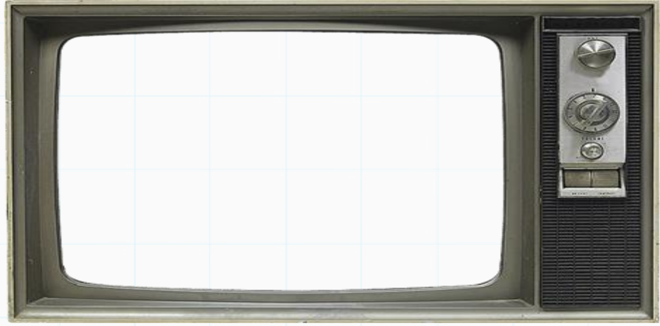
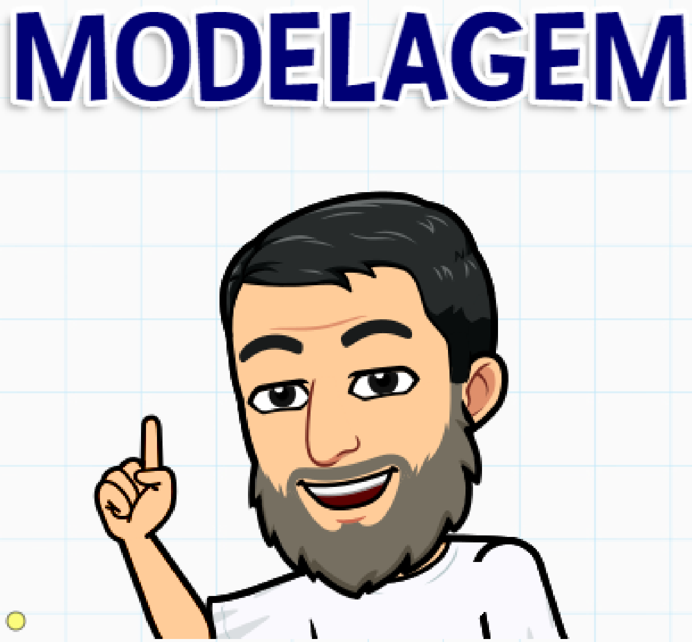
Modelagem

Professor : Yuri Frota

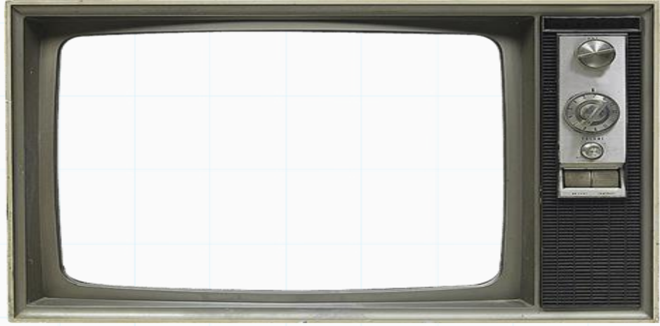
www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br





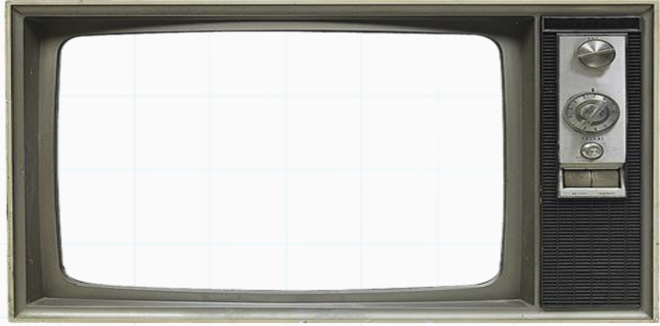
Vamos Modelar



- Problema da Plantação:

- Uma cooperativa agrícola opera 3 fazendas. A produção total de cada fazenda depende da área disponível para o plantio e da água para irrigação.

Vamos Modelar



- Problema da Plantação:

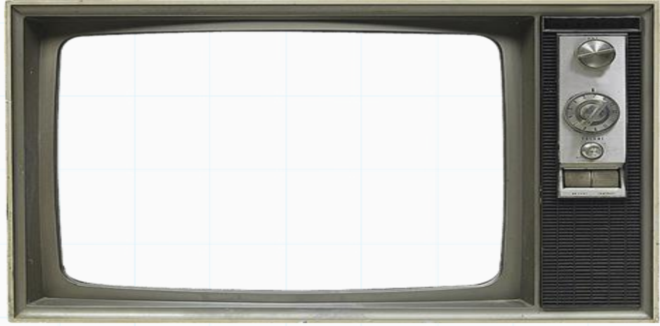
- Uma cooperativa agrícola opera 3 fazendas. A produção total de cada fazenda depende da área disponível para o plantio e da água para irrigação.
- A cooperativa procura diversificar sua produção e vai plantar esse ano 3 culturas em cada fazenda: <u>milho</u>, <u>arroz</u> e <u>feijão</u>.

Vamos Modelar

- Problema da Plantação:

- Uma cooperativa agrícola opera 3 fazendas. A produção total de cada fazenda depende da área disponível para o plantio e da água para irrigação.
- A cooperativa procura diversificar sua produção e vai plantar esse ano 3 culturas em cada fazenda: milho, arroz e feijão.
- Cada cultura demanda uma certa quantidade de água. São estabelecidos limites de área plantada em cada cultura. Para evitar concorrência entre os cooperados, acordou-se que a proporção de área cultivada seja a mesma para cada fazenda (i.e., se a fazenda 1 planta 60% de sua área total, as outras fazendas também vão plantar).

Vamos Modelar

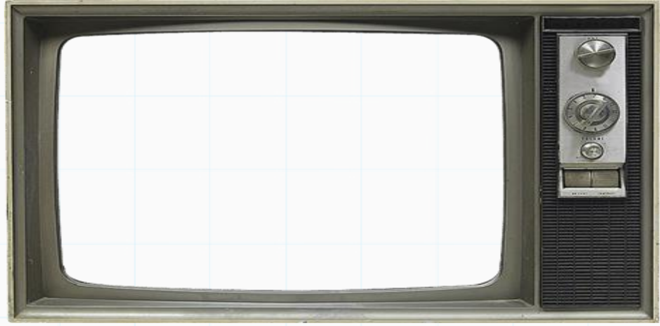


- Problema da Plantação:

- Uma cooperativa agrícola opera 3 fazendas. A produção total de cada fazenda depende da área disponível para o plantio e da água para irrigação.
- A cooperativa procura diversificar sua produção e vai plantar esse ano 3 culturas em cada fazenda: milho, arroz e feijão.
- Cada cultura demanda uma certa quantidade de água. São estabelecidos limites de área plantada em cada cultura. Para evitar concorrência entre os cooperados, acordou-se que a proporção de área cultivada seja a mesma para cada fazenda (i.e., se a fazenda 1 planta 60% de sua área total, as outras fazendas também vão plantar).

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

Vamos Modelar



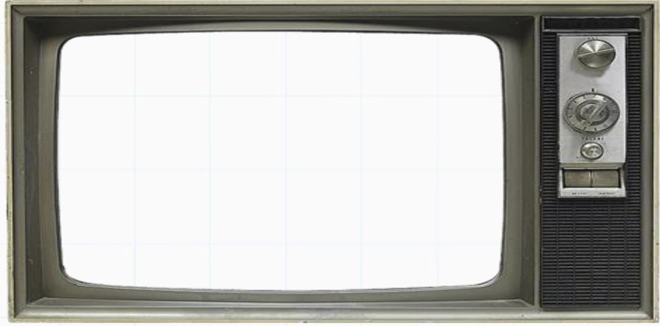
- Problema da Plantação:

- Uma cooperativa agrícola opera 3 fazendas. A produção total de cada fazenda depende da área disponível para o plantio e da água para irrigação.
- A cooperativa procura diversificar sua produção e vai plantar esse ano 3 culturas em cada fazenda: <u>milho</u>, <u>arroz</u> e <u>feijão</u>.
- Cada cultura demanda uma certa quantidade de água. São estabelecidos limites de área plantada em cada cultura. Para evitar concorrência entre os cooperados, acordou-se que a proporção de área cultivada seja a mesma para cada fazenda (i.e., se a fazenda 1 planta 60% de sua área total, as outras fazendas também vão plantar).

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



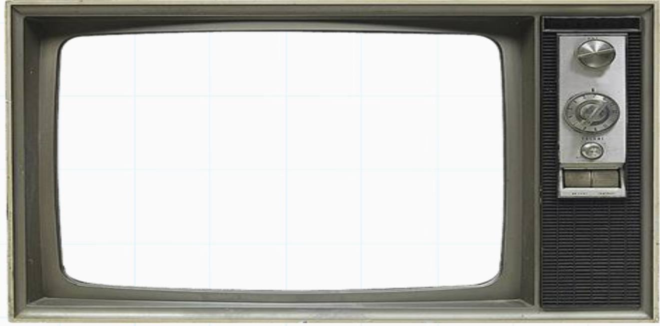
- Problema da Plantação:

- Uma cooperativa agrícola opera 3 fazendas. A produção total de cada fazenda depende da área disponível para o plantio e da água para irrigação.
- A cooperativa procura diversificar sua produção e vai plantar esse ano 3 culturas em cada fazenda: milho, arroz e feijão.
- Cada cultura demanda uma certa quantidade de água. São estabelecidos limites de área plantada em cada cultura. Para evitar concorrência entre os cooperados, acordou-se que a proporção de área cultivada seja a mesma para cada fazenda (i.e., se a fazenda 1 planta 60% de sua área total, as outras fazendas também vão plantar).
- Determine a área plantada de cada cultura em cada fazenda de modo a otimizar o lucro da cooperativa de acordo com as tabelas abaixo

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar

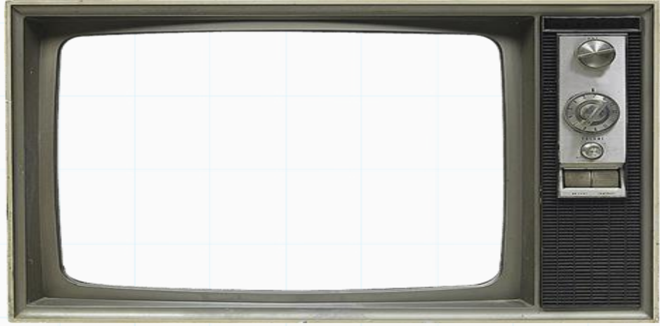


- Variáveis de Decisão:

Ao escolher suas variáveis, leve em consideração como a solução deve ser representada !

- Determine a área plantada de cada cultura em cada fazenda de modo a otimizar o lucro da cooperativa de acordo com as tabelas abaixo

Vamos Modelar

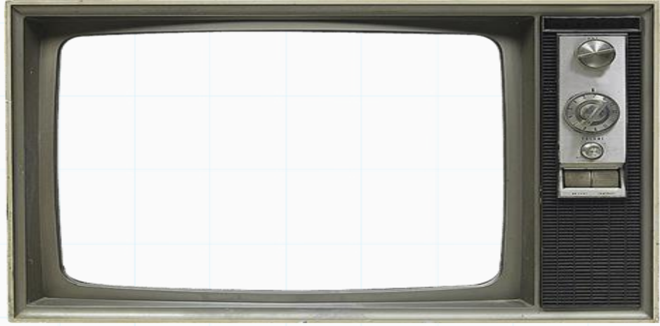


- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

Ao escolher suas variáveis, leve em consideração como a solução deve ser representada !

- Determine a área plantada de cada cultura em cada fazenda de modo a otimizar o lucro da cooperativa de acordo com as tabelas abaixo

Vamos Modelar

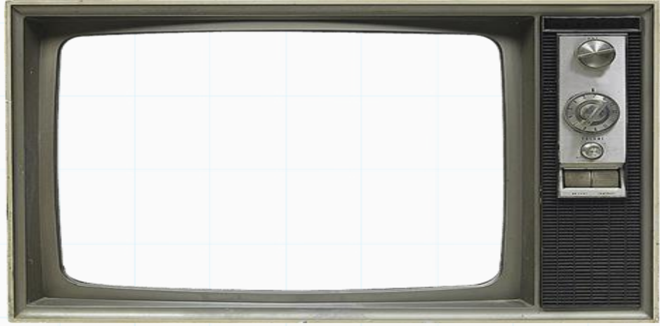


- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

Vamos Modelar

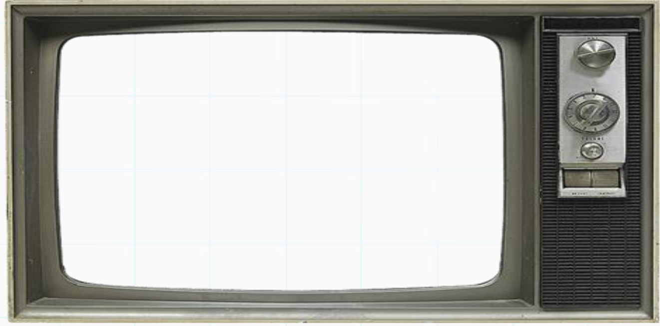


- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$ Fazenda 1

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

Vamos Modelar

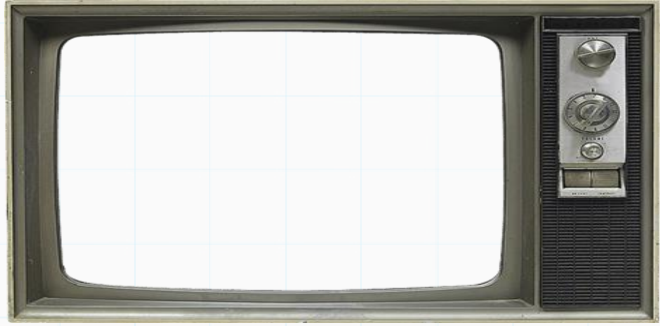


- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$ Fazenda 1
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$ Fazenda 2
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$ Fazenda 3

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

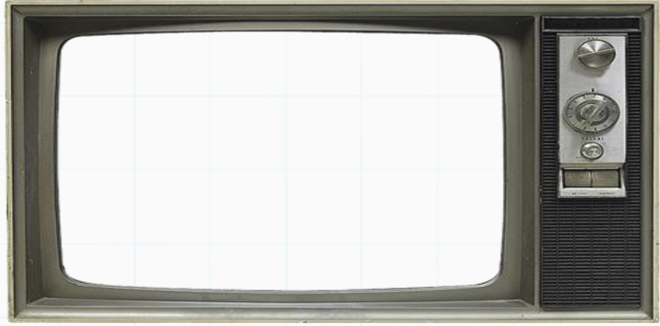
- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo

Fazenda 1

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



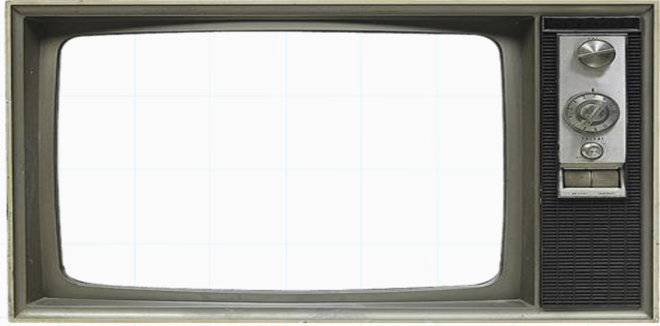
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5{,}5X_{1m} + 4X_{1a} + 3{,}5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



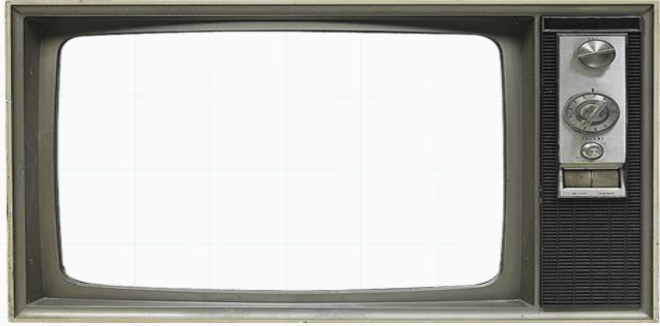
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5{,}5X_{1m} + 4X_{1a} + 3{,}5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5{,}5X_{2m} + 4X_{2a} + 3{,}5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



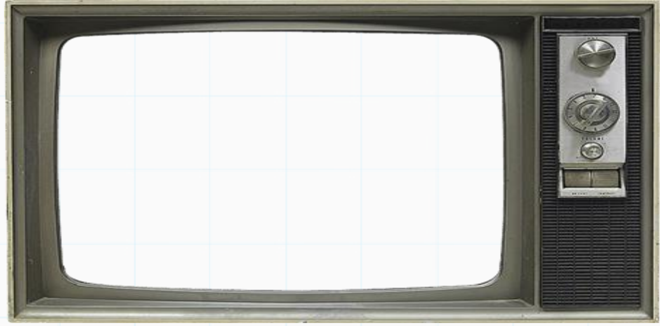
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5,5X_{1m} + 4X_{1a} + 3,5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5,5X_{2m} + 4X_{2a} + 3,5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2
    - $5,5X_{3m} + 4X_{3a} + 3,5X_{3f} <= 950$ Fazenda 3

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

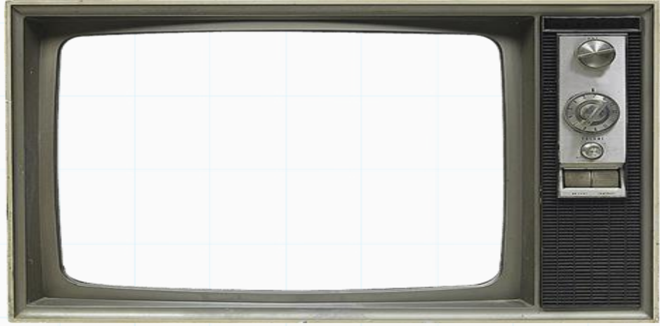
- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5,5X_{1m} + 4X_{1a} + 3,5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5,5X_{2m} + 4X_{2a} + 3,5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2
    - $5,5X_{3m} + 4X_{3a} + 3,5X_{3f} <= 950$ Fazenda 3
  - Plantio máximo por cultura

Milho

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



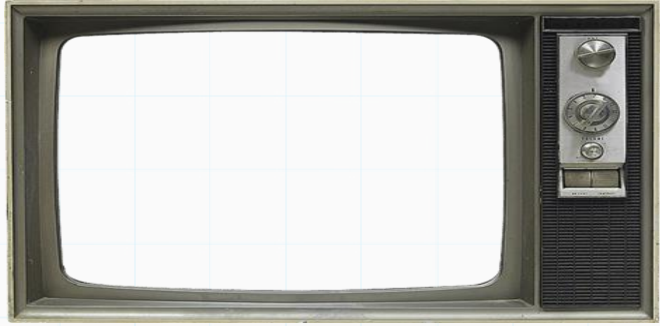
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <=400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <=650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <=350$
  - Consumo de água máximo
    - $5{,}5X_{1m} + 4X_{1a} + 3{,}5X_{1f} <=1800$ Fazenda 1
    - $5{,}5X_{2m} + 4X_{2a} + 3{,}5X_{2f} <=2200$ Fazenda 2
    - $5{,}5X_{3m} + 4X_{3a} + 3{,}5X_{3f} <=950$ Fazenda 3
  - Plantio máximo por cultura
    - $X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} <=660$ Milho

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



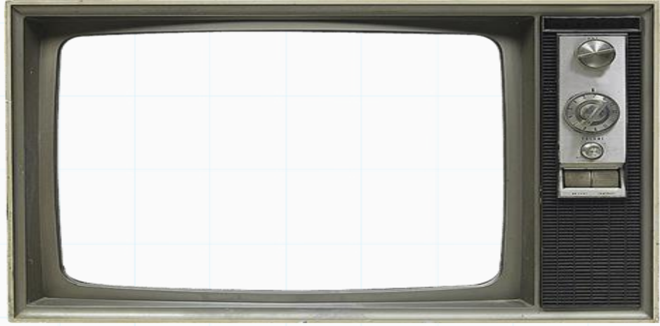
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5{,}5X_{1m} + 4X_{1a} + 3{,}5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5{,}5X_{2m} + 4X_{2a} + 3{,}5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2
    - $5{,}5X_{3m} + 4X_{3a} + 3{,}5X_{3f} <= 950$ Fazenda 3
  - Plantio máximo por cultura
    - $X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} <= 660$ Milho
    - $X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} <= 880$ Arroz

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



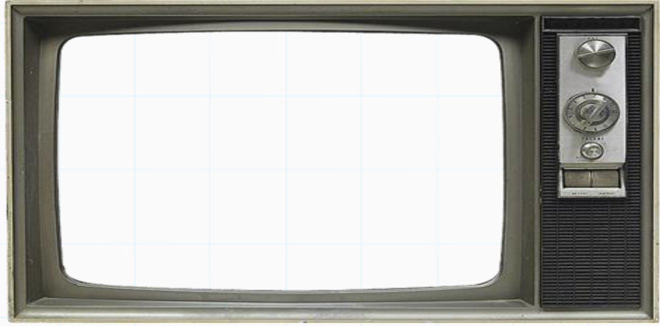
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5{,}5X_{1m} + 4X_{1a} + 3{,}5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5{,}5X_{2m} + 4X_{2a} + 3{,}5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2
    - $5{,}5X_{3m} + 4X_{3a} + 3{,}5X_{3f} <= 950$ Fazenda 3
  - Plantio máximo por cultura
    - $X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} <= 660$ Milho
    - $X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} <= 880$ Arroz
    - $X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} <= 400$ Feijão

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



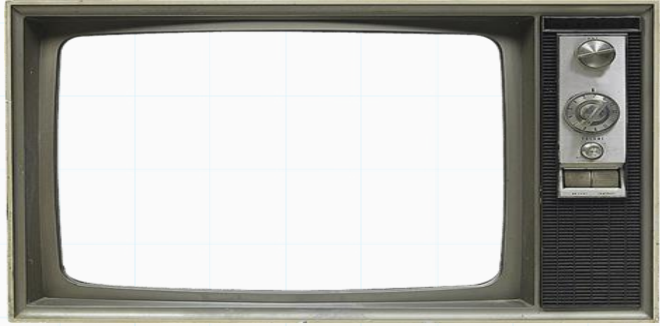
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5{,}5X_{1m} + 4X_{1a} + 3{,}5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5{,}5X_{2m} + 4X_{2a} + 3{,}5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2
    - $5{,}5X_{3m} + 4X_{3a} + 3{,}5X_{3f} <= 950$ Fazenda 3
  - Plantio máximo por cultura
    - $X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} <= 660$ Milho
    - $X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} <= 880$ Arroz
    - $X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} <= 400$ Feijão
  - Proporção de área plantada

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



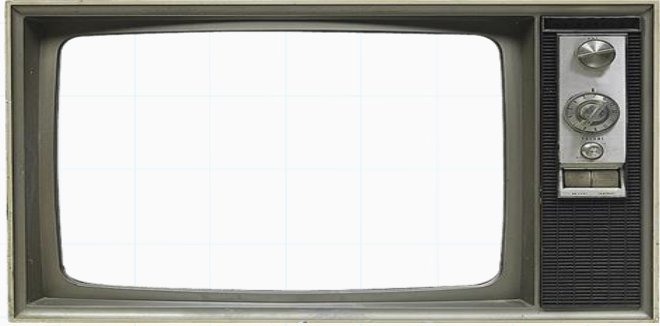
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5,5X_{1m} + 4X_{1a} + 3,5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5,5X_{2m} + 4X_{2a} + 3,5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2
    - $5,5X_{3m} + 4X_{3a} + 3,5X_{3f} <= 950$ Fazenda 3
  - Plantio máximo por cultura
    - $X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} <= 660$ Milho
    - $X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} <= 880$ Arroz
    - $X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} <= 400$ Feijão
  - Proporção de área plantada
    - $(X_{1m} + X_{1a} + X_{1f})/400 = (X_{2m} + X_{2a} + X_{2f})/650$

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



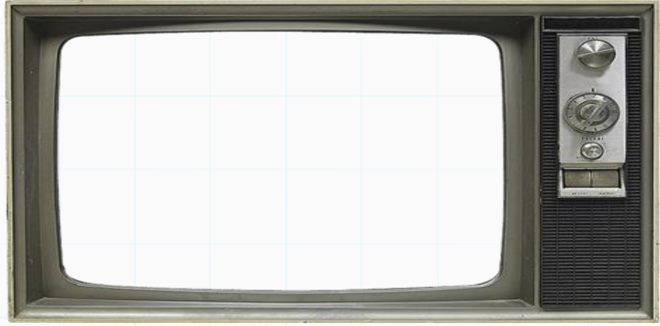
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5{,}5X_{1m} + 4X_{1a} + 3{,}5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5{,}5X_{2m} + 4X_{2a} + 3{,}5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2
    - $5{,}5X_{3m} + 4X_{3a} + 3{,}5X_{3f} <= 950$ Fazenda 3
  - Plantio máximo por cultura
    - $X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} <= 660$ Milho
    - $X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} <= 880$ Arroz
    - $X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} <= 400$ Feijão
  - Proporção de área plantada
    - $(X_{1m} + X_{1a} + X_{1f})/400 = (X_{2m} + X_{2a} + X_{2f})/650$
    - $(X_{2m} + X_{2a} + X_{2f})/650 = (X_{3m} + X_{3a} + X_{3f})/350$

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

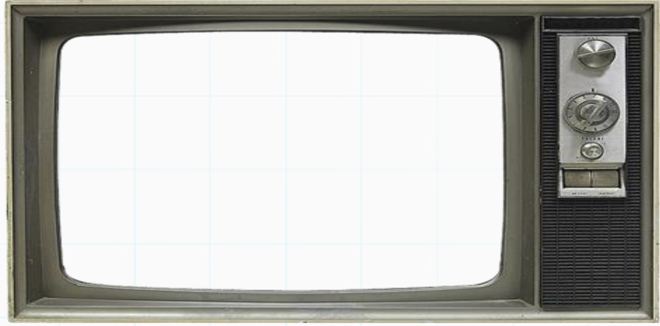
- Restrições
  - Área de cada fazenda
    - $X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$
    - $X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$
    - $X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$
  - Consumo de água máximo
    - $5,5X_{1m} + 4X_{1a} + 3,5X_{1f} <= 1800$ Fazenda 1
    - $5,5X_{2m} + 4X_{2a} + 3,5X_{2f} <= 2200$ Fazenda 2
    - $5,5X_{3m} + 4X_{3a} + 3,5X_{3f} <= 950$ Fazenda 3
  - Plantio máximo por cultura
    - $X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} <= 660$ Milho
    - $X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} <= 880$ Arroz
    - $X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} <= 400$ Feijão
  - Proporção de área plantada
    - $(X_{1m} + X_{1a} + X_{1f})/400 = (X_{2m} + X_{2a} + X_{2f})/650$
    - $(X_{2m} + X_{2a} + X_{2f})/650 = (X_{3m} + X_{3a} + X_{3f})/350$

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

e não negatividade -> $X_{ij} >= 0$, i={1,2,3} e j={m,a,f}

Vamos Modelar



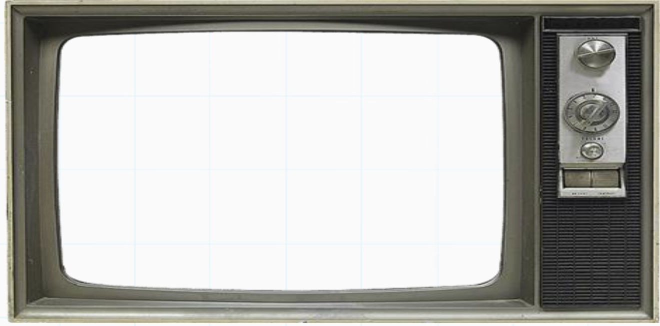
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Função objetivo:

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



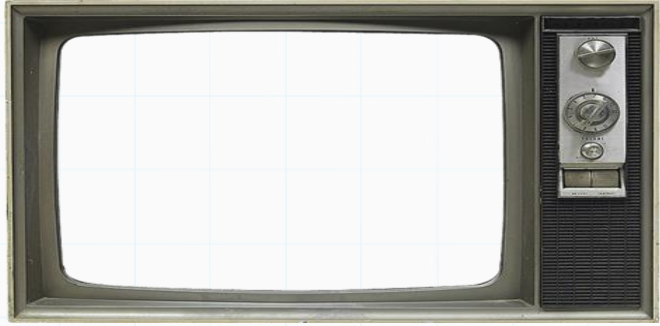
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Área da fazenda i={1,2,3} destinado ao plantio da cultura j={m,a,f}

- Função objetivo:
  - MAX $5000(X_{1m} + X_{2m} + X_{3m}) + 4000(X_{1a} + X_{2a} + X_{3a}) + 1800(X_{1f} + X_{2f} + X_{3f})$

Fazenda	Área(acres)	Água(l)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

	Área Max	Água (l por acre)	Lucro (por acre)
Milho	660	5,5	5000
Arroz	880	4	4000
Feijão	400	3,5	1800

Vamos Modelar



- Modelo completo

$$\text{MAX } 5000(X_{1m} + X_{2m} + X_{3m}) + 4000(X_{1a} + X_{2a} + X_{3a}) + 1800(X_{1f} + X_{2f} + X_{3f})$$

Sujeito a

$$X_{1m} + X_{1a} + X_{1f} <= 400$$
$$X_{2m} + X_{2a} + X_{2f} <= 650$$
$$X_{3m} + X_{3a} + X_{3f} <= 350$$

Área Total

$$5,5X_{1m} + 4X_{1a} + 3,5X_{1f} <= 1800$$
$$5,5X_{2m} + 4X_{2a} + 3,5X_{2f} <= 2200$$
$$5,5X_{3m} + 4X_{3a} + 3,5X_{3f} <= 950$$

Água

$$X_{1m} + X_{2m} + X_{3m} <= 660$$
$$X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} <= 880$$
$$X_{1f} + X_{2f} + X_{3f} <= 400$$

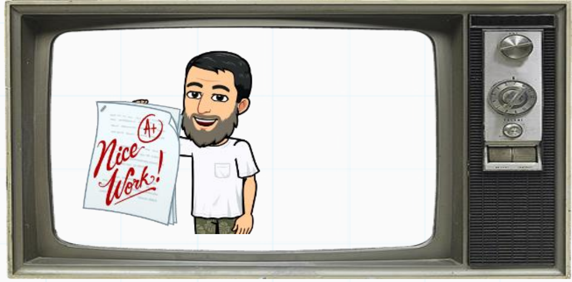
Área por grão

$$(X_{1m} + X_{1a} + X_{1f})/400 = (X_{2m} + X_{2a} + X_{2f})/650$$
$$(X_{2m} + X_{2a} + X_{2f})/650 = (X_{3m} + X_{3a} + X_{3f})/350$$

Proporção

$$X_{ij} >= 0, i=\{1,2,3\} \text{ e } j=\{m,a,f\}$$

Exercícios



- <u>Problema da mistura de petróleos</u>:
  - Uma refinaria processa vários tipos de petróleo. Cada tipo de petróleo possui uma planilha de custos diferentes, expressando condições de transporte e preços na origem. Cada tipo de petróleo representa uma configuração diferente de subprodutos para a gasolina.
  - Na medida em que cada tipo de petróleo é utilizado na mistura para produção de gasolina, é possível programar a octanagem e outros requisitos de cada tipo de gasolina produzida. Estes requisitos definem o tipo de gasolina obtida.
  - Como obter uma solução que define a mistura dos tipos de petróleo de modo a maximizar o lucro obtido (diferença entre as vendas e o custo de petróleo). Suponha que toda produção é vendida.

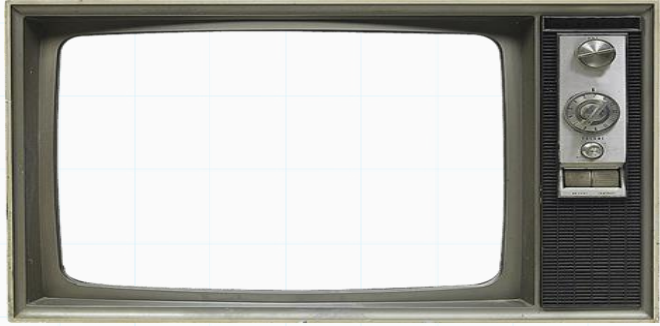
Petr.	Dispo. (barril)	Custo (por barril)
P1	3500	19
P2	2200	24
P3	4200	20
P4	1800	27

Dada as variáveis:
x_{ij}: quantidade de barris de petróleo do tipo i=1,2,3,4 destinados à produção de gasolina do tipo j=1,2,3 (isso vai dar a qtd. de barris da gasolina)

1) Restrições associadas à quantidade de petróleo disponível
2) Restrições associadas às especificações da mistura
   Ex: Total de barris de gasolina amarela não pode ter mais que 70% De barris de P1
3) Restrições de não-negatividade
4) F.O. = lucro bruto – custo
   Lucro bruto = venda dos barris de gasolina
   Custo = custo dos barris usados para produzir a gasolina

Gas.	Espec.	Preço (barril)
Super	Não mais que 30% de P1	35
	Não menos que 40% de P2	
	Não mais que 50% de P3	
Azul	Não mais que 30% de P1	28
	Não menos que 10% de P2	
Amarela	Não mais que 70% de P1	22

Vamos Modelar



- Problema de transporte:

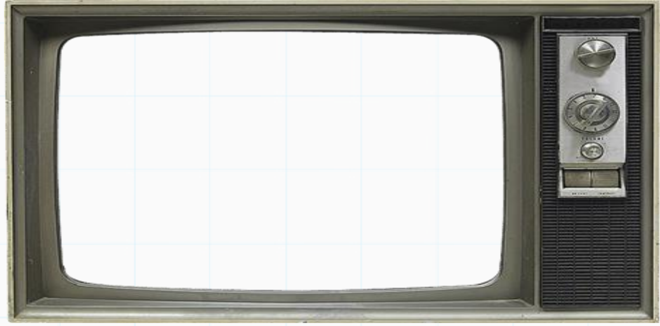
1 1

2 2

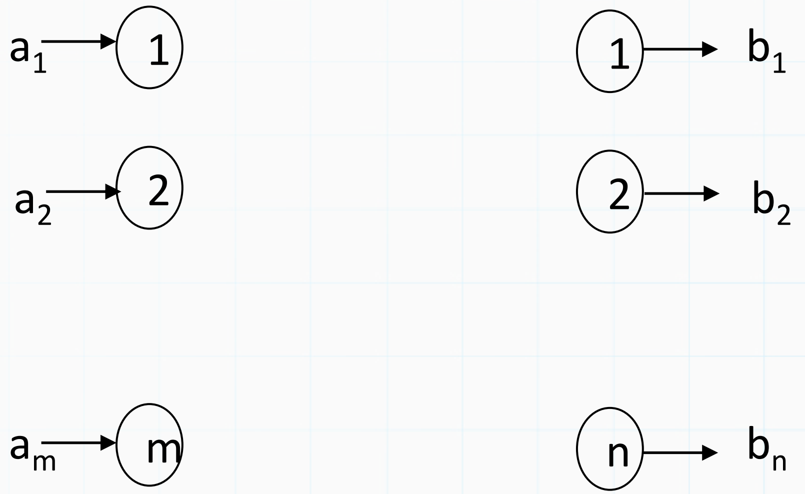
m n

- Uma empresa produz um determinado produto em m fábricas distintas e afastadas, para atender a demanda de n cidades diferentes.

Vamos Modelar



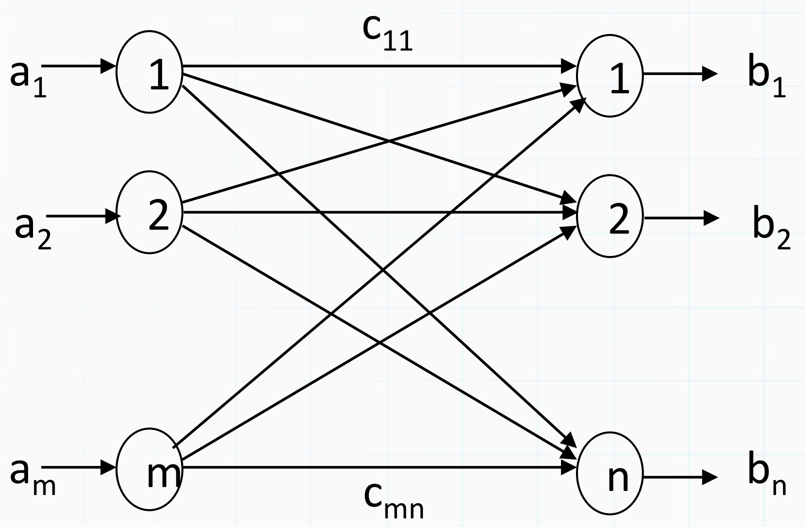
- Problema de transporte:



- Uma empresa produz um determinado produto em $\underline{m}$ fábricas distintas e afastadas, para atender a demanda de $\underline{n}$ cidades diferentes.
- A capacidade de produção da fábrica i é no máximo igual a $\underline{a_i}$, i=1,...,m. A demanda da cidade j é igual a $\underline{b_j}$, j=1,..,n.

Vamos Modelar

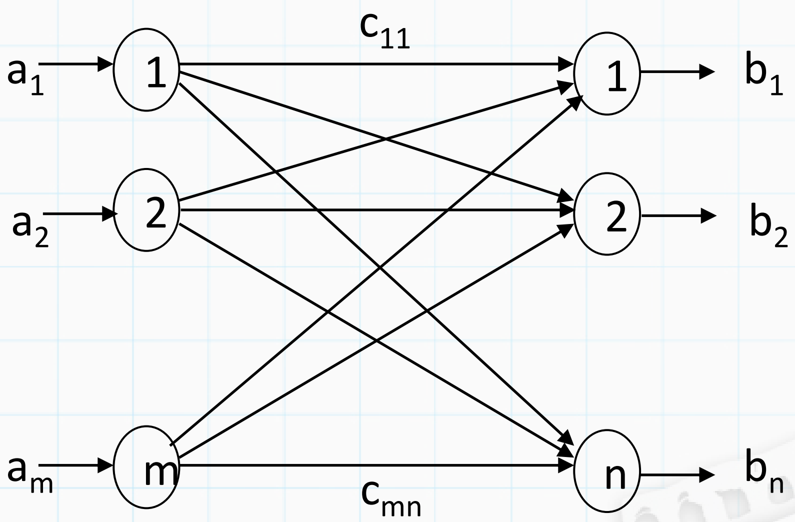
- Problema de transporte:



- Uma empresa produz um determinado produto em m fábricas distintas e afastadas, para atender a demanda de n cidades diferentes.
- A capacidade de produção da fábrica i é no máximo igual a a_i, i=1,...,m. A demanda da cidade j é igual a b_j, j=1,..,n.
- Sabendo-se que o custo de envio de uma unidade do produto da fábrica i para a cidade j é igual a c_{ij}, determinar a quantidade que deve ser enviada de cada fábrica para cada cidade, de modo a minimizar os custos de transporte desta empresa.

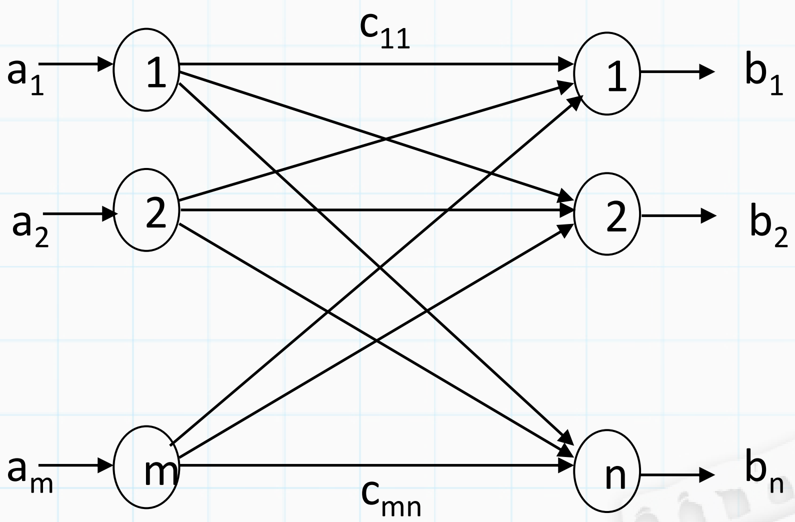
Vamos Modelar

- Variáveis de Decisão:

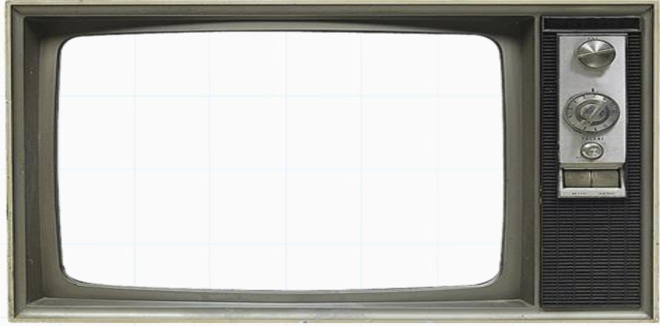


Vamos Modelar

- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j

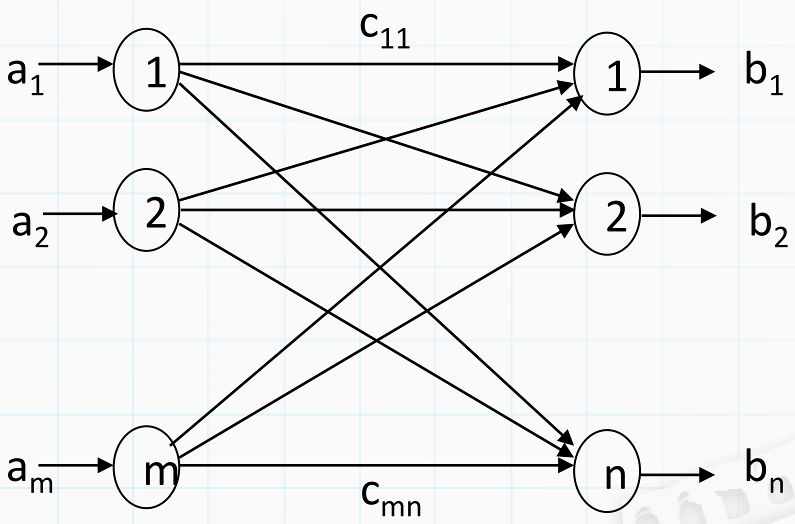


Vamos Modelar



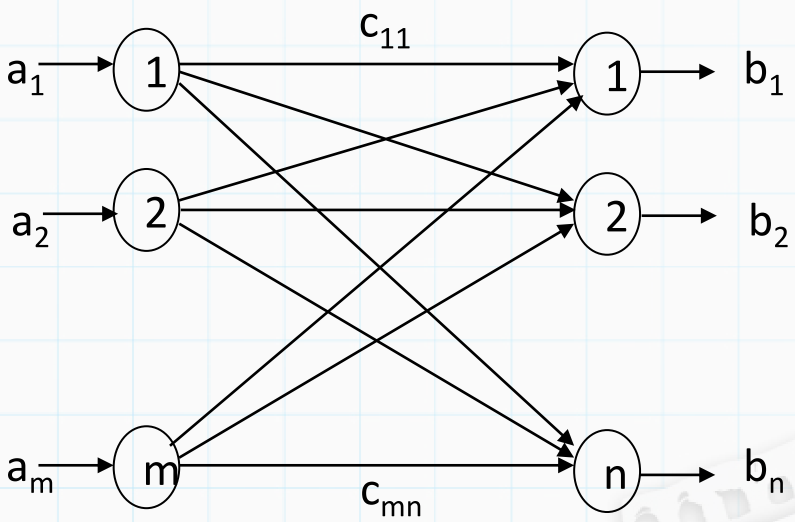
- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas

Fábrica 1

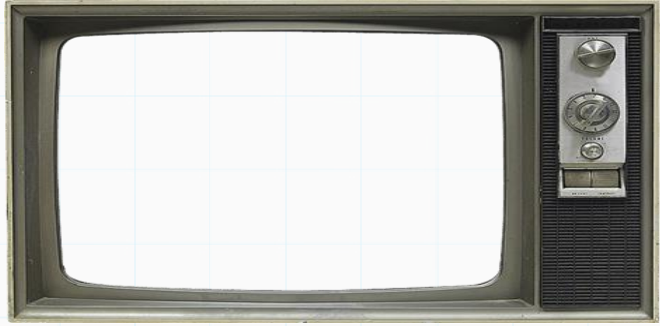


Vamos Modelar

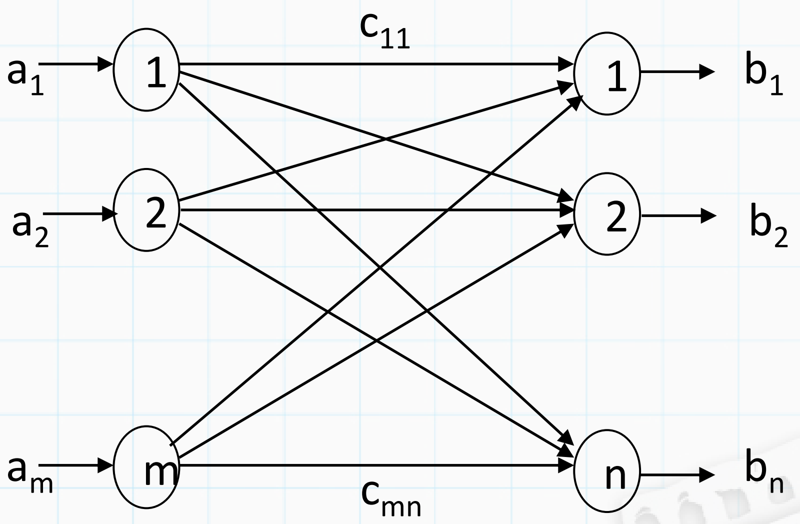
- Variáveis de Decisão:
    - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
    - Fábricas
        - $x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$ Fábrica 1



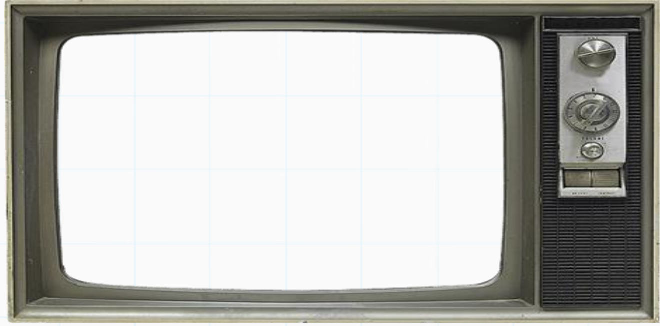
Vamos Modelar



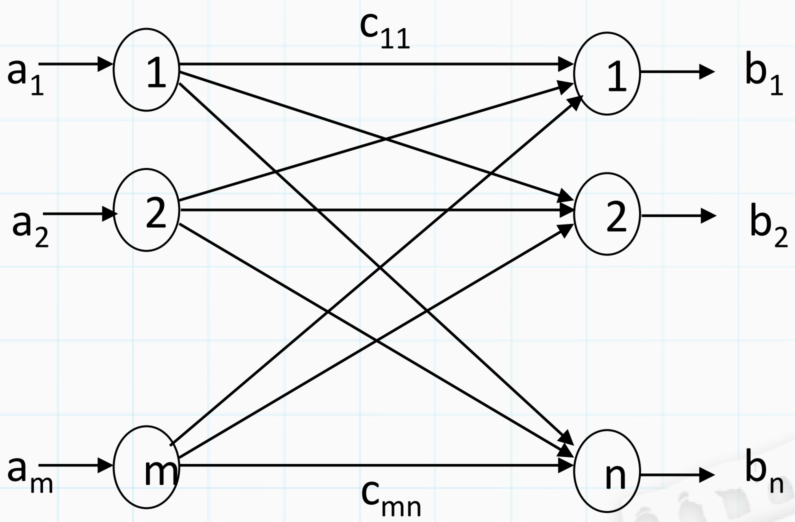
- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \ldots x_{1n} <= a_1$ Fábrica 1
    - $x_{21} + x_{22} + \ldots x_{2n} <= a_2$ Fábrica 2



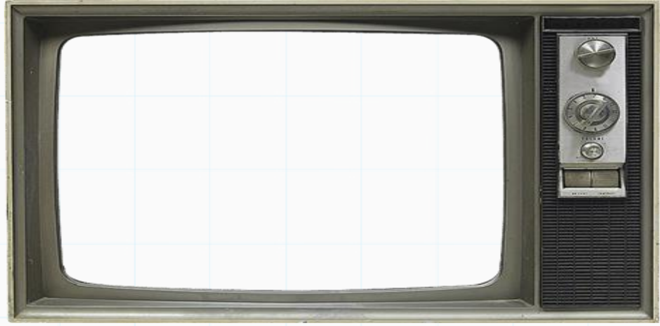
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \ldots x_{1n} <= a_1$ Fábrica 1
    - $x_{21} + x_{22} + \ldots x_{2n} <= a_2$ Fábrica 2
    - …
    - $x_{m1} + x_{m2} + \ldots x_{mn} <= a_m$ Fábrica m

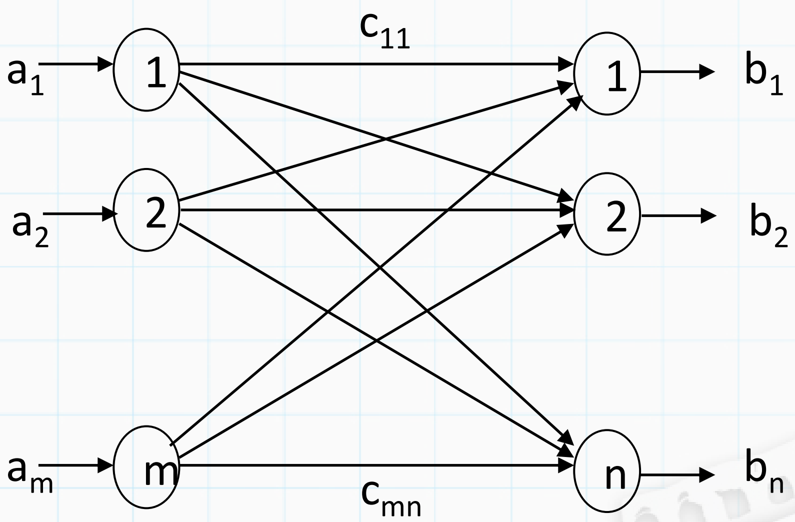


Vamos Modelar

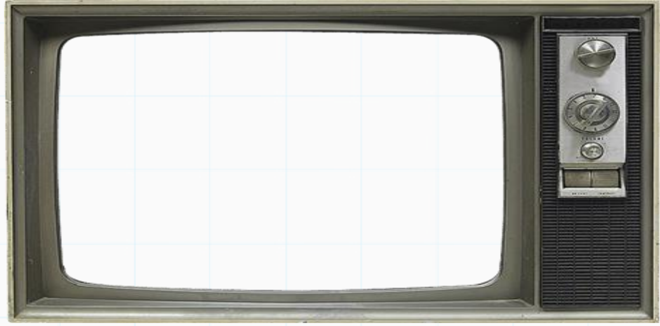


- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$ — Fábrica 1
    - $x_{21} + x_{22} + \dots x_{2n} <= a_2$ — Fábrica 2
    - …
    - $x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mn} <= a_m$ — Fábrica m
  - Cidades

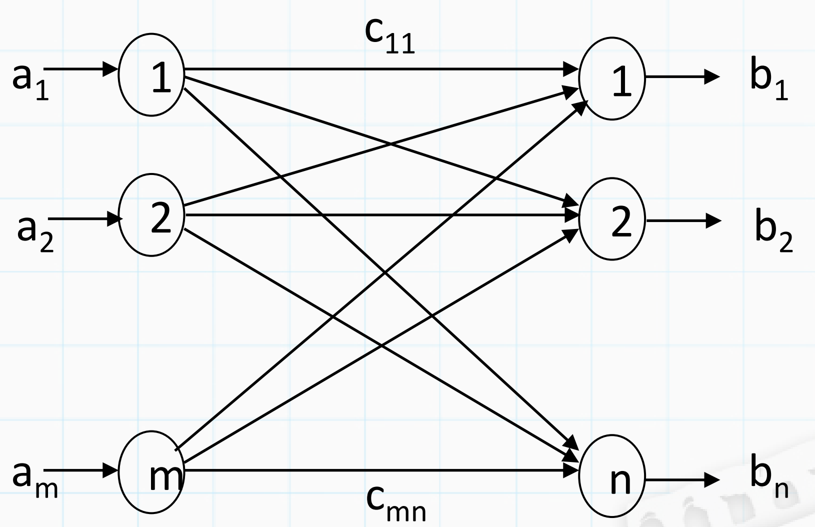
Cidade 1



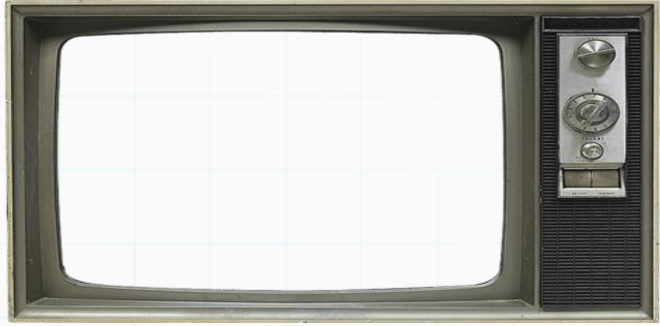
Vamos Modelar



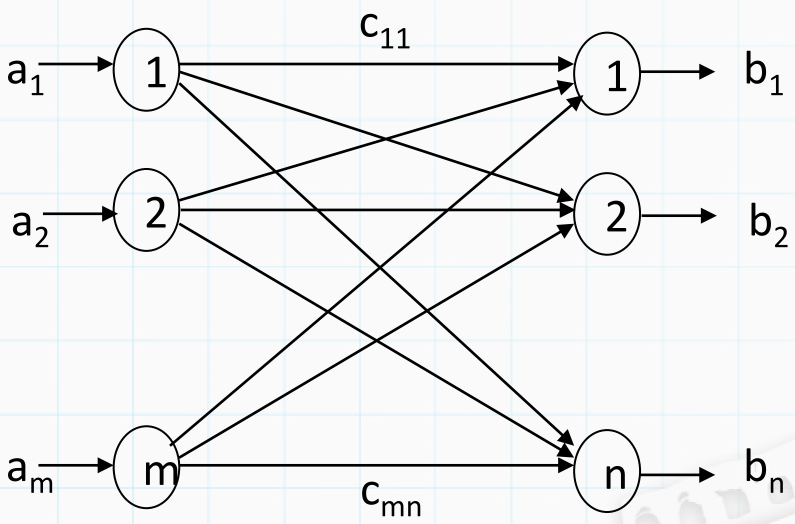
- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$ Fábrica 1
    - $x_{21} + x_{22} + \dots x_{2n} <= a_2$ Fábrica 2
    - …
    - $x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mn} <= a_m$ Fábrica m
  - Cidades
    - $x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} = b_1$ Cidade 1



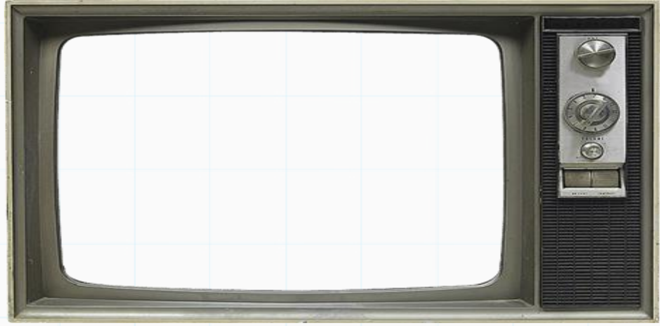
Vamos Modelar



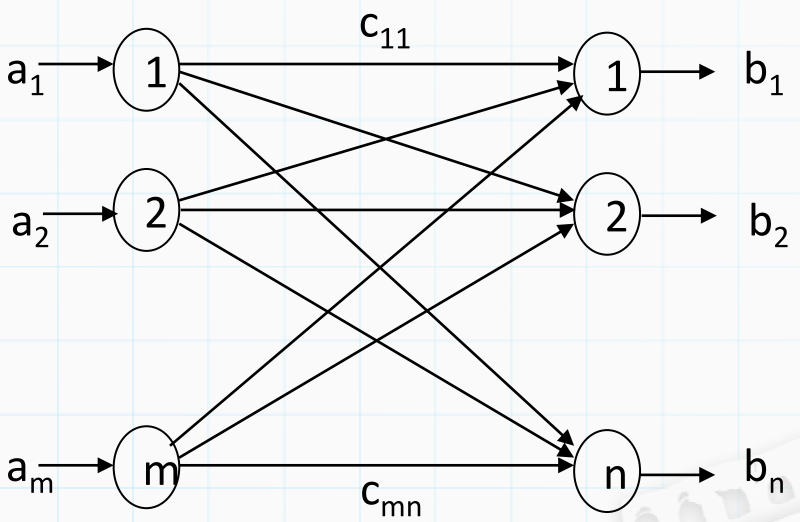
- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$ Fábrica 1
    - $x_{21} + x_{22} + \dots x_{2n} <= a_2$ Fábrica 2
    - …
    - $x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mn} <= a_m$ Fábrica m
  - Cidades
    - $x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} = b_1$ Cidade 1
    - $x_{12} + x_{22} + \dots x_{m2} = b_2$ Cidade 2



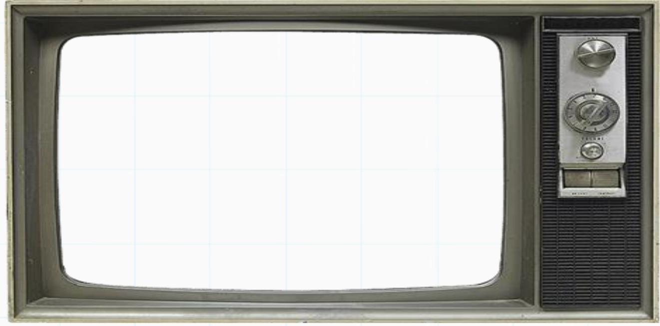
Vamos Modelar



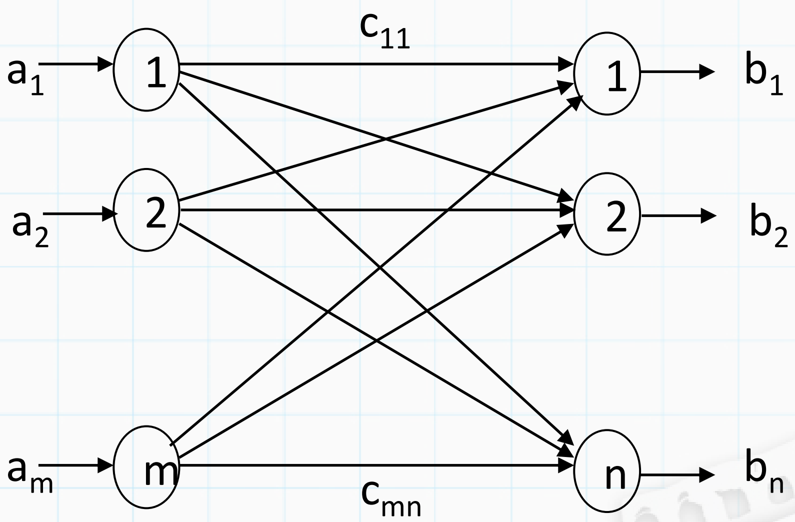
- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$ Fábrica 1
    - $x_{21} + x_{22} + \dots x_{2n} <= a_2$ Fábrica 2
    - …
    - $x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mn} <= a_m$ Fábrica m
  - Cidades
    - $x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} = b_1$ Cidade 1
    - $x_{12} + x_{22} + \dots x_{m2} = b_2$ Cidade 2
    - …
    - $x_{1n} + x_{2n} + \dots x_{mn} = b_n$ Cidade n



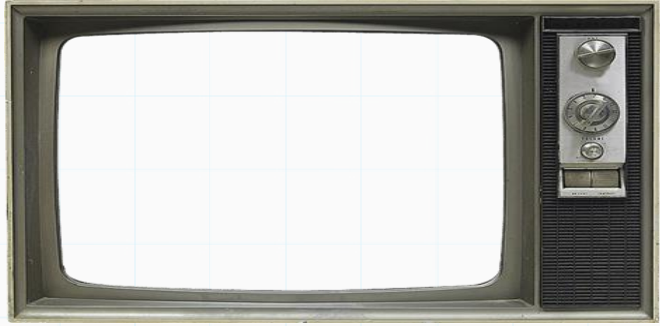
Vamos Modelar



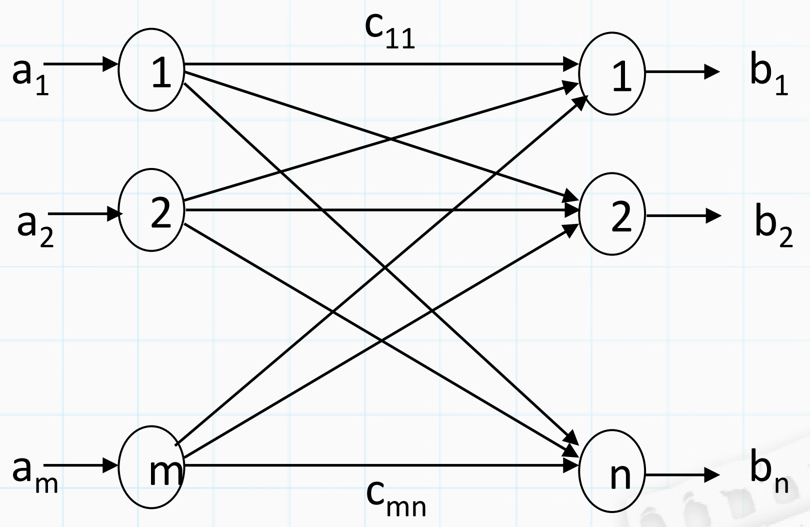
- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$
    - $x_{21} + x_{22} + \dots x_{2n} <= a_2$
    - …
    - $x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mn} <= a_m$
  - Cidades
    - $x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} = b_1$
    - $x_{12} + x_{22} + \dots x_{m2} = b_2$
    - …
    - $x_{1n} + x_{2n} + \dots x_{mn} = b_n$
  - Não negatividade
    - $x_{ij}>=0$, para toda fábrica i e para a cidade j



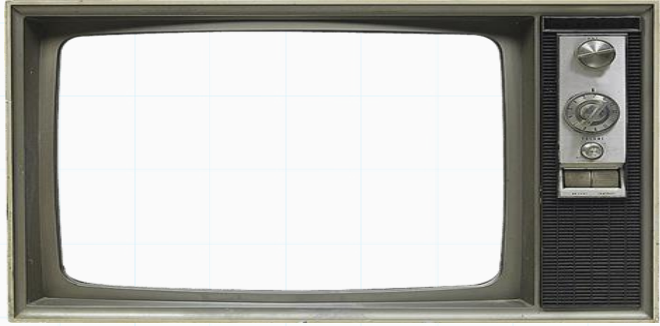
Vamos Modelar



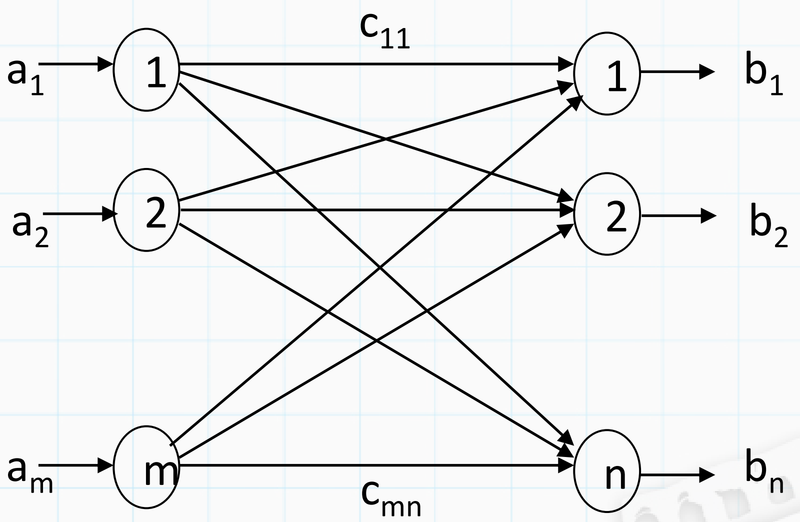
- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$
    - $x_{21} + x_{22} + \dots x_{2n} <= a_2$
    - …
    - $x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mn} <= a_m$
  - Cidades
    - $x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} = b_1$
    - $x_{12} + x_{22} + \dots x_{m2} = b_2$
    - …
    - $x_{1n} + x_{2n} + \dots x_{mn} = b_n$
  - Não negatividade
    - $x_{ij}>=0$, para toda fábrica i e para a cidade j
- Função objetivo:



Vamos Modelar

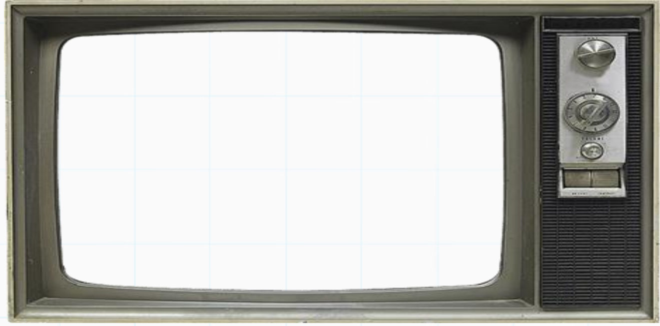


- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: quantidade enviada da fábrica i para a cidade j
- Restrições:
  - Fábricas
    - $x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$
    - $x_{21} + x_{22} + \dots x_{2n} <= a_2$
    - …
    - $x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mn} <= a_m$
  - Cidades
    - $x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} = b_1$
    - $x_{12} + x_{22} + \dots x_{m2} = b_2$
    - …
    - $x_{1n} + x_{2n} + \dots x_{mn} = b_n$
  - Não negatividade
    - $x_{ij}>=0$, para toda fábrica i e para a cidade j



- Função objetivo:
  - MIN $c_{11} x_{11} + \dots + c_{1n} x_{1n} + \dots + c_{m1} x_{m1} + \dots. + c_{mn} x_{mn}$

Vamos Modelar



- Modelo completo

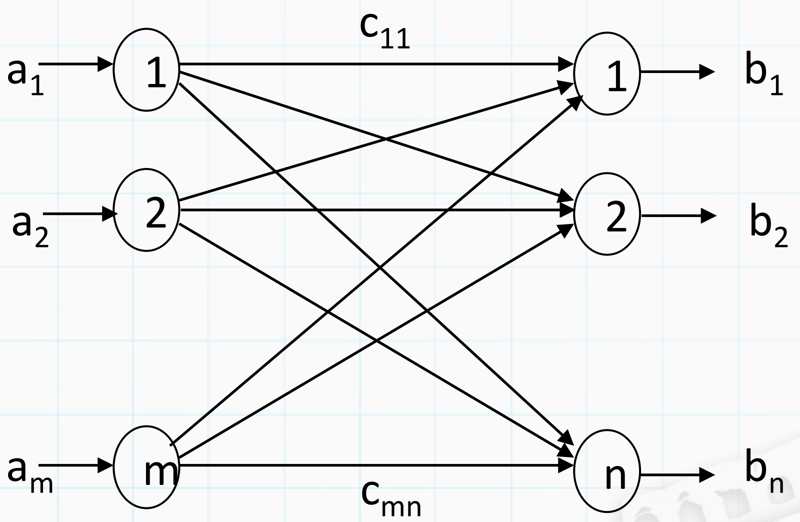
  MIN $c_{11} x_{11} + \dots + c_{1n} x_{1n} + \dots + c_{m1} x_{m1} + \dots. + c_{mn} x_{mn}$

  Sujeito a:

$$x_{11} + x_{12} + \dots x_{1n} <= a_1$$
$$x_{21} + x_{22} + \dots x_{2n} <= a_2$$
$$\dots$$
$$x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mn} <= a_m$$

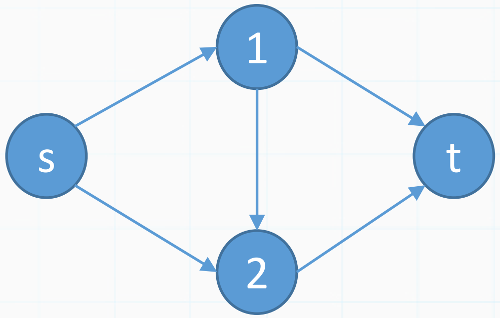
$$x_{11} + x_{21} + \dots x_{m1} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} + \dots x_{m2} = b_2$$
$$\dots$$
$$x_{1n} + x_{2n} + \dots x_{mn} = b_n$$

$x_{ij}>=0$, para toda fábrica i e para a cidade j



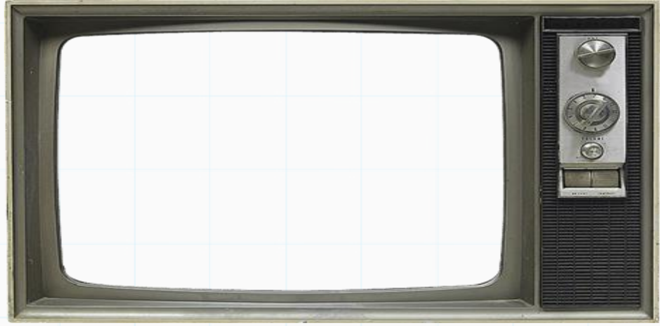
Vamos Modelar

- Problema do fluxo máximo:

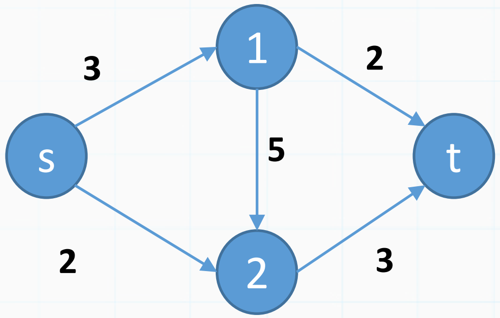


- Um produtor de gás natural (s) precisa enviar a maior quantidade de gás para a fábrica t através dos dutos.

Vamos Modelar



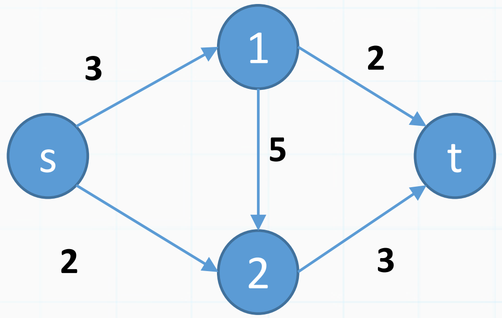
- Problema do fluxo máximo:



- Um produtor de gás natural (s) precisa enviar a maior quantidade de gás para a fábrica t através dos dutos.
- Cada duto ij é direcionado (o gás passa somente numa direção) e possui uma capacidade associada

Vamos Modelar

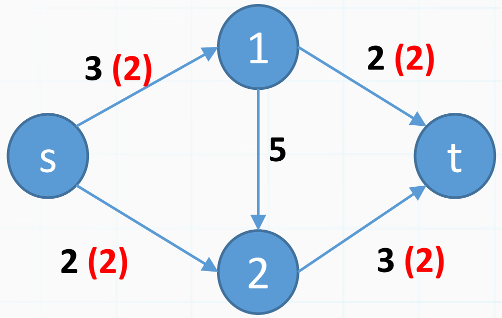
- Problema do fluxo máximo:



- Um produtor de gás natural (s) precisa enviar a maior quantidade de gás para a fábrica t através dos dutos.
- Cada duto ij é direcionado (o gás passa somente numa direção) e possui uma capacidade associada
- Qual o fluxo de gás que deve ser feito para maximizar a quantidade de gás que chega em t ?

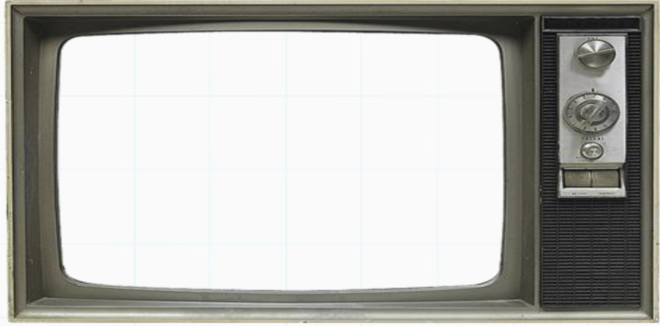
Vamos Modelar

- Problema do fluxo máximo:



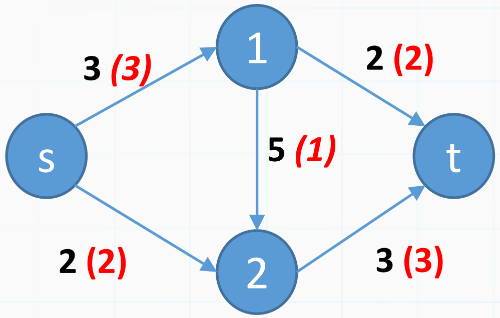
Sol1 = 4

- Um produtor de gás natural (s) precisa enviar a maior quantidade de gás para a fábrica t através dos dutos.
- Cada duto ij é direcionado (o gás passa somente numa direção) e possui uma capacidade associada
- Qual o fluxo de gás que deve ser feito para maximizar a quantidade de gás que chega em t ?



Vamos Modelar

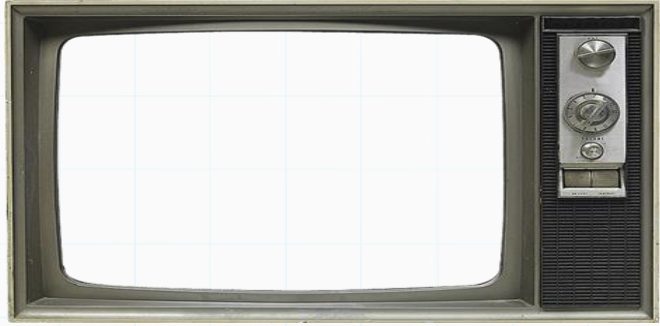
- Problema do fluxo máximo:



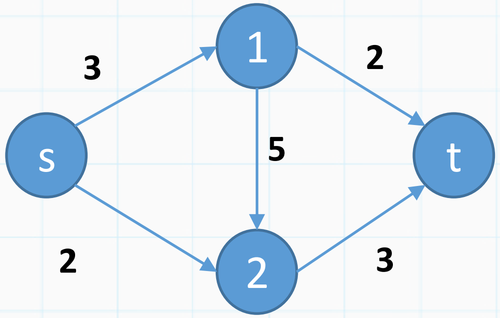
- Um produtor de gás natural (s) precisa enviar a maior quantidade de gás para a fábrica t através dos dutos.
- Cada duto ij é direcionado (o gás passa somente numa direção) e possui uma capacidade associada
- Qual o fluxo de gás que deve ser feito para maximizar a quantidade de gás que chega em t ?

Sol2 = 5

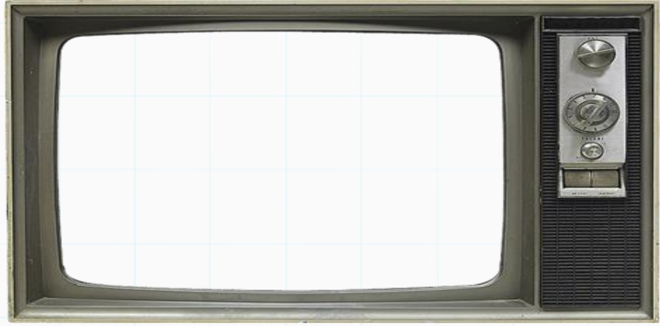
Vamos Modelar



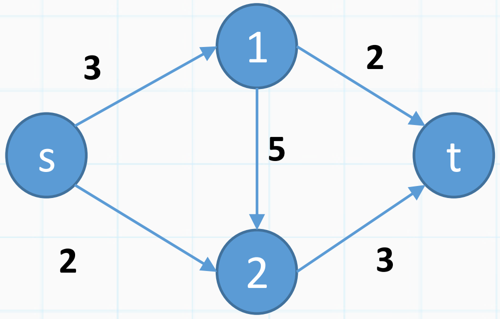
- Variáveis de Decisão:



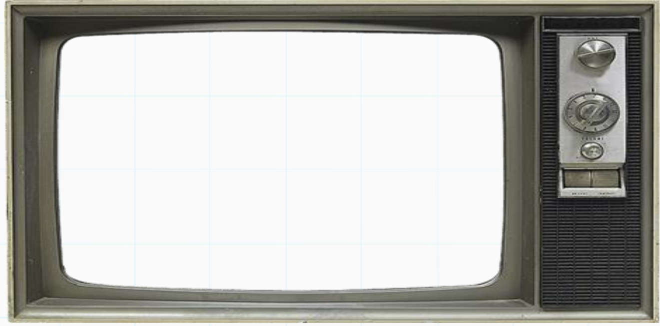
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

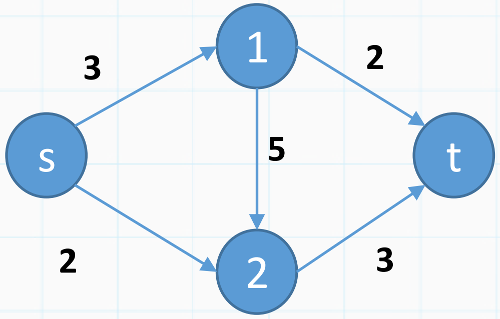


Vamos Modelar

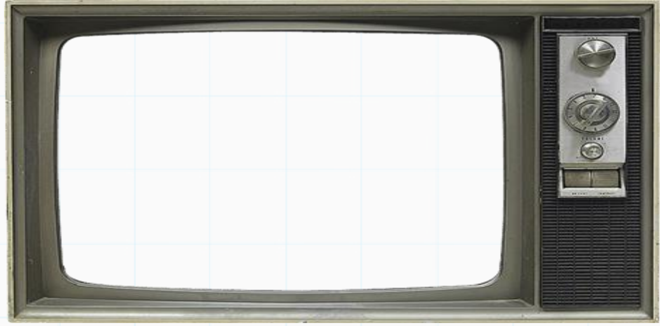


- Variáveis de Decisão:
    - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:
- Capacidade

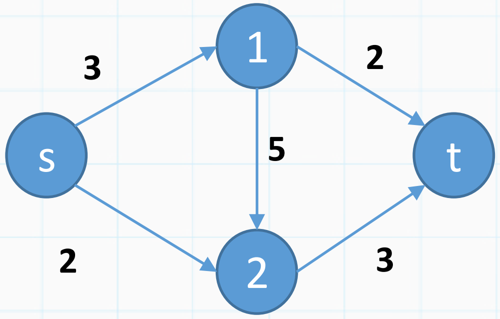


Vamos Modelar

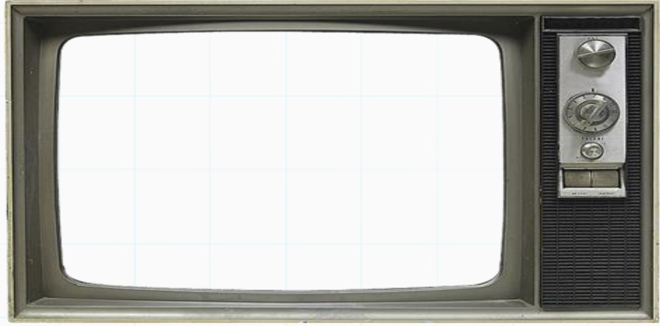


- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:
  - Capacidade
    - $X_{s1} <= 3$
    - $X_{s2} <= 2$
    - $X_{12} <= 5$
    - $X_{1t} <= 2$
    - $X_{2t} <= 3$



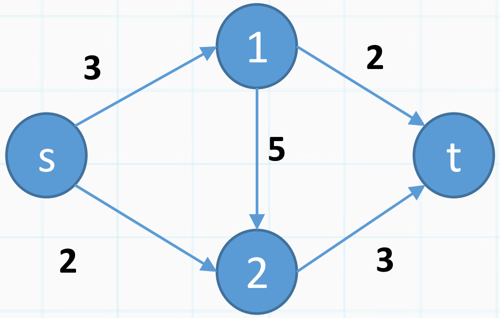
Vamos Modelar



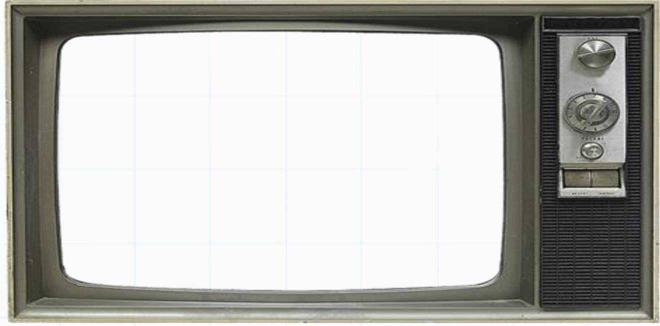
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:

- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - (vértice 1)



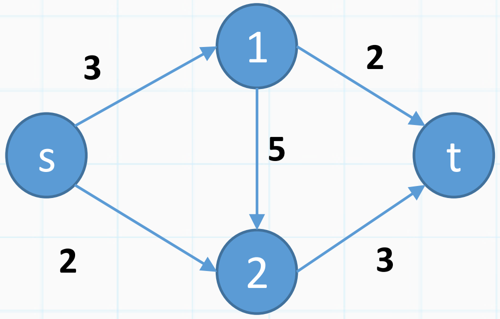
Vamos Modelar



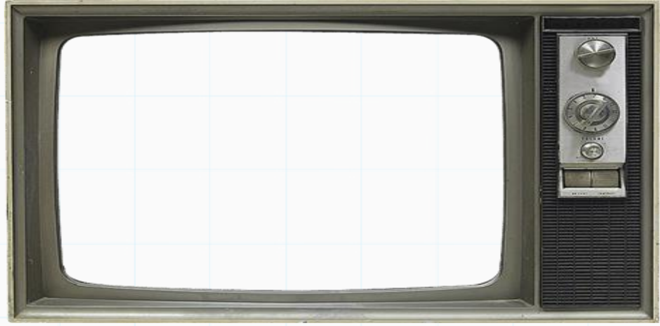
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:

- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)

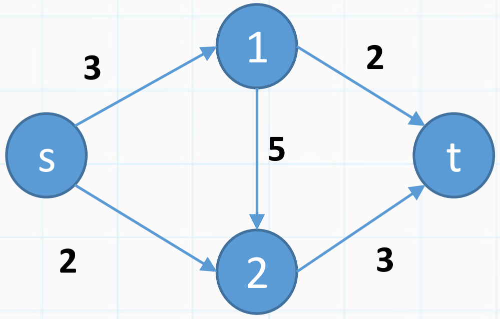


Vamos Modelar

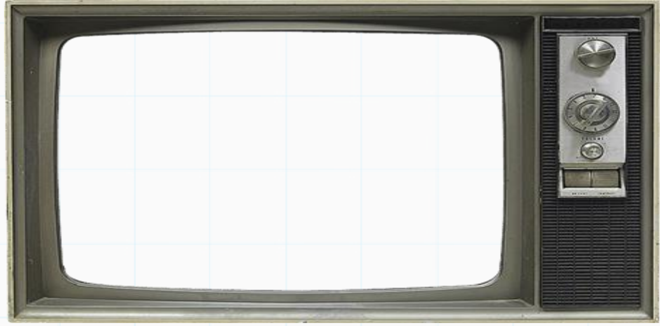


- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:
- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)
  - $X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$ (vértice 2)



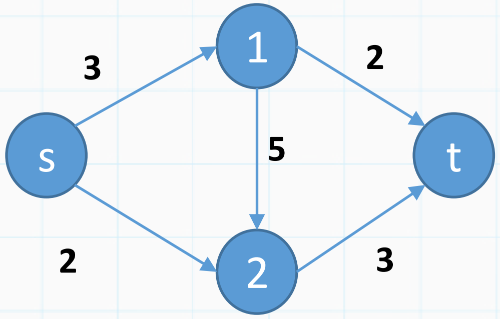
Vamos Modelar



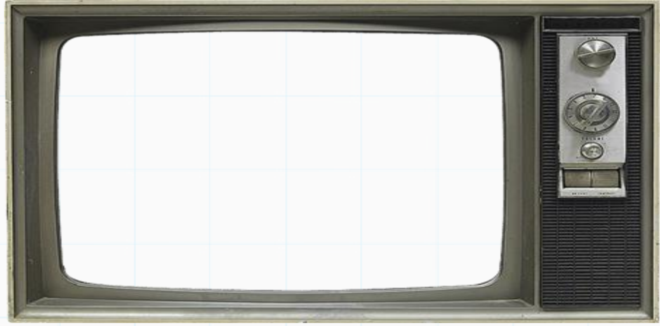
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:

- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)
  - $X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$ (vértice 2)
  - (vértices s e t)



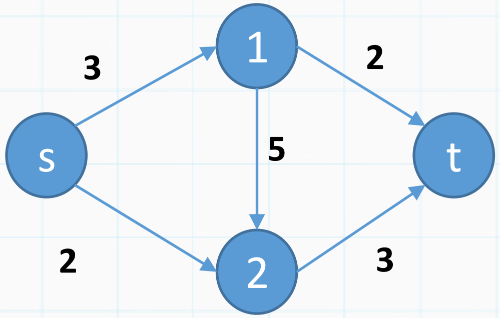
Vamos Modelar



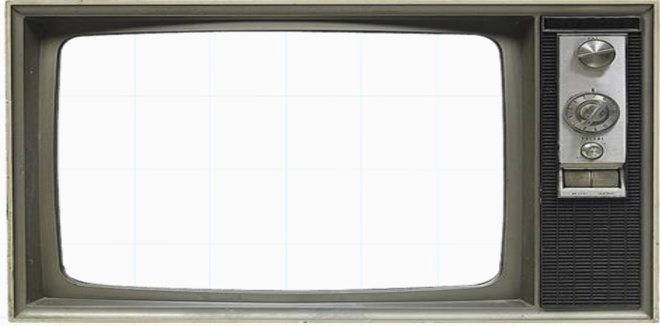
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:

- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)
  - $X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$ (vértice 2)
  - (vértices s e t)



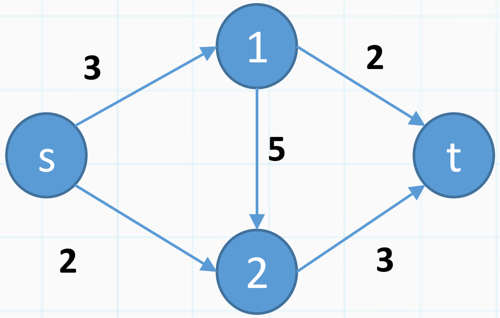
Vamos Modelar



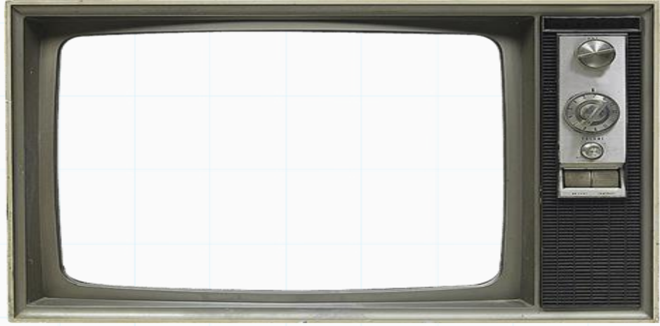
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:

- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)
  - $X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$ (vértice 2)
- Não negatividade
  - X_{ij} >= 0 para todo i para todo j



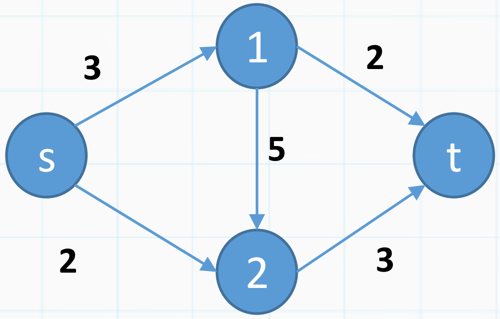
Vamos Modelar



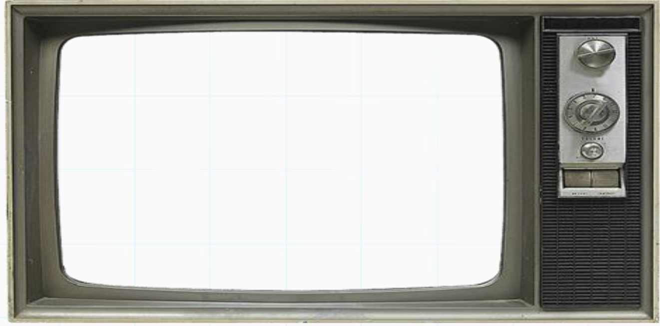
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:

- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)
  - $X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$ (vértice 2)
- Não negatividade
  - $X_{ij} >= 0$ para todo i para todo j
- Função objetivo:



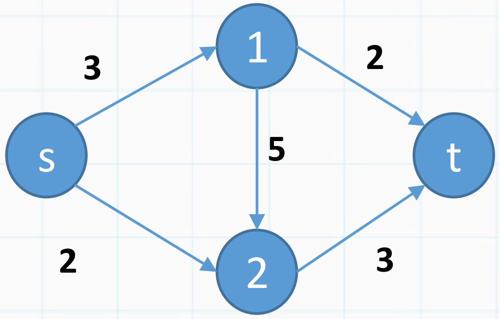
Vamos Modelar



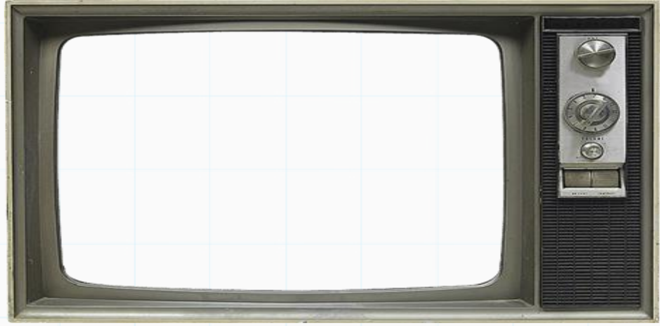
- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:

- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)
  - $X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$ (vértice 2)
- Não negatividade
  - $X_{ij} >= 0$ para todo i para todo j
- Função objetivo:
  - MAX $X_{1t} + X_{2t}$



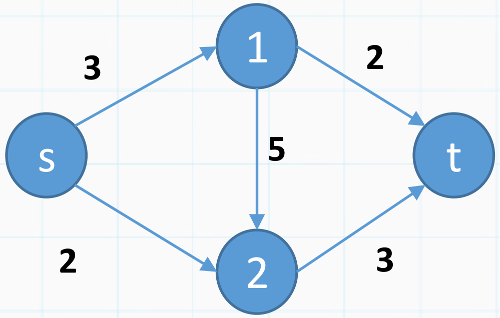
Vamos Modelar



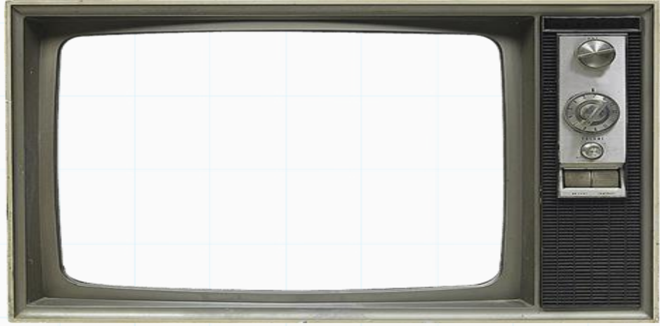
- Variáveis de Decisão:
    - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:

- Capacidade
    - $X_{s1} <= 3$
    - $X_{s2} <= 2$
    - $X_{12} <= 5$
    - $X_{1t} <= 2$
    - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
    - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)
    - $X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$ (vértice 2)
- Não negatividade
    - X_{ij} >= 0 para todo i para todo j
- Função objetivo:
    - MAX $X_{1t} + X_{2t} \Leftrightarrow$ MAX $X_{s1} + X_{s2}$

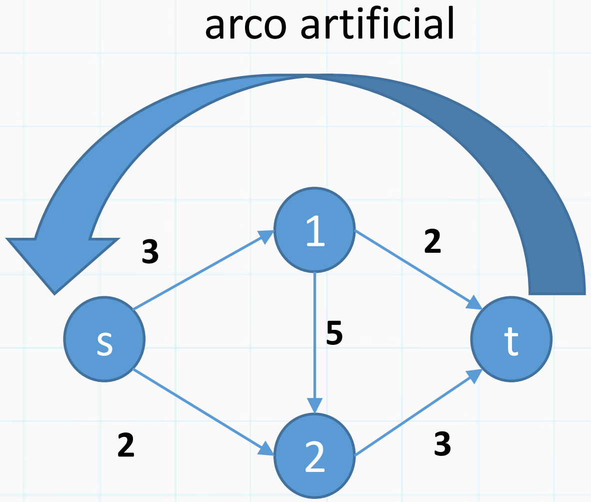


Vamos Modelar

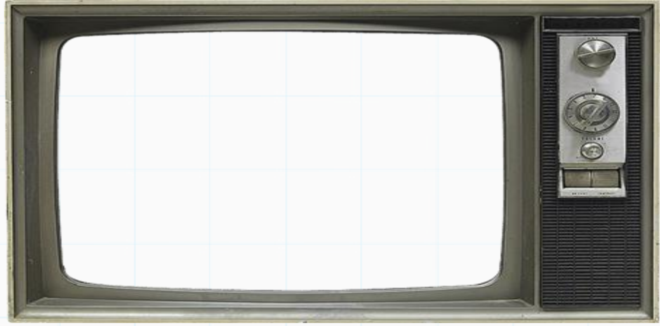


- Variáveis de Decisão:
  - X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j

Restrições:
- Capacidade
  - $X_{s1} <= 3$
  - $X_{s2} <= 2$
  - $X_{12} <= 5$
  - $X_{1t} <= 2$
  - $X_{2t} <= 3$
- Conservação de fluxo (para cada nó interno, o fluxo que entra é igual ao que sai)
  - $X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$ (vértice 1)
  - $X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$ (vértice 2)
- Não negatividade
  - $X_{ij} >= 0$ para todo i para todo j
- Função objetivo:
  - MAX $X_{1t} + X_{2t}$ ⇔ MAX $X_{s1} + X_{s2}$ ⇔ MAX X_{ts}



Vamos Modelar



- Modelo Completo

MAX $X_{1t} + X_{2t}$

Sujeito a:

$X_{s1} <= 3$

$X_{s2} <= 2$

$X_{12} <= 5$

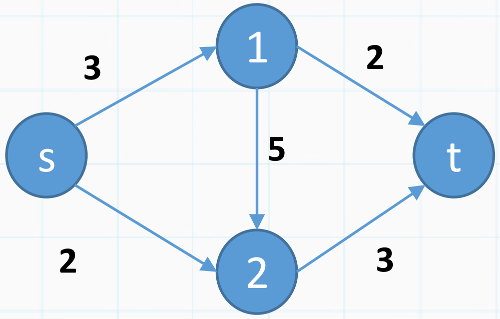
$X_{1t} <= 2$

$X_{2t} <= 3$

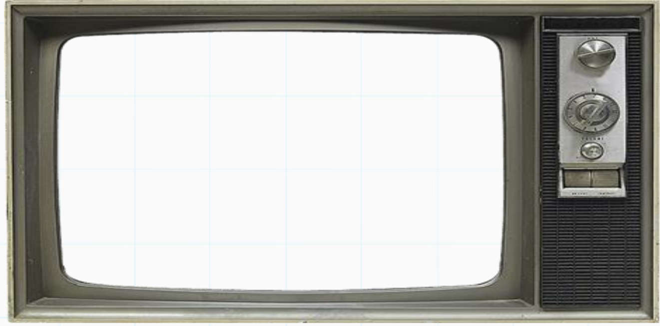
$X_{s1} = X_{12} + X_{1t}$

$X_{s2} + X_{12} = X_{2t}$

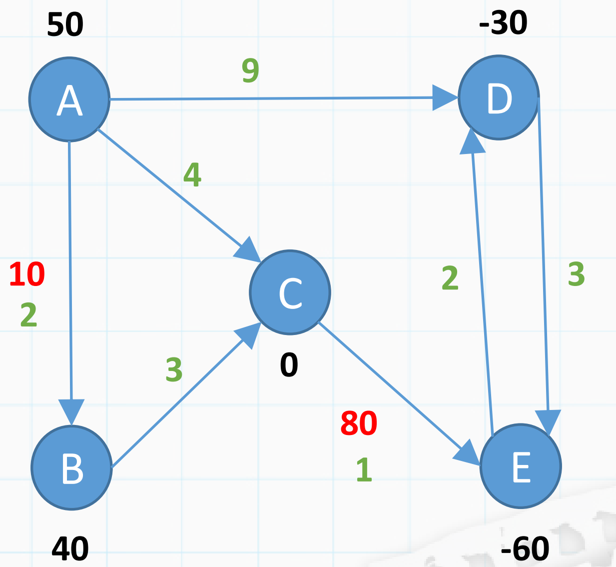
$X_{ij} >= 0$ para todo i para todo j



Exercícios

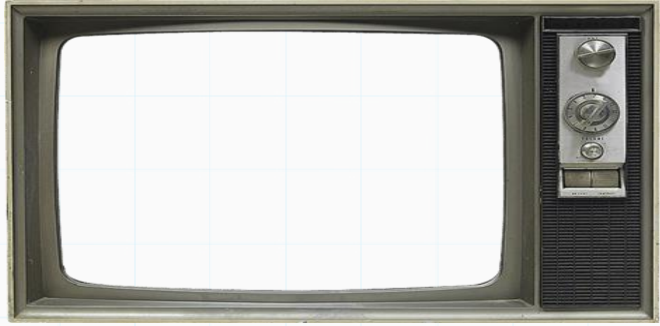


- <u>Problema do Fluxo Mínimo</u>: Produtores de gás natural precisam enviar gás para a fábricas através de dutos. Cada nó do rede (grafo) possui um fluxo gerado que pode ser : <u>positivo -> produtor, negativo -> consumidor ou nulo -> passagem.</u> Vamos admitir que a soma de todos os fluxos gerados é 0 (i.e., o que foi gerado foi consumido).
Alguns arcos tem capacidade máxima de transmissão de gás.
Todos os dutos tem um custo de transmissão de gás por unidade transmitida.
Qual deve ser o envio de gás em cada duto para atender toda a demanda e minimizar os custos de transmissão ? Escreva o modelo para a instância da Figura.



1) Variáveis: mesmas do fluxo máximo (X_{ij} Quantidade de gás que passa de i para j)
2) Restrições:
   - Conservação de fluxo para todo vértice:
     - vértices passagem (igual ao do fluxo máximo)
     - vértices produtores (fluxo positivo)
     - vértices consumidores (fluxo negativo)
3) FO: custos de transmissão = quantidade x custo

Exercícios

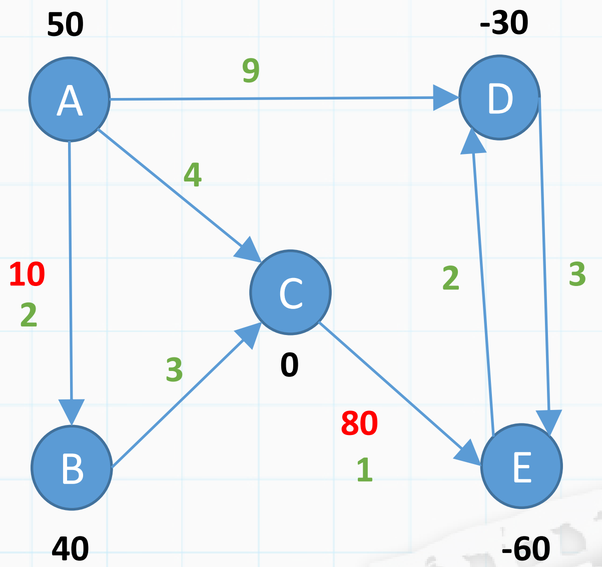


- <u>Problema do Fluxo Mínimo</u>: Produtores de gás natural precisam enviar gás para a fábricas através de dutos. Cada nó do rede (grafo) possui um fluxo gerado que pode ser : <u>positivo -> produtor, negativo -> consumidor ou nulo -> passagem.</u> Vamos admitir que a soma de todos os fluxos gerados é 0 (i.e., o que foi gerado foi consumido).

Alguns arcos tem capacidade máxima de transmissão de gás.

Todos os dutos tem um custo de transmissão de gás por unidade transmitida.

Qual deve ser o envio de gás em cada duto para atender toda a demanda e minimizar os custos de transmissão ? Escreva o modelo para a instância da Figura.

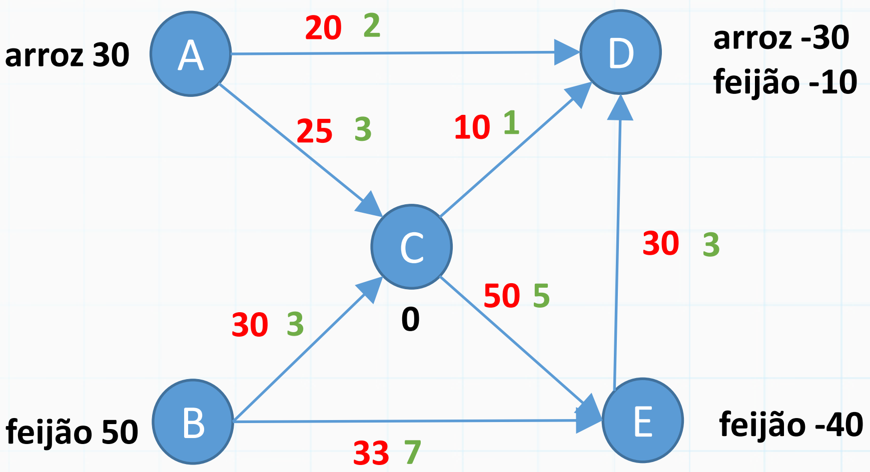


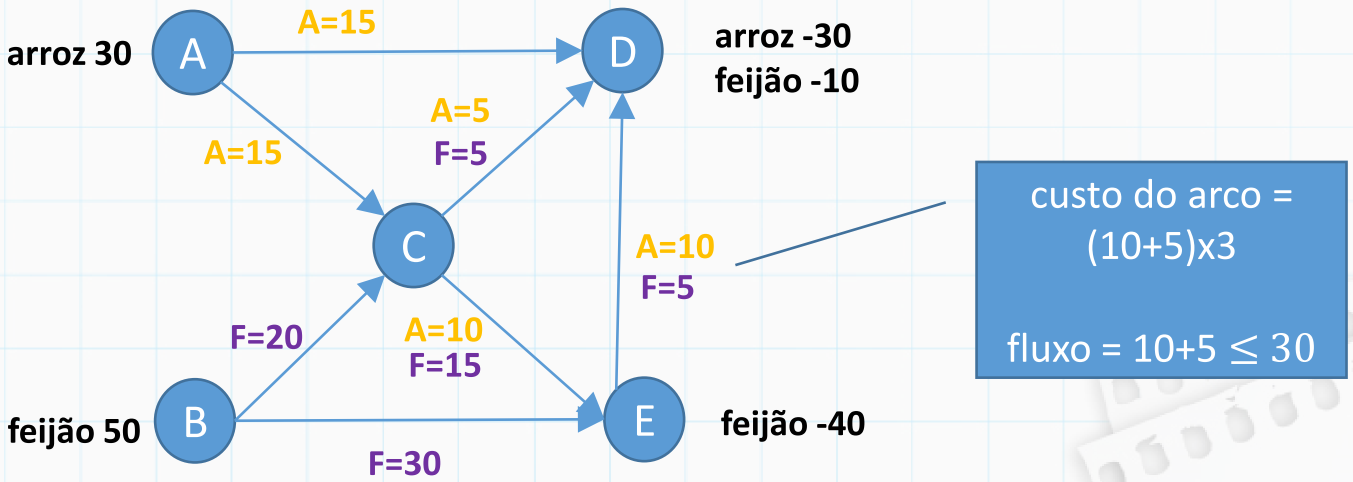
1) Escreva o modelo genérico considerando:
   - Grafo $G=(V,A)$, vizinhança N^+ de entrada e N^- de saída.
   - fluxo gerado b_i para todo vértice $i \in V$
   - capacidade u_{ij} para todo arco $ij \in A$
   - custo c_{ij} para todo arco $ij \in A$

Exercícios

- <u>Problema do MULTI Fluxo Mínimo</u>: Produtores de ~~(gas natural)~~ arroz e feijão precisam enviar os produtos para a fábricas através de ~~(dutos)~~ caminhões. Cada nó do rede (grafo) possui um fluxo gerado que pode ser : <u>positivo -> produtor, negativo -> consumidor ou nulo -> passagem.</u> Vamos admitir que a soma de todos os fluxos de cada produto é 0 (i.e., o que foi gerado foi consumido)

Alguns arcos tem capacidade máxima de (~~transmissão de gás~~) de transporte dos caminhões (valor em vermelho).
Todos os ~~(dutos)~~ caminhões tem um custo de (~~transmissão de gás~~) transporte (em verde) por unidade transmitida.
Qual deve ser o envio de ~~(gás)~~ arroz e feijão em cada (~~duto~~) caminhão para atender toda a demanda e minimizar os custos de transporte ?





Exemplo de Solução

1) Basta reescrever o modelo anterior (Min Fluxo) usando as variáveis:

X_{ijk} -> quantidade do produto k que é transportado de i para j

Como ficaria ?

Até a próxima