Capítulo 3

Vibrações Livres Forçadas

O movimento de uma partícula é determinado pelas forças agindo sobre ela. A segunda Lei de Newton é uma equação diferencial que diz como a velocidade e a posição da partícula mudam.

De acordo com a segunda Lei de Newton, para um objeto de massa m tenho a seguinte equação do movimento:

$$F = m.a$$

onde F é a força resultante e a é a aceleração da massa m.

Mas posso dizer que $a = y''$ então fico com:

$$F = m.y''$$

A força resultante de um sistema massa-mola é o mesmo que a força de restauração do sistema (Lei de Hooke) acrescido da força externa, não levando em consideração o atrito.

Como $F = m.y''$, para um sistema massa-mola tenho que

$$-ky + F_0 \cos(\omega t) = my''$$

onde, $-ky$ representa a força de restauração do sistema massa-mola (Lei de Hooke) e $F_0 \cos(\omega t)$ representa uma força externa, sendo F_0 uma força inicial e ω freqüência angular constante.

Dividindo a equação pela massa m tenho:

$$y'' = \frac{-k}{m}y + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

ou

$$y'' + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Para simplificar chamo $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ = constante. (ω_0 é chamada freqüência angular natural).

Logo tenho que:

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Esta é, portanto, a equação diferencial que representa a segunda Lei de Newton para o sistema massa-mola.

Resolução de um problema de Aplicação

$$y'' + 1y = 0,5\cos(0,8t)$$

Tomo primeiramente a equação homogênea $y'' + 1y = 0$, e resolvendo-a:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1$$

$$r = \pm\sqrt{-1}$$

$$r = \pm i$$

Portanto e^{it} e e^{-it} são soluções da equação diferencial homogênea, e daí $y_h = \ c_1e^{it} + \ c_2e^{-it}$ é a solução geral desta equação, sendo c_1 e c_2 constantes.

Preciso agora encontrar a solução da equação não homogênea

$$y'' + 1y = 0,5\cos(0,8t)$$

Para fazer isso, vou utilizar o Método de Variação dos Parâmetros, onde terei que encontrar os parâmetros variantes $c_1(t)$ e $c_2(t)$ tal que $y_p(t) = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it}$ seja a solução da equação não homogênea.

Monto então o quadro:

$$\begin{array}{c|l}
1 & y_p = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it} \\
0 & y_p' = c_1(t)ie^{it} + c_2(t)(-i)e^{-it} + \left[c_1'(t)e^{it} + c_2'(t)e^{-it} = 0\right] \\
1 & y_p'' = c_1(t)i^2e^{it} + c_2(t)i^2e^{-it} + c_1'(t)ie^{it} + c_2'(t)(-i)e^{-it} \\
\hline
 & \quad 0 \ + \ 0 \ + \ c_1'(t)ie^{it} \ + \ c_2'(t)(-i)e^{-it} \ = \ 0,5\cos(0,8t)
\end{array}$$

Logo tenho que:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{it} + c_2'(t)e^{-it} = 0 \\ c_1'(t)ie^{it} - c_2'(t)ie^{-it} = 0,5\cos(0,8t) \end{cases}$$

Resolvendo pela Regra de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{vmatrix} = -i - i = -2i$$

$$\Delta c_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{-it} \\ 0,5\cos(0,8t) & -ie^{-it} \end{vmatrix} = -e^{-it}0,5\cos(0,8t)$$

$$\Delta c_2' = \begin{vmatrix} e^{it} & 0 \\ ie^{it} & 0,5\cos(0,8t) \end{vmatrix} = e^{it}0,5\cos(0,8t)$$

Então

$$c_1' = \frac{\Delta c_1'}{\Delta} = \frac{-e^{-it}0,5\cos(0,8t)}{-2i} = \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{i}$$

$$c_2' = \frac{\Delta c_2'}{\Delta} = \frac{e^{it}0,5\cos(0,8t)}{-2i} = \frac{-0,25e^{it}\cos(0,8t)}{i}$$

Para encontrar $c_1(t)$ e $c_2(t)$ basta integrar c_1' e c_2' respectivamente.

$$c_1(t) = \int \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{i}dt = \frac{0,25}{i}\int e^{-it}\cos(0,8t)dt$$

Utilizando a Tabela de Integrais tenho que:

$$\int e^{ct}\cos(bt)dt = \frac{e^{ct}}{c^2+b^2}(c\cos(bt) + b\,\mathrm{sen}(bt)) + K$$

com k constante.

Logo

$$c_1(t) = \frac{0,25}{i}\left[\frac{e^{-it}}{(-i)^2+(0,8)^2}(-i\cos(0,8t) + 0,8\,\mathrm{sen}(0,8t))\right] + K_1$$

$$c_1(t) = \frac{0,25e^{-it}}{-0,36i}(-i\cos(0,8t) + 0,8\,\mathrm{sen}(0,8t)) + K_1$$

$$c_1(t) = \frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,2e^{-it}\,\mathrm{sen}(0,8t)}{0,36i} + K_1$$

com K_1 constante.

Falta encontrar $c_2(t)$

$$c_2(t) = \int \frac{-0,25e^{it}\cos(0,8t)}{i}dt = \frac{-0,25}{i}\int e^{it}\cos(0,8t)dt$$

$$c_2(t) = \frac{-0,25}{i}\left[\frac{e^{it}}{i^2+(0,8)^2}(i\cos(0,8t) + 0,8\,\mathrm{sen}(0,8t))\right] + K_2$$

$$c_2(t) = \frac{0,25e^{it}}{0,36i}(i\cos(0,8t) + 0,8\,\mathrm{sen}(0,8t)) + K_2$$

$$c_2(t) = \frac{0,25e^{it}\cos(0,8t)}{0,36} + \frac{0,2e^{it}\,\mathrm{sen}(0,8t)}{0,36i} + K_2$$

com K_2 constante.

Como $y(t) = c_1(t)e^{it} + c_2(t)e^{-it}$, substituindo tenho:

$$y(t) = \left(\frac{0,25e^{-it}\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,2e^{-it}\,\mathrm{sen}(0,8t)}{0,36i} + K_1\right)e^{it} +$$

$$+\left(\frac{0,25e^{it}\cos(0,8t)}{0,36}+\frac{0,2e^{it}\operatorname{sen}(0,8t)}{0,36i}+K_2\right)e^{-it}$$

$$y(t)=\frac{0,25\cos(0,8t)}{0,36}+K_1e^{it}+\frac{0,25\cos(0,8t)}{0,36}+K_2e^{-it}$$

$$y(t)=\frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36}+K_1e^{it}+K_2e^{-it}$$

Preciso encontrar o valor das constantes K_1 e K_2.

Para isso, vou utilizar das condições iniciais que foram dadas ($y(0)=0$ e $y'(0)=0$).

Se $y(0)=0$

$$0=\frac{0,5\cos 0}{0,36}+K_1+K_2$$

$$K_1+K_2=\frac{-0,5}{0,36}$$

Se $y'(0)=0$

$$y'(t)=\frac{-0,5\operatorname{sen}(0,8t)0,8}{0,36}+K_1e^{it}i+K_2e^{-it}(-i)$$

$$0=\frac{-0,5.0,8\operatorname{sen}0}{0,36}+iK_1-iK_2$$

$$iK_1-iK_2=0$$

$$K_1-K_2=0$$

Logo

$$\begin{cases} K_1+K_2=\dfrac{-0,5}{0,36} \\ K_1-K_2=0 \end{cases}$$

$$2K_1=\frac{-0,5}{0,36}$$

$$K_1=\frac{-0,5}{0,72}$$

Então $K_2=\dfrac{-0,5}{0,72}$ já que $K_2=K_1$.

Portanto

$$y(t)=\frac{0,5\cos(0,8t)}{0,72}-\frac{0,5e^{it}}{0,72}-\frac{0,5e^{-it}}{0,72}$$

é a solução da equação $y''+1y=0,5\cos(0,8t)$.

Mas desejo escrever esta solução de uma forma mais simplificada.

Primeiramente, para eliminar a solução complexa, vou aplicar a fórmula de Euler.

Logo fico com:

$$y(t) = \frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{0,5}{0,72}(\cos t + i \operatorname{sen} t) - \frac{0,5}{0,72}(\cos t - i \operatorname{sen} t)$$

$$y(t) = \frac{0,5\cos(0,8t)}{0,36} - \frac{\cos t}{0,72}$$

$$y(t) = \frac{\cos(0,8t) - \cos t}{0,72}$$

Note que, $\cos(0,8t) - \cos t = \cos(a+b) - \cos(a-b)$, onde:

$$\begin{cases} a + b = 0,8t \\ a - b = t \end{cases}$$

logo, $a = 0,9t$ e $b = -0,1t$.

Mas,

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - [\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b]$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Logo $\cos(0,8t) - \cos t = -2\operatorname{sen}(0,9t) \cdot \operatorname{sen}(-0,1t)$.

Como a função seno é ímpar

$$\cos(0,8t) - \cos t = 2\operatorname{sen}(0,9t)\operatorname{sen}(0,1t)$$

Logo,

$$y(t) = \frac{2\operatorname{sen}(0,9t)\operatorname{sen}(0,1t)}{0,72}$$

$$y(t) = 2,77778\operatorname{sen}(0,9t)\operatorname{sen}(0,1t)$$

Esta solução pode ser representada através do gráfico que segue.

Analisando-o é possível perceber o comportamento das oscilações.

Comandos:

```
>> t=0:.1:80;
>> y=2.77778*sin(.1*t).*sin(.9*t);
>> y1=2.77778*sin(.1*t);
>> y2=-2.77778*sin(.1*t);
>> plot(t,y,'r',t,y1,'--',t,y2,'--')
>> grid on
```