

Cónicas e Quádricas

Álgebra Linear e Geometria Analítica - ALGA A

Folha Prática 6

1. Determine a equação reduzida e classifique as cónicas definidas pelas equações:

(a) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$;

(b) $4xy - 2x + 6y + 3 = 0$;

(c) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$.

2. Determine a equação reduzida e classifique as quádricas definidas pelas equações:

(a) $x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 6y - 9 = 0$;

(b) $x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0$;

(c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z = 0$;

(d) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 2z + 1 = 0$;

(e) $3y^2 + 4xz + 6y + 1 = 0$;

(f) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z = 0$;

(g) $-x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$.

3. Determine os valores do parâmetro α para os quais a cónica definida por

$$5x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x - 2y + \alpha = 0$$

é uma elipse.

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que P é uma matriz ortogonal e calcule $P^T A P$.

(b) Determine a equação reduzida e classifique a cónica de equação $4xy + x + y = 0$.

5. Seja A o ponto de coordenadas $(0, 1, 1)$. Verifique que o conjunto dos pontos de \mathbb{R}^3 cuja distância a A é exactamente uma unidade mais do que a sua distância à origem é uma quádrica e classifique-a.

6. Identifique o lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^3 cuja distância ao ponto $(0, 0, -2)$ é a terça parte da distância ao plano de equação $z + 18 = 0$.