DIFERENCIABILIDADE

Quando estamos a trabalhar com funções reais de várias variáveis reais, f.r.v.v.r, e falamos em derivação/diferenciação levanta-se sempre o problema da existência de várias variáveis. Com uma só variável, a derivada da função num ponto dá-nos a informação acerca da variação instantânea dessa mesma função nesse exato ponto. Em contexto prático, o valor da derivada num ponto dá-nos a variação prevista na função caso se varie em uma unidade a variável independente. No entanto, quando trabalhamos com f.r.v.v.r temos várias variáveis que podem provocar variações na função e então surge o conceito de derivadas parciais.

DERIVADAS PARCIAIS

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D um intervalo aberto e $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um ponto de D.

Chamamos derivadas parciais de f no ponto A, relativamente às variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, respetivamente a:

$$f'_{x_1}(A), \dots, f'_{x_n}(A) \;\; ou \;\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$$

Nota: Em $\mathbb{R}^2$ temos $f'_x(A)$ e $f'_y(A)$ e em $\mathbb{R}^3$, temos $f'_x(A)$, $f'_y(A)$ e $f'_z(A)$.

DEFINIÇÃO:

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a,b) \in int(D)$, chamamos derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a,b) ao limite, caso exista em $\mathbb{R}$,

$$f'_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

E chamamos derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a,b) ao limite, caso exista em $\mathbb{R}$,

$$f'_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Interpretação geométrica:

$f'_x(a,b) \rightarrow$ declive da reta contida no plano y=b e que é tangente, no ponto (a, b, f(a, b)), à curva de interseção do gráfico de f com o plano.

IMPORTANTE

No caso de termos funções definidas por mais do que uma expressão (funções definidas por ramos), tal como já acontecia para o caso de f.r.v.r, em pontos de troca de ramo teremos de efetuar o cálculo da derivada nesse ponto recorrendo à definição. Nos restantes pontos e em funções com apenas uma expressão designatória podemos aplicar diretamente as regras de derivação que já conhecemos para as f.r.v.r .

Nota pratica:

f'_x → obtém-se derivando a função f em ordem a x, isto é, considerando x a variável e y e z como constantes.

f'_y → obtém-se derivando a função f em ordem a y, isto é, considerando y a variável e x e z como constantes.

f'_z → obtém-se derivando a função f em ordem a z, isto é, considerando z a variável e x e y como constantes.

Exemplos:

$f(x,y,z) = 3x^2y + 2yz + z^3$

$$f'_x(x,y,z) = 3y(x^2)'_x + (2yz)'_x + (z^3)'_x = 6xy + 0 + 0 = 6xy$$

$$f'_y(x,y,z) = 3x^2(y)'_y + 2z(y)'_y + (z^3)'_y = 3x^2 + 2z$$

$$f'_z(x,y,z) = (3x^2y)'_z + 2y(z)'_z + (z^3)'_z = 2y + 3z^2$$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ , se\ xy \neq 0 \\ x^3\ , se\ xy = 0 \end{cases}$$

1 + h - 1

$$f'_x(1,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h) * 1 - 1^3}{h} = 1$$

GRADIENTE DE F

Chamamos Gradiente de f ao vetor ∇f com:

$$\nabla f = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})$$

Nota: em $\mathbb{R}^2$ temos $\nabla f = (f'_x, f'_y)$ e em $\mathbb{R}^3$ temos $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$

No contexto das funções reais de uma variável real, sabemos que se uma dada função admite derivada finita num ponto então ela também é contínua nesse ponto, embora o contrário não seja necessariamente verdade.

Uma vez que falamos agora de funções reais de várias variáveis reais, seria razoável pensar que a existência de derivadas parciais seria suficiente para garantir a diferenciabilidade num ponto e consequente continuidade? A resposta é não, mas vejamos o exemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, se\; xy \neq 0 \\ x + y\,, se\; xy = 0 \end{cases}$$

As derivadas parciais $f'_x(0{,}0) = 1\; e\; f'_y(0{,}0) = 1$, no entanto, a função não é continua no ponto (0,0) e podemos facilmente verificar isto calculando o limite da função no ponto.

Então e se em vez de pensarmos na existência das derivadas parciais, consoante a variação de x e de y, pensarmos na existência de **derivadas em todas as direções**?

Vejamos então o conceito de derivadas direcionais.

DERIVADAS DIRECIONAIS

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, P \in int(D)\; e\; \vec{u}$ um vetor de norma 1 (unitário). A derivada direcional de f segundo o vetor $\vec{u}$ é dada por:

$$D_{\vec{u}}\, f\; ou\; f'_{\vec{u}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\vec{u}\,) - f(P)}{h}$$

Nota 1: assim o incremento de h aparecerá em todas as coordenadas em que haja variação.

Nota 2: Se considerarmos os vetores (1,0) e (0,1) em $\mathbb{R}^2$, temos que $f'_{(1,0)} = f'_x\; e\; f'_{(0,1)} = f'_y$.

Nota 3: Estas derivadas podem ainda ser calculadas via gradiente, na forma: $f'_{\vec{u}} = \nabla f(P) \diamond \vec{u}$

Voltemos ao exemplo anterior:

$$f'_{\vec{u}}\,(0{,}0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h u_1, 0 + h u_2) - f(0\,,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$

Limite este que não existe. Mas será por isso que a função não é contínua em (0,0)?

A verdade é que existem funções que admitem as derivadas em todas as direções, mas não são contínuas nesse ponto, pois o limite no ponto não existe ou não coincide com a imagem. A existência de derivadas direcionais, por si só, não garante a diferenciabilidade nem a continuidade, a noção de diferenciabilidade para f.r.v.v.r é algo mais forte do que a mera existência de derivadas.

DIFERENCIABILIDADE DE UMA FUNÇÃO:

Em $\mathbb{R}$, a função diz-se diferenciável em A se e só se admite **reta tangente** ao gráfico nesse ponto. A reta tangente tem de equação $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ e então como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Temos então que,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]}{x-a}=0$$

Em $\mathbb{R}^2$, f diz-se diferenciável em A=(a,b) se e só se admite **plano tangente** nesse ponto e

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-[f(a,b)+f_x'(a,b)(x-a)+f_y'(a,b)(y-b)]}{\|(x,y)-(a,b)\|}=0$$

Em que o plano tangente tem de equação:

$$z=f(a,b)+\underbrace{f_x'(a,b)(x-a)+f_y'(a,b)(y-b)}_{\nabla f(a,b)\,\bullet\,(x-a,\ y-b)}$$

Temos então que, no caso geral, uma função diz-se diferenciável em A se e só se admite um **espaço tangente** ao gráfico da função e se este mesmo espaço, **aproximar linearmente** a função, ou seja se,

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-[f(P_0)+(f_x'(P_0),f_y'(P_0))\circ(P-P_0)]}{\|P-P_0\|}=0$$

Ou

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-[f(P_0)+\nabla f(P_0)\circ(P-P_0)]}{\|P-P_0\|}=0$$

Nota: Haverá casos em que conseguimos encontrar a equação que traduz o plano/espaço tangente mas em que o limite acima referido não da zero, nesse caso o plano/espaço não aproxima linearmente a função e então concluímos a não existência do mesmo.

Não obstante, existe uma maneira mais simples para verificar a diferenciabilidade de uma função num ponto P_0, vejamos:

TEOREMA (CONDIÇÃO SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDADE)

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, P_0 \in int(D)$, se as derivadas parciais de f existem e são finitas numa bola aberta centrada em P_0 , e são contínuas nesse mesmo ponto, então f é diferenciável em P_0.

Também no caso das f.r.v.v.r podemos então concluir que:

TEOREMA (CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DIFERENCIAVEIS)

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, P_0 \in int(D)$, se f é diferenciável em P_0 , então f é continua nesse ponto.