

Cálculo de Programas

Trabalho Prático

MiEI+LCC — 2019/20

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2020

Grupo nr.	95
a84414	João Correia
a89582	Henrique Ribeiro
a85983	Filipe Felicio

1 Preâmbulo

A disciplina de **Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em **Haskell**. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1920t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp1920t.lhs`¹ que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1920t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1920t.lhs > cp1920t.tex
$ pdflatex cp1920t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L^AT_EX** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1920t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1920t.lhs
```

¹O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1920t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **C** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp1920t.aux
$ makeindex cp1920t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode mesmo controlar o número de casos de teste e sua complexidade utilizando o comando:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **B** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

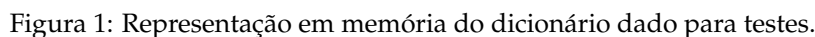
Problema 1

Pretende-se implementar um sistema de manutenção e utilização de um dicionário. Este terá uma estrutura muito peculiar em memória. Será construída uma árvore em que cada nodo terá apenas uma letra da palavra e cada folha da respectiva árvore terá a respectiva tradução (um ou mais sinónimos). Deverá ser possível:

- *dic_rd* — procurar traduções para uma determinada palavra
- *dic_in* — inserir palavras novas (palavra e tradução)
- *dic_imp* — importar dicionários do formato “lista de pares palavra-tradução”
- *dic_exp* — exportar dicionários para o formato “lista de pares palavra-tradução”.

A implementação deve ser baseada no módulo **Exp.hs** que está incluído no material deste trabalho prático, que deve ser estudado com atenção antes de abordar este problema.

No anexo **B** é dado um dicionário para testes, que corresponde à figura **1**. A implementação proposta deverá garantir as seguintes propriedades:


$$\text{prop_dic_rep } x = \text{let } d = \text{dic_norm } x \text{ in } (\text{dic_exp} \cdot \text{dic_imp}) \, d \equiv d$$
$$\begin{array}{l} \text{prop_dic_red } p \ s \ d \\ \quad | \text{ dic_red } p \ s \ d = \text{dic_imp } d \equiv \text{dic_in } p \ s \ (\text{dic_imp } d) \\ \quad | \text{ otherwise} = \text{True} \end{array}$$
$$prop_dic_rd(p, t) = dic_rd\ p\ t \equiv lookup\ p\ (dic_exp\ t)$$

Árvores binárias (elementos do tipo **BTree**) são frequentemente usadas no armazenamento e procura de dados, porque suportam um vasto conjunto de ferramentas para procuras eficientes. Um exemplo de destaque é o caso das **árvores binárias de procura**, *i.e.* árvores que seguem o princípio de *ordenação*: para todos os nós, o filho à esquerda tem um valor menor ou igual que o valor no próprio nó; e de forma análoga, o filho à direita tem um valor maior ou igual que o valor no próprio nó. A Figura 2 apresenta dois exemplos de árvores binárias de procura.²

Para verificar se uma árvore binária está ordenada, é útil ter em conta a seguinte propriedade: considere uma árvore binária cuja raiz tem o valor a , um filho s_1 à esquerda e um filho s_2 à direita. Assuma

3



Figura 2: Duas árvores binárias de procura; a da esquerda vai ser designada por t_1 e a da direita por t_2 .

que os dois filhos estão ordenados; que o elemento *mais à direita* de t_1 é menor ou igual a a ; e que o elemento *mais à esquerda* de t_2 é maior ou igual a a . Então a árvore binária está ordenada. Dada esta informação, implemente as seguintes funções como catamorfismos de árvores binárias.

$\text{maisEsq} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$
 $\text{maisDir} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar estas funções à árvore da esquerda (t_1) e à árvore da direita (t_2) da Figura 2.

```
*Splay> maisDir t1
Just 16
*Splay> maisEsq t1
Just 1
*Splay> maisDir t2
Just 8
*Splay> maisEsq t2
Just 0
```

Propriedade [QuickCheck] 4 As funções maisEsq e maisDir são determinadas unicamente pela propriedade

$\text{prop_inv} :: \text{BTree } \text{String} \rightarrow \text{Bool}$
 $\text{prop_inv} = \text{maisEsq} \equiv \text{maisDir} \cdot \text{invBTree}$

Propriedade [QuickCheck] 5 O elemento *mais à esquerda* de uma árvore está presente no ramo da esquerda, a não ser que esse ramo esteja vazio:

$\text{propEsq } \text{Empty} = \text{property } \text{Discard}$
 $\text{propEsq } x@(Node (a, (t, s))) = (\text{maisEsq } t) \neq \text{Nothing} \Rightarrow (\text{maisEsq } x) \equiv \text{maisEsq } t$

A próxima tarefa deste problema consiste na implementação de uma função que insere um novo elemento numa árvore binária *preservando* o princípio de ordenação,

$\text{insOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{BTree } a$

e de uma função que verifica se uma dada árvore binária está ordenada,

$\text{isOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{Bool}$

Para ambas as funções deve utilizar o que aprendeu sobre *catamorfismos e recursividade mútua*.

Sugestão: Se tiver problemas em implementar com base em catamorfismos estas duas últimas funções, tente implementar (com base em catamorfismos) as funções auxiliares

$\text{insOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{BTree } a, \text{BTree } a)$
 $\text{isOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{Bool}, \text{BTree } a)$

tais que $\text{insOrd}' x = \langle \text{insOrd } x, \text{id} \rangle$ para todo o elemento x do tipo a e $\text{isOrd}' = \langle \text{isOrd}, \text{id} \rangle$.

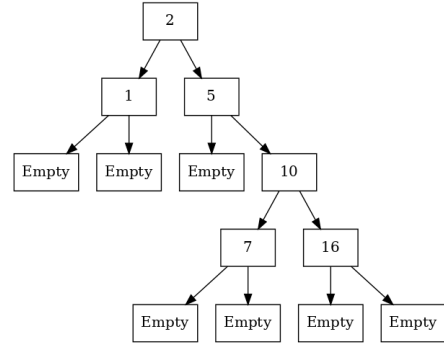


Figura 3: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.



Figura 4: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

Propriedade [QuickCheck] 6 Inserir uma sucessão de elementos numa árvore vazia gera uma árvore ordenada.

$prop_ord :: [Int] \rightarrow Bool$
 $prop_ord = isOrd \cdot (foldr insOrd Empty)$

As árvores binárias providenciam uma boa maneira de reduzir o espaço de procura. Mas podemos fazer ainda melhor: podemos aproximar da raiz os elementos da árvore que são mais acedidos, reduzindo assim o espaço de procura na *dimensão vertical*³. Esta operação é geralmente referida como *splaying* e é implementada com base naquilo a que chamamos *rotações à esquerda e à direita de uma árvore*.

Intuitivamente, a rotação à direita de uma árvore move todos os nós “uma casa para a sua direita”. Formalmente, esta operação define-se da seguinte maneira:

1. Considere uma árvore binária e designe a sua raiz pela letra r . Se r não tem filhos à esquerda então simplesmente retornamos a árvore dada à entrada. Caso contrário,
2. designe o filho à esquerda pela letra l . A árvore que vamos retornar tem l na raiz, que mantém o filho à esquerda e adota r como o filho à direita. O orfão (*i.e.* o anterior filho à direita de l) passa a ser o filho à esquerda de r .

A rotação à esquerda é definida de forma análoga. As Figuras 3 e 4 apresentam dois exemplos de rotações à direita. Note que em ambos os casos o valor 2 subiu um nível na árvore correspondente. De facto, podemos sempre aplicar uma *sequência* de rotações numa árvore de forma a mover um dado nó para a raiz (dando origem portanto à referida operação de *splaying*).

Comece então por implementar as funções

³Note que nas árvores de binária de procura a redução é feita na dimensão horizontal.

```

rrot :: BTree a → BTree a
lrot :: BTree a → BTree a

```

de rotação à direita e à esquerda.

Propriedade [QuickCheck] 7 As rotações à esquerda e à direita preservam a ordenação das árvores.

```

prop_ord_pres_esq = forAll orderedBTree (isOrd · lrot)
prop_ord_pres_dir = forAll orderedBTree (isOrd · rrot)

```

De seguida implemente a operação de splaying

```

splay :: [Bool] → (BTree a → BTree a)

```

como um catamorfismo de listas. O argumento `[Bool]` representa um caminho ao longo de uma árvore, em que o valor `True` representa "seguir pelo ramo da esquerda" e o valor `False` representa "seguir pelo ramo da direita". O caminho ao longo de uma árvore serve para *identificar* unicamente um nó dessa árvore.

Propriedade [QuickCheck] 8 A operação de splay preserva a ordenação de uma árvore.

```

prop_ord_pres_splay :: [Bool] → Property
prop_ord_pres_splay path = forAll orderedBTree (isOrd · (splay path))

```

Problema 3

Árvores de decisão binárias são estruturas de dados usadas na área de **machine learning** para codificar processos de decisão. Geralmente, tais árvores são geradas por computadores com base num vasto conjunto de dados e reflectem o que o computador "aprendeu" ao processar esses mesmos dados. Segue-se um exemplo muito simples de uma árvore de decisão binária:



Esta árvore representa o processo de decisão relativo a ser preciso ou não levar um guarda-chuva para uma viagem, dependendo das condições climáticas. Essencialmente, o processo de decisão é efectuado ao "percorrer" a árvore, escolhendo o ramo da esquerda ou da direita de acordo com a resposta à pergunta correspondente. Por exemplo, começando da raiz da árvore, responder `["não", "não"]` leva-nos à decisão "não precisa" e responder `["não", "sim"]` leva-nos à decisão "precisa".

Árvores de decisão binárias podem ser codificadas em **Haskell** usando o seguinte tipo de dados:

```

data Bdt a = Dec a | Query (String, (Bdt a, Bdt a)) deriving Show

```

Note que o tipo de dados `Bdt` é parametrizado por um tipo de dados `a`. Isto é necessário, porque as decisões podem ser de diferentes tipos: por exemplo, respostas do tipo "sim ou não" (como apresentado acima), a escolha de números, ou **classificações**.

De forma a conseguirmos processar árvores de decisão binárias em **Haskell**, deve, antes de tudo, resolver as seguintes alíneas:

1. Definir as funções `inBdt`, `outBdt`, `baseBdt`, `cataBdt`, e `[·]`.
2. Apresentar no relatório o diagrama de `[·]`.

Para tomar uma decisão com base numa árvore de decisão binária t , o computador precisa apenas da estrutura de t (i.e. pode esquecer a informação nos nós da árvore) e de uma lista de respostas "sim ou não" (para que possa percorrer a árvore da forma desejada). Implemente então as seguintes funções na forma de *catamorfismos*:

1. $extLTree : Bdt\ a \rightarrow LTree\ a$ (esquece a informação presente nos nós de uma dada árvore de decisão binária).

Propriedade [QuickCheck] 9 A função $extLTree$ preserva as folhas da árvore de origem.

$$\begin{aligned} prop_pres_tips &:: Bdt\ Int \rightarrow Bool \\ prop_pres_tips &= tipsBdt \equiv tipsLTree \cdot extLTree \end{aligned}$$

2. $navLTree : LTree\ a \rightarrow ([Bool] \rightarrow LTree\ a)$ (navega um elemento de $LTree$ de acordo com uma sequência de respostas "sim ou não". Esta função deve ser implementada como um catamorfismo de $LTree$. Neste contexto, elementos de $[Bool]$ representam sequências de respostas: o valor $True$ corresponde a "sim" e portanto a "segue pelo ramo da esquerda"; o valor $False$ corresponde a "não" e portanto a "segue pelo ramo da direita".

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar $navLTree$ a $(extLTree\ bdtGC)$, em que $bdtGC$ é a árvore de decisão binária acima descrita, e a uma sequência de respostas.

```
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) []
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False]
Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa")
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True,True]
Leaf "Precisa"
```

Propriedade [QuickCheck] 10 Percorrer uma árvore ao longo de um caminho é equivalente a percorrer a árvore inversa ao longo do caminho inverso.

$$\begin{aligned} prop_inv_nav &:: Bdt\ Int \rightarrow [Bool] \rightarrow Bool \\ prop_inv_nav\ t\ l &= \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t\ \mathbf{in} \\ &\quad invLTree\ (navLTree\ t'\ l) \equiv navLTree\ (invLTree\ t')\ (fmap\ \neg\ l) \end{aligned}$$

Propriedade [QuickCheck] 11 Quanto mais longo for o caminho menos alternativas de fim irão existir.

$$\begin{aligned} prop_af &:: Bdt\ Int \rightarrow ([Bool],[Bool]) \rightarrow Property \\ prop_af\ t\ (l1,l2) &= \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t \\ &\quad f = \mathbf{length} \cdot tipsLTree \cdot (navLTree\ t') \\ &\quad \mathbf{in}\ isPrefixOf\ l1\ l2 \Rightarrow (f\ l1 \geq f\ l2) \end{aligned}$$

Problema 4

Mónades são funtores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca **Probability** oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ Dist\ a = D\ \{\mathit{unD} :: [(a, ProbRep)]\} \tag{1}$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \text{Dist } a$ indica que a probabilidade de a é p , devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E ,



será representada pela distribuição

```
d1 :: Dist Char
d1 = D [('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22)]
```

que o **GHCI** mostrará assim:

```
'D' 35.0%
'C' 29.0%
'E' 22.0%
'B' 12.0%
'A' 2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

```
d2 = uniform (words "Uma frase de cinco palavras")
```

isto é

```
"Uma" 20.0%
"cinco" 20.0%
"de" 20.0%
"frase" 20.0%
"palavras" 20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

```
d3 = normal [10..20]
```

etc.⁴ `Dist` forma um **mónade** cuja unidade é `return a = D [(a, 1)]` e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g \ a, (y, q) \leftarrow f \ x]$$

em que $g : A \rightarrow \text{Dist } B$ e $f : B \rightarrow \text{Dist } C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*. Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica. Vamos estudar a aplicação deste mónade ao exercício anterior, tendo em conta o facto de que nem sempre podemos responder com 100% de certeza a perguntas presentes em árvores de decisão.

Considere a seguinte situação: a Anita vai trabalhar no dia seguinte e quer saber se precisa de levar guarda-chuva. Na verdade, ela tem autocarro de porta de casa até ao trabalho, e portanto as condições meteorológicas não são muito significativas; a não ser que seja segunda-feira... Às segundas é dia de feira e o autocarro vai sempre lotado! Nesses dias, ela prefere fazer a pé o caminho de casa ao trabalho, o que a obriga a levar guarda-chuva (nos dias de chuva). Abaixo está apresentada a árvore de decisão

⁴Para mais detalhes ver o código fonte de **Probability**, que é uma adaptação da biblioteca **PHP** ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

respectiva a este problema.



Assuma que a Anita não sabe em que dia está, e que a previsão da chuva para a ida é de 80% enquanto que a previsão de chuva para o regresso é de 60%. *A Anita deve levar guarda-chuva?* Para responder a esta questão, iremos tirar partido do que se aprendeu no exercício anterior. De facto, a maior diferença é que agora as respostas ("sim" ou "não") são dadas na forma de uma distribuição sobre o tipo de dados *Bool*. Implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$bnavLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ Bool) \rightarrow LTree\ a)$$

que percorre uma árvore dado um caminho, *não* do tipo $[Bool]$, mas do tipo $BTree\ Bool$. O tipo $BTree\ Bool$ é necessário na presença de incerteza, porque neste contexto não sabemos sempre qual a próxima pergunta a responder. Teremos portanto que ter resposta para todas as perguntas na árvore de decisão.

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar *bnavLTree* a $(extLTree\ anita)$, em que *anita* é a árvore de decisão acima descrita, e a uma árvore binária de respostas.

```

*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Empty,Empty)))
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Node(True, (Empty,Empty)),Empty)))
Leaf "Precisa"
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(False, (Empty,Empty)))
Leaf "N precisa"

```

Por fim, implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$pbnvLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ (Dist\ Bool)) \rightarrow Dist\ (LTree\ a))$$

que deverá consistir na "monadificação" da função *bnavLTree* via a mónade das probabilidades. Use esta última implementação para responder se a Anita deve levar guarda-chuva ou não dada a situação acima descrita.

Problema 5

Os **mosaicos de Truchet** são padrões que se obtêm gerando aleatoriamente combinações bidimensionais de ladrilhos básicos. Os que se mostram na figura 5 são conhecidos por ladrilhos de Truchet-Smith. A figura 6 mostra um exemplo de mosaico produzido por uma combinação aleatória de 10x10 ladrilhos *a* e *b* (cf. figura 5).

Neste problema pretende-se programar a geração aleatória de mosaicos de Truchet-Smith usando o mónade **Random** e a biblioteca **Gloss** para produção do resultado. Para uniformização das respostas, deverão ser seguidas as seguintes condições:

- Cada ladrilho deverá ter as dimensões 80x80
- O programa deverá gerar mosaicos de quaisquer dimensões, mas deverá ser apresentado como figura no relatório o mosaico de 10x10 ladrilhos.
- Valorizar-se-ão respostas elegantes e com menos linhas de código **Haskell**.

No anexo B é dada uma implementação da operação de permuta aleatória de uma lista que pode ser útil para resolver este exercício.



Figura 5: Os dois ladrilhos de Truchet-Smith.



Figura 6: Um mosaico de Truchet-Smith.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:⁵

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L^AT_EX **xymatrix**, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

B Código fornecido

Problema 1

Função de representação de um dicionário:

$$\begin{aligned}
 dic_imp &:: [(String, [String])] \rightarrow Dict \\
 dic_imp &= Term \text{ "" } \cdot \text{map } (bmap \text{ id singl}) \cdot \text{untar} \cdot \text{discollect}
 \end{aligned}$$

onde

$$\text{type } Dict = Exp \text{ String String}$$

Dicionário para testes:

$$\begin{aligned}
 d &:: [(String, [String])] \\
 d &= [(\text{"ABA"}, [\text{"BRIM"}]), \\
 &\quad (\text{"ABALO"}, [\text{"SHOCK"}]), \\
 &\quad (\text{"AMIGO"}, [\text{"FRIEND"}]), \\
 &\quad (\text{"AMOR"}, [\text{"LOVE"}]), \\
 &\quad (\text{"MEDO"}, [\text{"FEAR"}]), \\
 &\quad (\text{"MUDO"}, [\text{"DUMB"}, \text{"MUTE"}]), \\
 &\quad (\text{"PE"}, [\text{"FOOT"}]), \\
 &\quad (\text{"PEDRA"}, [\text{"STONE"}]), \\
 &\quad (\text{"POBRE"}, [\text{"POOR"}]), \\
 &\quad (\text{"PODRE"}, [\text{"ROTTEN"}])]
 \end{aligned}$$

Normalização de um dicionário (remoção de entradas vazias):

$$\begin{aligned}
 dic_norm &= collect \cdot filter \text{ p } \cdot discollect \text{ where} \\
 \text{p } (a, b) &= a > \text{ "" } \wedge b > \text{ ""}
 \end{aligned}$$

Teste de redundância de um significado s para uma palavra p :

$$dic_red \text{ p s d } = (p, s) \in discollect \text{ d}$$

⁵Exemplos tirados de [?].

Problema 2

Árvores usadas no texto:

```
emp x = Node (x, (Empty, Empty))
t7 = emp 7
t16 = emp 16
t7_10_16 = Node (10, (t7, t16))
t1_2_nil = Node (2, (emp 1, Empty))
t' = Node (5, (t1_2_nil, t7_10_16))
t0_2_1 = Node (2, (emp 0, emp 3))
t5_6_8 = Node (6, (emp 5, emp 8))
t2 = Node (4, (t0_2_1, t5_6_8))
dotBt :: (Show a) => BTree a -> IO ExitCode
dotBt = dotpict · bmap Just Just · cBTree2Exp · (fmap show)
```

Problema 3

Funções usadas para efeitos de teste:

```
tipsBdt :: Bdt a -> [a]
tipsBdt = cataBdt [singl, ( $\widehat{++}$ ) ·  $\pi_2$ ]
tipsLTree = tips
```

Problema 5

Função de permutação aleatória de uma lista:

```
permuta [] = return []
permuta x = do { (h, t) ← getR x; t' ← permuta t; return (h : t') } where
  getR x = do { i ← getStdRandom (randomR (0, length x - 1)); return (x !! i, retira i x) }
  retira i x = take i x ++ drop (i + 1) x
```

QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary a => Arbitrary (BTree a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = return (inBTree $ i_1 ())
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i_2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]
instance (Arbitrary v, Arbitrary o) => Arbitrary (Exp v o) where
  arbitrary = (genExp 10) where
    genExp 0 = liftM (inExp · i_1) QuickCheck.arbitrary
    genExp n = oneof [liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda a \rightarrow (a, [])$ )) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i_1) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda (a, (b, c)) \rightarrow (a, [b, c])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,)
        (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)))),
      liftM (inExp · i_2 · ( $\lambda (a, (b, c, d)) \rightarrow (a, [b, c, d])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM3 (,,)
```

```

    (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1))))
  ]
orderedBTree :: Gen (BTree Int)
orderedBTree = liftM (foldr insOrd Empty) (QuickCheck.arbitrary :: Gen [Int])
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (Bdt a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = liftM Dec QuickCheck.arbitrary
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry Query)
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]

```

Outras funções auxiliares

Lógicas:

```

infixr 0 =>
  (=>) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
  p => f = λa -> p a => f a
infixr 0 <=>
  (<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
  p <=> f = λa -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4 ≡
  (≡) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
  f ≡ g = λa -> f a ≡ g a
infixr 4 ≤
  (≤) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
  f ≤ g = λa -> f a ≤ g a
infixr 4 ∧
  (∧) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
  f ∧ g = λa -> (f a) ∧ (g a)

```

Compilação e execução dentro do interpretador:⁶

```
run = do { system "ghc cp1920t"; system "./cp1920t" }
```

C Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Problema 1

QuickChecks adicionais

```
valid t = t ≡ (dic_imp · dic_norm · dic_exp) t
```

⁶Pode ser útil em testes envolvendo **Gloss**. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

Propriedade [QuickCheck] 12 Se um significado s de uma palavra p já existe num dicionário normalizado então adicioná-lo em memória não altera nada:

```
prop_dic_red1 p s d
| d ≠ dic_norm d = True
| dic_red p s d = dic_imp d ≡ dic_in p s (dic_imp d)
| otherwise = True
```

Propriedade [QuickCheck] 13 A operação `dic_rd` implementa a procura na correspondente exportação de um dicionário normalizado:

```
prop_dic_rd1 (p, t)
| valid t = dic_rd p t ≡ lookup p (dic_exp t)
| otherwise = True
```

Definições auxiliares

```
data XNat a = Zero a | Succ (XNat a) deriving Show
inXNat = [Zero, Succ]
outXNat (Zero a) = i1 a
outXNat (Succ n) = i2 n
baseXNat f g = f + g
recXNat f = baseXNat id f
cataXNat a = a · (recXNat (cataXNat a)) · outXNat
anaXNat f = inXNat · (recXNat (anaXNat f)) · f
hyloXNat a c = cataXNat a · anaXNat c
codiag = [id, id]
tailr = hyloXNat codiag
while2 p f g = tailr ((g + f) · grd (¬ · p))
```

Discollect

```
discollect :: (Ord b, Ord a) ⇒ [(b, [a])] → [(b, a)]
discollect = ⟨g⟩ where
  g = [⟦], (⧻) · (f × id)
  where f (a, l) = map ⟨a, id⟩ l
```

Foi também desenvolvida um versão utilizando o operador `bind`

```
discollect2 :: (Ord b, Ord a) ⇒ [(b, [a])] → [(b, a)]
discollect2 = (≫=f)
  where f (a, l) = map ⟨a, id⟩ l
```

Dic_exp

```
dic_exp :: Dict → [(String, [String])]
dic_exp = collect · tar
tar = cataExp g where
  g = [singl · ⟨" ", id⟩, f]
  f (a, b) = map ((⧻) a × id) (concat b)
```

Dic_rd

```

dic_rd :: String → Dict → Maybe [String]
dic_rd s d = while2 p loopBody exit (s, Just d) where
  p (a, b) = (((length a) > 1) ∧ isJust b)
  exit (_, Nothing) = Nothing
  exit ([], _) = Nothing
  exit ([w], Just (Var x)) = Nothing
  exit ([w], Just (Term o l)) | (o ≡ [] ∨ w ≠ head o) = Nothing
    | otherwise = f l
    where f = [nothing, Just · cons] · outList · map [id, π1] · filter (isLeft) · map (outExp)
  loopBody (s, Just (Var v)) = (s, Nothing)
  loopBody (s, Just (Term o l)) | (o ≡ []) = (s, termLsearch s l)
    | (head s ≡ head o) = (tail s, termLsearch (tail s) l)
    | otherwise = (s, termLsearch s l)
  termLsearch s ((Term o l) : xs) = if (head s ≡ head o) then Just (Term o l) else termLsearch s xs
  termLsearch s (_ : xs) = termLsearch s xs
  termLsearch _ [] = Nothing
  isJust (Just _) = True
  isJust _ = False
  isLeft (i1 _) = True
  isLeft _ = False

```

Dic_in

```

dic_in :: String → String → Dict → Dict
dic_in p t d = hyloExp conquer divide (Just $ traductionToDict (p, t), d) where
  conquer = inExp · [outExp, i2]
  divide (Nothing, g) = i1 (g)
  divide (_, Var l) = i1 (Var l)
  divide (Just (Term x xs), Term o l) | (o ≡ []) = i2 $ (o, divide_aux (Term x xs) (False, l))
    | (head x ≡ head o) = i2 $ (o, divide_aux (head xs) (False, l))
    | otherwise = i1 (Term o l)
  traductionToDict :: (String, String) → Dict
  traductionToDict = anaExp g where
    g ([], t) = i1 (t)
    g (p : ps, t) = i2 (singl p, singl (ps, t))
  divide_aux :: Dict → (Bool, [Dict]) → [(Maybe Dict, Dict)]
  divide_aux x (bool, []) = if (¬ bool)
    then singl (Nothing, x)
    else []
  divide_aux x (bool, ((Var v) : ts)) = ((Nothing, (Var v)) : (divide_aux x (test_bool, ts)))
    where test_bool = [v ≡, false] $ outExp x
  divide_aux x (bool, ((Term o l) : ts)) | (o ≡ []) = (Nothing, Term o l) : (divide_aux x (bool, ts))
    | (¬ bool ∧ ([false, (≡ head o) · head · π1] $ outExp x)) =
      (Just x, Term o l) : (divide_aux x (True, ts))
    | otherwise = (Nothing, (Term o l)) : (divide_aux x (bool, ts))

```

Problema 2

maisDir

Esta função aplica o catamorfismo sobre BTree. Caso a BTree seja Empty retorna Nothing, caso contrário a cada iteração verifica se a árvore da Direita (p2.p2) é vazia e se for retorna o nodo (return . p1), se não for retorna a árvore da Direita (const (p2.p2)) para continuar a percorrer recursivamente. A maneira

como isto é feito é conservando (através de um split) num par a função a aplicar ao nodo desconstruido (após outBTree) no lado esquerdo e o nodo desconstruido no lado direito com o id. De seguida chama-se a função Cp.ap que aplica a função do lado esquerdo ao elemento do lado direito.

$maisDir = \langle g \rangle$
where $g = [nothing, \cdot] \$ Cp.ap \cdot \langle maybe (return \cdot \pi_1) (\pi_2 \cdot \pi_2) \cdot \pi_2 \cdot \pi_2, id \rangle$

$$\begin{array}{ccc} BTree\ X & \xrightarrow{outBTree} & 1 + (X \times (BTree\ X)^2) \\ \langle g \rangle \downarrow & & \downarrow id + id \times \langle g \rangle^2 \\ Maybe\ X & \xleftarrow{g} & 1 + (X \times (Maybe\ X)^2) \end{array}$$

maisEsq

Esta função funciona de forma análoga à função de cima com a única diferença ser avaliar a árvore da esquerda e retornar essa mesma árvore para a chamada recursiva.

$maisEsq = \langle g \rangle$
where $g = [nothing, \cdot] \$ Cp.ap \cdot \langle maybe (return \cdot \pi_1) (\pi_1 \cdot \pi_2) \cdot \pi_1 \cdot \pi_2, id \rangle$

$$\begin{array}{ccc} BTree\ X & \xrightarrow{outBTree} & 1 + (X \times (BTree\ X)^2) \\ \langle g \rangle \downarrow & & \downarrow id + id \times \langle g \rangle^2 \\ Maybe\ X & \xleftarrow{g} & 1 + (X \times (Maybe\ X)^2) \end{array}$$

insOrd

A insOrd usa um hilomorfismo (divide and conquer) Hard Split/Easy Join.

Recebe um par do tipo (Maybe X, BTree X) com o elemento a inserir e a árvore e aplica um anamorfismo de FTree com o gene divide.

Isto para recursivamente percorrer a BTree segundo a procura binaria e construir um FTree, conservando os ramos rejeitados pela procura binaria (passando o Nothing no lado esquerdo do par para a iteracao seguinte e colocando o caso de paragem adequado para ser injetado) até encontrar uma árvore Empty onde injeta o novo nodo.

Depois aplica um catamorfismo com o gene conquer para converter a FTree numa BTree com o elemento inserido ordenadamente.

$insOrd' = \perp$
 $insOrd\ a\ x = hyloFTree\ (conquer)\ (divide)\ (Just\ a,\ x)$
where $divide\ (Just\ a,\ Empty) = i_1\ (Node\ (a,\ (Empty,\ Empty)))$
 $divide\ (Just\ a,\ Node\ (n,\ (t1,\ t2))) \mid a \leq n = i_2\ (n,\ ((Just\ a,\ t1),\ (Nothing,\ t2)))$
 $\mid a > n = i_2\ (n,\ ((Nothing,\ t1),\ (Just\ a,\ t2)))$
 $divide\ (Nothing,\ p) = i_1\ (p);$
 $conquer = inBTree \cdot [outBTree, i_2]$

$$\begin{array}{ccc} (Maybe\ X \times BTree\ X) & \xrightarrow{divide} & BTree\ X + (X \times (Maybe\ X \times BTree\ X)^2) \\ \langle divide \rangle \downarrow & & \downarrow id + id \times \langle divide \rangle^2 \\ FTree\ (X,\ BTree\ X) & & BTree\ X + (X \times (FTree\ (X,\ BTree\ X))^2) \\ \langle conquer \rangle \downarrow & & \downarrow id + id \times \langle conquer \rangle^2 \\ BTree\ X & \xleftarrow{conquer} & BTree\ X + (X \times (BTree\ X)^2) \end{array}$$

isOrd

```

isOrd' = (|g|)
  where g = ⊥
isOrd = π1 · (|g|)
  where g = [(True, Empty), ⟨f2 (funcaoComparacao · Node), Node · f⟩]
    f = (id × (π2 × π2))
    f2 p (a, (b, c)) = p (f (a, (b, c))) ∧ π1 (b) ∧ π1 (c)
    funcaoComparacao (Node (a, (t1, t2))) = [True, (≤ a) · π1] (outBTree t1) ∧ [True, (≥ a) · π1] (outBTree t2)

```

rrot

Faz uma rotação à direita numa BTree

```

rrot Empty = Empty
rrot t@(Node (a, (Empty, d))) = t
rrot (Node (black, ((Node (red, (purple, green))), blue))) = Node (red, (purple, (Node (black, (green, blue)))))

```

lrot

Faz uma rotação à esquerda numa BTree

```

lrot Empty = Empty
lrot t@(Node (a, (e, Empty))) = t
lrot (Node (black, (blue, (Node (red, (green, purple)))))) = Node (red, ((Node (black, (blue, green)), purple)))

```

Splay

Aplica um catamorfismo de Listas para recursivamente rodar a árvore de acordo com os valores booleanos

```

splay = (|g|)
  where g = [id, f]
    f (True, l) = rrot · l
    f (False, l) = lrot · l

```

$$\begin{array}{ccc}
 List\ Bool & \xrightarrow{\quad outList \quad} & 1 + (Bool \times List\ Bool) \\
 \downarrow (|g|) & & \downarrow id + id \times (|g|)^2 \\
 BTree\ a^{BTree\ a} & \xleftarrow{\quad g \quad} & 1 + (Bool \times BTree\ a^{BTree\ a})
 \end{array}$$

Problema 3

Definições iniciais

```

inBdt :: a + (String, (Bdt a, Bdt a)) → Bdt a
inBdt = [Dec, Query]
outBdt :: Bdt a → a + (String, (Bdt a, Bdt a))
outBdt (Dec a) = i1 a
outBdt (Query (s, (b1, b2))) = i2 (s, (b1, b2))
baseBdt f g = f + (id × (g × g))
recBdt f = baseBdt id f
cataBdt g = g · (recBdt (cataBdt g)) · outBdt
[[g]] = inBdt · (recBdt [[g]]) · g

```

Diagrama do Anamorfismo

$$\begin{array}{ccc}
 Bdt\ A & \xleftarrow{inBdt} & A + (String \times (Bdt\ A)^2) \\
 \uparrow \llbracket g \rrbracket & & \uparrow id + (id \times \llbracket g \rrbracket)^2 \\
 C & \xrightarrow{g} & A + (String \times (C)^2)
 \end{array}$$

ExtLTree

A diferença em termos estruturais entre os dois tipos de dados é a presença da String nos nodos, informação que irá ser removida na transformação para LTree

```

extLTree :: Bdt a → LTree a
extLTree = cataBdt g where
  g = [Leaf, Fork · π2]

```

NavLTree

Visto que as funções do haskell são naturalmente curried, é possível dizer que $f :: a \rightarrow b \rightarrow c$ é o mesmo que $f :: a \rightarrow (b \rightarrow c)$.

Esse facto permite-nos obter o tipo da assinatura de navLTree como sendo uma função que recebe uma LTree A e devolve uma função que vai [Bool] para Ltree A.

Versão pointfree

```

navLTree :: LTree a → ([Bool] → LTree a)
navLTree = \[· · Leaf, λ(l, r) → Cp.cond null (Fork · ⟨l, r⟩) (Cp.cond head (l · tail) (r · tail))\]

```

Versão pointwise

```

navLTreePointWise :: LTree a → ([Bool] → LTree a)
navLTreePointWise = \g\
  where g = [λa _ → Leaf a, f] where
    f (l, r) [] = Fork (l [], r [])
    f (l, r) (True : hs) = l hs
    f (l, r) (False : hs) = r hs

```

$$\begin{array}{ccc}
 LTree\ A & \xrightarrow{outLTree} & A + (LTree\ A)^2 \\
 \downarrow \llbracket g \rrbracket & & \downarrow id + \llbracket g \rrbracket^2 \\
 [Bool]^{LTree\ A} & \xleftarrow{g} & A + ([Bool]^{LTree\ A})^2
 \end{array}$$

Problema 4

BnavLTree

Esta função é bastante semelhante à função **navLTree** do exercício 3, sendo a principal diferença que agora será uma BTree Bool a ditar a navegação e não uma lista de Boleanos.

Versão pointfree

```

bnavLTree = \[· · Leaf, λ(l, r) → Cp.cond (Empty ≡) (g (l, r)) (h (l, r))\]
  where f = (· · Leaf)
        g (l, r) = Fork · ⟨l, r⟩
        h (l, r) = Cp.cond (π1 · outNode) (l · π1 · π2 · outNode) (r · π2 · π2 · outNode)
        outNode (Node (a, (b, c))) = (a, (b, c))

```

Versão pointwise

```

bnavLTreePointWise = (|g|)
  where g = [λa _ → Leaf a, f] where
    f (l, r) Empty = Fork (l Empty, r Empty)
    f (l, r) (Node (True, (left, right))) = l left
    f (l, r) (Node (False, (left, right))) = r right

```

$$\begin{array}{ccc}
 \text{LTree } A & \xrightarrow{\text{outLTree}} & A + (\text{LTree } A)^2 \\
 \downarrow (|g|) & & \downarrow \text{id} + (|g|)^2 \\
 (\text{BTree Bool})^{\text{LTree } A} & \xleftarrow{g} & A + ((\text{BTree Bool})^{\text{LTree } A})^2
 \end{array}$$

PbnavLTree

Esta função irá percorrer uma LTree representante de uma situação onde em que a decisão depende de vários fatores que são testados sucessivamente. A probabilidade de ocorrência, ou não, de cada fator é representada por **Dist Bool**. Devido à natureza sucessiva destes acontecimentos, as suas probabilidades estão organizadas numa **BTree (Dist Bool)**. Será essa BTree, em conjunto com a LTree, que será percorrida para dar resposta à probabilidade de cada uma das respostas.

```

pbnavLTreeDist = (|g|)
  where g = [λa _ → D [(Leaf a, 1)], f] where
    f (l, r) Empty = D [(Fork (((extract (l Empty)) !! 0), ((extract (r Empty)) !! 0)), 1)];
    f (l, r) (Node (d, (b1, b2))) = Probability.cond d (l b1) (r b2)

```

Foi também desenvolvida uma função que se serve da maquinaria monádica para abstrair a monad, no caso de estarmos numa Leaf e no caso em que a BTree é Empty. Esta revela-se mais intuitiva e tem a vantagem de não se estar a assumir o conteúdo de variáveis, ao contrário do que acontece com extract, na função anterior.

```

pbnavLTree = (|g|)
  where g = [λa _ → return (Leaf a), f] where
    f (l, r) Empty = (prod (l Empty) (r Empty)) >>= (return · Fork)
    f (l, r) (Node (d, (b1, b2))) = Probability.cond d (l b1) (r b2)

```

O seguinte diagrama ilustra a o funcionamento do primeiro caso da função auxiliar f.

Nota: unfoldD é a operação join/multiplicação da monad Dist.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Dist (Dist LTree } A) & \xleftarrow{T \text{ (return} \cdot \text{Fork)}} & \text{Dist (LTree } A)^2 \\
 \downarrow \text{unfoldD} & \nearrow \gg \text{return} \cdot \text{Fork} & \\
 \text{Dist (LTree } A) & \xleftarrow{\text{return} \cdot \text{Fork}} & (\text{Ltree } A)^2
 \end{array}$$

Problema 5

```

truchet1 = Pictures [put (0, 80) (Arc (-90) 0 40), put (80, 0) (Arc 90 180 40)]
truchet2 = Pictures [put (0, 0) (Arc 0 90 40), put (80, 80) (Arc 180 (-90) 40)]
-- janela para visualizar:
janela = InWindow
  "Truchet" -- window title
  (800, 800) -- window size
  (100, 100) -- window position

```

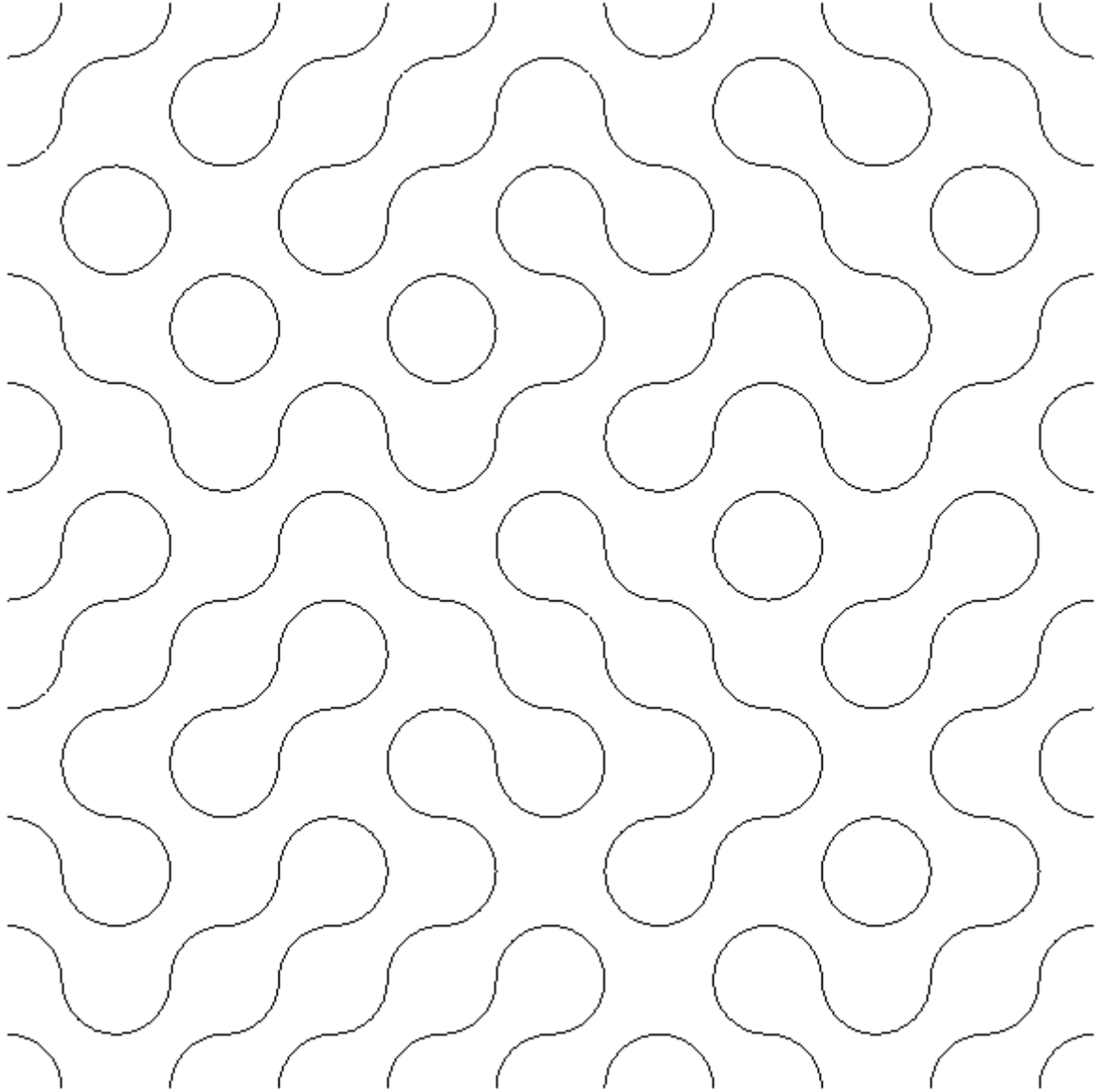


Figura 7: Mosaico gerado pelo grupo

```

-- defs auxiliares -----
put = Translate
matrix x y = do
  r ← generateMatrix x y
  display janela white r
generateMatrix :: Int → Int → IO Picture
generateMatrix i j = (sequence · replicate (i * j) $ randomRIO (0,1) >>= generateTruchet)
  >>= (return · pictures · zipWith id l)
  where l = do { x' ← map (80*) [0..(fromIntegral i) - 1];
    y' ← map (80*) [0..(fromIntegral j) - 1];
    return (put (x', y')) }
generateTruchet :: Monad m ⇒ Integer → m Picture
generateTruchet = return · (Cp.cond (≡ 0) truchet1 truchet2)
--

```

Índice

L^AT_EX, [1](#)

bibtex, [2](#)

lhs2TeX, [1](#)

makeindex, [2](#)

Combinador “pointfree”

cata, [11](#), [14](#), [16–19](#)

either, [12](#), [14–19](#)

Cálculo de Programas, [1](#), [2](#)

 Material Pedagógico, [1](#)

 BTree.hs, [3](#)

Functor, [4](#), [6–9](#), [12](#), [13](#), [16](#), [17](#), [19](#), [20](#)

Função

π_1 , [11](#), [15–18](#)

π_2 , [11](#), [12](#), [16–18](#)

length, [7](#), [12](#), [15](#)

map, [11](#), [14](#), [15](#), [20](#)

uncurry, [12](#), [14](#), [20](#)

Haskell, [1](#), [2](#), [6](#), [9](#)

 “Literate Haskell”, [1](#)

 Biblioteca

 PFP, [8](#)

 Probability, [7](#), [8](#)

 Gloss, [2](#), [9](#), [13](#)

 interpretador

 GHCi, [2](#), [8](#)

 Monad

 Random, [9](#)

 QuickCheck, [2](#)

Mosaico de Truchet, [9](#)

Números naturais (\mathbb{N}), [11](#)

Programação literária, [1](#)

U.Minho

 Departamento de Informática, [1](#)

Referências

- [1] M. Erwig and S. Kollmansberger. Functional pearls: Probabilistic functional programming in Haskell. *J. Funct. Program.*, 16:21–34, January 2006.
- [2] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [3] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.