CÁLCULO 2

EDO's Exatas

Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ duas funções contínuas num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. A equação na forma:

$M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$ ou $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

diz-se **exata** se existe uma função $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que:

$$\boxed{M(x,y) = \frac{dF}{dx}} \quad \text{e} \quad \boxed{N(x,y) = \frac{dF}{dy}}$$

ou, de outra forma:

$$\boxed{\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}}$$

Esquema de resolução:

1) verificar que $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

2) Integrar $M(x,y)$ em ordem a $x \to F(x,y)$

3) Integrar $N(x,y)$ em ordem a $y \to F(x,y)$

4) Compilar as expressões obtidas em 2 e 3

Exemplo: $\underbrace{y^2}_{M(x,y)} dx + \underbrace{2xy}_{N(x,y)} dy = 0$

$\frac{dM}{dy} = (y^2)'_y = 2y$ e $\frac{dN}{dx} = (2xy)'_x = 2y$

iguais

$\therefore$ A EDO é exata.

Como $M(x,y) = y^2 = \frac{dF}{dx}$, então:

$F(x,y) = \int y^2\,dx = y^2 x + C(y)$

Como $N(x,y) = 2xy = \frac{dF}{dy}$, então:

$F(x,y) = \int 2xy\,dy = 2x\frac{y^2}{2} + C(x) = xy^2 + C(x)$

A função F tem de verificar as duas condições

Então podemos considerar $F(x,y) = xy^2$

O **integral geral de uma EDO exata** escreve-se como: $F(x,y) = C, \ C \in \mathbb{R}$

Neste exemplo seria $xy^2 = C, \ C \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS:

1. $(2x + \operatorname{sen} y)dx + x\cos y\,dy = 0$
2. $(2xy - x - e^y)dx = (xe^y + y - x^2)dy$
3. $\left(\frac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0$
4. $(y\cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1)y' = 0$
5. $(2t - y)dt + (2y - t)dy = 0$
6. $(\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))dx + (1 + x^2\cos(xy))dy = 0$
7. $(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0$