CÁLCULO 2

EDO's Lineares 1ª ordem

Se a EDO se pode escrever na forma:

$$a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y = b(x)$$

com a_0, a_1 e b funções dependentes apenas de x, então a EDO diz-se Linear de 1ª ordem.

Se $b(x) = 0 \longrightarrow$ EDO chama-se Linear homogénea

Esquema de resolução:

1. Escrever a EDO na forma $y' + p(x)y = q(x)$
   ↳ dividir tudo por $a_0(x)$
2. Calcular o Fator integrante:
   ↳ $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$
3. Multiplicar a EDO por $\mu(x)$:
   ↳ $\underbrace{\mu(x)\,y' + \mu(x)\,p(x)\,y}_{(\mu(x)\,y)'} = \mu(x)\,q(x)$
4. Integrar em ordem a x
   ↳ $\mu(x)\,y = \int \mu(x)\,q(x)\,dx$
   ↳ $y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\,q(x)\,dx$

Exemplo:

$$\underbrace{x}_{a_0(x)}\,y' \underbrace{-\,1}_{a_1(x)}\,y = \underbrace{x-1}_{b(x)} \qquad x > 0$$

Dividir por $a_0(x) = x$

$$\Leftrightarrow y' \underbrace{-\frac{1}{x}}_{p(x)}\,y = \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{q(x)}$$

Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} \underset{x>0}{=} e^{-\ln(x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$$

Multiplicar tudo por $\mu(x) = \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y}_{} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \int\left(\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow y = x\left[\int \frac{1}{x}dx - \int x^{-2}dx\right]$$

$$\Leftrightarrow y = x\left[\ln(x) + \frac{1}{x} + c\right]$$

$$\Leftrightarrow y = x\ln(x) + 1 + Cx \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

↳ Integral geral da EDO linear.

EXERCÍCIOS:

1. $y' + 2y = \cos x$
2. $x^3 y' - y - 1 = 0$
3. $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2+1}y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $x \neq 0$
4. $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{3}}$
5. $xy' + 2y = 4x^2 \wedge y(1) = 2$
6. $\frac{1}{x}y' - \frac{2y}{x^2} = x\cos(x)$, $x > 0$
7. $y' + y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
8. $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$
9. $y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{x}$, $x > 0$
10. $y' - 3y = 0$