

GLACIETE JARDIM ZAGO
WALTER ANTONIO SCIANI

TRIGONOMETRIA



2^a EDIÇÃO



Estude use

QUEM SOMOS?

A Érica é uma editora especializada em publicações técnicas voltadas para leitores ávidos de informações atualizadas, completas, de fácil compreensão, e material dirigido a estudantes, autodidatas e profissionais de mercado.

Nossas publicações são produzidas por conhecidos e atuantes profissionais de mercado nacional e internacional, cobrindo diversos segmentos, tais como: Eletrônica, Computação, Linguagens, Negócios, Finanças, Marketing, Inglês, Multimídia, Turismo e outros, constituindo um caminho seguro e certo para os que desejam ampliar e solidificar sua base de conhecimentos, assim como para os iniciantes, aos quais dedicamos grande parte de nossas obras.

POR QUE SE CADASTRAR NA ÉRICA?

Estamos em contínuo aprimoramento, sempre com o objetivo de melhor servir nossos leitores, cuja opinião é muito importante para que possamos melhorar ainda mais nossos serviços, fornecendo sempre produtos modernos e de qualidade.

Ao preencher e remeter a ficha de cadastro constante no final deste livro, nossos leitores passarão a receber, de forma sistemática, não somente informações sobre nossos lançamentos, mas também sobre assuntos variados de interesse geral, escritos por alguns de nossos 500 autores.

PARTICIPE, não é necessário selar o cartão de resposta, basta preenchê-lo e depositá-lo em uma das inúmeras caixas de correio em todas as cidades brasileiras.

www.erica.com.br

**Visite nossa Home-Page e conheça
as nossas publicações técnicas e de
informática, infantis e educativas.**

**Em nosso site, você poderá retirar
arquivos disponíveis dos livros
adquiridos, verificar as erratas de
alguns livros, manter-se informado dos
títulos lançados semanalmente, enviar
suas dúvidas e sugestões, efetuar
compras e cadastrar-se.**

The screenshot shows the homepage of the Editora Érica website. At the top, there's a banner with the text "ou para produtos em CD-ROMs clique no ícone Érica" and the time "10:27:46". Below the banner is the Érica logo. To the right of the logo are links for "PRIMEROS", "ERICA DATA", and "ERICA NEWS". A message encourages users to click on the Érica icon to access the editor's page. Another link invites users to participate in the "Primeiro Encontro sobre Interdisciplinaridade". A sidebar on the left displays visitor statistics, showing "Você é o nosso visitante número 034501". On the right side, there's a large image of a book with the title "EDITORIA ÉRICA" and the subtitle "Promovendo o seu conhecimento". A sidebar on the right lists various services: "Deptº Vendas", "Download" (with a note about archive download), "Feiras" (with a note about Fair e Eventos), "Histórico", "Série" (with a note about Série com Projetos), and "Suporte". At the bottom of the page, there's a copyright notice: "Copyright © 1998, 1999 Editora Érica Ltda" and a link to "http://www.erica.com.br".

Cons

Direk

Direk

Direk

Cons

Coor

Diagr

Desen

Revis

Finali

Revis

**Glaciete Jardim Zago
Walter Antonio Sciani**

Trigonometria

Ano: 2002 2001 2000 1999

Edição: 8 7 6 5 4 3 2

Editora Érica Ltda.

Conselho Editorial:

Diretor Editorial: Antonio Marco Vicari Cipelli
Diretor Comercial: Paulo Roberto Alves
Diretor de Publicidade: Waldir João Sandrini
Conselho Editorial: Celso de Araujo, Eduardo Cesar Alves Cruz,
Glaciete Jardim Zago, Salomão Choueri Junior
e Walter Antonio Sciani

Consultor Técnico: Wagner Sciani
Coordenação: Rosana Arruda da Silva
Diagramação: Érica Regina Pagano, Graziela M.L.Gonçalves e
Rosana Ap. Alves Santos

Desenhos Técnicos: Pedro Paulo Vieira Herruzo
Revisão Interna: Érica Regina Pagano e Rosana Arruda da Silva
Finalização de Capa: Mauricio Scervianinas de França
Revisão Gramatical: Marlene Teresa Santin Alves



EDITORA AFILIADA

Copyright © 1997 da Editora Érica Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Zago, Glacierte Jardim

Trigonometria / Glacierte Jardim Zago, Walter Antonio Sciani. – São Paulo: Érica, 1997. – (Coleção Estudo e Use, Série Matemática).

Bibliografia.

ISBN 85-7194-403-2

1. Trigonometria. I. Sciani, Walter Antonio, 1956 –
II. Título. III. Série.

97-0713

CDD-516.24

Índices para catálogo sistemático:

1. Trigonometria 516.24

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS. Proibida a reprodução total ou parcial, por qualquer meio ou processo, especialmente por sistemas gráficos, microfílmicos, fotográficos, reprográficos, fonográficos, videográficos. Vedada a memorização e/ou a recuperação total ou parcial em qualquer sistema de processamento de dados e a inclusão de qualquer parte da obra em qualquer programa juscibernético. Essas proibições aplicam-se também às características gráficas da obra e à sua edição. A violação dos direitos autorais é punível como crime (art. 184 e parágrafos, do Código Penal, cf. Lei nº 6.895, de 17.12.80) com pena de prisão e multa, juntamente com busca e apreensão e indenizações diversas (artigos 122, 123, 124, 126, da Lei nº 5.988, de 14.12.73, Lei dos Direitos Autorais).



Editora Érica Ltda.

Rua Jarinu, 594 - Tatuapé - Cx. P. 14577

CEP: 03306-000 - São Paulo - SP

Fone: (011) 295-3066 - Fax: (011) 217-4060

Home-Page: www.erica.com.br

Dedicatória

Aos nossos pais:

Orlando e Victorino, que em vida souberam semear a vibração do saber que nos levou a esta obra.

Olga e Jandira com carinho.

Glaciete e Walter

Aos meus filhos **Alexandre e Ariadne** e ao meu marido **Carlos**, pela compreensão durante a elaboração deste trabalho.

Glaciete

À minha esposa **Maria Isabel** e ao meu filho **João Paulo**, com eterna gratidão.

Walter

Agradecimentos

Aos professores:

Cláudio Minoru Tamashiro

Hideo Nakayama

Issao Yamamoto

Marcelo Aoki

Nelson Kakuiti

Rubens Nista

Sheyla Villar Fredenhagem

Toru Ueno

Valdir Perruzzi

e

José Roberto Torelli, que sempre acreditaram em nosso trabalho.

Os autores

Objetivos

- 1.** Ensinar de um modo mais intuitivo e menos formal.
- 2.** Desenvolver as estruturas lógicas do pensamento.
- 3.** Aplicar o ensino matemático na resolução de problemas práticos.
- 4.** Colaborar com o desenvolvimento do raciocínio do aluno.
- 5.** Utilizar linguagem simples e direta na abordagem de cada assunto.
- 6.** Enfatizar o processo de construção de conceitos.

tores

Índice

Capítulo 1 - Trigonometria no Triângulo Retângulo	01
1.1 - Introdução	01
1.2 - Triângulos Retângulos.....	02
1.3 - Razões Trigonométricas	05
1.4 - Tabela de Razões Trigonométricas.....	13
Capítulo 2 - Medidas de Arcos e Ângulos	17
2.1 - Arcos e Ângulos	17
2.2 - Medidas de Arcos e Ângulos	18
2.3 - Ciclo Trigonométrico	25
2.4 - Arcos Congruos	27
2.5 - Menor Determinação Positiva	32
Capítulo 3 - Seno e Cosseno	37
3.1 - Seno e Cosseno de um Arco	37
3.2 - Valores Notáveis	39
3.3 - Pontos Extremos de Quadrantes	40
3.4 - Sinal do Seno e do Cosseno	41
3.5 - Relação Fundamental da Trigonometria	42
Capítulo 4 - Função Seno e Função Cosseno	51
4.1 - Função Seno.....	51
4.2 - Considerações da Função Seno.....	53
4.3 - Função Cosseno	56
4.4 - Considerações da Função Cosseno.....	58

Capítulo 5 - Tangente e Cotangente	67
5.1 - Tangente de um Arco	67
5.2 - Cotangente de um Arco	68
5.3 - Pontos Extremos de Quadrantes	69
5.4 - Valores Notáveis	71
Capítulo 6 - Funções Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante	75
6.1 - Função Tangente	75
6.2 - Considerações sobre a Função Tangente	77
6.3 - Função Cotangente.....	79
6.4 - Considerações sobre a Função Cotangente	80
6.5 - Função Secante e Função Cossecante	81
Capítulo 7 - Relações Trigonométricas.....	85
7.1 - Relações Principais	85
7.2 - Relações Decorrentes	86
Capítulo 8 - Redução e Identidades	93
8.1 - Redução ao Primeiro Quadrante.....	93
8.2 - Seno e Cosseno de Arcos Complementares	96
8.3 - Identidades	99
Capítulo 9 - Transformações	105
9.1 - Seno e Cosseno da Soma	105
9.2 - Tangente da Soma.....	107
9.3 - Seno, Cosseno e Tangente da Diferença.....	109
9.4 - Multiplicação de Arcos	111
9.5 - Transformação em Produto	114

..67	Capítulo 10 - Equações Trigonométricas	121
..67	10.1 - Equações Redutíveis a uma Equação do 2º Grau	121
..68	10.2 - Equações Fatoráveis	125
..69		
..71	Capítulo 11 - Funções Trigonométricas Inversas	129
..75	11.1 - Função Arco Seno	130
..75	11.2 - Função Arco Cosseno	133
..75	11.3 - Função Arco Tangente.....	134
..77		
..79	Capítulo 12 - Triângulos Quaisquer	139
..80	12.1 - Lei dos Senos.....	139
..81	12.2 - Lei dos Cossenos	142
..85	Respostas	149
..85		
..86		
..93		
..93		
..96		
..99		
..05		
..05		
..07		
..09		
..11		
..14		

- 1.1 - Introdução
- 1.2 - Triângulos Retângulos
- 1.3 - Razões Trigonométricas
- 1.4 - Tabela de Razões Trigonométricas

Capítulo 1

Trigonometria no Triângulo Retângulo

1.1

Introdução

A Trigonometria tem suas raízes na Astronomia.

Hiparco de Nicéia (109 a.C. - 125 a.C.), astrônomo grego, é considerado o “Pai da Trigonometria”. Atribui-se a ele a construção de tabelas cujos valores relacionam arcos e comprimentos das cordas determinadas por esses arcos. As obras de Hiparco só foram conhecidas por meio dos trabalhos de **Cláudio Ptolomeu** (125 a.C.), o mais célebre astrônomo da Antiguidade.

Baseado nos trabalhos de Hiparco, Ptolomeu apresenta uma obra clássica de astronomia até a época de Copérnico, chamada “*Sintaxe do Mundo*”.

Nesse livro, Ptolomeu mostra as leis que justificam os movimentos dos corpos celestes e um verdadeiro tratado de Trigonometria Retilínea e Esférica.

A Sintaxe Matemática foi traduzida para o árabe como “*Almagesto*” que significa “Muito Grande”.

Foi com o matemático persa **Nasir Eddir** (1201 - 1274) que a Trigonometria passa a ser tratada como parte da Matemática, desvinculando-se da Astronomia. Já aparecem, nos trabalhos de Nasir, as seis funções trigonométricas e algumas técnicas para resolver problemas com triângulos.

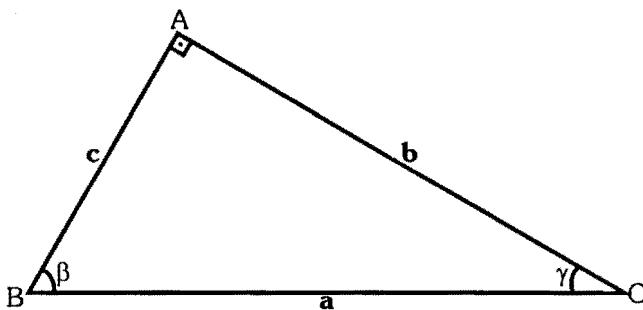
Muitos nomes contribuíram para o desenvolvimento da Trigonometria tais como: **Purback** (1423 - 1463), **Regiomontanus** (1436 - 1476), **Joachim Retico** (1514 - 1575), **François Viète** (1540 - 1603) e **Bartholomeus Petiscus** (1561 - 1613) a quem devemos a palavra Trigonometria que significa “**medida dos ângulos de um triângulo**”.

1.2

Triângulos Retângulos

Por simplicidade de linguagem, não distinguiremos **ângulo** (figura geométrica) de sua **medida** (valor numérico) e **segmento** (figura geométrica) da sua **medida** (valor numérico).

O triângulo ABC é retângulo em A.



Temos:

- a: chama-se **hipotenusa** (lado oposto ao ângulo reto).
- b e c: chamam-se **catetos** (lados que formam o ângulo reto), b é o **cateto oposto** ao ângulo β ou cateto adjacente ao ângulo γ e c é o **cateto oposto** ao ângulo γ ou cateto adjacente ao ângulo β .
- β e γ são ângulos complementares, isto é:

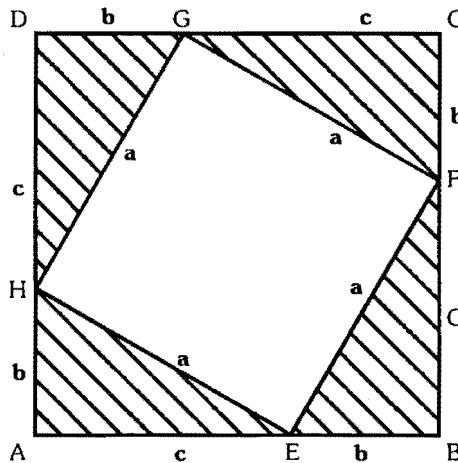
$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

Teorema de Pitágoras (580 a 510 a.C.)

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração

Consideremos os quadrados ABCD de lado $b + c$ e EFGH de lado a , como mostra a seguinte figura:



$$\text{Área do quadrado maior } ABCD: \quad A_Q = (b + c)^2$$

$$\text{Área do quadrado menor } EFGH: \quad A_q = a^2$$

$$\text{Área de um triângulo:} \quad A_T = \frac{1}{2}bc$$

A área do quadrado maior ABCD é igual à soma das áreas do quadrado menor EFGH, mais os quatros triângulos, isto é:

$$A_Q = A_q + 4 \cdot A_T$$

$$(b + c)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}bc$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

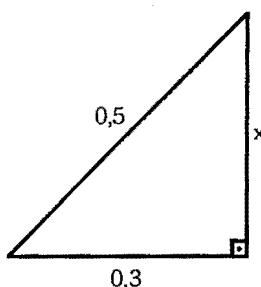
Então:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

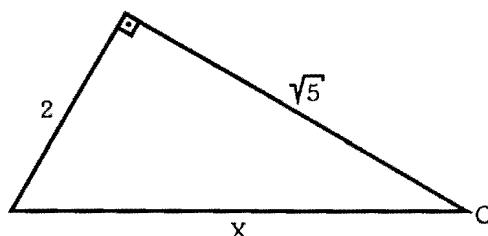
Exercícios

1. Calcule x em cada caso seguinte:

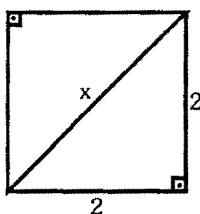
a)



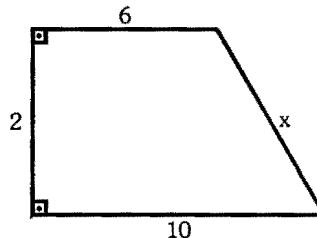
b)



c)



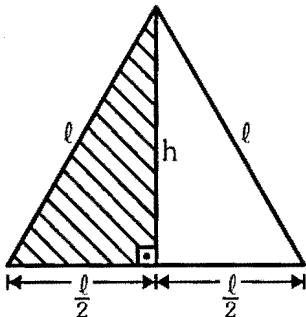
d)



2. Verifique se as medidas 7 , 8 e 9 são de um triângulo retângulo.

3. Deduzir a fórmula da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ .

Solução:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo hachurado, temos:

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow \ell^2 = \frac{\ell^2}{4} + h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow$$

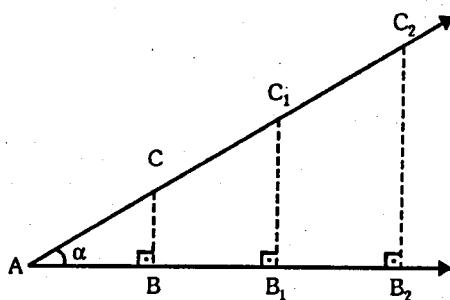
$$\Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

4. Deduzir a fórmula da diagonal de um quadrado de lado ℓ .
5. O perímetro de um losango mede 20 cm e uma das diagonais mede 8cm. Determine quanto mede a outra diagonal.

1.3

Razões Trigonométricas

Sobre o lado \overrightarrow{AB} do ângulo agudo α , marquemos arbitrariamente os pontos B, B_1, B_2, \dots e tracemos por esses pontos perpendiculares ao lado \overrightarrow{AB} que encontram o lado \overrightarrow{AC} nos pontos C, C_1, C_2, \dots



Teremos, assim, os triângulos $ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, \dots$ semelhantes entre si. Então vamos escrever as seguintes proporções:

$$1^{\text{a)}) \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \dots = k_1 \text{ (constante)}$$

A constante k_1 assim obtida, chama-se **seno do ângulo agudo α** , e indicamos **sen α** .

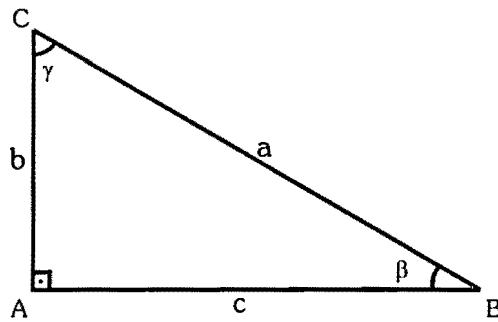
$$2^{\text{a)}) \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \dots = k_2 \text{ (constante)}$$

A constante k_2 assim obtida, chama-se **coseno do ângulo agudo α** , e indicamos **cos α** .

$$3^{\text{a})} \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \dots = k_3 \text{ (constante)}$$

A constante k_3 assim obtida, chama-se **tangente do ângulo agudo α** , e indicamos **$\operatorname{tg} \alpha$** .

Assim, considerando o triângulo retângulo ABC da figura, temos as seguintes conclusões:



Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

$$\cos \beta = \frac{\text{cateto adjacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta} = \frac{b}{c}$$

Temos também:

$$\sin \gamma = \frac{\text{cateto oposto a } \gamma}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \gamma = \frac{\text{cateto adjacente a } \gamma}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\text{cateto oposto a } \gamma}{\text{cateto adjacente a } \gamma} = \frac{c}{b}$$

Note que:

$$1^{\text{o}}) \sin \beta = \cos \gamma \quad \text{e} \quad \cos \beta = \sin \gamma$$

$$\text{Como } \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ - \beta$$

Isto equivale a dizer que o seno de β é igual ao cosseno do seu complementar, e o cosseno de β é igual ao seno do seu complementar, isto é:

$$\boxed{\sin \beta = \cos (90^\circ - \beta)}$$

e

$$\boxed{\cos \beta = \sin (90^\circ - \beta)}$$

Exemplos:

$$\sin 30^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\cos 25^\circ = \sin (90^\circ - 25^\circ) = \sin 65^\circ$$

$$2^{\text{o}}) \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \beta, \text{ isto é:}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}$$

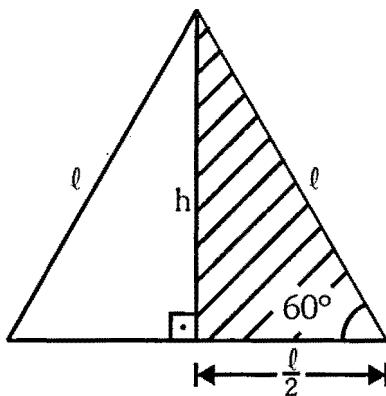
$$\text{De modo análogo: } \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}$$

Razões Trigonométricas de 60° , 30° e 45°

Vamos obter as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) dos ângulos de 60° , 30° e 45° , por serem usadas com freqüência.

1º) Ângulo de 60°

Consideremos um triângulo equilátero de lado ℓ .



$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\text{tg} 60^\circ = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\ell} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\text{tg} 60^\circ = \sqrt{3}}$$

2º) Ângulo de 30°

Como 30° e 60° são complementares, então:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

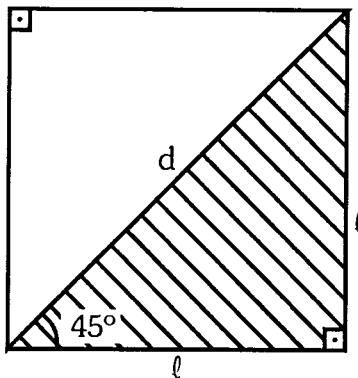
$$\boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

3º) Ângulo de 45°

Consideremos um quadrado de lado ℓ .



$$\sin 45^\circ = \frac{\ell}{d} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\ell}{d} = \sin 45^\circ \Rightarrow \boxed{\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

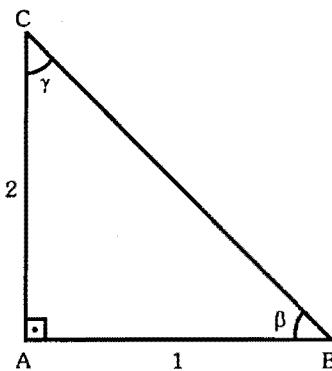
$$\tan 45^\circ = \frac{\ell}{\ell} = 1 \Rightarrow \boxed{\tan 45^\circ = 1}$$

Podemos resumir esses valores obtidos na seguinte tabela:

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios

6. No triângulo retângulo ABC, calcule:



- a) $\sin \beta$ b) $\cos \beta$
 c) $\tan \beta$ d) $\sin \gamma$
 e) $\cos \gamma$ f) $\tan \gamma$

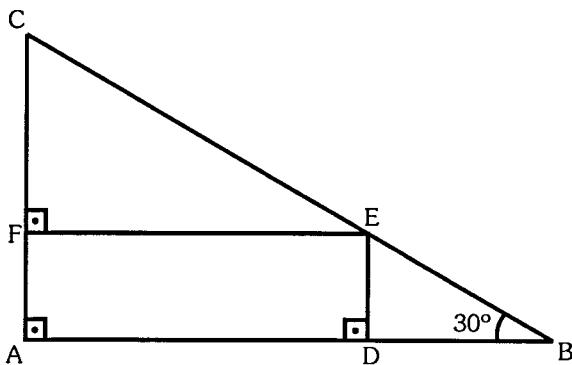
7. Calcule o seno, o cosseno e a tangente do menor ângulo agudo de um triângulo retângulo cujos catetos medem 12cm e 5cm.
8. Um terreno possui forma triangular, em que o lado maior mede 100m, o maior ângulo entre os lados é 90° e um dos outros dois ângulos é metade do outro. Calcule o lado menor desse triângulo.
9. Um poste na posição vertical, colocado num plano horizontal, encontra-se a 3 metros de uma parede plana e vertical. Nesse instante, o Sol projeta a sombra do poste na parede. Essa sombra tem 17 metros. Se a altura do poste é 20 metros, calcule a inclinação dos raios solares em relação ao plano horizontal.

10. Um arame de 18 metros de comprimento é esticado do nível do solo (suposto horizontal) ao topo de um poste vertical. Sabendo-se que o ângulo formado pelo arame com o solo é de 30° , calcule a altura do poste.

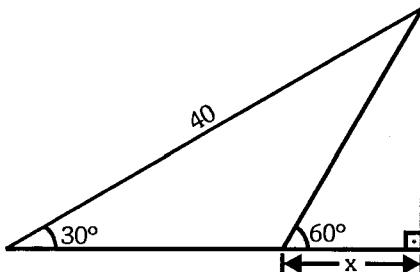
11. Um triângulo retângulo tem a hipotenusa e um dos catetos medindo, respectivamente, $2\sqrt{3}$ cm e 3cm. Determine a medida do ângulo oposto ao cateto dado.

12. Uma pessoa na margem de um rio vê, sob um ângulo de 60° , uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta 40m, esse ângulo é de 30° . Calcule a largura do rio.

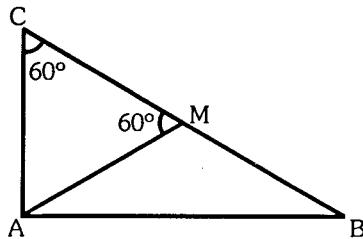
13. No triângulo ABC, têm-se $BC = 20\text{m}$ e $CF = 6,5\text{m}$. Determine AF e EB.



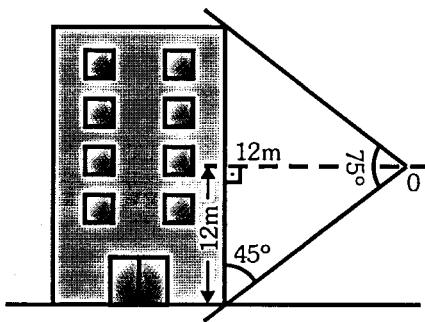
14. Determine o valor x na figura.



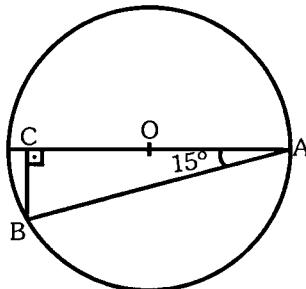
15. Na figura abaixo, \overline{BA} é perpendicular a \overline{CA} , $MB = MC$ e $AB = 12\text{cm}$. Calcule a medida de \overline{AM} .



16. Um observador, no ponto O da figura abaixo, vê um prédio segundo um ângulo de 75° . Se esse observador está situado a uma distância de 12m do prédio e a 12m de altura do plano horizontal, calcule a altura do prédio.



17. Sendo O o centro da circunferência de raio unitário, calcule a medida de \overline{BC} .



1.4

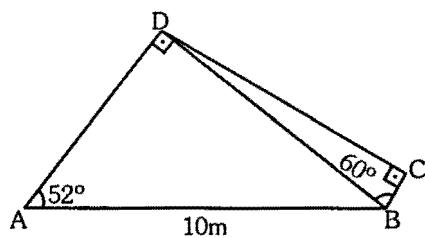
Tabela de Razões Trigonométricas

O seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo podem ser obtidos na seguinte tabela:

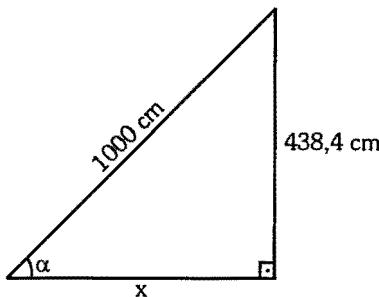
Ângulo	sen	cos	tg	Ângulo	sen	cos	tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

Exercícios

18. Um foguete é lançado sob um ângulo de 84° com o plano horizontal. Sabendo que sua trajetória é uma reta, quando o foguete percorreu 1000 metros, qual foi a altura atingida?
19. Calcule o perímetro do quadrilátero ABCD.



20. Na figura, calcule α e x.



ontal.
correu



Pense e Faça

F₁: Data Misteriosa

O ano da invenção da imprensa por Guttenberg tem quatro algarismos. O algarismo das dezenas é metade do das unidades; o dos milhares é igual ao excesso do das centenas sobre o das dezenas; a soma dos quatro algarismos é 14, e, aumentando o número de 4905, obtém-se o número escrito na ordem inversa. Ache essa data.



Pense e Faça

F₂: Fumantes Poluidores

A porcentagem de fumantes de uma cidade é 32%. Se três em cada onze fumantes deixarem de fumar, o número de fumantes ficará reduzido a 12 800.

Calcule:

- O número de fumantes da cidade.
- O número de habitantes da cidade.

- 2.1 - Arcos e Ângulos
- 2.2 - Medidas de Arcos e Ângulos
- 2.3 - Ciclo Trigonométrico
- 2.4 - Arcos Côngruos
- 2.5 - Menor Determinação Positiva

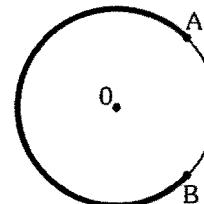
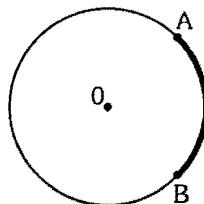
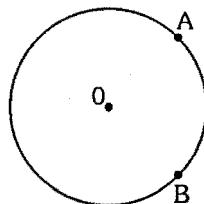
Capítulo 2

Medidas de Arcos e Ângulos

2.1

Arcos e Ângulos

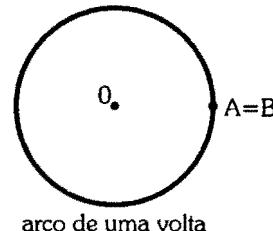
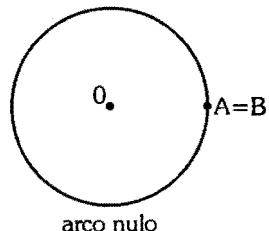
Dois pontos A e B de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas arcos de circunferência ou simplesmente arcos.



Os pontos A e B chamam-se **extremidades** desses arcos. Indica-se o arco de extremidade A e B por \widehat{AB} ou \widehat{BA} .

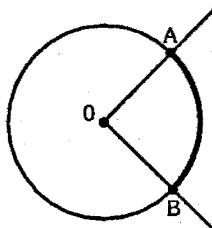
Se os pontos A e B coincidem, temos dois arcos:

- **arco nulo** (um ponto).
- **arco de uma volta** (a circunferência).



Ângulo Associado a um Arco

A todo arco \widehat{AB} de uma circunferência podemos associar um ângulo central (ângulo que possui o vértice no centro da circunferência) cujos lados contêm os pontos A e B, e vice-versa.



$A\hat{O}B$ é o ângulo central associado ao arco \widehat{AB} .

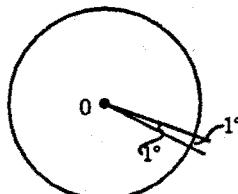
Podemos, então, associar a cada arco unitário um ângulo central e, considerando tal ângulo como unitário, podemos dizer que são iguais as medidas do arco e do ângulo central que o determinam.

2.2

Medidas de Arcos e Ângulos

Para medir arcos e ângulos, usaremos duas unidades de medida: **grau e radiano**.

Grau é a medida do arco, cujo comprimento é igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém esse arco.



Subdivisões do Grau

Minuto (''): é o arco que corresponde a $\frac{1}{60}$ do grau.

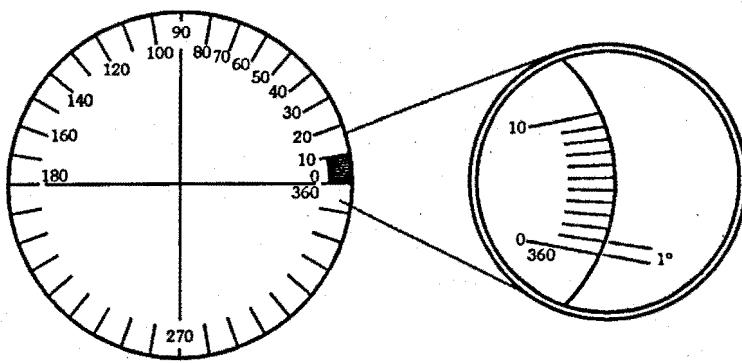
$$1' = \frac{1}{60} 1^\circ \Rightarrow 1^\circ = 60'$$

Segundo ("'): é o arco que corresponde a $\frac{1}{60}$ do minuto.

$$1'' = \frac{1}{60} 1' \Rightarrow 1' = 60''$$

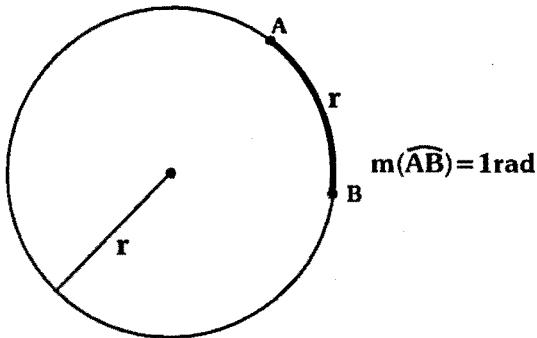
Temos, então:

$$1^\circ = 60' = 3600''$$



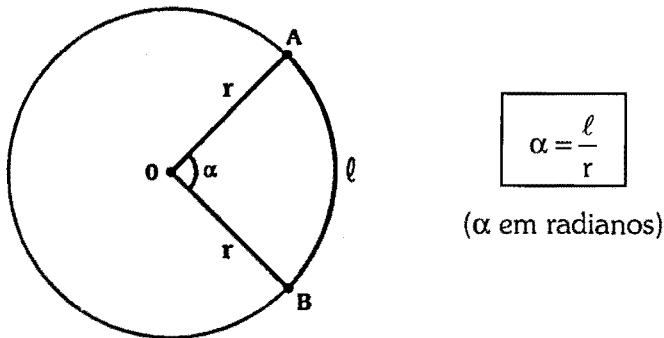
RADIANO

É a medida do arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém esse arco.



Medida de um Arco em Radianos

A medida α de um arco \widehat{AB} de comprimento ℓ , em radianos é o número que indica quantas vezes um arco de comprimento igual ao raio está contido no arco a ser medido.



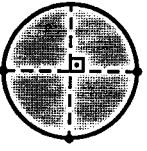
Lembrando que o comprimento de uma circunferência é $2\pi r$, a medida da circunferência (arco de uma volta) é:

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{rad}$$

Assim:

$$360^\circ = 2\pi \text{rad}$$

A tabela seguinte mostra os arcos obtidos pela divisão da circunferência em quatro partes iguais:

Grau($^{\circ}$)	Radiano(rad)
	90°
	180°
	270°
	360°

Exercícios

21. Converta 120° em radianos.

Solução:

Podemos fazer a seguinte regra de três:

$$180^{\circ} \text{ ——— } \pi \text{ rad}$$

$$120^{\circ} \text{ ——— } x$$

então:

$$\frac{x}{\pi} = \frac{120}{180} \Rightarrow x = \frac{120 \cdot \pi}{180} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

22. Converta $\frac{7\pi}{6}$ rad em graus.

Solução:

Como $\pi \text{rad} = 180^\circ$, então:

$$\frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{7}{6} \cdot 180^\circ = 210^\circ$$

23. Converta em radianos:

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| a) 15° | b) 30° | c) 36° |
| d) 45° | e) 50° | f) 60° |
| g) 75° | h) 135° | i) 150° |
| j) 160° | k) 225° | l) 300° |

24. Converta em graus:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\frac{\pi}{15}$ rad | b) $\frac{\pi}{30}$ rad | c) $\frac{\pi}{9}$ rad |
| d) $\frac{5\pi}{18}$ rad | e) $\frac{4\pi}{3}$ rad | f) $\frac{11\pi}{6}$ rad |
| g) $\frac{8\pi}{9}$ rad | h) $\frac{7\pi}{12}$ rad | i) $\frac{7\pi}{4}$ rad |
| j) $\frac{16\pi}{9}$ rad | k) $\frac{10\pi}{9}$ rad | l) $\frac{5\pi}{3}$ rad |

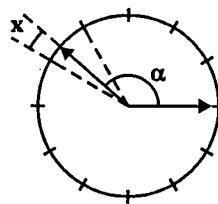
25. Quantos minutos possui um arco de:

- | | | |
|---------------|-------------------|-------------------|
| a) 45° | b) $25^\circ 18'$ | c) $38^\circ 49'$ |
|---------------|-------------------|-------------------|

26. Quantos segundos possui um arco de:

- | | | |
|--------------|-----------------|-----------------------|
| a) 3° | b) $2^\circ 7'$ | c) $1^\circ 58' 43''$ |
|--------------|-----------------|-----------------------|

- 27.** Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 10h15min.



Solução:

Em uma hora, o ponteiro das horas percorre um ângulo de 30° , isto é, $\frac{1}{12}$ de 360° , então:

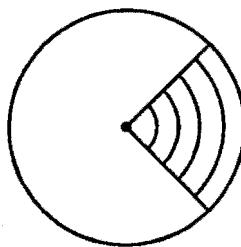
$$\begin{array}{rcl} 60 \text{ min} & \longrightarrow & 30^\circ \\ 15 \text{ min} & \longrightarrow & x \end{array} \Rightarrow \frac{x}{30} = \frac{15}{60} \Rightarrow x = 7^{\circ}30'$$

como $\alpha + x = 150^\circ$, temos:

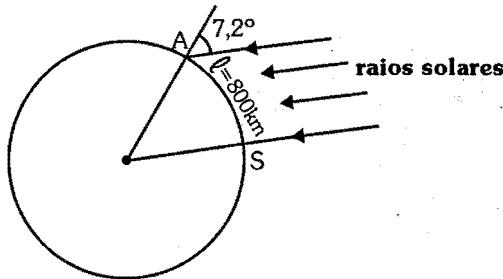
$$\alpha = 150^\circ - x$$

$$\alpha = 150^\circ - 7^{\circ}30' \Rightarrow \alpha = 142^{\circ}30'$$

- 28.** Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando marca:
- a)** 9h15min **b)** 12h15min **c)** 3h40min
- 29.** Determine o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio à 1h12min.
- 30.** É uma hora da tarde. Em que instante o ponteiro dos minutos coincidirá com o ponteiro das horas pela primeira vez?
- 31.** Na figura, têm-se cinco arcos de circunferências concêntricas e igualmente espaçados entre si. Sabendo-se que a soma dos comprimentos desses arcos é igual ao comprimento da circunferência maior, determine a medida do ângulo central comum a todas as circunferências.



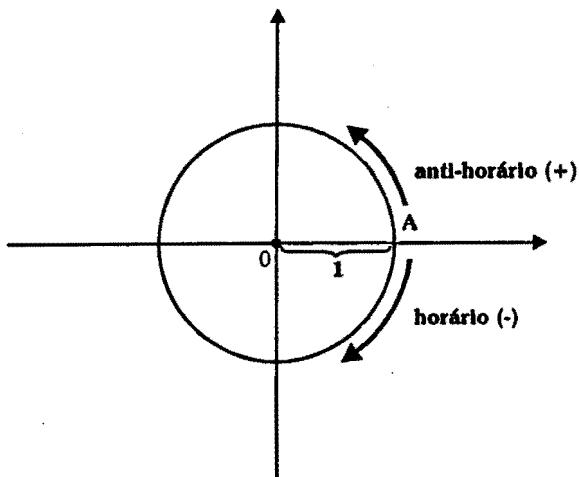
32. Dois ciclistas percorrem, no mesmo sentido, uma pista circular de 50 metros de diâmetro. A cada volta, o primeiro percorre 2,5 m a mais do que o segundo. Supondo que mantenham o mesmo ritmo, após quantas voltas o primeiro ciclista terá percorrido 1 radiano a mais do que o segundo?
33. Para calcular a circunferência terrestre, o sábio Eratóstenes valeu-se da distância conhecida de 800 km entre as localidades de Alexandria e Siena, no Egito (A e S respectivamente), situadas no mesmo meridiano terrestre. Ele sabia que quando em Siena os raios solares caíam verticalmente, em Alexandria eles faziam um ângulo de $7,2^\circ$ com a vertical. Calcule, com esses dados, a circunferência terrestre, isto é, o comprimento de uma volta completa em torno da Terra.



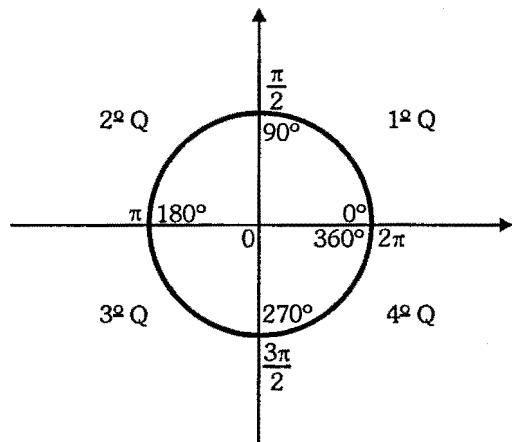
34. Achar o valor aproximado em graus, minutos e segundos do arco de 1 radiano.

Chama-se **ciclo trigonométrico** toda circunferência que satisfaz as seguintes condições:

- 1^{a)} O centro coincide com a origem do sistema cartesiano ortogonal.
- 2^{a)} O raio é unitário ($r = 1$).
- 3^{a)} O ponto A (1,0) é a origem dos arcos.
- 4^{a)} Os arcos são orientados da seguinte forma:
 - os percorridos no sentido **anti-horário** são considerados **positivos**.
 - os percorridos no sentido **horário** são considerados **negativos**.



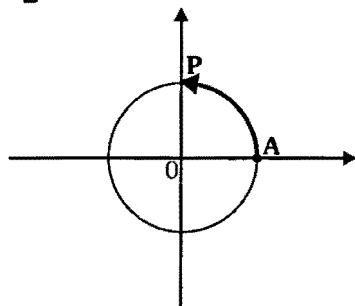
Os eixos do sistema cartesiano dividem o ciclo em quatro partes iguais que são chamadas **quadrantes**.



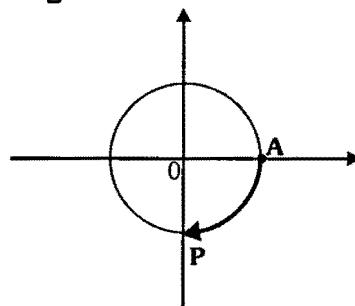
Exemplos:

No ciclo trigonométrico, temos os arcos de medida x associados ao ponto P.

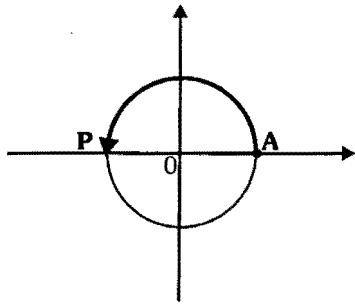
a) $x = \frac{\pi}{2}$



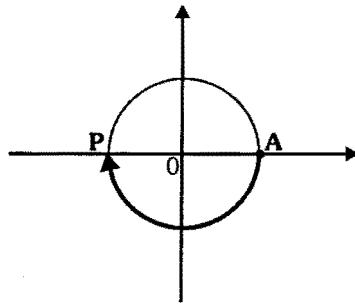
b) $x = -\frac{\pi}{2}$



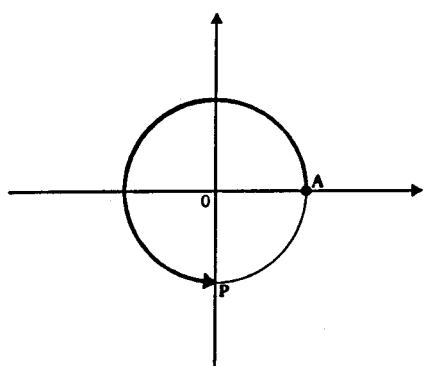
c) $x = \pi$



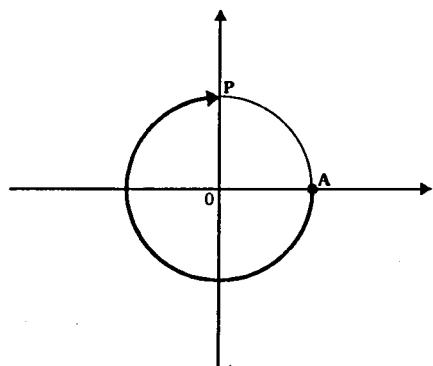
d) $x = -\pi$



e) $x = \frac{3\pi}{2}$



f) $x = -\frac{3\pi}{2}$



O ponto P é a **imagem** do arco de medida x no ciclo.

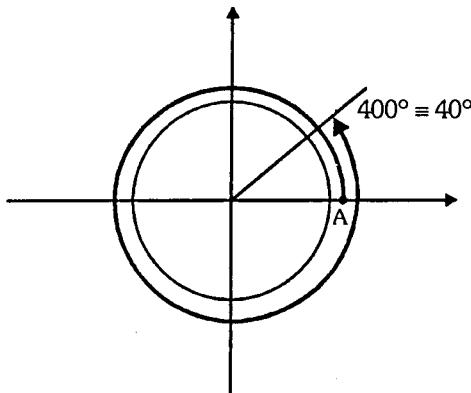
A **medida de um arco** acompanhada do sinal + ou - (chama-se medida algébrica) e indica a sua orientação no ciclo trigonométrico.

- Quando a medida é **positiva** o arco é marcado no sentido **anti-horário**.
- Quando a medida é **negativa** o arco é marcado no sentido **horário**.

2.4

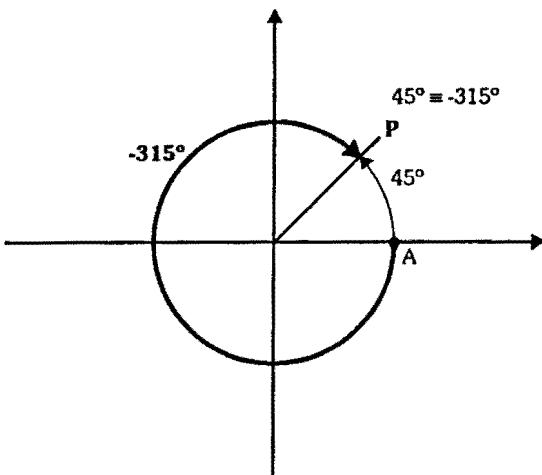
Arcos Côngruos

A medida de um arco pode ser maior que 2π (360°). Um arco de 400° é o arco de uma volta completa (360°) mais um arco de 40° .



Arcos que possuem a mesma extremidade são chamados **arcos côngruos**.

Os arcos de 45° e -315° são côngruos.



A diferença entre as medidas de dois arcos côngruos é um múltiplo de 2π ou 360° .

Assim:

$$45^\circ \equiv -315^\circ \equiv 405^\circ \equiv 765^\circ \equiv \dots$$

Então, um arco possui infinitos outros côngruos a ele.

Dado um arco \widehat{AP} , interessa-nos apenas a posição da extremidade desse arco, independente do número de voltas dadas, isto é, as várias determinações de um mesmo arco trigonométrico. Para isso, consideramos sempre a **menor determinação positiva desse arco**. No exemplo, 45° é a menor determinação positiva do arco \widehat{AP} .

Então, podemos estabelecer uma expressão geral para os arcos côngruos.

em graus: $x = x_0 + k \cdot 360^\circ$

em radianos: $x = x_0 + 2k\pi$

ongruos.

em que:

- x_0 é a menor determinação positiva do arco de medida x , sendo $0 < x_0 \leq 2\pi$.
- $k \in \mathbb{Z}$.

Do exemplo, a expressão geral do arco de 45° é:

$$x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Exercícios

35. Localize no ciclo trigonométrico, os seguintes arcos:

a) $\frac{\pi}{3}$

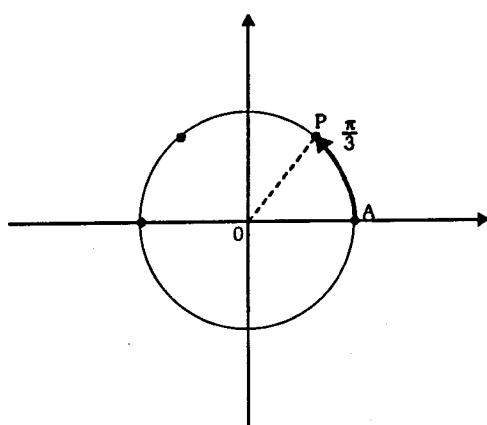
b) $-\frac{7\pi}{6}$

Solução:

a) $\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi \quad \left(\frac{1}{3} \text{ de meia circunferência} \right)$$

Para localizar este arco, devemos dividir em três partes iguais a semi-circunferência e considerar uma dessas partes, como mostra a figura.



lo de 2π

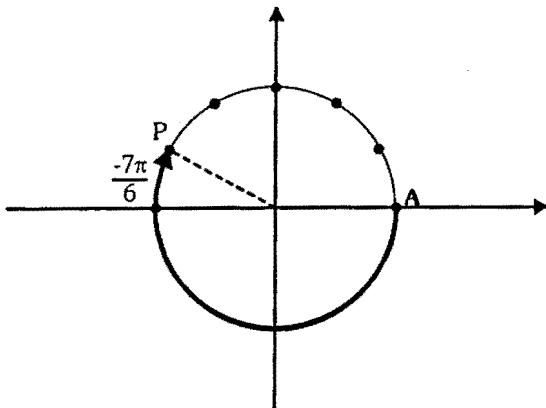
le desse
ções de
menor
ninação

gruos.

b) $-\frac{7\pi}{6}$

$$-\frac{7\pi}{6} = -\pi - \frac{1}{6} \cdot \pi \quad \left(\begin{array}{l} \text{meia circunferência} + \frac{1}{6} \text{ de meia circunferência} \\ \text{no sentido anti-horário} \end{array} \right)$$

Para localizar este arco, devemos dividir em seis partes iguais a semicircunferência e considerar uma dessas partes com a semicircunferência, como mostra a figura.



36. Localize no ciclo trigonométrico, os seguintes arcos:

a) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

37. Localize no ciclo trigonométrico, os seguintes arcos:

a) $-\frac{5\pi}{3}$

b) $-\frac{\pi}{4}$

c) $-\frac{11\pi}{6}$

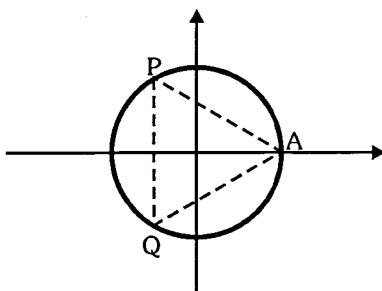
d) $-\frac{5\pi}{6}$

e) $-\frac{7\pi}{6}$

f) $-\frac{3\pi}{10}$

38. O ciclo trigonométrico é dividido em três partes iguais pelos pontos A, P e Q, sendo A a origem dos arcos. Dê as expressões gerais dos arcos com extremidades nesses pontos.

Solução:



Como a terça parte da circunferência é $\frac{1}{3} \cdot 2\pi$, isto é, $\frac{2\pi}{3}$, então as menores determinações positivas dos arcos com extremidades nos pontos P e Q são respectivamente $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$. Assim, as expressões gerais desses arcos para $k \in \mathbb{Z}$, são:

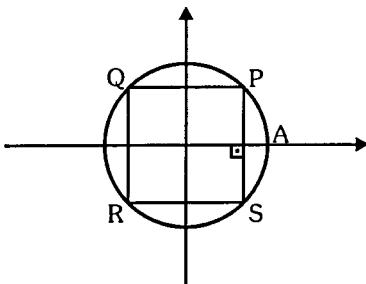
$$A: x = 2k\pi$$

$$P: x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

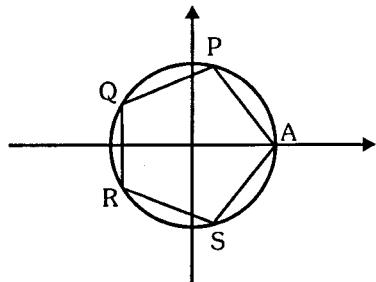
$$Q: x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

39. Dê a expressão geral dos arcos cujas extremidades são os vértices do polígono regular nos seguintes casos:

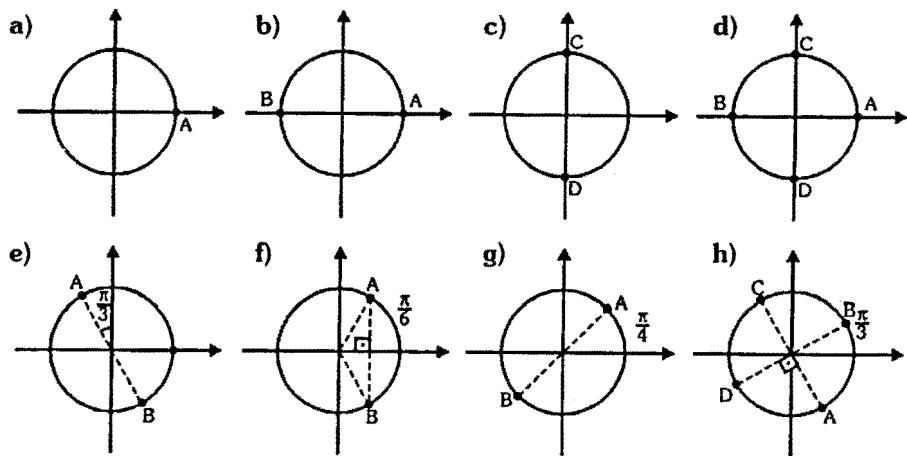
a)



b)



40. Dê a expressão geral da medida dos arcos com extremidades indicadas nos pontos das seguintes figuras:



41. Localize no ciclo trigonométrico, as extremidades dos arcos de medida x , cuja expressão geral para $k \in \mathbb{Z}$ é:

a) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

d) $x = \frac{2k\pi}{3}$

2.5

Menor Determinação Positiva

Processo Prático para Encontrar a Menor Determinação Positiva

1º caso: Arco positivo e medido em graus. Basta efetuar a divisão da medida do arco por 360° , **sem cortar os zeros**, e tomar o resto:

Exemplo:

Calcular a mdp (menor determinação positiva) do arco de 940° .

$$940^\circ \quad | \quad 360^\circ$$

$$\underbrace{220}_{\text{mdp}} \quad 2 \text{ voltas} \quad \Rightarrow \quad x = \underbrace{220^\circ}_{\text{mdp}} + \underbrace{2(360^\circ)}_{2 \text{ voltas}}$$

Assim, $940^\circ \equiv 220^\circ$

2º caso: Arco positivo e medido em radianos. Basta efetuar a divisão da medida do arco por π , tirar a parte inteira e multiplicar por 2π .

Exemplo:

Calcular mdp do arco de $\frac{19\pi}{3}$ rad

$$\frac{\frac{19\pi}{3}}{2\pi} = \frac{19\pi}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{19}{6} \Rightarrow \begin{array}{r} 19 \\ 1 \quad 3 \end{array}$$

$$\frac{19}{6} = \frac{1}{6} + 3 \left(\frac{1}{6} \text{ de volta} + 3 \text{ voltas} \right)$$

Como 1 volta = 2π , temos:

$$x = \frac{1}{6} \cdot 2\pi + 3 \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi$$

$$\text{Assim: } \frac{19\pi}{3} \text{ rad} \equiv \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

3º caso: Arco negativo e medido em graus. Basta a divisão por 360° , sem cortar os zeros, e tomar o **relemento** do resto da divisão.

Exemplo:

Calcular a mdp do arco de -2140° .

$$\begin{array}{r} 2140^\circ \\ 340^\circ \end{array} \left| \begin{array}{r} 360^\circ \\ 5^\circ \end{array} \right.$$

Calculando o relemento do resto da divisão, temos $360^\circ - 340^\circ = 20^\circ$

$$x = \underbrace{20^\circ}_{\text{mdp}} + \underbrace{5(360^\circ)}_{5 \text{ voltas}}$$

$$\text{Assim, } -2140^\circ \equiv 20^\circ$$

4º caso: Arco é negativo e medido em radianos. Basta efetuar a divisão da medida do arco 2π , tirar a parte inteira, multiplicar por 2π e tomar o replemento.

Exemplo:

Calcular mdp do arco de $-\frac{23\pi}{7}$ rad

$$\frac{23\pi}{2\pi} = \frac{23\pi}{14\pi} = \frac{23}{14} \Rightarrow \begin{array}{r} 23 \\ 9 \end{array} \overline{)14} \quad 1$$

$$\frac{23}{14} = \frac{9}{14} + 1 \left(\frac{9}{14} \text{ de volta} + 1 \text{ volta} \right)$$

Como 1 volta = 2π , temos:

$$\frac{9}{14} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{7}$$

Calculando o replemento desse arco, temos:

$$2\pi - \frac{9\pi}{7} = \frac{5\pi}{7}$$

$$x = \frac{5\pi}{7} + 1 \cdot 2\pi$$

$$\text{Assim: } -\frac{23\pi}{7} \text{ rad} \equiv \frac{5\pi}{7} \text{ rad}$$

tuar a
mar o

Exercícios

42. Encontre a menor determinação positiva (mdp) dos seguintes arcos, representando-os no ciclo trigonométrico.

a) 800°

b) 915°

c) 5321°

d) 7777°

e) $\frac{19\pi}{2}$ rad

f) $\frac{53\pi}{4}$ rad

g) $\frac{198\pi}{5}$ rad

h) $\frac{2496\pi}{7}$ rad

i) -620°

j) -1313°

k) -2111°

l) -3333°

m) $-\frac{38\pi}{3}$ rad

n) $-\frac{65\pi}{2}$ rad

o) $-\frac{49\pi}{4}$ rad

p) $-\frac{321\pi}{5}$ rad

43. Determine em que quadrante estão os seguintes arcos:

a) 721°

b) 1111°

c) $\frac{32\pi}{3}$ rad

d) $\frac{86\pi}{5}$ rad

e) -830°

f) -1510°

g) $-\frac{69\pi}{4}$ rad

h) $-\frac{35\pi}{3}$ rad



Pense e Faça

F₃: Que Dureza!

Gastei tudo que tinha em quatro lojas. Em cada uma delas gastei um real a mais do que a metade do que tinha ao entrar nela. Quanto dinheiro eu tinha inicialmente?

- 3.1 - Seno e Cosseno de um Arco
- 3.2 - Valores Notáveis
- 3.3 - Pontos Extremos de Quadrantes
- 3.4 - Sinal do Seno e do Cosseno
- 3.5 - Relação Fundamental da Trigonometria

Capítulo 3

Seno e Cosseno

3.1

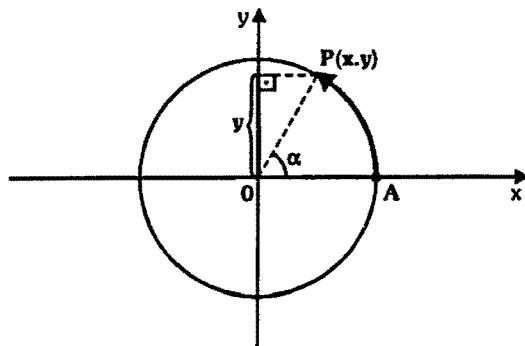
Seno e Cosseno de um Arco

Consideremos no ciclo trigonométrico, um arco \widehat{AP} de medida α .

Chama-se **seno de α** a ordenada do ponto P.

Indicamos por:

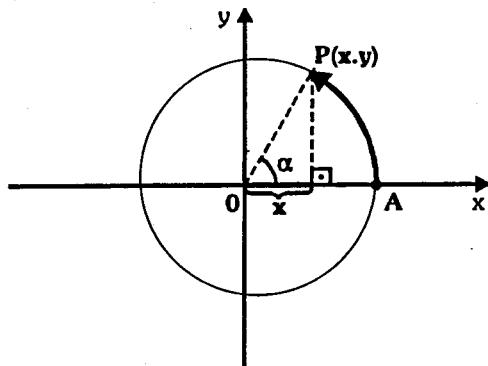
$$\boxed{\text{sen } \alpha = y}$$



Chama-se **cosseno de α** a abscissa do ponto P.

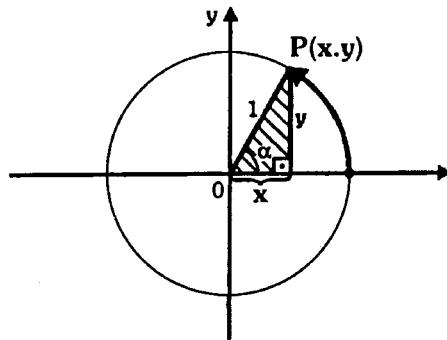
Indicamos por:

$$\boxed{\cos \alpha = x}$$



Essas definições de seno e cosseno são compatíveis com as definições vistas anteriormente para um ângulo agudo no triângulo retângulo.

De fato:



$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y$$

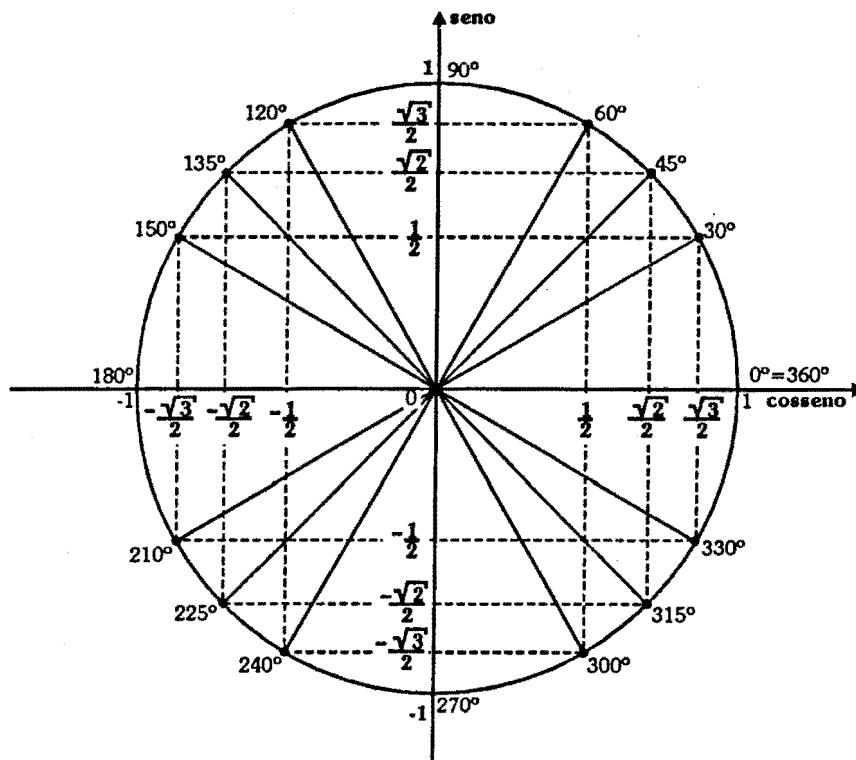
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x$$

O eixo das abscissas é chamado **eixo dos cossenos** e o eixo das ordenadas é chamado **eixo dos senos**.

Na tabela abaixo, temos os valores exatos do seno e do cosseno já vistos anteriormente.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Por simetria, obtemos os demais valores do seno e cosseno representados no ciclo:



Note, por exemplo, que:

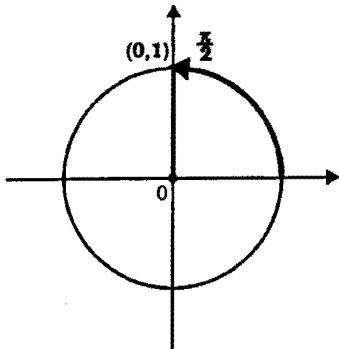
$$\sin 30^\circ = \sin 150^\circ , \quad \cos 30^\circ = \cos 330^\circ$$

$$\sin 135^\circ = -\sin 225^\circ , \quad \cos 135^\circ = \cos 225^\circ$$

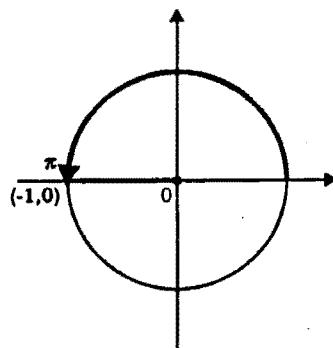
3.3

Pontos Extremos de Quadrantes

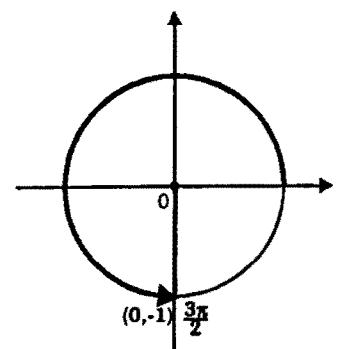
A seguir, temos o cosseno e o seno de $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ e 2π .



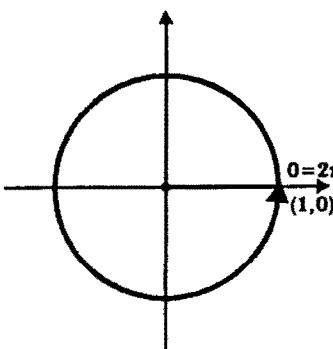
$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$



$$\cos \pi = -1 \quad \text{e} \quad \sin \pi = 0$$



$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$



$$\begin{aligned}\cos 0 &= \cos 2\pi = 1 \\ \sin 0 &= \sin 2\pi = 0\end{aligned}$$

Variações do Seno e do Cosseno

Como mostram as figuras anteriores, o valor mínimo do seno de um arco é -1 e o valor máximo é 1 , isto é, para todo $x \in [0, 2\pi]$. Tem-se

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

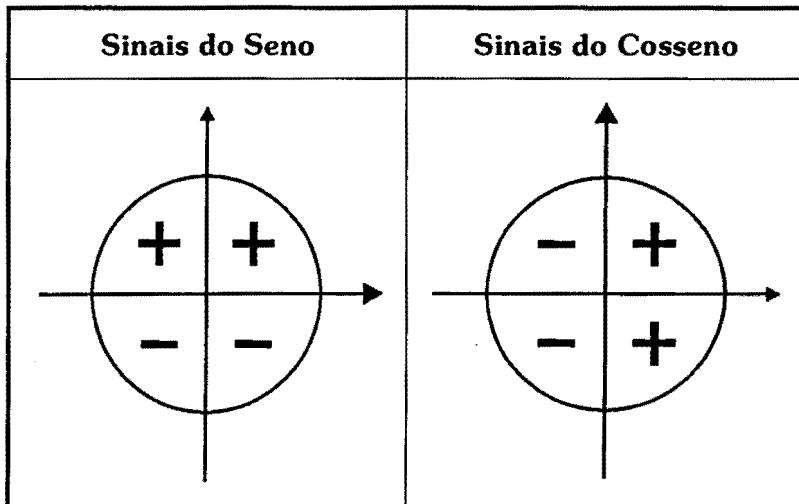
Analogamente:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

3.4

Sinal do Seno e do Cosseno

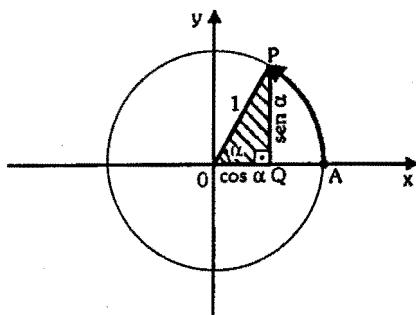
Em cada quadrante, os valores do $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ possuem sinal positivo ou negativo, de acordo com as coordenadas da extremidade do arco.



3.5

Relação Fundamental da Trigonometria

Consideremos no ciclo trigonométrico, um arco \widehat{AP} de medida α . Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPQ , temos:



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Qualquer que seja a posição de P no ciclo trigonométrico, esta relação é válida.

Então:

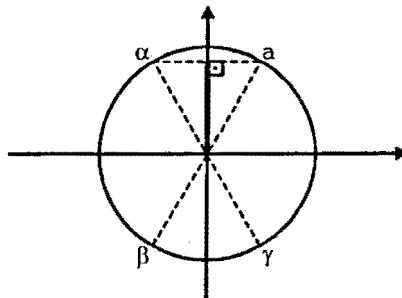
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad e \quad \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad e \quad \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

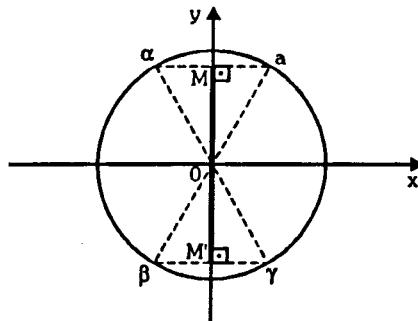
Exercícios

44. No ciclo trigonométrico seguinte, tem-se $\sin \alpha = 0,8$. Determine:

- a) $\sin \alpha, \sin \beta$ e $\sin \gamma$
- b) $\cos \alpha, \cos \alpha, \cos \beta$ e $\cos \gamma$



Solução:



- a) Como α e a são representados por pontos simétricos em relação ao eixo y , então:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \alpha = OM = 0,8$$

β e γ são representados por pontos cuja ordenada é oposta à de M , então:

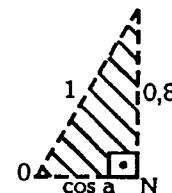
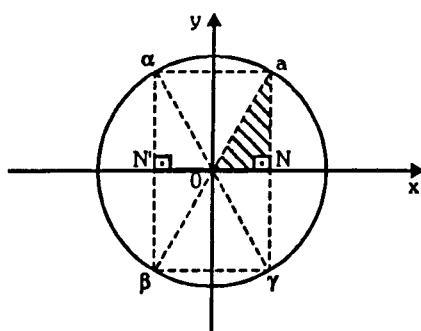
$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} a = OM' = -0,8$$

- b) Aplicando Pitágoras no triângulo hachurado, temos:

$$\cos^2 a + (0,8)^2 = 1^2 \Rightarrow \cos a = 0,6$$

Sendo a e γ representados por pontos simétricos em relação ao eixo x , então:

$$\cos \gamma = \cos a = ON = 0,6$$

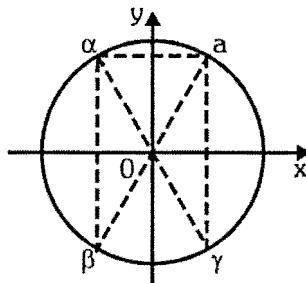


Como α e β são representados por pontos cuja abscissa é oposta à de a , então:

$$\cos \beta = \cos \alpha = -\cos a = ON' = -0,6$$

45. No ciclo trigonométrico abaixo, temos $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Determine:

- a) $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$
- b) $\sin \alpha$, $\sin \alpha$, $\sin \beta$ e $\sin \gamma$



46. Determine o seno e o cosseno de:

- a) 8π
- b) $\frac{9\pi}{2}$
- c) 15π
- d) $\frac{11\pi}{2}$
- e) $\frac{9\pi}{4}$
- f) $\frac{13\pi}{3}$
- g) $\frac{23\pi}{3}$
- h) $\frac{15\pi}{4}$
- i) $\frac{34\pi}{3}$
- j) $\frac{13\pi}{6}$

47. Determine o seno e o cosseno de:

- a) -2π
- b) $-\frac{\pi}{3}$
- c) $-\frac{7\pi}{4}$
- d) $-\frac{17\pi}{6}$

48. Calcule o valor das expressões:

a) $\sin 4\pi - 2 \cos \frac{3\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{2}$

b) $3 \sin^2 \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{5\pi}{2} + 8 \cos \frac{\pi}{3}$

c) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \right)$

d) $\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right)$

e) $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

- 49.** Determine m para que se tenha $\sin x = 3m - 1$

Solução:

Como $-1 \leq \sin x \leq 1$, temos:

$-1 \leq 3m - 1 \leq 1$, resolvendo esta inequação vem:

$$-1 + 1 \leq 3m \leq 1 + 1$$

$$0 \leq 3m \leq 2$$

$$\frac{0}{3} \leq m \leq \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leq m \leq \frac{2}{3}$$

$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq m \leq \frac{2}{3}\}$$

- 50.** Determine os valores de m para que se tenha:

a) $\sin x = 2m + 5$

b) $\cos x = \frac{3m+2}{3}$

c) $\sin x = 2 - m$

d) $\cos x = \frac{1-m}{2}$

- 51.** Sendo $\sin x = \frac{3}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, obtenha $\cos x$.

Solução:

Como x é um arco do primeiro quadrante, $\cos x > 0$, então:

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

- 52.** Sendo $\sin x = -\frac{4}{5}$ e x é um arco do 3º quadrante, calcule $\cos x$.

- 53.** Sendo $\cos x = -\frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, obtenha $\sin x$.

54. Sendo $\sin x = -\frac{5}{13}$, e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule o valor de $y = \cos^2 x - 5 \cos x$.

55. Se $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{5}$, quais os possíveis valores para $\sin x$.

56. Determine os números reais m e α que satisfazem simultaneamente $\sin \alpha = m - 1$ e $\cos \alpha = \sqrt{1-m^2}$, para $0 < \alpha < 2\pi$.

Solução:

Como $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$$(m-1)^2 + \left(\sqrt{1-m^2}\right)^2 = 1 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 + 1 - m^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2m = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Substituindo:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{2} \\ \text{e} \\ \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{11\pi}{6}$$

57. Determine os números reais m e α que satisfazem simultaneamente $\sin \alpha = m - 2$ e $\cos \alpha = m - 3$ para $0 < \alpha < 2\pi$.

58. Sendo $\sin x + \cos x = a$, calcule $\sin x \cdot \cos x$.

Solução:

Elevando ambos os membros dessa igualdade ao quadrado, temos:

$$(\sin x + \cos x)^2 = a^2 \Rightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = a^2 - 1 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2}$$

59. Sendo $\sin x - \cos x = a$, calcule $5 \cdot \sin x \cdot \cos x$.

60. Sendo $\sin x + \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, calcule $\sin x \cdot \cos x$.

61. Dado $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$, com $0 \leq x \leq 2\pi$, calcule $\sin x$ e $\cos x$.

Solução:

Isolando $\cos x$ na expressão, temos:

$$\cos x = \sqrt{3} - \sqrt{3} \sin x \text{ e substituindo em}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ vem:}$$

$$\sin^2 x + (\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin x)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + 3 - 6 \sin x + 3 \sin^2 x = 1$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0. \text{ Fazendo } \sin x = a, \text{ temos:}$$

$$2a^2 - 3a + 1 = 0 \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ para } a = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ e } \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet \text{ para } a = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \text{ e } \cos x = 0$$

62. Dado $\sin x - \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}$, com $0 \leq x \leq 2\pi$, calcule $\sin x$ e $\cos x$.



Pense e Faça

F₄: Reprodução Rápida

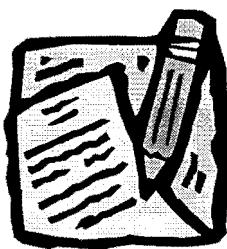
Uma determinada espécie de alga se reproduz, dividindo-se em 2 a cada dia. Assim, no primeiro dia temos 1, no segundo 2, no terceiro 4, no quarto 8, e assim por diante. Se, começando por uma dessas algas, precisamos de 30 dias para preencher determinado volume, em quanto tempo preencheremos o mesmo volume se começarmos com duas das referidas algas?



Pense e Faça

F₅: Gaivotas

Atualmente, 50% das gaivotas de certa região são brancas e 50% são cinzentas. Se a população da espécie branca aumentar 40% ao ano e da espécie cinzenta aumentar 80% ao ano, qual será, aproximadamente, a porcentagem de gaivotas brancas daqui a dois anos?



Anotações

- 4.1 - Função Seno
- 4.2 - Considerações da Função Seno
- 4.3 - Função Cosseno
- 4.4 - Considerações da Função Cosseno

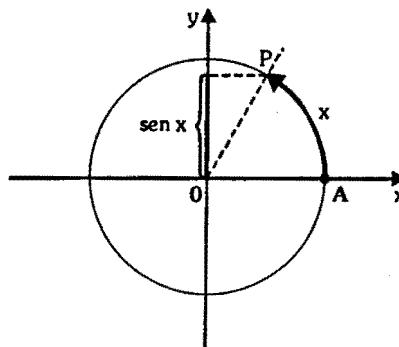
Capítulo 4

Função Seno e Função Cosseno

4.1

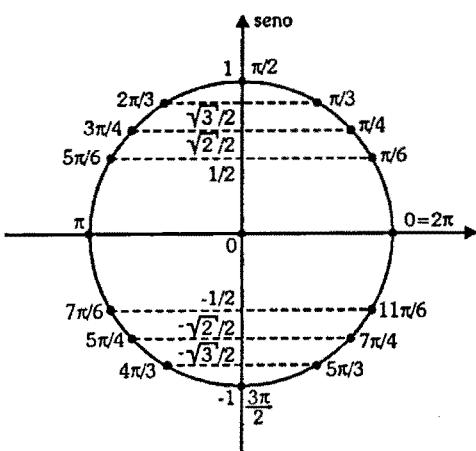
Função Seno

Chama-se **função seno de x**, indica-se: $y = \text{sen } x$ ou $f(x) = \text{sen } x$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada arco de medida x o número real $y = \text{sen } x$.



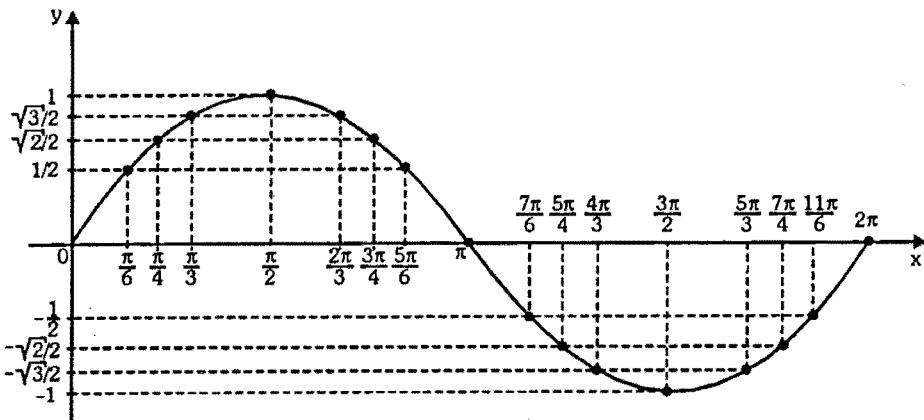
Gráfico

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos os valores conhecidos para o $\text{sen } x$ marcados no ciclo trigonométrico.



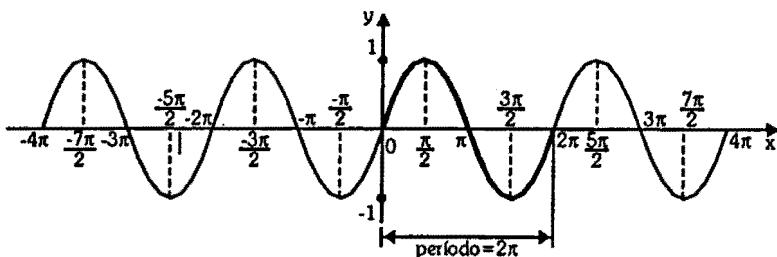
x	y = sen x	Pontos
0	0	(0, 0)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
π	0	$(\pi, 0)$
⋮	⋮	⋮

Representando esses pontos no sistema cartesiano, obtemos o gráfico da função $y = \text{sen } x$.



- Arcos côngruos possuem o mesmo seno, isto é, $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \dots = \sin(x + 2k\pi)$, em que $k \in \mathbb{Z}$. Isto significa que a **função seno** repete seus valores a cada 2π , então o seu gráfico possui trechos que se repetem.

Assim, dizemos que a **função seno** é uma **função periódica de período 2π** .



- O gráfico da função seno chama-se **senóide**.
- O domínio da função seno é $D = \mathbb{R}$.
- O conjunto imagem da função seno é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$ ou $Im = [-1, 1]$.
- A função seno é **crescente** no 1º e 4º quadrantes e **decrescente** no 2º e 3º quadrantes.
- $f(x) = 0$ para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- A função seno é **positiva** no 1º e 2º quadrantes e negativa no 3º e 4º quadrantes.
- A função seno é **ímpar**, isto é, $\sin x = -\sin(-x)$.
- Dizemos também que o período é o **comprimento da onda** e a ordenada máxima é chamada de **amplitude**.

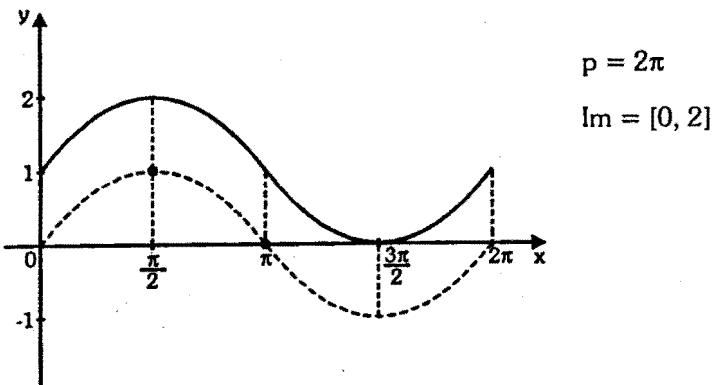
Exercícios

63. Construa o gráfico da função $y = 1 + \operatorname{sen} x$ e dê o seu período e imagem.

Solução:

$$y = 1 + \operatorname{sen} x$$

Deslocando a senóide ($y = \operatorname{sen} x$) uma unidade na vertical, temos:



64. Construa os gráficos e dê o período e a imagem das seguintes funções:

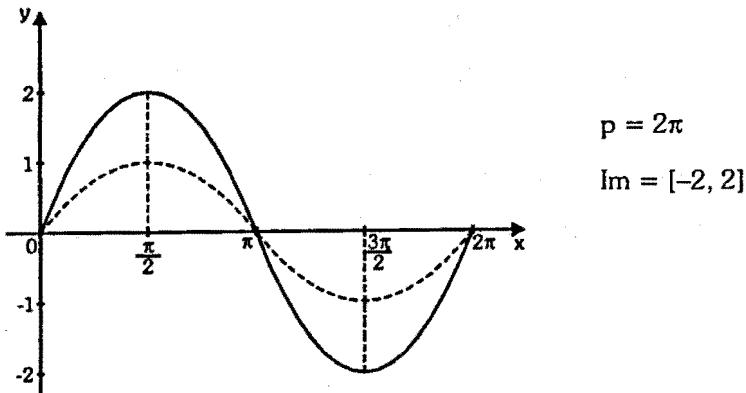
a) $y = 2 + \operatorname{sen} x$

b) $y = -1 + \operatorname{sen} x$

65. Construa o gráfico da função $y = 2 \operatorname{sen} x$ e dê o seu período e imagem.

Solução:

Multiplicando por 2 as ordenadas de $y = \operatorname{sen} x$, temos:



66. Construa os gráficos das seguintes funções e dê o período e a imagem:

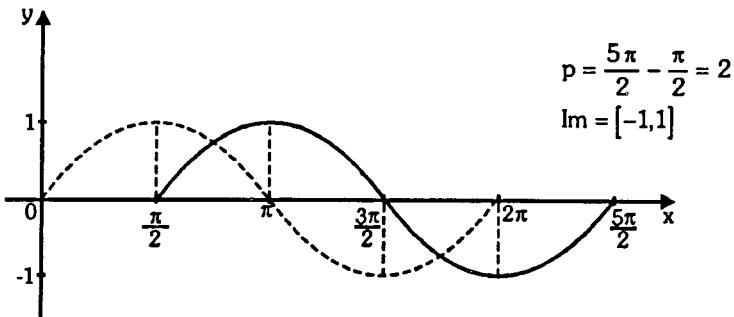
a) $y = 3 \operatorname{sen} x$

b) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

67. Construa o gráfico da função $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:

Deslocando a senóide ($y = \operatorname{sen} x$) em $\frac{\pi}{2}$ para a direita, temos:



68. Construa o gráfico das seguintes funções e dê seu período e imagem.

a) $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

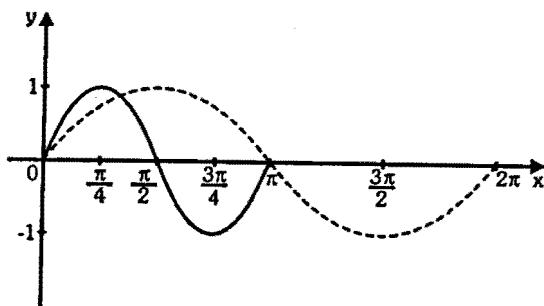
69. Construa o gráfico da função $y = \operatorname{sen}2x$ e dê seu período e sua imagem.

Solução:

$$y = \operatorname{sen} 2x$$

Seja $2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$, então $y = \operatorname{sen} t$.

t	x	$y = \operatorname{sen} t$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0



$$p = \pi$$

$$\text{Im} = [-1, 1]$$

70. Construa os gráficos das seguintes funções, dê seu período e imagem.

a) $y = \sin 4x$

b) $y = \sin \frac{x}{2}$

71. Construa os gráficos das seguintes funções, dê o seu período e a imagem.

a) $y = -\sin x$

b) $y = 1 + 2\sin x$

c) $y = |\sin x|$

d) $y = 1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

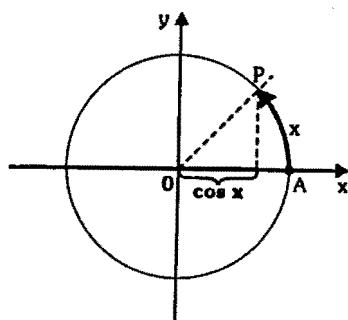
e) $y = 2 + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

f) $y = -1 + \sin(2x - \pi)$

4.3

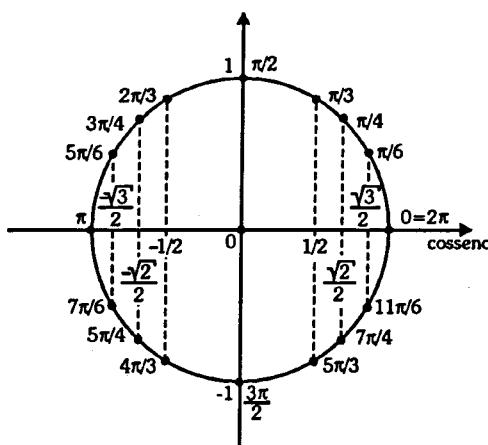
Função Cosseno

Chama-se **função cosseno de x**, indica-se $y = \cos x$ ou $f(x) = \cos x$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada arco de medida x , o número real $y = \cos x$.



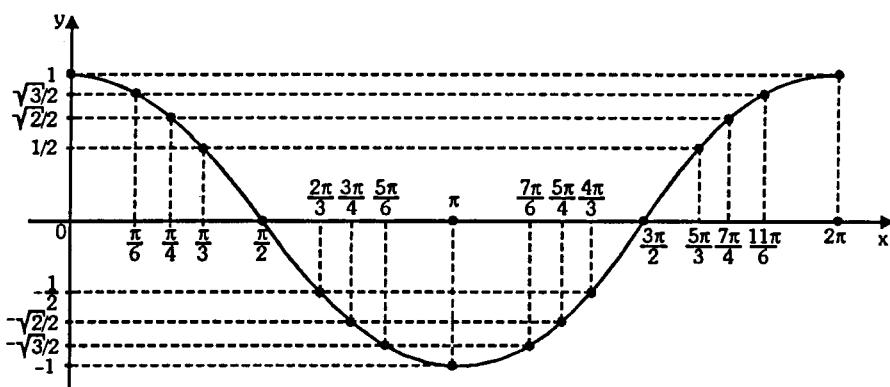
Gráfico

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos os valores conhecidos para o $\cos x$ marcados no ciclo trigonométrico.



x	y = cos x	Pontos
0	1	(0, 1)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
π	-1	$(\pi, -1)$
\vdots	\vdots	\vdots

Representando esses pontos no sistema cartesiano, obtemos o gráfico da função $y = \cos x$.

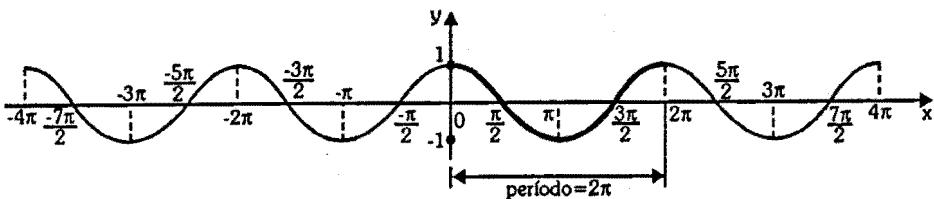


4.4

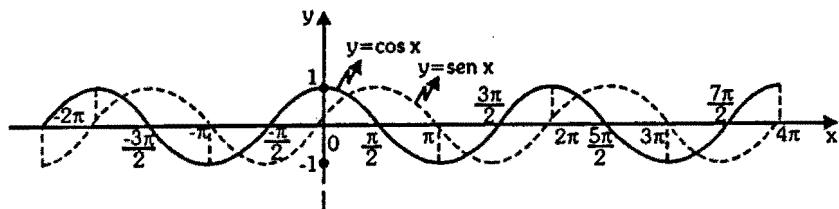
Considerações da Função Cosseno

- Arcos côngruos possuem o mesmo cosseno, isto é, $\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + 2k\pi)$, em que $k \in \mathbb{Z}$. Isto significa que a função cosseno repete os seus valores a cada 2π , então o seu gráfico possui trechos que se repetem.

Assim, dizemos que a **função cosseno** é uma **função periódica de período 2π** .



- O gráfico da função cosseno chama-se **cossenóide**.
- O gráfico da função cosseno coincide com o gráfico da função seno deslocado de $\frac{\pi}{2}$ à direita. Isto significa que $\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.



- O domínio da função cosseno é **$D = \mathbb{R}$** .
- O conjunto imagem da função cosseno é $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$ ou $\text{Im} = [-1, 1]$.
- A função cosseno é **crescente** no 3º e 4º quadrantes e **decrescente** no 1º e 2º quadrantes.

- $f(x) = 0$ para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- A função cosseno é **positiva** no 1º e 4º quadrantes e negativa no 2º e 3º quadrantes.
- A função cosseno é **par**, isto é, $\cos x = \cos(-x)$.

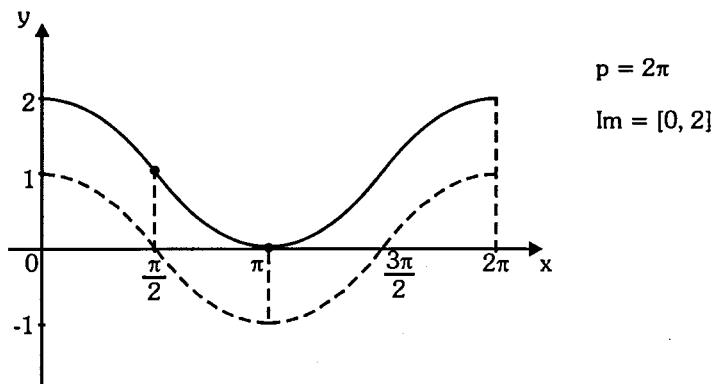
Exercícios

72. Construa o gráfico da função $y = 1 + \cos x$, dê seu período e imagem.

Solução:

$$y = 1 + \cos x$$

Deslocando a cossenóide ($y = \cos x$) uma unidade na vertical para cima, temos:



73. Construa o gráfico, dê o período e a imagem das seguintes funções:

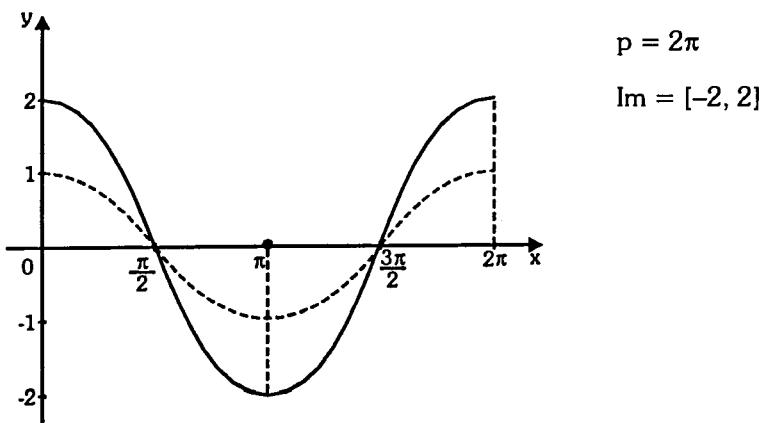
a) $y = -2 + \cos x$

b) $y = 3 + \cos x$

74. Construa o gráfico da função $y = 2\cos x$, dê seu período e imagem.

Solução:

Multiplicando por 2 as ordenadas de $y = \cos x$, temos:



75. Construa o gráfico das funções, dê seu período e imagem.

a) $y = 3\cos x$

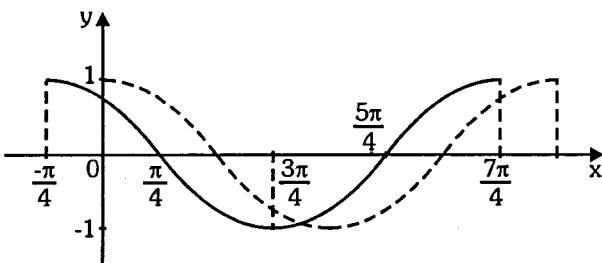
b) $y = -2\cos x$

76. Construa o gráfico da função $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, dê seu período e imagem.

Solução:

$p = 2\pi$

$\text{Im} = [-1, 1]$



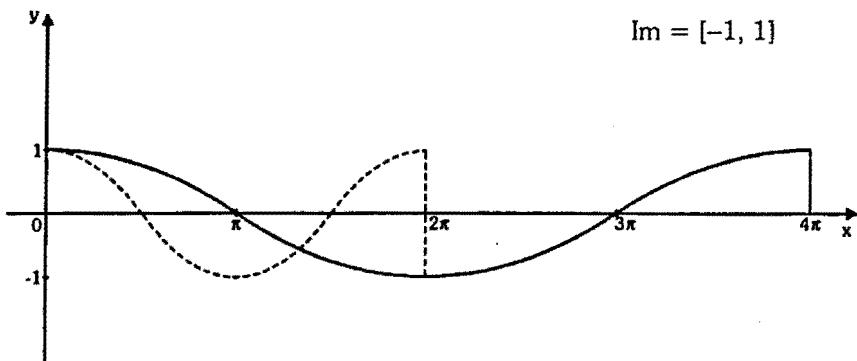
77. Construa o gráfico das seguintes funções, dê seu período e imagem.

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = \cos(x + \pi)$

78. Construa o gráfico da função $y = \cos\frac{x}{2}$, dê seu período e imagem.

Solução:



$$p = 4\pi$$

$$\text{Im} = [-1, 1]$$

79. Construa o gráfico das seguintes funções, dê seu período e imagem.

a) $y = \cos 2x$

b) $y = \cos \frac{x}{4}$

80. Construa os seguintes gráficos, dê o período e imagem.

a) $y = -\cos x$

b) $y = 1 + 2\cos x$

c) $y = |\cos x|$

d) $y = -1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

e) $y = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

f) $y = -1 + \cos(2x - \pi)$

81. Sendo a, b, c, d números reais, determine o período da função $y = a + b \sin(cx + d)$.

Solução:

Para que esta função complete um período, o arco $cx + d$ deve variar de 0 a 2π . Temos, então:

$$cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$$

$$cx + d = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi - d}{c}$$

$$p = \frac{2\pi - d}{c} - \left(-\frac{d}{c} \right) = \frac{2\pi}{c}$$

logo:
$$\boxed{p = \frac{2\pi}{c}}$$

Tal conclusão também é válida para a função $y = a + b \cos(cx + d)$.

82. Determine o período das seguintes funções:

a) $y = 3 + 2 \sen \left(3x - \frac{\pi}{10} \right)$

b) $y = -5 \cos \left(\frac{x}{2} + \pi \right)$

Solução:

a) $y = 3 + 2 \sen \left(3x - \frac{\pi}{10} \right)$

Como o coeficiente de x é 3, isto é, $c = 3$, então o período é $p = \frac{2\pi}{3}$.

b) $y = -5 \cos \left(\frac{x}{2} + \pi \right)$

Como o coeficiente de x é $\frac{1}{2}$, isto é, $c = \frac{1}{2}$, então o período é $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

83. Determine o período das funções:

a) $y = \sen 6x$

b) $y = 9 \sen x$

c) $y = 2 + \cos 3x$

d) $y = 1 - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

e) $y = 3 + 5 \cos \left(2x - \frac{\pi}{9} \right)$

f) $y = -4 + \sqrt{2} \sen \left(\frac{x}{2} - \pi \right)$

84. Dê o conjunto imagem das funções:

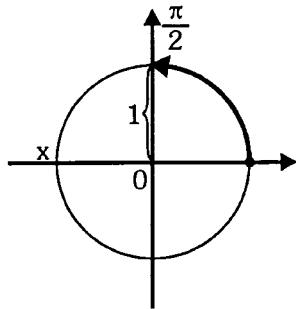
- a) $y = 2 + \cos x$ b) $y = 3 - 2\sin x$
c) $y = 1 + \cos x$ d) $y = 3 |\sin x|$
e) $y = 1 + \sin 2x$ f) $y = 1 + 2 |\cos x|$

85. Resolva as equações:

a) $\sin x = 1$ b) $\cos x = -1$ c) $\sin x = 0$

Solução:

a) $\sin x = 1$

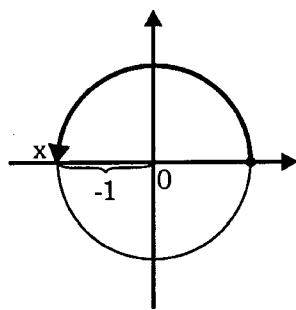


Observando o ciclo trigonométrico, temos:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

b) $\cos x = -1$

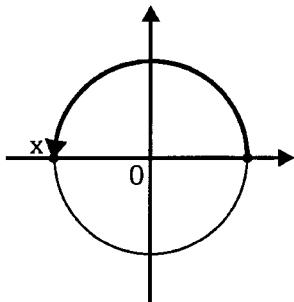


Observando o ciclo trigonométrico, temos:

$$x = \pi + 2k\pi$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

c) $\sin x = 0$



Observando o ciclo trigonométrico, temos:

$$x = k\pi$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

86. Resolva as equações:

a) $\cos x = 1$

b) $\cos x = 0$

c) $\sin x = -1$

d) $\sin 2x = 0$

e) $\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$

f) $2 \cos(x - \pi) = 1$

g) $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

h) $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$

87. Resolva as equações:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$

b) $2 \cos x = 1$, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$

c) $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $0 \leq x \leq \pi$

d) $2 \cos(x + \pi) = \sqrt{3}$, no intervalo $0 \leq x \leq 4\pi$



Pense e Faça

F₆: Nem Lucro e Nem Prejuízo

Uma loja vendeu duas motos por 99 mil reais. Na venda de uma, perdeu 10% e na venda de outra, ganhou 10%. Ficaram elas por elas, não é?



Pense e Faça

F₇: Dois Melões

Dois melões da mesma espécie estão sendo vendidos. Um tem 60 cm de circunferência e outro 50 cm. O primeiro é uma vez e meia mais caro.

Qual dos dois vale a pena comprar?

(Extraído do livro "Aprenda Matemática Brincando" - J. Perelman)

- 5.1 - Tangente de um Arco
- 5.2 - Cotangente de um Arco
- 5.3 - Pontos Extremos de Quadrantes
- 5.4 - Valores Notáveis

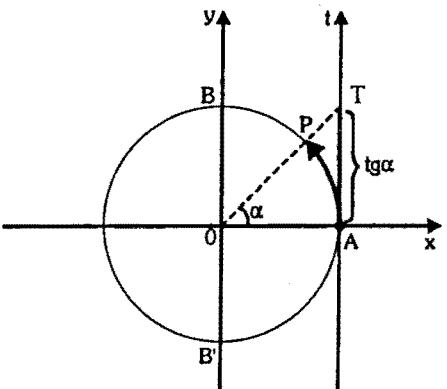
Capítulo 5

Tangente e Cotangente

5.1

Tangente de um Arco

Consideremos no ciclo trigonométrico, um arco $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e um eixo t com origem em A, paralelo e de mesmo sentido que o eixo y. Chama-se **tangente de α** a ordenada do ponto T, obtida pela intersecção da reta \overleftrightarrow{OP} com o eixo t (eixo das tangentes).

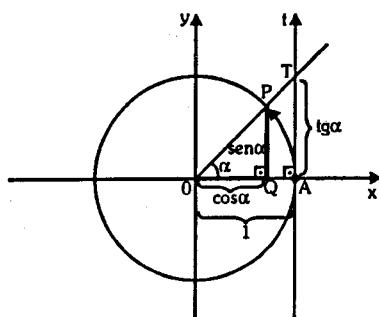


Indicamos por:

$$\operatorname{tg} \alpha = AT$$

Assim, a tangente de α é a medida algébrica AT.

- Arcos com extremidades nos pontos B e B' ($\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) não possuem tangente, pois a reta \overleftrightarrow{OP} que passa por esses pontos é paralela ao eixo t .
- Podemos relacionar a tangente de um arco com o seno e o cosseno do mesmo. Assim:



$$\triangle OAT \sim \triangle OQP$$

Então:

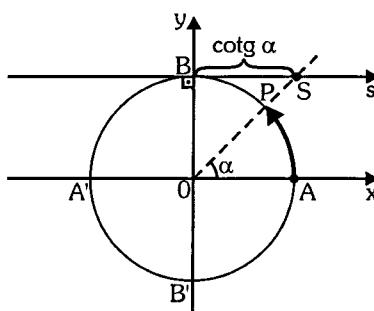
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Esta expressão existe para $\cos \alpha \neq 0$,
isto é, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5.2

Cotangente de um Arco

Consideremos no ciclo trigonométrico, um arco $\alpha \neq k\pi$ e um eixo s com origem em B , paralelo e de mesmo sentido que o eixo x . Chama-se **cotangente de α** a abscissa do ponto S , obtida pela intersecção da reta \overleftrightarrow{OP} com o eixo s (eixo das cotangentes).

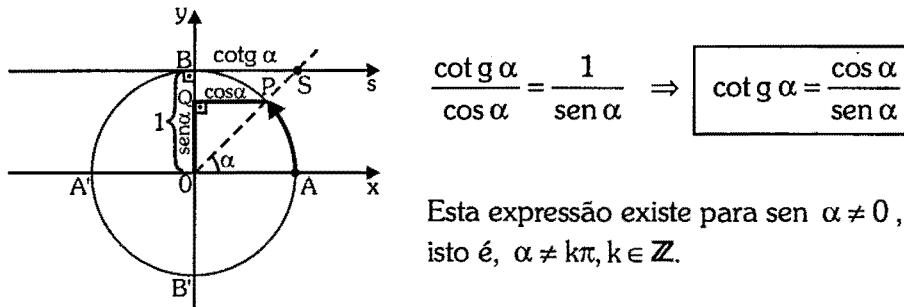


Indicamos por:

$$\cotg \alpha = BS$$

Assim, a cotangente de α é a medida algébrica BS.

- Arcos com extremidades nos pontos A e A' ($\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$) não possuem cotangente, pois a reta \overleftrightarrow{OS} que passa por esses pontos é paralela ao eixo s.
- Relacionando a tangente de um arco com o cosseno e o seno do mesmo, pela semelhança dos triângulos OBS e OPQ, temos:

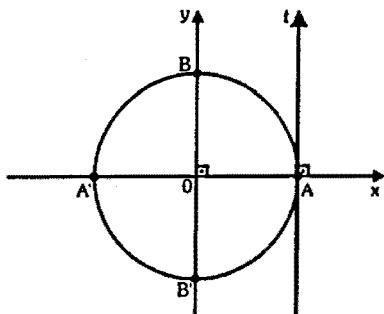


Esta expressão existe para $\sen \alpha \neq 0$,
isto é, $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

5.3

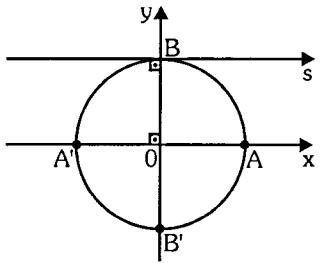
Pontos Extremos de Quadrantes

Para a tangente:



- $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (pontos B e B') não existe $\tg \alpha$.
- $\alpha = k\pi$ (pontos A e A'), $\tg \alpha = 0$

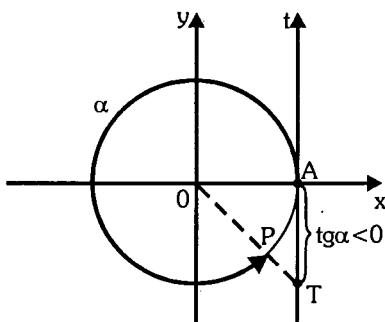
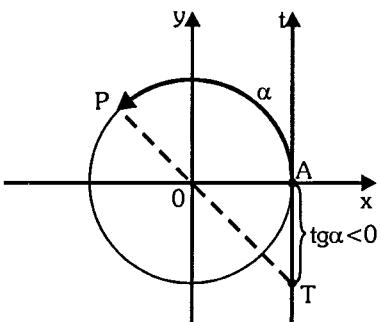
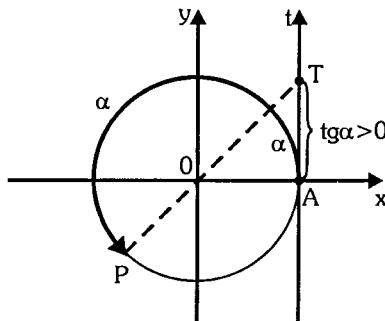
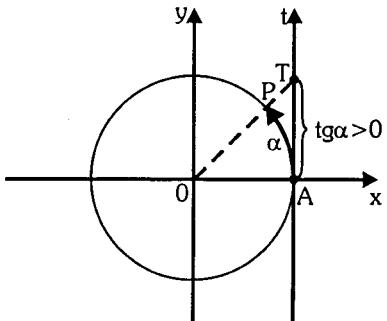
Para a cotangente:



- $\alpha = k\pi$ (pontos A e A') não existe $\cot \alpha$.
- $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (pontos B e B'), $\cot \alpha = 0$

Sinal da Tangente e da Cotangente

Arcos situados no 1º e 3º quadrantes possuem tangentes positivas, e arcos situados no 2º e 4º quadrantes possuem tangentes negativas.



Multiplicando $\tg \alpha$ por $\cot \alpha$, temos:

$$\tg \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sen \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sen \alpha} = 1 \Rightarrow \boxed{\tg \alpha \cdot \cot \alpha = 1}$$

Assim:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$$

ou

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

5.4

Valores Notáveis

Temos os valores notáveis para a tangente e para a cotangente dos seguintes arcos:

$$\bullet \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\bullet \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

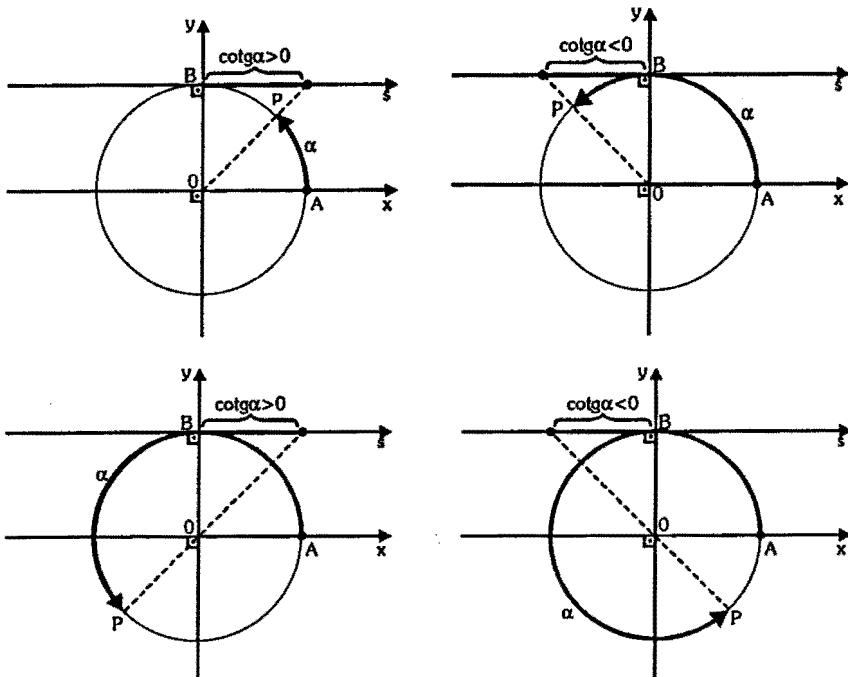
$$\bullet \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

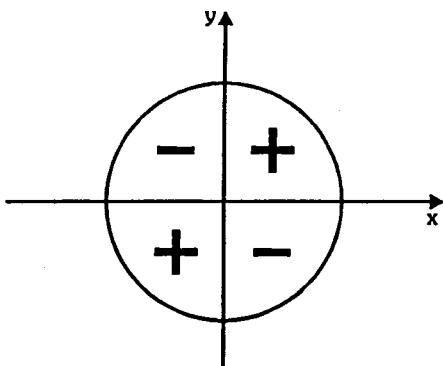
Temos a tabela dos valores notáveis para o seno, cosseno, tangente e cotangente de um arco.

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tg \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cotg \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Arcos situados no 1º e 3º quadrantes possuem cotangentes positivas, e arcos situados no 2º e 4º quadrantes possuem cotangentes negativas.



Resumindo, temos os sinais da tangente e da cotangente.



Exercícios

88. Dê o valor de:

a) $\operatorname{tg} 27\frac{\pi}{4}$ b) $\operatorname{tg} (-870^\circ)$ c) $\operatorname{cotg} 31\frac{\pi}{6}$ d) $\operatorname{cotg} \left(-61\frac{\pi}{3}\right)$

89. Sabendo que x é um arco do 3º quadrante e $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$, calcule:

a) $\operatorname{tg} x$ b) $\operatorname{cotg} x$

90. Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{5}$, calcule $\operatorname{cotg} x$.

91. Sendo $\operatorname{cos} \alpha = 0,8$, calcule $\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

92. Sabendo que $16 \operatorname{cos}^2 x + 3 \operatorname{sen}^2 x = 7$, obtenha $\operatorname{tg} x$.

93. Resolva as equações:

a) $\operatorname{tg} x = 1$ b) $\operatorname{cotg} x = -1$ c) $\operatorname{tg} (x - \pi) = \sqrt{3}$
d) $\operatorname{tg} 2x = 0$ e) $\operatorname{cotg} x = 0$ f) $\operatorname{cotg} \left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$



Pense e Faça

F₈: Etiquetas Trocadas

Em um armazém, existem três caixas. Uma só contém maçãs, outra só pêras, e a outra, maçãs e pêras. Nenhuma das caixas está com a etiqueta correta. Quantas frutas, no mínimo, devem ser tiradas das caixas para que as etiquetas sejam colocadas corretamente?

- 6.1 - Função Tangente
- 6.2 - Considerações sobre a Função Tangente
- 6.3 - Função Cotangente
- 6.4 - Considerações sobre a Função Cotangente
- 6.5 - Função Secante e Função Cossecante

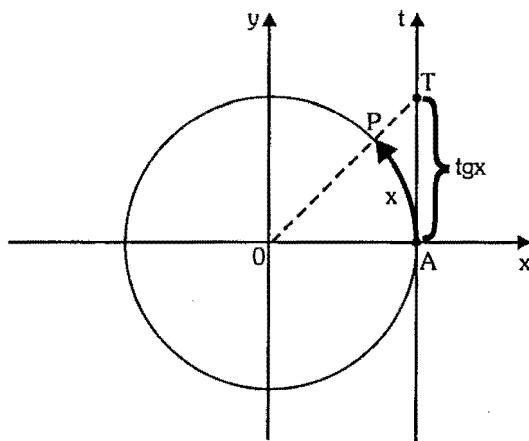
Capítulo 6

Funções Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

6.1

Função Tangente

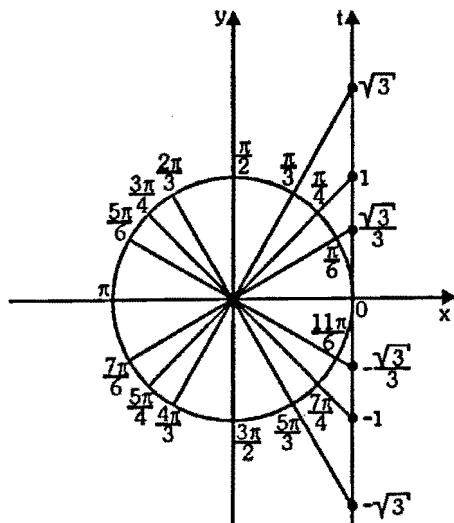
Chama-se **função tangente de x** , indica-se $y = \operatorname{tg}x$ ou $f(x) = \operatorname{tg}x$, a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, em que $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, que associa a cada arco de medida x , com $x \in D$, o número real $y = \operatorname{tg}x$.



$$\operatorname{tg} x = AT$$

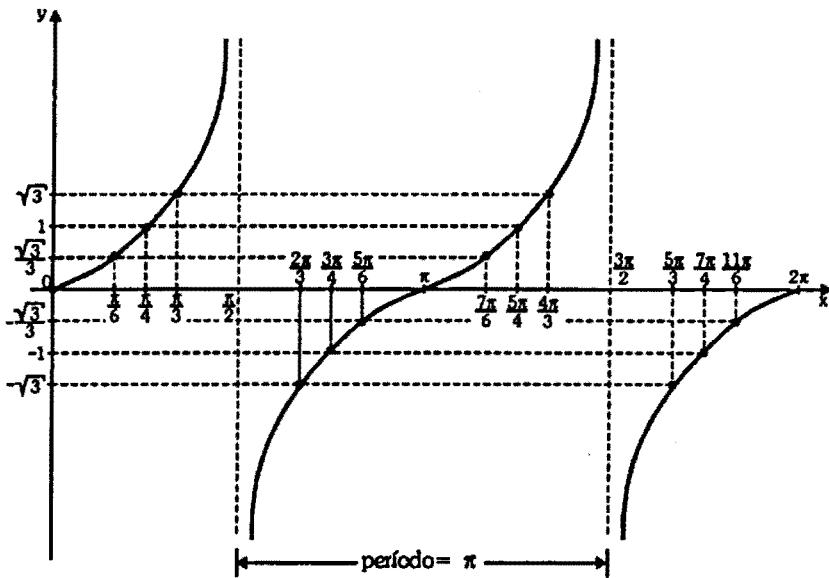
Gráfico

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos os valores conhecidos para a $\operatorname{tg}x$.



x	y = $\operatorname{tg}x$	Pontos
0	0	(0, 0)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	1	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	não existe	-
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	-1	$\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
π	0	$(\pi, 0)$
:	:	:

Representando esses pontos no sistema cartesiano, obtemos o gráfico da função $y = \operatorname{tg}x$.



6.2

Considerações sobre a Função Tangente

- O gráfico da função tangente chama-se **tangentóide**.
- O domínio da função tangente é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- O conjunto imagem da função tangente é $\text{Im} = \mathbb{R}$.
- A função tangente é **crescente** em \mathbb{R} .
- A função tangente é periódica de período $p = \pi$.
- A função tangente é **positiva** no 1º e 3º quadrantes e **negativa** no 2º e 4º quadrantes.
- A função tangente é **ímpar**, isto é, $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Exercícios

94. Determine o domínio e o período da função $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Solução:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Fazendo $x - \frac{\pi}{4} = \alpha$, então existe $\operatorname{tg} \alpha$ se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{Assim, } D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Para $\operatorname{tg} \alpha$ completar um período, devemos ter:

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{Então: } p = \frac{7\pi}{4} - \left(\frac{3\pi}{4}\right) = \pi$$

95. Determine o domínio e o período das seguintes funções:

a) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $y = \operatorname{tg} 3x$ c) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

96. Determine:

a) $\operatorname{tg} 28\pi$ b) $\operatorname{tg} 17\pi$ c) $\operatorname{tg} \frac{37\pi}{3}$ d) $\operatorname{tg} \frac{43\pi}{4}$

97. Sendo $\operatorname{tg}x = \frac{4}{3}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}x$.

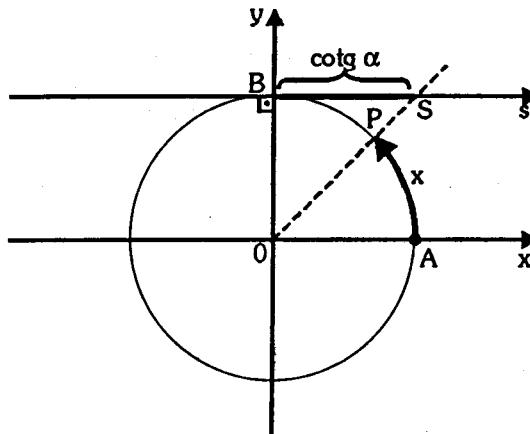
98. Dado $\operatorname{tg}x = 3$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{cos}x$.

99. Sendo $\frac{3\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x} = 2$, e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x$.

6.3

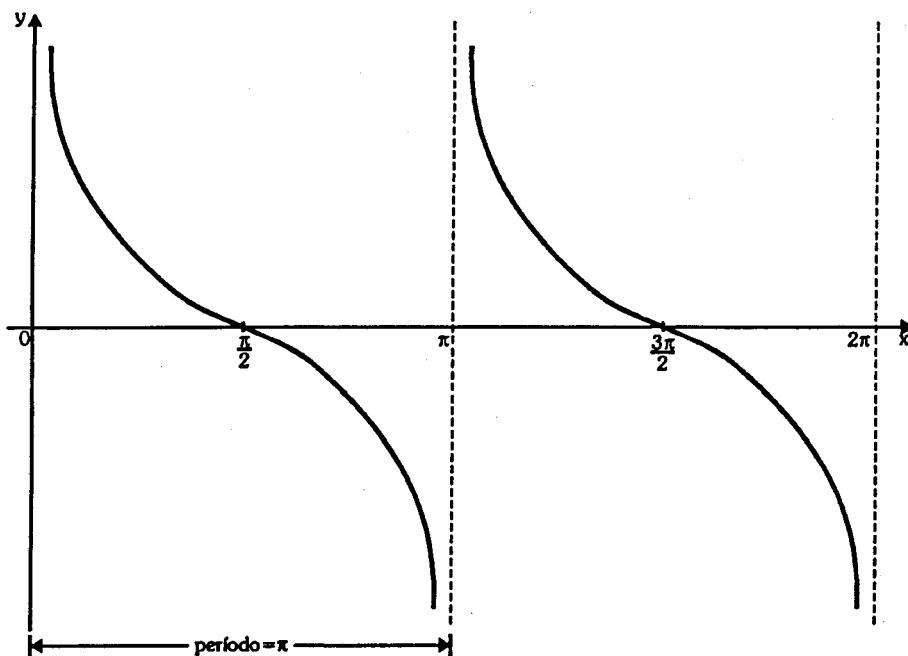
Função Cotangente

Chama-se **função cotangente de x**, indica-se $y = \operatorname{cotgx}$ ou $f(x) = \operatorname{cotgx}$, a função $f: D \rightarrow \mathbb{IR}$, em que $D = \{x \in \mathbb{IR} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, que associa a cada arco de medida x , com $x \in D$, o número real $y = \operatorname{cotgx}$.



$$\operatorname{cotgx} = BS$$

De modo análogo à função tangente, temos o seguinte gráfico da função cotangente.



6.4

Considerações sobre a Função Cotangente

- O gráfico da função cotangente chama-se **cotangentóide**.
- O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- O conjunto imagem da função cotangente é $\text{Im} = \mathbb{R}$.
- A função cotangente é **decrescente** em \mathbb{R} .
- A função cotangente é periódica de período $p = \pi$.
- A função cotangente é **positiva** no 1º e 3º quadrantes e **negativa** no 2º e 4º quadrantes.
- A função cotangente é **ímpar**, isto é, $\cotg x = -\cotg(-x)$.

Consideremos no ciclo trigonométrico, um arco \widehat{AP} de medida α .

1º) Chama-se **secante de α** , $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o inverso do cosseno de α . Indica-se:

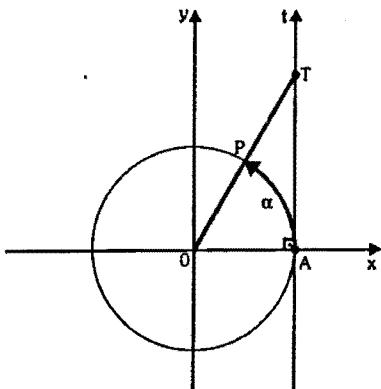
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Sendo assim, a secante e o cosseno possuem os mesmos sinais.

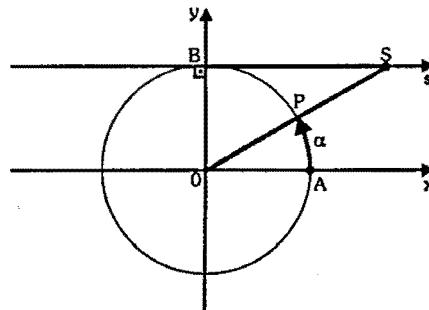
2º) Chama-se **cossecante de α** , $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, o inverso do seno de α . Indica-se:

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Sendo assim, a cossecante e o seno possuem os mesmos sinais.



$$\sec \alpha = OT$$



$$\text{cossec } \alpha = OS$$

Gráfico da Função Secante:

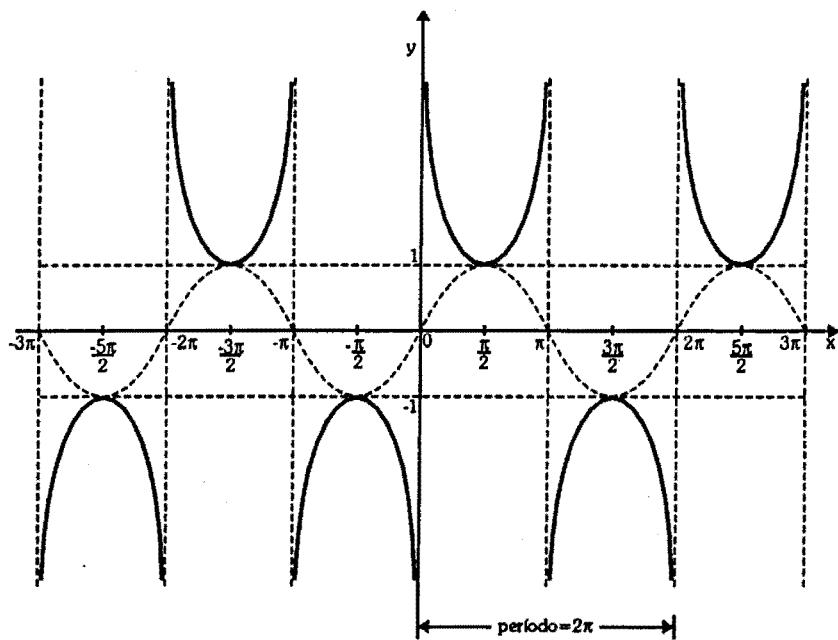
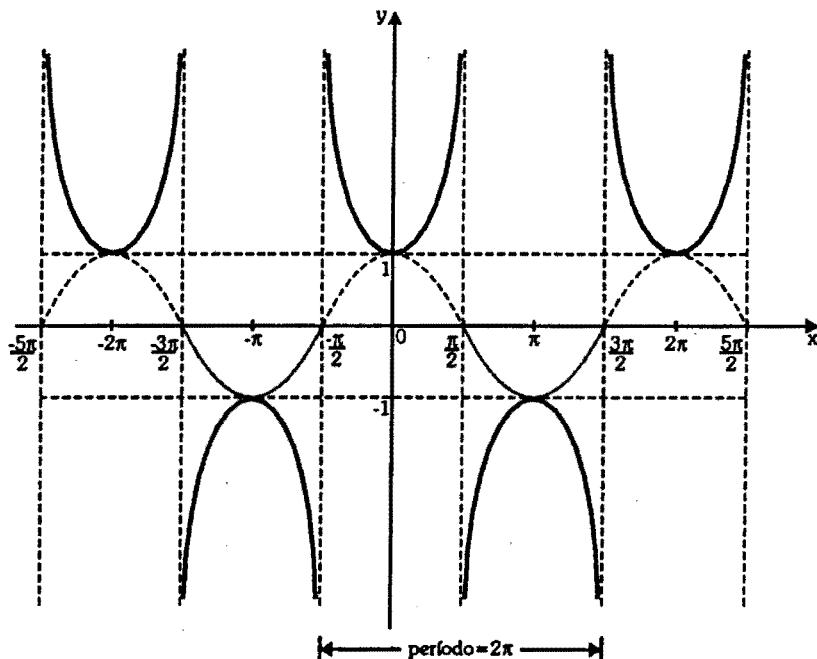


Gráfico da Função Cossecante:



Exercícios

100. Determine o domínio e o período das seguintes funções:

a) $f(x) = \cotg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

b) $f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(x) = \cossec 2x$

101. Calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\sec \frac{3\pi}{4} + \cossec \frac{5\pi}{6}}{\cotg \frac{4\pi}{3}}$$

102. Resolva as equações:

a) $\sec\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1$

b) $3 \sec x = 9$

c) $\cossec 4x = 0$



Pense e Faça

F: As Torneiras Novamente

Um tanque é abastecido por duas torneiras. Uma delas enche o tanque em 10 minutos e a outra, em 20 minutos. As duas juntas enchem o tanque em quantos minutos?

7.1 - Relações Principais
7.2 - Relações Decorrentes

Capítulo 7
Relações
Trigonométricas

7.1

Relações Principais

Sendo α um número real, temos as seguintes relações já vistas anteriormente.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi$$

em que $k \in \mathbb{Z}$

7.2

Relações Decorrentes

Como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ e $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$,

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

Dividindo os membros $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ por $\cos^2 \alpha$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

Dividindo os membros $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ por $\operatorname{sen}^2 \alpha$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right)^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \right)^2 \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cossec}^2 \alpha$$

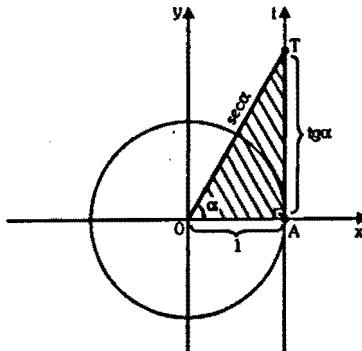
Resumindo, temos:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$$

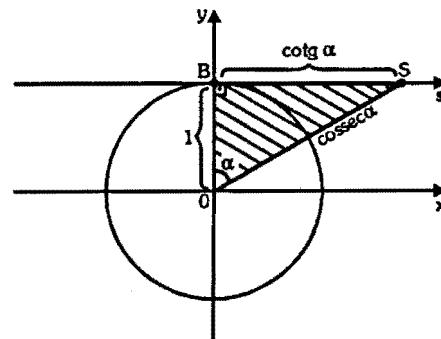
$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{cossec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha, \quad \alpha \neq k\pi$$

Das duas últimas relações, concluímos que a $\sec \alpha$ e a $\csc \alpha$ são hipotenusas dos triângulos abaixo hachurados.



$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$



$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

Exercícios

103. Dado $\sin x = \frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, obtenha as demais funções trigonométricas.

Solução:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Como } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot g x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow \cot g x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow \sec x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \sec x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cossec x = \frac{3}{2}$$

104. Dado $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule as demais funções trigonométricas.

105. Sabendo que $\sec x = 3$ e $\operatorname{tg} x < 0$, determine $\operatorname{sen} x$.

106. Se $\operatorname{tg} x = \sqrt{5}$, determine $\operatorname{sen}^2 x$.

107. Se x é um arco do 3º quadrante e $\operatorname{tg} x = 1$, determine $\cos x$.

108. Se $\cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, determine o valor de $\sqrt{2 \cot g \theta + \cossec^2 \theta}$

109. Calcule o valor da expressão $y = \frac{\sec x + \cot g x}{\cos x + \operatorname{tg} x}$, sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{4}$ e x é um arco do 2º quadrante.

110. Sendo $\cos x = \frac{1}{2}$ e x um arco do 1º quadrante, calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cossec x}{\sec x - \cos x}$$

cas.

111. Sendo $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e x um arco do 3º quadrante, calcule o valor de:

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

112. Calcule o valor da expressão $E = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ para $\cos x = -\frac{3}{7}$ e $\operatorname{tg} x < 0$.

113. Sabendo que $\sin x = \frac{3}{5}$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, calcule o valor numérico da expressão: $y = \frac{\sin x \cdot \operatorname{cossec}^2 x}{\sec^2 x \cdot \operatorname{cotg} x - \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{tg} x}$.

114. Sendo x um arco com extremidade no segundo quadrante e $\sec x = -\frac{5}{3}$, calcule o valor de $5 \sin^2 x - 3 \operatorname{tg} x$.

115. Se $\sin x = \frac{24}{25}$ e $\sec x < 0$, calcule o valor de $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.

116. Simplifique a expressão $y = \frac{\cos^3 x - 2 \cos x + \sec x}{\cos x \cdot \sin^2 x}$.

117. Mostre que $\frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sec^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cossec}^2 x}$ é igual a 2.

da

118. Sendo α um ângulo agudo e $\operatorname{tg} \alpha = 2$, quais os possíveis valores de $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$?

119. Se $\operatorname{tg}x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}x$.

120. Determine m e x que satisfaçam simultaneamente:

$$\operatorname{sen}x = \frac{m-3}{2} \text{ e } \sec x = \frac{2}{m-1}$$

Solução:

$$\text{Como: } \sec x = \frac{2}{m-1} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{m-1} \Rightarrow \cos x = \frac{m-1}{2}$$

Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\left(\frac{m-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \text{ou} \\ m = 3 \end{cases}$$

1a) Para $m = 1$, não existe $\sec x$.

2a) Para $m = 3$, temos $\operatorname{sen}x = \frac{3-3}{2} = 0$ e $\cos x = \frac{3-1}{2} = 1$, portanto $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

121. Determine m e x que satisfaçam simultaneamente:

$$\cos x = m - \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{cossec} x = \frac{2}{\sqrt{2m+1}}$$



Pense e Faça

F₁₀: Cálculo em Família

Um pai, querendo encorajar seu filho à prática de cálculo, combina pagar-lhe por cada problema certo 8 saldos, mas retira-lhe 5 saldos por cada problema não resolvido ou errado. Depois de 26 problemas, fazem as contas e o filho nada recebe e nada deve. Quantos problemas ele resolveu?



Pense e Faça

F₁₁: Aposentado

Uma escola tem 18 professores. Um deles se aposenta e é substituído por um professor de 22 anos. Com isso, a média das idades dos professores diminui de 2 anos. Qual é a idade do professor que se aposentou?

- 8.1 - Redução ao Primeiro Quadrante
- 8.2 - Seno e Cosseno de Arcos Complementares
- 8.3 - Identidades

Capítulo 8

Redução e Identidades

8.1

Redução ao Primeiro Quadrante

Reducir um arco ao primeiro quadrante significa determinar um arco no primeiro quadrante cujas funções trigonométricas têm o mesmo valor absoluto.

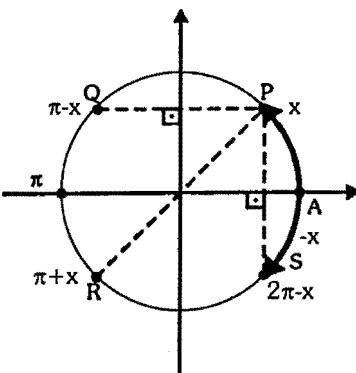
Consideremos um arco \widehat{AP} de medida x no 1º quadrante e as seguintes simetrias do ponto P:

1º) em relação ao eixo Oy, temos o arco \widehat{AQ} de medida $\pi - x$ no 2º quadrante.

2º) em relação ao centro do ciclo, temos o arco \widehat{AR} de medida $\pi + x$ no 3º quadrante.

3º) em relação ao eixo Ox, temos o arco \widehat{AS} de medida $2\pi - x$ no 4º quadrante.

Assim, no ciclo trigonométrico, temos:



Observando as abscissas e as ordenadas dos pontos P, Q e R, é imediato que:

$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(2\pi - x) = -\sin x$	$\cos(2\pi - x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$

Exercícios

122. Reduza ao 1º quadrante:

a) $\sin 130^\circ$

b) $\cos 250^\circ$

c) $\sin 340^\circ$

d) $\sec \frac{4\pi}{3}$

e) $\tg \frac{4\pi}{5}$

f) $\cot g \frac{11\pi}{6}$

Solução:

a) $\sin 130^\circ$

Como 130° é um arco do 2º quadrante, então:

$180 - x = 130^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$, assim:

$\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$

b) $\cos 250^\circ$

Como 250° é um arco do 3º quadrante, então:

$180 + x = 250^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$, assim:

$\cos 250^\circ = -\cos 70^\circ$

c) $\sin 340^\circ$

Como 340° é um arco do 4º quadrante, então:

$$360 - x = 340^\circ \Rightarrow x = 20^\circ, \text{ assim:}$$

$$\sin 340^\circ = -\sin 20^\circ$$

d) $\sec \frac{4\pi}{3}$

Como $\frac{4\pi}{3}$ é um arco do 3º quadrante, então:

$$\pi + x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} - \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \text{ assim:}$$

$$\sec \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{3}} = -\sec \frac{\pi}{3}$$

e) $\tan \frac{4\pi}{5}$

Como $\frac{4\pi}{5}$ é um arco do 2º quadrante, então:

$$\pi - x = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow x = \pi - \frac{4\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}, \text{ assim:}$$

$$\tan \frac{4\pi}{5} = \frac{\sin \frac{4\pi}{5}}{\cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{-\cos \frac{\pi}{5}} = -\tan \frac{\pi}{5}$$

f) $\cot \frac{11\pi}{6}$

Como $\frac{11\pi}{6}$ é um arco do 4º quadrante, então:

$$2\pi - x = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x = 2\pi - \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \text{ assim:}$$

$$\cot g \frac{11\pi}{6} = \frac{\cos \frac{11\pi}{6}}{\sen \frac{11\pi}{6}} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sen \frac{\pi}{6}} = -\cot g \frac{\pi}{6}$$

123. Reduza ao 1º quadrante:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------|
| a) $\sen 145^\circ$ | b) $\cos 100^\circ$ | c) $\sen 235^\circ$ |
| d) $\cos 196^\circ$ | e) $\sen 310^\circ$ | f) $\cos 325^\circ$ |
| g) $\sen \frac{9\pi}{10}$ | h) $\cos \frac{4\pi}{5}$ | i) $\sen \frac{5\pi}{4}$ |
| j) $\cos \frac{7\pi}{6}$ | k) $\sen \frac{19\pi}{10}$ | l) $\cos \frac{5\pi}{3}$ |

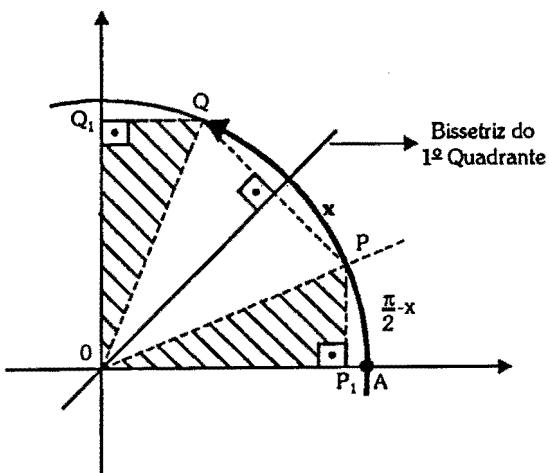
124. Reduza ao 1º quadrante:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| a) $\sec 160^\circ$ | b) $\csc \frac{10\pi}{9}$ |
| c) $\tg \frac{6\pi}{5}$ | d) $\cot g \frac{19\pi}{10}$ |
| e) $\sec \frac{37\pi}{4}$ | f) $\tg \frac{17\pi}{6}$ |
| g) $\sen (-10^\circ)$ | h) $\cos (-40^\circ)$ |

8.2

Seno e Cosseno de Arcos Complementares

Seja \widehat{AP} um arco de medida x , $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e um ponto Q do ciclo, simétrico de P em relação à bissetriz do 1º quadrante.



Os triângulos OQ_1Q e OP_1P são congruentes. Assim:

$$OQ_1 = OP_1 \Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$QQ_1 = PP_1 \Rightarrow \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Exemplos

$$\sin 60^\circ = \cos (90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\cos 86^\circ = \sin (90^\circ - 86^\circ) = \sin 4^\circ$$

$$\sec \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}} = \operatorname{cossec} \frac{\pi}{8}$$

Exercícios

125. Sendo $\sin 53^\circ = 0,80$, calcule $\cos 37^\circ$.

126. Simplifique as seguintes expressões:

a) $y = \frac{\sin(\pi+x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos(2\pi-x) \cdot \cos(\pi-x)}$

b) $y = \frac{\sin(\pi+x) \cdot \cot g(2\pi-x)}{\cos(\pi-x) \cdot \cossec(\pi+x)}$

c) $y = \frac{(1-\sin x) \cdot \sin x \cdot \tg(\pi+x)}{\tg x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \frac{\sin(\pi-x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin(\pi+x)}$

127. Sendo $\sin x = \frac{1}{3}$, calcule o valor de: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \sec(\pi+x)}{\tg(\pi-x)}$

128. Sendo $\sec x = 2$, calcule o valor de: $\frac{\sec(\pi-x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cossec x \cdot \cot g(\pi+x) \cdot \sin x}$

129. Mostre que:

a) Se α, β e γ são medidas dos ângulos internos de um triângulo, então $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$.

b) Se α e β são medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então $\sin \alpha = \cos \beta$.

Duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são idênticas. Indica-se $f(x) \equiv g(x)$, se e somente se, a sentença $f(x) = g(x)$ for verdadeira para todo x pertencente ao domínio de ambas as funções.

São exemplos de identidades:

- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$
- $\sin x = \tan x \cdot \cos x$

Todas as relações que já foram vistas também são identidades, como por exemplo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, que podem ser empregadas na demonstração de outras identidades.

Podemos provar uma identidade pelos seguintes métodos:

1º) Partir de um dos membros e chegar ao outro.

Prove a identidade: $\frac{\cos x + \sin x \cdot \tan x}{\sin x \cdot \sec x} = \operatorname{cosec} x$

Solução:

1º membro

$$\frac{\cos x + \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}} = \frac{1}{\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}} =$$

$$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x \quad \boxed{2^\circ \text{ membro}}$$

2º) Transformar os dois membros separadamente numa mesma expressão.

Prove a identidade: $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}$

Solução:

1º membro

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x} &= \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x^2}{\cos x}} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)}\end{aligned}$$

2º membro

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x} &= \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \operatorname{sen} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x}} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

ma
3º) Mostrar que a diferença entre os dois membros é igual a zero.

Prove a identidade: $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

Solução:

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x} &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x) - \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \\ &= \frac{(1 - \cos^2 x) - \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = 0\end{aligned}$$

Exercícios

130. Prove as seguintes identidades.

a) $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{1 + \sec x} = \sin x$

b) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

c) $\sec^2 x \cdot \operatorname{cossec}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x$

d) $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \sin^2 x - 1$

e) $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \sin x \cos x} = \sin x - \cos x$

f) $\frac{\operatorname{cossec} x - \sec x}{\cot g x - 1} = \sec x$

g) $\frac{\cot g^2 x}{1 + \cot g^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

$$\text{h)} \quad \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = 2 \operatorname{cosec} x$$

$$\text{i)} \quad \frac{\tan x - \sin x}{\sin^2 x} \cdot \operatorname{cosec} x = \frac{\sec x}{1 + \cos x}$$

$$\text{j)} \quad \frac{\sin x + \sin y}{\cos x - \cos y} = \frac{\cos x + \cos y}{\sin y - \sin x}$$



Pense e Faça

F₁₂: É dê-me e não me dá

Se dou 7 reais a cada um dos pobres que está à minha porta, ficarei com 24 reais; se quiser dar a cada um 9 reais, faltar-me-ão 32. Qual o número de pobres e quantos reais tenho?



Pense e Faça

F₁₃: Elevador

Um elevador pode levar 20 adultos ou 24 crianças. Se 15 adultos já estão no elevador, quantas crianças ainda podem entrar?

- 9.1 – Seno e Cosseno da Soma
- 9.2 – Tangente da Soma
- 9.3 – Seno, Cosseno e Tangente da Diferença
- 9.4 – Multiplicação de Arcos
- 9.5 – Transformação em Produto

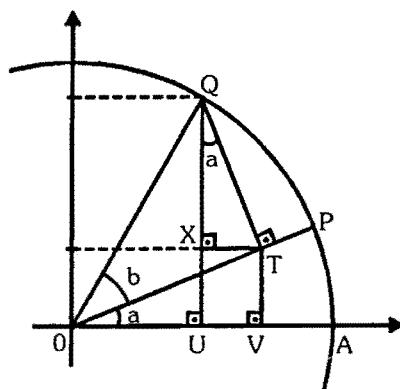
Capítulo 9

Transformações

9.1

Seno e Cosseno da Soma

Consideremos dois arcos consecutivos \widehat{AP} e \widehat{PQ} de medidas a e b , respectivamente, no 1º quadrante.



Da figura, temos:

$$\Delta OTQ : \quad \text{sen } b = \frac{TQ}{OQ} = \frac{TQ}{1} \Rightarrow TQ = \text{sen } b$$

$$\cos b = \frac{OT}{OQ} = \frac{OT}{1} \Rightarrow OT = \cos b$$

$$\Delta TQX: \quad \text{sen } a = \frac{XT}{TQ} \Rightarrow XT = \text{sen } a \cdot TQ = \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\cos a = \frac{XQ}{TQ} \Rightarrow XQ = TQ \cos a = \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\Delta OVT: \quad \text{sen } a = \frac{VT}{OT} \Rightarrow VT = \text{sen } a \cdot OT = \text{sen } a \cdot \cos b$$

$$\cos a = \frac{OV}{OT} \Rightarrow OV = \cos a \cdot OT = \cos a \cdot \cos b$$

Então:

$$1^{\text{a}}) \quad \text{sen}(a+b) = \frac{UQ}{OQ} = \frac{UQ}{1} = UQ = UX + XQ = VT + XQ = \\ = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$$

logo: $\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$$2^{\text{a}}) \quad \cos(a+b) = \frac{OU}{OQ} = \frac{OU}{1} = OU = OV - UV = OV - XT = \\ = \cos a \cos b - \text{sen } a \sin b$$

logo: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \sin b$

É possível provar que as fórmulas anteriores são válidas para quaisquer medidas de a e b .

Exercícios

131. Calcule:

a) $\text{sen } 75^\circ$

b) $\cos 105^\circ$

Solução:

a) $\text{sen } 75^\circ$

$$\text{sen } 75^\circ = \text{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ + \text{sen } 30^\circ \cos 45^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos 105^\circ$

$$\cos 105^\circ = \cos(50^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$$

$$\cos 105^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

132. Calcule:

a) $\sin 105^\circ$

b) $\cos 75^\circ$

133. Mostre que:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

d) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$

134. Sendo $\cos x = \frac{3}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$.

9.2

Tangente da Soma

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Dividindo o numerador e o denominador por **cos a cos b**, temos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

logo:

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$$

Com $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Exercícios

135. Calcule $\tan 285^\circ$.

Solução:

$$\tan 285^\circ = \tan(360^\circ - 285^\circ) = -\tan 75^\circ =$$

$$-\tan(45^\circ + 30^\circ) = -\frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = -\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$-\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

136. Calcule:

a) $\tan 105^\circ$ b) $\tan 255^\circ$

137. Sendo $\tan x = 3$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\tan\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$.

138. Sendo $\sin a = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ e $\cos b = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, calcule $\tan(a+b)$.

139 Se $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, calcule $\operatorname{tg} 22,5^\circ$.

140. Prove as identidades:

$$\text{a)} \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} = \operatorname{tga} + \operatorname{tgb} \quad \text{b)} \operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b}$$

9.3

Seno, Cosseno e Tangente da Diferença

Sabemos que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, vamos deduzir a fórmula de $\sin(a-b)$. Como $a-b = a+(-b)$, vem:

$$\sin(a-b) = \sin[a+(-b)] = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a$$

Lembrando que $\cos(-x) = \cos x$ e $\sin(-x) = -\sin x$, temos:

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a}$$

De modo análogo, temos:

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

e

$$\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}}$$

com $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Exercícios

141. Calcule:

a) $\sin 15^\circ$ b) $\operatorname{tg} 15^\circ$

Solução:

a) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

b) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} =$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

142. Calcule $\tan(a - b)$, sendo $\tan a = 2$ e $\tan b = 3$.

143. Calcule:

a) $\cos 15^\circ$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\tan \frac{13\pi}{12}$

144. Dados $\sin a = \frac{1}{3}$ e $\cos b = \frac{4}{5}$, **a** e **b** agudos, calcule:

a) $\sec(a - b)$

b) $\tan(a - b)$

c) $\cotg(a - b)$

145. Se $\tan x = \frac{3}{2}$ e $x - y = \frac{\pi}{6}$, calcule $\tan y$.

146. Sendo $\tan a = \frac{4}{5}$ e $\cos b = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$, calcule $\tan(a + b)$.

147. Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\cos x = \frac{3}{5}$, obtenha $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

148. Prove as identidades:

a) $\sin(a + b) \cdot \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

b) $\cos(a + b) + \sin(a - b) = (\cos a + \sin a)(\cos b - \sin b)$

Consideremos as seguintes fórmulas de adição de dois arcos de medidas **a** e **b**:

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Substituindo **b** por **a** nessas fórmulas, temos:

$$1^{\text{o}}) \quad \sin(a+a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a$$

$$\boxed{\sin 2a = 2 \sin a \cos a}$$

$$2^{\text{o}}) \quad \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$$

$$\cos 2a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a \Rightarrow \boxed{\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \Rightarrow \boxed{\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1}$$

$$3^{\text{o}}) \quad \tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \tan a}$$

$$\boxed{\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}}$$

Exercícios

149. Sendo $\sin a = \frac{1}{3}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\sin 2a$.

Solução:

$$\text{Temos } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, então:

$$\sin 2a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

150. Sendo $\cos a = \frac{3}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule:

a) $\sin 2a$

b) $\cos 2a$

c) $\operatorname{tg} 2a$

151. Sendo x um arco do 3º quadrante e $\sin x = -\frac{1}{2}$, calcule:

a) $\sin 4x$

b) $\cos 3x$

152. Sabendo que $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$, calcule $\sin 2x$.

153. Dado $\sin x = \frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$.

154. Calcule $\sin 22^\circ 30'$.

Solução:

$$\text{Temos: } \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

Fazendo $a = 22^\circ 30'$, então $2a = 45^\circ$. Assim:

$$\cos 45^\circ = 1 - 2 \sin^2 22^\circ 30' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 22^\circ 30' = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

155. Calcule:

a) $\cos 22^\circ 30'$ b) $\tan 22^\circ 30'$

156. Sendo $\tan \frac{a}{2} = 2$, calcule $\tan 2a$

157. Prove as identidades:

a) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

b) $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \tan^2 x$

158. Prove que:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Solução:

Sendo $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$, então $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$

Assim, $\sin a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$

Fazendo $2a = x \Rightarrow a = \frac{x}{2}$, então:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

159. Prove que:

$$\text{a)} \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\text{b)} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

9.5

Transformação em Produto

Podemos transformar em produto (ou fatorar) uma soma ou diferença de senos, cossenos e tangentes. Estas fatorações são úteis na resolução de algumas equações trigonométricas.

Consideremos as expressões:

$$\bullet \quad \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cos b + \operatorname{sen}b \cos a \quad (1)$$

$$\bullet \quad \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}a \cos b - \operatorname{sen}b \cos a \quad (2)$$

$$\bullet \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen}a \operatorname{sen}b \quad (3)$$

$$\bullet \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen}a \operatorname{sen}b \quad (4)$$

Temos as seguintes transformações em produto:

1^{a)} Somando (1) e (2):

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen}a \cos b$$

Fazendo:

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}, \text{ obtemos: } a = \frac{p+q}{2} \text{ e } b = \frac{p-q}{2}$$

Então:

$$\operatorname{sen}p + \operatorname{sen}q = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2^{a)} Subtraindo (1) e (2):

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen}b \cos a$$

Como:

$a + b = p$, $a - b = q$, $a = \frac{p+q}{2}$ e $b = \frac{p-q}{2}$, temos:

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

3^{a)} Somando (3) e (4):

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

Como:

$a + b = p$, $a - b = q$, $a = \frac{p+q}{2}$ e $b = \frac{p-q}{2}$, temos:

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

4^{a)} Subtraindo (3) e (4):

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b$$

Como $a + b = p$, $a - b = q$, $a = \frac{p+q}{2}$ e $b = \frac{p-q}{2}$, temos:

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

Exercícios

160. Transforme em produto:

a) $\sin 70^\circ + \sin 30^\circ$

b) $\cos 50^\circ - \cos 20^\circ$

Solução:

a) $\sin 70^\circ + \sin 30^\circ$

Fazendo $p = 70^\circ$ e $q = 30^\circ$ na fórmula

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right), \text{ temos:}$$

$$\sin 70^\circ + \sin 30^\circ = 2 \sin\left(\frac{70^\circ + 30^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{70^\circ - 30^\circ}{2}\right)$$

$$\sin 70^\circ + \sin 30^\circ = 2 \cdot \sin 50^\circ \cdot \cos 20^\circ$$

b) $\cos 50^\circ - \cos 20^\circ$

Fazendo $p = 50^\circ$ e $q = 20^\circ$ na fórmula

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right), \text{ temos:}$$

$$\cos 50^\circ - \cos 20^\circ = -2 \sin\left(\frac{50^\circ + 20^\circ}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{50^\circ - 20^\circ}{2}\right)$$

$$\cos 50^\circ - \cos 20^\circ = -2 \sin 35^\circ \cdot \sin 15^\circ$$

161. Fatore as expressões:

a) $\sin 50^\circ + \sin 30^\circ$

b) $\sin 70^\circ - \sin 40^\circ$

c) $\cos 60^\circ + \cos 20^\circ$

d) $\cos 85^\circ - \cos 15^\circ$

162. Fatore as expressões:

a) $1 + \cos 40^\circ$

b) $\cos 70^\circ + \sin 48^\circ$

Solução:

a) $1 + \cos 40^\circ = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ = 2 \cos\left(\frac{0^\circ + 40^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{0^\circ - 40^\circ}{2}\right) =$

$$= 2 \cos 20^\circ \cos (-20^\circ)$$

Como $\cos(-20^\circ) = -\cos 20^\circ$, então:

$$1 + \cos 40^\circ = 2 \cos 20^\circ \cos 20^\circ = 2 \cos^2 20^\circ$$

b) $\cos 70^\circ + \sin 48^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) + \sin 48^\circ =$

$$= \sin 20^\circ + \sin 48^\circ = 2 \sin\left(\frac{20^\circ + 48^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{20^\circ - 48^\circ}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin 34^\circ \cos(-12^\circ) = 2 \sin 34^\circ \cos 12^\circ$$

$$\cos 70^\circ + \sin 48^\circ = 2 \sin 34^\circ \cos 12^\circ$$

163. Fatore as expressões:

a) $1 + \sin 20^\circ$

b) $\cos 72^\circ - 1$

c) $\sin 70^\circ + \cos 8^\circ$

d) $\cos 20^\circ - \sin 40^\circ$

164. Transforme em produto:

a) $\sin 2x + \sin 6x$

b) $\cos 7x - \cos 3x$

c) $-1 + \cos 2x$

d) $\sin x + 1$

e) $\sin 2x - \cos x$

f) $\sin x + \cos x$

165. Transforme num produto de senos:

$$\sin^2 3x - \sin^2 x$$

166. Fatore a seguinte expressão:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

167. Sabendo que existem $\operatorname{tg} p$ e $\operatorname{tg} q$, prove que:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

Solução:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cos q + \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q}$$

Como $\operatorname{sen} p \cos q + \operatorname{sen} q \cos p = \operatorname{sen}(p+q)$, então:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}$$

- 168.** Sabendo que existem $\operatorname{tg} p$ e $\operatorname{tg} q$, prove que:

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

- 169.** Transforme em produto:

- a) $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ$ b) $\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ$
c) $1 + \operatorname{tg} 10^\circ$ d) $\operatorname{tg} 18^\circ - 1$

- 170.** Transforme o produto $\cos 2x \cos 4x$ numa soma equivalente.

Solução:

Temos: $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Então: $\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos p + \cos q)$

Comparando $\cos 2x \cos 4x$ com esta expressão, vem:

$$\frac{p+q}{2} = 2x \text{ e } \frac{p-q}{2} = 4x \Rightarrow \begin{cases} p+q = 4x \\ p-q = 8x \end{cases} \Rightarrow p = 6x \text{ e } q = -2x$$

logo: $\cos 2x \cos 4x = \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos(-2x)) = \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x)$

171. Calcule o valor numérico das expressões:

a) $y = \sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$

b) $y = \sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$



Pense e Faça

F₁₄: A Cachorrada do Coelho

Um coelho dá 6 saltos enquanto um cachorro dá 5 saltos, mas 6 saltos do cachorro equivalem a 9 saltos do coelho. Quando o cachorro começou a perseguir o coelho, ele estava 60 saltos (do coelho) na frente. Quantos saltos deve dar o cachorro para alcançar o coelho?

- 10.1 - Equações Redutíveis a uma Equação do 2º Grau**
10.2 - Equações Fatoráveis

Capítulo 10

Equações Trigonométricas

Vimos em capítulos anteriores, equações do tipo $\sin x = a$, $\cos x = b$ e $\tg x = c$. Neste capítulo, estudaremos dois tipos de equações trigonométricas.

10.1

Equações Redutíveis a uma Equação do 2º Grau

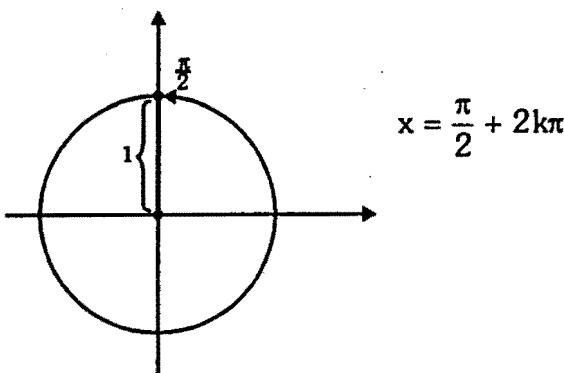
Resolva a equação: $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

Solução:

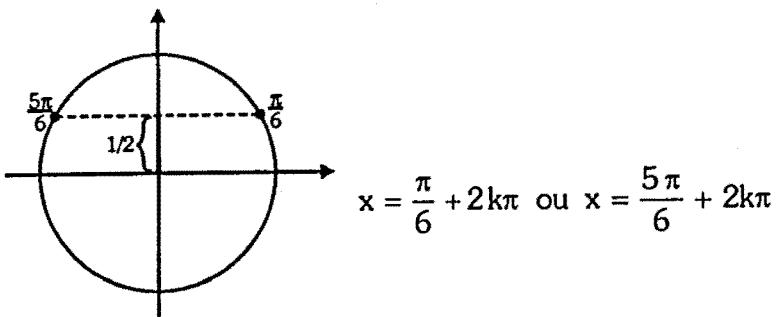
Fazendo $\sin x = y$, temos: $2y^2 - 3y + 1 = 0$

Resolvendo esta equação, encontramos $y = 1$ ou $y = \frac{1}{2}$.

- Para $y = 1 \Rightarrow \boxed{\sin x = 1}$



• Para $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{1}{2}}$



Assim:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

Exercícios

172. Resolva as equações:

- | | |
|---|--|
| a) $2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$ | b) $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ |
| c) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$ | d) $2 \cos^2 x - \cos x = 0$ |
| e) $3 \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$ | f) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x = 0$ |

173. Resolva as equações:

- | |
|--|
| a) $\frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1+\sin x} = \frac{4}{3}$ |
| b) $4 \sin^4 x - 11 \sin^2 x + 6 = 0$ |
| c) $\cos 2x - 4 \cos x + 3 = 0$ |

174. Resolva a equação $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

Solução:

Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \sin^2 x$, temos:

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$$

$$2 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Fazendo $\sin x = y$, temos: $2y^2 - y - 1 = 0$

Resolvendo esta equação, encontramos:

$$y = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

Assim:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

175. Resolva as equações:

a) $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$

b) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

c) $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0$

d) $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$

176. Resolva a equação $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$

Solução:

Vamos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin x + \cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Da 1ª equação temos: $\cos x = 1 - \sqrt{3} \sin x$. (1)

Substituindo $\cos x$ por $1 - \sqrt{3} \sin x$ na 2ª equação, vem:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3} \sin x)^2 &= 1 \Rightarrow \sin^2 x + 1 - 2\sqrt{3} \sin x + 3 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x &= 0 \Rightarrow \sin x(4 \sin x - 2\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

Substituindo em (1):

$$\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 - \sqrt{3} \cdot 0 = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

ou

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Assim:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

177. Resolva as equações:

a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

b) $\sin x + \cos x = 1$

c) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$

São equações do tipo $\sin p \pm \sin q = 0$ e $\cos p \pm \cos q = 0$ em que utilizamos as fórmulas de transformação em produto.

Resolva a equação: $\sin 2x + \sin x = 0$

Solução:

$$\sin 2x + \sin x = 0 \rightarrow 2\sin\left(\frac{2x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x-x}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{3x}{2} \cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{3x}{2} = 0 \text{ ou } \cos\frac{x}{2} = 0$$

Então:

$$\bullet \sin\frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

ou

$$\bullet \cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \right\}$$

Exercícios

178. Resolva as equações:

- a) $\sin 5x + \sin 3x = 0$
- b) $\sin 6x - \sin 2x = 0$
- c) $\cos 7x + \cos 4x = 0$
- d) $\cos 10x - \cos 3x = 0$

179. Resolva as equações:

- a) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$
- b) $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$



Pense e Faça

F₁₅: A Perseguida

Numa sala de 30 pés de comprimento, 12 de largura e 12 de altura, há uma aranha no centro de uma das paredes menores, a 1 pé do teto; existe uma mosca na parede oposta, a 1 pé do chão. A aranha tem certas intenções com relação à mosca. Qual é o menor caminho possível pelo qual deve ir a aranha para atingir sua presa?



Pense e Faça

F₁₆: Um Quarto Crescente

Será que você consegue dividir a figura de uma lua em quarto crescente em seis partes traçando somente duas linhas?

(Extraído do livro "Aprenda Matemática Brincando" - J. Perelman).

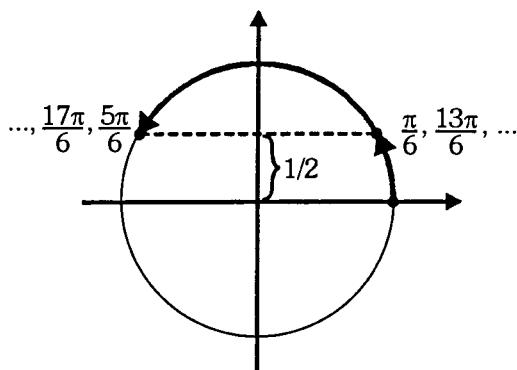
- 11.1 - Função Arco Seno
- 11.2 - Função Arco Cosseno
- 11.3 - Função Arco Tangente

Capítulo 11

Funções Trigonométricas Inversas

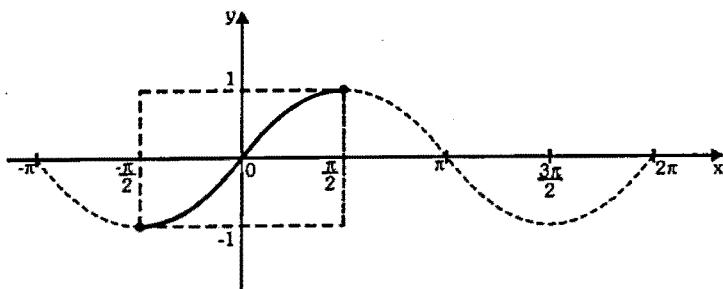
A função $y = \operatorname{sen} x$ não admite inversa em \mathbb{R} , pois a cada valor de y possui em correspondência infinitos valores para o arco x .

Por exemplo, para $y = \frac{1}{2}$, temos em correspondência os arcos $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$, etc. cujo seno é igual a $\frac{1}{2}$.



Assim, para que a função seno admita inversa, devemos restringir o seu domínio a um intervalo em que ela seja bijetora.

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a função seno é bijetora, portanto admite inversa.



11.1

Função Arco Seno

Consideremos a função $f(x) = \sen x$ definida no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com imagens $[-1, 1]$.

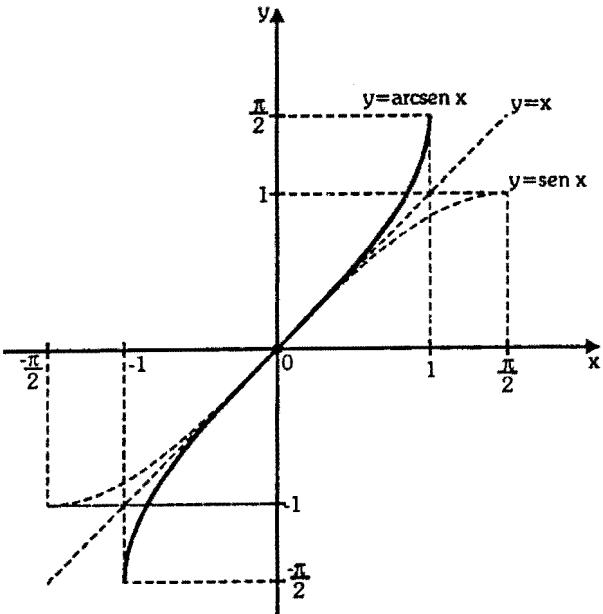
A função que associa todo x do intervalo $[-1, 1]$ a um arco y em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cujo seno vale x , chama-se **função arco seno**.

$$y = \arcsen x \Leftrightarrow \sen y = x$$

Gráfico

Os gráficos das funções $y = \arcsen x$ e $y = \sen x$ são simétricos em relação à reta $y = x$.

A seguir, temos o gráfico da função $y = \arcsen x$.



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Exercícios

180. Determine o valor de y nos seguintes casos:

$$\text{a)} \quad y = \arcsen \frac{1}{2} \qquad \qquad \text{b)} \quad y = \arcsen -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solução:

$$\text{a)} \quad y = \arcsen \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin y = \frac{1}{2}$$

Como $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então $y = \frac{\pi}{6}$

b) $y = \arcsen -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sen y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, então $y = -\frac{\pi}{4}$

181. Determine os valores de y , tais que:

a) $y = \arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = \arcsen \left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $y = \arcsen 0$

d) $y = \arcsen 1$

182. Obtenha o domínio da função $y = \arcsen(x - 2)$.

Solução:

Como o domínio da função $\arcsen x$ é $-1 \leq x \leq 1$, devemos ter:

$$-1 \leq x - 2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

logo: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

183. Dê o domínio das funções:

a) $y = \arcsen(x + 1)$

b) $y = \arcsen(x - 2)$

c) $y = \arcsen(2x + 3)$

184. Resolva as equações:

a) $\arcsen(x - 1) = \frac{\pi}{2}$

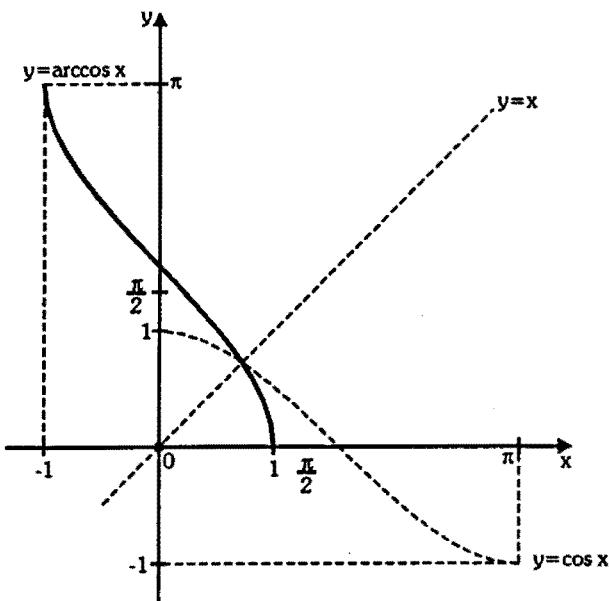
b) $\arcsen(2x + 1) = \frac{\pi}{3}$

c) $\arcsen(x^2 - 1) = \frac{\pi}{6}$

Consideremos a função $f(x) = \cos x$ definida no intervalo $[0, \pi]$ com imagens em $[-1, 1]$. A função que associa todo x do intervalo $[-1, 1]$ a um arco y em $[0, \pi]$, cujo cosseno vale x , chama-se **função arco cosseno**.

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$$

Gráfico



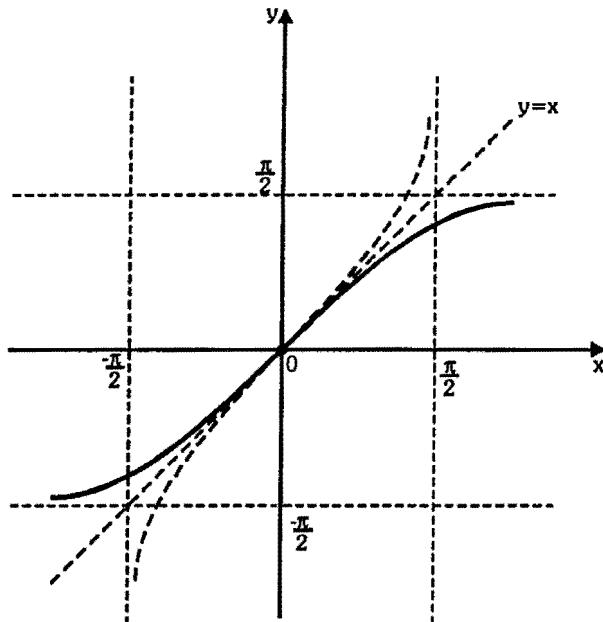
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \pi\} = [0, \pi]$$

Consideremos a função $f(x) = \operatorname{tg} x$ definida no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ com imagens em \mathbb{R} . A função que associa todo número real x a um arco y em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, cuja tangente vale x , chama-se **função arco tangente**.

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$$

Gráfico



$$D = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Exercícios

185. Determine y nos seguintes casos:

a) $y = \arccos \frac{1}{2}$

b) $y = \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

c) $y = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

d) $y = \arccos (-1)$

e) $y = \operatorname{arctg} 1$

f) $y = \operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$

g) $y = \operatorname{arctg} 0$

h) $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$

186. Dê o domínio das funções:

a) $y = \arccos 3x$

b) $y = \arccos (1 - 2x)$

c) $y = \operatorname{arctg} 2x$

d) $y = \operatorname{arctg} (\sqrt{5x - 2})$

187. Resolva as equações:

a) $\arccos x = \frac{5\pi}{6}$

b) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$

c) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{3}$

d) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$

188. Calcule $\cos \left(\arcsen \frac{1}{3} \right)$.

Solução:

Fazendo $\arcsen \frac{1}{3} = \alpha$, devemos calcular $\cos \alpha$, com $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Então:

$$\arcsen \frac{1}{3} = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

Como $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$$\frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Logo, $\cos\left(\arcsen \frac{1}{3}\right) = \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

189. Calcule:

- a) $\cos\left(\arcsen \frac{4}{5}\right)$ b) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right)$
c) $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{3}{4}\right)$ d) $\operatorname{tg}\left(\arcsen \frac{1}{2}\right)$
e) $\arcsen\left(\cos \frac{33}{2}\pi\right)$ f) $\operatorname{tg} 2\left(\arcsen \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

190. Determine o valor de $\cos\left(\arcsen \frac{1}{4} + \arccos \frac{1}{2}\right)$.

Solução:

Fazendo:

- $\arcsen \frac{1}{4} = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4}$, ($\alpha \in 1^\circ$ quadrante).
- $\arccos \frac{1}{2} = \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{2}$, ($\beta \in 1^\circ$ quadrante).

Devemos calcular $\cos(\alpha + \beta)$.

Como $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$, precisamos determinar $\cos \alpha$ e $\sin \beta$.

Então:

$$\frac{1}{16} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$$

Logo:

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{4} + \operatorname{arccos}\frac{1}{2}\right) = \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$$

191. Calcule:

a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \operatorname{arcsen}\frac{2}{3}\right)$

b) $\operatorname{tg}\left(5 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

192. Resolva: $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{4}$



Pense e Faça

F₁₇: Livros Empilhados

Temos dez pilhas de livros, de aspecto igual. Em nove dessas pilhas, cada livro pesa 1 kg e na pilha restante, cada livro pesa 1,1 kg. Efetuando apenas uma pesagem, determinar em que pilha estão os livros mais pesados.

- 12.1 - Lei dos Senos
12.2 - Lei dos Cossenos

Capítulo 12

Triângulos Quaisquer

12.1

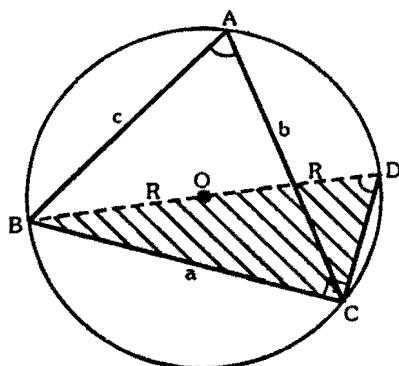
Lei dos Senos

Num triângulo qualquer, a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita.

Demonstração

Consideremos o triângulo ABC cujos lados medem a , b e c , inscrito numa circunferência de raio R .

Vamos construir o triângulo BCD, como mostra a figura seguinte.



Dessa construção:

- O triângulo BCD é retângulo em \hat{C} (inscrito numa semi-circunferência).
- Os ângulos \hat{A} e \hat{D} são congruentes (ângulos inscritos que determinam o mesmo arco \widehat{BC} na circunferência).

Temos:

$$\sin \hat{D} = \frac{a}{2R}. \text{ Como, } \hat{D} \cong \hat{A}, \text{ então:}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R}$$

De modo análogo, obtemos:

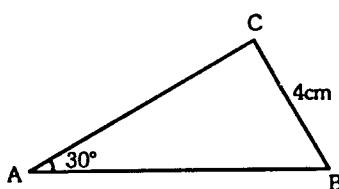
$$\boxed{\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R}$$

Comparando essas expressões, concluímos que:

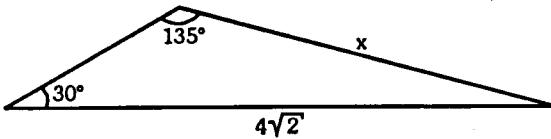
$$\boxed{\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R}$$

Exercícios

193. Determine o raio da circunferência circunscrita no triângulo ABC.



194. Calcule x na figura.



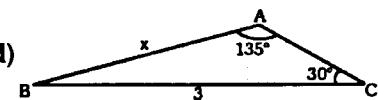
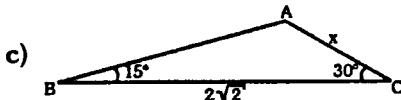
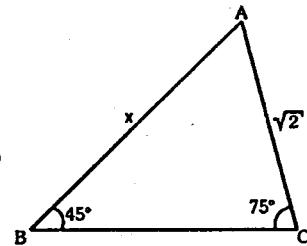
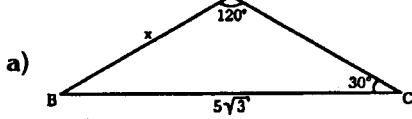
Solução:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 135^\circ} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 135^\circ}$$

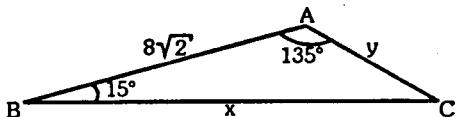
Como $\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então:

$$x = \frac{4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 4$$

195. No triângulo ABC, calcule x nos seguintes casos:



196. No triângulo seguinte, determine os valores de x e y.



12.2

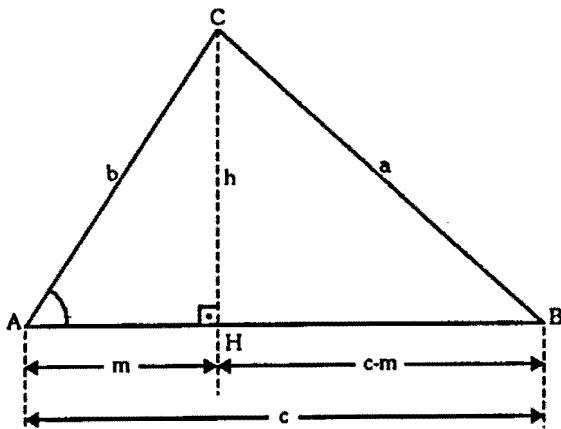
Lei dos Cossenos

Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o duplo produto desses lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.

Demonstração

Consideremos o triângulo ABC, cujos lados medem a, b, e c.

1º caso: o ângulo \hat{A} é agudo.



Temos:

$$\text{No triângulo CHB: } a^2 = h^2 + (c - m)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow a^2 = [h^2 + m^2] + c^2 - 2cm$$

$$\text{No triângulo CHA: } b^2 = [h^2 + m^2]$$

Substituindo a segunda igualdade na primeira, vem:

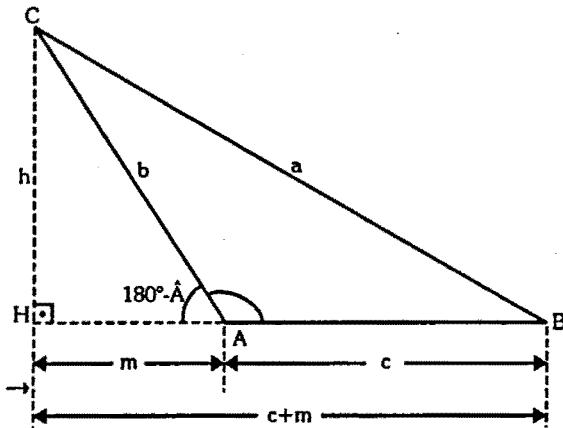
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad (1)$$

$$\text{No triângulo CHA: } \cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cos \hat{A} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

2º caso: o ângulo \hat{A} é obtuso.



Temos:

No triângulo CHB: $a^2 = h^2 + (c + m)^2$

$$a^2 = h^2 + c^2 + 2cm + m^2 \Rightarrow a^2 = \boxed{h^2 + m^2} + c^2 + 2cm$$

$$\text{No triângulo CHA: } b^2 = \boxed{h^2 + m^2}$$

Substituindo a segunda igualdade na primeira, vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad (1)$$

$$\text{No triângulo CHA: } \cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{m}{b}$$

Sendo $\cos(180^\circ - \hat{A}) = -\cos A$, então:

$$-\cos A = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cos A \quad (2)$$

Substituindo ② em ①, vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Podemos também escrever:

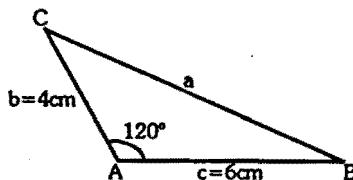
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Exercícios

197. Dois lados de um triângulo medem 4 cm e 6 cm e formam entre si 120° . Calcule a medida do terceiro lado.

Solução:



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

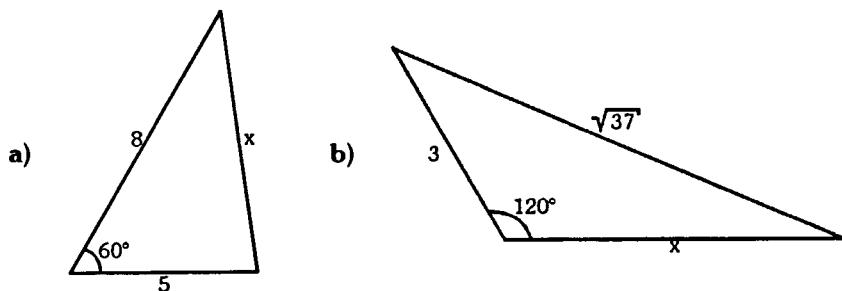
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow a^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ$$

Como $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, então:

$$a^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 76 \Rightarrow a = 2\sqrt{19} \text{ cm}$$

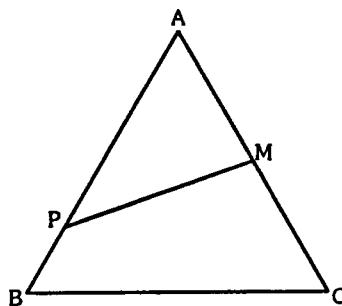
198. Dois lados de um triângulo medem $\sqrt{3}$ cm e 4 cm e formam entre si 150° . Calcule a medida do terceiro lado.

199. Calcule x em cada caso:



200. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 cm e 12 cm e formam um ângulo de 60° . Calcule a medida de suas diagonais.

201. O triângulo ABC é equilátero de lado 4, $AM = MC = 2$ e $PB = 1$. Calcule o perímetro do triângulo APM.



202. Duas forças concorrentes $F_1 = 5N$ e $F_2 = 10N$ formam um ângulo de 60° entre si. Calcule o módulo e a direção da resultante de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 .

203. Calcule a medida da menor diagonal de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 4 cm.

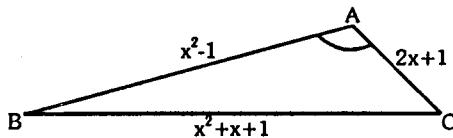
204. Os lados de um triângulo são dados pelas expressões:

$$a = x^2 + x + 1, \quad b = 2x + 1 \quad e \quad c = x^2 - 1$$

Determine o maior ângulo desse triângulo.

Solução:

Observando as expressões, o maior ângulo desse triângulo é oposto ao lado de medida **a**.



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$(x^2 + x + 1)^2 = (x^2 - 1)^2 + (2x + 1)^2 - 2(x^2 - 1)(2x + 1) \cdot \cos \hat{A}$$

$$x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 + 4x + 1 -$$

$$- (2x^3 + x^2 - 2x - 1) \cos \hat{A}$$

$$- 2(2x^3 + x^2 - 2x - 1) \cdot \cos \hat{A} = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$- 2 \cos \hat{A} = 1 \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

- 205.** Os lados de um triângulo medem **a**, **b** e **c** centímetros. Qual o valor do ângulo interno desse triângulo, oposto ao lado que mede **a** centímetro, se forem satisfeitas as relações: $3a = 7c$ e $3b = 8c$.



Pense e Faça

F₁₈: Frações!

Se a metade de cinco fosse nove, quanto seria a terça parte de dez?



Pense e Faça

F₁₉: As Três Bolas

Eu tenho três bolas: A, B e C.

Pintei uma de vermelho, uma de branco e a outra de azul, não necessariamente nessa ordem. Somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

A é vermelha

B não é vermelha

C não é azul

Qual é a cor de cada bola?



Respostas

Capítulo 1

- 1) a) 0,4 b) 3 c) $2\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{5}$
- 2) Não
- 4) $d = \ell\sqrt{2}$
- 5) 6 cm
- 6) a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
c) 2 d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ f) $\frac{1}{2}$
- 7) $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}$ e $\frac{5}{12}$
- 8) 50 m
- 9) 45°
- 10) 9 m
- 11) 60°
- 12) 20 m
- 13) AF = 3,5 m, EB = 7,0 m
- 14) $20\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 15) $4\sqrt{3}$ cm
- 16) $4(3 + \sqrt{3})$ m
- 17) $\frac{1}{2}$
- 18) 994,5 m
- 19) 26,92 m (aproximadamente)
- 20) $\alpha = 26^\circ$, $x = 898,8$ cm

Capítulo 2

23) a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{5}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{5\pi}{18}$

f) $\frac{\pi}{3}$ g) $\frac{5\pi}{12}$ h) $\frac{3\pi}{4}$ i) $\frac{5\pi}{6}$ j) $\frac{8\pi}{9}$

k) $\frac{5\pi}{4}$ l) $\frac{5\pi}{3}$

24) a) 12° b) 6° c) 20°

d) 50° e) 240° f) 330°

g) 160° h) 105° i) 315°

j) 320° k) 200° l) 300°

25) a) $2700'$ b) $1518'$ c) $2329'$

26) a) $10800''$ b) $7620''$ c) $7123''$

28) a) $172^\circ 30'$ b) $82^\circ 30'$ c) 130°

29) 36°

30) $13h\ 5\ min\ 27\ s$

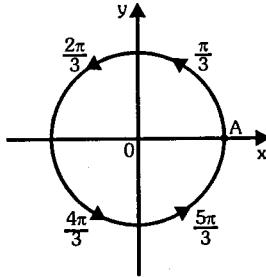
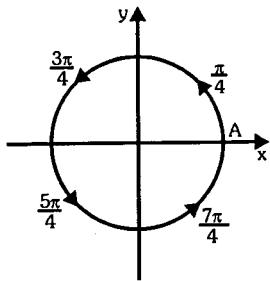
31) $\frac{2\pi}{3}$ rad

32) 10 voltas

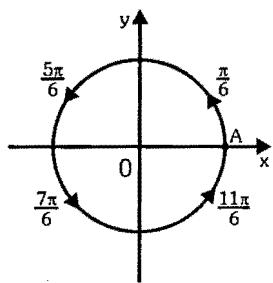
33) 40.000 km

34) $57^\circ 19' 29''$

36) a) b)

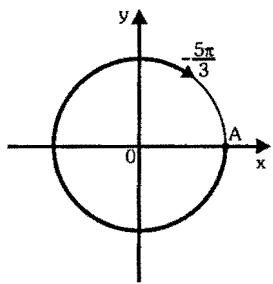


c)

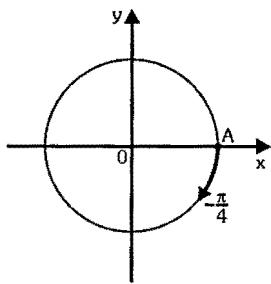


37)

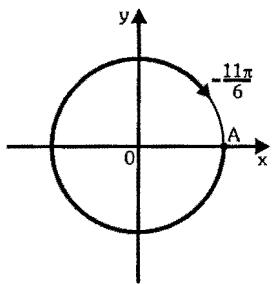
a)



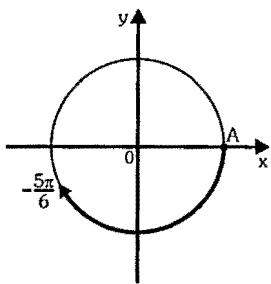
b)



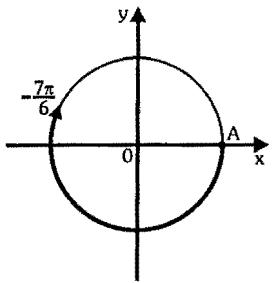
c)



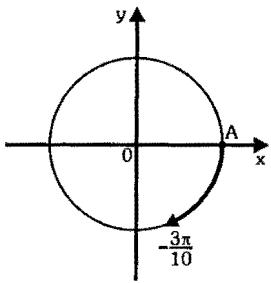
d)



e)



f)



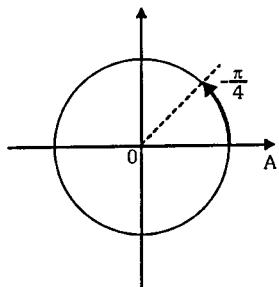
39)

a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

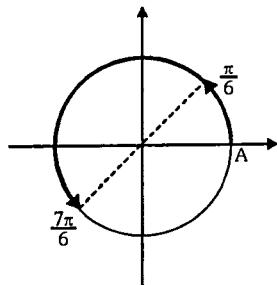
b) $x = \frac{2k\pi}{5}$

- 40) a) $x = 2k\pi$ b) $x = k\pi$ c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ d) $x = \frac{k\pi}{2}$
 e) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ f) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ g) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ h) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$

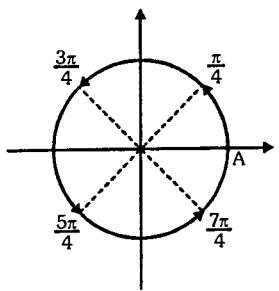
41) a)



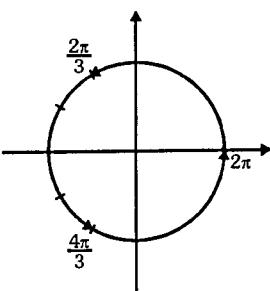
b)



c)



d)



- 42) a) 80° b) 195° c) 281° d) 217°
 e) $\frac{3\pi}{2}$ rad f) $\frac{5\pi}{4}$ rad g) $\frac{8\pi}{5}$ rad h) $\frac{4\pi}{7}$ rad
 i) 100° j) 127° k) 49° l) 267°
 m) $\frac{4\pi}{3}$ n) $\frac{3\pi}{2}$ o) $\frac{7\pi}{4}$ p) $\frac{9\pi}{5}$

- 43) a) 1° Q b) 1° Q c) 2° Q d) 3° Q
 e) 3° Q f) 4° Q g) 2° Q h) 1° Q

Capítulo 3

45) a) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

46) a) 0 e 1 b) 1 e 0 c) 0 e -1 d) -1 e 0 e) $\frac{\sqrt{2}}{2} e \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$ g) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$ h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ j) $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

47) a) 0 e 1 b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

48) a) 3 b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

50) a) $-3 \leq m \leq -2$ b) $-\frac{5}{3} \leq m \leq \frac{1}{3}$ c) $1 \leq m \leq 3$ d) $-1 \leq m \leq 3$

52) $-\frac{3}{5}$

53) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

54) $-\frac{636}{169}$

55) $\pm \frac{\sqrt{23}}{5}$

57) para $m = 2$, $\alpha = \pi$, e para $m = 3$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

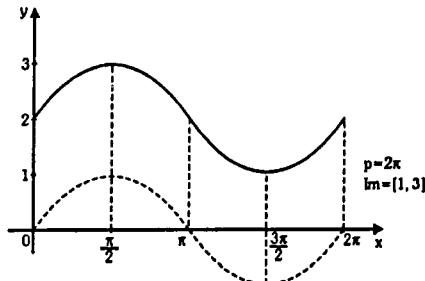
59) $\frac{5(1-a^2)}{2}$

60) $\frac{-\sqrt{3}}{4}$

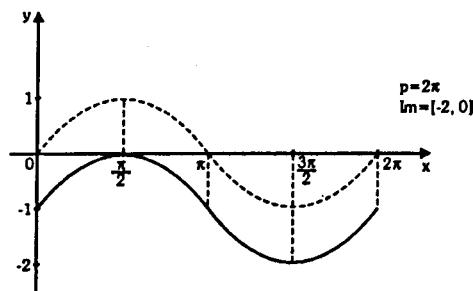
62) $\sin x = 0$ e $\cos x = -1$ ou $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $\cos = -\frac{1}{3}$

Capítulo 4

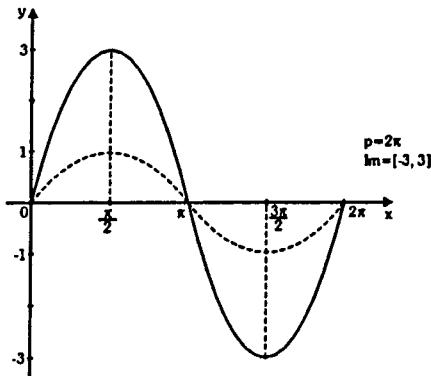
64) a)



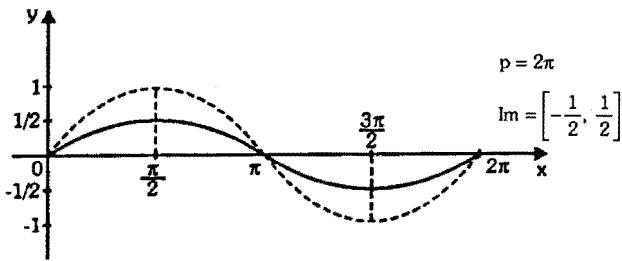
b)



66) a)

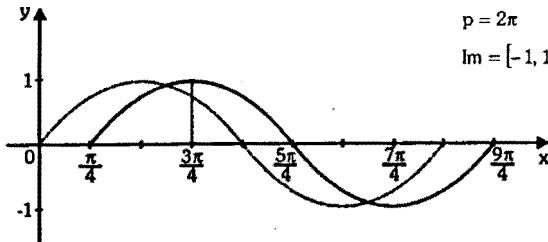


b)

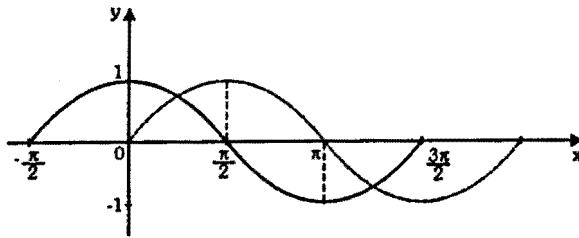


68)

a)

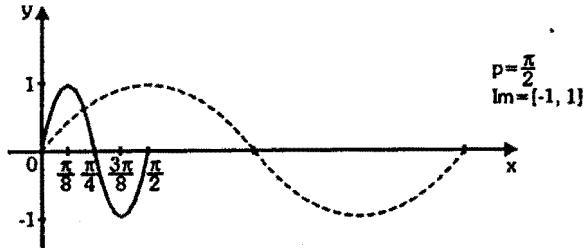


b)

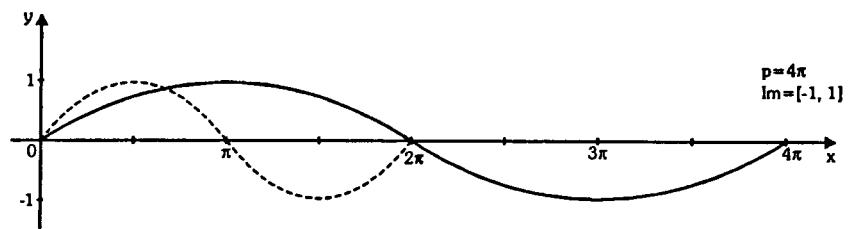


70)

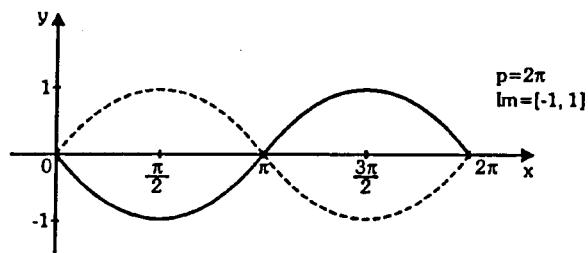
a)



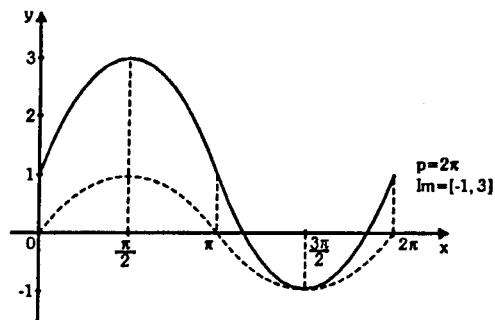
b)



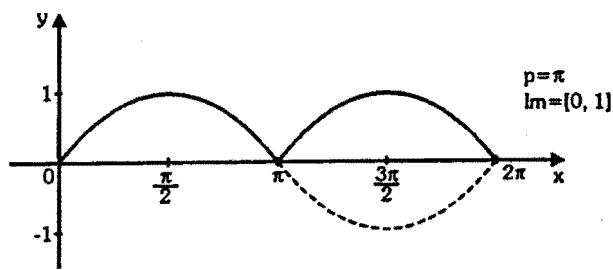
71) a)



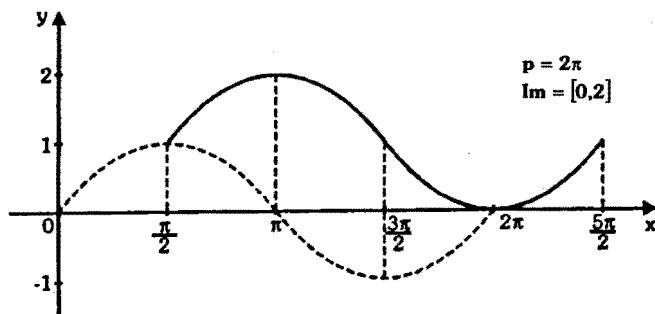
b)



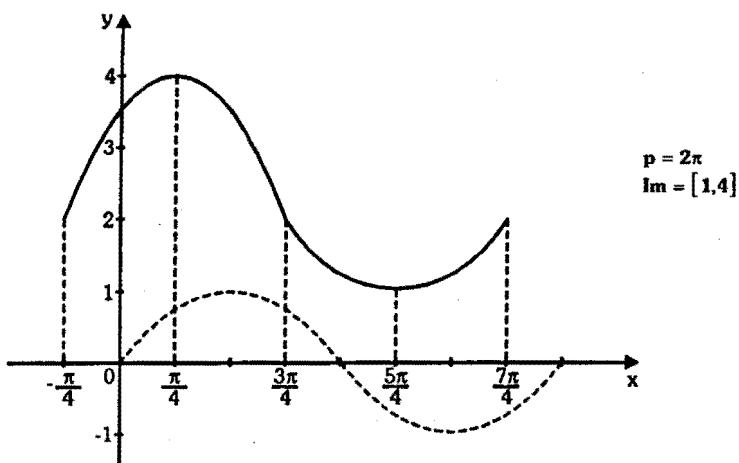
c)



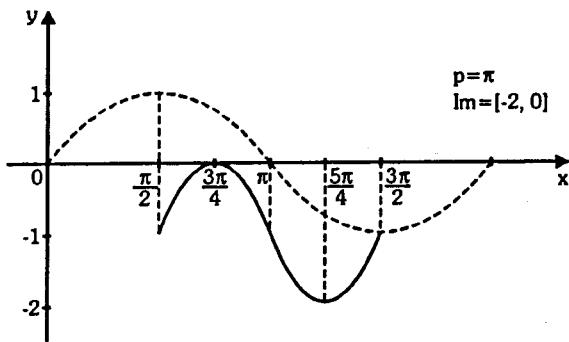
d)



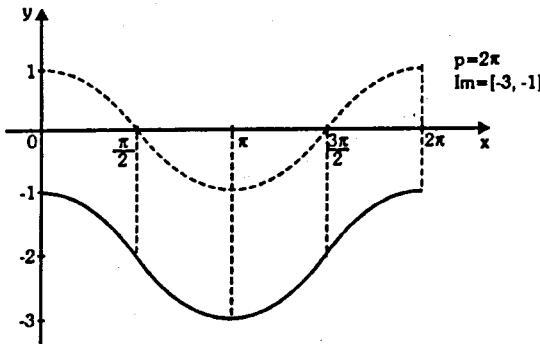
e)



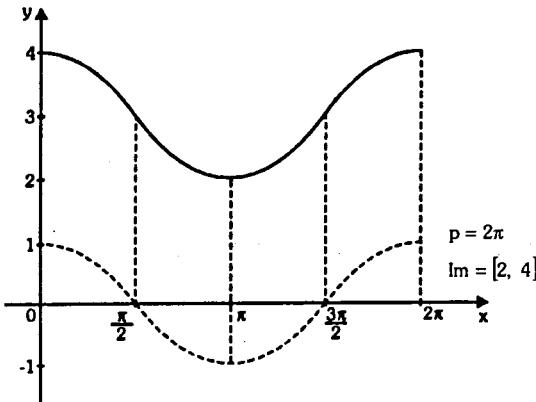
f)



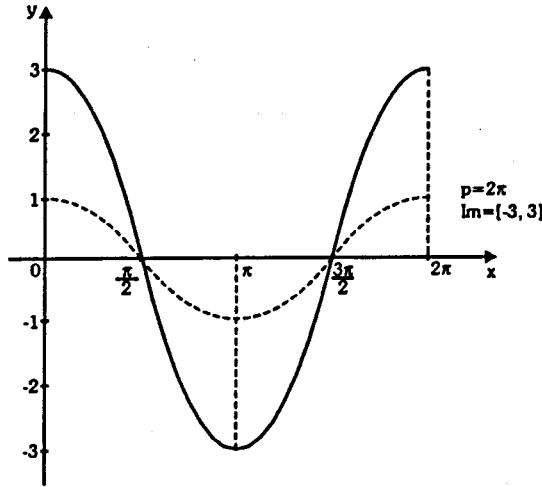
73) a)



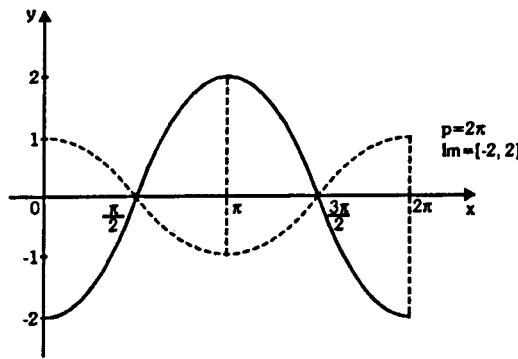
b)



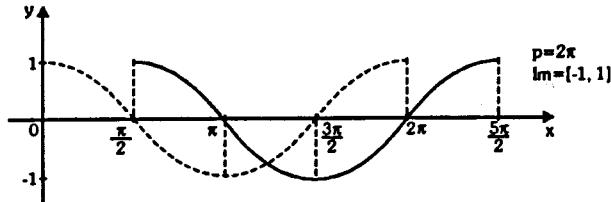
75) a)



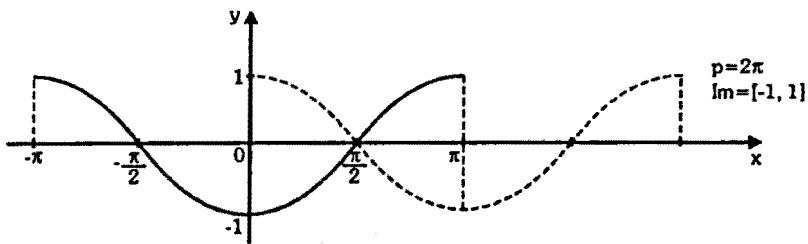
b)



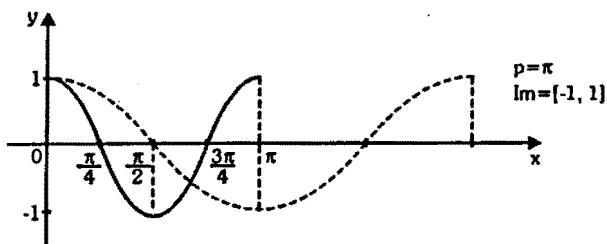
77) a)



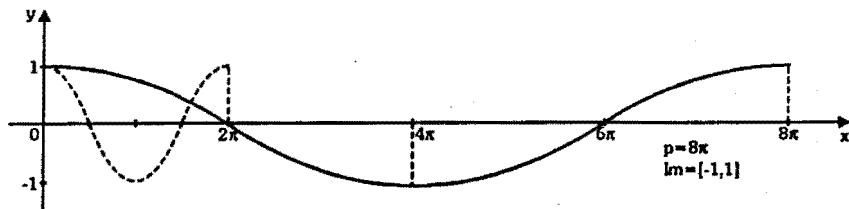
b)



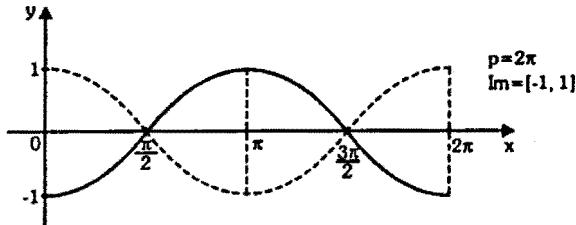
79) a)



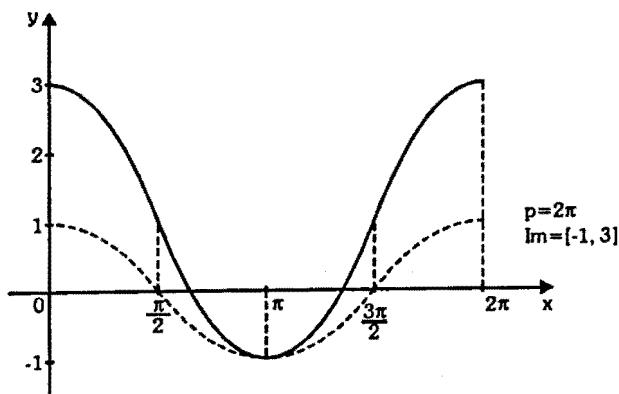
b)



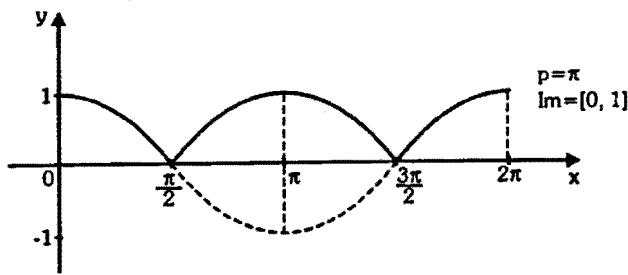
80) a)



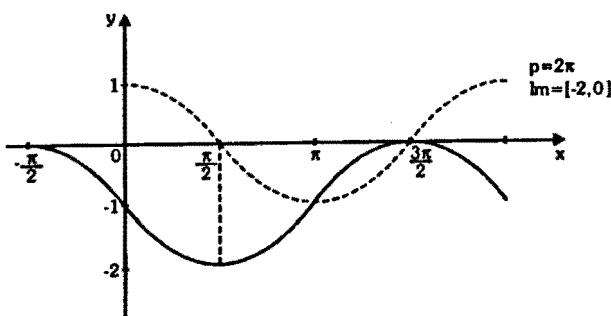
b)

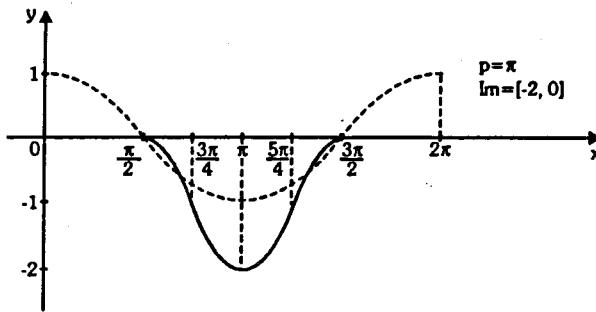
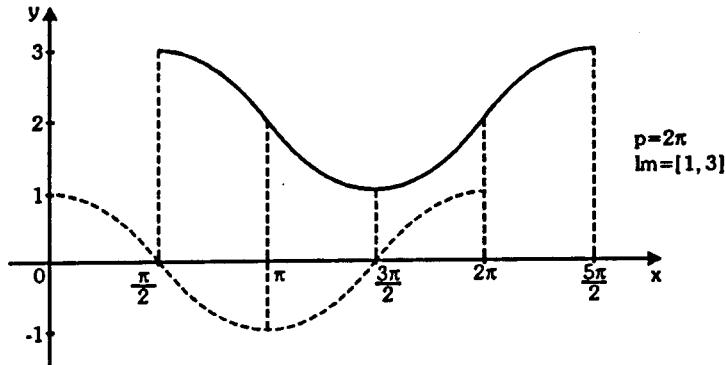


c)



d)





83) a) $\frac{2\pi}{6}$

b) 2π

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) 2π

e) π

f) 4π

84) a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3 \}$

$$\text{b) } \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5 \}$$

c) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2 \}$

d) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3 \}$

$$e) \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2 \}$$

$$f) \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3 \}$$

86) a) $2k\pi$

$$\text{b) } \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$c) \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

d) $\frac{k\pi}{2}$

$$e) \pi + k\pi$$

e) $\pi + k\pi$ f) $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{8\pi}{3} + 2k\pi$

$$g) \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$h) \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2k\pi$$

- 87) a) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3} e \frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2} e \pi$ d) $-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$

Capítulo 5

- 88) a) -1 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 89) a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$
- 90) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- 91) 0,45
- 92) $\pm \frac{3}{2}$
- 93) a) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ b) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{4\pi}{3} + k\pi$
 d) $\frac{k\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{2} + k\pi$ f) $\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$

Capítulo 6

- 95) a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \}; p = \pi$
 b) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \}; p = \frac{\pi}{3}$
 c) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \}; p = \frac{\pi}{2}$
- 96) a) 0 b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) -1
- 97) $-\frac{4}{5}$
- 98) $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- 99) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

100) a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \}; p = \pi$

b) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \}; p = 2\pi$

c) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2} \}; p = \frac{\pi}{2}$

101) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

102) a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \}$

b) $\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \}$

c) \emptyset

Capítulo 7

104) $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}, \quad \operatorname{cotg} x = -\frac{3}{4}, \quad \sec x = -\frac{5}{3} \quad e \quad \operatorname{cossec} x = \frac{5}{4}$

105) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

106) $\frac{5}{6}$

107) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

108) 2

109) 4

110) $\frac{4}{3}$

111) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

112) $\frac{12\sqrt{10}}{31}$

113) 2

114) $\frac{36}{5}$

115) $\frac{4}{3}$

116) $\operatorname{tg}^2 x$

118) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ou $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

119) $-\frac{3}{5}$

121) $m = 1$ e $x = \frac{\pi}{3}$

Capítulo 8

123) a) $\operatorname{sen} 35^\circ$ b) $-\cos 80^\circ$ c) $-\operatorname{sen} 55^\circ$ d) $-\cos 16^\circ$ e) $-\operatorname{sen} 50^\circ$ f) $\cos 35^\circ$
 g) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{10}$ h) $-\cos \frac{\pi}{5}$ i) $-\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ j) $-\cos \frac{\pi}{6}$ k) $-\operatorname{sen} \frac{\pi}{10}$ l) $\cos \frac{\pi}{3}$

124) a) $-\sec 20^\circ$ b) $-\operatorname{cossec} \frac{\pi}{9}$ c) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ d) $-\operatorname{cotg} \frac{\pi}{10}$
 e) $-\sec \frac{\pi}{4}$ f) $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ g) $-\operatorname{sen} 10^\circ$ h) $\cos 40^\circ$

125) 0,80

126) a) $\operatorname{tg} x$ b) $\operatorname{sen} x$ c) $1 - 2 \operatorname{sen} x$

127) $\pm 2\sqrt{2}$

128) -3

Capítulo 9

132) a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

134) $\frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$

136) a) $-(2 + \sqrt{3})$ b) $2 + \sqrt{3}$

137) $\frac{9 + \sqrt{3}}{3 - 3\sqrt{3}}$

138) $\frac{75}{11}$

$$139) \quad \sqrt{2} - 1$$

$$142) \quad -\frac{1}{7}$$

$$143) \quad \text{a) } \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{b) } 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \quad \text{c) } 2 - \sqrt{3}$$

$$144) \quad \text{a) } \frac{120\sqrt{2} + 45}{119} \quad \text{b) } \frac{50\sqrt{2} - 108}{119} \quad \text{c) } -\frac{54 + 25\sqrt{2}}{7}$$

$$145) \quad \frac{13\sqrt{3} - 24}{23}$$

$$146) \quad \frac{13}{80}$$

$$147) \quad -\frac{1}{7}$$

$$150) \quad \text{a) } \frac{24}{25} \quad \text{b) } -\frac{7}{25} \quad \text{c) } -\frac{24}{7}$$

$$151) \quad \text{a) } \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{b) } 0$$

$$152) \quad -\frac{2}{3}$$

$$153) \quad -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$155) \quad \text{a) } \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{b) } \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$156) \quad \frac{24}{7}$$

$$161) \quad \text{a) } 2 \sin 40^\circ \cos 10^\circ \quad \text{b) } 2 \sin 15^\circ \cos 55^\circ$$

$$\text{c) } 2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ \quad \text{d) } -2 \sin 50^\circ \sin 35^\circ$$

$$163) \quad \text{a) } 2 \sin 75^\circ \cos 35^\circ \quad \text{b) } -2 \sin 38^\circ \sin 38^\circ$$

$$\text{c) } 2 \cos 14^\circ \cos 6^\circ \quad \text{d) } 2 \sin 15^\circ \cos 55^\circ$$

164) a) $2 \sin 4x \cos 2x$ b) $-2 \sin 5x \sin 2x$ c) $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $2 \sin\left(\frac{2x + \pi}{4}\right) \cos\left(\frac{2x - \pi}{4}\right)$ e) $2 \sin\left(\frac{6x - \pi}{4}\right) \cos\left(\frac{2x + \pi}{4}\right)$ f) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

165) $2 \sin^2 2x \cos 2x$

166) $(2 \cos x + 1) \cdot \sin 2x$

169) a) $\frac{2\sqrt{3} \cdot \sin 80^\circ}{3 \cos 50^\circ}$ b) $\frac{\sin 50^\circ}{\cos 70^\circ \cos 20^\circ}$

c) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sin 55^\circ}{\cos 10^\circ}$ d) $-\frac{\sqrt{2} \cdot \sin 27^\circ}{\cos 18^\circ}$

171) a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

Capítulo 10

172) a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi\}$

c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

d) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

e) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$

f) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$

173) a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi\}$

175) a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \right\}$

c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

d) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

177) a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$

c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

178) a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \right\}$

c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{11} + \frac{2k\pi}{11} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$

d) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{7} \right\}$

179) a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$

b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2k\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi \right\}$

Capítulo 11

181) a) $\frac{\pi}{3}$

b) $-\frac{\pi}{6}$

c) 0

d) $\frac{\pi}{2}$

183) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1\}$

184) a) {2}

b) $\left\{\frac{\sqrt{3}-2}{4}\right\}$

c) $\left\{\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

185) a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{3\pi}{4}$

d) π

e) $\frac{\pi}{4}$

f) $-\frac{\pi}{3}$

g) 0

h) $\frac{\pi}{6}$

186) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}\right\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

c) \mathbb{R}

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{5}\right\}$

187) a) $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $\left\{-\sqrt{3}\right\}$

d) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

189) a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) 0

f) $-\sqrt{3}$

191) a) $\frac{3\sqrt{5}+8}{15}$

b) -1

192) $\left\{\frac{1}{6}\right\}$

Capítulo 12

193) 4 cm

195) a) 5

b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

c) $2(\sqrt{3}-1)$

d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

196) $x = 16$ e $y = 8(\sqrt{3}-1)$

198) $\sqrt{31}$ cm

199) a) 7

b) 4

$$200) \quad 4\sqrt{7} \text{ e } 4\sqrt{19}$$

$$201) \quad 5 + \sqrt{7}$$

$$202) \quad 5\sqrt{7} \quad \text{e} \quad \alpha = \arcsen \frac{\sqrt{7}}{14} \text{ com } \bar{F}_2$$

$$203) \quad 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$205) \quad 60^\circ$$

Bibliografia

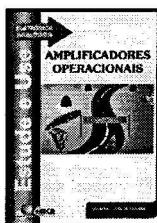
- Ayres Jr., Frank. Theory and Problems of First Year College Mathematics. New York, Schaum Publishing Co., 1958.
- Boyer, Carl B. História da Matemática. São Paulo, Ed. Edgard Blücher Ltda., 1974.
- Caraça, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.
- Klaf, A. Albert. Trigonometry Refresher for Technical Men. New York, Dover Publications, Inc., 1956.
- Lacaz Netto, F. A. Trigonometria. São Paulo: Livraria Nobel, 1967.
- School Mathematics Study Group. Matemática, curso colegial. Vol. 1. São Paulo, Edart, 1966.

Revistas

Revistas do Professor de Matemática - nº das revistas: 9, 15, 16, 20 e 29.
São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática.

COLEÇÃO ESTUDE E USE

Série Eletrônica Analógica



Amplificadores Operacionais
212 Páginas • Código: 3168

Partindo do dispositivo ideal e visto como um bloco, aos poucos o estudante vai-se inserindo no mundo do dispositivo real, defrontando-se com situações concretas que desenvolvem o potencial de análise e a criatividade, até a exploração de projetos industriais. Voltado para os cursos técnicos de Eletrônica, Eletrotécnica, Eletroeletrônica, Informática Industrial e para estudantes dos primeiros anos do curso de Engenharia Elétrica.

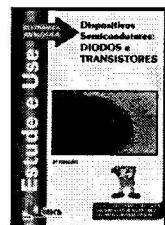
Autor: Antonio Carlos Seabra

Dispositivos Semicondutores: DIODOS e TRANSISTORES

416 Páginas • Código: 3176

Este livro objetiva iniciar os estudantes de Eletrônica, Eletroeletrônica, Eletrotécnica e Informática Industrial no mundo dos dispositivos semicondutores. São analisadas as características físicas, elétricas e as aplicações do diodo semicondutor, diodo Zener; LED, fotodiodo, phototransistor, fotoacoplador, transistor bipolar; JFET, MOSFET, PTC, NTC e LDR, dando condições para o desenvolvimento de projetos de circuitos eletrônicos que utilizam tais dispositivos como os amplificadores, fontes de tensão estabilizadas etc., além de subsídios para o estudo de outros dispositivos semicondutores.

Autores: Angelo Eduardo Battistini Marques, Antonio Carlos de Lourenço, Eduardo Cesar Alves Cruz



Dispositivos Semicondutores: TIRISTORES - Controle de Potência em C.C. e C.A.
176 Páginas • Código: 2986

Analisa os dispositivos tiristores: SCR e TRIAC, os dispositivos de disparo: DIAC, Diodo Schockley, SUS, SBS, UJT, PUT e outros circuitos integrados de disparo, facilitando aos estudantes de Eletrônica, Eletrotécnica, Eletroeletrônica e Informática Industrial, o desenvolvimento de projetos de circuitos para controle de potência em C.C. e C.A.

Autor: José Luiz Antunes de Almeida

Série Eletrônica Digital

Automação Eletropneumática

160 Páginas • Código: 4253

Este livro é indicado aos alunos técnicos e universitários, e aos profissionais que atuam na área de automação industrial.

O livro fornece subsídios teóricos e práticos, descrevendo todos os elementos dos processos eletropneumáticos, proporcionando a capacidade de entender, dar manutenção e projetar sistemas automatizados. Inclui o método seqüencial, utilizado para o projeto dos sistemas de automação em processos eletropneumáticos.

Autores: Nelso Gauze Bonacorso, Valdir Noll

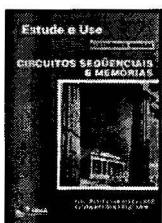


Circuitos Digitais
344 Páginas • Código: 3206

Numa abordagem prática e didática, o livro propõe iniciar os estudantes de Eletrônica, Informática Industrial, Eletroeletrônica e Eletrotécnica na área da Eletrônica Digital. Começando com os sistemas numéricos e a lógica, o estudante entra no mundo dos circuitos combinacionais e seqüenciais, desenvolvendo projetos de circuitos dedicados e de aplicações práticas, aumentando gradativamente seu potencial de análise lógica e criatividade, dando os subsídios necessários para o estudo dos microprocessadores e computadores.

Autores: Antonio C. de Lourenço, Eduardo C. A. Cruz, Sabrina R. Ferreira, Salomão Choueri Jr.

Série Eletrônica Digital



Circuitos Sequenciais e Memórias

116 Páginas • Código: 1971

Este livro aborda a análise e o projeto dos diversos Circuitos Sequenciais como Flip-Flop's, Registradores e Contadores, assim como os diversos tipos de memórias semicondutoras, dando subsídios para o projeto de sistemas digitais, utilizando circuitos integrados comerciais e para o estudo de Microprocessadores, Microcontroladores e Microcomputadores.

Autores: Eduardo Cesar Alves Cruz
Salomão Choueri Júnior

Manual Didático de Circuitos Integrados - TTL

120 Páginas • Código: 2927

De forma didática, o livro se propõe a ensinar o estudante a entender as informações de um manual técnico de circuitos integrados em inglês (databooks), através da explicação de cada um dos diversos parâmetros que caracterizam esses dispositivos fabricados com tecnologia TTL. Ao mesmo tempo, ele mesmo já é um manual técnico, uma vez que fornece a ficha técnica dos principais circuitos integrados digitais - TTL utilizados por professores e alunos durante o ensino da Eletrônica Digital. Voltado para professores e alunos dos cursos técnicos de Eletrônica, Informática Industrial, Eletroeletrônica, Eletrotécnica e para estudantes dos primeiros anos do curso de Engenharia Elétrica.



Autores: Eduardo Cesar Alves Cruz
Luiz Carlos da Cunha e Silva



Portas Lógicas e Circuitos Combinacionais

176 Páginas • Código: 2021

Este livro analisa as diversas portas lógicas, visando ao estudo de circuitos digitais combinacionais. São incluídos também os circuitos decodificados como MUX, DEMUX, DECODIFICADORES, SOMADORES, que dão subsídios para o projeto de sistemas digitais, utilizando os circuitos integrados comerciais.

Autores: Jan Novaes Recicar
Sabrina Rodero Ferreira

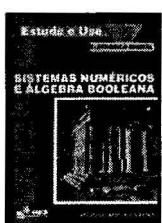
Praticando Eletrônica Digital

328 Páginas • Código: 4318

Este livro serve como material de apoio ao livro de teoria Circuitos Digitais, da Coleção Estude e Use, orientando alunos e professores na elaboração e execução de experiências de eletrônica digital, desde portas lógicas e circuitos combinacionais até circuitos sequenciais e memórias. Desenvolvido pedagogicamente, ele procura fazer que os alunos aprendam a interpretar e analisar circuitos digitais utilizando diversos circuitos integrados comerciais. O livro é indicado aos cursos técnicos de Eletrotécnica, Eletroeletrônica, Eletromecânica e Informática Industrial.



Autores: Celso de Araújo
William Soler Chui



Sistemas Numéricos e Álgebra Booleana

104 Páginas • Código 1939

Este livro aborda os sistemas numéricos decimal, hexadecimal e binário. A primeira parte mostra como fazer conversões entre eles e operações aritméticas. A segunda parte do livro aborda a lógica, desde as funções básicas até a simplificação de expressões booleanas, dando subsídios para o estudo da lógica combinacional e sequencial. Nos vários exemplos, são usadas situações reais simplificadas, dando uma base para implementação de sistemas de controle digitais.

Autor: Antonio Carlos de Lourenço

Série Instalações Elétricas



Luminotécnica
120 Páginas • Código: 2978

Trata-se de um livro didático para o ensino das técnicas de iluminação de diversos ambientes diferentes, ao mesmo tempo em que é um pequeno manual de referência para o desenvolvimento de projetos luminotécnicos dos mais diversos portes como os residenciais, comerciais e industriais. Voltado para professores e alunos dos cursos técnicos de Eletrônica, Informática Industrial, Eletroeletrônica, Edificações e para estudantes dos primeiros anos dos cursos de Arquitetura e Engenharias Elétrica e Civil.

Autor: Ervaldo Garcia Júnior

Projetos de Instalações Elétricas Prediais

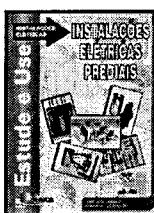
280 Páginas • Código: 4172

Este livro é indicado aos alunos de cursos técnicos e universidades, e aos profissionais que atuam na área de instalações elétricas prediais.

Fornecê normas e subsídios teóricos e práticos, voltados exclusivamente para o projeto completo de instalações elétricas prediais.

Inclui diversos exemplos, visando à aplicação das normas e conceitos nele tratados.

Autor: Domingos Leite Lima Filho



Instalações Elétricas Prediais
456 páginas • Código: 5411

Este livro foi concebido com o objetivo de prover as informações técnicas, bem como os procedimentos de execução de instalações elétricas prediais. Os temas são apresentados de forma didática, partindo de conhecimentos básicos de eletricidade, geração de energia elétrica, utilização de ferramentas, luminotécnica, simbologias, instalação de interruptores, lâmpadas, tomadas, etc., dimensionamento da instalação e culminando com o desenvolvimento de um pequeno projeto residencial, com mais de 700 figuras.

É indicado para professores e alunos dos cursos técnicos de Eletrônica, Eletromecânica, Eletroeletrônica, Edificações, Engenharia Elétrica, Civil e Arquitetura e para os profissionais que atuam na elaboração de projetos e execução de instalações elétricas.

Autores: Geraldo Cavalin e Severino Cervelin

Instalações Elétricas Prediais - Caderno de Atividades

208 páginas • Código: 542X

O livro apresenta, no início, uma coletânea de exercícios sobre instalações elétricas prediais, denominada Teste Diagnóstico, que tem como finalidade verificar os conhecimentos básicos do estudante.

Na sequência, há exercícios sobre dispositivos de comando de iluminação (condutores, proteção, eletrodutos e luminotécnica), com exemplos no inicio de cada capítulo.

No último capítulo, é solicitado o desenvolvimento de um projeto residencial completo.

É indicado para os cursos técnicos de Eletrônica, Eletromecânica, Eletroeletrônica, Edificações e para estudantes de Engenharia Elétrica, Civil e Arquitetura.

Autores: Geraldo Cavalin e Severino Cervelin



Série Mecânica

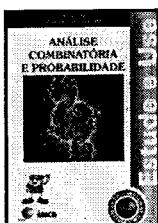


Elementos de Máquinas
320 páginas • Código: 5187

Este livro é "sui generis" na área técnica. Ele aborda assuntos de peso econômico na seleção de elementos de máquinas. Seguem-se as técnicas para reduzir a flexão; a utilização de eixos vazados; projetos de acoplamentos; os recursos do reboque e do levantamento de cargas usados pelas empresas em geral; a redução e ampliação brutal de velocidades das pequenas caixas, dos modernos engrenamentos epicícloidais; os envolventes trabalhos dirigidos, que muito auxilio trazem aos professores. Destinado a Cursos Técnicos, Faculdades, Centros de Treinamento Industrial entre outros.

Autores: Marcos A. C. Freire e Izildio Antunes

Série Matemática



Análise Combinatória e Probabilidade 84 Páginas • Código: 2935

Estuda a análise combinatória e a probabilidade pelo desenvolvimento do pensamento lógico por meio do aprofundamento gradativo de situações-problema, evitando, ao máximo, a transcrição de fórmulas prontas, permitindo ao estudante buscar soluções próprias que são posteriormente formalizadas. Voltado para a disciplina de matemática do segundo grau, seja em cursos técnicos seja em cursos regulares.

Autores: Claudio Delfini, Geraldo José Sant'Anna

Exponencial e Logaritmos 112 Páginas • Código: 3532

Partindo da análise de potências e raízes, este livro estuda as funções exponencial e logarítmica, na forma aula-exercício-aula, envolvendo fenômenos reais aos quais essas teorias se aplicam, facilitando a sua compreensão. Esta publicação está voltada para a disciplina de matemática do segundo grau, seja em cursos técnicos seja em cursos regulares.

Autores: Glaciete Jardim Zago, Walter Antonio Sciani



Função do 1º Grau, Função do 2º Grau, Função Modular 180 Páginas • Código: 3214

Partindo dos conjuntos numéricos, este livro estuda as funções de primeiro grau, segundo grau e modulares, na forma aula-exercício-aula, facilitando a compreensão e aplicação delas a situações reais. É voltado para a disciplina de matemática do segundo grau, seja em cursos técnicos seja em cursos regulares.

Autores: Glaciete Jardim Zago, Walter Antonio Sciani

Introdução à Lógica 176 Páginas • Código: 3265

Apresenta uma abordagem elementar da lógica matemática, sendo destinado a alunos do segundo grau. Os temas estudados são: lógica proposicional, álgebra de Boole, proposições e conjuntos, argumentos, sentenças abertas e quantificadores. Os exercícios propostos procuram estimular o aluno ao cuidado e atenção necessários à linguagem formal.

Autora: Marcia Xavier Cury



Trigonometria 192 Páginas • Código: 4032

Esta obra é feita na forma aula-exercícios-aula. Aborda: Trigonometria no Triângulo Retângulo; Medidas de Arcos e Ângulo; Funções: Seno, Cosseno, Tangente, Cotangente, Secante, Co-secante; Relações Trigonométricas; Redução e Idéntidade; Transformações; Equações, Funções Trigonométricas Inversas, Triângulos Quaisquer. Destina-se a estudantes de matemática de 2º grau para os cursos técnicos ou regulares.

Autores: Glaciete Jardim Zago, Walter Antonio Sciani

Série Electricidade



Circuitos Magnéticos
160 Páginas • Código: 377X

Por meio de uma abordagem científica, o livro trabalha conceitual e metodologicamente os fenômenos magnéticos e eletromagnéticos, até atingir seu maior objetivo, que são a análise e o projeto de circuitos magnéticos, como pré-requisitos para o estudo de máquinas elétricas. Voltado para estudantes de Eletrônica, Eletrotécnica, Eletroeletrônica e Informática Industrial, o livro é permeado de histórias dessa ciência, envolvendo pesquisas realizadas por Oersted, Ampere, Faraday e Henry, visando à formação de um profissional criativo e competente.

Autor: Giuseppe G. Massimo Gozzi

Praticando Electricidade - Circuitos em Corrente Contínua

292 Páginas • Código: 4016

Este livro serve como material de apoio ao livro de teoria Circuitos em Corrente Contínua, da Coleção Estude e Use, orientando alunos e professores na elaboração e execução de experiências de electricidade, desde os seus conceitos mais básicos de eletrostática e eletrodinâmica até a análise de circuitos em corrente contínua e projetos de instrumentos de medidas elétricas.

Autor: Eduardo Cesar Alves Cruz



CADASTRO PARA MALA DIRETA

Preenchendo este formulário e enviando para Editora Érica, você receberá informações periódicas sobre os nossos lançamentos.

Desejo cadastrar-me para receber informações sobre os lançamentos

Livro: TRIGONOMETRIA - Coleção Estude e Use - Série Matemática

Autor: Glacierte Jardim Zago / Walter Antonio Sciani ISBN: 85-7194-403-2

Nome:

Endereço para correspondência:

Cidade:

Estado:

CEP:

Fone:

Data de Nascimento:

Empresa onde trabalha:

E-mail:

DEIXE-NOS SABER SUA OPINIÃO SOBRE ESTE NOSSO PRODUTO

Onde este livro foi comprado?

- () Livraria _____
() Loja _____
() Banca _____
() Outro _____

O que mais agradou você no livro?

- () O Conteúdo
() As Ilustrações
() A forma como foi escrito
() A capa
() Não gostei

Onde você tomou conhecimento do livro?

- () Revista _____
() Catálogo _____
() Anúncio _____
() Escola _____
() Mala Direta _____
() Outro _____

Como você classifica este livro?

- () Ruim
() Regular
() Bom
() Ótimo

PRT/SP-4707/94
UP AC CENTRAL
DR/SÃO PAULO

CARTÃO RESPOSTA
NÃO É NECESSÁRIO SELAR

O selo será pago por
EDITORIA ÉRICA LTDA.

03399-999 SÃO PAULO - SP

recortar

TRIGONOMETRIA

Objetivos:

- 1- Ensinar de um modo mais intuitivo e menos formal.
 - 2- Desenvolver estruturas lógicas do pensamento.
 - 3- Aplicar o ensino matemático na resolução de problemas práticos.
 - 4- Colaborar com o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno.
 - 5- Utilizar linguagem simples e direta na abordagem de cada assunto.
 - 6- Enfatizar o processo de construção de conceitos.
-

Autores:

GLACIETE JARDIM ZAGO - Bacharel e Licenciada em Matemática, Professora do CEETEPS - E.T.E. Jorge Street.

WALTER ANTONIO SCIANI - Bacharel e Licenciado em Matemática, Professor do CEETEPS - E.T.E. Lauro Gomes.

PUBLICAÇÕES ÉRICA, CLAREZA E OBJETIVIDADE.



EDITORA ÉRICA LTDA.

Rua Jarinu, 594 • Tatuapé • SP
CEP: 03306-000 • Caixa Postal: 14.577 • São Paulo
Fone: (011) 295-3066 • Fax: (011) 217-4060
Home Page: www.erica.com.br

ISBN: 85-7194-403-2



9 788571 944039