

# GUIÕES DE CÁLCULO I - AGRUPAMENTO 2

## GUIÃO 2

PRIMITIVAS / INTEGRAL INDEFINIDO

PAULA OLIVEIRA

2021/22

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

# Conteúdo

<b>5</b>	<b>Primitivas</b>	<b>1</b>
5.1	Definição de primitiva . . . . .	1
5.2	Primitivas Imediatas . . . . .	4
5.3	Propriedades das Primitivas . . . . .	5
5.4	Primitivas quase imediatas . . . . .	6
5.5	Primitivação por Partes . . . . .	7
5.6	Primitivação por Substituição: mudança de variável . . . . .	9
5.6.1	Substituição por Funções Trigonométricas . . . . .	10
5.7	Primitivas de Funções Racionais . . . . .	12

## Capítulo 5

# Primitivas

A derivação é um processo conhecido do Ensino Secundário: “Dada uma função  $f$ , determinar a sua derivada  $f'$ .”

Neste capítulo iremos resolver o problema recíproco: “Dada uma função  $f$ , determinar uma função  $F$  tal que  $F' = f$ .”

Por exemplo, se  $f(x) = F'(x) = \cos x$  então qual será a função  $F(x)$ ? Será única?

### 5.1 Definição de primitiva

No que se segue  $I$  designa um intervalo de números reais não degenerado (isto é, com mais do que um ponto).

**Definição 5.1.** *Seja  $f$  uma função real de variável real definida num intervalo  $I$  de números reais,  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Uma função  $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $I$  diz-se uma **primitiva** de  $f$  em  $I$  se*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Resulta imediatamente da definição que toda a primitiva  $F$  de uma função  $f$  é contínua em  $I$ , já que  $F$  é derivável em  $I$ .

Consideremos alguns exemplos imediatos:

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sec^2 x$	$F(x) = \operatorname{tg} x$	$x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

**Exercício 5.1** Preencha a seguinte tabela

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$x \in \mathbb{R}$

Uma primitiva da função  $f(x) = 2e^{2x}$  é  $F(x) = e^{2x}$ ; contudo, se  $G(x) = e^{2x} + 5$ ,  $G'(x) = 2e^{2x}$  e  $G$  é uma outra primitiva da função  $f$ . Pode encontrar outras primitivas?

A primitiva quando existe não é *única*!

Se  $F' = f$  então  $(F + C)' = f$ , qualquer que seja a constante  $C \in \mathbb{R}$ .

Conhecida uma primitiva  $F$  de uma função  $f$  pode determinar-se uma infinidade de primitivas de  $f$ ; basta para isso adicionar a  $F$  uma constante.

$$f(x) = x^2$$

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{2}, \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2, \quad F_3(x) = \frac{x^3}{3} + \sqrt[5]{23}$$

são primitivas de  $f$  porque

$$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = f(x).$$

Qualquer função  $G(x) = \frac{x^3}{3} + C$ , em que  $C$  é uma constante real, é uma primitiva de  $f$ .

**Teorema 5.1.** *Seja  $I$  um intervalo não degenerado de  $\mathbb{R}$ . Se  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $H : I \rightarrow \mathbb{R}$  são duas primitivas quaisquer de  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , então elas diferem de uma constante, i.e., existe uma constante  $K \in \mathbb{R}$  tal que,*

$$G(x) - H(x) = K, \forall x \in I.$$

Basta recordar que se a derivada de uma função for nula num intervalo  $I$ , a função será constante nesse intervalo. Assim, como  $(G - H)'(x) = G'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$ , a função  $G - H$  é constante.

Repare-se que, sendo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ com } x \in ]-1, 1[$$

$G(x) = \arcsen x$  e  $H(x) = -\arccos x$  são primitivas de  $f$ . Então existe  $K \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\arcsen x - (-\arccos x) = K. \quad K = ?$$

Pelo teorema anterior podemos concluir que se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , num intervalo  $I$ , então toda a primitiva de  $f$  se pode escrever na forma

$$F + C, C \in \mathbb{R}.$$

A família de todas as primitivas de  $f$ , num dado intervalo  $I$ , denota-se pelo símbolo

$$\int f(x)dx.$$

Assim, sendo  $F$  uma primitiva de  $f$  num intervalo  $I$ , tem-se

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}.$$

No entanto escreveremos mais simplesmente

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R},$$

continuando a encarar a expressão que figura no segundo membro, como uma designação do conjunto de todas as primitivas de  $f$  no intervalo considerado.

Atendendo a que

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0 \text{ (porquê?)}$$

podemos dizer que

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

representa a família de todas as primitivas da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  em  $I \subseteq \mathbb{R}^+$  ou em  $I \subseteq \mathbb{R}^-$  e **não** em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . De facto, repare que dada a função  $h$  tal que

$$h(x) = \begin{cases} \ln x + \sqrt{5} & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) - \pi & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

se tem  $h'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Note-se que a primitiva de uma função  $f$  foi definida apenas num intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  e não num subconjunto qualquer de  $\mathbb{R}$ , como por exemplo a reunião de intervalos.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Será que esta função é primitivável no seu domínio, i.e., admite primitiva em  $\mathbb{R}$ ?

Suponhamos que sim. Seja  $H$  uma primitiva de  $f$ , isto é,  $H'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . Então

$$H(x) = \begin{cases} x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ C_2 & \text{se } x = 0 \\ C_3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se  $H$  é derivável,  $H$  é contínua, em particular em  $x = 0$  e portanto  $C_1 = C_2 = C_3$ . Calculando a derivada em  $x = 0$  temos

$$H'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{C_3 - C_2}{x} = 0 \text{ e } H'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + C_1 - C_2}{x} = 1$$

e podemos concluir que não existe  $H'(0)$ . Esta função não é primitivável em qualquer intervalo que contenha o zero no seu interior, contudo é primitivável em qualquer intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}^-$  e em qualquer intervalo  $J \subseteq \mathbb{R}^+$ .

**Teorema 5.2.** *Toda a função contínua num intervalo de números reais  $I$  é primitivável em  $I$ .*

(Este resultado será provado no capítulo de Cálculo Integral.)

Há no entanto determinadas funções, por exemplo,  $f(x) = e^{x^2}$  e  $f(x) = \sin(x^2)$ , que são primitiváveis em  $\mathbb{R}$  mas não é possível determinar uma expressão analítica da sua primitiva.

**Exercício resolvido 5.1.** Se a taxa de crescimento da população de uma cidade é dada como função do tempo  $x$  (em anos) por

$$f(x) = 117 + 200x$$

e actualmente existem 10000 pessoas na cidade, qual será o número total de habitantes da cidade daqui a 5 anos?

**Resolução do exercício 5.1.** A taxa de crescimento é a derivada,  $P'(x) = f(x)$ . Podemos obter a função  $P$ , primitivando  $f$ :

$$P(x) = \int f(x) dx = 117x + 100x^2 + C \quad \text{em que } C \text{ é uma constante real.}$$

Sabendo que  $P(0) = 10000$ , podemos concluir que  $C = 10000$ . Então, a função  $P$  que procuramos é

$$P(x) = 117x + 100x^2 + 10000$$

e portanto, daqui a 5 anos, a população da cidade será:

$$P(5) = 13085 \text{ habitantes.}$$

## 5.2 Primitivas Imediatas

Da definição de primitiva de uma função resulta que toda a fórmula de derivação conduz à seguinte fórmula de primitivação, válida num intervalo de números reais adequado,

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

- $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, C \in \mathbb{R}$  porque  $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$ ;
- $\int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C, C \in \mathbb{R}$  porque  $\left(\frac{t^{-2}}{-2}\right)' = t^{-3}$
- $\int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx = \dots$  porque ...

Mais geralmente é válida a fórmula seguinte em  $]0, +\infty[$ ,

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, C \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \neq -1$$

Facilmente se deduzem as seguintes fórmulas em intervalos de números reais adequados a cada uma das funções:

- $\int dx = x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sen x dx = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x dx = \sen x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int e^x dx = e^x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec^2 x dx = \tg x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, C \in \mathbb{R}, a > 0$
- $\int \csc^2 x dx = -\cotg x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec x \tg x dx = \sec x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \sec x dx = \ln |\tg x + \sec x| + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \csc x \cotg x dx = -\csc x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\int \csc x dx = -\ln |\cotg x + \csc x| + C, C \in \mathbb{R}$

Indique para cada caso um intervalo onde sejam válidas as fórmulas anteriores.

**Nota:** O Geogebra pode ajudar a consolidar as primitivas. O comando `integral(f(x),x)` devolve a família de primitivas da função  $f$ . Pode-se variar a constante para visualizar alguns elementos dessa família de funções.

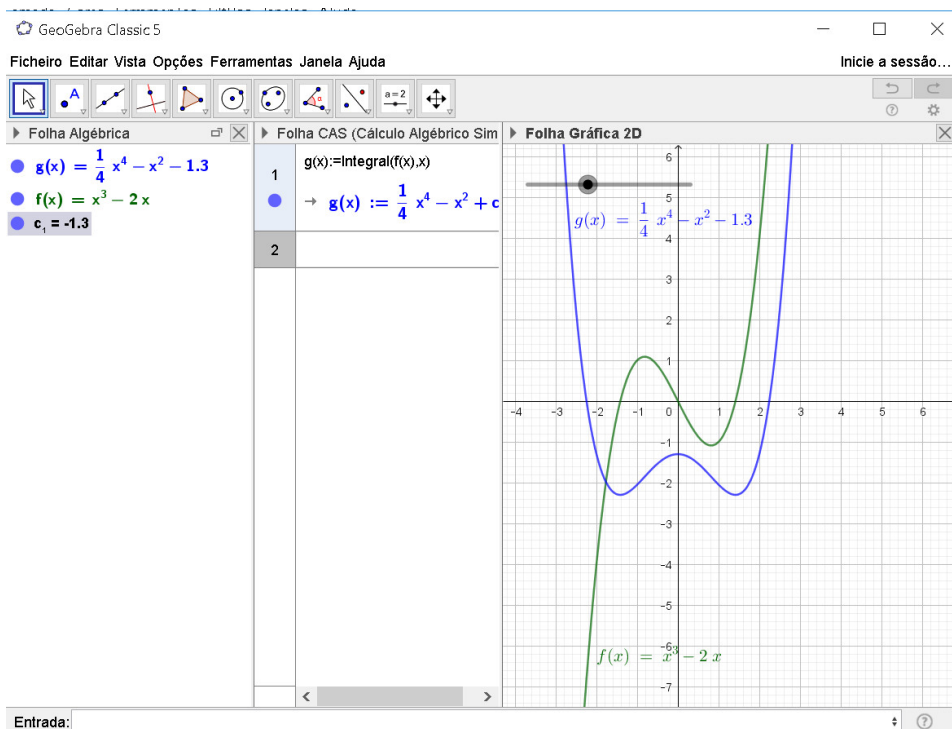


Figura 5.1: Primitivas da função  $f(x) = x^3 - 2x$  no Geogebra.

### 5.3 Propriedades das Primitivas

**Teorema 5.3.** *Sejam  $F$  e  $G$  primitivas de  $f$  e  $g$ , respetivamente, i.e.,*

$$F' = f \text{ e } G' = g,$$

então

$\alpha F + \beta G$  é uma primitiva de  $\alpha f + \beta g$ , quaisquer que sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Em particular,  $\alpha F$  é uma primitiva de  $\alpha f$ , qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $F + G$  é uma primitiva de  $f + g$ .

Na notação anteriormente introduzida, temos respetivamente:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

**Exercício 5.2** Calcule:

1.  $\int (4x^3 - 5x + 9) dx$
2.  $\int (5x^3 + 2 \cos x) dx$
3.  $\int \left( 8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$
4.  $\int \sec^2 x dx$
5.  $\int \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} dx$
6.  $\int \left( \sqrt{3} \sin x + \frac{1}{2x} \right) dx$
7.  $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$
8.  $\int \frac{\operatorname{tg} u}{\cos u} du$

## 5.4 Primitivas quase imediatas

Consideremos a função  $f$  dada por  $f(x) = \arcsen(x^5)$ . Pela regra de derivação da composta tem-se

$$f'(x) = \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}$$

Assim,

$$\int \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}} dx = \arcsen(x^5) + C, C \in \mathbb{R}$$

**Teorema 5.4.** *Sejam  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função primitivável e  $g : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $g(J) \subseteq I$ . Se  $g$  é derivável em  $J$  então  $(f \circ g) \cdot g'$  é primitivável e*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, C \in \mathbb{R},$$

em que  $F$  é uma primitiva de  $f$ .

Observe que, pela derivada da função composta, temos:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

**Exercício 5.3** Admitindo que  $g$  é uma função derivável e que, em cada um dos seguintes casos, a composta de funções considerada está definida num intervalo adequado, determine as seguintes primitivas:

1.  $\int (g(x))^n \cdot g'(x) dx \ (n \neq -1)$
2.  $\int \cos(g(x)) \cdot g'(x) dx$
3.  $\int \sin(g(x)) \cdot g'(x) dx$
4.  $\int \sec^2(g(x)) \cdot g'(x) dx$
5.  $\int \csc^2(g(x)) \cdot g'(x) dx$
6.  $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} dx$
7.  $\int e^{g(x)} \cdot g'(x) dx$
8.  $\int a^{g(x)} \cdot g'(x) dx$
9.  $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$
10.  $\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} dx$
11.  $\int g'(x) \operatorname{tg}(g(x)) dx$
12.  $\int g'(x) \sqrt[n]{g(x)} dx$



**Exercício 5.4** Mostre que, se  $C \in \mathbb{R}$ , então:

$$1. \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + C$$

$$4. \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$$

$$2. \int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C$$

$$5. \int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx = \arctan \sqrt{x} + C$$

$$3. \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

$$6. \int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

**Exercício 5.5** Determine as seguintes primitivas:

$$1. \int \frac{1}{x^2+7} dx;$$

$$5. \int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx;$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} dx;$$

$$6. \int \frac{\sin x}{\cos x} dx;$$

$$3. \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx;$$

$$7. \int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx;$$

$$4. \int e^{3\cos^2 x} \sin x \cos x dx;$$

$$8. \int e^{x^2+4x+3}(x+2) dx.$$

## 5.5 Primitivação por Partes

Recordemos que se  $g, h : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são deriváveis a derivada do produto das duas funções é dada por:

$$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

O método de primitivação por partes baseia-se nesta regra de derivação, reescrevendo a igualdade acima na forma

$$g'(x)h(x) = (g(x)h(x))' - h'(x)g(x)$$

Então, sendo  $f$  uma função que se pode escrever como um produto  $f(x) = g'(x)h(x)$ , em que  $h$  é uma função derivável, temos

$$\boxed{\int g'(x)h(x) dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x) dx.}$$

Note-se que uma primitiva de  $(g(x)h(x))'$  é  $g(x)h(x)$ <sup>1</sup>.

**Exemplo 5.1.** Consideremos o problema de determinar a família de primitivas  $\int x \sec^2 x dx$ .

Sejam  $g'(x) = \sec^2 x$  e  $h(x) = x$ . Uma primitiva de  $\sec^2 x$  é  $\tan x$  e a derivada da função  $x$  é 1. Então,

$$\int x \sec^2 x dx = \int x(\tan x)' dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \ln |\cos x| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 5.2.** Consideremos agora a determinação da família de primitivas  $\int e^x \sin x dx$ .

Neste caso é indiferente a escolha de  $g'$  e de  $h$ . Seja, por exemplo,

$$g'(x) = e^x \quad \text{e} \quad h(x) = \sin x$$

$$g(x) = e^x \quad \text{e} \quad h'(x) = \cos x$$

---

<sup>1</sup>  $\int (g(x)h(x))' dx = g(x)h(x) + C, C \in \mathbb{R}$

Aplicando o método de primitivação por partes, vem:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx. \quad (5.1)$$

Vamos aplicar de novo o método de primitivação por partes ao integral  $\int e^x \cos x \, dx$ , mas mantendo a escolha de  $g'(x) = e^x$ :

$$g'(x) = e^x \quad \text{e} \quad h(x) = \cos x$$

$$g(x) = e^x \quad \text{e} \quad h'(x) = -\operatorname{sen} x$$

Neste caso,

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Substituindo agora em 5.1 temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left( e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \right),$$

ou seja,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \Leftrightarrow 2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Concluimos assim que,

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 5.3.** Há ainda outros exemplos que aparentemente não são primitivas de produto de funções mas que se podem transformar num produto de modo a aplicar o método de primitivação por partes, como é o caso de  $\int \ln x \, dx$ .

Neste exemplo basta observar que  $\ln x = 1 \times \ln x$ . A escolha de  $g'$  e de  $h$  será

$$g'(x) = 1 \quad \text{e} \quad h(x) = \ln x$$

$$g(x) = x \quad \text{e} \quad h'(x) = \frac{1}{x}$$

Aplicando o método de primitivação por partes vem:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

Obtemos assim a família de primitivas pretendida:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

**Exercício 5.6** Calcule as seguintes famílias de primitivas:

$$1. \int \arctan x \, dx; \quad 2. \int \sec^3 x \, dx; \quad 3. \int \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}(7x) \, dx;$$

$$4. \int \operatorname{sen}(5x) \cos(3x) \, dx; \quad 5. \int x \arctan x \, dx; \quad 6. \int x 3^x \, dx;$$

$$7. \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx; \quad 8. \int \cos(\ln x) \, dx; \quad 9. \int x(2x+5)^{10} \, dx.$$

Porque vale a pena aprender a primitivar por partes.... Se calcular esta primitiva com recurso a alguns CAS pode obter este resultado...

$$\int x(2x+5)^{10} dx = \frac{256}{3} x^{12} + \frac{25600}{11} x^{11} + 28800 x^{10} + \frac{640000}{3} x^9 + 1050000 x^8 + 3600000 x^7 + 8750000 x^6 + 15000000 x^5 + 17578125 x^4 + \frac{39062500}{3} x^3 + \frac{9765625}{2} x^2 + c.$$

## 5.6 Primitivação por Substituição: mudança de variável

O processo de mudança de variável é conhecido do Ensino Secundário. Por exemplo, para resolver a equação  $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$  podemos recorrer à mudança de variável  $e^x = y$  e resolver a equação  $y^2 - 2y + 1 = 0$ . A solução desta equação é  $y = 1$  e regressando à variável  $x$ , temos  $e^x = 1$ , ou seja,  $x = 0$ .

Este processo é também utilizado para calcular algumas primitivas que não são “tão” imediatas.

Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função primitivável, onde  $I$  designa um intervalo de números reais. Dizer que  $f$  é primitivável significa que existe uma função  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F' = f$ .

Seja agora  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável e invertível no intervalo não degenerado  $J$  tal que  $h(J) = I$ . Recorrendo à derivada da função composta, podemos dizer que

$$(F \circ h)'(t) = F'(h(t)) \cdot h'(t). \quad (5.2)$$

Como  $F' = f$ , podemos reescrever a igualdade (5.2) da seguinte forma

$$(F \circ h)'(t) = f(h(t)) \cdot h'(t),$$

o que traduz o facto de que  $F \circ h$  é uma primitiva de  $(f \circ h) \cdot h'$ .

Para obter a expressão da função  $F$ , e sendo  $h$  invertível, basta fazer a composta  $F \circ h \circ h^{-1}$ .

Na prática procede-se da seguinte forma. Seja  $\int f(x) dx$  a família de primitivas a determinar. Faz-se a substituição de  $x$  por uma função  $h(t)$  onde  $f$  e  $h$  estão nas condições acima referidas. Determina-se de seguida a família de primitivas de

$$\int \underbrace{f(h(t))}_x \cdot \underbrace{h'(t)dt}_{dx} = \int g(t)dt = G(t) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

em que  $G'(t) = g(t) = f(h(t)) \cdot h'(t)$ . A função  $G$  é uma primitiva de  $(f \circ h) \cdot h'$ , ou seja,  $G = F \circ h$ . Para determinar a função  $F$  faz-se a composta de  $G$  com a função  $h^{-1}$ ,  $F = G \circ h^{-1}$  :

$$\int f(x) dx = G(\underbrace{h^{-1}(x)}_t) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \text{ (Regresso à variável inicial)}$$

**Exemplo 5.4.** Como calcular  $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$ , com  $x \in \mathbb{R}_0^+$ ?

A função  $f$  é definida por  $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$  com  $x \in I = [0, +\infty[ = \mathbb{R}_0^+$ .

Consideremos, a mudança de variável definida por

$$x = h(t) = t^2 \quad \text{com } t \in J = [0, +\infty[$$

e observemos que  $h$  é uma função derivável, invertível e que

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{com } x \in I = [0, +\infty[.$$

Como  $h'(t) = 2t$  e  $f(h(t)) = \frac{t^2}{1+t}$  vamos determinar a família de primitivas

$$\int \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t \, dt = 2 \int \frac{t^3}{t+1} dt.$$

Como  $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$  (porquê?), a determinação das primitivas torna-se muito fácil:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t^3}{t+1} dt &= 2 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 2 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t| \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Voltando à variável inicial, como  $t = \sqrt{x}$ , temos:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

### Exercício 5.7

Calcule, fazendo uma mudança de variável adequada, as seguintes famílias de primitivas:

1.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx;$     2.  $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} dx;$     3.  $\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x + 1)} dx;$     4.  $\int \sin \sqrt{x} \, dx;$
5.  $\int x\sqrt{2x+3} dx;$     6.  $\int \frac{\ln(2x)}{x \ln(4x)} dx;$     7.  $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} dx.$

Pode recorrer ao <http://m.wolframalpha.com/> ou ao Geogebra para calcular estes integrais e confirmar os seus resultados.

### 5.6.1 Substituição por Funções Trigonômétricas

Duas relações trigonométricas,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{e} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x,$$

são fundamentais para primitivar funções que envolvam os radicais

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \text{com } a > 0.$$

1. No caso do radical  $\sqrt{a^2 + x^2}$ , pode utilizar-se a mudança de variável  $x = h(t) = a \operatorname{tg} t$  com  $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{\sec^2 t} = a \sec t \quad (a > 0 \text{ e como } t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \sec t > 0)$$

Neste caso,  $h^{-1}(x) = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

2. No caso do radical  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , pode utilizar-se a mudança de variável  $x = h(t) = a \sin t$  com  $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  (ou  $x = a \cos t$  com  $t \in [0, \pi]$ ).

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a \cos t \quad (a > 0 \text{ e como } t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \cos t \geq 0)$$

Neste caso,  $h^{-1}(x) = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$ , com  $x \in ]-a, a[$ .

3. No caso do radical  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , com  $a > 0$ , pode utilizar-se a mudança de variável  $x = h(t) = a \sec t$ .

- No intervalo  $]a, +\infty[$ , teremos  $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  e

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\sqrt{\tan^2 t} = a \tan t (> 0)$$

- No intervalo  $] - \infty, a[$  teremos  $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$  e

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\sqrt{\tan^2 t} = -a \tan t$$

Neste caso,  $h^{-1}(x) = \arccos\left(\frac{a}{x}\right)$ , com  $x \in ]a, +\infty[$  ou  $x \in ] - \infty, a[$ , consoante o intervalo considerado.

**Exemplo 5.5.** Como calcular  $\int \sqrt{9 - x^2} dx$ , com  $x \in ] - 3, 3[$ ?

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = 3 \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx$$

Fazendo

$$\frac{x}{3} = \sin t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \quad \text{temos} \quad \cos t = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

e

$$t = \arcsen \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad dx = 3 \cos t dt.$$

Assim,

$$3 \int \sqrt{1 - (\sin t)^2} 3 \cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt = \frac{9}{2} \int (1 + \cos(2t)) dt = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4} \sin(2t) + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Voltando à variável inicial:

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9}{2} \arcsen \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Note que  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$  e  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ .

No exemplo anterior considerou-se a função

$$h(t) = 3 \sin t, \quad \text{com } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ ,$$

invertível e derivável:

$$h^{-1}(x) = \arcsen \frac{x}{3}, \quad \text{com } x \in ] - 3, 3[ \quad \text{e} \quad h'(t) = 3 \cos t.$$

Sendo  $g(t) = f(h(t)) \cdot h'(t) = 9 \cos^2 t$ , uma sua primitiva é

$$G(t) = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4} \sin(2t) = \frac{9}{2}t + \frac{9}{2} \sin t \cos t.$$

Fazendo a composta,  $F = G \circ h^{-1}$ , obtém-se uma primitiva de  $f$ :

$$F(x) = (G \circ h^{-1})(x) = \frac{9}{2} \arcsen \frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2}.$$

E se o factor a primitivar for  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ?

Podemos sempre fazer a decomposição

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \right], \quad a \neq 0$$

e usa-se uma das substituições acima referidas com as devidas adaptações. Veja-se o exemplo seguinte.

**Exemplo 5.6.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = ?$$

$$2x^2 + 8x - 24 = 2(x^2 + 4x - 12) = 2((x+2)^2 - 16)$$

Fazendo a mudança de variável

$$x + 2 = 4 \sec t \Leftrightarrow x = 4 \sec t - 2 = h(t), t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

podemos resolver o problema. Como  $h'(t) = 4 \sec t \operatorname{tg} t$ , determinamos a família de primitivas

$$\int \frac{1}{4\sqrt{2} \operatorname{tg} t} 4 \sec t \operatorname{tg} t dt = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \sec t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sec t + \operatorname{tg} t| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial, temos  $h^{-1}(x) = \arccos \frac{4}{x+2}$  e recorrendo às fórmulas trigonométricas  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  e  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$  obtemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 8x - 24}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{4} \left( x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x - 12} \right) \right| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

**Exercício 5.8** Calcule:

$$1. \int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}} dx; \quad 2. \int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} dx; \quad 3. \int \frac{1}{x(3 + \ln x)^3} dx;$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}} dx; \quad 5. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx; \quad 6. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{5 - x^2}} dx;$$

$$7. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 2}} dx; \quad 8. \int \sqrt{4 + 5x^2} dx; \quad 9. \int x^2 \sqrt{1 - x} dx.$$

**5.7 Primitivas de Funções Racionais**

Uma função racional é o quociente de dois polinómios,  $p$  e  $q$ , sendo  $q(x)$  não nulo,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Se  $\operatorname{grau}(p) \geq \operatorname{grau}(q)$  então devemos fazer a divisão dos polinómios e obtemos  $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ , em que  $\operatorname{grau}(r) < \operatorname{grau}(q)$ . Portanto, nesse caso,

$$\int f(x) dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

**Exemplo 5.7.** Sejam  $p$  e  $q$  os polinómios definidos por  $p(x) = x^4 + 2x + 1$  e  $q(x) = x^3 - x^2 - 2x$ . Para determinar  $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$  efetuamos a divisão dos polinómios já que  $\operatorname{grau}(p) \geq \operatorname{grau}(q)$ . Como  $p(x) = (x+1)q(x) + 3x^2 + 4x + 1$  vem,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = (x+1) + \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Então,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left( (x+1) + \frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} \right) dx$$

Para integrar a segunda parcela decompomos o denominador em elementos simples, de 1º e/ou 2º grau:

$$q(x) = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

e podemos reescrever a fração como segue:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)}.$$

Esta fração pode ser decomposta numa soma de “frações simples”:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes a determinar. Se reduzirmos as frações simples ao mesmo denominador obtemos a igualdade seguinte:

$$\frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}.$$

Como os denominadores são iguais, para que as frações sejam iguais devemos igualar os numeradores:

$$3x^2+4x+1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1).$$

Pela igualdade de polinómios deduz-se que:

$$(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A = 3x^2 + 4x + 1, \text{ ou seja,}$$

$$\begin{cases} A+B+C=3 \\ -A-2B+C=4 \\ -2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=0 \\ C=\frac{7}{2} \end{cases}$$

Um outro processo para determinar  $A$ ,  $B$  e  $C$  consiste em utilizar o seguinte resultado:

$$\text{Dois polinómios são iguais se } \forall x_0 \in \mathbb{R}, p(x_0) = q(x_0).$$

Então, em particular,

$$A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1) = 3x^2 + 4x + 1, \text{ para } x=0, x=2 \text{ e } x=-1.$$

$$\text{Se } x=0, \quad \text{resulta} \quad -2A=1 \Leftrightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$$\text{Se } x=-1, \quad \text{resulta} \quad 3B=0 \Leftrightarrow B=0 \quad \text{Parece mais simples !!!}$$

$$\text{Se } x=2, \quad \text{resulta} \quad 6C=21 \Leftrightarrow C=\frac{7}{2}$$

Determinados os coeficientes (por um processo ou por outro):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x} dx &= \int \left[ x+1 - \frac{1}{2x} + \frac{21}{6(x-2)} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{21}{6} \ln|x-2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Este processo pode ser utilizado em qualquer fração de polinómios, tendo em conta os resultados seguintes.

**Teorema 5.5.** *Todo o polinómio de coeficientes reais pode ser decomposto num produto de fatores do primeiro e/ou segundo grau (em que cada um dos fatores terá uma multiplicidade maior ou igual a 1).*

Um polinómio de grau  $n$  admite sempre  $n$  raízes complexas<sup>2</sup>, não necessariamente distintas, ou seja, podem ser simples ou múltiplas. Para além disso, se admitir a raiz  $a + bi$  (com  $b \neq 0$ ) também admite a raiz  $a - bi$ .

O problema reduz-se assim a primitivar fatores do tipo:

$$\frac{A}{(x - \alpha)^r} \text{ e } \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^s}$$

Observe-se que se  $r \neq 1$  (Caso em que o polinómio do denominador tem raízes reais múltiplas),

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \frac{A}{(1 - r)(x - \alpha)^{r-1}} + C, C \in \mathbb{R}$$

e se  $r = 1$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + C, C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.8.** Como calcular  $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx$ ?

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3}$$

$$x^2 + 1 = Ax^2 + (-2A + B)x + A - B + C.$$

Donde:  $A = 1$ ,  $B = 2$  e  $C = 2$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^3} dx \\ &= \ln |x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se os fatores são de 2º grau, as coisas complicam-se... Caso em que o polinómio do denominador tem raízes complexas.

**Exemplo 5.9.** Como calcular  $\int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx$ ?

$$\frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Donde:  $A = \frac{3}{5}$ ,  $B = \frac{1}{5}$  e  $C = \frac{2}{5}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx &= \frac{3}{5} \int \frac{1}{2x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln |2x + 1| + \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{2}{5} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{10} \ln |2x + 1| + \frac{1}{10} \ln(x^2 + 1) + \frac{2}{5} \arctan x + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Observemos que uma raiz real é complexa com parte imaginária nula.



Atendendo ao Teorema 5.5, podemos afirmar que qualquer polinómio  $q(x)$ , admite a seguinte fatorização em polinómios irredutíveis:

$$q(x) = \alpha(x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_n)^{r_n} (x^2 + b_1x + c_1)^{s_1} \dots (x^2 + b_mx + c_m)^{s_m},$$

com  $b_j^2 - 4c_j < 0, j = 1 \dots, m$  e

$$(r_1 + \dots + r_n) + 2(s_1 + \dots + s_m) = \text{grau}(q).$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{q(x)} &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left( \frac{A_{i1}}{(x - a_i)} + \dots + \frac{A_{ir_i}}{(x - a_i)^{r_i}} \right) + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^m \left( \frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2 + b_jx + c_j)} + \dots + \frac{B_{js_j}x + C_{js_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{s_j}} \right), \end{aligned}$$

onde  $A_{i1}, \dots, A_{ir_i} (i = 1 \dots, n)$  e  $B_{j1}, C_{j1}, \dots, B_{js_j}, C_{js_j} (j = 1 \dots, m) \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.10.** Para determinar o integral  $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx$  podemos escrever

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 15} = \frac{x + 1 - 1}{x^2 + 2x + 15}$$

atendendo a que  $(x^2 + 2x + 15)' = 2x + 2 = 2(x + 1)$ . Assim,

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 15} dx$$

O primeiro integral é agora imediato; para calcular o segundo, observemos que

$$x^2 + 2x + 15 = (x + 1)^2 + 14 = 14 \left( \left( \frac{x + 1}{\sqrt{14}} \right)^2 + 1 \right)$$

e portanto

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{x^2 + 2x + 15} dx - \frac{1}{14} \int \frac{1}{\left( \frac{x+1}{\sqrt{14}} \right)^2 + 1} dx.$$

Integrando vem:

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 15) - \frac{\sqrt{14}}{14} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{14}} + C, C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.11.** A primitiva da função  $\frac{1}{(1 + x^2)^2}$ , ou das suas variantes  $\frac{1}{(a^2 + x^2)^2}$ , aparece frequentemente na decomposição em elementos simples, por isso é importante que se perceba a sua determinação.

Como calcular

$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx?$$

Fazendo a substituição  $x = g(t) = \text{tg } t$ , porque  $1 + \text{tg}^2 t = \sec^2 t$  temos que

$$\frac{1}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{(1 + \text{tg}^2 t)^2} = \frac{1}{\sec^4 t}$$

Derivando  $\operatorname{tg} t$ , obtém-se  $\sec^2 t$ , assim, a função a primitivar é

$$\int \frac{1}{\sec^4 t} \sec^2 t dt = \int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \int \cos^2 t dt$$

Como  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$ , vem

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (\cos(2t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C, C \in \mathbb{R}$$

Como  $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$$\int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t + C, C \in \mathbb{R}$$

Como  $\operatorname{tg} t = x$ , resulta que  $\sec^2 t = x^2 + 1$  e vem

$$\cos^2 t = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{e} \quad \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

Regressando à variável inicial  $x$  temos:

$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C, C \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 5.12.** Vamos determinar o integral indefinido  $\int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx$ .

Atendendo a que  $(x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2$  e que  $x - 1 = x + 1 - 2$ , podemos reescrever o integral da seguinte forma:

$$\int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} - \frac{4}{(x^2 + 2x + 3)^2} \right) dx$$

ou seja,

$$\int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx - \int \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx.$$

O primeiro integral é imediato,

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Quanto ao segundo integral, vamos recorrer ao exemplo 5.11. Começamos por transformar a função integranda:

$$\frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{2}{4 \left( \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left( \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)^2}.$$

Faz-se agora a substituição

$$\frac{x + 1}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t - 1$$

no integral  $\int \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx$  e o integral a determinar será

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \sqrt{2} \sec^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{4} (t + \sin(2t)) + C_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (t + 2 \sin(t) \cos(t)) + C_2, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial,

$$\int \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + (x + 1)^2}} \cdot \frac{x + 1}{\sqrt{2 + (x + 1)^2}} \right) + C_2, C_2 \in \mathbb{R},$$

ou escrito de forma simplificada,

$$\int \frac{2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2 + (x+1)^2} \right) + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x+1)}{2 + (x+1)^2} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Exercício 5.9** Calcule:

1.  $\int \frac{1}{(x-2)^3} dx;$
2.  $\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} dx;$
3.  $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$
4.  $\int \frac{x^4 - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx;$
5.  $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} dx.$

## Soluções dos exercícios

### Exercício 5.1

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}x$	$x \in \mathbb{R}$

### Exercício 5.2

1.  $x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + C$    2.  $\frac{5}{4}x^4 + 2\sin x + C$    3.  $2t^4 - 4\sqrt{t^3} - \frac{1}{2t^2} + C$    4.  $\operatorname{tg} x + C$   
 5.  $\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C$    6.  $-\sqrt{3}\cos x + \frac{1}{2}\ln|x| + C$    7.  $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + x + C$    8.  $\frac{1}{\cos u} + C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ .

### Exercício 5.3

1.  $\frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$    2.  $\sin(g(x)) + C$    3.  $-\cos(g(x)) + C$   
 4.  $\operatorname{tg}(g(x)) + C$    5.  $-\cotg(g(x)) + C$    6.  $\arcsen(g(x)) + C$   
 7.  $e^{g(x)} + C$    8.  $\frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C$    9.  $\ln|g(x)| + C$ , com  $C \in \mathbb{R}$   
 10.  $\arctan((g(x))) + C$    11.  $-\ln|\cos(g(x))| + C$    12.  $\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{g(x)^{n+1}} + C$

### Exercício 5.5

1.  $\frac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C;$    5.  $\frac{1}{2}\arctan(e^{2x}) + C;$   
 2.  $\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C;$    6.  $-\ln|\cos x| + C;$   
 3.  $-2\sqrt{1-x} + C;$    7.  $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C;$   
 4.  $-\frac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + C;$    8.  $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C.$

### Exercício 5.6

1.  $x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C;$    2.  $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x \sec x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C;$   
 3.  $\frac{2}{45}\cos(2x)\sin(7x) - \frac{7}{45}\sin(2x)\cos(7x) + C;$    4.  $-\frac{3}{16}\sin(5x)\sin(3x) - \frac{5}{16}\cos(5x)\cos(3x) + C;$   
 5.  $\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C;$    6.  $\frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C;$   
 7.  $\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C$  (Sugestão:  $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2}x$ );   8.  $\frac{1}{2}(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)) + C;$   
 9.  $x\frac{(2x+5)^{11}}{22} - \frac{(2x+5)^{12}}{528} + C;$    com  $C \in \mathbb{R}$

### Exercício 5.7

1.  $\frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + 2 \sqrt[6]{x^3} - 6 \sqrt[6]{x} + 6 \arctan \sqrt[6]{x} + C;$
  2.  $e^x - \arctan(e^x) + C;$
  3.  $\frac{\ln^3 x}{3} - \ln x + \arctan(\ln x) + C;$
  4.  $2 \operatorname{sen} \sqrt{x} - 2 \sqrt{x} \cos \sqrt{x} + C;$
  5.  $\frac{\sqrt{(2x+3)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{2} + C;$
  6.  $\ln(4x) - \ln 2 \ln |\ln(4x)| + C;$
  7.  $-\frac{4\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}}{3} + C,$
- com  $C \in \mathbb{R}.$

#### Exercício 5.8

1.  $\operatorname{arcsen}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C;$
  2.  $\frac{2}{9} \sqrt{9x^2 + 6x + 2} - \frac{13}{9} \ln(\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - 3x - 1) + C;$
  3.  $-\frac{1}{2(3 + \ln x)^2} + C;$
  4.  $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C;$
  5.  $-2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5} \sqrt{\cos^5 x} + C;$
  6.  $-\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C;$
  7.  $-\frac{\sqrt{2}}{4} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2+x^2}) + C;$
  8.  $\frac{1}{2} x \sqrt{4+5x^2} - 2 \frac{\ln(-x\sqrt{5} + \sqrt{4+5x^2})}{\sqrt{5}} + C;$
  9.  $\sqrt{1-x} \left( \frac{4(1-x)^2}{5} - \frac{2(1-x)^3}{7} - \frac{2(1-x)}{3} \right) + C.$
- com  $C \in \mathbb{R},$

#### Exercício 5.9

1.  $-\frac{1}{2(x-2)^2} + C, \text{ com } C \in \mathbb{R};$
2.  $\frac{1}{18} \left( \frac{3-6x}{(x+1)^2} + 4 \ln(x-2) - 4 \ln(x+1) \right) + C, \text{ com } C \in \mathbb{R};$
3.  $-\frac{2}{x+1} - 3 \ln x + 6 \ln(x+1) + C, \text{ com } C \in \mathbb{R};$
4.  $\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x+1} - 3 \ln x + 6 \ln(x+1) + C, \text{ com } C \in \mathbb{R};$
5.  $-\frac{1}{x^2+1} + \frac{5}{2} \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$