vtexdvifalse vtexpdffalse vtexpsfalse vtexhtmlfalse vtexgexfalse
vtexdvitrue
0 if tex.enableprimitives thenΩtex.enableprimitives(Ω'pdf@',Ω'primitive', 'ifprimitive', 'pdfdraft-
mo tmode'})Ωtex.enableprimitives('', 'luaescapestring')ΩendΩ

Universidade de Aveiro — 13 de novembro de 2019

Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2 — Duração: 2 horas

Leia com atenção

- Justifique todas as suas respostas, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
- Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
- Se desistir neste teste manter-se-á em avaliação discreta e não pode realizar o exame final.

1. **(60 pts)** Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(-x) & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

   (a) A função f é contínua em $x = 0$? Justifique.

   (b) A função f é derivável em $x = 0$? Justifique.

   (c) Indique, caso existam, os extremos de f no intervalo $]-\infty, 0[$.

   (d) Seja g a restrição de f a $\mathbb{R}^+$. Caracterize a função g^{-1}, indicando expressão analítica, domínio e contradomínio.

   (e) Seja $h(x) = e^x f(x)$ com $x \in [0,1]$. Prove que existe $c \in]0,1[$ tal que $h'(c) = (e-2)\dfrac{\pi}{4}$.

2. **(50 pts)** Determine as seguintes famílas de primitivas

   (a) $\displaystyle\int x\,(x^2+2019)^{2020}\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int \frac{(1+2\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\,dx$;

   (c) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$.

3. **(25 pts)** Determine a família de primitivas $\displaystyle\int \sqrt{16-4x^2}\,dx$ usando a substituição $x = 2\cos t$, com $t \in [0, \pi]$.

4. **(25 pts)** Determine a expressão analítica da função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ que verifica as condições: $f'(x) = (1+\ln x)^2$ e $f(1) = 5$.

5. **(20 pts)** Seja f a função real de variável real definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2-1) + 2x^2.$$

   Prove que f tem exatamente dois zeros em $\mathbb{R}$.

6. **(20 pts)** Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ tenha limite finito quando x tende para 0 e calcule esse limite.

Uma ajuda

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}; \quad \operatorname{cotg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}; \quad \operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2};$$

$$1+\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u; \quad 1+\operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v))$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v))$$

$(e^u)' = u'\, e^u$	$(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$	$(u^r)' = r\, u^{r-1} u'$
$(a^u)' = a^u \ \ln a\, u' (a>0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\log_a \|u\|)' = \frac{u'}{u \ln a} \ (a>0 \text{ e } a\neq 1)$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$	$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$	$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$(\sec u)' = \sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u \ \operatorname{cotg} u\, u'$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

$P(u' \sec u) = \ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$	$P(u' \operatorname{cosec} u) = -\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$

P - primitiva