas geométricas

- Outras formas geométricas analíticas são possíveis:

⚠ Contudo, cuidado com o crescimento do espaço de parâmetros ⚠

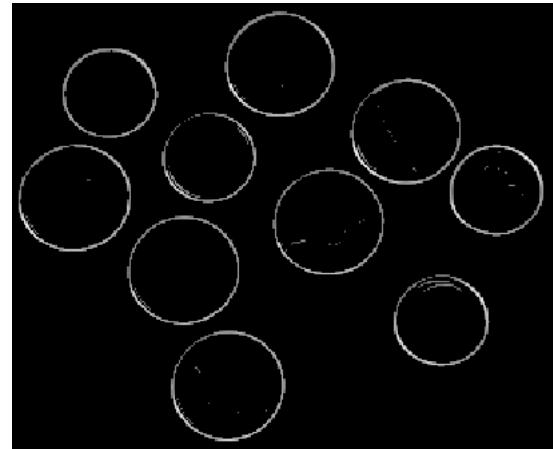
Círculos (espaço 3D (a,b,r))

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Ex: círculos



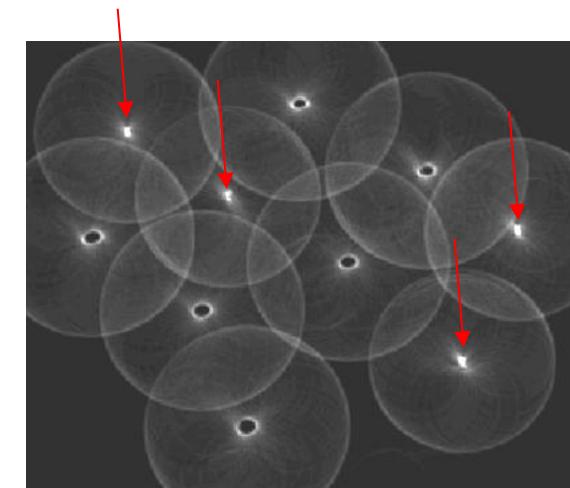
Original



Sobel

Elipses (a,b,r,w_a,w_b)

$$\frac{(x-a)^2}{w_a} + \frac{(y-b)^2}{w_b} = r^2$$



Plano de Hough círculos de
tamanho constante (raio = 25pixels)

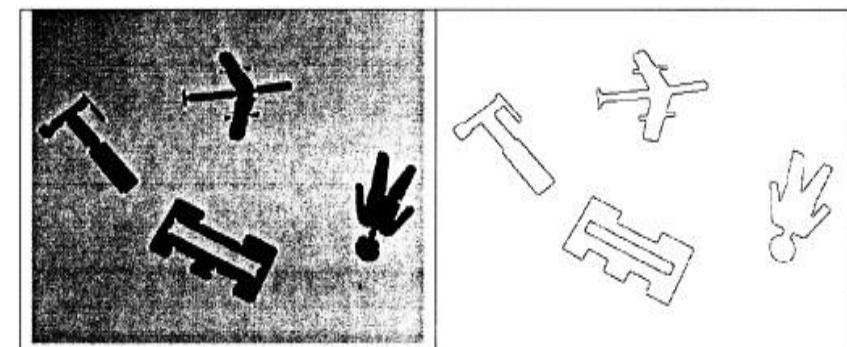
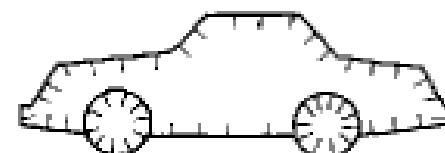
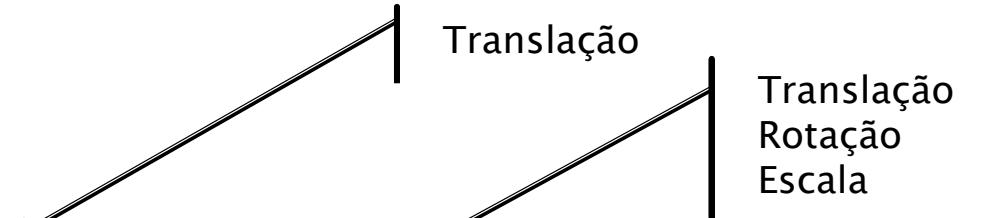


Seleção dos círculos
mais votados

Generalização

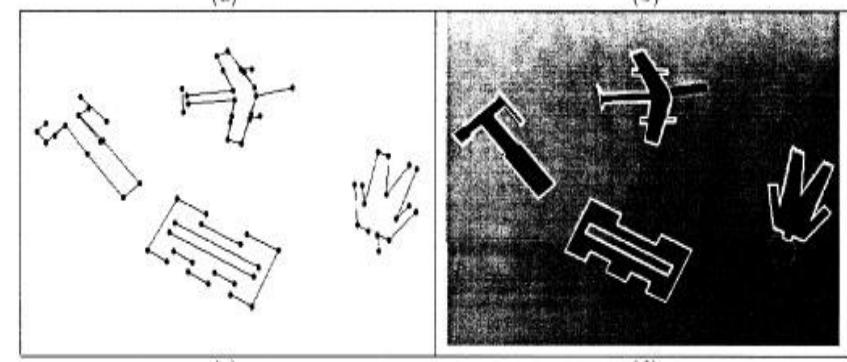
► Generalized Hough Transform, Ballard (1981) e Guil (1999)

- Para fazer reconhecimento de padrões (template matching)
- Permite encontrar instâncias de uma forma arbitrária não analítica numa imagem através do seu contorno
- Edge-based method
- É computacionalmente bastante intensivo e requer muito espaço de memória para armazenamento da informação.
- Disponível em OpenCV (Ballard e Guil)



(a)

(b)



(c)

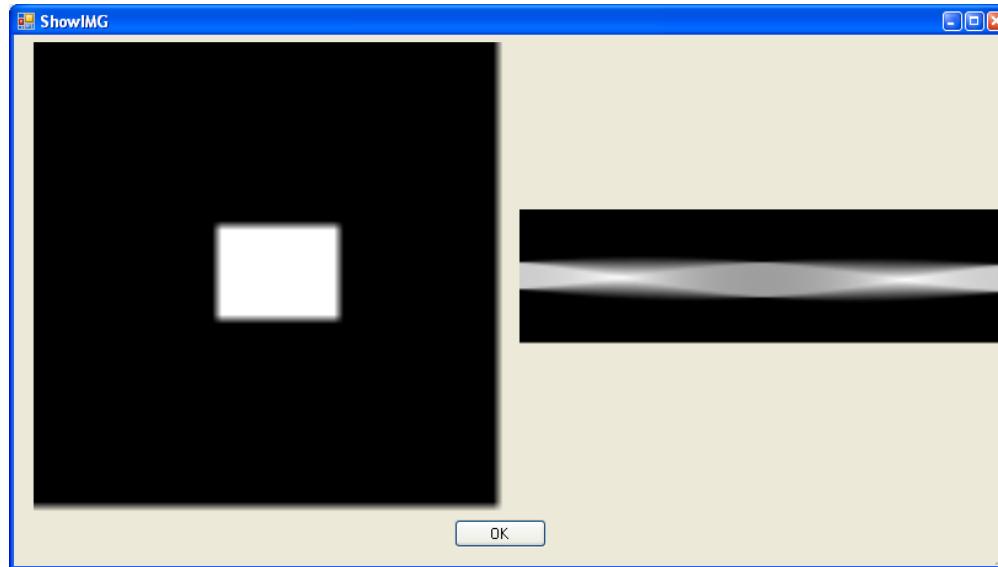
(d)

Exercise 4

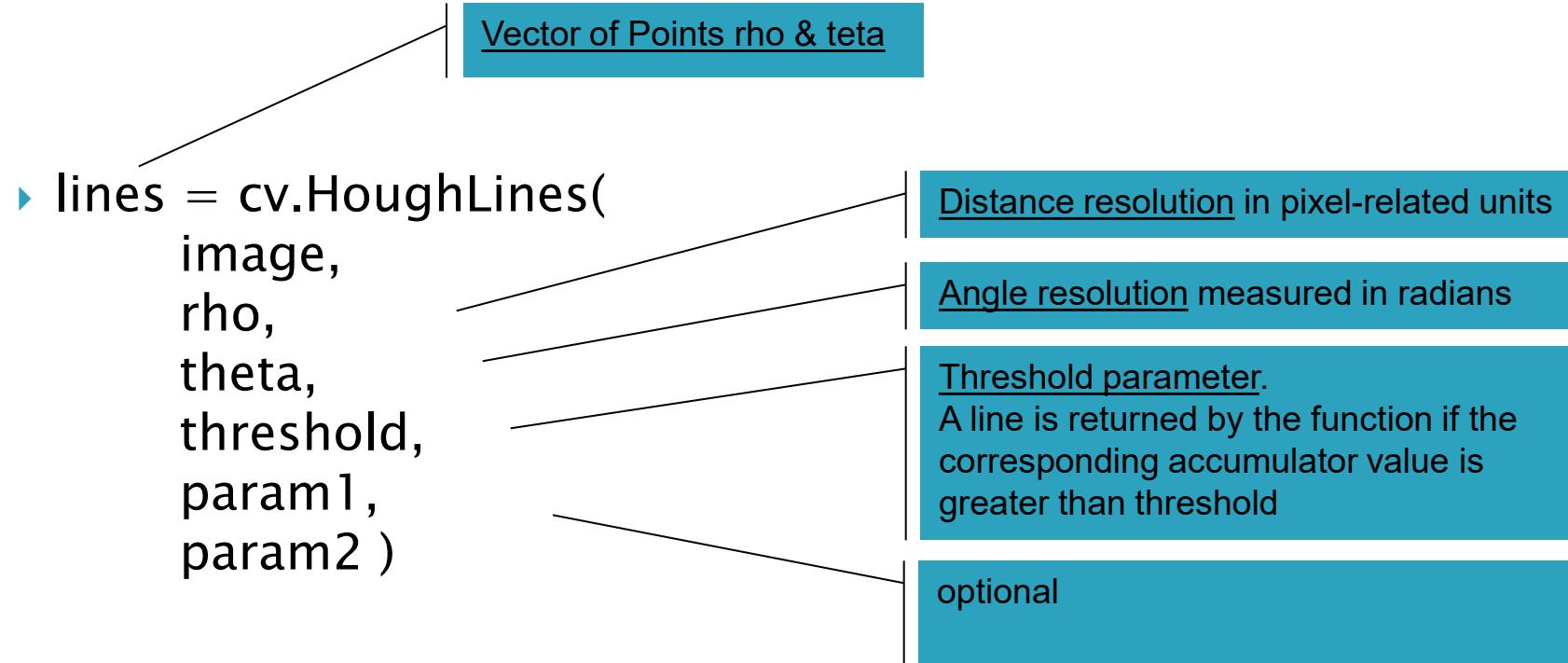
Hough Transform – Additional functions

Hough transform (HoughPlane)

- ▶ `HoughPlane(img, minAngle, maxAngle, angleSpacing)`
 - `img` – binary image
 - `[minAngle, maxAngle]` – usually `[0..180]`
 - `angleSpacing` – rotation angle (degrees)

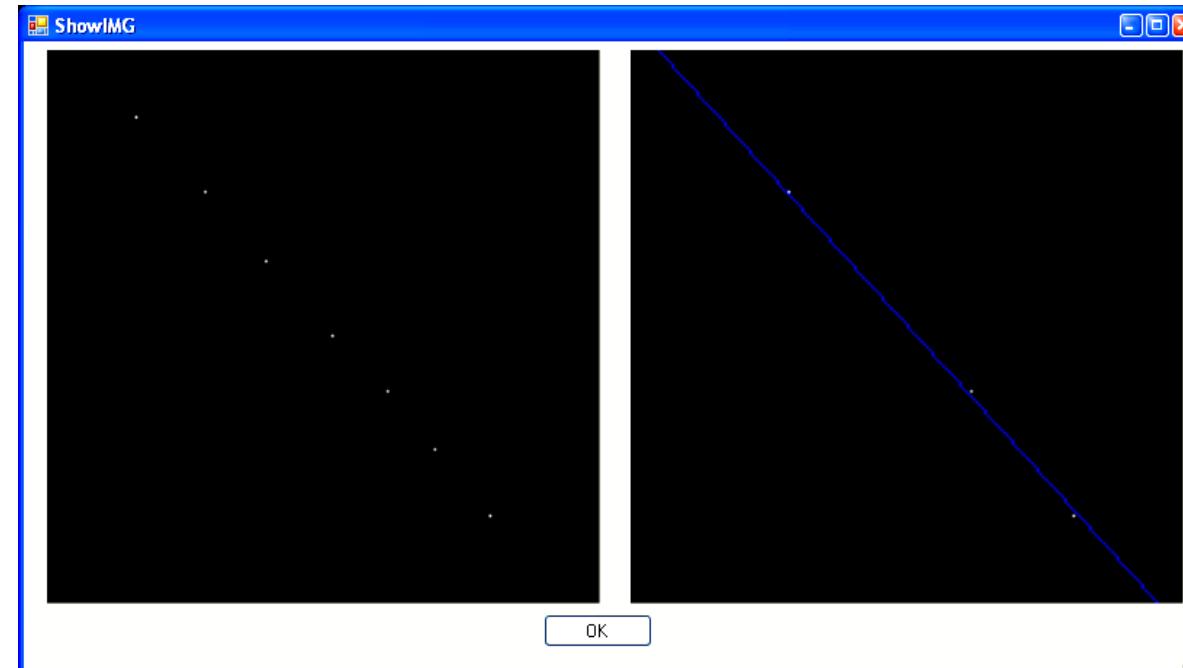
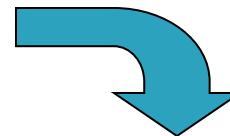
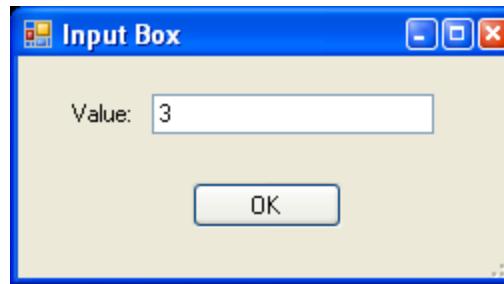


OpenCV Hough Transform (standard)

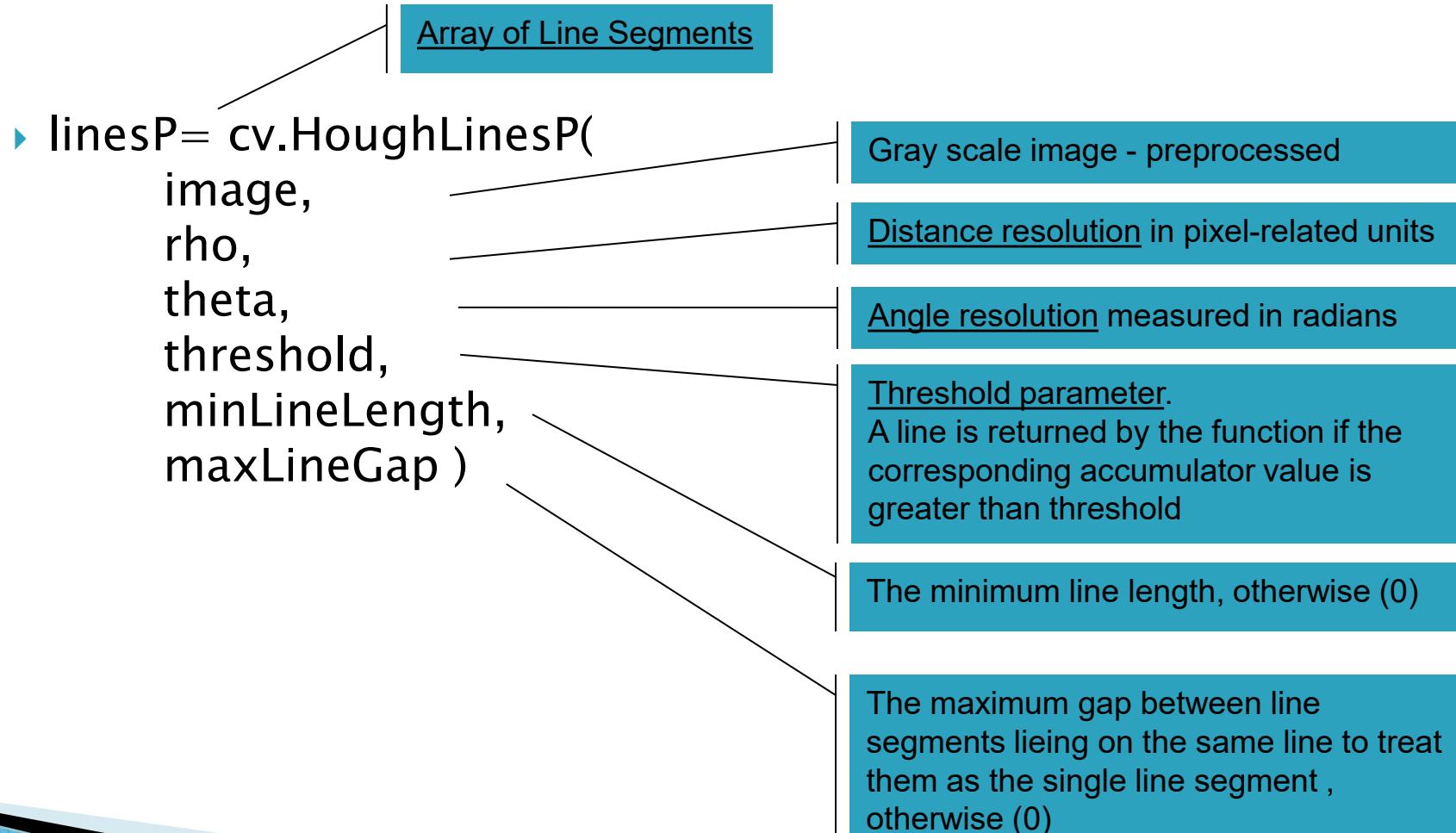


OpenCV Hough Transform

Threshold



OpenCV Hough Transform (Probabilistic – Line Segments)



OpenCV Hough Transform (Line Segments)

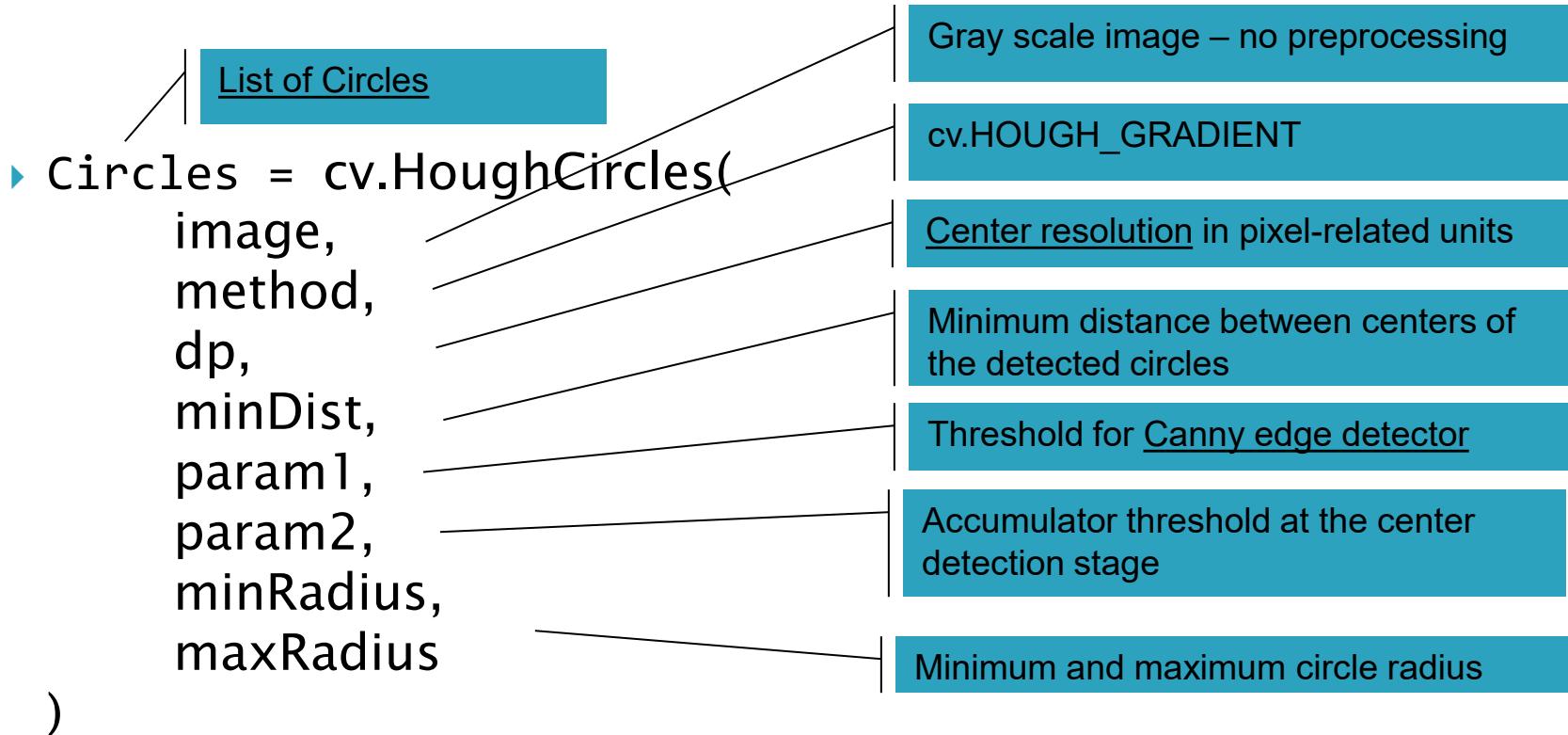
Img1



Img2



OpenCV Hough Transform (Circles)



OpenCV Hough Transform (Circles)



OpenCV Generalizer

- ▶ `cv.createGeneralizedHoughBallard()`
 - Translação
- ▶ `cv.createGeneralizedHoughGuil()`
 - Translação
 - Rotação
 - Escalamento