Exercício 6.8 Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[\\ 2, & x \in [1,2[\\ 3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Mostre que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x-1, & x \in [1,2[\\ 3x-3, & x \in [2,3] \end{cases}$

b) Verifique que F é contínua em $[0,3]$.

Observação 6.2. Observe que

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x, & x \in [1,2[\\ 3x, & x \in [2,3] \end{cases}$$

não pode ser dado por $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

6.6.1 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

Teorema 6.15. *Seja f uma função contínua num intervalo I e $a \in I$. Se*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

para cada $x \in I$, então F é uma função diferenciável e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. Pelo teorema 6.14, a função F é contínua em I. O Teorema do Valor Médio para Integrais (teorema 6.13) diz-nos que, no intervalo $]x_0, x[$ (supondo $x > x_0$, o caso contrário é análogo), existe c tal que

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt = f(c)(x - x_0)$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c).$$

Pela continuidade da função f, $\lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)$. Como $\lim_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$, resulta que $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Corolário 1. *Se f é uma função contínua em I e $a \in I$, então f tem uma primitiva em I que é dada por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.*

O teorema 6.15 pode ser generalizado usando como extremos funções deriváveis.

Teorema 6.16. *Seja f uma função contínua no intervalo J e H a função definida por*

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt,$$

com g_1 e g_2 definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ tais que $g_1(I) \subseteq J$ e $g_2(I) \subseteq J$.

Se f é contínua em J e g_1 e g_2 são deriváveis em I, então

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x),$$

para todo o $x \in I$.

Demonstração. Comecemos por observar que $H(x) = F(g_2(x)) - F(g_1(x))$ com $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ e portanto,

$$H'(x) = (F(g_2(x)) - F(g_1(x)))' = (F(g_2(x)))' - (F(g_1(x)))'$$

e usando a derivada da função composta podemos afirmar que

$$(F(g_2(x)))' = F'(g_2(x))g_2'(x) \text{ e } (F(g_1(x)))' = F'(g_1(x))g_1'(x)$$

e, finalmente, pelo teorema 6.15, como $F'(x) = f(x)$, temos

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x).$$

□

Exercício 6.9

1. Seja $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \operatorname{arcsen} t\, dt$ uma função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule $F'(x)$.
2. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função dada por
$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$
3. Seja F a função dada por $F(x) = \int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du \right) dt$. Calcule $F''(x)$.
4. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$. Mostre que a função F dada por
$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t)dt$$
admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

6.6.2 Segundo Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

Teorema 6.17. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e F uma primitiva de f. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Habitualmente escrevemos $[F(x)]_a^b$ ou $F(x)|_a^b$ para denotar $F(b) - F(a)$.

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} G \ : \ & [a,b] \to \mathbb{R} \\ & x \to G(x) = \int_a^x f(t)dt. \end{aligned}$$

Por hipótese, F é uma primitiva de f em $[a,b]$. Do Primeiro T.F.C.I. podemos concluir que G é também uma primitiva de f em $[a,b]$. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in [a,b]$, $G(x) = F(x) + c$ (vimos no capítulo anterior que duas primitivas de uma mesma função apenas diferem de uma constante). Podemos determinar essa constante c. Em particular, para $x = a$, vem $G(a) = F(a) + c$. Como $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ tem-se que $c = -F(a)$.

1º

4. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$.
Mostre que a função F dada por

$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t)dt$$

admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

$$F'(x) = f(6x - x^2) \times (6 - 2x) - 0 = \underbrace{f(6x - x^2)}_{>0}(6 - 2x)$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

F tem um máximo local no ponto $x = 3$.

x		3	
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Por outro lado $G(b) = F(b) + c$ e, como $G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ então,

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) + c = F(b) - F(a).$$

□

Exemplo 6.12. Vejamos alguns exemplos simples de cálculo do integral definido, usando uma primitiva da função integranda.

1. $\displaystyle\int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}.$
2. $\displaystyle\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-e}^{-1} = \ln 1 - \ln e = -1.$
3. $\displaystyle\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

Exercício 6.10 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_0^5 xe^{3x^2+4} dx;$
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx;$
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)} dx.$

6.6.3 Substituição no integral definido

O processo de substituição no integral definido torna-se mais simples do que nas primitivas, já que não será necessário regressar à variável inicial...se a substituição for bem feita!

Exemplo 6.13. Consideremos o integral definido $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$

Podemos calcular uma primitiva da função $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ por substituição, usando a mudança de variável dada por $t^2 = x + 1$, com $t > 0$. Neste caso $dx = 2tdt$ e a função a primitivar será:

$$\int \frac{t^2-1}{t} 2t\, dt = \frac{2}{3} t^3 - 2t + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial temos

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Pelo segundo T.F.C.I. (teorema 6.17) vem

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}\ \Big|_0^3 = \frac{8}{3}.$$

Contudo, podemos fazer a substituição diretamente no integral definido. Atendendo a que $x \in [0, 3]$, pela substituição acima referida $t^2 = x + 1$, com $t > 0$, conduz a $t \in [1, 2]$ (para $x = 0$ vem $t = 1$ e para $x = 3$ vem $t = 2$). Assim,

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int_1^2 (t^2 - 1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

Exercício 6.10 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\int_0^5 \underbrace{xe^{3x^2+4}}_{\text{contínua}} dx$; $= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{5-0}{n}} =$

$$\| \qquad = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{5}{n} = \dots$$

$$\frac{1}{6}\int_0^5 \underbrace{6x e^{3x^2+4}}_{f(x)} dx = \frac{1}{6}\Big[\underbrace{e^{3x^2+4}}_{F(x)}\Big]_0^5 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(e^{3\times 5^2+4} - e^{0+4}\right) = \frac{1}{6}\left(e^{79} - e^{4}\right)$$

2. $\int_0^2 \frac{1}{1+(\underbrace{2x}_{u})^2} dx$; $= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{1+(2x)^2} dx =$

$$= \frac{1}{2}\Big[\arctan(2x)\Big]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\arctan(4) - \arctan(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(4).$$

3. $\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)}dx.$ $= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u(u+2)}\,du =$

$$\frac{1}{u(u+2)} = \frac{A}{u}_{(u+2)} + \frac{B}{u+2}_{u} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{u(u+2)} = \frac{A(u+2)+Bu}{u(u+2)} \Leftrightarrow$$

$$1 = A(u+2) + Bu$$

$u=0 \Rightarrow 1 = A\cdot 2 \Leftrightarrow A = 1/2$

$u=-2 \Rightarrow 1 = B\times(-2) \Leftrightarrow B = -1/2$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \left(\frac{\frac{1}{2}}{u} + \frac{-1/2}{u+2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\ln(u) - \ln(u+2)\Big]_1^3 = \frac{1}{4}\big(\ln(3) - \ln(5) - \ln(1) + \ln(3)\big)$$

Exemplo 6.13. Consideremos o integral definido $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx.$ $=$

$$\boxed{x+1 = t^2}$$

$$x = \underbrace{t^2-1}_{h(t)}, \quad t>0$$

$$dx = 2t\,dt$$

$$x = h(t)$$

$$t = h^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$$

$$h^{-1}(0) = \sqrt{0+1} = 1$$

$$h^{-3}(3) = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\int_1^2 \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}} \cdot 2t\,dt = 2\int_1^2 \frac{t^2-1}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t}\,dt =$$

$$= 2\int_1^2 t^2-1\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^2 = 2\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$= 2\left(\frac{7}{3}-1\right) = \frac{8}{3}$$

Teorema 6.18. *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e $h:I\to\mathbb{R}$ é derivável, invertível e $h(I)\subseteq[a,b]$, sendo I um intervalo de $\mathbb{R}$, então,*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t))h'(t)dt.$$

No exemplo 6.13 a função f definida em $[a,b]=[0,3]$ é dada por $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. A função h é definida por $h(t)=t^2-1$ em $I=[1,2]$. A função h é invertível neste intervalo e $h^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$, sendo $h^{-1}(a)=h^{-1}(0)=1$ e $h^{-1}(b)=h^{-1}(3)=2$. Temos então que

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \underbrace{\frac{t^2-1}{t}}_{f(h(t))}\underbrace{2t}_{h'(t)}dt.$$

Proposição 6.2. *Sejam $D\subseteq\mathbb{R}$ um conjunto simétrico, isto é, para todo o $x\in D$, o seu simétrico também pertence a D ($-x\in D$), e $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer subconjunto de D do tipo $[-a,a]$. Então:*

1. *se f é uma função par, isto é, $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in D$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$;*
2. *se f é uma função ímpar, isto é, $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in D$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$.*

Demonstração. Comecemos por observar que, sendo f integrável em $[-a,a]$,

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx.$$

Consideremos agora o integral $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\,dx$ e a mudança de variável $x=-t$. Então:

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx=\int_a^0 f(-t)\,(-dt)=-\int_a^0 f(-t)\,dt=\int_0^a f(-t)\,dt.$$

1. se f é uma função par, $\displaystyle\int_0^a f(-t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt$ e portanto,

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx.$$

2. se f é uma função ímpar, $\displaystyle\int_0^a f(-t)\,dt=-\int_0^a f(t)\,dt$ e portanto,

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=-\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=0.$$

.

□

6.7 Aplicação do integral de Riemann ao cálculo de áreas

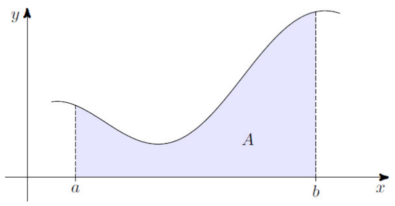


Figura 6.10: Área sob o gráfico da função f.

Seja f uma função não negativa e contínua num intervalo $[a, b]$. A área A da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$ (ver figura 6.10) é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$ então $\int_a^b |f(x)|dx$ é a área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$.

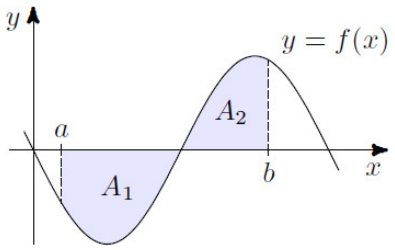


Figura 6.11: Área da região limitada pelo gráfico da função f, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

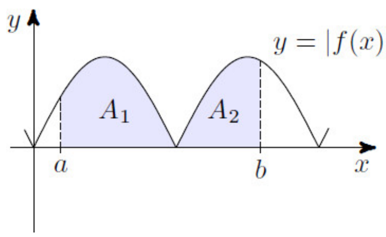


Figura 6.12: Área da região limitada pelo gráfico da função $|f|$, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

Exercício resolvido 6.2. Considere a função real de variável real dada por $f(x) = \dfrac{x^3}{2x - 2}$.

1. Estude o sinal da função f.
2. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano limitada pelo eixo Ox, pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ e pelo gráfico de f.

Resolução do exercício 6.2. Para determinar o sinal da função f podemos construir um quadro de sinal

		0		1	
x^3	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = \frac{x^3}{2x-2}$	$+$	0	$-$	ND	$+$

Portanto, $f(x) \leq 0$, em $[0, 1[$ e $f(x) > 0$ em $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

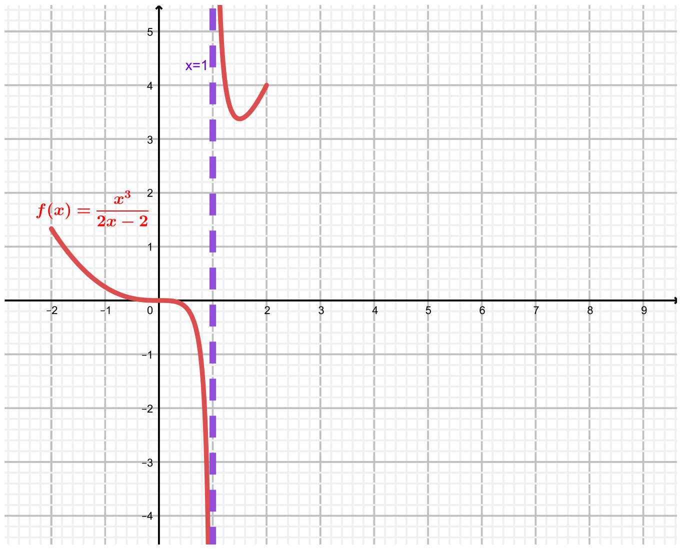


Figura 6.13: Esboço do gráfico da função f.

A área pedida é dada por

$$A = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{2x-2}\, dx + \int_{0}^{-\frac{1}{2}} \frac{x^3}{2x-2}\, dx$$

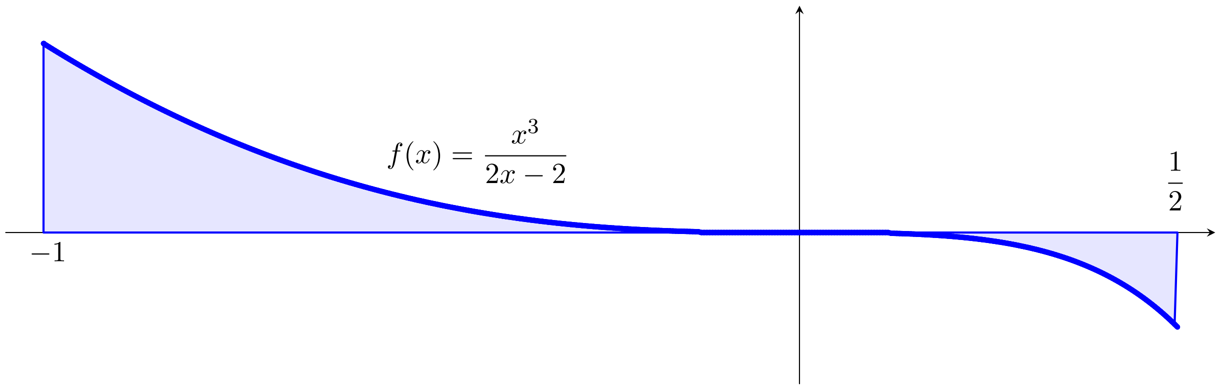


Figura 6.14: Área referente ao exercício 6.2.

Uma primitiva de $f(x) = \frac{x^3}{2x-2}$ [1] é $F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right)$ e portanto,

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right)\Bigg|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}.$$

6.7.1 Área compreendida entre duas curvas

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$. A área A da região do plano limitada inferiormente pelo gráfico de g e limitada superiormente pelo gráfico de f e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, é dada por

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

[1]Note que $\frac{x^3}{2x-2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)}$.

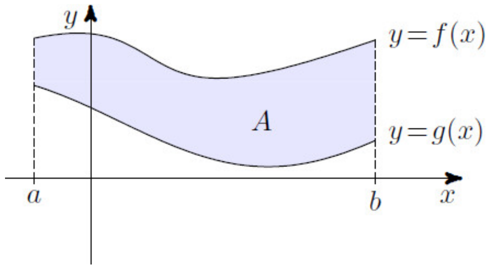


Figura 6.15: Área compreendida entre duas funções não negativas em $[a, b]$.

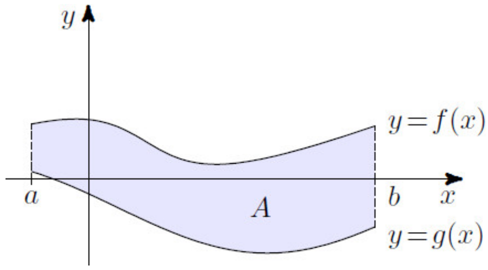


Figura 6.16: Área compreendida entre duas funções em $[a, b]$.

Observe que, em geral, a área A da região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo gráfico de g e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, é dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Exercício resolvido 6.3. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$.

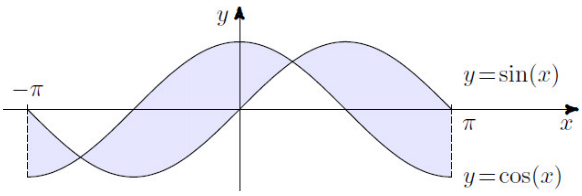


Figura 6.17: Área da região definida no exercício 6.3.

Resolução do exercício 6.3. No intervalo $[-\pi, \pi]$ as duas funções intersetam-se em $-\dfrac{3\pi}{4}$ e em $\dfrac{\pi}{4}$.
A área sombreada é dada por

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x - \cos x|\, dx.$$

Atendendo ao gráfico e aos pontos de interseção das duas funções, podemos concluir que

$$A = \int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx + \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx.$$

Assim,

$$A = (-\cos x - \operatorname{sen} x)|_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} + (\operatorname{sen} x + \cos x)|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x + \operatorname{sen} x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 4\sqrt{2}.$$

Exercício 6.11 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por $f(x) = \dfrac{1 + \cos^2 x}{1 + e^{2x}}$ e $g(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 + e^{2x}}$, em $[\ln 2, \ln 5]$.
Mostre ainda que, quaisquer que sejam a, $b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, a área da região limitada pelos gráficos das duas funções em $[a, b]$ é dada por $\dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1 + e^{2a}}{1 + e^{2b}} \right) + b - a$.

Exercício 6.12 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$ e pela reta que lhe é tangente no ponto $(2, 2)$.

6.8 Exercícios do capítulo

Exercício 6.13 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\cos(e^{-x})\,dx$ ✓
2. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ (Suggestão: Faça a substituição $t=\sqrt{x}$) ✓

Exercício 6.14 Considere a função F definida por

$$F(x)=\int_{x^2}^{k\ln(x)} e^{-t^2}\,dt$$

1. Determine a expressão da derivada de F, $F'(x)$.
2. Determine $k\in\mathbb{R}$ de modo a que $F'(1)=0$.

Exercício 6.15 Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=xe^x$.

1. Diga, justificando, se a função f é integrável em qualquer intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ com $b>a$.
2. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x=-1$ e $x=1$ e compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas.

Exercício 6.16 Considere a função F definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\arctan t\,dt$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

1. Determine $F'(x)$ e o seu domínio.
2. Estude F quanto à existência de extremos locais. ✓

Exercício 6.17 Considere a função F definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} t\ln(1+e^t)\,dt$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

1. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.
2. Estude F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Exercício 6.18 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região assinalada na figura

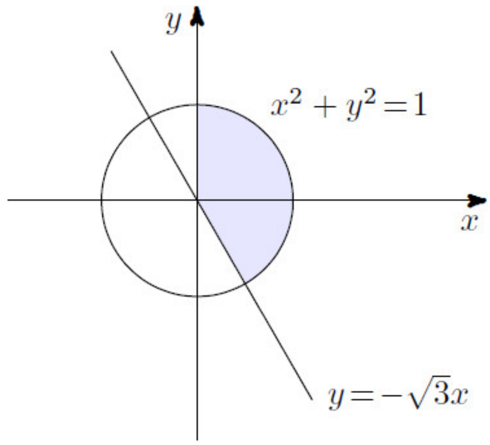


Figura 6.18: Área da região definida no exercício 6.18.

Exercício 6.19 Seja $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 \wedge y \geq x-1 \wedge y \leq 4\right\}$.

1. Represente geometricamente a região A.
2. Calcule a área da região A.

Exercício 6.20 Determine a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos de $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ e $g(x) = x$ e pelas retas de equações $x = -2$ e $x = 2$.

Exercício 6.21 Considere a função F dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

para $x \in [1, +\infty[$. Determine $F(1)$.

Exercício 6.22 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ k & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de k a função f é integrável no intervalo $[-1, 1]$.
2. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, definidas no intervalo $]0, +\infty[$.
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1/e$ e $x = e$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Exercício 6.23 Considere a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} \, dt$. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

Exercício 6.24 Prove que se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx.$$

Soluções dos exercícios

Exercício 6.1 1. $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1) = \dfrac{125}{216}$; 2. $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_2) = \dfrac{23}{72}$; 3. $S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}') = \dfrac{7}{32}$.

Exercício 6.2 $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1) = -\dfrac{125}{216}$.

Exercício 6.4 $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)dx = 12$.

Exercício 6.5

1. f é contínua em $[-1, 2]$, logo, pelo teorema 6.1 é integrável.
2. g e limitada em $[1, 5]$ e descontínua apenas nos inteiros $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
3. h é limitada em $[0, 3]$ e descontínua em $x = 1$, logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
4. A função h não é limitada em $[0, 1]$, logo, pelo teorema 6.5 não é integrável neste intervalo.
5. A função i não é limitada em $[0, \pi]$ já que $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} i(x) = +\infty$, logo, pelo teorema 6.5, i não é integrável neste intervalo.

Exercício 6.7 Sim. $\displaystyle\int_0^2 g(x)dx = 2$

Exercício 6.9

1. $F'(x) = 2(x+1)\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\, dt + (x+1)^2 \cos x\, x$.
2. $k = \dfrac{2}{e}$.
3. $F''(x) = e^{-x^2}$.
4. $x = 3$ é um maximizante de F.

Exercício 6.10

1. $\displaystyle\int_0^5 xe^{3x^2+4}dx = \frac{1}{6}\left(e^{79} - e^4\right)$;
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan 4$;
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{18}{10}$.

Exercício 6.11 $A = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{1+e^{2x}}\, dx$.

Exercício 6.12 $A = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 2x + 2)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)\, dx$.

Exercício 6.13 1. $\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{e}\right)$; 2. $2(1 + \ln 2)$.

Exercício 6.14 1. $F'(x) = e^{-k^2 \ln^2 x} - 2xe^{-x^4}$; 2. $k = \dfrac{2}{e}$.

Exercício 6.15 1. Sim, porque é uma função contínua em $\mathbb{R}$, logo também o é em qualquer intervalo $[a, b]$. 2. $2 - 2/e$.

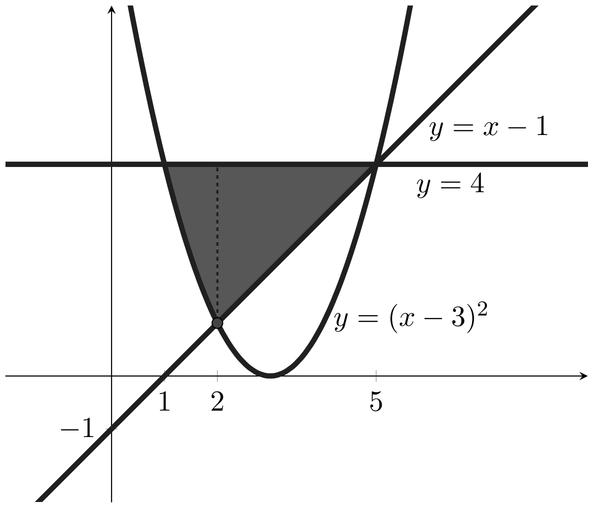
Exercício 6.16 1. $F'(x) = 2xe^{-x^4} \arctan(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$;   2. F admite um mínimo absoluto em $x = 0$ sendo $F(0) = 0$. Não tem máximo.

Exercício 6.17 1. $F'(x) = 2x^3 \ln(1 + e^{x^2})$;   2. F tem um mínimo absoluto em $x = 0$ e é zero; é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

Exercício 6.18 $A = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}\, x\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx.$

Exercício 6.19

1.



2. $A = \dfrac{37}{6}$.

Exercício 6.20 $A = \dfrac{32}{3}$.

Exercício 6.21 $A = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercício 6.22 1. Para qualquer valor de k a função é secionalmente contínua (note que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$), logo integrável em qualquer intervalo de números reais. Em particular, se $k = 0$ a função é contínua.   2. $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$; 3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4e^2} + \dfrac{e^2}{4}$.

Exercício 6.23 O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$

Exercício 6.24 Se f é contínua em $\mathbb{R}$, então é integrável em qualquer intervalo da forma $[0, a]$, com $a \in \mathbb{R}$. Efetuando a mudança de variável $u = a - x$ ($x = a - u$, $dx = -1 \cdot du$, $x = 0 \Rightarrow u = a$ e $x = a \Rightarrow u = 0$), obtém-se

$$\int_0^a f(a-x)\, dx = \int_a^0 f(u)(-1) du = -\int_a^0 f(u)\, du = \int_0^a f(u)\, du = \int_0^a f(x)\, dx,$$

o que demonstra a propriedade pedida.

Exercício 6.16 Considere a função F definida por $F(x) = \int_0^{\overbrace{x^2}^{g_1(x)}} \underbrace{e^{-t^2} \arctan t}_{f(t)}\, dt$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

1. Determine $F'(x)$ e o seu domínio.
2. Estude F quanto à existência de extremos locais.

1. $F'(x) = f(\underbrace{x^2}_{g_1(x)}) \cdot \underbrace{2x}_{g_1'(x)} - f(0) \times 0 = \underbrace{e^{-(x^2)^2} \cdot \arctan(x^2)}_{f(x^2)} \cdot 2x$

$= 2x\, \underbrace{e^{-x^4}}_{>0}\, \underbrace{\arctan(x^2)}_{\geq 0}$

2. $F'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

x		0	
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	0	$\nearrow$

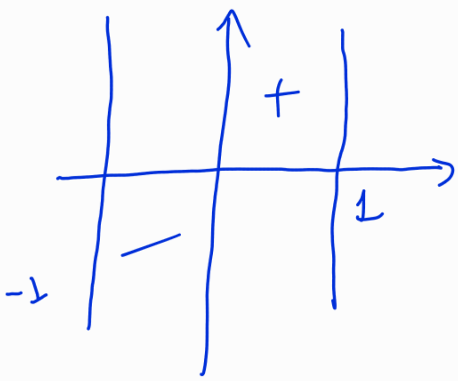
Exercício 6.15 Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = xe^x$.

1. Diga, justificando, se a função f é integrável em qualquer intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com $b > a$.
2. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -1$ e $x = 1$ e compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas.

1. Sim pois é contínua em $\mathbb{R}$.

2. Área $=$

$$- \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}$$



$$\int_0^1 \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{e^x}_{u'}\, dx =$$

$$\boxed{\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx}$$

$$= \left[e^x \cdot x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1\, dx$$

$$= e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 - \left[e^x\right]_0^1 = e - e + 1 = 1$$