RELATÓRIO DA ATIVIDADE 02

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE ED

Licenciatura em Engenharia Informática
Análise Matemática II

Filipe Morgado .: 2019137625@isec.pt
Mª de Fátima Rodrigues .: 2019112924@isec.pt
Rui Ferreira .: 2018013504@isec.pt
Vasco Pereira .: 2019134744@isec.pt

1. INTRODUÇÃO

No seguimento da aula teórico-prática online do passado dia 27 de março de 2020, tendo como base os ficheiros disponibilizados pelos docentes da unidade curricular de AM2 – Matemática Computacional, e o suporte dos conhecimentos de programação adquiridos nas aulas práticas, é pedido a implementação em MATLAB:

- do Método de Euler;
- do Método de Euler melhorado;
- do Método de Runge-Kutta de ordem 2 (RK2);
- do Método de Runge-Kutta de ordem 3 (RK3);
- e do Método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4);

para a resolução de sistemas de equações diferenciais com condições iniciais.

No presente relatório apresentamos quatro problemas predefenidos que testam as funcionalidades do nosso programa. O problema do pêndulo, desenvolvido nas aulas teórico-práticas da unidade curricular, que utiliza os métodos numéricos supracitados para obter soluções aproximadas do movimento angular de um pêndulo, seguido de dois exercícios de sistemas mecânicos mola-massa com e sem amortecimento que utilizam os métodos implementados para obter soluções aproximadas do movimento livre de cada sistema. Por último, um quarto problema sobre Vibrações Livres Forçadas.

Os enunciados apresentados descrevem modelos matemáticos que requerem sistemas de equações que podem ser simplificados num sistema de equações diferenciais de primeira ordem, isto é, um sistema constituído por duas ou mais equações envolvendo derivadas (não necessariamente de primeira ordem) de duas ou mais variáveis dependentes relativamente a uma só independente (Gomes, 2013).

Os problemas $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ com $y(x_0) = y_0$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y')$ com $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ apelidam-se de problemas de valor inicial de primeira e segunda ordem, respetivamente. Na primeira equação, procura-se uma solução da EDO num intervalo em que a curva integral passe pelo ponto (x_0, y_0).

Já na segunda, pretende-se determinar uma solução cujo gráfico não intersete apenas um ponto (x_0, y_0) , mas também que a inclinição da curva nesse ponto seja y_1.

O termo condição inicial, oriunda de sistemas físicos, significa que a variável independente é o tempo t e $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$, representam, respetivamente a velocidade de um objeto no instante inicial t_0.

2. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE SED

De forma a otimizar o trabalho e a diminuir o tempo de resposta da aplicação, optamos por implementar os problemas predefinidos diretamente na GUI.

Tomamos também a iniciativa, de no problema do pêndulo, fixar a opção do Método de Euler, visto não ser possível calcular a opção exata.

2.1. Algoritmo/ Função do Método de Euler

```
function [t,u,v]=NEulerSED(f,g,a,b,n,u0,v0)
h=(b-a)/n;
t= a:h:b;
u=zeros(1,n+1);
v=zeros(1,n+1);
u(1)=u0;
v(1)=v0;

for i=1:n

    u(i+1)=u(i)+h*f(t(i),u(i),v(i));
    v(i+1)=v(i)+h*g(t(i),u(i),v(i));
end
```

2.2. Algoritmo/ Função do Método de Euler Melhorado

```
function [t,u,v] = NEulerMSED(f,g,a,b,n,u0,v0)
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
u=zeros(1,n+1);
v=zeros(1,n+1);
u(1)=u0;
v(1)=v0;

for i=1:n


    u(i+1) = u(i) + h/2 *(f(t(i), u(i) , v(i))  +f(t(i+1), u(i+1), v(i+1)));
    v(i+1) = v(i) + h/2 *(g(t(i), u(i) , v(i))  +g(t(i+1), u(i+1), v(i+1)));
end
```

2.3. Algoritmo/ Função do Método de Runge-Kutta de Ordem 2

```
function [t,u,v] = NRK2SED(f, g, a, b, n, u0,v0)

h          = (b-a)/n;
t          = a:h:b;
u = zeros(1,n+1);
v = zeros(1,n+1);
u(1)  = u0;
v(1)  = v0;

for i = 1:n
    k1_u         = h * f(t(i),u(i),v(i));
    k1_v         = h * g(t(i),u(i),v(i));

    k2_u         = h * f(t(i+1),    u(i)+k1_u,    v(i)+k1_v);
    k2_v         = h * g(t(i+1),    u(i)+k1_u,    v(i)+k1_v);

    u(i+1)=u(i)+(k1_u+k2_u)/2;
    v(i+1)=v(i)+(k1_v+k2_v)/2;
end
```

2.4. Algoritmo/ Função do Método de Runge-Kutta de Ordem 3

```
function [t,u,v] = NRK3SED(f, g, a, b, n, u0,v0)

h          = (b-a)/n;
t          = a:h:b;
u = zeros(1,n+1);
v = zeros(1,n+1);
u(1)  = u0;
v(1)  = v0;

for i = 1:n

    k1_u         = h * f(t(i),u(i),v(i));
    k1_v         = h * g(t(i),u(i),v(i));

    k2_u         = h * f(  t(i)+h/2,  u(i)+k1_u*(1/2),  v(i)+k1_v*(1/2));
    k2_v         = h * g(  t(i)+h/2,  u(i)+k1_u*(1/2),  v(i)+k1_v*(1/2));

    k3_u         = h * f(  t(i)+h,  u(i)-k1_u+2*k2_u,  v(i)-k1_v+2*k2_v);
    k3_v         = h * g(  t(i)+h,  u(i)-k1_u+2*k2_u,  v(i)-k1_v+2*k2_v);

    u(i+1)=u(i)+(k1_u+4*k2_u+k3_u)/6;
    v(i+1)=v(i)+(k1_v+4*k2_v+k3_v)/6;

end
```

2.5. Algoritmo/ Função do Método de Runge-Kutta de Ordem 4

```
function [t,u,v] = NRK4SED(f, g, a, b, n, u0,v0)

h          = (b-a)/n;
t          = a:h:b;
u = zeros(1,n+1);
v = zeros(1,n+1);
u(1)  = u0;
v(1)  = v0;

for i = 1:n
    k1_u        = h * f(t(i),u(i),v(i));
    k1_v        = h * g(t(i),u(i),v(i));

    k2_u        = h * f(  t(i)+h/2,  u(i)+k1_u*(1/2),  v(i)+k1_v*(1/2));
    k2_v        = h * g(  t(i)+h/2,  u(i)+k1_u*(1/2),  v(i)+k1_v*(1/2));

    k3_u        = h * f(  t(i)+h/2,  u(i)+k2_u*(1/2),  v(i)+k2_v*(1/2));
    k3_v        = h * g(  t(i)+h/2,  u(i)+k2_u*(1/2),  v(i)+k2_v*(1/2));

    k4_u        = h * f(  t(i)+h/2,  u(i)+k3_u*(1/2),  v(i)+k3_v*(1/2));
    k4_v        = h * g(  t(i)+h/2,  u(i)+k3_u*(1/2),  v(i)+k3_v*(1/2));

    u(i+1)=u(i)+(k1_u+2*k2_u+2*k3_u+k4_u)/6;
    v(i+1)=v(i)+(k1_v+2*k2_v+2*k3_v+k4_v)/6;

end
```

3. PROBLEMAS DE APLICAÇÃO PREDEFINIDOS

3.1. Problema do Pêndulo

Na aula teórico-prática online de 27 de março de 2020, explorámos o problema do pêndulo após uma aula de introdução aos Sistemas de Equações Diferenciais (SED).

Recordámos que:

PVI

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ t\epsilon[a, b] \\ y(a) = y0 \end{cases}$$

SED

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = f(t, u, v) \\ v' = g(t, u, v) \end{cases} \\ t\epsilon[a, b] \\ \begin{cases} u(a) = u0 \\ v(a) = v0 \end{cases} \end{cases}$$

Objetivo: $y(ti) \approx ?$

$$u(ti) \approx ?$$
$$v(ti) \approx ?$$

Do enunciado do problema sabemos que:

$$\theta'' + \frac{c}{mL}\theta' + \frac{g}{L}sin\theta = 0 \qquad \frac{g}{L} = 1, \frac{c}{mL} = 0.3$$

A equação apresentada é uma ED de Ordem 2 homogénea e não linear

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(t)$$

$$\begin{cases} y'' + 0.3y' + siny = 0 \\ t\epsilon[0, 15] \\ \begin{cases} y(0) = \frac{\pi}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Será possível resolver o PVI da Equação Diferencial dada como temos vindo a fazer até aqui? No caso das ED de Ordem 2, podemos simplificar/transformar a equação diferencial num SED de 1.ª Ordem.

$$y'' + 0.3y' + siny = 0 \Leftrightarrow y'' = -siny - 0.3y'$$

$$\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases} \begin{cases} u' = y' \\ v' = y'' \end{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -sinu - 0.3v \end{cases} \begin{cases} u' = f(t, u, v) \\ v' = g(t, u, v) \end{cases} \begin{cases} f(t, u, v) = v \\ g(t, u, v) = -sinu - 0.3v \end{cases}$$

Ficamos então com um SED de 1.ª Ordem, onde já podemos aplicar os métodos numéricos implementados para obter os valores aproximados de $\begin{matrix} u(ti) \approx ? \\ v(ti) \approx ? \end{matrix}$.

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -sinu - 0.3v \end{cases} \\ t\epsilon[0, 15] \\ \begin{cases} u(0) = \dfrac{\pi}{2} \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

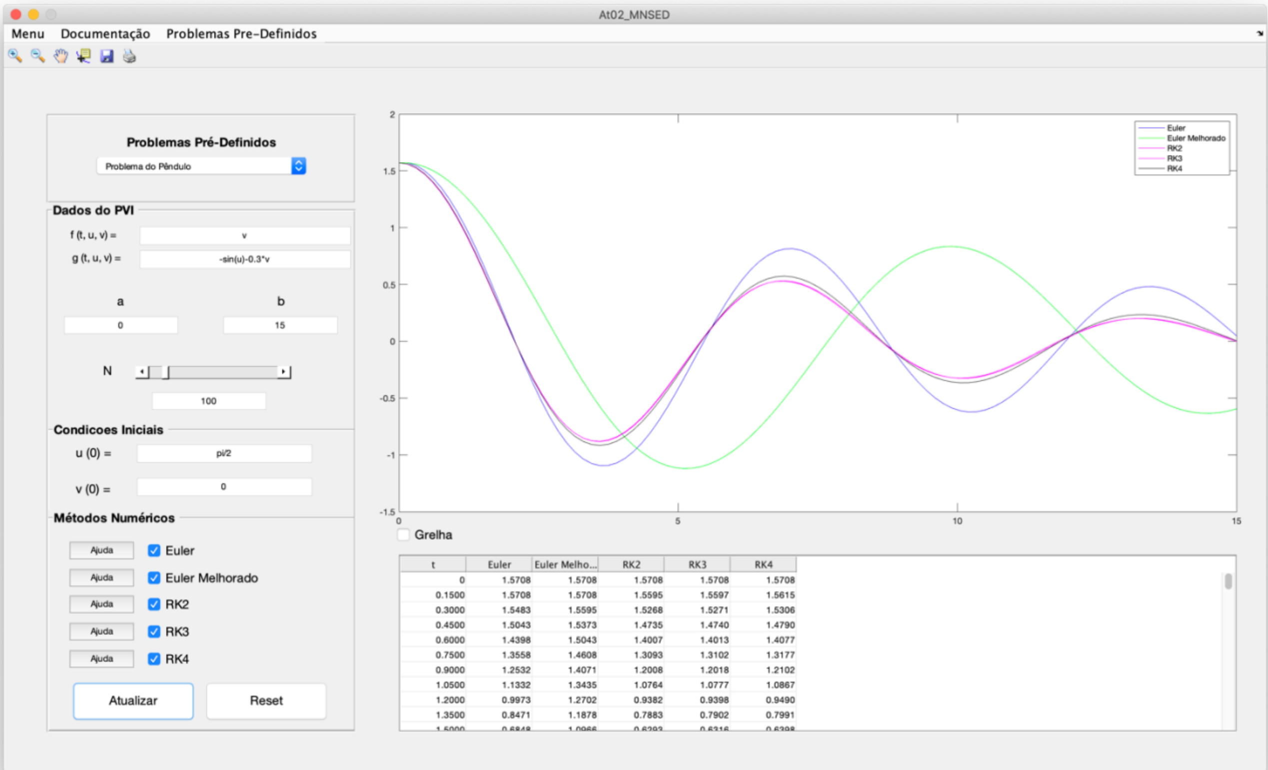

Fig.1 – Exemplo de implementação do Problema do Pêndulo

3.2. Sistema Mola-Massa Sem Amortecimento

Dado o seguinte problema de Cauchy:

$$y'' + 16y = 0 \qquad y(0) = 9 \qquad y'(0) = 0$$

$$y'' = -16y$$

Algoritmo de transformação/redução de uma ED de ordem 2 num SED de 1.ª Ordem:

$$\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases} \quad \begin{cases} u' = y' \\ v' = y'' \end{cases} \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = -16y \end{cases} \quad \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} \quad \begin{cases} f(t,u,v) = v \\ g(t,u,v) = -16u \end{cases}$$

PVI do SED de 1.ª Ordem:

$$\begin{cases} \begin{cases} f(t,u,v) = v \\ g(t,u,v) = -16u \end{cases} \\ t \epsilon [0, 2\pi] \\ \begin{cases} u(0) = 9 \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

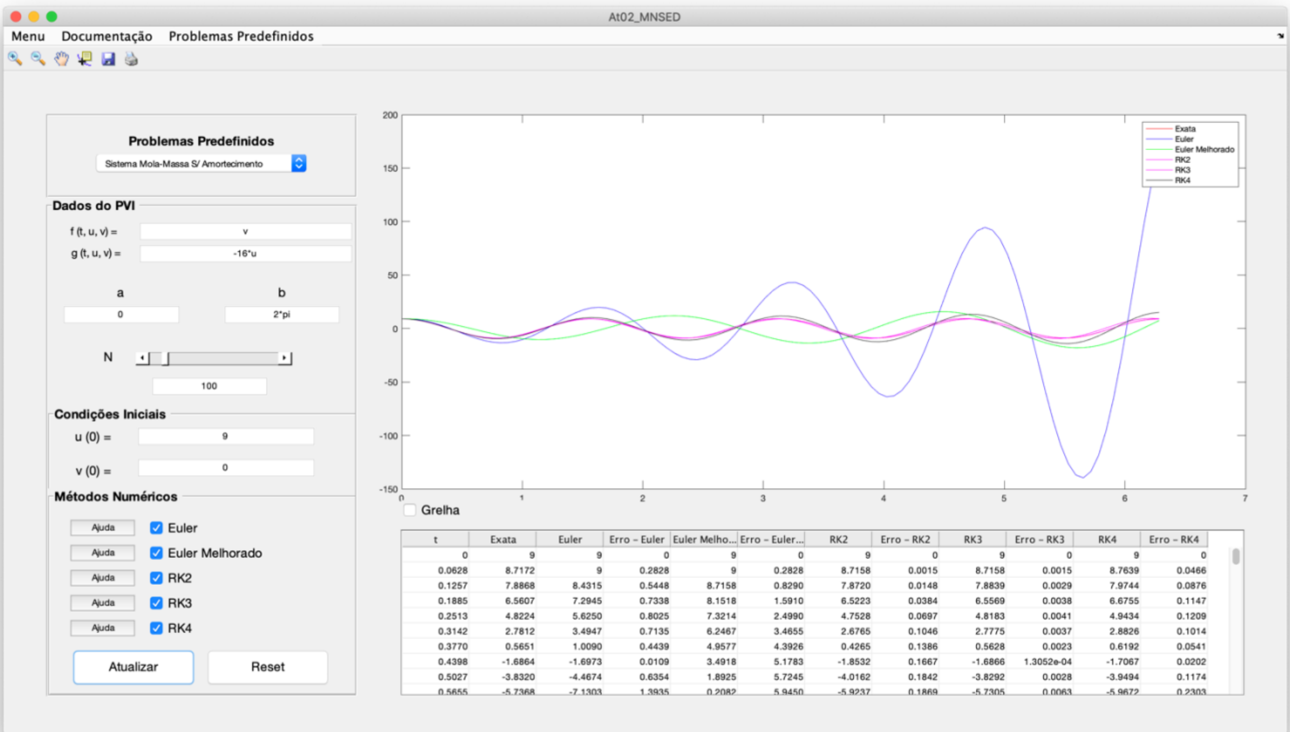

Fig.2 – Exemplo de implementação do Problema Sistema Mola-Massa Sem Amortecimento

3.3. Sistema Mola-Massa Com Amortecimento

A equação diferencial de movimento de peso é:

$$0.2y'' = -5y - 2y' \Leftrightarrow y'' + 10y' + 25y = 0 \Leftrightarrow y'' = -10y' - 25y$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = -4$$

Algoritmo de tranformação/redução de uma ED de ordem 2 num SED de 1.ª Ordem:

$$\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases} \begin{cases} u' = y' \\ v' = y'' \end{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -10y' - 25y \end{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} \begin{cases} f(t,u,v) = v \\ g(t,u,v) = -10v - 25u \end{cases}$$

PVI do SED de 1.ª Ordem:

$$\begin{cases} \begin{cases} f(t,u,v) = v \\ g(t,u,v) = -10v - 25u \end{cases} \\ t\epsilon[0, 2\pi] \\ \begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = -4 \end{cases} \end{cases}$$

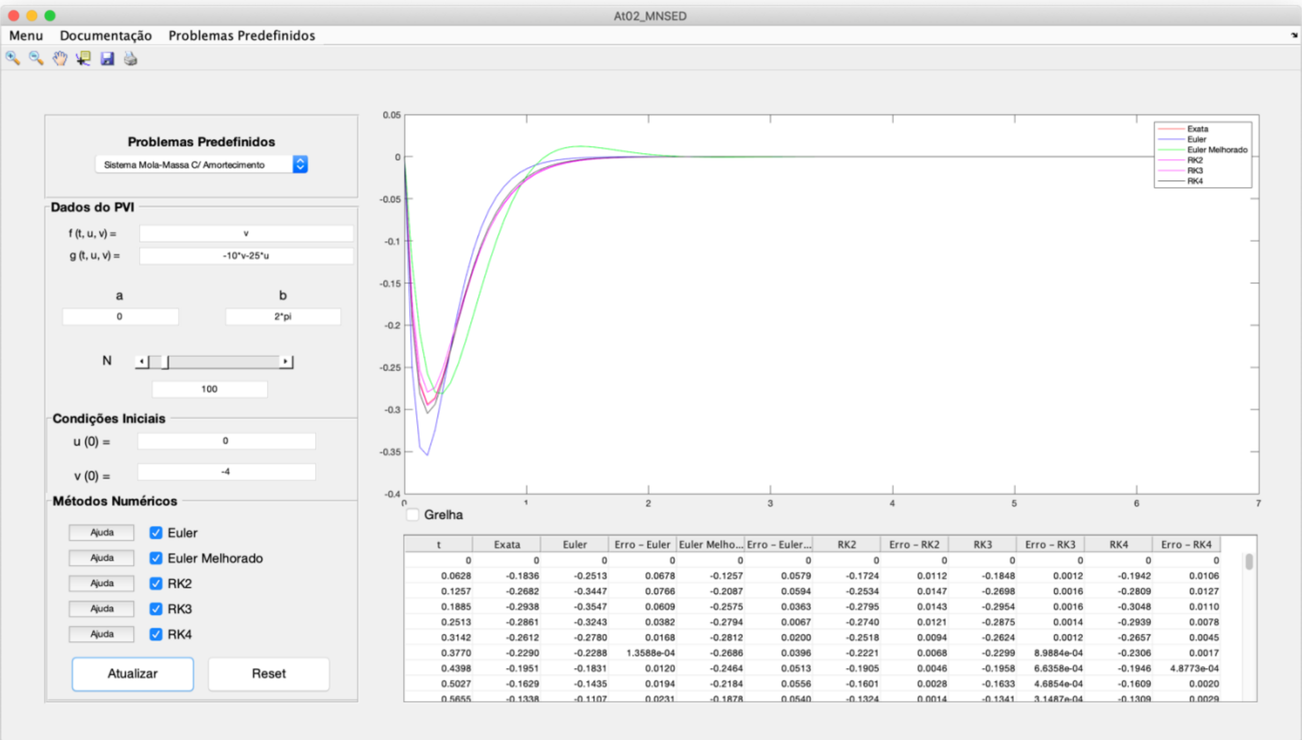

Fig.3 – Exemplo de implementação do Problema Sistema Mola-Massa Com Amortecimento

3.4. Vibrações Livres Forçadas

Partindo do capítulo 3 da tese de Gabriela Stahelin, intitulada "*Um Estudo Envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2.ª Ordem e Temas Relacionados*", obtivemos uma equação diferencial que diz respeito à variação da velocidade e posição de uma partícula quando tem uma força que age sobre ela.

$y'' + 1.y = 0,5\cos(0,8t)$ sujeita às seguintes condições: $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$

1.º Passo – Estabelecer a EDL homogénea correspondente e determinar a sua solução geral

EDLO2 homogénea correspondente: $y'' + 1y = 0$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1$$

$$r = \pm\sqrt{-1}$$

$$r = \pm i$$

Recorrendo à tabela do SFS sabemos que: $y_h = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$

2.º Passo – Determinar uma solução particular de $y_p(t) = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it}$

Estabelecer o sistema de Lagrange e aplicar a regra de Cramer:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{it} + c_2'(t)e^{-it} = 0 \\ c_1'(t)ie^{it} - c_2'(t)ie^{-it} = 0,5\cos(0,8t) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{vmatrix} = -i - i = -2i$$

$$\Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{-it} \\ 0,5\cos(0,8t) & -ie^{-it} \end{vmatrix} = -e^{-it}0,5\cos(0,8t)$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} e^{it} & 0 \\ ie^{it} & 0,5\cos(0,8t) \end{vmatrix} = e^{it}0,5\cos(0,8t)$$

$$c_1' = \frac{\Delta c_1'}{\Delta} = \frac{-e^{-it}0,5\cos(0,8t)}{-2i} = \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{i}$$

$$c_2' = \frac{\Delta c_2'}{\Delta} = \frac{e^{it}0,5\cos(0,8t)}{-2i} = \frac{-0,25e^{it}\cos(0,8t)}{i}$$

Integrar c'1 e c'2: $c_1(t) = \int \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{i}dt = \frac{0,25}{i}\int e^{-it}\cos(0,8t)dt$

$$\int e^{ct}\cos(bt)dt = \frac{e^{ct}}{c^2+b^2}(c\cos(bt) + b\,\mathrm{sen}(bt)) + K$$

$$c_1(t) = \frac{0,25}{i}\left[\frac{e^{-it}}{(-i)^2+(0,8)^2}(-i\cos(0,8t)+0,8\,\text{sen}(0,8t))\right]+K_1$$

$$c_1(t) = \frac{0,25e^{-it}}{-0,36i}(-i\cos(0,8t)+0,8\,\text{sen}(0,8t))+K_1$$

$$c_1(t) = \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,2e^{-it}\,\text{sen}(0,8t)}{0,36i}+K_1$$

$$c_2(t) = \int \frac{-0,25e^{it}\cos(0,8t)}{i}dt = \frac{-0,25}{i}\int e^{it}\cos(0,8t)dt$$

$$c_2(t) = \frac{-0,25}{i}\left[\frac{e^{it}}{i^2+(0,8)^2}(i\cos(0,8t)+0,8\,\text{sen}(0,8t))\right]+K_2$$

$$c_2(t) = \frac{0,25e^{it}}{0,36i}(i\cos(0,8t)+0,8\,\text{sen}(0,8t))+K_2$$

$$c_2(t) = \frac{0,25e^{it}\cos(0,8t)}{0,36} + \frac{0,2e^{it}\,\text{sen}(0,8t)}{0,36i}+K_2$$

Substituindo em $y(t) = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it}$

$$y(t) = \left(\frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,2e^{-it}\,\text{sen}(0,8t)}{0,36i}+K_1\right)e^{it}+$$

$$+\left(\frac{0,25e^{it}\cos(0,8t)}{0,36} + \frac{0,2e^{it}\,\text{sen}(0,8t)}{0,36i}+K_2\right)e^{-it}$$

$$y(t) = \frac{0,25\cos(0,8t)}{0,36} + K_1e^{it} + \frac{0,25\cos(0,8t)}{0,36} + K_2e^{-it}$$

$$y(t) = \frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36} + K_1e^{it} + K_2e^{-it}$$

Para encontrarmos os valores das constantes k1 e k2, utilizamos as condições iniciais dadas.

$y(0) = 0$

$$0 = \frac{0,5\cos 0}{0,36} + K_1 + K_2$$

$$K_1 + K_2 = \frac{-0,5}{0,36}$$

$y'(0) = 0$

$$y'(t) = \frac{-0,5\,\text{sen}(0,8t)0,8}{0,36} + K_1e^{it}i + K_2e^{-it}(-i)$$

$$0 = \frac{-0,5.0,8\,\text{sen}\,0}{0,36} + iK_1 - iK_2$$

$$iK_1 - iK_2 = 0$$

$$K_1 - K_2 = 0$$

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = \dfrac{-0,5}{0,36} \\ K_1 - K_2 = 0 \end{cases}$$

$$2K_1 = \frac{-0,5}{0,36}$$

$$K_1 = \frac{-0,5}{0,72}$$

$$y(t) = \frac{0,5\cos(0,8t)}{0,72} - \frac{0,5e^{it}}{0,72} - \frac{0,5e^{-it}}{0,72}$$

De forma a simplificar a solução complexa, aplica-se a fórmula de Euler.

$$y(t) = \frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,5}{0,72}(\cos t + i\,\mathrm{sen}\,t) - \frac{0,5}{0,72}(\cos t - i\,\mathrm{sen}\,t)$$

$$y(t) = \frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{\cos t}{0,72}$$

$$y(t) = \frac{\cos(0,8t) - \cos t}{0,72}$$

Note que, $\cos(0,8t) - \cos t = \cos(a+b) - \cos(a-b)$

$$\begin{cases} a + b = 0,8t \\ a - b = t \end{cases}$$

Logo, $a = 0,9t$ e $b = -0,1t$.

Mas, $\cos(a+b) - \cos(a-b) = \cos a \cos b - \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b - [\cos a \cos b + \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b]$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\,\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$$

Como a função seno é ímpar $\cos(0,8t) - \cos t = 2\,\mathrm{sen}(0,9t)\,\mathrm{sen}(0,1t)$

$$y(t) = \frac{2\,\mathrm{sen}(0,9t)\,\mathrm{sen}(0,1t)}{0,72}$$

$$y(t) = 2,77778\,\mathrm{sen}(0,9t)\,\mathrm{sen}(0,1t)$$

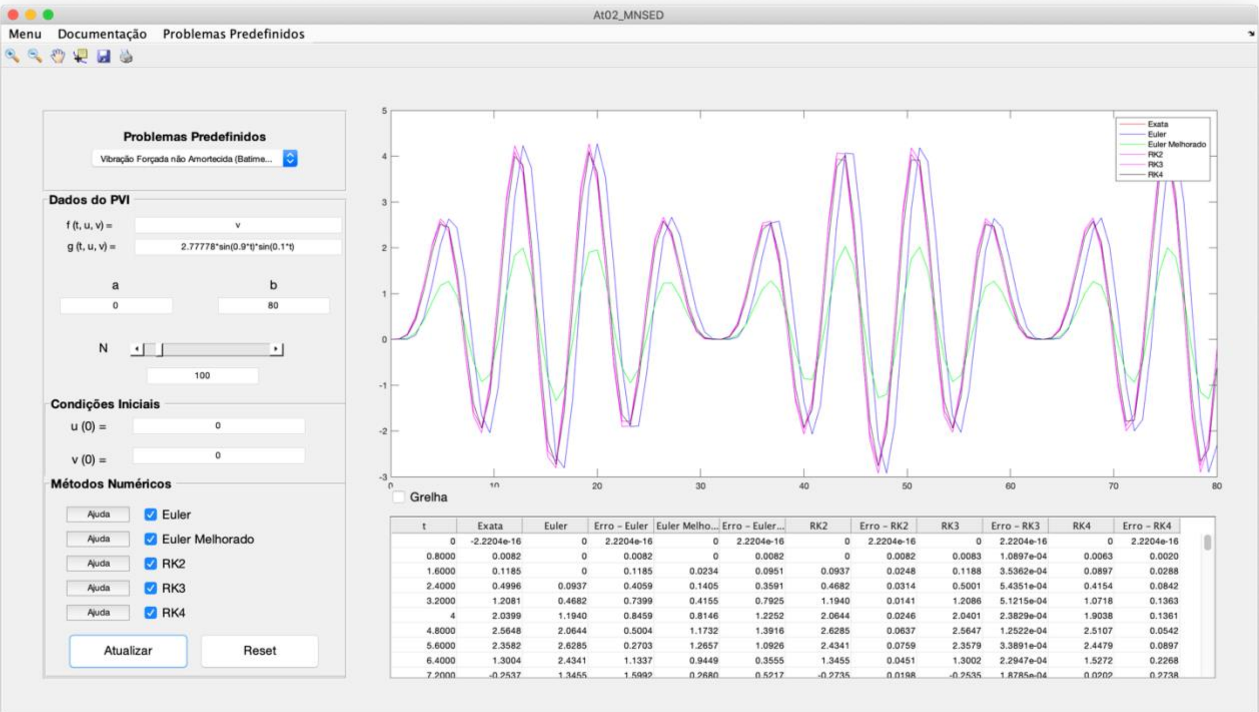

Fig.4 – Exemplo de implementação do Problema Vibrações Livres Forçadas

Observação:

Nota 1:

No ficheiro *autores.fig*, o botão X (cruz de fecho de janela) foi propositadamente desativado, obrigando assim o utilizador a carregar na opção VOLTAR para regressar à GUI e não a terminar a execução do programa.

Nota 2:

Devido à discrepância de resoluções entre diferentes monitores, poderá ser necessário redimensionar a janela da GUI, de forma a evitar desformatações.

4. CONCLUSÃO

No âmbito da unidade curricular de Análise Matemática II, desenvolvemos o presente trabalho com o intuito de aprofundar e consolidar o estudo iniciado nas aulas a Distância sobre Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de Equações Diferenciais.

O principal objetivo do nosso trabalho passou por adaptar os métodos numéricos para EDO/PVI, construídos no primeiro trabalho prático, num formato de resolução de sistemas de equações diferenciais com condições iniciais, que resolvam diversos problemas que implicam a interação da matemática com outras ciências, nomeadamente a Física, Química, Biologia, Economia.

Partindo de uma base teórica fundamentada pela tese de Gabriela Stahelin, intitulada "*Um Estudo Envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2.ª Ordem e Temas Relacionados*", procuramos integrar um exercício de vibrações forçadas que enriquecesse as opções de teste predefinidas do nosso programa.

Ao nos debruçarmos sobre os dois trabalhos entregues sobre o capítulo de Equações Diferenciais, percebemos que estes acabam por se tornar o complemento um do outro. O primeiro com uma visão mais teórica e detalhada de Equação Diferencial e o segundo com uma perspetiva mais concreta sobre a aplicação prática dos métodos implementados noutras áreas.

5. BIBLIOGRAFIA

Stahelin G., 2007, **Um Estudo Envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2.ª Ordem e Temas Relacionados**, Florianópolis-SC.

Marcelo G., 2013, **Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias**, Florianópolis-SC, Brasil.