

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

## Modelo input-output de Leontief

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

# Modelo Económico de Leontief

- ▶ Suponhamos que a economia de uma nação está dividida em  $n$  setores que produz bens e serviços não só para si mas também para os outros setores.
- ▶ seja  $x \in \mathbb{R}^n$  um vetor produção que lista o output de cada setor por ano.
- ▶ Existe outra parte da economia (chamada setor aberto) que não produz bens e serviços mas que apenas consome.
- ▶ Cada setor precisa de demanda intermédia (ou demanda interna-input) para produzir os seus próprios produtos.
- ▶ Seja  $d$  um vetor de demanda final (ou demanda externa) que lista os valores dos bens e serviços que são solicitados pelos vários setores que não produzem e que fazem parte da economia.



**Figura:** Wassily Leontief (prémio Nobel em 1973).

Os setores que produzem bens para satisfazer as necessidades do consumidor final precisam de input para a sua própria produção. Leontief mostrou que as saídas de um setor são as entradas de outro, mostrando uma interrelação entre eles, ou seja, o seguinte equilíbrio é válido para o nível de produção  $x$ :

$$x = A + d \quad (1)$$

onde

- ▶  $A$  = demanda interna (input) necessária para a sua própria produção (necessidades intermédias).
- ▶  $d$  = demanda externa final

A hipótese básica do model input-output de Leontief é que, para cada setor existe um vetor de consumo (por unidade) em  $\mathbb{R}^n$  que lista os inputs necessários (por unidade) dos outputs de cada setor. Todos os inputs e outputs são medidos em unidade monetária e não em quantidades.

## Exemplo

Suponhamos que uma economia é constituída por três setores: Manufaturação, Agricultura e Serviços com vetores de consumo por unidade  $c_1, c_2, c_3$  como mostra a tabela.

Comprado de:	input consumido por unidade de output		
	Manufaturação	Agricultura	Serviços
Manufaturação:	0.50	0.40	0.20
Agricultura:	0.20	0.30	0.10
Serviços:	0.10	0.10	0.30
	$c_1$	$c_2$	$c_3$

Que quantidade será consumida pelo setor da Manufaturação se este decidir produzir 100 unidades de produto?

Note-se que  $c_1$  é o vetor de consumo por unidade.

$$100c_1 = 100 \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.20 \\ 0.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Assim, para produzir 100 unidades de output o setor da Manufaturação consome 50 unidades de outras partes da Manufaturação, 20 unidades da agricultura e 10 unidades dos serviços.

Se a manufatura decide produzir  $x_1$  unidades de output, então  $x_1 c_1$  representa a demanda interna da Manufatura. Da mesma forma, se  $x_2$  e  $x_3$  denotam o output planeado para os setores da Agricultura e Serviços, então  $x_2 c_2$  e  $x_3 c_3$  são os vetores que correspondem à sua demanda interna (input).

O total das necessidades intermédias é dado por:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 = Cx, \quad (2)$$

onde  $C$  é a matriz de consumo

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

As equações (1) e (2) ilustram o modelo de Leontief.

## Modelo de Leontief ou equação de produção

$$x = Cx + d$$

onde

- ▶  $x$  é o vetor de produção
- ▶  $C$  é chamada matriz do consumo
- ▶  $Cx$  é o vetor de demanda interna
- ▶  $d$  demanda externa final

A matriz de consumo é construída a partir dos vetores de consumo. A sua  $j$ -ésima coluna é o  $j$ -ésimo vetor de consumo e contém o input necessário de cada um dos setores para o setor  $j$  produzir uma unidade de output.

A equação anterior pode ser escrita na forma

$$Ix - Cx = d \Leftrightarrow (I - C)x = d. \quad (4)$$

## Exemplo

Considere a economia cuja matriz de consumo é dada por (3). Suponhamos que a demanda final é produzir 50 unidades da manufaturação, 30 unidades para a agricultura, e 20 unidades para os serviços. Encontre o vetor de produção  $x$  que satisfaz esta necessidade.

Solução:

$$I - C = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 20 \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

Ora

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0.5 & -0.4 & -0.2 & 50 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 & 30 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 & 20 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & -2 & 500 \\ -2 & 7 & 1 & 300 \\ -1 & -1 & 7 & 200 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 226 \\ 0 & 1 & 0 & 119 \\ 0 & 0 & 1 & 78 \end{array} \right]$$

A última coluna foi arredondada à unidade mais próxima. A Manufaturação deve produzir 226 unidades, a agricultura 119 unidades e os serviços 78 unidades de produto para satisfazer a demanda final.

Se  $I - C$  é invertível então

$$x = (I - C)^{-1}d.$$

O teorema seguinte mostra que na maior parte dos casos  $I - C$  é invertível e o vetor de produção é economicamente viável no sentido em que as entradas em  $x$  são não negativas.

### Teorema

Seja  $C$  a matriz de consumo para uma economia e  $d$  o vetor de demanda final. Se  $C$  e  $d$  têm entradas não negativas e, se a soma das entradas em cada coluna de  $C$  é menor do que 1 então  $(I - C)^{-1}$  existe e o vetor de produção  $x = (I - C)^{-1}d$  tem entradas não negativas e é a única solução para  $x = Cx + d$ .



### Exemplo

Suponhamos que uma economia tem 2 setores: bens e serviços. Uma unidade de output de bens requer 0.2 unidades de bens e 0.5 unidades de serviços. Uma unidade de output de serviços requer 0.4 unidades de bens e 0.3 unidades de serviços. A demanda final é de 20 unidades de bens e de 30 unidades de serviços. Escreva o modelo económico de Leontief para esta situação.

Solução:

Comprado de:		input consumido por unidade de output	
	bens	serviços	demanda final
bens:	0.2	0.4	20
Serviços:	0.5	0.3	30

O modelo económico de Leontief é então:

$x = Cx + d$  onde

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$