CÁLCULO 2

EDO's lineares de ordem superior

Uma EDO diz-se linear de ordem superior se tem a forma:

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

onde

$b\colon I \to \mathbb{R}$;

$a_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

↓ coeficientes da equação

- Se $b \equiv 0$, a equação diz-se incompleta (ou homogénea); Caso contrário, a equação diz-se completa (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de linear de coeficientes constantes.

Se na equação

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

tomarmos $b(x) \equiv 0$, obtemos a chamada equação homogénea associada.

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = 0$$

Solução de uma EDO Linear

Teorema:
A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

Soluções da EDO linear homogénea associada, yh

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0,$$

num dado intervalo I ($a_0, a_1, \ldots a_n$ contínuas em I; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, linearmente independentes e qualquer sua solução, y_h, pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

$$y_h = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ é um conjunto fundamental de soluções (SFS) da EDO linear homogénea associada.

Se nos for dado um conjunto de soluções podemos verificar se é um SFS através da matriz wronskiana

Proposição:
Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluções de uma EDOL homogénea de ordem n, nas condições do slide anterior. $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ é um conjunto fundamental de soluções se e só se a matriz

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

é invertível, para todo o $x \in I$.

↳ se $\det[W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)] \neq 0 \Rightarrow W(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ é invertível   ALGA

Algumas notas:

1. A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
2. Se a EDO linear homogénea tiver coeficientes constantes, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do chamado polinómio caraterístico

① Se $n=1$ temos que a EDO linear homogénea associada tem a forma:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$$

que é sempre uma EDO de variáveis separáveis.

Então a solução geral é dada por:

$$\boxed{y = C_1 e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}} \quad , \quad C_1 = e^K$$

Solução da homogénea associada

②

Se $n>1$ sendo os coeficientes constantes a EDO fica com a forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad \text{com } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \wedge a_0 \neq 0$$

Chamamos polinómio característico ao polinómio da forma:

$$P(R) = a_0 R^n + a_1 R^{n-1} + \cdots + a_{n-1} R^1 + a_n R^0$$

as potências de R têm expoente igual à ordem das derivadas

As raízes deste polinómio vão permitir-nos calcular/determinar as soluções da EDO linear homogénea

Raízes = zeros do polinómio
($P(R)=0$)

Consoante o tipo e multiplicidade das raízes de $P(R)$ teremos diferentes formatos do SFS.

$\downarrow$

1º caso: Raízes reais simples (multiplicidade 1)

Então as funções $e^{R_1 x}, e^{R_2 x}, \ldots, e^{R_n x}$ formam um SFS.

2º caso: P possui n raízes reais e pelo menos uma delas tem multiplicidade >1

seja R a raiz de P com multiplicidade K

$e^{Rx}, xe^{Rx}, \ldots, x^{K-1}e^{Rx}$ são soluções da EDO que correspondem à raiz R

3º caso: P tem pelo menos uma raiz complexa simples

Seja $R = \alpha \pm \beta i$ raiz complexa de P

então $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ são duas soluções linearmente independentes da EDO linear homogénea.

4º caso: P tem pelo menos uma raiz complexa de multiplicidade $K>1$

Seja $R = \alpha \pm \beta i$ raiz de P de multiplicidade K, então:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{K-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

e

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{K-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Solução particular da EDO linear, yp

Como vamos encontrar a solução particular da EDO dada?

① Método dos Coeficientes indeterminados (coeficientes constantes)

② Método da variação das constantes (caso geral)

① Método dos coeficientes indeterminados

Seja $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x)$

b(x) Tem de ter uma destas formas

1) Se $b(x)$ for de uma das seguintes formas:

→ $P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

→ $P_m(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$

$P_m(x)$: polinómio grau m

$P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes têm de ser determinados por substituição na EDO original.

2) Então existe uma solução da EDO do tipo:

$$y_p = x^k e^{\alpha x} \left(P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\operatorname{sen}(\beta x) \right)$$

$P(x)$, $Q(x)$: grau m

- k é a multiplicidade de $r = \alpha \pm \beta i$ como raiz de $P(r)$

$P(r)$: Polinómio Característico

↳ se r ñ é raiz de $P(r)$ então $k = 0$

se r é raiz simples então $k = 1$

...

② Método da variação das constantes

↳ Método que permite encontrar uma solução particular de uma qualquer EDO Linear completa.

- pressupõe o conhecimento da solução geral da equação homogénea associada:

$$y_h = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

onde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é um sistema fundamental de soluções desta equação.

- procura obter uma solução particular da equação completa da forma

$$y_p = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x),$$

admitindo que as constantes são funções (de x) diferenciáveis,

As funções $C_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ determinam-se calculando as suas derivadas $C_i'(x)$ que constituem a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1 + \cdots + C_n'\varphi_n = 0 \\ C_1'\varphi_1' + \cdots + C_n'\varphi_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} = \frac{b}{a_0} \end{cases} \tag{3}$$

Na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}_{\text{wronskiano}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b}{a_0} \end{matrix} \end{array}\right]$$

Podemos resolver por substituição ou na forma matricial, usando a regra de Cramer aprendida em ALGA.

Regra de Cramer

Quando temos o sistema $AX = B$, com $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, cada x_i é dado por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i: resulta de substituir a coluna i de A pela coluna dos termos independentes.

Curiosidades

① O resultado seguinte é muito útil no cálculo de uma solução particular de uma EDO linear completa, quando $b(x)$ resulta da soma de funções.

Princípio da Sobreposição

Suponha-se que y_k $(k = 1, 2)$ *é uma solução particular da equação*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b_k(x).$$

Então $y_p = y_1 + y_2$ *é uma solução particular da equação*

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b_1(x) + b_2(x).$$

Exemplo

$$y'' + 9y = \operatorname{sen}(x) - e^{-x}$$

se considerarmos:

① $y'' + 9y = \operatorname{sen}(x)$

e

② $y'' + 9y = -e^{-x}$

A solução particular da EDO linear completa dada inicialmente pode ser determinada à custa das soluções particulares de ① e ②.

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

② Método da variação das constantes (caso $n=1$)

seja $y_h = C_1 e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$ então consideramos $y_p = C_1(x) e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$

Desenvolvendo o sistema temos: $\boxed{C_1'(x)\, e^{\int -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} = \frac{b(x)}{a_0(x)}}$

Então $C_1(x)$ obtem-se integrando $C_1'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$

EDO Linear Ordem n

↓

Solução geral:

$$y = y_h + y_p$$

y_h → coeficientes não constantes → O sistema fundamental será dado, pudemos ter apenas de verificar que o wronskiano é invertível

y_h → coeficientes constantes → Polinómio característico ↳ $P(R) = 0$

y_p → coeficientes constantes + formato de $b(x)$ especial → Método dos Coeficientes indeterminados

y_p → Qualquer tipo de coeficientes e formato de $b(x)$ indiferente → Método da variação das constantes