4 Integrais Definidos

soma de Riemann

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$P = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n\}$, partição de $[a,b]$ (= decomposição)

$C = \{U_0, U_1, U_2, \dots, U_n\}$, $U_i \in]u_i, u_{i+1}[$, $i = 1, \dots, n-1$, seleção de $[a,b]$

$[a,b]$ fica então decomposto em subintervalos: $J_1 = [u_0, u_1]; \dots; J_n = [u_{n-1}, u_n]$ de diâmetros: $\text{diam } J_1 = u_1 - u_0, \dots, \text{diam } J_n = u_n - u_{n-1}$

definição soma de Riemann de f relativamente à decomposição P e seleção C, é o nome dado à seguinte soma:

$$S_f(P, C) = \sum_{i=1}^{n} f(U_i)(u_i - u_{i-1})$$

diâmetro de decomposição $|P|$ é o maior dos diâmetros dos subintervalos de $[a,b]$

soma de Darboux se substituirmos na soma anterior a imagem de um ponto intermédio ($f(U_i)$) pelo supremo/ínfimo da função $f(u)$, em cada um dos subintervalos, obtém-se, respetivamente:

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i (u_i - u_{i-1}) \quad \text{soma superior de Darboux}$$

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i (u_i - u_{i-1}) \quad \text{soma inferior de Darboux}$$

nota $A_m \leq A^* \leq A_M$

integral de Riemann uma função diz-se integrável à Riemann em $[a,b]$ se for finito

$$\lim_{\substack{|P| \to 0 \\ (n \to +\infty)}} S_f(P, C) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(U_i)(u_i - u_{i-1}) = J$$

com $J \in \mathbb{R}$ e $J = \int_a^b f(u)\, du$

$\therefore$ Integral de Riemann é limite da soma de Riemann

nomenclatura

$$\int_a^b f(u)\, du$$

limite superior de integração: b

função integranda: $f(u)$

limite inferior de integração: a

variável de integração: u

condição necessária de integrabilidade

f é integrável em $[a,b] \Rightarrow f$ é limitada em $[a,b]$

corolário: f não limitada em $[a,b] \Rightarrow f$ não integrável em $[a,b]$

condições suficientes de integrabilidade

1. f contínua em $[a,b] \Rightarrow f$ integrável em $[a,b]$
2. f seccionalmente contínua em $[a,b]$
   - f limitada em $[a,b]$ e descontínua num número finito de pontos
   - f contínua por partes em $[a,b]$ e tem nº finito de pontos de desc.

   $\Rightarrow f$ é integrável em $[a,b]$
3. f monótona em $[a,b] \Rightarrow f$ integrável em $[a,b]$
4. f e g definidas em $[a,b]$

   f integrável em $[a,b]$ e g difere de f em número finito de pontos

   $\Rightarrow g$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Propriedades do integral de Riemann

1/2. $(\alpha f + \beta g)$ é integrável em $[a,b]$

$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

3. $(f \cdot g)$ é integrável em $[a,b]$

$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

4. f é integrável $\forall\, [c,d] \subset [a,b]$

5. se $c \in]a,b[$ e f integrável em $[a,b]$, então:

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$

6. se $f(x) \geq 0 \;\forall x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

7. se $f(x) \leq g(x) \;\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

8. se f é limitada superior e inferiormente em $[a,b]$: $m \leq f(x) \leq M$

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

9. f integrável em $[a,b] \Rightarrow |f|$ é integrável $\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

+ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$f(x)$ par: $\int_{-a}^{-b} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

$f(x)$ ímpar: $\int_{-a}^{-b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$K \in \mathbb{R}$: $\int_a^b K\,dx = K(b-a)$

teorema fundamental de cálculo integral

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável

$x \in]a,b[$

$F(x) = \int_a^b f(t)\, dt$

i) F é contínua em $[a,b]$

ii) se f é contínua em $c \in]a,b[$ então F é diferenciável em c e $F'(c) = f(c)$

teorema do valor médio para integrais

sejam $a, b \in \mathbb{R}: a < b$

se $f: [a,b]$ é contínua, então $\exists\, c \in]a,b[$:

$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b-a)$

derivação de integrais

T.F.C.i.

VIP

Sejam J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ e $g_1, g_2: J \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em J, tais que $g_1(J), g_2(J) \subseteq]a,b[$

então a função H definida em J por

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\, dt$$

é diferenciável em J e $\forall\, x \in J$

$$H'(x) = f(g_2(x))\, g_2'(x) - f(g_1(x))\, g_1'(x)$$

fórmula de Barrow

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$ primitiva de f

então $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

nota $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = [F(x)]_a^b$

critérios de integração

integração por partes

$$\int_a^b u'v\, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u v'\, dx$$

mudança de variável

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

integração por partes

$\int P_k(x)$ sen x, $\cos x$, e^x

$v(x) = P_k(x)$

$\int P_k(x)$ $\ln x$, arcsen x, $\arccos x$, arctg x, arccotg x

$u' = P_k(x)$

$\int e^{ax}$ sen x, $\cos x$

por hipótese (uma ou outra)

2x por partes

mudança variável

$\int f(e^x)\, dx$

$t = e^x$

$\int f(\ln x)\, dx$

$t = \ln x$

$\int f(x, x^{p/q}, x^{r/s}, \ldots)$

$t = x^{1/m}$ $m = mmc(q,s)$

aplicações do integral de Riemann

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

f integrável

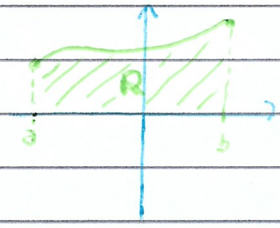
$a < b$

caso 1

$f \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b$

$0 \leq y \leq f(x)\}$



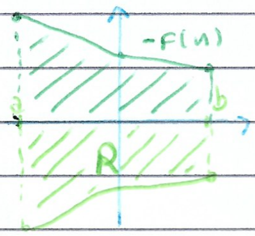
$A_R = \int_a^b f(x)\,dx$

caso 2

$f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b$

$f(x) \leq y \leq 0\}$



$A_R = \int_a^b (-f(x))\,dx$

caso 3

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in [c,b]$

$f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,c]$

$R = R_1 \cup R_2$

$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq c$

$f(x) \leq y \leq 0\}$

$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq b$

$0 \leq y \leq f(x)\}$

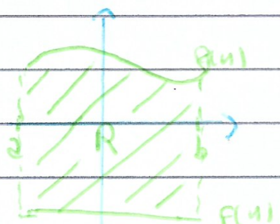
$A_R = \int_a^b |f(x)|\,dx$

$= \int_a^c (-f(x))\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$

caso 4

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b$

$f(x) \leq y \leq g(x)\}$



$A_R = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

$= \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$