Cálculo I

Capítulo 2

Primitiva:

Chama-se Primitiva de f a toda a função F diferenciável, tal que $F'(x) = f(x)$

* Se f admite uma primitiva dizemos que f é primitivável.

* Se $F(x)$ e $G(x)$ são duas primitivas de f então $F(x) = G(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Primitivas Imediatas e Quase Imediatas

Aplicação direta das regras de primitivas

Podemos ter de colocar números em falta.

Formulário — Regras de Integração	
Tipo de Função a Integrar	Integral Indefinido
$k \quad (k \in R)$	$kx + c, \quad c \in R$
$u'(x)[u(x)]^{\alpha} \quad (\alpha \in R \setminus \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad c \in R$
$u'(x)a^{u(x)} \quad (a \in R^{+} \setminus \{1\})$	$\frac{a^{u(x)}}{ln(a)} + c, \quad c \in R$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c, \quad c \in R$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$ln\lvert u(x)\rvert + c, \quad c \in R$
$u'(x)sin[u(x)]$	$-cos[u(x)] + c, \quad c \in R$
$u'(x)cos[u(x)]$	$sin[u(x)] + c, \quad c \in R$
$u'(x)sec^2[u(x)]$	$tan[u(x)] + c, \quad c \in R$
$u'(x)cosec^2[u(x)]$	$-cot[u(x)] + c, \quad c \in R$

função a integrar	Integral Indefinido
$\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$	$\arcsen(g(x)) + C$
$\dfrac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$	$\arctan(g(x)) + C$
$g'(x)\sec(g(x))\tan(g(x))$	$\sec(g(x)) + C$
$g'(x)\operatorname{cosec}(g(x)\operatorname{cotan}(g(x))$	$-\operatorname{cosec}(g(x)) + C$

Primitivação por Partes

$$\boxed{\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx}$$

a função que escolhemos para primitivar

função que escolhemos derivar

↳ caso conheça a primitiva de ambas as funções, escolho a mais simples para derivar

↳ caso não conheça as duas primitivas esta escolha é óbvia.

Primitivação de funções Racionais

① verificar se a fração é própria o ñ própria

* se a fração é ñ própria, aplicar divisão de polinómios

* se a fração é própria, conduzir a uma primitiva imediata / quase imediata ou

separar na soma de frações simples.

Como? ① fatorizar denominador

② • Se temos $\underbrace{\dfrac{A(x)}{(x-a)(x-b)\cdots}}_{\text{raízes todas diferentes}} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \cdots$

• Se temos $\underbrace{\dfrac{A(x)}{(x-a)^K}}_{\text{Raiz de multiplicidade } K}$

$= \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2} + \cdots + \dfrac{K}{(x-a)^K}$

• Se temos $\dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, com $b^2-4ac<0$

$= \underbrace{\dfrac{Bx}{ax^2+bx+c}}_{\text{conduzir a um } \ln} + \underbrace{\dfrac{C}{ax^2+bx+c}}_{\text{conduzir ao arctan ou mud. variável}}$

Primitivação por substituição

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

$\boxed{x = g(t)}$ → muito útil para primitivar funções que envolvem radicais

Substituições trigonométricas

$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin(t)$	$t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan(x)$	$t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec(t)$	$t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Função h(t)

Intervalos onde h é invertível

Primitivação de funções trigonométricas

- ↳ fórmulas + quase-imediata
- ↳ por partes (caso não consiga aplicar anterior)

Fórmulas trigonométricas:

$$\begin{cases} sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \\ 1 + cotan^2(x) = cosec^2(x) \\ tan^2(x) + 1 = sec^2(x) \\ sen(x \pm y) = sen(x)cos(y) \pm sen(y)cos(x) \\ cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sen(x)sen(y) \\ cos^2(x) = \dfrac{1+cos(2x)}{2} \\ sen^2(x) = \dfrac{1-cos(2x)}{2} \end{cases}$$

Potências impares de Seno e Coseno

$$\int sen^{2n+1}(x)\,dx = \int sen(x)\,sen^{2n}(x)\,dx$$
$$= \int sen(x)\left(1-cos^2(x)\right)^n dx$$

... desenvolver binómio e aplicar a propriedade distributiva

$$\int cos^{2n+1}(x)\,dx = \int cos(x)\,cos^{2n}(x)\,dx$$
$$= \int cos(x)\left(1-sen^2(x)\right)^n dx$$

... desenvolver binómio e aplicar a propriedade distributiva

Potências pares de Seno e Coseno

$$\int cos^{2n}(x)\,dx = \int \left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)^n dx = \dots$$

fórmulas

$$\int sen^{2n}(x)\,dx = \int \left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)^n dx = \dots$$

fórmulas

Algumas potências de tangente (usar fórmulas)

$$\int tan(x)\,dx = \int \frac{sen(x)}{cos(x)}\,dx = \dots$$

$$\int tan^2(x)\,dx = \int 1 + sec^2(x)\,dx = \dots$$

$$\int tan^3(x)\,dx = \int tan(x)\,tan^2(x)\,dx = \int tan(x)\left(1+sec^2(x)\right)dx = \dots$$