Universidade de Aveiro 15 de dezembro de 2021

Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

Nome:______________________________ Nº Mec.:______________

Declaro que desisto ______________________________

Informações

1. Esta prova é constituída por 5 questões.
   (a) Cada folha contém uma questão que deve ser respondida na própria folha (utilize, sempre que necessário, também o verso da folha).
   (b) Caso necessite de folhas de continuação, deve utilizar uma para cada questão e indicar na folha de continuação o número da questão no local indicado para o efeito.
   (c) Caso não responda a uma das questões escreva isso na respetiva folha.
2. Quando terminar a sua prova, organize-a de forma a juntar as folhas de continuação (caso as tenha utilizado) à folha da questão respetiva e coloque-as nos locais indicados pelo professor vigilante da sala. Não será necessário entregar esta folha de informações, exceto em caso de desistência da prova.
3. Caso pretenda desistir desta prova, assinale-o no cabeçalho desta folha, assinando no local a isso destinado e entregue todas as folhas de prova que lhe foram distribuídas. Contudo, se desistir mantém-se no regime de avaliação discreta, não podendo realizar o exame final.
4. Justifique todas as suas respostas das questões, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
5. Só pode levar para a mesa onde vai realizar a prova material de escrita.
   (a) Não é permitida a utilização de qualquer tipo de calculadora.
   (b) Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
   (c) Garanta que tem em cima da mesa de prova um documento que o identifique, com fotografia (preferencialmente o Cartão de Cidadão).

Fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$	$\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\operatorname{cotg} u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$	$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$	$1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$
$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos(2u)}{2}$	$\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos(2u)}{2}$	$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$		
$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \dfrac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{2}$ $\cos u \cos v = \dfrac{\cos(u-v) + \cos(u+v)}{2}$ $\operatorname{sen} u \cos v = \dfrac{\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v)}{2}$	$\cos^2(\operatorname{arcsen} u) = 1 - u^2$ $\operatorname{sen}^2(\arccos u) = 1 - u^2$			

Duas primitivas			
Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u' \sec u$	$\ln \lvert \sec u + \operatorname{tg} u \rvert$	$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln \lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u \rvert$

Uma fórmula de recorrência

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-1}\int \frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}\,dx\right),\ a \neq 0,\ n \neq 1.$$

Formulário de Derivadas

Função	Derivada	Função	Derivada
$K\,u\ (K \in \mathbb{R})$	$K\,u'$	$\ln \lvert u \rvert$	$\dfrac{u'}{u}$
u^r	$r\,u^{r-1}u'$	$\log_a \lvert u \rvert\ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$\dfrac{u'}{u \ln a}$
e^u	$u'\,e^u$	$a^u(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$a^u\ \ln a\, u'$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$	$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$	$\operatorname{cotg} u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$\sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$\operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u\ \operatorname{cotg} u\, u'$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arccotg} u$	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{senh} u$	$u' \cosh u$	$\cosh u$	$u' \operatorname{senh} u$

Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

15 de dezembro de 2021
Duração total: 2 horas

NOME:____	Nº MEC.:____________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ____	

Questão 1 (65 pts)

Seja f a função definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x-2}) - \dfrac{\pi}{2}$.

1. Determine o domínio de f, D_f.
2. Justifique que f tem máximo e mínimo globais em D_f e calcule os seus valores.
3. Indique, justificando, o contradomínio de f.
4. Justifique que f é invertível e defina a função inversa de f (indique expressão analítica, domínio e contradomínio).
5. Determine o limite $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x-3}$.

Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

15 de dezembro de 2021
Duração total: 2 horas

Nome:________________________________ Nº Mec.:____________

Classificação Questão: ________________________________

Questão 2 (40 pts)

1. Determine a função f que satisfaz as condições

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 2\pi.$$

2. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$.

Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

15 de dezembro de 2021
Duração total: 2 horas

Nome:____ Nº Mec.:____________

Classificação Questão: ____________________________________

Questão 3 (40 pts)

Calcule os seguintes integrais indefinidos:

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} \, dx$, com $x > 2$.

NOME: ______________________ Nº MEC.: ____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________

Questão 4 (25 pts)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ tal que:

- f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ e
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

1. Mostre que existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$.
2. O que pode concluir sobre a existência de extremo global em c? Caso exista, classifique-o.

Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

15 de dezembro de 2021
Duração total: 2 horas

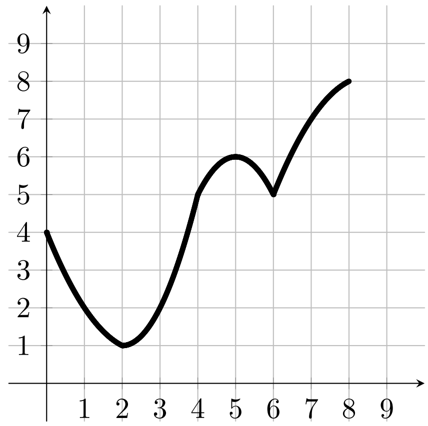
NOME:____ Nº MEC.:____________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ________________________________

Questão 5 (30 pts)

Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

1. Considere a função f definida no intervalo $[0, 8]$ cujo gráfico se apresenta na figura.
   Seja $\overline{S}_f(P)$ a soma superior de f relativamente à partição P do intervalo $[0, 8]$ definida por
   $$P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
   Então, $\overline{S}_f(P)$ é igual a:



   (A) $4 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$. .... ☐
   (B) $2 + 1 + 2 + 5 + 6 + 5 + 7 + 8$. .... ☐
   (C) $4 + 2 + 2 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8$. .... ☐
   (D) $4 + 2 + 1 + 2 + 5 + 6 + 5 + 7$. .... ☐

2. O número de raízes reais distintas do polinómio $p(x) = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}$ é

   (A) 1. .... ☐
   (B) 2. .... ☐
   (C) 3. .... ☐
   (D) 4. .... ☐

3. Considere a função racional definida por $f(x) = \dfrac{x^4 + 5x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 2x + 5)(x - 2)^2(x^2 + 2)^2}$. A sua decomposição em fatores simples é dada por

   (A) $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C_1}{x-2} + \dfrac{C_2}{(x-2)^2} + \dfrac{D_1x + E_1}{x^2+2} + \dfrac{D_2x + E_2}{(x^2+2)^2}$. .... ☐
   (B) $\dfrac{Ax + B}{x^2 + 2x + 5} + \dfrac{C_1}{x-2} + \dfrac{C_2}{(x-2)^2} + \dfrac{D_1x + E_1}{x^2+2} + \dfrac{D_2x + E_2}{(x^2+2)^2}$. .... ☐
   (C) $\dfrac{Ax + B}{x^2 + 2x + 5} + \dfrac{C}{(x-2)^2} + \dfrac{Dx + E}{(x^2+2)^2}$. .... ☐
   (D) $\dfrac{A}{x^2 + 2x + 5} + \dfrac{C_1}{x-2} + \dfrac{C_2}{(x-2)^2} + \dfrac{D_1}{x^2+2} + \dfrac{D_2}{(x^2+2)^2}$. .... ☐