Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2
Resolução

18 de novembro de 2022
Duração total: 2 horas

Questão 1 (65 pts)

1.1 Determine $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$.

1.2 Considere a função definida por

$$f(x) = \operatorname{arctg}(e^x - 1).$$

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

(b) Calcule a derivada da função f e estude f quanto a intervalos de monotonia.

(c) A função f admite máximo absoluto? E mínimo absoluto? Justifique a sua resposta.

(d) A função f admite assíntotas? Em caso afirmativo, determine-as.

(e) Justifique que f é invertível e determine a sua inversa, indicando expressão analítica, domínio e contradomínio.

Respostas

1.1 Faça-se $\theta = \arccos(\frac{5}{13})$, com $\theta \in [0, \pi]$ (o contradomínio de arccos).

Assim, $\cos(\theta) = \cos(\arccos(\frac{5}{13})) = \frac{5}{13}$, $\operatorname{sen}(\theta) = +\sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}$, e

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} = \frac{1}{5}\sqrt{13^2-5^2} = \frac{12}{5}$$

1.2 (a) Seja $g(x) = \exp(x) - 1$.
Então, $f(x) = \operatorname{arctg}(g(x))$ e

$$D_f = \{x \in D_g \ : \ g(x) \in D_{arctan}\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \exp(x) - 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

isto é, o domínio D_f de f é todo o $\mathbb{R}$.
Como o contradomínio da função exponencial é $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, tem-se $g(\mathbb{R}^+) =]-1, +\infty[$, donde $\operatorname{arctg}(]-1, +\infty[) =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ é o contradomínio CD_f de f.

(b) $f'(x) = (\operatorname{arctg}(e^x - 1))' = \frac{(e^x-1)'}{1+(e^x-1)^2} = \frac{e^x}{1+(e^x-1)^2} > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
Logo, pelo critério da monotonia, a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$.

(c) A função f *não* admite nem mínimo nem máximo absoluto, porque o contradomínio de f é um intervalo aberto $CD_f =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, como foi visto na alínea (a).
Outra justificação, seria a de que f é estritamente crescente no seu domínio $\mathbb{R}$ (conferir a alínea (b)), e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(0-1) = -\frac{\pi}{4}, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

(d) Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$ não tem assíntotas verticais.
Por outro lado,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(0-1) = -\frac{\pi}{4} \ e \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

donde concluimos que a função f tem duas assíntotas horizontais: $y = -\frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{\pi}{2}$

(e) Como a função f é estritamente crescente (conferir a alínea (b)), então f é invertível, dado que é uma função injetiva.

Seja f^{-1} a função inversa de f.
O domínio de f^{-1} é o contradomínio de f, $D_{f^{-1}} =]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, e o contradomínio de f^{-1} é o domínio de f, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$,

$$f^{-1} :]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}.$$

Para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ tem-se que

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \operatorname{arctg}(e^x - 1) \Leftrightarrow \operatorname{tg}(y) = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = 1 + \operatorname{tg}(y) \Leftrightarrow x = \ln(1 + \operatorname{tg}(y)),$$

logo $f^{-1}(x) = \ln(1 + \operatorname{tg}(x))$ é a expressão analítica da função inversa de f

Questão 2 (40 pts)

2.1 Determine os seguintes limites

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x) - 2x + x^2}{\operatorname{sen}(2x) - 2x - x^2}$;

(b) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x})$.

2.2 (a) Enuncie o Teorema de Rolle.

(b) Sejam a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ números reais tais que $a_1+a_2+\ldots+a_n = 0$. Mostre que o polinómio $q(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$ tem pelo menos uma raiz real.

Respostas

2.1 (a) O limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x) - 2x + x^2}{\operatorname{sen}(2x) - 2x - x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Sendo $f(x) = \operatorname{sen}(2x) - 2x + x^2$ e $g(x) = \operatorname{sen}(2x) - 2x - x^2$ funções deriváveis em $\mathbb{R}$ podemos calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen}(2x) - 2x + x^2)'}{(\operatorname{sen}(2x) - 2x - x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - 2 + 2x}{2\cos(2x) - 2 - 2x}$$

Temos de novo uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ e podemos calcular de novo o

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2\cos(2x) - 2 + 2x)'}{(2\cos(2x) - 2 - 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{sen}(2x) + 2}{-4\operatorname{sen}(2x) - 2} = -1$$

Podemos então concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - 2 + 2x}{2\cos(2x) - 2 - 2x} = -1$$

e, consequentemente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x + x^2}{\operatorname{sen}(2x) - 2x - x^2} = -1.$$

(b) O limite $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x})$ é uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Como

$$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x} = \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}}$$

podemos usar esta expressão para calcular o limite, atendendo a que

$$(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}) = (x^2+x+1) - (x^2-x) = 2x+1.$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x}}$$

Colocando x em evidência:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}^{}\!\!{}_{}}} = 1.$$

2.2 (a) Teorema de Rolle: Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

(b) Vamos usar uma consequência do Teorema de Rolle que afirma que entre duas raízes (dois zeros) consecutivas duma função, derivável em $\mathbb{R}$, existe uma raiz da sua derivada.

Observe-se que o polinómio q é a derivada do polinómio $p(x) = a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$, ambas funções contínuas e deriváveis em $\mathbb{R}$.

Como $a_1+a_2+\ldots+a_n = 0$, pode-se afirmar que $p(1) = 0$. Mas, da expressão de p conclui-se que $p(0) = 0$. Temos assim dois zeros de p, e consequentemente, temos pelo menos um zero da sua derivada, q no intervalo $[0, 1]$.

Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2
Resolução

18 de novembro de 2022
Duração total: 2 horas

Questão 3 (65 pts)

3.1 Encontre a função real contínua que satisfaz

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ \\ f(0) = 2 \\ \\ f'(0) = 1 \end{cases}.$$

3.2 Determine as famílias de primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\operatorname{cotg}(x)} dx$ com $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ com $x \in]0, +\infty[$.

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\, dx$.

Respostas

3.1 Tendo em conta que

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg}(x) + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R},$$

$f'(x)$ é da forma $\operatorname{arctg}(x) + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Como $f'(0) = 1$, obtém-se $C_1 = 1$. Consequentemente,

$$f'(x) = \operatorname{arctg}(x) + 1.$$

Integrando novamente, obtém-se

$$\int (\operatorname{arctg}(x) + 1)\ dx = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

A técnica da integração por partes permite determinar as primitivas para $\operatorname{arctg}(x)$:

$$\int \operatorname{arctg}(x)\, dx = x \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que $f(0) = 2$, resulta que $C_2 = 2$. Assim, a função f que satisfaz as condições dadas é

$$f(x) = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x + 2.$$

3.2 (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\operatorname{cotg}(x)} dx = \int \sec(x)\operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + C,\ C \in \mathbb{R},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

(b) Considere-se a mudança de variável definida por

$$x = h(t) = t^2 \text{ com } t \in]0, +\infty[.$$

Observe-se que h é uma função derivável e invertível e que

$$t = h^{-1}(x) = \sqrt{x},\ x \in]0, +\infty[.$$

Como $h'(t) = 2t$ e $f(h(t)) = \dfrac{\sqrt{1-t}}{t}$, vamos determinar a família de primitivas $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t}}{t} \cdot 2t\, dt$:

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{t} \cdot 2t\, dt = 2\int (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{4}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Voltando à variável inicial, como $t = \sqrt{x}$, obtém-se:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = -\frac{4}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)-2}{x^2+4x+5}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{(2x+4)}{x^2+4x+5}\, dx - 2\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\, dx\right)$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \operatorname{arctg}(x+2) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Questão 4 (30 pts)

Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

4.1 Se uma função não está definida em a então

(A) $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe. ☐

(B) $\lim_{x\to a} f(x)$ pode ser 0. ☒

(C) $\lim_{x\to a} f(x)$ deve ser ∞. ☐

(D) nenhuma das afirmações acima. ☐

4.2 Se f é uma função contínua em $[a, b]$ então

(A) Existem m e M em $\mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. ☒

(B) Têm que existir extremos locais em $[a, b]$, mas pode não existir um máximo ou mínimo absoluto. ☐

(C) Qualquer máximo ou mínimo absoluto de f em $[a, b]$ ocorre ou nos extremos do intervalo ou num ponto do interior onde $f'(x) = 0$. ☐

(D) O contradomínio de f é $[f(a), f(b)]$. ☐

4.3 Se $f'(a)$ existe, $\lim_{x\to a} f(x)$

(A) tem que existir mas não temos informação suficiente sobre qual o seu valor. ☐

(B) é igual a $f(a)$. ☒

(C) é igual a $f'(a)$. ☐

(D) pode não existir. ☐

4.4 Sabemos que $f(1) = 1$ e que $f'(1) = 3$. Então, $(f(f(x)))'$ em $x = 1$ é

(A) 1. ☐

(B) 6. ☐

(C) 3. ☐

(D) 9. ☒