

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ENRIQUE RENÉ BEAUXIS REYES

Teoria de cordas bosônicas

Rio de Janeiro

2015

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ENRIQUE RENÉ BEAUXIS REYES

TEORIA DE CORDAS BOSÔNICAS

Trabalho de Conclusão
de Curso apresentado
à Universidade Federal
Fluminense como requisito
parcial para a obtenção do
grau Bacharel em Física.

ORIENTADOR: Prof. Rubens Luis Pinto Gurgel do Amaral

Rio de Janeiro
2015

ENRIQUE RENÉ BEAUXIS REYES

TEORIA DE CORDAS BOSÔNICAS

Trabalho de Conclusão
de Curso apresentado à
Universidade Federal Flumi-
nense como requisito parcial
para a obtenção do grau Bacha-
rel em Física.

Aprovada em Agosto de 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Rubens Luis Pinto Gurgel do Amaral (Orientador)

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Prof. Marco Moriconi

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Prof^a. Maria Emília Xavier Guimarães

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

**Ao meu irmão, para lhe dar
um bom exemplo.**

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que apesar dos sacrifícios, sempre me ofereceram uma boa educação, que me proporcionou e proporciona até hoje oportunidades que muitos não tem. Também agradeço pelo apoio emocional e sempre estarem abertos ao diálogo. À todos os professores que contribuíram na minha formação de alguma maneira, mas em especial:

Ao professor Fraccesco Ribeiro, professor do ensino médio, ao qual incentivou e aguçou minha curiosidade científica, e passou a me fazer sonhar em fazer parte de grandes avanços na ciência. Tal sonho me fez optar pela graduação em química.

À professora Eluzir Pedrazzi Chacon (GQI/IQ–UFF), quem me apresentou a teoria de cordas, pela qual pesquisei, me interessei e sempre foi meu objetivo na física, após a mudança de curso.

Ao professor Jackson Antônio Lamounier Camargos Resende (GQI/IQ–UFF), quem sempre esteve aberto a conversa e me apoiou na mudança de curso num momento de grande dúvida, ajudando a tomada da decisão.

À professora Marina Tebet Azevedo de Mariz (GAN/IME–UFF) por me incentivar à matemática, não só em sala de aula mas também com leituras extras e sempre aberta para receber questões e dúvidas. Tal incentivo com certeza me abriu caminhos que hoje estou aproveitando.

Ao professor Rubens Luis Pinto Gurgel do Amaral, excelente orientador pois sempre busca uma maneira de motivar aos estudos. Agradeço também pela oportunidade de orientação, mesmo eu não tendo CR compatível, numa área de pesquisa diferente da dele, sempre disposto a estudar junto comigo.

Ao professor Nivaldo Agostinho Lemos, sempre disposto a conversar e grande incentivador aos estudos, sempre estimulando a aprender mais e com mais solidez.

Ao professor Antonio de Padua Brito Serbeto, talvez aquele que tenha me feito passar pela transição de “amadurecimento” nos estudos, com quem entendi a maneira de pensar de um físico, a maneira de estudar e me ajudou a criar uma disciplina própria de estudo, o que com certeza foi crucial para meu desenvolvimento até aqui e será no futuro.

Ao professor Marco Moriconi pelas frutíferas discussões informais as quais me fizeram atentar para detalhes importantes sobre pesquisa, e por aceitar o convite de participação da banca avaliadora.

À professora Maria Emília Xavier Guimarães, por aceitar o convite de participação da banca avaliadora.

Ao professor Kaled Dechoum, pelas melhores aulas ministradas da minha graduação, sempre motivadoras, além de terem um caráter filosófico de questionamento ao qual me identifico muito.

Ao professor Jorge Simões de Sá Martins, não só pelas aulas espetaculares, mas também por sempre me desafiar com questões não-triviais e sempre estimular a busca. Os professores Kaled, Jorge e Nivaldo foram grandes motivadores também na minha decisão de seguir a carreira como docente e pesquisar sobre métodos de ensino em física e matemática.

Ao professor Edson Pereira da Silva (Biomar/IB–UFF), pelas deslumbrantes aulas de evolução e tópicos em epistemologia. Sempre me recebendo de braços abertos e pronto para conversar, grande motivador para estudar assuntos na área de filosofia e repensar sobre o que é ciência, me fazendo entender a proposta da epistemologia, área de pesquisa a qual tenho grande atração.

Ao professor José Koiller (GAN/IME–UFF), presente neste último ano de graduação como orientador de projeto de monitoria, mas que esteve sempre disposto a me ajudar quando possível, me motivando mais ainda a seguir o mestrado em matemática, o que me motivou mais para a escrita da monografia e forças pra enfrentar o final da graduação.

Ao professor Rafael Nardi (IF–UNIFAP), quem na verdade é um amigo e conheci fora da universidade, e devo agradecer dentro e fora do mundo acadêmico. Quando conheci, doutorando em teoria de cordas, sempre me incentivou não somente à teoria, mas também à carreira científica, sempre apontando questionamentos importantes não apresentados em salas de aula. Me apresentou perspectivas que foram úteis em toda a minha graduação, e consegui enxergar atalhos no aprendizado, podendo me concentrar em coisas além. Em momentos de desespero, frustração, me fez não desistir e sempre seguir em frente.

Aos também professores, mas colegas de trabalho, Willian Silva e Vinícius Flores, me ajudando a me manter no curso de física em momentos de crise financeira até.

Ao amigo e professor Rodney Janson pelos ensinamentos em inglês, o que foi essencial, já que toda a literatura de teoria de cordas é estrangeira.

Aos funcionários da universidade, do setor administrativo ao setor de limpeza & manutenção, os quais geralmente são esquecidos, mas que tem presença indispensável já que sem tal trabalho não haveria nem mesmo universidade.

Por fim, agradeço à minha namorada Nathalya Reimol, quem sempre me fez resgatar os sonhos quando não sonhava com mais nada, estudar quando não queria mais e parar de estudar quando já estressado. Meu maior apoio emocional não só na academia, sem o qual teria sido muito difícil ter continuado.

Resumo

Desde seu surgimento, a teoria de cordas tem se mostrado uma teoria bonita e muito frutífera, com capacidade de resolver problemas impressionantes. A teoria de cordas nasceu tentando resolver a questão em torno dos polos de Regge, uma relação linear entre o momento angular total e o quadrado da massa das partículas. Depois, a cromodinâmica quântica foi estabelecida como modelo padrão das interações fortes e a teoria de cordas foi deixada de fora das pesquisas principais em física nuclear e de partículas. No entanto, a teoria é capaz de trazer consigo todos os bósons de spin 1, mediadores de três forças fundamentais e um estado bosônico não-massivo de spin 2, o qual se identifica com o gráviton, partícula teorizada responsável pela mediação das interações gravitacionais, o que traz a teoria de cordas para o hall das pesquisas centrais em física, agora com a proposta de *uma teoria de tudo*.

Este trabalho se divide em quatro capítulos. O primeiro capítulo aborda a história do surgimento da teoria assim como seus primeiros passos, e depois a história é deixada um pouco de lado para descrever e explicar alguns conceitos principais da teoria, mas sem nenhum aprofundamento em nível técnico. O desenvolvimento técnico começa no segundo capítulo e se estende em nível clássico até o capítulo três, onde vemos a ação de Nambu-Goto e de Polyakov, invariâncias de gauge, simetrias e algumas propriedades da dinâmica da corda. O quarto capítulo é destinado para o estudo técnico da quantização da corda bem como suas propriedades. O grande resultado deste capítulo é a demonstração do surgimento natural do gráviton.

Palavras-chave: Teoria bosônica de cordas, Teoria de cordas, Teoria quântica da gravidade, Teoria de gravidade quântica.

Abstract

Since its appearance, the string theory presents itself as a beautiful and very fruitful theory, being able to solve impressive problems. The theory arose out of trying to solve question about Regge's poles, a linear relation between the total angular momentum and the square of the mass of particles. The Quantum Chromodynamics has become the standard theory of strong nuclear interactions and the string theory grew out of major studies on particle and nuclear physics. However, the theory has all of the 1-spin bosons, mediators of three fundamental forces, and carries a bosonic massless 2-spin state which identifies the graviton, fundamental particle of gravitational interactions which brings the string theory to the hall of central researches on physics, now with the propose of *a theory of Everything*.

This work has four chapters. The first chapter deals the subject from historical point of view, from the first steps, and then we look at the main concepts of the theory without get into a highly technical discussion. The technical development begins in the second chapter and go until the third one only in the classical level, where we show the Nambu-Goto and the Polyakov actions, gauge invariances, symmetries and some properties of string dynamics. The third chapter focuses on string quantization technical studies and its properties. The main result of this chapter is the natural arising of the graviton.

Key-words: Bosonic string theory, String-theory, Quantum theory of gravitaty, Quantum gravity theory.

Sumário

Introdução	1
1 Panorama geral	3
1.1 Antes das cordas	3
1.1.1 A física moderna	3
1.1.2 No encontro dos pilares	4
1.1.3 A partir desses pilares	5
1.2 O nascimento e primeiros passos	5
1.2.1 Pouca atenção no início	5
1.2.2 A 1ª revolução na teoria de cordas	6
1.2.3 A 2ª revolução na teoria de cordas	6
1.3 Um resumo não-histórico	7
1.3.1 Dimensões extras	7
1.3.2 Entre as cordas e o mundo cotidiano	8
1.3.3 Escalas de importância	8
1.3.4 Espaços de Calabi-Yau	9
1.3.5 Alguns problemas	9
2 Propriedades da teoria bosônica clássica	10
2.1 A ação de Nambu-Goto	10
2.1.1 Algumas propriedades	11
2.1.2 Calibre estático (Static Gauge)	16
2.1.3 Corda na Dp-brana	20
2.2 A ação de uma p-brana	22
2.3 Ação de Polyakov ou Modelo $-\sigma$	23
3 Soluções (clássicas) para a equação de movimento	26
3.1 Parametrização σ e generalização do gauge estático	28
3.2 Variáveis de cone-de-luz	31

4 A teoria bosônica em nível quântico	33
4.1 Quantização covariante	33
4.2 Corda aberta	36
4.3 Corda fechada	40
Conclusão	43
Bibliografia	44

Introdução

Desde seu surgimento até os dias de hoje, a teoria de cordas desperta certa curiosidade nas pessoas. Talvez por se tratar de dimensões extras, e a primeira vista ter um aspecto meio esotérico por isso, talvez por aceitar universos paralelos como na teoria dos universos bolhas, ou também por ser uma promessa de teoria de grande unificação. É uma teoria riquíssima tanto do ponto de vista fenomenológico quanto do ponto de vista matemático. Por anos os pesquisadores da teoria de cordas, em conversas informais conhecidos como cordistas, se atêram apenas ao estudo puro da teoria, sem aplicações fenomenológicas, pois não se entendia o funcionamento da teoria. Após alguns anos começou-se o estudo fenomenológico em peso, e este se mantém até hoje, com muitas aplicações a buracos negros, universo primordial, aglomerados de galáxias entre outras. A fenomenologia de cordas mais difundida é a física de partículas e aplicações cosmológicas. A teoria faz muitas interseções com várias áreas de fronteira da matemática da geometria e topologia diferencial, geometria e topologia algébrica, como os espaços de Calabi-Yau, teoria de Morse, espaços Moduli, compactificações, supersimetrias entre outras.

Faremos um estudo elementar da teoria e portanto não veremos nada sobre a fenomenologia supracitada, muito menos sobre as áreas de fronteira na matemática, na qual a teoria de cordas tem conexão. O que será visto a seguir é importante para termos uma base para técnicas mais modernas. A motivação principal para o estudo da teoria de cordas é entender como funciona e o que se pode extrair de uma candidata a teoria de gravitação quântica, além disso, uma *teoria de grande unificação*. Do ponto de vista matemático a teoria traz muitas novidades, e mesmo que se ignore a fenomenologia de interesse físico, a teoria ainda é muito frutífera.

É um assunto não mencionado na graduação de física, e por isso este texto tem como objetivo também difundir a teoria num nível acessível a um estudante de graduação que tenha alguma noção básica de mecânica lagrangeana, como extrair as equações de movimento a partir da ação, princípio variacional de Hamilton, e a definição de momento canonicamente conjugado.

Entender o que são variáveis dinâmicas é muito importante, bem como conhecimento básico em relatividade especial. O que se requer de mecânica quântica é conhecer álgebra de operadores e comutadores, e conceitos fundamentais da teoria. O nível matemático do texto não causa nenhum problema para alguém que conheça os métodos elementares de resolução de equações diferenciais ordinárias, com ênfase na solução da equação de onda e expansão em série de Fourier.

Capítulo 1

Panorama geral

Este capítulo é reservado para uma breve apresentação da teoria de cordas (string theory) do ponto de vista histórico, com o intuito de mostrar suas motivações, em que escalas se torna importante, o que podemos esperar dela e os obstáculos que ela traz consigo.

1.1 Antes das cordas

1.1.1 A física moderna

Até aproximadamente o ano de 1860 existia a crença de a física ter sido totalmente resolvida, e o trabalho a ser feito era apenas de aumentar a precisão das medidas e da teoria. No entanto, havia “duas nuvens negras” que pairavam sobre a física, como disse Lord Kelvin, que obscureciam o entendimento total dos fenômenos físicos. A primeira delas era o problema da estabilidade da matéria, já que o átomo como Rutherford havia modelado não era estável, e os elétrons em órbita se chocariam ao núcleo após um tempo, de acordo com o eletromagnetismo clássico em vigor. Também era uma questão intrigante o problema da radiação de corpo negro, e os cálculos da energia total dos modos normais em uma cavidade davam infinitos... ora, não se pode esperar que uma teoria que explique bem o fenômeno estudado tenha como resultado para alguma grandeza um infinito. Esses problemas foram solucionados com o advento da Mecânica Quântica (entre 1900 e 1905) e totalmente formulada em 1925, quando se chamou de mecânica quântica moderna. A segunda nuvem que obscurecia o entendimento da física era a incompatibilidade entre o eletromagnetismo de Maxwell e a mecânica de Newton. O eletromagnetismo havia se mostrado muito preciso para ser descartado, e a mecânica newtoniana já era muito bem estabelecida e cada vez com mais resultados ao seu favor. A tarefa não era simplesmente escolher uma delas, mas encontrar o motivo dessa incompatibilidade, que na verdade está nas

transformações de coordenadas. A mecânica newtoniana tem como transformação de coordenadas as transformações de Galileu, enquanto o eletromagnetismo mostrou-se invariante sob transformações de Lorentz. As transformações de Lorentz podem ser vistas como uma generalização das transformações de Galileu, ou estas como um caso limite da transformação de Lorentz quando as velocidades são muito menores do que a velocidade da luz. Com as transformações de Lorentz, Einstein propõe em 1905 a Relatividade Especial, ou Relatividade Restrita. Deve ser deixado claro que as transformações na relatividade especial são válidas entre referenciais inerciais, ou seja, não há aceleração relativa entre estes. Então fica a pergunta: quais são as transformações entre referenciais não-inerciais? A resposta para esta pergunta veio em um trabalho de 1915, também de Einstein, onde apresentou uma nova teoria a qual chamamos de Relatividade Geral, ou a Gravitação de Einstein. Eis onde surge a física moderna e esses são seus dois pilares de sustentação: relatividade e mecânica quântica.

1.1.2 No encontro dos pilares

Esses dois pilares tem, cada um, regimes de atuação diferentes. A mecânica quântica é a área da física usada para descrever sistemas microscópicos. Alguns efeitos quânticos acabam ocorrendo em grande escala em certos sistemas físicos particulares. A relatividade especial é a área da física que descreve sistemas físicos com altas velocidades, próximas a velocidade da luz (aproximadamente $3 \cdot 10^8$ m/s). Ela trata das transformações de coordenadas de um sistema em relação a outro, e diz como uma grandeza física se transforma em outra baseada nas transformações de Lorentz. A generalização da relatividade especial, a relatividade geral, é a área que estuda transformações mais gerais, entre referenciais não-inerciais e a gravidade. Esse estudo é utilizado para compreender sistemas muito massivos, com alta densidade de energia como sistemas de galáxias e cosmologia.

Tudo estaria resolvido se efeitos de uma escala não se misturassem a outra. Objetos como buracos negros possuem grande concentração de massa-energia em uma região relativamente pequena do espaço, e por isso acaba sendo um exemplo onde tanto a mecânica quântica quanto a relatividade geral devem ser levadas em conta. Outro exemplo ocorre na cosmologia, quando assumimos um cenário cosmológico onde há o big-bang, pois todo o cenário é descrito pela gravitação (relatividade geral) e quando vamos ao início dos tempos encontramos uma região tão pequena do espaço que os efeitos quânticos devem ser levados em conta. A questão é que a teoria da gravitação e a teoria quântica não “falam a mesma língua”, e muito pouca predição pode ser feita nesses regimes porque não há nenhuma teoria de gravitação quântica.

Esta é uma questão de fronteira ainda hoje: desenvolver uma teoria que inclua tanto efeitos quânticos quanto gravitacionais.

1.1.3 A partir desses pilares

Com a física quântica bem estabelecida pode-se desenvolver duas áreas, dentre outras, muito importante até mesmo do ponto de vista prático: a física nuclear e a física de partículas. No início do século XX já se tinha um estudo sobre física de partículas através da mecânica quântica, mas esta não dava conta de certos processos como a aniquilação pósitron-elétron dando origem a um fóton, pois a mecânica quântica incluía a conservação do número de partículas do sistema em estudo. Além disso, existem sistemas onde as partículas possuem uma velocidade com uma fração considerável da velocidade da luz, daí a necessidade de se criar uma teoria quântica relativística. Dentre várias tentativas a mais bem-sucedida foi a Teoria Quântica de Campos - TQC (Quantum Field Theory - QFT), desenvolvida em 1926. Posteriormente, com a TQC foi possível unificar as forças eletromagnética e fraca, força esta que ocorre nas escalas nucleares. Já no estudo da física nuclear, a teoria de grupos mostrou-se cada vez mais importante para a física, predizendo muitos resultados que viriam a ser comprovados experimentalmente posteriormente. A grande questão da física nuclear era então (e ainda é) compreender a força forte, conseguir uma teoria que a modelasse. Nessa tentativa de entendimento foi que nasceu a teoria de cordas.

1.2 O nascimento e primeiros passos

1.2.1 Pouca atenção no início

Em 1968, o físico Gabriele Veneziano estudava certas propriedades da força forte, e descobriu que a função Beta de Euler servia para descrever muitas propriedades das partículas sob influência da força forte, mas não soube explicar o motivo de tal função conseguir fazê-lo. Foi em 1970 que três físicos, Yoichiro Nambu, Leonard Susskind, e Holger Nielsen, independentemente concluíram que o resultado de Veneziano se baseava numa teoria quântica para cordas vibrantes relativísticas, e assim nasce a teoria de cordas. Também em 1970 foi proposta pela primeira vez a Cromodinâmica Quântica (Quantum Chromodynamics - QCD), uma TQC no regime da força forte, e visto o sucesso das TQC (já era conhecida a Eletrodinâmica Quântica - QED - Quantum Electrodynamics), a QCD foi adotada como parte do modelo padrão para a física das interações fundamentais, principalmente por ser uma teoria renormalizável. A teoria de cordas possuía um grave problema nessa época pois não era capaz de descrever sistemas fermiônicos, e por isso ficou conhecida como Teoria de Cordas Bosônicas.

Para muitos parecia o fim da teoria, no entanto, em 1971 Pierre Ramond, André Neveu e John Schwarz desenvolvem uma teoria de cordas com férmions e bósons, enquanto Gervais e Sakita demonstram que esta nova teoria deve obedecer a uma álgebra supersimétrica em duas dimensões. [8]

1.2.2 A 1ª revolução na teoria de cordas

Em 1974 Joel Scherk e John Schwarz propoem a teoria de cordas como uma candidata a uma teoria de gravitação quântica, proposta que não foi levada muito a sério na época. A teoria de cordas trazia consigo um estado bosônico não-massivo de spin 2, propriedades necessárias para descrever o gráviton, partícula fundamental mediadora da força gravitacional. Esta partícula é a que faltava na física de partículas para que pudesse descrever todas as quatro forças fundamentais da natureza, a qual nenhuma teoria havia conseguido contemplar. As partículas fundamentais então seriam objetos unidimensionais ao invés de pontos adimensionais. Essa simples mudança resolveria problemas que as TQCs não conseguiam contornar, e eliminaria alguns problemas com infinitos. Não estava tudo resolvido. A teoria bosônica de cordas precisava de 26 dimensões espaço-temporais, contra 4 já aceitas pela teoria de Einstein. A teoria de supercordas que viriam depois, em 1981 com Michael Green e John Schwarz requeriam apenas 10 dimensões, 9 espaciais e 1 temporal. A questão que era colocada logo de cara era: onde estão todas essas dimensões que não observamos? Existiam outras complicações piores que esta. Uma delas é que na verdade não existia “a” teoria de supercordas mas “as” teorias. Dependendo de como fossem definidos os objetos fundamentais quanto as condições de contorno da teoria, corda fechada ou aberta, se há ou não orientabilidade (no sentido topológico) dos objetos, isso resulta em cinco teorias diferentes: Tipo I, Tipo IIA, Tipo IIB, Heterótica $E_8 \times E_8$, Heterótica $SO(32)$. Acreditava-se então que apenas uma dessas cinco teorias seria nomeada como a teoria de tudo... mas não era verdade. [7][8]

1.2.3 A 2ª revolução na teoria de cordas

Após um entendimento mais profundo da matemática envolvida nas teorias de supercordas, era possível calcular coisas complicadas de uma teoria através de coisas mais simples na outra, tudo graças ao que chamamos de dualidades. Tentando entender essas dualidades, Edward Witten (apoiado sobre trabalhos de Paul Townsend, Chris Hull e Michael Duff) desenvolve em 1995 o que chamamos de Teoria-M, onde as teorias de cordas e a supergravidade são casos limites dessa teoria mais fundamental que requer 11 dimensões, 10 espaciais e 1 temporal. Agora as cordas, objetos unidimensionais, são apenas um caso particular de objetos mais gerais chamados p-

branas. Temos então membranas bidimensionais que são nossas 2-branas, cordas unidimensionais são 1-branas e quaisquer objetos nesse espaço podem variar suas dimensões. Isso cria uma base muito maior para a teoria de cordas, e novas maneiras de se explicar os mecanismos de dimensões extras nessas teorias. [7][8]

1.3 Um resumo não-histórico

Faremos agora uma abordagem não-técnica mas focada nos detalhes da teoria, sem olhar para a história.

1.3.1 Dimensões extras

Como se explica a não-observação dessas dimensões extras? Na teoria de cordas, sem se levar em conta as p-branas, as dimensões espaciais são compactificadas. Podemos imaginar que é mais ou menos o que ocorre conosco e o planeta Terra. Quando olhamos em qualquer uma das direções a nossa volta, temos a impressão de o mundo ser plano e infinito, mas sabemos que vivemos sobre uma superfície bidimensional esférica. Então algum ser extra-terrestre muito grande poderia olhar para o sistema solar e pensar que não há dimensões extendidas (as que nós vemos), mas na verdade essas dimensões estão “enroladas” na esfera terrestre, e esse ser não pode observá-las. Outra maneira de imaginar essa situação seria pensar num fio muito longo e um ser microscópico. Quando nós olhamos para esse fio vemos apenas um objeto extenso unidimensional, enquanto o ser microscópico observa mais uma dimensão, pois o fio de perto é um cilindro. Essa dimensão extra que forma a espessura do fio cilíndrico é uma dimensão compactificada (ver figura 1.1). Existe outra maneira de explicar a nossa não-observação até hoje dessas dimensões extras levando em conta a teoria-M. As cordas abertas são responsáveis pela descrição dos nossos bósons, com exceção do gráviton. Se nós vivemos num Mundo-brana (World-Brane) de três dimensões, nós observaremos cordas que tenham suas extremidades presas a essa D3-brana, e não conseguimos acessar as demais dimensões por não estarmos observando cordas presas a branas com dimensões maiores. [7]

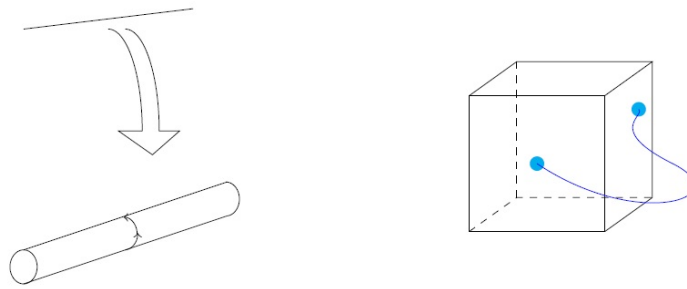


Figura 1.1: Vemos à esquerda uma ilustração de compactificação. À direita vemos uma ilustração de uma corda com extremidades fixadas em uma D3-brana.

1.3.2 Entre as cordas e o mundo cotidiano

Nesse contexto, esperasse que tudo seja derivado das cordas. Sabemos da física que toda a nossa realidade cotidiana pode ser resumida a átomos e moléculas, objetos que podem ser entendidos como conjuntos de partículas menores como prótons, neutrons e elétrons. Neutrons e prótons se dividem em quarks. Mas não acaba por aí. Uma corda pode vibrar de uma certa maneira numa certa frequência e isso significaria que ela está gerando um elétron. Numa outra frequência, seria um quark e assim por diante. Cada frequência, cada modo normal de vibração das cordas representa uma partícula, um estado de alguma partícula. Vibrando é que esses objetos geram tudo o que conhecemos no mundo, ou estamos para conhecer.

1.3.3 Escalas de importância

A teoria de cordas é candidata a uma teoria de gravitação quântica, uma teoria de tudo. Ela unificaria as quatro forças fundamentais e teríamos então uma descrição completa e unificada da gravitação, relatividade e mecânica quântica. Teorias que desempenham um papel principal na escala quântica apresentam a constante de Planck (\hbar) em suas formulações. Teorias relativísticas apresentam a velocidade da luz (c) enquanto teoria gravitacionais trazem consigo a constante universal da gravitação (G). A teoria de cordas torna-se indispensável quando se trata de tempos, comprimentos e energias que envolvam essas três constantes. Essa escala nós chamamos de escala de Planck. São processos que ocorrem num intervalo de tempo da ordem de 10^{-43} s, comprimentos da ordem de 10^{-35} m e massas da ordem de 10^{-8} kg. Falar de massas pode parecer um tanto desconfortável de se pensar inicialmente, mas basta utilizar $E = mc^2$ e obtemos energias da ordem de 10^8 J, o que equivale a uma ordem de 10^{27} eV. [1]

1.3.4 Espaços de Calabi-Yau

A geometria da teoria de cordas nos diz muito sobre ela. Na verdade podemos dizer que é a teoria que trata a física toda do ponto de vista geométrico. A geometria riemanniana se presta muito bem a esse papel, pelo menos até certo ponto. Em certos domínios da teoria, é necessária a implementação da geometria quântica, mais especificamente espaços de Calabi-Yau. Pode-se pensar que a geometria do universo consiste em uma variedade de dez dimensões na forma $M \times V$, onde M é uma variedade de quatro dimensões e V é uma variedade de seis dimensões compactas chamada de espaço de Calabi-Yau. Tal assunto é muito amplo e foge do objetivo deste texto, pessoas interessadas devem buscar mais nas referências bibliográficas. [5]

1.3.5 Alguns problemas

Existem dois problemas gritantes na teoria de cordas. Um é o problema do Landscape, pois a teoria prevê um número imenso de universos possíveis e teríamos de saber filtrar qual desses vários é o universo em que vivemos e observamos. A teoria de cordas prevê partículas fundamentais com massas muito maiores do que as que nós observamos, e este problema nós chamamos de Problema da Hierarquia de Massas. Essa questão tem relação com a escala de Planck. Ainda por usar como pressuposto a supersimetria, é de se esperar que haja a observação das partículas superparceiras, até agora não encontradas experimentalmente. A teoria de cordas é baseada numa matemática considerada muito árida e de pouquíssimo acesso no sentido de termos soluções para seus problemas, mas o maior desafio está na comprovação experimental. [1][7]

Capítulo 2

Propriedades da teoria bosônica clássica

Este capítulo é reservado para uma introdução técnica do assunto. Como o título do capítulo sugere, será apresentada apenas a teoria bosônica. É feita uma introdução a ação de Nambu-Goto e posteriormente a ação equivalente mas de mais fácil quantização, a ação de Polyakov. É conveniente definir as chamadas *unidades naturais*, onde $c = \hbar = G = 1$, dessa maneira comprimento e tempo tem a mesma dimensão, e dimensão inversa às energia e massa. A ideia vem de que a comunidade científica da Terra utiliza o sistema internacional (SI) pois são unidades que nós consideramos boas, devido às escalas em que temos mais contato e por tanto intimidade, assim tornam-se mais compatíveis com nosso mundo cotidiano. No entanto, sociedades extra-terrestres podem ter unidades totalmente diferentes. Então descrever as unidades em termos dessas constantes universais seria a maneira mais universal e não ambígua de medir as coisas e assim poder comparar resultados terrestres com extra-terrestres. Quando começarmos a utilizá-las será explicitamente mencionado no texto.

2.1 A ação de Nambu-Goto

Quando estudamos a relatividade do ponto de vista da mecânica lagrangiana, buscamos construir a ação de maneira que seja invariante sob transformações de Lorentz. Isso é possível ao definir a ação como a integral em relação a quantidade “ ds ”, invariante de Lorentz, definindo assim uma integral de linha da linha-universo ou linha-mundo (world-line) descrita pela partícula relativística:

$$S = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} d\tau. \quad (2.1)$$

O fator $-mc$ é colocado por questões de consistência, basta expandir a expressão da raiz quadrada em série de Taylor e vemos que aparecem as expressões da energia de repouso e da expressão newtoniana para energia cinética:

$$-mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} d\tau = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right] d\tau.$$

A função lagrangeana L de tal ação é dada por $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, donde extraímos as equações de movimento $\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0$, onde τ é um parâmetro arbitrário e $p^\mu = mc \frac{dx^\mu}{ds}$. [2]

A ação de Nambu-Goto é a generalização dessa ideia. Uma partícula pontual gera uma trajetória unidimensional no espaço-tempo, e podemos ver facilmente que qualquer objeto N -dimensional gerará uma trajetória $(N+1)$ -dimensional no espaço-tempo. Assim uma corda gera uma superfície bidimensional, e a integral de superfície desta define a ação de Nambu-Goto, como ilustra a figura 2.1:

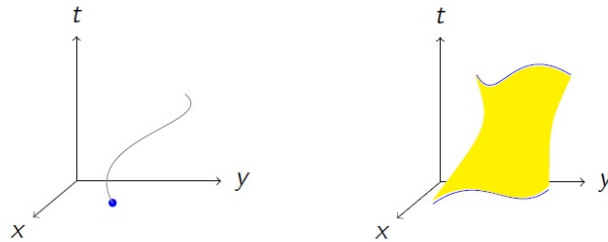


Figura 2.1: À esquerda vemos a linha-mundo, curva definida pela trajetória da partícula pontual. À direita vemos a folha-mundo, superfície definida pela trajetória de uma corda. Ambas representam o movimento do objeto no plano xy e no tempo.

2.1.1 Algumas propriedades

Para realizar a integral de superfície, precisamos de um espaço de parâmetros bidimensional e uma aplicação que leve desse espaço para o espaço-tempo, onde será observada a dinâmica da corda e discutidos os seus resultados. As variáveis de parametrização serão denotadas por τ e σ , sendo σ a variável responsável por indicar para qual ponto da corda estamos olhando, e τ será o análogo temporal, descrevendo um tempo do ponto da corda. Deve ser deixado bem claro que τ não necessariamente deve ser identificado como o tempo do nosso espaço-tempo, mas nosso interesse físico nos leva a considerar tal relação. Essa relação torna-se mais direta no gauge estático visto mais tarde. O nosso vetor do espaço-tempo será denotado por x^μ , enquanto nossa aplicação que leva o espaço de parâmetros no espaço “real” denotare-

mos por $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$. A figura 2.2 se presta ao papel de representar graficamente o trecho lido afim de uma melhor compreensão de quem lê.

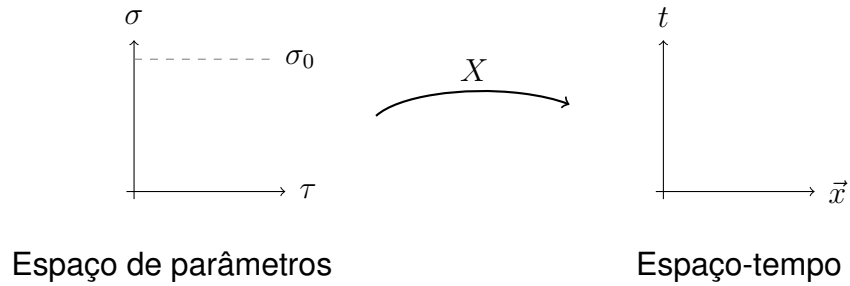


Figura 2.2: Aplicação X que leva um ponto do espaço de parâmetros a outro do espaço-tempo.

Pode ser que no início haja uma confusão quanto a essa notação, mas explicitamente falando, a variável em caixa alta é reservada para a aplicação enquanto em caixa baixa para os vetores genéricos do espaço-tempo. Adiantando um resultado futuro, o espaço-tempo na teoria de cordas bosônica possui 26 dimensões. Temos então:

$$\begin{aligned} x^\mu &\in \mathbb{R}^{26} \quad ; \\ B &= \{(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^2 | \tau, \sigma \in \mathbb{R}\} \quad ; \\ X^\mu &: B \longrightarrow \mathbb{R}^{26} \quad . \end{aligned}$$

Definimos também a seguinte notação que será muito útil:

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad .$$

Tendo bem clara a notação, temos então a ação de Nambu-Goto sendo:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} d\sigma d\tau \quad ,$$

onde vemos explicitamente o fator de integração representado pela raiz quadrada.

Da forma como foi construída a ação de Nambu-Goto seria muito estranho que ela não descrevesse sistemas relativísticos, no entanto, não assumiremos a priori essa descrição e futuramente demonstraremos que a relatividade está implícita nessa ação. Tal ação goza de certas propriedades importantes que serão utilizadas aqui. Uma dessas propriedades é a invariância por reparametrização, o que significa que podemos escolher arbitrariamente os parâmetros σ e τ :

$$(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma', \tau') \quad ,$$

definindo uma nova aplicação $X^\mu(\sigma', \tau')$ entre o espaço de parâmetros e os espaço-tempo, e o formato da nova ação será o mesmo da ação com os parâmetros originais. Essa arbitrariedade define uma ampla liberdade de gauge da teoria, análoga a liberdade do eletromagnetismo. Para o estudo da teoria de cordas devemos levar em conta que a corda possui um comprimento finito, e isso se traduz no espaço de parâmetros limitando a variável σ em algum intervalo fechado. Os extremos desse intervalo corresponderão ao extremos da corda. Vista a propriedade de invariância sob reparametrização, podemos eleger um intervalo qualquer para o nosso estudo, já que para qualquer intervalo que nos seja dado podemos redefinir nossa aplicação para que tenha como domínio o espaço paramétrico com σ limitado pelo nosso intervalo fechado favorito. É de costume no estudo da teoria de cordas usar o intervalo $[0, \pi]$ por futuras simplicidades nos cálculos que surgirão.

Mas temos ainda a variável τ que nos ajuda a descrever a dinâmica da corda. Queremos que esta seja responsável pela evolução temporal dos pontos que formam a corda, então esta variável não pode ser limitada da mesma maneira que o σ pois em física as vezes é interessante estudar o limite quando o tempo vai para o infinito. Olhando para um ponto qualquer da folha-mundo, traçamos todos os vetores tangentes a este ponto genérico e esperamos que seja possível construir uma base bi-dimensional, sendo um dos vetores tipo-tempo e o outro tipo-espaço. Vemos que isso somente é possível se não houver trechos finitos na corda que se movam com velocidade da luz. A figura 2.3 ilustra um trecho da corda se movimentando na direção y com velocidade c . Podemos traçar vetores tangentes a folha-mundo no ponto P . A semi-circunferência representa todos esses vetores. Cada reta horizontal na figura representa uma corda num instante posterior. Os pontos P e Q definem um vetor tipo-espaço, assim como todo vetor definido por P e R , sendo R um ponto da semi-circunferência. Isso fica claro quando observamos que o ponto P leva um certo tempo para alcançar o ponto \bar{R} , e claramente vemos que a distância entre os pontos P e R é maior que a distância entre os pontos P e \bar{R} , então o movimento de P até R deve ser mais rápido que o movimento de P até \bar{R} , ou seja, uma velocidade maior que a velocidade da luz. Ainda nessa análise, para o ponto S , interseção da semi-circunferência com o eixo y , temos o vetor definido por P e S sendo tipo-nulo. Então todos os vetores tangentes a folha-mundo no ponto P são tipo-espaço a menos de alguns tipo-nulo. Por continuidade, a análise feita se estende a todos os pontos desse trecho (e assim da corda), daí concluímos que não há significado físico para este, pois não há vetores tipo-tempo.

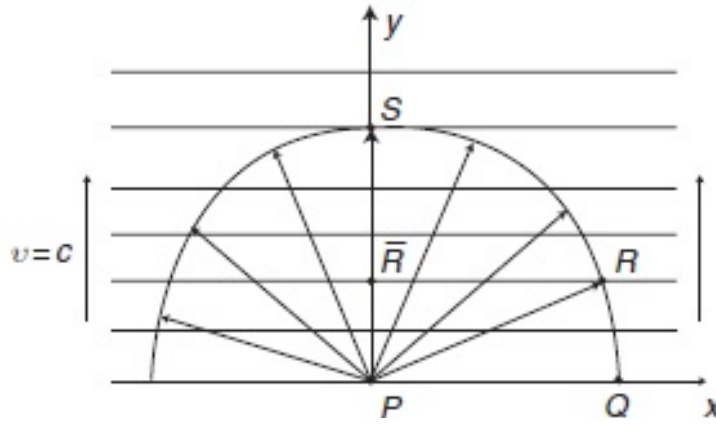


Figura 2.3: Trecho da corda se movendo com velocidade da luz.

A importância dos vetores tipo-tempo é nítida quando lembramos que para uma partícula pontual, descrevendo uma linha-universo, os vetores tangentes (tipo-tempo) permitem definir um observador de Lorentz instantâneo que vê a partícula em repouso. Se tivermos um vetor tipo-tempo na folha-mundo, este nos permite descrever um observador de Lorentz instantâneo que vê o ponto em repouso. Na folha-mundo, se existe um vetor tipo-tempo, existem infinitos pelo argumento da continuidade, e cada um destes diferentes vetores tangentes definem um observador que vê o ponto em repouso. Isso só faz sentido se não pudermos identificar cada ponto da corda individualmente. Em outras palavras, não se pode imaginar a corda como sendo um objeto constituído de pontos, devemos olhar a corda como um objeto único e inteiro. As únicas exceções são os dois pontos extremos da corda aberta. Podemos assim dizer, fisicamente, que a corda é um objeto fundamental na natureza, não é formada por constituintes, e por tanto não faz sentido levantar a questão “do que as cordas são feitas?”.

É conveniente introduzir uma notação resumida para a métrica induzida g , a qual costuma-se por abuso de linguagem chamar de $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix} .$$

Por tal notação, é permitido denotar por g o determinante da métrica. A ação de Nambu-Goto em termos da métrica induzida é:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{-g} d\sigma d\tau ,$$

o que torna explícita a invariância por reparametrização.

Sabemos que segundo o princípio de mínima ação de Hamilton, $\delta S = 0$. Vamos calcular tal variação:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^\pi \delta \sqrt{-g} d\sigma d\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right] d\sigma d\tau \quad , \end{aligned}$$

onde usamos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^\sigma &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \\ \mathcal{P}_\mu^\tau &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \quad . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Assumiremos variações em τ tais que $\delta X^\mu(\tau_2, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_1, \sigma) = 0$, o que resulta na anulação da primeira parcela do integrando. Ficamos com:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right] d\sigma d\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^\pi d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^\pi \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) d\sigma d\tau \quad . \end{aligned}$$

A segunda parcela do integrando nos fornece as equações de movimento, explicitadas abaixo:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad . \tag{2.3}$$

A primeira parcela deve se anular também, para que tenhamos o princípio da mínima ação funcionando, e isso nos fornecerá as condições de contorno necessárias, por questões de consistência, para que seja válido o princípio variacional de Hamilton:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} [\delta X^\mu(\tau, \pi) \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \pi) - \delta X^\mu(\tau, 0) \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0)] d\tau \quad . \tag{2.4}$$

Como μ pode variar entre 0 e N , temos na verdade $2(N+1)$ condições de contorno, com N sendo o número de dimensões espaciais. Para o caso de uma corda aberta de extremidades livres (extremidades fixas a uma DN-brana, veremos mais adiante) temos δX^μ arbitrário, portanto \mathcal{P}_μ^σ deve ser nulo. Veremos mais adiante alguns casos em que δX^μ não possui tal arbitrariedade, e quais são as consequências disso para \mathcal{P}_μ^σ nas respectivas componentes. [1]

2.1.2 Calibre estático (Static Gauge)

No estudo do eletromagnetismo temos interesse em ter em mãos a expressão do potencial elétrico, por exemplo. Algumas expressões alternativas do potencial tem a propriedade de não alterar o campo elétrico do problema, existe uma certa liberdade de escolha sobre os potenciais escalares e vetoriais V e \vec{A} , que na forma de quadri-vetores são representados por A^μ , $A^\mu \rightarrow A'^\mu + \partial^\mu \Lambda$. Essa liberdade chamamos de *liberdade de Calibre*, ou *liberdade de Gauge*. Essa mesma liberdade temos sobre as variáveis paramétricas, escolher as variáveis σ e τ convenientes equivale a escolher um gauge, e uma classe de gauge que é muito utilizada é o Gauge estático. Geometricamente, consiste em cortar a superfície traçada pelo movimento da corda com um hiperplano com τ fixo, e a interseção é a corda nesse dado tempo. O hiperplano neste caso deve ser $n_\mu = \delta_{\mu,0}$, com $\delta_{i,j}$ sendo o delta de Kronecker:

$$X^0 = c\tau = ct \quad \Rightarrow \quad \tau = t \quad .$$

Corda sobre um eixo fixo

Para ganharmos familiaridade com o conteúdo da corda, vamos estudar agora um exemplo específico, uma corda de extremidades fixas, e que não se desloque para fora de um eixo arbitrário, o qual escolheremos como nosso eixo x . Suas extremidades serão em $x = 0$ e $x = a$. Como não há deslocamento da corda, podemos tomar um referencial no qual ela está parada e assim anulamos a energia cinética. Então nossa lagrangiana será proporcional a energia potencial do sistema:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int \int \sqrt{-g} d\sigma dt = \int L dt \quad ,$$

e as expressões para X^μ tornam-se:

$$X^\mu = (ct, f(\sigma), 0, \dots, 0) \quad ;$$

$$\dot{X}^\mu = (c, 0, \dots, 0) \quad ;$$

$$X'^\mu = (0, f'(\sigma), 0, \dots, 0) \quad .$$

Calculando os termos da ação:

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad ;$$

$$\dot{X}^2 = -c^2 \quad ;$$

$$X'^2 = [f'(\sigma)]^2 \quad .$$

Substituindo os valores obtidos na ação teremos:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\pi \sqrt{c^2 f'(\sigma)^2} d\sigma dt = -\frac{T_0}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\pi c f'(\sigma) d\sigma dt = -T_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\pi f'(\sigma) d\sigma dt .$$

Resolvendo a integral em σ e lembrando que $f(0) = 0$ e $f(\pi) = a$ teremos o seguinte resultado:

$$S = -T_0 \int_{t_1}^{t_2} [f(\pi) - f(0)] dt = -T_0 \int_{t_1}^{t_2} a dt = \int_{t_1}^{t_2} (-T_0 a) dt ,$$

e o integrando desta última expressão é a função lagrangiana, que neste sistema é proporcional ao potencial já que não há energia cinética.

$$\int_{t_1}^{t_2} (-T_0 a) dt = \int_{t_1}^{t_2} (-V) dt \Rightarrow T_0 a = V .$$

Neste exemplo a energia total é $V = mc^2$, então vemos que T_0 pode ser interpretado como uma densidade de energia na corda. Mantendo a tensão T_0 constante, aumentando a energia aumentamos também o comprimento a da corda.

Ação e velocidade transversal

As vezes torna-se interessante escrever a ação em função da velocidade transversal da corda. Antes de tudo, existe uma parametrização por comprimento de arco e denotaremos esse parâmetro por s . Uma parametrização é dita por comprimento de arco quando $|f'(s)| = 1$. Dada a aplicação X^μ , é de interesse nosso representar a parte espacial como \vec{X} . Temos como velocidade o vetor $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$, que possui componentes tangencial e transversal. O vetor $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ é um vetor unitário na direção tangente a corda. Obtemos a componente transversal da velocidade \vec{v}_\perp simplesmente subtraindo do vetor velocidade a sua componente tangencial, como é feito a seguir:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} . \quad (2.7)$$

Será de interesse futuro a utilização da seguinte expressão a ser calculada:

$$v_\perp^2 = \left[\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] \cdot \left[\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 .$$

Como no exemplo anterior, vamos calcular as componentes de g :

$$\dot{X}^\mu = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \Rightarrow \dot{X}^2 = -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 ;$$

$$X'^\mu = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \Rightarrow X'^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 ;$$

$$\dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} .$$

A velocidade transversal é descrita em termos do parâmetro de arco s enquanto a ação em termos do parâmetro σ , precisamos reescrever a ação em função do parâmetro s . Para tal, precisamos efetuar uma reparametrização:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T_0}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2} d\sigma dt = \\ &= -\frac{T_0}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\pi \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2} d\sigma dt = \\ &= -\frac{T_0}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 + c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2} ds dt = \\ &= -\frac{T_0}{c} \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{c^2 - \vec{v}_\perp^2} ds dt = -T_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} ds dt . \end{aligned}$$

Verifica-se assim que a lagrangiana é:

$$L = -T_0 \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} ds ,$$

tendo explicitamente o fator relativístico, como era de se esperar, já que sua construção é relativística. É inevitável a comparação de tal lagrangiana com a da partícula relativística, e acabamos por ver que a lagrangiana obtida acima se comporta como a união de vários pontos de dinâmica relativística.

Vamos calcular as quantidades \mathcal{P}_μ^σ e \mathcal{P}_μ^τ utilizando as equações (2.2):

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}_\mu - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) X'_\mu}{\frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} ;$$

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) X'_\mu - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \dot{X}_\mu}{\frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} .$$

Agora podemos verificar os valores de cada componente dos nossos vetores (2.2), bastando escolher o valor para μ . Vamos verificar o que ocorre com a componente temporal e espacial, separadamente:

$$\mathcal{P}_0^\sigma = T_0 \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} . \quad (2.8)$$

Olhando para a equação (2.4) e assumindo que as extremidades da corda estão presas a uma DN-brana (extremidades livres para se mover por todo o espaço), para qualquer parametrização escolhida, temos que nas extremidades da corda $\mathcal{P}_\mu^\sigma = 0$, também por consistência. Aplicando esta condição à equação acima concluímos que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0$. Em palavras, a corda tem o movimento de suas extremidades sendo ortogonal a direção do seu comprimento. Agora olhando para $\vec{\mathcal{P}}^\sigma$:

$$\vec{\mathcal{P}}^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} ,$$

utilizando a ortogonalidade entre $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ e $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$, obtida a partir da equação (2.8), nesta última expressão e na equação (2.7), obtemos a seguinte expressão final:

$$\vec{\mathcal{P}}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} , \quad (2.9)$$

donde concluímos que $v_\perp^2 = c^2$, pois $\vec{\mathcal{P}}^\sigma = 0$. Vemos que nas extremidades então, além

da velocidade ser ortogonal a direção da corda elas se movem com a velocidade da luz. Toda essa dedução tem como pressuposto que a corda tem extremidades livres, como veremos agora, está presa a uma DN-brana. Veremos o que ocorre num caso mais geral a seguir.

Nessa subseção, vimos que a ação da corda pode ser vista como a “soma” de ações relativísticas de uma partícula, onde os extremos da corda apresentam como velocidades máximas a velocidade da luz c e movem-se ortogonalmente à corda.

2.1.3 Corda na Dp-brana

Queremos estudar a dinâmica de uma corda aberta quando esta tem suas extremidades presas a uma brana de p dimensões, ou seja, uma Dp-brana. Uma Dp-brana é um tipo especial de p-brana na qual as extremidades de uma corda podem se fixar. O D é devido à condição de Dirichlet imposta a componentes da corda. Uma p-brana é uma hipersuperfície p -dimensional imersa num espaço N -dimensional, com $p \leq N$. Vamos denotar por j as componentes do vetor X^μ que estão contidas nessa brana e por a as demais componentes espaciais fora da brana. Assim $X^\mu = (X^0, X^j, X^a)$ e nas extremidades devemos considerar que $X^a(\tau, \sigma_{extremidade}) = 0$, onde $j = 1, 2, \dots, p$ e $a = p + 1, \dots, N$. Nas extremidades temos $X^a = 0 \Rightarrow \frac{\partial X^a}{\partial t} = 0$. Calculando as expressões (2.2) teremos (lembrando que estamos utilizando o gauge estático):

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\dot{X}^j X'_j + \dot{X}^a X'_a \right) \dot{X}_\mu - \left(-c^2 + \dot{X}^j \dot{X}_j + \dot{X}^a \dot{X}_a \right) X'_\mu}{\sqrt{\left(\dot{X}^j X'_j + \dot{X}^a X'_a \right)^2 + \left(c^2 - \dot{X}_j^2 + \dot{X}_a^2 \right) (X_j'^2 + X_a'^2)}} . \quad (2.10)$$

Vamos analisar alguns casos interessantes sobre o comportamento de uma corda presa a uma Dp-brana a partir da equação (2.10). É importante ter em mente também a equação (2.4), donde tiramos o comportamento de δX^μ dependendo a qual Dp-brana as extremidades estão fixadas, e também que $\delta X^0 \neq 0$, o que nos leva a concluir que $\mathcal{P}_0^\sigma = 0$.

- *D0-brana*

Nenhuma das componentes do vetor X^μ está contida na brana, já que ela é adimensional. Então podemos denotar $X^a = \vec{X}$ e conseqüentemente $\mathcal{P}^{\sigma a} = \vec{\mathcal{P}}^\sigma$. Também é feita uma reparametrização por comprimento de arco s . Reescrevendo (2.10) sem a existência do índice j , obtemos as expressões para $\mu = 0$ e

$\mu = a$:

$$\mathcal{P}_0^\sigma = T_0 \frac{\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2 + c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2}} \Rightarrow \mathcal{P}_0^{\sigma_{ext}} = 0 \quad ;$$

$$\vec{\mathcal{P}}^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2\right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2 + c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2}} \Rightarrow \vec{\mathcal{P}}^{\sigma_{ext}} = -T_0 \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \quad .$$

Neste caso vemos que a condição $\mathcal{P}_0^\sigma = 0$ é automaticamente satisfeita. Também por não haver liberdade nenhuma nas extremidades, $\delta \vec{X} = 0$, não há restrições sobre $\vec{\mathcal{P}}^\sigma$, de acordo com a equação (2.4).

- *D1-brana*

Aqui só existe uma única projeção do vetor X^μ que está contida na brana, temos então a componente $\mu = 0$, $\mu = j = 1$ e $\mu = a$, δX^1 é arbitrário enquanto as demais componentes são nulas. Denotaremos agora $X^a = \vec{X}_a$ e $X^j = X_1$ (pois só existe uma única componente j). A notação nos leva a considerar $\mathcal{P}^{\sigma a} = \vec{\mathcal{P}}_a^\sigma$ e $\mathcal{P}^{\sigma j} = \mathcal{P}_1^\sigma$.

$$\mathcal{P}_0^\sigma = T_0 \frac{\frac{\partial X_1}{\partial t} \frac{\partial X_1}{\partial s} + \frac{\partial \vec{X}_a}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}_a}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \xrightarrow{\text{extremidade}} \frac{\partial X_1}{\partial t} \frac{\partial X_1}{\partial s} = 0 \quad .$$

Temos então $\frac{\partial X_1}{\partial s} = 0$ já que o movimento na brana é arbitrário. Assim como no caso das extremidades livres (caso de uma DN-brana), o movimento das extremidades da corda presa a uma D1-brana é ortogonal à direção da corda. Em outras palavras, a corda se fixa ortogonalmente à D1-brana. Daí concluímos também que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{v}_\perp$. Prosseguiremos a análise com essas informações em mãos.

$$\mathcal{P}_1^{\sigma_{ext}} = -\frac{T_0}{c} \frac{\left[c^2 - \left(\frac{\partial X_1}{\partial t}\right)^2\right] \frac{\partial X_1}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X_1}{\partial s} = 0 \quad .$$

Vemos na última igualdade que não há restrição para a velocidade das extremidades (obviamente não excedendo c), o que não ocorre na DN-brana.

- *Dp-brana*; $p \geq 2$

Como mencionado previamente, na equação (2.4) temos para as componentes $\mu = j$ que $\mathcal{P}_j^\sigma = 0$ pois δX^j é arbitrária. Será utilizada a notação de Einstein para somatórios, a menos que haja menção explícita do contrário. Olhando para a equação (2.10), vemos:

$$\mathcal{P}_0^\sigma = \frac{T_0}{c} \frac{\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \xrightarrow{\text{extremidades}} \frac{\partial X^j}{\partial t} \frac{\partial X^j}{\partial s} = 0 \quad .$$

Agora não necessariamente cada componente de $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ na brana deve ser zero. Utilizando o resultado obtido partimos para as componentes $\mu = j$:

$$\mathcal{P}_j^{\sigma_{ext}} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X_j}{\partial s} = 0 \quad ,$$

e daí tiramos duas possibilidades. A primeira é que se pelo menos uma das componentes j de $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ não for nula, a única maneira de termos satisfeita a extremização da ação (vide equação (2.4)) é se $|\vec{v}_\perp| = c$. Caso só haja componentes nulas conclui-se que a corda é ortogonal a Dp-brana, no entanto não há restrições ao que se refere à velocidade das extremidades. [1]

2.2 A ação de uma p-brana

A ação de Nambu-Goto apresenta-se com uma construção muito simples e de fácil generalização para objetos multidimensionais. A corda nada mais é do que um caso especial de brana, uma 1-brana. Da mesma maneira como foi construída para a 1-brana, podemos contruir a ação geral para uma p-brana, que se move num espaço D-dimensional com $D > p$. A evolução temporal de uma p-brana no espaço-tempo D-dimensional descreverá uma hipersuperfície $(p + 1)$ -dimensional, da qual integramos o elemento de volume para obter sua ação:

$$S_p = -T_p \int d\mu_p \quad ,$$

com T_p sendo a tensão da p-brana e $d\mu_p$ sendo o elemento de volume $(p+1)$ -dimensional dado por:

$$d\mu_p = \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}} d^{p+1}\sigma \quad .$$

Introduziu-se a métrica induzida dada por:

$$G_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \quad , \quad \alpha, \beta = 0, \dots, p \quad .$$

Para podermos escrever como ação física definimos $\sigma^0 = \tau$. [3]

2.3 Ação de Polyakov ou Modelo – σ

Embora a ação de Nambu-Goto tenha uma boa interpretação física, ela é de difícil quantização por haver uma raiz quadrada. Daí motivou-se o advento de uma nova descrição do modelo, que possuísse uma ação equivalente, levando às mesmas equações de movimento, mas que não tivesse uma raiz quadrada envolvendo as variáveis dinâmicas, tornando a quantização mais simples. Para tal tarefa define-se um campo auxiliar $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$. Usaremos a notação $h_{\alpha\beta}$ para a métrica da *folha-universo* (world-sheet) pois $g_{\mu\nu}$ denota a métrica do espaço-tempo. Denotaremos também $h = \det(h_{\alpha\beta})$. Utilizaremos a partir daqui as unidades naturais mencionadas no início do capítulo. Tendo clara a notação e as unidades utilizadas, a ação do modelo- σ é dada por:

$$S = -\frac{T}{2} \int \int \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X d\sigma d\tau \quad , \quad (2.14)$$

na qual o campo auxiliar $h^{\alpha\beta}$ e as coordenadas X^μ são tratados como campos independentes. Classicamente, esta ação é equivalente à ação de Nambu-Goto.

Para alcançarmos rapidamente alguns resultados definiremos a métrica da folha-universo como sendo a métrica de Minkowski ($h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$). Então $h = -1$ e a ação se reescreve como:

$$S = -\frac{T}{2} \int \int \left(X'^2 - \dot{X}^2 \right) d\sigma d\tau \quad . \quad (2.15)$$

Da equação (2.15) deduzimos as equações de movimento e as condições de contorno através do princípio de mínima ação de Hamilton:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= -\frac{T}{2} \int \int \delta \left(X'^2 - \dot{X}^2 \right) d\sigma d\tau = -T \int \int \left(X'_\mu \delta X'^\mu - \dot{X}_\mu \delta \dot{X}^\mu \right) d\sigma d\tau = \\ &= -T \int \int \left(X'_\mu \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta X^\mu - \dot{X}_\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \delta X^\mu \right) d\sigma d\tau \quad . \end{aligned}$$

Utilizaremos agora o seguinte fato:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial X_\mu}{\partial \alpha} \delta X^\mu \right] &= \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \alpha^2} \delta X^\mu + \frac{\partial X_\mu}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta X^\mu \\ \Rightarrow \frac{\partial X_\mu}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \delta X^\mu &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial X_\mu}{\partial \alpha} \delta X^\mu \right] - \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \alpha^2} \delta X^\mu \quad ,\end{aligned}$$

e daí temos:

$$\begin{aligned}0 &= -T \int \int \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \delta X^\mu \right) - \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \sigma^2} \delta X^\mu - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \delta X^\mu \right) + \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \tau^2} \delta X^\mu \right] d\sigma d\tau = \\ &= \int \left[\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \delta X^\mu \right]_0^\pi d\tau + \int \int \left(\frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \tau^2} \right) \delta X^\mu d\sigma d\tau \quad ,\end{aligned}$$

o que nos leva à equação de movimento, conhecida como equação da onda:

$$\frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \tau^2} = 0 \quad , \quad (2.16)$$

e também às condições de contorno:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[X'_\mu(\tau, \pi) \delta X^\mu(\tau, \pi) - X'_\mu(\tau, 0) \delta X^\mu(\tau, 0) \right] d\tau = 0 \quad . \quad (2.17)$$

A simplicidade da equação (2.16) esconde uma grande complicação cuja origem não está explicitada aqui. A ação de Polyakov completa, com os campos auxiliares $h^{\alpha\beta}$ leva a condições adicionais. Escolhendo adequadamente as variáveis σ e τ essas condições podem ser reduzidas às duas condições:

$$\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right)^2 \pm \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right)^2 = 1 \quad . \quad (2.18)$$

Essas são condições de contorno quadráticas que devem ser respeitadas pela solução. [1][6]

Lembrando da definição dada nas equações (2.2), podemos observar que a equação (2.16) tem escrita similar à equação (2.3). A equação (2.16) é obtida da ação de Nambu-Goto (2.3) se é escolhido o gauge do cone-de-luz, e uma escolha associada a σ , vista mais adiante.

Em física teórica é sempre bom termos em mente quais são as simetrias que temos no modelo em estudo, o que nos diz se a teoria será relativística, conserva energia, momento e outras quantidades que desejarmos. Classicamente, no espaço de Minkowski, nossa ação (2.14) é invariante por:

- *Transformações de Poincaré*

São transformações de caráter global definidas por $\delta X^\mu = a^\mu_\nu X^\nu + b^\mu$ e $\delta h^{\alpha\beta} = 0$, com $a^{\mu\nu} = -a^{\nu\mu}$, onde a^μ_ν e b^μ são constantes.

- *Reparametrização*

É uma transformação de caráter local, onde mudamos nosso espaço de parâmetros, como feito na ação de Nambu-Goto. A reparametrização aqui altera tanto X^μ quanto $h^{\alpha\beta}$.

- *Transformações de Weyl*

Também transformações de caráter local definidas por $h_{\alpha\beta} \rightarrow e^{\phi(\tau,\sigma)} h_{\alpha\beta}$ e $\delta X^\mu = 0$

O estudo específico de cada uma dessas simetrias pode se tornar um texto muito extenso e não será tratado aqui. Pessoas interessadas devem verificar a fonte bibliográfica onde encontrarão boas fontes. [3]

Capítulo 3

Soluções (clássicas) para a equação de movimento

A equação de movimento (podendo chamar de equações, no plural, se olharmos para cada uma de suas componentes) obtida a partir da ação é mais conhecida como equação de onda, e tem a seguinte solução geral:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [f^\mu(\tau - \sigma) + g^\mu(\tau + \sigma)] \quad , \quad (3.1)$$

onde qualquer constante é “absorvida” nas funções f e g , e o denominador 2 é colocado para simplificação futura. Considerando a corda aberta totalmente livre para se mover no espaço inteiro, o que significa termos uma DN-brana (sabemos que será uma D25-brana), concluímos da equação (2.4) que $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$. Das equações (2.15) e (2.2) temos $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = X'^\mu(\tau, 0) = X'^\mu(\tau, \pi) = 0$, e com a equação (3.1):

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [-f'^\mu(\tau - \sigma) + g'^\mu(\tau + \sigma)] \quad .$$

Como f e g são funções de uma variável, então f' e g' significam as derivadas com respeito aos seus respectivos argumentos $\tau - \sigma$ e $\tau + \sigma$. Da expressão acima, apliquemos os valores de σ nas extremidades, começando por $\sigma = 0$:

$$0 = -f'^\mu(\tau) + g'^\mu(\tau) \implies f'^\mu(\tau) = g'^\mu(\tau) \quad .$$

As derivadas nas extremidades são iguais, então as funções diferem apenas por um constante, que chamaremos de c^μ , e então $g^\mu(\tau) = f^\mu(\tau) + c^\mu$. Podemos no entanto “absorver” a constante na própria função f , e assim temos que $g^\mu(\tau) = f^\mu(\tau)$. Nossa equação (3.1) torna-se então:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [f^\mu(\tau - \sigma) + f^\mu(\tau + \sigma)] \quad . \quad (3.2)$$

Com o mesmo procedimento mas agora sobre a equação (3.2) e com $\sigma = \pi$, temos:

$$0 = -f'^{\mu}(\tau - \pi) + f'^{\mu}(\tau + \pi) \Rightarrow f'^{\mu}(\tau + 2\pi) = f'^{\mu}(\tau) \quad ,$$

e podemos ver que as derivadas tem periodicidade 2π entre si (esta é uma das motivações de se escolher $\sigma \in [0, \pi]$). Por essa periodicidade podemos expandir essa função em série de Fourier. Para um argumento geral qualquer u , temos então para $f'^{\mu}(u)$:

$$f'^{\mu}(u) = f_1^{\mu} + \sum_{n \in \mathbb{N}} [a_n^{\mu} \cos(nu) + b_n^{\mu} \sin(nu)] \quad ,$$

e integrando com respeito a variável u a equação acima, temos então a expressão para nossa função $f^{\mu}(u)$:

$$f^{\mu}(u) = f_0^{\mu} + f_1^{\mu}u + \sum_{n \in \mathbb{N}} [A_n^{\mu} \sin(nu) + B_n^{\mu} \cos(nu)] \quad , \quad (3.3)$$

onde foram “absorvidos” os fatores $\frac{1}{n}$ resultantes da integração em novos coeficientes A_n^{μ} e B_n^{μ} . Com essa nova expressão para $f^{\mu}(u)$ podemos reescrever a equação (3.2) como:

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = f_0^{\mu} + f_1^{\mu}\tau + \sum_{n \in \mathbb{N}} [A_n^{\mu} \cos(n\tau) + B_n^{\mu} \sin(n\tau)] \cos(n\sigma) \quad . \quad (3.4)$$

Podemos calcular agora $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ que pela equação (2.15) é $T\dot{X}^{\mu}$. O fator T no entanto, conhecido como *tensão da corda* pode ser reescrito em termos do parâmetro *slope* (“slope parameter” na literatura, onde preferimos não traduzí-lo por não haver uma boa correspondência com a língua portuguesa) α' , o qual tem relação quadrática com o comprimento da corda l_s . Temos a seguinte relação:

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad . \quad (3.5)$$

De posse desta relação, continuemos com a análise antes em andamento:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{\dot{X}}{2\pi\alpha'} = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^{\mu} + \mathcal{O}(\tau, \sigma) \quad ,$$

onde a função $\mathcal{O}(\tau, \sigma)$ não será explicitada por conveniência. A integral de $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ em relação a σ define uma grandeza conservada p^{μ} , a qual interpretamos como quadri-momento total da corda.

$$p^{\mu} = \int_0^{\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\alpha'} f_1^{\mu} \Rightarrow f_1^{\mu} = 2\alpha' p^{\mu} \quad .$$

Podemos substituir f_0^{μ} por x_0^{μ} e reescrever os termos de Fourier em função de τ

para a forma de exponenciais complexas, obtendo a expressão seguinte:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{N}} [a_n^{\mu*} e^{in\tau} + a_n^\mu e^{-in\tau}] \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}.$$

Os coeficientes a_n^μ terão relação com os operadores de criação de aniquilação quando quantizarmos a corda. Por hora, nos restringiremos ao estudo clássico e faremos mais algumas simplificações da expressão utilizando outra notação. Vamos definir então $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$, $\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}$ e $\alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}$. Observamos que $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$ e a nova expressão, mais simplificada se torna então:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (3.6)$$

Podemos ver na equação (3.6) que se todos os α_n^μ se anularem temos a expressão do movimento de uma partícula pontual, o que nos sugere ser o centro de massa da corda. A expressão contida no somatório é devida a oscilação da corda. Para seguirmos nosso estudo devemos fazer uma “boa” escolha para a parametrização em σ , assim podemos enxergar algumas coisas interessantes. A equação (3.6) mostra que a evolução da corda está totalmente determinada pelos parâmetros x_0 e α_n^μ . Resta ainda, impor as condições de contorno quadráticas. A seguir discutimos isso. [1]

3.1 Parametrização σ e generalização do gauge estático

Até aqui já fizemos uma escolha da parametrização τ , faremos agora uma escolha associada a esta para a variável σ . Nossa escolha é definida da seguinte maneira: utilizando o gauge estático, olhamos para a corda num instante $t = 0$ para um certo parâmetro σ . Num instante infinitesimal $t = \varepsilon$ após, podemos traçar segmentos de reta entre a corda definida em $t = 0$ e $t = \varepsilon$ que sejam perpendiculares a corda em $t = 0$, como mostra a figura 3.1 abaixo.

Podemos repetir esse processo para tempos infinitesimais posteriores e assim definimos nosso gauge de maneira que valha para todo σ a seguinte equação:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0,$$

e a consequência mais direta disso é que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{v}_\perp$. Devido ao objetivo do texto, alguns resultados serão apresentados sem demonstrações, caso contrário tornaria-se muito extenso. A pessoa interessada nos detalhes é remetida a [1] nas referências

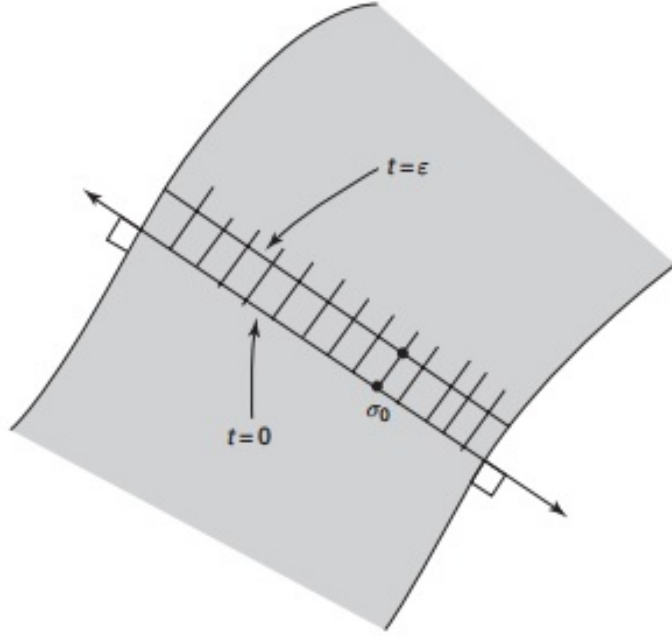


Figura 3.1: Instantes $t = 0$ e $t = \varepsilon$ com movimento do ponto σ_0 ortogonal a corda.

bibliográficas.

Pelo gauge estático, existe um hiperplano interseptando a folha-universo, e tal hiperplano chamaremos de n^μ . Para o caso em que $n_\mu = (1, 0, \dots, 0)$ é direto olhar para a componente $\mu = 0$ na equação de movimento e concluir que $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ é constante na corda. Para generalizar com um n_μ arbitrário, a demanda é que $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu} = n \cdot \mathcal{P}^\tau$ seja constante na corda. Outra propriedade que temos é a invariância por reparametrização $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$, e utilizando-se disso:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau(\sigma, \tau) = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tilde{\sigma}, \tau) \quad .$$

Se temos uma corda que faça com que $n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tilde{\sigma}, \tau)$ dependa de $\tilde{\sigma}$ podemos reparametrizar de maneira que $n \cdot \mathcal{P}^\tau(\sigma, \tau)$ não dependa de σ , basta ajustar o valor de $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma}$, e assim o lado direito da equação (3.7) só depende de τ . Com outra reparametrização global podemos fazer com que $\sigma \in [0, \pi]$. Portanto:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau(\sigma, \tau) = a(\tau) \quad , \quad (3.7)$$

com $a(\tau)$ sendo uma função que só dependa de τ . No entanto $a(\tau)$ não pode depender de τ , basta integrar a equação (3.7) para termos claro esse fato:

$$\int_0^\pi a(\tau) d\sigma = \int_0^\pi n \cdot \mathcal{P}^\tau d\sigma \implies a(\tau) = \frac{n \cdot p}{\pi} \quad ,$$

donde concluimos:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{\pi} \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é uma constante de movimento da corda aberta, mais especificamente da folha-mundo gerada por ela. Utilizando a equação (2.3) conseguimos uma conclusão extra:

$$\frac{\partial (n \cdot \mathcal{P}^\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial (n \cdot \mathcal{P}^\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \implies \frac{\partial (n \cdot \mathcal{P}^\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \quad ,$$

vemos que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ não depende de σ . Na corda aberta podemos concluir que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ porque basta isso ocorrer em um ponto e então valerá para os demais, e assumimos que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ nas extremidades. Para a corda fechada devemos fazer uma análise análoga, com a diferença que o domínio de σ agora vai de 0 a 2π , o que muda os limites de integração que aplicamos a equação (3.7). Por isso na corda fechada nós temos a seguinte expressão:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi} \quad . \quad (3.9)$$

Além disso, não podemos afirmar que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ na corda fechada, pois não existe nenhum ponto especial, diferente dos demais, como os pontos extremos da corda aberta.

O gauge estático como vimos em seções passadas, estabelece uma proporcionalidade direta entre a componente X^0 e a variável τ , a qual identificamos como o tempo t do nosso espaço-tempo. Essa é apenas uma escolha dentre as possíveis escolhas de uma classe mais geral de gauge, onde escolhemos $n_\mu = \delta_{\mu 0}$, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker. Em geral temos, para uma constante qualquer λ :

$$n \cdot X = \lambda \tau \quad . \quad (3.10)$$

Sem demonstração, afirmamos que $n \cdot p$ é constante na folha-mundo, possibilitando então substituir λ por $\tilde{\lambda} (n \cdot p)$ na equação (3.10). $\tilde{\lambda}$ está ali presente por questões de dimensionalidade, e vemos que $\tilde{\lambda}$ deve ser proporcional a α' :

$$n \cdot X \propto \alpha' (n \cdot p) \tau \quad . \quad (3.11)$$

Simplificações importantes ocorrem se escolhemos variáveis muito especiais, conhecidas como *variáveis de cone-de-luz*. A principal simplificação obtida através dessa escolha é poder resolver explicitamente os vínculos quadráticos. [1]

3.2 Variáveis de cone-de-luz

Definimos as variáveis de cone-de-luz com o hiperplano determinado por $n_0 = n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e as demais componentes nulas. Assim temos:

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+ \quad , \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+ \quad . \quad (3.12)$$

A estratégia por trás do gauge cone-de-luz é usar a simplicidade das expressões com X^+ para mostrar que não há dinâmica em X^- e toda a dinâmica está nas componentes transversais, as quais denotaremos por X^I , com I correndo de 2 a N . Utilizando o fato de que $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$, consequência da escolha do gauge em σ , temos que, no cone de luz:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \implies -2(\dot{X}^+ \pm X'^+) (\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0 \quad ,$$

donde obtemos, a partir das equações (3.11) e (3.12) a seguinte expressão:

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{\beta \alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \quad , \quad (3.13)$$

com $\beta = 1$ para a corda aberta e $\beta = 2$ para a corda fechada. Tal definição para β é motivada também pelas equações (3.8) e (3.9), e ficamos com:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{\beta \pi} \Rightarrow n \cdot p = \beta \pi n \cdot \mathcal{P}^\tau \quad .$$

Olhando para as equações (3.12) e (3.11) escrevemos:

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau \quad .$$

Olhando para a equação (3.6) vemos que X^+ não possui os modos normais de vibração ($\alpha_n^+ = \alpha_{-n}^+ = 0$) e $x_0^+ = 0$, o que não ocorre com as componentes I :

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad ,$$

e utilizando a equação acima, a equação (3.6) para $\mu = -$ e o vínculo quadrático $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$, conseguimos o seguinte resultado:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{p^+} L_n^\perp \quad ,$$

onde L_n^\perp é chamado de *modo transversal de Virasoro*. Conhecer as componentes X^I

implica em conhecer os modos de Virasoro, e a partir desses, conhecendo p^+ , x_0^- determinamos completamente a dinâmica da corda. Temos então a expressão pra $X^-(\tau, \sigma)$:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^\perp \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad .$$

Da mesma maneira que o quadri-momento está associado a translação no espaço-tempo e o momento angular à rotação, os modos de Virasoro são os geradores de transformações associadas à reparametrização da corda. A álgebra que eles satisfazem é de importância fundamental para a quantização da corda. É possível ainda calcular a massa M da corda através da relação relativística $M^2 = -p^2$, obtendo a seguinte expressão:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{\mathbb{N}} n a_n^{I*} a_n^I \quad , \quad (3.14)$$

onde $a_n^I \sqrt{n} = \alpha_n^I$ e $a_n^{I*} \sqrt{n} = \alpha_{-n}^I$ com $n \in \mathbb{N}$. Vemos que a massa é uma quantidade positiva, pois $a^* a = |a| \geq 0$. Ainda assim, a expressão não é boa para descrever estados não-massivos, e ainda podemos ajustar os coeficientes a e a^* e obter valores arbitrários para a massa. Veremos que esses problemas não aparecem quando estudarmos a corda do ponto de vista quântico. [1]

Capítulo 4

A teoria bosônica em nível quântico

Para uma descrição quântica da corda ao invés de “simples funções” teremos agora operadores. Veremos aqui a *primeira quantização* da corda. A *segunda quantização* nos fornece uma teoria de *campos de cordas*, a qual foge totalmente do escopo deste trabalho e não será tratada aqui. Utilizaremos a ação de Polyakov apenas, já que sua introdução foi realizada motivada por uma quantização mais simples de se fazer.

4.1 Quantização covariante

Da primeira quantização de uma partícula pontual, é sabido que, no sistema natural de unidades ($\hbar = c = G = 1$) a seguinte relação é válida:

$$[x_m, x_n] = 0 \quad ; \quad (4.1a)$$

$$[p_m, p_n] = 0 \quad ; \quad (4.1b)$$

$$[x_m, p_n] = i\delta_{mn} \quad . \quad (4.1c)$$

A equação (4.1c) se baseia numa física não relativística, com métrica euclidiana. Para uma teoria relativística devemos fazer a alteração $\delta_{mn} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Não trabalharemos com o momento p^μ e sim com a densidade de momento $\mathcal{P}^{\tau\mu} = T\dot{X}^\mu$. Além disso, nosso estudo não se concentra em vetores arbitrários de posição do espaço-tempo, mas em vetores resultantes da aplicação que leva o espaço de parâmetros neste, $X^\mu(\sigma, \tau)$. Para estar de acordo isso, as relações de comutação (4.1c) se tornam:

$$[X^\mu, \mathcal{P}^{\tau\nu}] = i\eta^{\mu\nu} \quad .$$

Doravante, a equação (4.1a) nos leva a demandar que as componentes $X^\mu(\sigma, \tau)$ e $X^\nu(\sigma', \tau)$ comutem desde que em pontos diferentes da corda, ou seja, $\sigma' \neq \sigma$. Por motivos de comodidade, a partir de agora denotaremos $\frac{\partial}{\partial\tau}$ por ∂_τ , $\frac{\partial}{\partial\sigma}$ por ∂_σ . Vamos

explicitar a derivação em \dot{X}^μ escrevendo $\partial_\tau X^\mu(\sigma, \tau)$. Assim temos:

$$[X^\mu(\sigma, \tau), \partial_\tau X^\nu(\sigma', \tau)] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad ; \quad (4.2a)$$

$$[X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = 0 \quad ; \quad (4.2b)$$

$$[\partial_\tau X^\mu(\sigma, \tau), \partial_\tau X^\nu(\sigma', \tau)] = 0 \quad , \quad (4.2c)$$

onde introduzimos o delta de Dirac, $\delta(x)$ com as seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \neq 0 \\ \infty & ; \quad x = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad ,$$

e vemos que $\delta(\sigma - \sigma') = 0$ desde que $\sigma \neq \sigma'$, como queríamos. Deve ficar bem claro que as equações (4.2) são válidas para um valor fixo de τ . Vamos utilizar então as variáveis de cone-de-luz definidas como $\sigma_\pm = \tau \pm \sigma$, o que nos leva, pela regra da cadeia a:

$$\begin{cases} \partial_\tau = \partial_+ + \partial_- \\ \partial_\sigma = \partial_+ - \partial_- \end{cases} \quad ,$$

onde $\partial_\pm = \frac{\partial}{\partial \sigma_\pm}$. Estas novas variáveis nos trazem outras relações de comutação, a qual devem ser explicitadas. Para isso começemos reescrevendo a equação (4.2c) em termos destas:

$$\begin{aligned} 0 &= [\partial_\tau X^\mu(\sigma, \tau), \partial_\tau X^\nu(\sigma', \tau)] = [(\partial_+ + \partial_-) X^\mu(\sigma, \tau), (\partial'_+ + \partial'_-) X^\nu(\sigma', \tau)] = \\ &+ [\partial_+ X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_+ X^\nu(\sigma', \tau)] + [\partial_+ X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_- X^\nu(\sigma', \tau)] \\ &+ [\partial_- X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_+ X^\nu(\sigma', \tau)] + [\partial_- X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_- X^\nu(\sigma', \tau)] \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Lembrando que ∂'_\pm atuam somente sobre σ' , e não sobre σ . Do mesmo modo, ∂_σ somente atua sobre a variável σ e enxerga σ' como uma constante. É conveniente também o cálculo de $i\eta^{\mu\nu} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma')$ através da equação (4.2a):

$$\begin{aligned} i\eta^{\mu\nu} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') &= [\partial_\sigma X^\mu(\sigma, \tau), \partial_\tau X^\nu(\sigma', \tau)] \\ &= [(\partial_+ - \partial_-) X^\mu(\sigma, \tau), (\partial'_+ + \partial'_-) X^\nu(\sigma', \tau)] = \\ &+ [\partial_+ X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_+ X^\nu(\sigma', \tau)] + [\partial_+ X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_- X^\nu(\sigma', \tau)] \\ &- [\partial_- X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_+ X^\nu(\sigma', \tau)] - [\partial_- X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_- X^\nu(\sigma', \tau)] \quad . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ainda utilizando-se as equações (4.2), é possível mostrar que $[\partial_+ X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_- X^\nu(\sigma', \tau)] = [\partial_- X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_+ X^\nu(\sigma', \tau)] = 0$. Com este resultado, somando e subtraindo as equa-

ções (4.4) e (4.5), obtemos as novas relações de comutação:

$$[\partial_+ X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_+ X^\nu(\sigma', \tau)] = \frac{i\eta^{\mu\nu}}{2T} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad ; \quad (4.6a)$$

$$[\partial_- X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_- X^\nu(\sigma', \tau)] = -\frac{i\eta^{\mu\nu}}{2T} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad ; \quad (4.6b)$$

$$[\partial_+ X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_- X^\nu(\sigma', \tau)] = [\partial_- X^\mu(\sigma, \tau), \partial'_+ X^\nu(\sigma', \tau)] = 0 \quad . \quad (4.6c)$$

Olhando para a equação (3.2), vemos que $X^\mu(\sigma, \tau)$ pode ser descrito como combinação linear de duas funções $X_{dir}^\mu(\sigma, \tau)$ e $X_{esq}^\mu(\sigma, \tau)$, representando respectivamente, modos vibracionais se movimentando para direita e para a esquerda. Assim $\partial_- X^\mu(\sigma, \tau) = \partial_- X_{dir}^\mu(\sigma, \tau)$ enquanto $\partial_+ X^\mu(\sigma, \tau) = \partial_+ X_{esq}^\mu(\sigma, \tau)$. Usaremos a equação (3.3) para as variáveis σ_+ e σ_- e para ficarmos de acordo com a equação (3.4), faremos as substituições $f_0^\mu \rightarrow x_0^\mu$, $f_1^\mu \rightarrow \alpha' p^\mu$ e reescreveremos as funções $\sin(nu)$ e $\cos(nu)$ em termos das exponenciais complexas. Anteriormente, “absorvemos” os fatores $\frac{1}{n}$ nas constantes, deixaremos explícitos aqui. A equação do movimento para a esquerda é então:

$$X_{esq}^\mu(\sigma, \tau) = x_0^\mu + \alpha' p^\mu \sigma_+ + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\sigma_+} \quad .$$

Agora, será interessante ao invés de utilizar o parâmetro *slope*, o parâmetro de comprimento da corda ($l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}$):

$$X_{esq}^\mu(\sigma, \tau) = x_0^\mu + l_s^2 p^\mu \sigma_+ + \frac{il_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\sigma_+} \quad .$$

Derivando em relação a σ_+ , temos:

$$\partial_+ X_{esq}^\mu(\sigma, \tau) = l_s^2 p^\mu + \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma_+} = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\sigma_+} \quad ,$$

pois em termos de l_s , o fator $\alpha_0^\mu = (l_s/\sqrt{2}) p^\mu$. Vamos calcular agora a relação de comutação para $\partial_+ X^\mu$ via equação (4.6a):

$$\begin{aligned} [\partial_+ X_{esq}^\mu(\sigma, \tau), \partial'_+ X_{esq}^\nu(\sigma', \tau)] &= \left[\frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\nu e^{-in(\tau+\sigma')} \right] = \\ &= \frac{l_s^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)} e^{-im(\tau+\sigma')} [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = \frac{l_s^2}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i(n+m)\tau} e^{-i(n\sigma+m\sigma')} [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] \quad , \end{aligned} \quad (4.7)$$

o qual deve ser proporcional à $\partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma')$, e não pode haver dependência em τ . A exponencial que depende de τ deve ser nula quando $m + n \neq 0$, e resolvemos tal problema se existir na expressão um delta de Kronecker $\delta_{n+m,0}$. Ou seja, só há resultado

não nulo da expressão quando $m = -n$. Isso interfere na exponencial com dependência em σ e σ' , pois teremos agora como expoente $-in(\sigma - \sigma')$. Vamos utilizar agora a seguinte expressão para o delta de Dirac:

$$\delta(\sigma - \sigma') = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\sigma - \sigma')} ,$$

por tanto:

$$\partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') = -\frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{-in(\sigma - \sigma')} . \quad (4.8)$$

Lembrando da relação (3.5), utilizando esta equação (4.8) e as equações (4.7) e (4.6a), obtemos:

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = n \eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} .$$

Uma análise análoga é feita utilizando as equações (4.6c) e obtemos todas as relações de comutação (incluindo a explicitada acima):

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = n \eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} ; \quad (4.9a)$$

$$[\bar{\alpha}_n^\mu, \bar{\alpha}_m^\nu] = n \eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} ; \quad (4.9b)$$

$$[\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_m^\nu] = 0 . \quad (4.9c)$$

[4][6]

4.2 Corda aberta

Ao final da seção anterior, obtivemos como resultado os comutadores (4.9) mas ainda, para a corda aberta temos a relação de comutação para o centro de massa da corda:

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} ,$$

e por esta última, as relações (4.9) se reduzem apenas a (4.9a).

Sabemos dos nossos estudos iniciais sobre mecânica quântica que para o oscilador harmônico, podemos definir operadores de escada de “*subida*” e “*descida*”, os quais serão, nas teorias de campos quânticos, interpretados como operadores de *criação* e *aniquilação*, obedecendo à seguinte álgebra de comutação:

$$[a, a^\dagger] = 1 .$$

Definimos também, o operador de número, $N = a^\dagger a$, o qual obedece a seguinte

equação de auto-valores (e auto-vetores):

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad .$$

É sabido que para o operador hamiltoniano, $H |n\rangle = E_n |n\rangle$, e podemos escrevê-lo como $H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right)$. Não se espera outra coisa para um sistema de corda vibrante, que não seja uma descrição por oscilações harmônicas. Então faremos a analogia entre os operadores a e a^\dagger com os operadores α_n^μ , através da equação (4.9a), que a reescreveremos sem o termo $\delta_{n+m,0} = \delta_{n,-n}$ explicitamente:

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = [\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\nu] = n \eta^{\mu\nu} \quad , \quad (4.10)$$

relação que não é exatamente a mesma que para um sistema de osciladores quânticos, já que para os operadores $\alpha_{\pm n}^0$ temos uma proporcionalidade com $\eta^{00} = -1$, tendo então estados de norma negativa. O operador de número se define como $N_n = \alpha_{-n} \cdot \alpha_n$, com $n \in \mathbb{N}$. O operador de número total é definido como $N = \sum_{n \in \mathbb{N}} N_n$.

Para não estender demais o texto, omitiremos uma rápida análise que demonstra que α_n^μ atua como operador de aniquilação enquanto α_{-n}^μ atua como operador de criação, o que nos permite deduzir também que $\alpha_n^\mu |0\rangle = 0$. Os modos de vibração da corda carregam momento, então devemos rotular nosso estado quântico por $|n, k\rangle$, e para nosso estado de vácuo temos:

$$p^\mu |0, k\rangle = k^\mu |0, k\rangle \quad . \quad (4.11)$$

Pelo motivo de a métrica de Minkowski η estar presente nas relações de comutação, torna-se possível haver estados de norma negativa, como mencionado rapidamente acima. Para mostrar isso explicitamente, basta tomar o primeiro estado excitado de momento k^μ , o estado $\alpha_{-1}^0 |0, k\rangle$. De fato $(\alpha_{-1}^0)^\dagger = \alpha_1^0$, e calculamos a norma deste estado excitado utilizando (4.10) e (4.11):

$$|\alpha_{-1}^0 |0, k\rangle|^2 = \langle 0, k | \alpha_1^0 \alpha_{-1}^0 |0, k\rangle = -1 \quad .$$

Para entender o que acontece aqui, recorreremos aos modos de Virasoro, os quais são descritos como operadores no contexto quântico. Olhando para a expressão clássica, há uma certa ambigüidade quando vamos definir os operadores, pois agora a ordem do produto é importante. Temos certa arbitrariedade para construir tais objetos, no que concerne a ordem dos operadores α_n^μ no produto. Para definir tais operadores a partir das expressões clássicas, utiliza-se a técnica conhecida como “*ordenamento normal*”, que consiste mover os operadores de aniquilação para a direita e de criação

para a esquerda. Isso garante que os auto-valores dos operadores de Virasoro sejam finitos. O produto ordenado é denotado por duas colunas, isto é $: a^\dagger a :$. Escrevemos então os operadores de Virasoro:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n : \quad .$$

Olhando para a equação (4.9a), fazendo $n \rightarrow n-m$ vemos que α_{n-m}^μ e α_m^μ comutam sempre que $n \neq 0$. O ordenamento normal para L_0 resulta em:

$$: L_0 : = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad , \quad (4.12)$$

onde foi feito o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} = \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} ([\alpha_n^\mu, \alpha_{-n\mu}] + \alpha_{-n} \cdot \alpha_n) = \\ &= \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{D-1} \eta_\mu^\mu \sum_{n \in \mathbb{N}} n = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \frac{D}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} n \quad , \end{aligned} \quad (4.13)$$

com D sendo o número de dimensões espaço-temporais. Vemos claramente que a última parcela da equação (4.13) faz a expressão diferir da expressão ordenada (4.12). A expressão $\sum_{n \in \mathbb{N}} n$ é claramente uma série divergente, e por tanto, precisamos utilizar a técnica de regularização. Existe uma função conhecida como *Função Zeta de Riemann*, a qual é definida no corpo dos reais como:

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} \quad . \quad (4.14)$$

Vemos que a função $\zeta(s)$ é bem definida desde que $s > 1$. Essa função tem grande importância em algumas áreas da matemática, e existe uma extensão analítica dela para o corpo complexo, de tal forma que a função se torna bem definida para $s = -1$:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \quad .$$

Para tornar a expressão (4.13) um valor finito bem definido, utilizamos a função Zeta de Riemann e a liberdade de adicionar uma constante à expressão, de tal maneira que:

$$\frac{D}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} n \longrightarrow \frac{D}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} n + b = a \quad ,$$

podemos reescrever então:

$$L_0 - a = : L_0 : \quad .$$

Agora temos um parâmetro a mais para ajustar. Queremos que a teoria carregue os grupos de simetria que tínhamos classicamente, mantendo então a invariância de Gauge por reparametrização, além do caráter relativístico. É possível construir os geradores das transformações de Lorentz em termos dos operadores de criação e aniquilação e checar que a álgebra de Poincaré é satisfeita. Tal análise conduz a conclusão de que o parâmetro $a = -1$ e $D = 26$. [6]

Prosseguindo com a análise, podemos obter o operador de massa através de $p^2 + m^2 = 0$. Vamos calcular então:

$$L_0 |\psi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - 1 \right) |\psi\rangle = 0 \quad ,$$

e lembrando que $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ temos:

$$\alpha' p^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \right) \quad ,$$

ou em termos do operador número:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (N - 1) \quad .$$

Vamos calcular as massas (auto-valores do operador M^2) para alguns casos:

- *O estado fundamental*

Vamos calcular o quadrado da massa do estado $|0\rangle$:

$$M^2 |0\rangle = \frac{1}{\alpha'} (N - 1) |0\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |0\rangle \quad ,$$

já que $N |0\rangle = 0$. Vemos que para o estado fundamental $m^2 < 0$, o que nos leva a concluir pelas transformações de Lorentz que é um estado que se movimenta mais rapidamente que a luz, o que chamamos de *táquion*. É um estado não-físico e não pode ser removido da teoria bosônica. O advento das teorias de cordas supersimétricas, conhecidas como *supercordas*, eliminam tal estado taquiônico, mas foge do objetivo do texto e não será tratado aqui. Pessoas interessadas devem buscar por [3] nas referências bibliográficas.

- *O primeiro estado excitado*

Escrevemos o primeiro estado excitado como $\alpha_{-1}^j |0\rangle$ e então:

$$M^2 \alpha_{-1}^j |0\rangle = \frac{1}{\alpha'} (N - 1) \alpha_{-1}^j |0\rangle = \frac{1}{\alpha'} (\alpha_{-1}^j \alpha_1^j \alpha_{-1}^j - \alpha_{-1}^j) |0\rangle = 0 \quad ,$$

já que todos os termos do somatório se anulam e o que sobrevive se anula com o termo fora dele. É possível mostrar também que o spin desse estado é 1, e que existem $D - 2$ sentidos de polarização, o que nos leva a concluir que se trata de um fóton. A teoria bosônica traz naturalmente consigo os estados fotônicos, por tanto, temos as partículas mediadoras das interações eletromagnéticas na teoria.

Doravante, temos estados massivos a partir de $|2\rangle$, e devemos tomar nota do fato importante de que o espectro de massa é discreto, como observado na natureza. A teoria bosônica então prevê as massas de todas as partículas (lembrando que só há bósons na teoria). [6]

4.3 Corda fechada

De tudo o que foi feito na corda aberta, podemos fazer uma análise análoga, com a diferença de que todas as relações de comutação (4.2) são levadas em conta. O que não foi omitido na seção anterior para não haver quebra no raciocínio até o cálculo dos auto-valores de M^2 , é que os operadores L_n formam uma álgebra fechada, de um tipo de grande interesse em matemática, uma *álgebra de Lie* com infinitos geradores. Ainda, se faz uma extensão da álgebra, e a denominamos de *álgebra de Virasoro com extensão central*:

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad ; \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad .$$

A álgebra de Virasoro é de importância central na teoria pois tem papel análogo aos operadores de criação e aniquilação, mas criando e aniquilando modos normais de vibração, que são interpretados mais tarde como estados de partículas. Além disso, estão associados às reparametrizações da teoria, e por tanto aos Gauges da teoria. Não faz parte do escopo do texto averiguar propriedades da álgebra, no entanto, para o caso de haver interesse num aprofundamento do assunto, esse tipo de álgebra é chamada de *álgebra* $SL(2, R)$, representação equivalente ao grupo $SU(2)$. [9]

Fazendo o estudo análogo ao realizado acima para $L_0 |\psi\rangle$, e para $M^2 |\psi\rangle$, conseguimos resultados análogos, com a diferença de que na corda fechada, há uma propagação para direita e outra para a esquerda, que se sobrepõem na corda, tendo então

operadores de números:

$$N_R = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{\alpha}_{-n} \bar{\alpha}_n \quad ; \quad N_L = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n} \alpha_n \quad ,$$

e os estados são agora rotulados como modos para os dois lados:

$$|\psi\rangle = |j\bar{j}, k\rangle = \prod_{n \in \mathbb{N}} \prod_{\mu=0}^{D-1} (\alpha_{-n}^\mu)^j (\bar{\alpha}_{-n}^\mu)^{\bar{j}} |0, k\rangle \quad .$$

A álgebra de Virasoro agora é:

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{D}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}$$

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m - n) \bar{L}_{m+n} + \frac{D}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad .$$

O operador de massa M^2 se escreve como:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N_L + N_R - 2) \quad ,$$

onde os estados físicos só aparecem quando $N_R = N_L$. Temos então para o estado fundamental $|0\rangle$ que $M^2 = -\frac{4}{\alpha'}$, e como justificado anteriormente, se tratando então de dois estados taquiónicos, um se propagando para direita e outro para a esquerda. Também, como no caso da corda aberta, são estados que não podem ser eliminados da teoria e por isso são um problema.

O estudo para o primeiro estado excitado, como no caso da corda aberta, resulta em estados não-massivos. No caso da corda fechada podemos mostrar que entre estes se encontra o estado de uma partícula de spin-2, o que nos leva a concluir que se trata de um gráviton, partícula teorizada para ser a mediadora da força gravitacional. Os outros estados não-massivos são o campo de Kalb-Ramon e o Dílaton, por consistência matemática. [6]

Por tanto, a teoria bosônica traz naturalmente a partícula mediadora das interações eletromagnéticas e gravitacionais. Podemos fazer uma tabela para facilitar a apresentação destes resultados:

	Corda aberta		Corda fechada	
N	0	1	--	--
$N_L = N_R$	--	--	0	1
M^2	$-\frac{1}{\alpha'}$	0	$-\frac{4}{\alpha'}$	0
Partícula	Táquion	Fóton	Táquion	Gráviton

Vamos neste resultado de grande importância para a teoria a presença do parâmetro slope, o qual possui relação com a tensão da corda, presente na definição da ação. Vemos certa semelhança com a ação de uma partícula relativística novamente, onde na ação da partícula temos o parâmetro m de massa, e na ação da corda temos o parâmetro T , relacionado diretamente às massas previstas pela teoria.

Conclusão

A teoria de cordas bosônica traz uma ampla fenomenologia do ponto de vista clássico, donde conseguimos ter uma certa intuição sobre como se comporta a teoria. Estudaram-se as simetrias e as consequências da existência destas para a teoria. Uma propriedade muito importante do ponto de vista técnico são as invariâncias de Gauge, que nesta teoria possuem uma natureza um pouco diferente da que estamos acostumados a ver em outros campos da física teórica. Os Gauges possuem natureza geométrica, a partir da invariância por reparametrização. O estudo da ação de Polyakov foi resumido ao mais simples dos casos possíveis, pelo caráter elementar do texto e mesmo assim foi possível obter resultados interessantes, tanto na fenomenologia clássica, quanto mais a partir de sua quantização. Na corda quântica, foi possível determinar o número de dimensões espaço-temporais do universo previsto pela teoria, bem como as massas através do operador M^2 . Vimos a importância dos operadores de Virasoro, e como eles possuem um papel central na teoria. Por terem sido mencionadas as p-branas no texto, tangenciamos uma abordagem um pouco mais moderna da teoria, vide capítulo 1, pois a teoria-M é posterior às teorias supersimétricas de cordas. Concluímos também que mesmo que a teoria bosônica traga consigo os estados que representam as partículas mediadoras das quatro forças fundamentais, a teoria não é realística por não suportar estados fermiônicos, além de trazer táquions como estados fundamentais. Ainda assim, a teoria é de grande importância do ponto de vista de estudo inicial, já que através desta se pode adquirir certa familiaridade com os conceitos e técnicas que são utilizadas em teorias mais modernas com resultados mais realísticos.

Bibliografia

- [1] **ZWIEBACH**, Barton. A first course in string theory - Cambridge university press (2004) ;
- [2] **POLCHINSKI**, Joseph. String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string - Cambridge, UK: Univ. Pr 402 (1998) ;
- [3] **BECKER**, Katrin and **BECKER**, Melanie and **SCHWARZ**, John H. String theory and M-theory: A modern introduction - Cambridge University Press (2006) ;
- [4] **KIRITSIS**, Elias - String theory in a nutshell. Princeton University Press (2011) ;
- [5] **GREENE**, Brian. String theory on Calabi-Yau manifolds - arXiv preprint hep-th/9702155 (2009) ;
- [6] **DEMYSTIFIED**, String Theory - Demystified Series (2009) ;
- [7] **GREENE**, Brian. O universo elegante: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva - Companhia das Letras, São Paulo (2001) ;
- [8] **SCHWARZ**, Patricia. The Official String Theory Web Site. <http://www.superstringtheory.com> ;
- [9] Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/SL2\(R\)](https://en.wikipedia.org/wiki/SL2(R))