CÁLCULO 2

EDO homogénea

Sempre que uma EDO, escrita na forma normal, tem a seguinte propriedade, diz-se homogénea.

$$\boxed{y' = \underline{f(x,y)}}$$

onde $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é **homogénea de grau 0**

$\hookrightarrow f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$

ou $\to f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$

Como podemos resolver?

Esquema de Resolução:

1. Escrever a EDO na forma normal
2. Verificar que f é homogénea de grau zero.
3. Aplicar mudança de variável : $y = zx$
4. Encontrar o integral geral da EDO de variáveis separáveis
5. Aplicar substituição inversa $z = \frac{y}{x}$ e temos o integral geral da EDO homogénea.

Exemplo: $(x^3+y^3)\,dx - 3y^2x\,dy = 0$

① Escrever na forma normal

$$\Leftrightarrow 3y^2x\,dy = (x^3+y^3)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{x^3+y^3}{3y^2x}}_{f(x,y)}$$

② Vamos verificar se f é homogénea de grau zero:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\cancel{\lambda^3}x^3 + \cancel{\lambda^3}y^3}{3\cancel{\lambda^2}y^2\cancel{\lambda}x} = \frac{x^3+y^3}{3y^2x} = f(x,y)$$

$\therefore$ f é homogénea de grau zero e então a EDO é homogénea

③ Mud. var: $y = zx$, $y' = z'x + z$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{\cancel{x^3} + z^3\cancel{x^3}}{3z^2\cancel{x^3}}$$

$$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{1+z^3}{3z^2}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1+z^3}{3z^2} - z$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1+z^3-3z^3}{3z^2}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{1-2z^3}{3z^2} \longrightarrow \text{EDO de var. separáveis}$$

④

$$\Leftrightarrow \frac{3z^2}{1-2z^3}z' = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{(-2)3z^2}{1-2z^3}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2z^3| = \ln|x| + C, \ C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO de var. separáveis

⑤ Mud. var. inv. $z = y/x$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1-2\frac{y^3}{x^3}\right| = \ln|x| + C, \ C \in \mathbb{R}$$

Integral geral da EDO homogénea.

EXERCÍCIOS:

1. $(x^2+y^2)\,y' = xy$
2. $y'\left(1-\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$
3. $y' = \frac{y}{x}\left(1+\ln y - \ln x\right), \ x>0$
4. $yy' = 2y - x$
5. $x^2+y^2-2xyy' = 0$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$
7. $xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}$
8. $2x^2y' = y^2+3xy$
9. $x^2y' = 4yx + 3y^2, \ x>0$
10. $xy' = y\left(1+\ln(y^2)-\ln(x^2)\right), \ x \neq 0$
11. $xy+y^2+x^2 = x^2y'$
12. $(xy+4y^2)\,dx = (x^2-4xy)\,dy$