Aulas 3 e 4 - Teoria dos conjuntos

Filipe Chagas

23 - Junho - 2022

Sumário

1 Introdução

Um conjunto é uma coleção de números ou objetos matemáticos com alguma característica em comum. Conjuntos costumam ser escritos como sequências ou expressões entre chaves.

Exemplo 1

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \tag{1}$$

Neste exemplo, A é um conjunto constituído pelos números 1, 2, 3 e 4.

Exemplo 2

$$B = \{x : x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1\} \tag{2}$$

Neste exemplo, B é um conjunto constituído por todos os possíveis valores de x que satisfazem as condições $x \in \mathbb{R}$ (x pertence aos reais) e $-1 \leq x \leq 1$ (x maior ou igual a -1 e menor ou igual a 1). Os símbolos $\in$ e $\mathbb{R}$ serão explicados mais adiante.

- Conjuntos são **não ordenados**, pois os elementos de um conjunto não possuem posição enumerável. Não existe o "primeiro" elemento de um conjunto, nem o "segundo", nem o "terceiro", e assim por diante. Exemplo: os conjuntos $\{1, 3, 2, 4\}$ e $\{4, 3, 1, 2\}$ são iguais, mesmo que não estejam grafados na mesma ordem.
- Conjuntos **não possuem repetições**, e repetições na grafia de um conjunto não são relevantes. Exemplo: os conjuntos $\{0, 1\}$, $\{0, 0, 1\}$, $\{0, 1, 1\}$ e $\{0, 0, 1, 1\}$ são iguais, mesmo que tenham números repetidos na grafia.
- **Resumindo:** o que define um conjunto é apenas quais objetos matemáticos (números, símbolos, etc) estão contidos neste. Ordenamento e repetições são informações não pertinentes à ideia de conjunto.

2 Conjuntos numéricos

2.1 Definição e principais conjuntos

Conjuntos numéricos são conjuntos constituídos por números. Existem infinitos conjuntos numéricos possíveis, mas os principais são:

- $\emptyset$ **(conjunto vazio)**
- $\mathbb{N}$ **(conjunto dos naturais)** - O conjunto dos números positivos sem casas decimais após o ponto ou a virgula, normalmente usados para contagem ($\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$).
- $\mathbb{Z}$ **(conjunto dos inteiros)** - O conjunto dos números sem casas decimais após o ponto ou a virgula, incluindo os negativos ($\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$). Todos naturais são inteiros, mas nem todos os inteiros são naturais.
- $\mathbb{Q}$ **(conjunto dos racionais)** - O conjunto de todos os números que podem ser obtidos por frações de inteiros. Exemplos:

  0.5 é racional, pois $0.5 = 1/2$;

  1.1111... é racional, pois $1.1111... = 9/10$.

  Todos os inteiros são também racionais (mas nem todos os racionais são inteiros).
- $\mathbb{I}$ **(conjunto dos irracionais)** - Números que possuem infinitas casas decimais após o ponto ou a vírgula e não podem ser obtidos por frações de inteiros. Exemplos:

  $\sqrt{2}$ é irracional;

  π é irracional;
- $\mathbb{R}$ **(conjunto dos reais)** - Conjunto que inclui os racionais e os irracionais.

- $\mathbb{C}$ **(conjunto dos complexos)** - Conjunto dos números que podem ter parte imaginária ($i = \sqrt{-1}$). Exemplos:

  Raízes quadradas de números negativos são números complexos;

  Equações de segundo grau com $\Delta < 0$ têm soluções complexas;

  Qualquer número no formato $a + b\sqrt{-1}$, onde a e b são números reais, é um número complexo.

3 Operadores de conjuntos

3.1 Cardinalidade ($|\cdot|$)

A cardinalidade de um conjunto é a quantidade de elementos (números ou objetos matemáticos) que este tem. O símbolo da cardinalidade é $|\cdot|$. Exemplos:

- A cardinalidade de $A = \{1, 10, 100\}$ é $|A| = 3$;
- A cardinalidade de $B = \{0\}$ é $|B| = 1$;
- A cardinalidade de $\emptyset$ (conjunto vazio) é $|\emptyset| = 0$.

Conjuntos podem ter cardinalidade infinita.

3.2 Igualdade (=)

Dois conjuntos são iguais se têm a mesma cardinalidade e os mesmos elementos.

- Os conjuntos $A = \{1, 10, 100\}$ e $B = \{1, 10, 100\}$ são iguais, ou seja, $A = B$.
- Os conjuntos $A = \{1, 10, 100\}$ e $B = \{10, 100, 10\}$ são iguais, ou seja, $A = B$.
- Os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ não são iguais, ou seja, $A \neq B$.

3.3 Pertinência ($\in$)

É dito que um número ou objeto matemático x "pertence" a um conjunto quando este número/objeto faz parte do conjunto. O símbolo do pertencimento é $\in$, e o símbolo do não pertencimento é $\notin$. Exemplos:

- $1 \in \{1, 2, 3\}$;
- $0 \notin \{1, 2, 3\}$;
- $5 \in \mathbb{N}$;
- $5.5 \notin \mathbb{N}$;
- $-10 \notin \mathbb{N}$;
- $-10 \in \mathbb{Z}$;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$

3.4 Inclusão ($\subset$ e $\subseteq$)

É dito que um conjunto A está incluso/contido em B, ou que A é **subconjunto** de B, quando B possui todos os elementos de A, mas A não necessariamente tem os elementos de B. A símbolo da inclusão é $\subset$. Quando há a possibilidade dos conjuntos serem iguais, o símbolo é $\subseteq$. Exemplos:

- $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$;
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

3.5 União ($\cup$)

União de conjuntos é uma operação entre dois conjuntos que resulta em um terceiro conjunto contendo todos os elementos de ambos os conjuntos operandos. O símbolo da união é $\cup$. Exemplos:

- $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$;
- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$;
- $\{0, 1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$;
- $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

3.6 Interseção ($\cap$)

Interseção de conjuntos é uma operação entre dois conjuntos que resulta em um terceiro conjunto contendo apenas os elementos que ambos os conjuntos operandos têm em comum. O símbolo da interseção é $\cap$. Exemplos:

- $\{0, 1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$;
- $\{a, d, k\} \cap \{d, c, t\} = \{d\}$;
- $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$;
- $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$;
- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

3.7 Diferença ($-$)

A diferença de conjuntos é uma operação entre um par de conjuntos (A, B) que resulta em um terceiro conjunto C contendo todos os elementos de A exceto aqueles que também pertencem a B. O símbolo da diferença é $-$. Exemplos:

- $\{1, 2, 3\} - \{1\} = \{2, 3\}$;
- $\{a, b, c\} - \{a, c\} = \{b\}$;
- $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$;
- $\mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset$.

3.8 Produto cartesiano $\times$

O produto cartesiano de um par de conjuntos A e B é um terceiro conjunto formado por todos os pares (a, b) possíveis tais que $a \in A$ e $b \in B$. O símbolo do produto cartesiano é $\times$. Exemplos:

- $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$, onde $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4\}$;
- $B \times B = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, onde $B = \{0,1\}$.

Obs: a cardinalidade do produto cartesiano $|A \times B|$ é o produto das cardinalidades de A e B, ou seja, $|A \times B| = |A||B|$.

4 Diagrama de Venn

Diagrama de Venn é uma representação gráfica onde conjuntos são representados por formas geométricas. Exemplos:

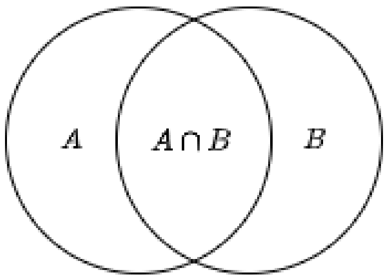

Figura 1: Diagrama de Venn 1

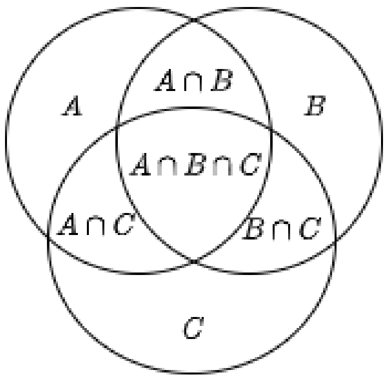

Figura 2: Diagrama de Venn 2

A figura 1 é uma representação gráfica de dois conjuntos A e B. Cada círculo corresponde a um conjunto, e a área de interseção dos círculos corresponde a $A \cap B$ (a interseção dos conjuntos). A figura 2 é uma representação gráfica de três conjuntos A, B e C seguindo a mesma lógica.

O diagrama de Venn também pode ser usado para indicar subconjuntos, como mostra a figura 3.

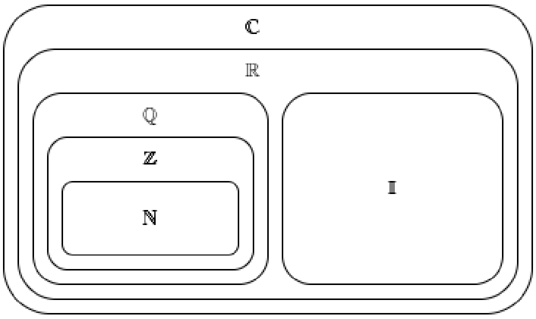

Figura 3: Diagrama de Venn 3

O diagrama da figura 3 mostra a hierarquia dos principais conjuntos numéricos, que é:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \qquad \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \tag{3}$$

Na figura 3, retângulos com bordas arredondadas foram utilizados ao invés de círculos para economizar espaço. Não há problema em usar retângulos com bordas arredondadas ao invés de círculos dês de que isto não prejudique a interpretação do diagrama.