AM2 TP3 27/03/2020

1) SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

SED — PVI

Recordar PVI

$$(P)\begin{cases} y' = f(t,y) & \text{1 ED} \\ t \in [a,b] & (2) \\ y(a) = y_0 & \text{(3) CI} \end{cases}$$

$h = \frac{b-a}{n}$

objetivo: $y(t_i) \approx \boxed{?}$

MEULER $\rightarrow$ $\boxed{y_{i+1} = y_i + h * f(t_i, y_i) \quad i=0,1..n}$

$$(P)\begin{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} & \text{(1) SED} \\ t \in [a,b] & (2) \\ \begin{cases} u(a) = u_0 \\ v(a) = v_0 \end{cases} & \text{(3) CI} \end{cases}$$

objetivo: $u(t_i) \approx ?$

$v(t_i) \approx ?$

MEULER_SED

Desafio "1 café"

Fórmula / equação de iteração do MEULER para SED

MEULERSED

$$\boxed{\begin{cases} u_{i+1} = u_i + h * f(t_i, u_i, v_i) \\ v_{i+1} = v_i + h * g(t_i, u_i, v_i) \end{cases} \quad (4)}$$

$$\begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases}$$

$\boxed{i = 0, 1, 2, \dots n}$

Algoritmo: MEULERSED

input: f, g, a, b, n, u_0, v_0

output: t, u, v

t = [a | ... | | | b]

u = [u_0 | . | . | . |]

v = [v_0 | . | . |]

```
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;                    % t=[a ... b]
u=zeros(1,n+1);             % u=[0 0 ... 0]
v=u;                        % v=[0 0 ... 0]
u(1)=u0; v(1)=v0;           % u=[u0 0 0 0 ... 0]
Para i=1 até n
    u(i+1)=u(i)+h*f(t(i),u(i),v(i));
    v(i+1)=v(i)+h*g(t(i),u(i),v(i))
Fim
```

▷ Algoritmo de transformação/redução de uma ED de ordem 2 numa SED de 1ª ordem

PVI de ordem 2

$$(P)\ \begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) & (1)\ \text{ED ordem 2} \\ t \in [a,b) & (2) \\ \begin{cases} y(a) = \beta \\ y'(a) = \alpha \end{cases} & (3)\ \text{CI} \end{cases}$$

$y(t_i) \simeq ?$

objetivo → $y = u$

PVI d SED 1ª ordem

$$(Q)\ \begin{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} & (4)\ \text{SED} \\ t \in [a,b) & (5) \\ \begin{cases} u(a) = u_0 \\ v(a) = v_0 \end{cases} & (6)\ \text{CI} \end{cases}$$

$u(t_i) \simeq ?$

$v(t_i) \simeq ?$

1º passo: (1) ⇝ (4)

1º Passo (1) ⇝ (4)

i) $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$ (1)

ii) Isolar a derivada de maior ordem de (1) no 1º membro

$$a_2 y'' = b(t) - a_1 y' - a_0 y \iff y'' = \frac{1}{a_2}\left(-a_0 y - a_1 y' + b(t)\right)$$

$$\iff y'' = -\frac{a_0}{a_2} y - \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{1}{a_2} b(t)$$

$$\iff y'' = a_3 y + a_4 y' + b(t) \quad (8)$$

iii) M. variáveis / fixar 2 novas variáveis

u e v ⟶

$y'' = a_3 y + a_4 y' + b(t)$ (8)

iii) $\begin{cases} u = y & (9) \\ v = y' & (10) \end{cases}$

2 Novas variáveis

M. variáveis para u e v

Derivar (9) e (10)

iv) $\begin{cases} u' = y' & (11) \\ v' = y'' & (12) \end{cases} \xrightarrow{(10)} \xrightarrow{(8),(9),(10)} \begin{cases} u' = v \\ v' = a_3 u + a_4 v + b(t) \end{cases}$ (13)

$\Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0u + 1v & + 0 \\ v' = a_3 u + a_4 v & + b(t) \end{cases}$ (14)

$\Leftrightarrow \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases}$ (15)

v) Nota: Curiosidade... (14) $\Rightarrow$ Equação matricial

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$W' = A * W + B$$

exponencial matriz

expm(A) ...

MATLAB

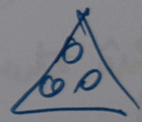
v) Novas condições iniciais em u e v

$y(a) = \beta \xrightarrow{(9)} u(a) = u_0 = \beta$

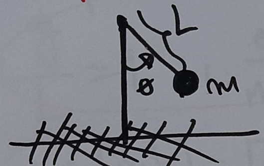
$y'(a) = \alpha \xrightarrow{10} v(a) = v_0 = \alpha$ (17)

V.i.)

$$\begin{cases} \begin{cases} u' = f(t,u,v) \\ v' = g(t,u,v) \end{cases} & (1)\ \text{SED} \\ t \in [a,b] & (2) \\ \begin{cases} u(a) = u_0 \\ v(a) = v_0 \end{cases} & (3)\ \text{CI} \end{cases}$$



Exemplo de Aplicação "Problema do Pêndulo"



$$\theta'' + \frac{c}{mL}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \quad (1)$$

Objetivo: determinar o deslocamento angular θ

Nota: (1) ED de ordem 2 homogénea e não linear

$$\neq \quad a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) \quad (2)$$

(2) m = massa, L = comprimento

g ≃ cte gravidade, c ≃ coef de amortecimento

(3) ⟶ Simplificar ...

Simplificando / considerar o seguinte:

$\frac{g}{L} = 1 \;,\; \frac{c}{mL} = 0.3$

$t \in [a,b] = [0, 15]$

$\theta \equiv y \longrightarrow y'' + \frac{c}{mL} y' + \frac{g}{L} \sin y = 0$ (2)

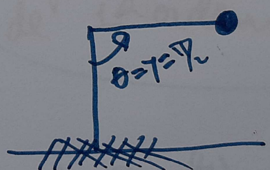
Para $t = 0$

$y(0) = \pi/2$

$y'(0) = 0$

posição

velocidade



$y'' + 0.3 y' + \sin y = 0$ (3)

(P) $\begin{cases} y'' + 0.3 y' + \sin y = 0 & (1)\ \text{ED} \\ t \in [0, 15] & (2) \\ \begin{cases} y(0) = \pi/2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} & (3)\ \text{CI} \end{cases}$

PVI de ordem 2

Objetivo é: $y(t) = ?$

Aplicar MN numéricos

(P) $\begin{cases} y'' + 0.3 y' + \sin y = 0 & (1)\ \text{ED} \\ t \in [0, 15] & (2) \\ \begin{cases} y(0) = \pi/2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} & (3)\ \text{CI} \end{cases}$

Transformar num PVI equivalente, mas com um SED de 1ª ordem

Algoritmo:

i) $y'' + 0.3 y' + \sin y = 0$ (4)

ii) Isolar y'' no 1º membro

$y'' = -\sin y - 0.3 y'$ (5)

iii) M. Variáveis / ~~ficam~~ 2 novas variáveis u, v

$$\begin{cases} u = y & (6) \\ v = y' & (7) \end{cases}$$

iv) Derivar (6) e (7)

$$\begin{cases} u' = y' & (8) \\ v' = y'' & (9) \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{(7)} \\ \xrightarrow[(5),(6),(7)]{} \end{matrix} \begin{cases} u' = v \\ v' = -\sin u - 0.3\,v \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\sin u - 0.3\,v \end{cases} \quad (10) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} u' = f(t, u, v) \\ v' = g(t, u, v) \end{cases}$$

com $f(t, u, v) = v$ (11)

e $g(t, u, v) = -\sin u - 0.3v$

v) Novas condições iniciais em u e v

$$\begin{matrix} y(0) = \pi/2 \xrightarrow{(6)} u(0) = \pi/2 \\ y'(0) = 0 \xrightarrow{(7)} v(0) = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} u(0) = \pi/2 = u_0 \\ v(0) = 0 = v_0 \end{cases} \quad (12)$$

vi)

$$(\theta) \begin{cases} \begin{cases} u' = v \\ v' = -\sin u - 0.3\,v \end{cases} \\ t \in [0, 15] \\ \begin{cases} u(0) = \pi/2 \\ v(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

(1) SED

(4)

(3) CI

Atividade 02

NEULER SED
NRK2
NRK4
⋮

$$\Leftrightarrow (\theta) \begin{cases} \begin{cases} u' = f(t, u, v) \\ v' = g(t, u, v) \end{cases} \\ t \in [a, b] \\ u(a) = u_0 \\ v(a) = v_0 \end{cases} \longrightarrow \ldots \rightarrow$$

Aplicar M. Numéricos

Para $u(t_i) \approx ?$ e $v(t_i) \approx ?$