



Notas e Problemas de  
**Modelação de Sistemas Físicos**  
usando *Python*

*Parte II*

Vitor Torres

2022  
Departamento de Física  
**Universidade de Aveiro**



## **Índice:**

### **Parte I**

1. Física: Medição e modelação.
2. Movimento a uma dimensão.

### **Parte II**

3. Forças e vetores
4. Leis de Newton: Movimento no plano e no espaço
5. Leis de Conservação: Energia e Potência.
6. Leis de Conservação: Momento e colisões

### **Parte III**

7. Oscilações Mecânicas
8. Osciladores Forçados: Ressonância e Caos.
9. Osciladores acoplados: Modos Normais e Ondas

Formulário

Soluções dos problemas

# **Capítulo 3**

## **Forças e Vetores**

### **Sumário**

Força: intensidade, direção e sentido

Cálculo vetorial: Adição, produto escalar e produto vetorial entre vetores.

Sistema cartesiano de eixos. Coordenadas de vetores.

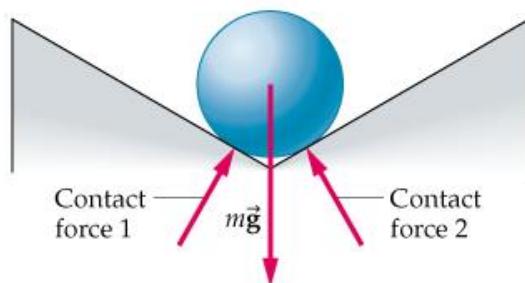
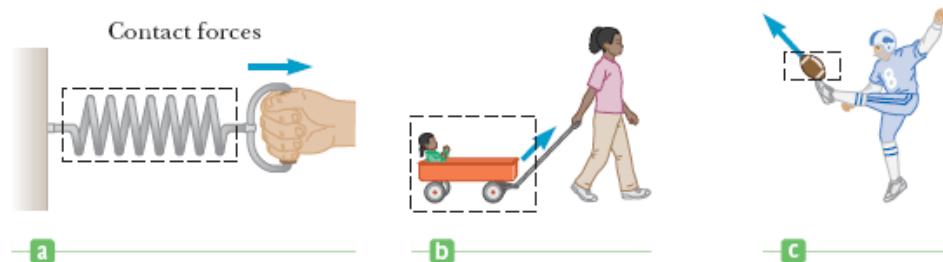
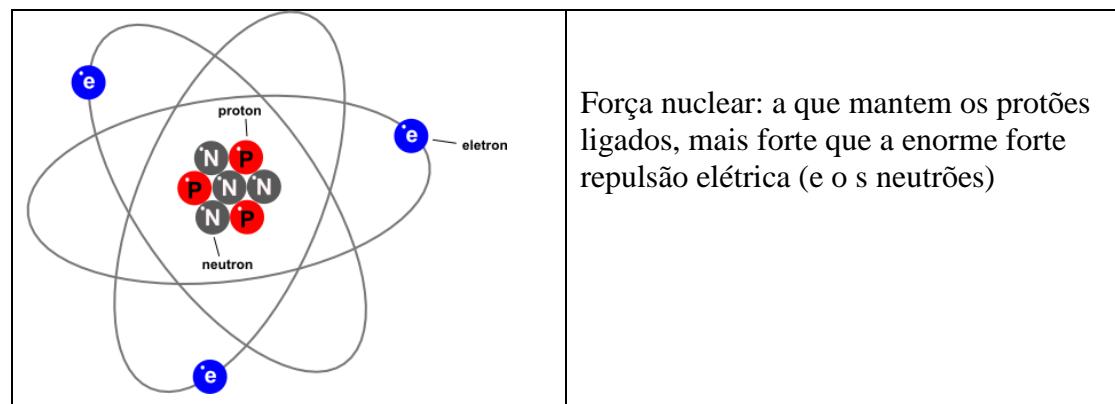
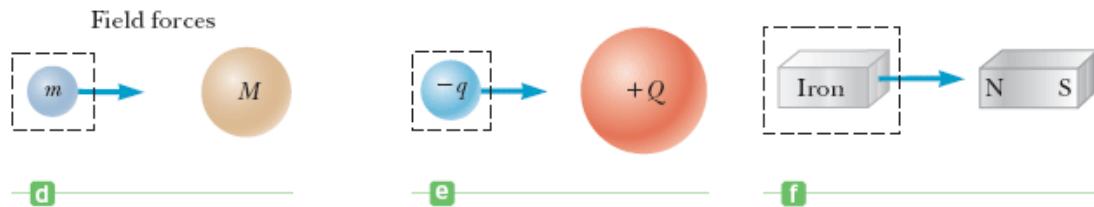
As três leis de Newton.

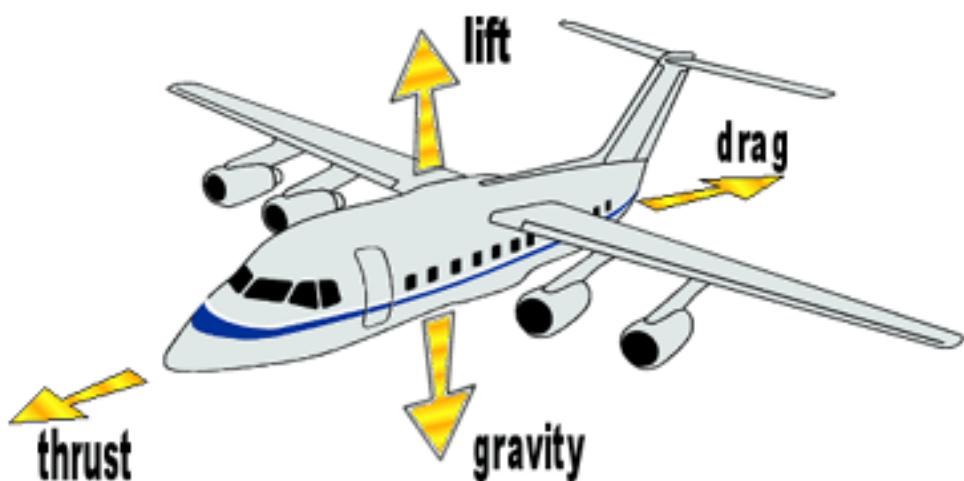
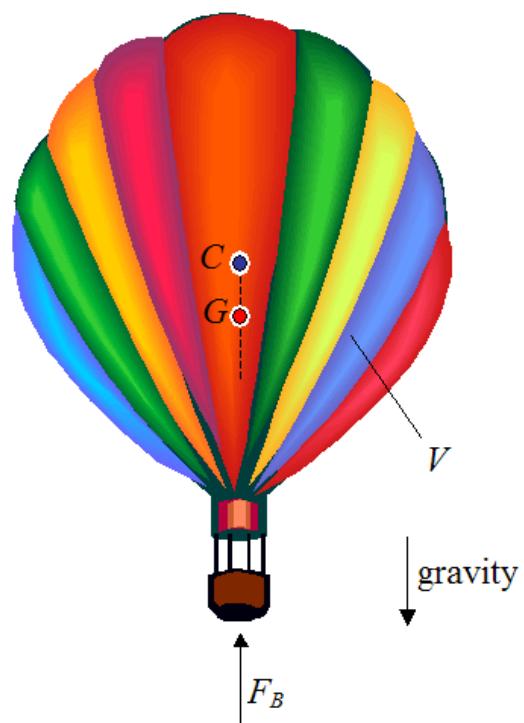
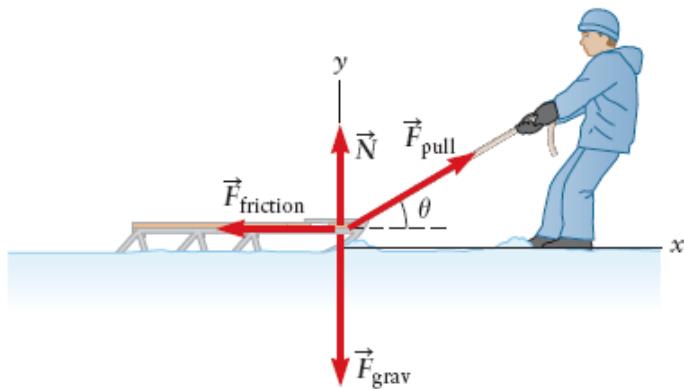
### **Python**

Vetores e operações entre vetores.

### 3.1 Tipo de Forças

Em mecânica, a área que estuda o movimento de corpos, é muito importante se se souber as forças aplicadas a um corpo. Pela 2<sup>a</sup> lei de Newton, se soubermos as forças aplicadas saberemos a aceleração, a velocidade e a lei do movimento.

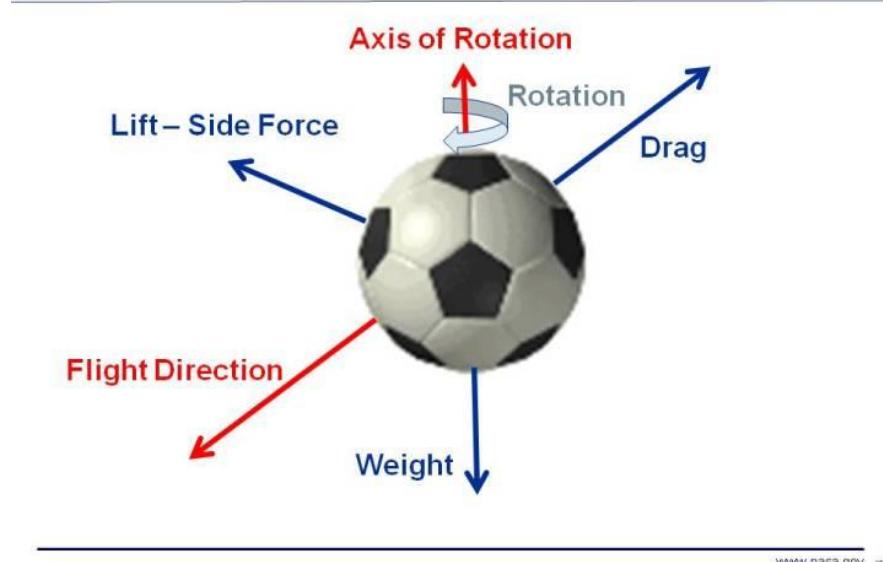




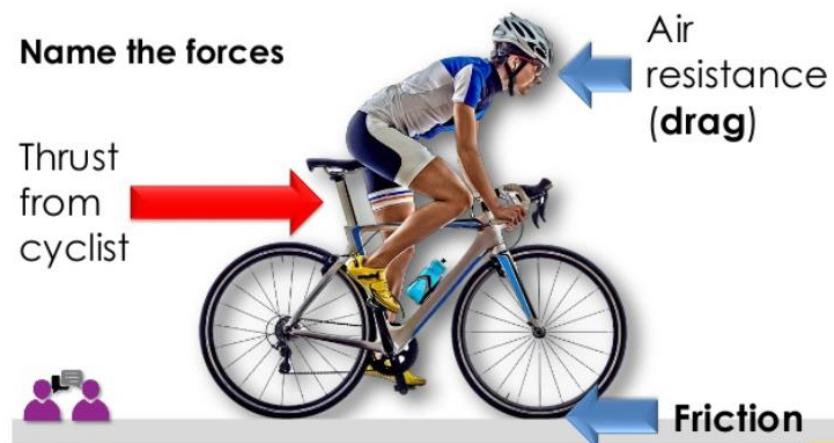
National Aeronautics and Space Administration



## Forces on a Soccer Ball



www.nasa.gov



**FORÇA é um VETOR.** Indica-se por  $\vec{F}$  e a sua intensidade por  $|\vec{F}|$ .  
Esta é a notação que se vai seguir.

Existem outros vetores, como por exemplo a velocidade (de um carro), a posição (de uma cidade), ...

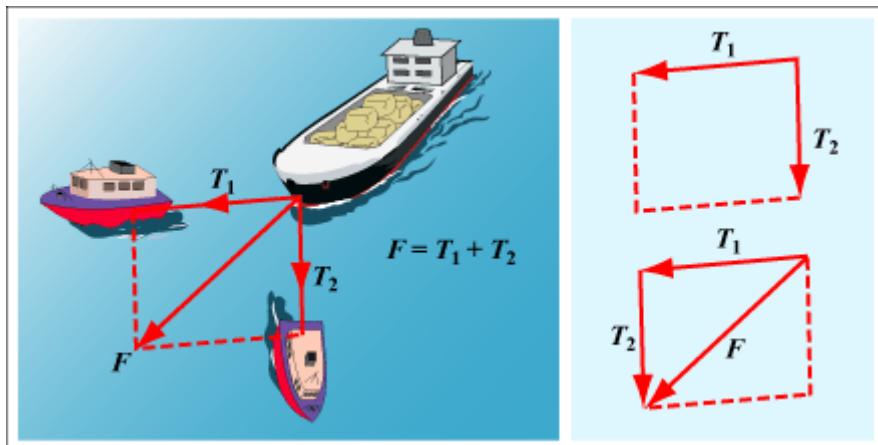
A posição de um objeto é dado pelo GPS, que fornece 2 números, a latitude e a longitude. Para os aviões é necessário também a altitude, requerendo no total três números para especificar a posição. O espaço que nos envolve é a 3 dimensões.

Outras quantidades que são especificados só por um número chamam-se escalares, por exemplo a temperatura, energia, .... Muitos calares podem ser negativos.

Outros vetores: lista ordenada de números

### 3.2 Cálculo vetorial

#### Vetores e operações em vetores



Vetor  $\vec{a}$   $\longrightarrow \vec{a}$

$|\vec{a}|$  = módulo, intensidade, magnitude ou comprimento de  $\vec{a}$

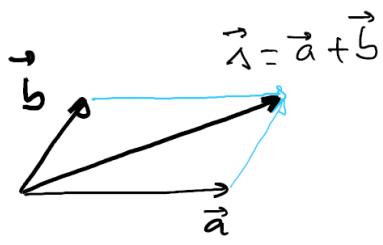
$\vec{c} = \lambda \vec{a}$  outro vetor  $\vec{c}$ ;  $|\vec{c}| = |\lambda| |\vec{a}|$

Vetor unitário

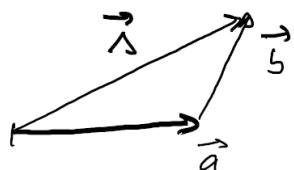
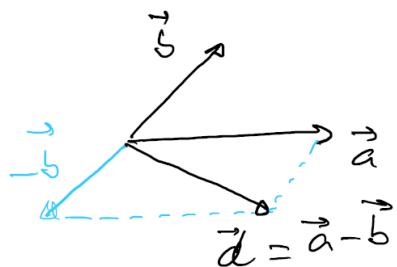
ou vetor  $\hat{a}$ ,  $|\hat{a}| = 1$ : indica direção e sentido

$$\text{ex: } \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow \vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}$$

Soma de 2 vetores

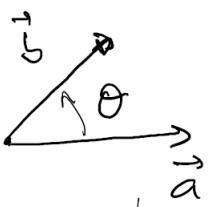
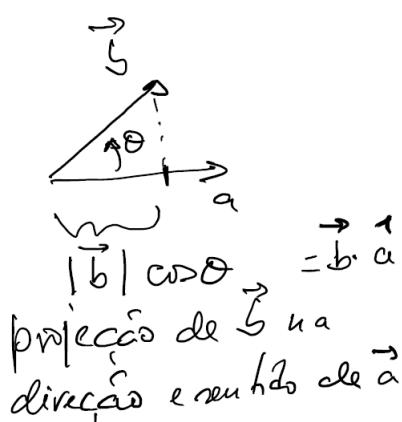


Diferença 2 vetores



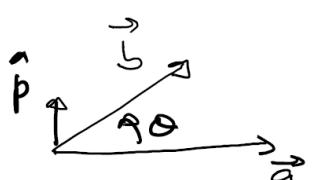
Produto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Ou produto interno  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$ 

Produto Vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{p}$$



Ou, produto externo

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

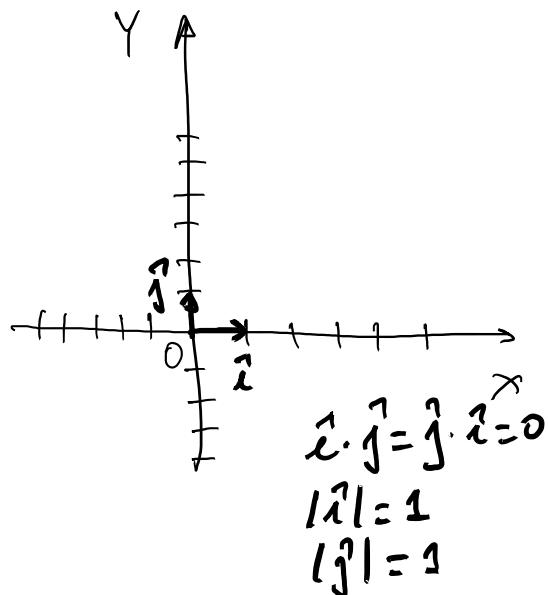
$\hat{p}$  = vetor unitário  
perpendicular ao plano formado por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

Sentido: observador vê  
vetor  $\vec{a}$  ir para  $\vec{b}$   
no sentido direto

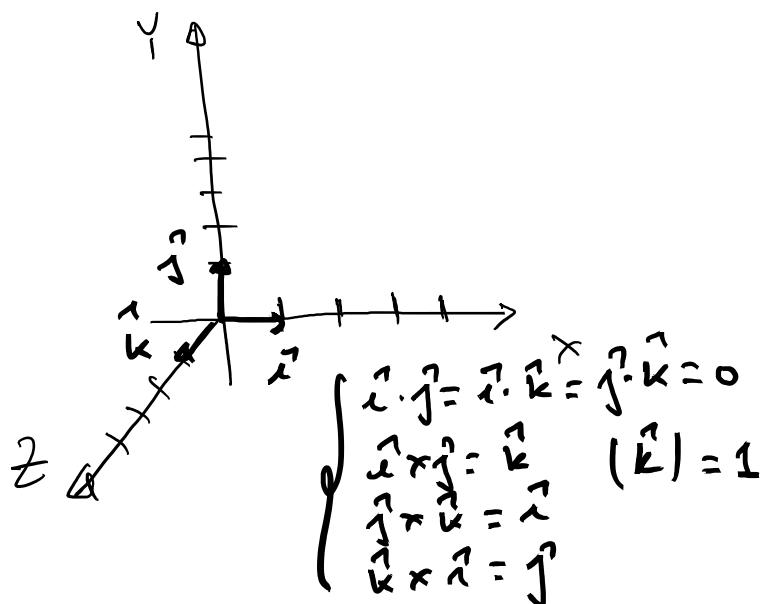
direto:      antidireto:

## Sistema de eixos cartesiano

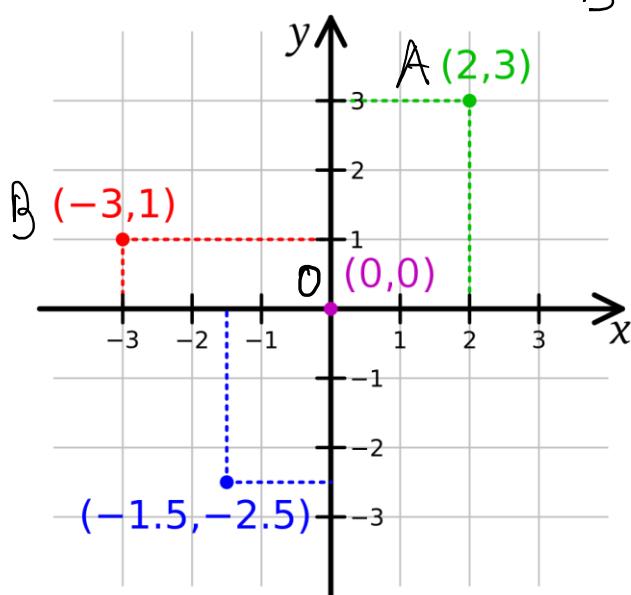
2 dimensões



3 dimensões



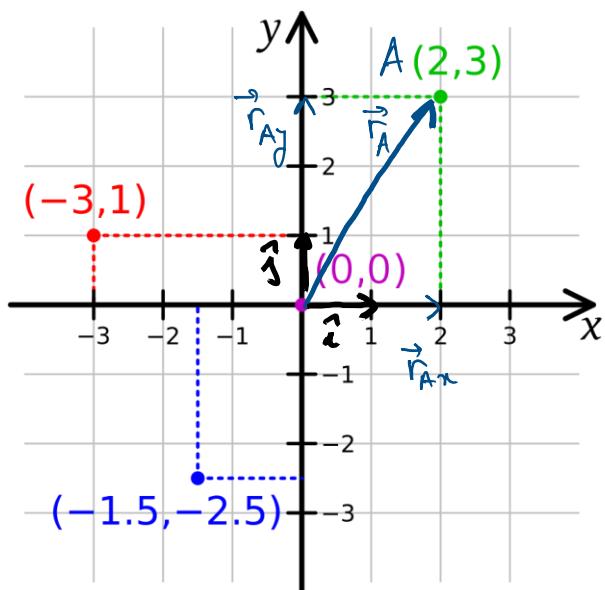
Posição dos pontos



A em  $(2, 3)$   
 O em  $(0, 0)$  origem do sistema  
 B em  $(-3, 1)$   
 C em  $(-1.5, -2.5)$

Coordenadas abscissa ( $x$ )  
 ordenada ( $y$ )

Posição A é também indicada por um vetor,  $\vec{r}_A$ .  
Com origem no ponto origem e termina no ponto A.



$$\vec{r}_A = \vec{r}_{Ax} + \vec{r}_{Ay}$$

$$\vec{r}_{Ax} = x_A \hat{i} = 2 \hat{i}$$

$$\vec{r}_{Ay} = y_A \hat{j} = 3 \hat{j}$$

e

$$\vec{r}_A = x_A \hat{i} + y_A \hat{j}$$

A 3 dimensões um vetor  $\vec{r}$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

*Componentes do vetor  $\vec{r}$  un eixo  $Ox, Oy, Oz$ , respectivamente.*

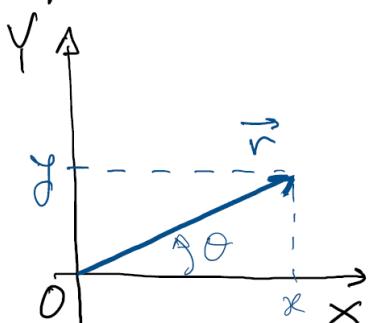
Tendo  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$   
 $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= a_x b_x \hat{i} \cdot \hat{i} + a_x b_y \hat{i} \cdot \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \cdot \hat{k} \\ &\quad + a_y b_x \hat{j} \cdot \hat{i} + a_y b_y \hat{j} \cdot \hat{j} + a_y b_z \hat{j} \cdot \hat{k} \\ &\quad + a_z b_x \hat{k} \cdot \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \cdot \hat{j} + a_z b_z \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \equiv \text{e um escalar}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

Espaço a 2D



Vetor  $\vec{r}$ , definido por 2 valores  
(x, y) ou  $(|\vec{r}|, \theta)$

$x, y \equiv$  Coordenadas cartesianas

$$x = \vec{r} \cdot \hat{i} = |\vec{r}| \cos \theta$$

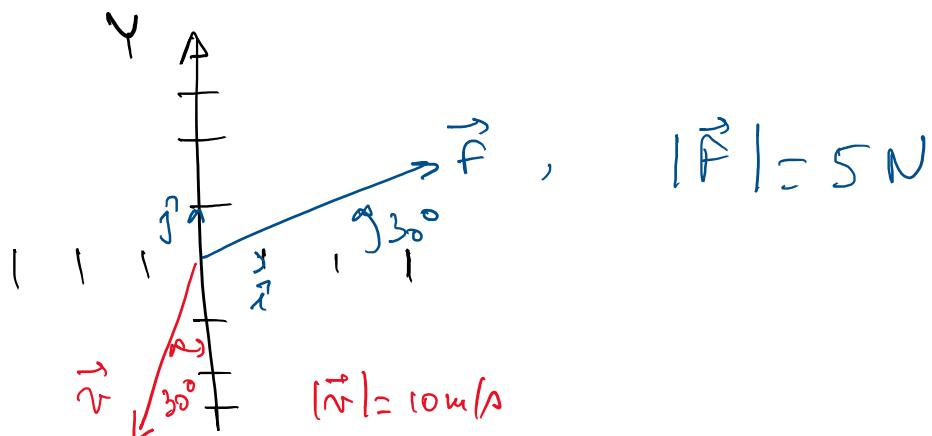
$$y = \vec{r} \cdot \hat{j} = |\vec{r}| \sin \theta$$

$(|\vec{r}|, \theta) \equiv$  Coordenadas polares

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arccos x / \sqrt{x^2 + y^2} \\ = \arcsin y / \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cálculo das coordenadas



$$f_x = \vec{F} \cdot \hat{i} = |\vec{F}| |\hat{i}| \cos 30^\circ$$

$$f_y = \vec{F} \cdot \hat{j} = |\vec{F}| |\hat{j}| \cos 60^\circ$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} f_x = +|\vec{F}| \cos 30^\circ \\ f_y = +|\vec{F}| \sin 30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = (\vec{v} | \hat{i}) \cos(270^\circ - 30^\circ) = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5 \text{ m/s} \\ v_y = (\vec{v} | \hat{j}) \cos(180^\circ - 30^\circ) = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} \text{ m/s} \end{cases}$$

ou,

$$\begin{cases} v_x = -(\vec{v}) \cos 60^\circ = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5 \text{ m/s} \\ v_y = -(\vec{v}) \cos 30^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} \text{ m/s} \end{cases}$$

Igualdade entre vetores e Equações etônicas

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ \vec{b} &= b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

$$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$$

Outra maneira de indicar vetores

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

Problema:

$$\text{Se } \vec{a} = (a_x, 0, 0)$$

$$\vec{b} = (5, b_y, 0)$$

$$\vec{c} = (0, 1, c_z)$$

$$\text{e } \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

calcule as componentes  $a_x$ ,  $b_y$  e  $c_z$ .

Resolução :  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 = a_x - 5 \\ 10 = a_y - b_y \\ 0 = a_z - 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 5 \\ b_y = 9 \\ c_z = 0 \end{cases}$$

### 3.3 Princípios de Newton da Mecânica

**1<sup>a</sup> lei de Newton ou lei de inércia:** Quando  $\vec{F} = 0$   
O corpo ou está parado ou move-se a uma velocidade constante.

**2<sup>a</sup> Lei de Newton ou lei fundamental da dinâmica**

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.

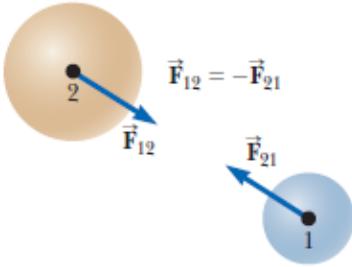
A constante de proporcionalidade é a massa  $m$  do corpo. É a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

**3<sup>a</sup> lei de Newton ou lei da ação e reação:**

Quando 2 corpos interatuam,

$\vec{F}_{12}$  a força no corpo 1 devido à interação com o corpo 2, e

$\vec{F}_{21}$  a força no corpo 2 devido à interação com corpo 1,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



**Importância da 2<sup>a</sup> Lei de Newton:**  $\vec{F} = m \vec{a}$   $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$   
Se soubermos as forças aplicadas a um corpo, como também a sua massa) saberemos a sua velocidade instantânea e a lei do movimento, se se souber também a velocidade e a posição inicial.

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.

A constante de proporcionalidade é a massa  $m$  do corpo. A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

**Se as forças aplicadas ao um objeto forem conhecidas, pode-se determinar o movimento do objeto – a sua posição e velocidade.**

**Forças determinam-se por experiências ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.**

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) \\ F_y(t) = ma_y(t) \\ F_z(t) = ma_z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x(t) = m \frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m \frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

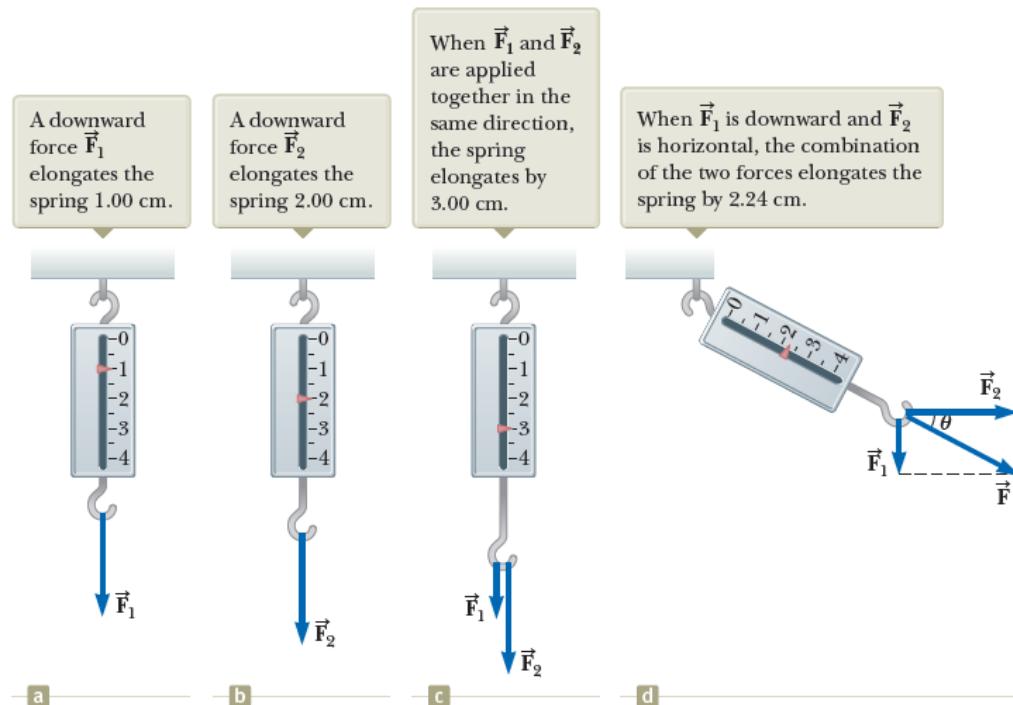
$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t) \Rightarrow \vec{F}(t) = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$\vec{v}(t)$  e  $\vec{r}(t)$  podem ser calculados

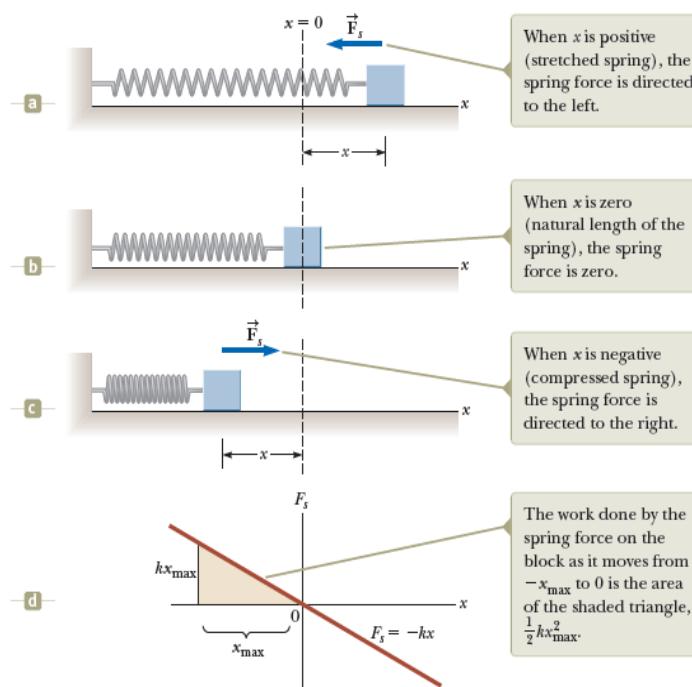
(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

### 3.4 Modelos analíticos de diversas forças

#### A mola e a força elástica



$$\begin{cases} F_x = -kx \\ F_y = -ky \Leftrightarrow \vec{F} = -k\vec{r} \\ F_z = -kz \end{cases}$$



### Força de resistência do ar

Experiências no volante de badminton mostram:

- Força oposta à velocidade

A direção e sentido da velocidade é fornecida pelo seu vetor unitário:  $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$

Assim a força é  $\vec{F} = -C(v) \hat{v}$

- Proporcional ao quadrado da velocidade

$$\vec{F} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v}$$

$$|\vec{F}| \propto |\vec{v}|^2$$

A 1D :  $\vec{v} = v_x \hat{i}$   
 $|\vec{v}| = |v_x|$   
 $\hat{v} = \frac{v_x}{|v_x|} \hat{i}$

$$F_x = -m D |v_x|^2 \frac{v_x}{|v_x|} = -m D |v_x| v_x$$

Expressão válida para qualquer sentido do eixo e sentido da velocidade.

A 2D :  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$   
 $|\vec{v}| = \sqrt{|v_x^2 + v_y^2|}$   
 $\hat{v} = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \hat{i} + \frac{v_y}{|\vec{v}|} \hat{j}$

$$\vec{F} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v} \frac{v_x}{|\vec{v}|} \hat{i} + \frac{v_y}{|\vec{v}|} \hat{j}$$

$$\begin{cases} F_x = -m D |\vec{v}|^2 \frac{v_x}{|\vec{v}|} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_y = -m D |\vec{v}|^2 \frac{v_y}{|\vec{v}|} = -m D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

A 3D é só acrescentar a expressão correspondente à componente a z.

O parâmetro  $D$  é **ajustado aos valores experimentais**

**Gravidade** revela-se como:

- Força entre corpos celestes (planetas, estrelas, cometas, asteroides) e satélites e sondas espaciais
- Peso

### Força entre corpos celestes:

- Observações experimentais muito precisas de Tycho Brahe:
- 3 Leis de Kepler das leis planetárias (em concordância com as observações experimentais de Tycho Brahe):
  - planetas com órbitas elípticas
  - o segmento que une cada planeta ao sol, varre áreas iguais em tempos iguais.
  - o quadrado do período de translação de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita
- Lei da gravidade de Newton (prevê as leis de Kepler)

**Força atrativa** na direção dos dois corpos

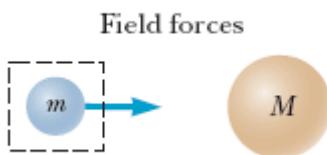
$$|\vec{F}_{grav}| = G \frac{mM}{d^2}, \quad G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

*d* distância entre 2 corpos

$$\vec{F}_{grav} = G \frac{mM}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

$$|\vec{r}| = d,$$

O vetor unitário  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$  expressa a direção e sentido de um astro em relação a outro



### Peso:

Força vertical,  
aponta para baixo

$$|\vec{P}| = m |\vec{g}|, \quad |\vec{g}| = g = 9.80 \text{ m/s}^2 \text{ aceleração da gravidade}$$

$\vec{P}$  é a força gravítica que a Terra exerce em qualquer corpo de massa  $m$ .

$R_T$  Distância do corpo (na superfície da Terra) até ao centro da Terra

$$|\vec{F}_{grav}| = G \frac{m M_{Terra}}{R_T^2}$$

$$|\vec{P}| = m |\vec{g}|$$

$$|\vec{g}| = G \frac{M_{Terra}}{R_T^2} \quad G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

$$M_{Terra} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg (valor médio)}$$

$$R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$G \frac{M_{Terra}}{R_T^2} = 9.83 \text{ m/s}^2$$

### **Impulsão:**

Um corpo mergulhado num fluido (ar, gás ou líquido), este exerce uma força vertical, para cima, e de intensidade igual ao peso do fluido deslocado:

$$V_{fluido} = V_{corpo}, \text{ e}$$

$$|\vec{F}_{impulsão}| = m_{fluido} g$$

$$m_{fluido} = \rho_{fluido} V_{fluido},$$

em que  $\rho_{fluido}$  é a massa específica do fluido.

### **Força elétrica**

**Força elétrica entre duas cargas**,  $q$  e  $Q$  (por experiências e medições)

Força atrativa entre cargas de sinais opostos e repulsiva entre cargas de igual sinal

Na direção das duas cargas

$$|\vec{F}_{elétrico}| = K \frac{qQ}{d^2}, \quad K = 8.987551 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \text{ (constante de Coulomb)}$$

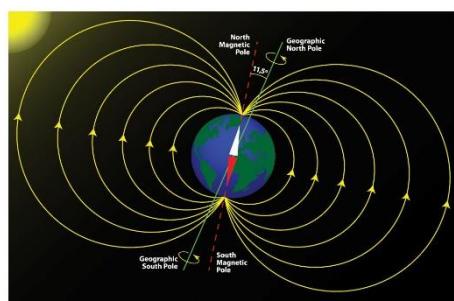
$d$  distância entre 2 cargas

**Força elétrica** aplicada a um corpo de carga elétrica  $q$ , **num campo elétrico**  $\vec{E}_{elétrico}$

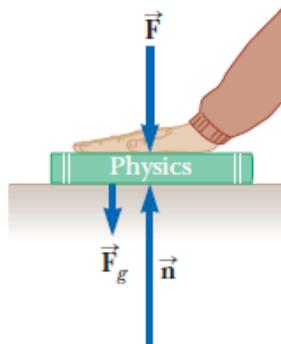
$$\vec{F}_{elétrico} = q \vec{E}_{elétrico}$$

**Força magnética** aplicada a um corpo de carga elétrica  $q$ , **num campo magnético**  $\vec{B}_{magnético}$

$$\vec{F}_{magnético} = q \vec{v} \times \vec{B}_{magnético}$$



**Força normal**  $\vec{N}$  ou  $\vec{n}$  é uma **força de contato**



**Figure 5.9** When a force  $\vec{F}$  pushes vertically downward on another object, the normal force  $\vec{n}$  on the object is greater than the gravitational force:  $n = F_g + F$ .

- perpendicular à superfície, e oposto.
- intensidade variável, a necessária para equilibrar o livro  
(impede o livro de cair e de entrar dentro da mesa)

Qual a força normal aplicada ao livro (em função do peso e da força exercida pela mão)?

Forças aplicadas ao livro:

Peso:  $\vec{P}$  ou  $\vec{F}_g$

Normal:  $\vec{n}$

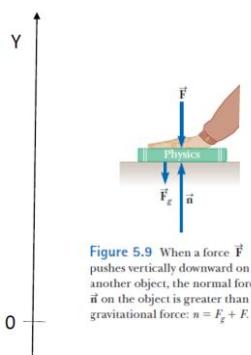
Força exercida pela mão:  $\vec{F}$

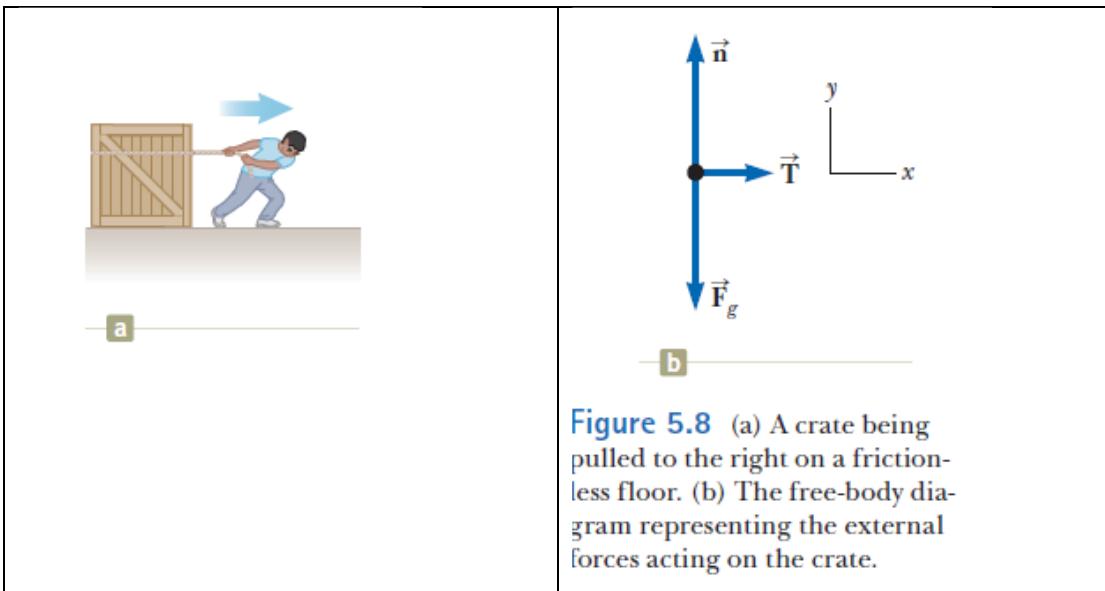
$$\text{Não existe movimento: } \vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = -\vec{F} - \vec{P}$$

Projetando no eixo OY

$$\begin{aligned} n_y &= -F_y - P_y \\ + |\vec{n}| &= -(-|\vec{F}|) - (-|\vec{P}|) \end{aligned}$$

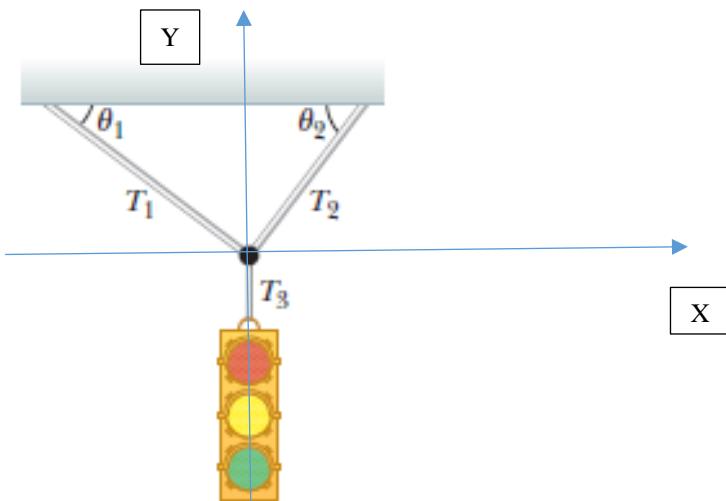
$$|\vec{n}| = |\vec{F}| + |\vec{P}|$$



**Força Tensão**

A força tensão na corda, a força que o homem aplica à corda para vencer as forças de atrito ou resistência ao movimento

Exemplo: Um semáforo pendurado por duas cordas não cai. Qual a relação entre as forças a que o semáforo está sujeito? O semáforo é reduzido a um ponto material (para um corpo tem-se de considerar mais outra lei, que impede rotação). Considere que a tensão que  $\vec{T}_3$  é igual ao peso do semáforo,  $\vec{T}_3 = \vec{P}$ .



1<sup>a</sup> lei de Newton

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0 \text{ e projetando}$$

$$\begin{cases} F_x = -|\vec{T}_1| \cos \theta_1 + |\vec{T}_2| \cos \theta_2 + 0 = 0 \\ F_y = |\vec{T}_1| \sin \theta_1 + |\vec{T}_2| \sin \theta_2 - |\vec{T}_3| = 0 \\ -|\vec{T}_1| \cos \theta_1 + |\vec{T}_2| \cos \theta_2 = 0 \\ |\vec{T}_1| \sin \theta_1 + |\vec{T}_2| \sin \theta_2 = |\vec{P}| \end{cases}$$

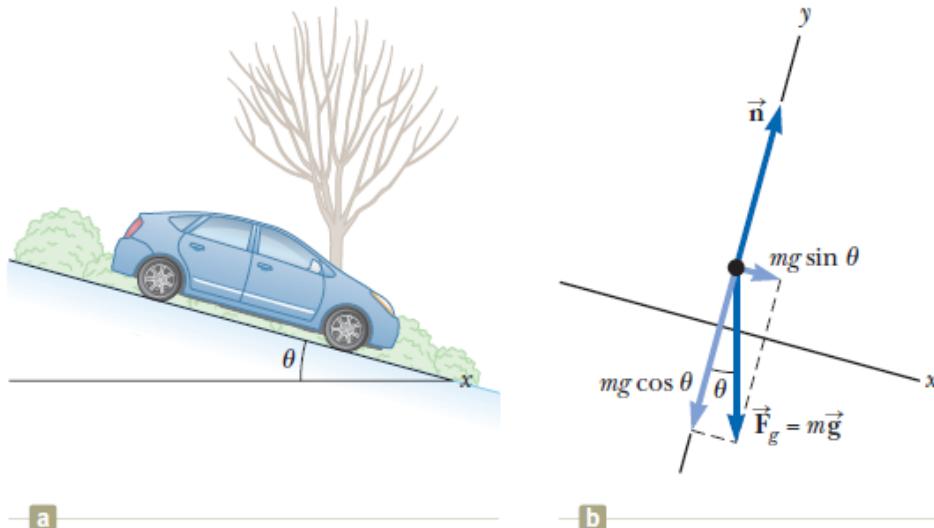
e

$$\begin{cases} |\vec{T}_1| = |\vec{P}| \cos \theta_2 / \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ |\vec{T}_2| = |\vec{P}| \cos \theta_1 / \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Visto que (ver formulário)  $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2$

**Problema 3.20**

Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo  $\theta$ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida. O carro tem a massa  $m$ .



**Figure 5.11** (Example 5.6) (a) A car on a frictionless incline. (b) The free-body diagram for the car. The black dot represents the position of the center of mass of the car. We will learn about center of mass in Chapter 9.

O sistema de eixos escolhido é o mais conveniente, pois temos o eixo OX coincidente com a direção do movimento.

É feita a aproximação do carro a um ponto material. Esta aproximação pode ser insuficiente quando existem rotações.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{n} = m\vec{a} \quad \vec{F}_g = \vec{P}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + n_x = ma_x \\ F_y = P_y + n_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = +m g \sin \theta + 0 = ma_x \\ F_y = -m g \cos \theta + |\vec{n}| = 0 \end{cases} \Rightarrow a_x = g \sin \theta$$

a força normal anula as forças na direção OY  $|\vec{n}| = m g \cos \theta$

## Bibliografia

- Serway, cap. 3 e 5;
- Sørensen, cap. 5 e 6;
- Villate, cap. 4
- Coleção Schaum, Linear Algebra, cap. 1

## Problemas

### Vetores a 2 dimensões

**Nota:** Resolva estes problema com papel e lápis e de seguida em python, usando o pacote numpy.

Vetor:  $a = np.array([2, 3, -2])$ ;

Produto escalar:  $np.dot(a,b)$ ; Produto vetorial:  $np.cross(a,b)$

**1.** Um vetor a 2 dimensões tem as coordenadas (3, 4).

- a) Qual o seu módulo ou comprimento?
- b) Qual o vetor unitário correspondente?
- c) Qual o vetor  $2 \times (3, 4)$ ? Qual o seu comprimento ou módulo?
- d) Qual o vetor  $-2 \times (3, 4)$ ? Qual o seu comprimento ou módulo?

**2.** Dois vetores são (1, 2) e (-2, 3). Qual o seu produto escalar e qual o ângulo entre os dois vetores?

**3.** Dois vetores são (1, 2) e (-2, 1). Qual o seu produto escalar e qual o ângulo entre os dois vetores?

**4.** Considere um espaço a duas dimensões e o vetor (3,4).

- a) Encontre um vetor perpendicular ao vetor (3, 4).
  - b) Encontre os dois vetores unitários perpendiculares ao vetor (3,4)
- Note que o produtor escalar de dois vetores perpendiculares é nulo.

**5.** Duas forças aplicadas a um corpo de massa 2 kg, são (2,0; 1,2) N e (-3,0; 5,1) N.

Calcule a força resultante. Qual a sua intensidade?

**6.** Uma força de intensidade 6,0 N e de coordenada  $F_x = 2,0$  N, qual a sua coordenada segundo OY?

**7.** Uma força tem como coordenada segundo OX  $F_x = 2,0$  N e faz um ângulo de 60° com o eixo dos OX. Qual a intensidade (ou módulo) da força?

**8.** Uma força de intensidade  $|\vec{F}| = 2.00 \text{ N}$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo positivo OX.

Quais as coordenadas  $(F_x, F_y)$  da força, quando o ângulo for:

- a)  $\theta = \pi/2$
- b)  $\theta = -\pi/6$
- c)  $\theta = 60^\circ$
- d)  $\theta = 120^\circ$
- e)  $\theta = 3\pi/2$
- f)  $\theta = -7\pi/6$
- g)  $\theta = 310^\circ$
- h)  $\theta = 240^\circ$

**9.** Uma força de intensidade  $|\vec{F}| = 10.0 \text{ N}$ . Quais as coordenadas  $(F_x, F_y)$  da força,

quando o ângulo for:

- a)  $30^\circ$  com a parte positiva do eixo OX
- b)  $10^\circ$  com a parte positiva do eixo OY
- c)  $30^\circ$  com a parte negativa do eixo OX

### Vetores a 3 dimensões

**10.** A força resultante aplicada a um objeto de massa 100 g é  $(2,0; 4,0; 0,0) \text{ N}$ . Qual a aceleração que provoca no objeto?

**11.** A aceleração de um objeto de massa 2 kg é de  $(1,0; 0; 2,0) \text{ m/s}^2$ . Qual a força resultante que provoca essa aceleração? E qual a sua intensidade?

**12.** Estão aplicadas duas forças a um objeto,  $(2,0, 1,0, 0) \text{ N}$  e  $(3,0, 0,0, 1,0) \text{ N}$ . Qual a aceleração que originam num objeto de massa 2.0 kg?

**13.** Determine o produto escalar dos vetores  $(2,0; 3,2; -1,0)$  e  $(-1,0; 2,0; 4,6)$ .

**14.** Um feixe de raios catódicos viaja num espaço onde existe um campo elétrico  $\vec{E} = (0,1,0) \text{ N/C}$  (unidades SI). A força aplicada a cada partícula do feixe (eletrão) é

$\vec{F} = q \vec{E}$ , onde  $q = -1,602176208 \times 10^{-19}$  C é a carga elétrica do eletrão. Determine a aceleração que o eletrão sofre nesse campo elétrico, sabendo que a massa do eletrão é  $m_e = 9,10938356 \times 10^{-31}$  kg?

**15.** Encontre o produto vetorial  $(2,0; 3,0; -2) \times (-1,5; -1,0; 2,0)$ . E o ângulo entre os dois vetores? Calcule também o ângulo entre os dois vetores através do produto escalar.

**16.** A lei do movimento de um objeto de massa 1 kg é  $\vec{r} = (2t, t, 0)$  m.

a) Calcule a lei da velocidade.

b) Calcule o momento angular definido por  $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ .

**17.** A lei do movimento de um objeto de massa 0.1 kg é  $\vec{r} = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$  m.

a) Calcule a lei da velocidade.

b) Calcule o momento angular definido por  $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ , sabendo que a massa do objeto é 0.1 kg e  $\omega = 1.0$  rad/s

**18.** Um objeto tem aplicada a força  $\vec{F} = (0, 0, 0,1)$  N no ponto de coordenadas  $\vec{r} = (1, 0, 0)$  m. Calcule o momento da força (torque) definido por  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ .

**19.** Uma bola de futebol é pontapeada de modo que roda sobre si própria, o que resulta adicionar a força de Magnus às outras forças. A força de Magnus resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola. Se a rotação for descrita pelo vetor  $\vec{\omega} = (0,0,10)$  rad/s e a velocidade for  $\vec{v} = (0, 1, 0)$  m/s, qual a força de Magnus, se for definida por  $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$ , em que  $A = \pi r^2$  é a área da secção de corte da bola,  $r$  o raio da bola e  $\rho_{ar} = 1.225$  kg/m<sup>3</sup> a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm.

**20.** Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo  $\theta$ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida. O carro tem a massa  $m$ .

# **Capítulo 4**

## **Movimento no plano e no espaço**

### **Sumário**

- Movimento de um projétil a 2 dimensões.
- Trajetória do projétil sem resistência do ar.
- Trajetória do projétil com resistência do ar.
- Trajetória do projétil com resistência do ar e com o efeito da rotação da bola.
- Trajetória da Terra à volta do Sol.

### **Métodos Numéricos**

- Método de Euler-Cromer.

## 4.1 Introdução

O estudo e a previsão de trajetórias de corpos no espaço é possível se conhecermos as forças aplicadas ao corpo, pela Lei fundamental da Dinâmica

$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t)$$

Se soubermos a resultante das forças aplicadas ao corpo, e a sua massa  $m$ , podemos determinar a aceleração instantânea

$$\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m \Leftrightarrow \begin{cases} a_x(t) = F_x(t)/m \\ a_y(t) = F_y(t)/m \\ a_z(t) = F_z(t)/m \end{cases}$$

E sabendo a aceleração podemos calcular a velocidade instantânea,  $\vec{v}(t)$ , e a lei do movimento,  $\vec{r}(t) = (x, y, z)$ , ou seja, como a posição instantânea, pelo uso das relações

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Ou em termos de força,

$$\frac{\vec{F}(t)}{m} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Em termos de coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} \frac{F_x(t)}{m} = \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{F_y(t)}{m} = \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{F_z(t)}{m} = \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{cases}$$

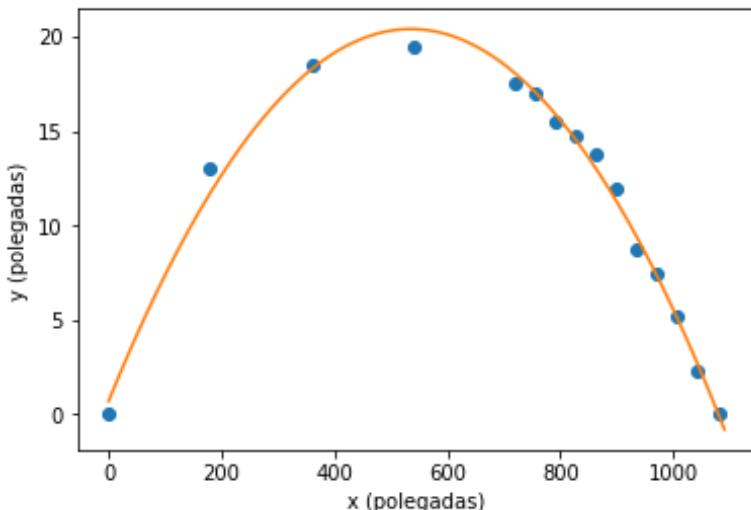
$\vec{v}(t)$  e  $\vec{r}(t)$  podem ser calculados

(i) por métodos analíticos (integração) ou (ii) por métodos numéricos, por exemplo o Método de Euler.

#### 4.2 Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

Uma pequena bola foi atirada por uma mola. O registo do seu percurso foi medido em pares de posição ( $x, y$ ) e podemos ver como pontos na figura abaixo. O seu pequeno tamanho faz reduzir a força de resistência do ar. Decididamente a curva não é linear. Um ajuste a um polinómio do 2º grau obtém um bom acordo com os valores medidos. O polinómio é

$$y = -0.000069 x^2 + 0.074 x + 0.710$$



Vamos considerar um modelo simples, para iniciar:

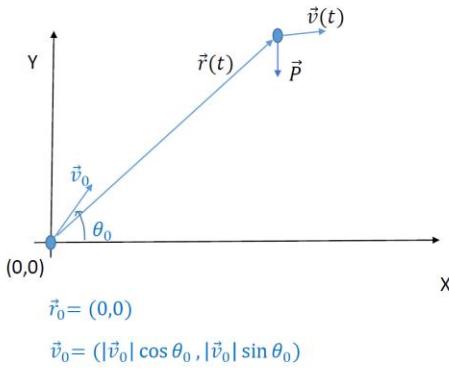
**Modelo:** O movimento ou a trajetória da bola é devido à bola estar sempre sujeita à força da gravidade.

Aproximação: Não se considera o efeito da resistência do ar, a rotação da bola, o efeito de altitude, impulsão, a rotação da Terra, ...

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \text{em que } \vec{F} = \vec{P}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,

- na posição  $\vec{r}_0$
- e inicia o seu movimento com
- uma velocidade  $\vec{v}_0$ ,
- de rapidez (magnitude)  $|\vec{v}_0|$
- e a fazer um ângulo  $\theta_0$  com a horizontal (solo)



$$\vec{P} = m \vec{a} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} P_x = m a_x \\ P_y = m a_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m a_x \\ -|\vec{P}| = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (x_0, y_0) = (0,0) \quad \text{e} \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (|\vec{v}_0| \cos \theta_0, |\vec{v}_0| \sin \theta_0) \\ t_0 &= 0 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^t a_y(t) dt \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) - v_{0x} = \int_0^t 0 dt \\ v_y(t) - v_{0y} = \int_0^t -g dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v_x(t) dt \\ y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t v_y(t) dt \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v_{0x} dt \\ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t [v_{0y} - gt] dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Eliminando o tempo nas expressões da lei do movimento, de modo a obter  $y$  em função de  $x$

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y = y_0 + v_{0y} \frac{x - x_0}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left( \frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2 \end{cases}$$

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x(t) - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x(t) - x_0)^2$$

obtemos a equação da parábola, o que concorda com as observações experimentais de uma bola pequena, analisado na parte inicial desta secção. Podemos até prever (e depois comparar com os valores medidos) a velocidade inicial e o ângulo  $\theta_0$  com a horizontal, com que a bola pequena foi lançada.

Tomando  $x_0 = 0$ , e comparando com a relação obtida a partir das medições,

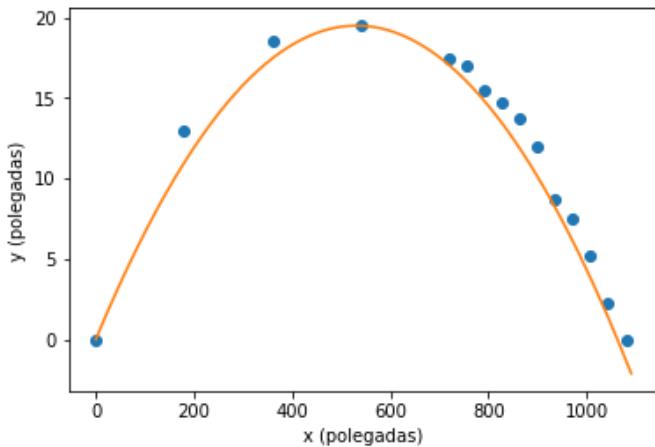
$y = -0.000069 x^2 + 0.074 x + 0.710$  polegadas  
temos

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = 0.074 \Leftrightarrow \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = 0.074 \Rightarrow \theta_0 = \arctan 0.074 = 4.2^\circ$$

$$\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} = 0.000069 \Leftrightarrow v_{0x}^2 = \frac{g}{2 \times 0.000069} = 71014.49$$

e  $|\vec{v}_0| = \frac{v_{0x}}{\cos \theta_0} = 267$  polegadas/s = 378 km/h

Estes valores de  $\theta_0$  e de  $|\vec{v}_0|$  são coerentes com valores expectáveis a retirar só das medições.



### Análise da trajetória

A trajetória de um corpo lançado obliquamente, em que as forças aplicadas ao corpo é só o seu peso, é dada pelas equações

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \\ \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \\ y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x(t) - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x(t) - x_0)^2 \end{cases}$$

e consiste numa parábola. Pode ser visto no gráfico acima (com  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$ ).

Várias perguntas importantes podem ser feitas, quando se sabe a trajetória:

1. Qual a altura máxima ( $y_m$ ) da trajetória e quando é atingida ( $t_m$ )?

2. Qual o alcance ( $x_{solo}$ ) e quando o alcança  $t_{solo}$ ?

A condição de altura máxima é (quando  $y(t)$  é máximo)

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = 0 &\Leftrightarrow v_y = 0 \\ &\Rightarrow t_m = \frac{v_{0y}}{g} \quad \text{e} \quad y_m = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} \end{aligned}$$

A condição de alcance é quando a bola bater no solo  $y = 0$

Quando  $y_0 = 0 \Rightarrow t_{solo} = \frac{2 v_{0y}}{g}$

e (duas soluções)  $\Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow x_{solo} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}$

No modelo físico considerado atrás, a trajetória da bola pequena,  
 $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$

$$\begin{cases} |\vec{v}_0| = 267 \text{ polegadas/s} \\ \theta_0 = 4.2^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 266.282 \text{ polegadas/s} \\ v_{0y} = 19.554 \text{ polegadas/s} \end{cases}$$

$$t_m = 2.0 \text{ s}$$

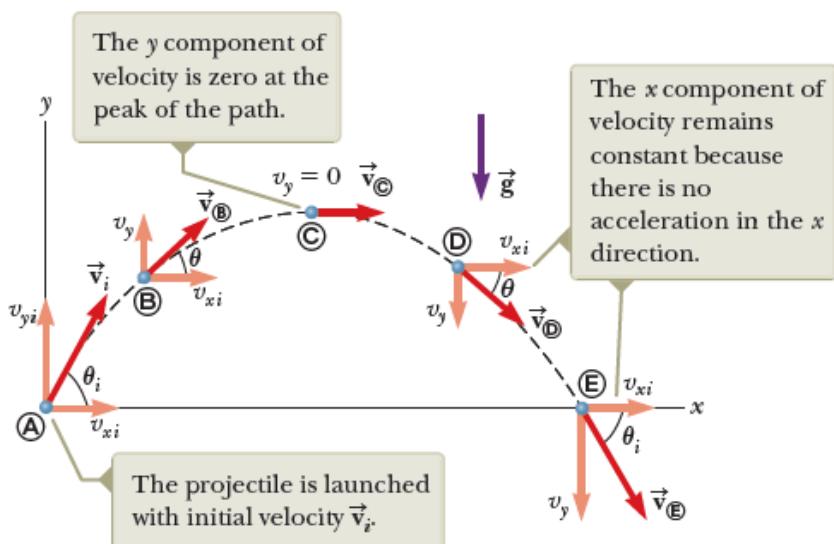
$$y_m = 19.5 \text{ polegadas}$$

$$t_{solo} = 4.0 \text{ s}$$

$$x_{solo} = 1063 \text{ polegadas}$$

Pelo gráfico vimos o acordo da previsão do modelo para a altura máxima e alcance máximo é bom.

A trajetória de um corpo só sujeito ao seu peso, a sua trajetória é uma parábola, como é vista na figura abaixo, assim como a velocidade em qualquer ponto e as suas componentes cartesianas.



### 4.3 Estudo da trajetória de uma bola de futebol com resistência do ar

A maioria dos corpos que se movem no nosso planeta estão sujeitos, além do seu peso, também a uma força de resistência do ar. O nosso modelo simples tem de incluir esta força de resistência. Basta considerar também esta força

$$\vec{F}^{res} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v}, \quad \text{em que } \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad D = g/v_T^2$$

na equação fundamental da dinâmica

$$\vec{F} = \vec{P} - m D |\vec{v}|^2 \hat{v} = m \vec{a}$$

Esta força não altera o plano do movimento. Temos um problema a 2D:

$$\vec{F} = \vec{P} - m D |\vec{v}|^2 \hat{v} = m \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = P_x - m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = P_y - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_x = -D |\vec{v}| v_x \\ a_y = -g - D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

Como sabemos a aceleração instantânea, podemos integrar

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

as equações diferenciais. Neste caso não é possível integrar analiticamente, então vamos tentar integrar numericamente usando o método de Euler a cada uma das equações diferenciais.

**1º Cálculo da velocidade** por integração com o método de Euler das duas equações diferenciais. O método de Euler calcula a velocidade num instante posterior, conhecendo a aceleração a velocidade no instante anterior

$$\begin{cases} v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t \\ v_y(t + \delta t) \approx v_y(t) + a_y(t) \times \delta t \end{cases}$$

Como já fizemos, considera-se um ciclo para termos a velocidade num intervalo de tempo de interesse (até por exemplo o corpo atingir o solo). Em python

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    dres=g/vt**2      # D
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
```

**2º Cálculo da posição** por integração com o método de Euler das duas equações diferenciais:

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

Neste caso temos

$$\begin{cases} x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t \\ y(t + \delta t) \approx y(t) + v_y(t) \times \delta t \end{cases}$$

Em python:

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    dres=g/vt**2      # D
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

**Problema** Vamos considerar uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com o campo (horizontal), as condições do problema 4.1

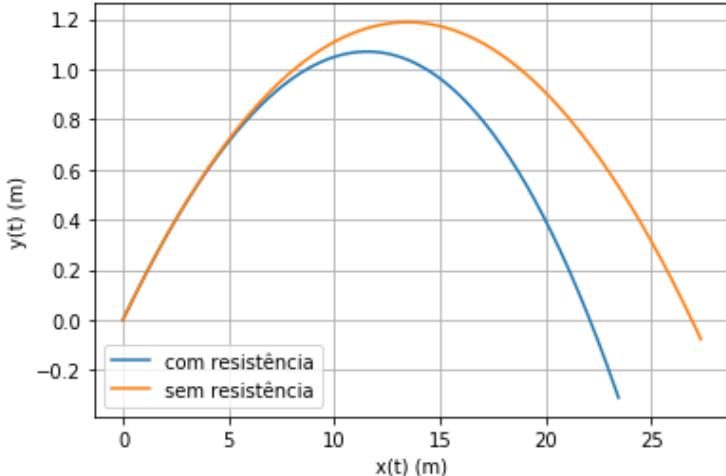
O input é

$$\begin{cases} |\vec{v}_0| = 100 \text{ km/h} \\ \theta_0 = 10^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 27.36 \text{ m/s} \\ v_{0y} = 4.82 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$$

A obtida pelo método de Euler está apresentada no gráfico abaixo a azul.

Trajetória de uma bola sem e com resistência do ar  $v_0=100 \text{ km/h}, 10^\circ$



**Teste para validar o método de Euler aplicado a este problema:**

Quando a força de resistência do ar for nula, temos o modelo simples (só se considera o peso do corpo) e os resultados devem ser os mesmos que os obtidos analiticamente. No gráfico acima está a amarelo a trajetória que o corpo seguiria se não houvesse resistência do ar.

Com  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$  a altura máxima e o instante em que alcança,

$$y_m = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} \quad \text{e} \quad t_m = \frac{v_{0y}}{g},$$

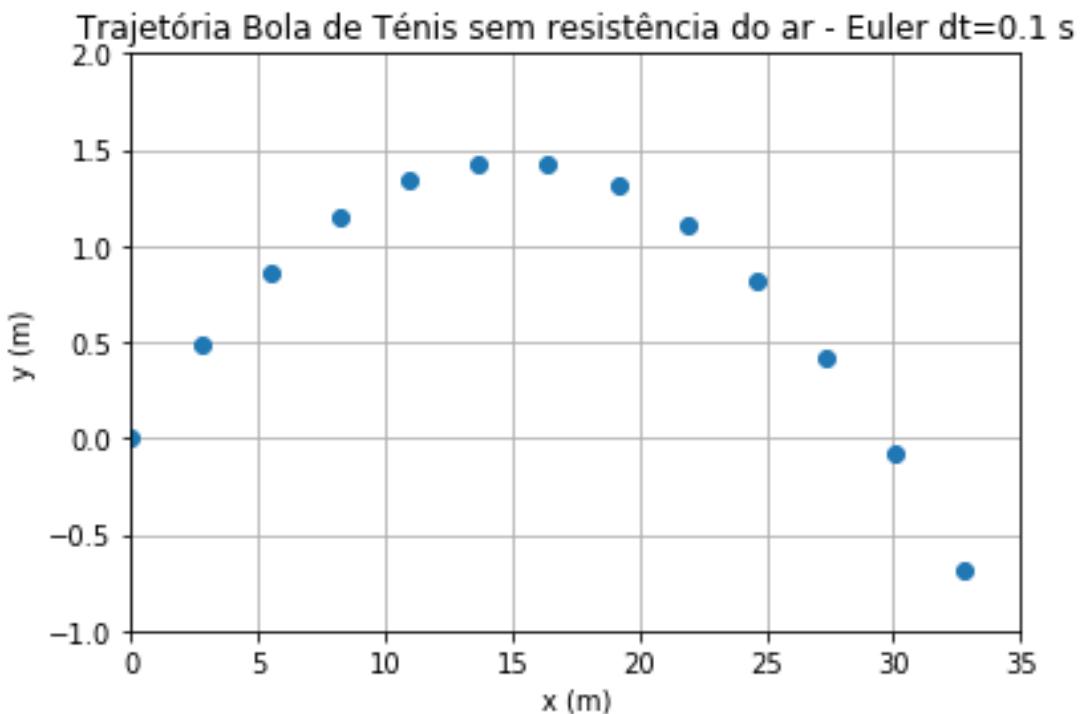
respetivamente. O alcance e o instante em que atinge o solo é

$$x_{solo} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} \quad \text{e} \quad t_{solo} = \frac{2 v_{0y}}{g},$$

respetivamente. Obtemos, por via analítica:

$$\begin{cases} y_m = 1.1871 \text{ m} \\ t_m = 0.49220 \text{ s} \\ x_{solo} = 26.929 \text{ m} \\ t_{solo} = 0.98440 \text{ s} \end{cases}$$

Como determinar estes valores, uma vez que não temos a expressão funcional, mas temos a função só em alguns pontos, como mostra a figura abaixo.



1. Para a altura máxima, analisamos a matriz onde estão os pontos y, e vemos qual o maior. A condição de maior é, por exemplo, o ponto que tem os pontos imediatamente próximos com altura mais baixa.
2. Para o alcance máximo, onde a bola encontra o solo, é o ponto em que se passa de y positivo, para y negativo. Este ponto pode ser encontrado pela condição

$$y_i * y_{i+1} < 0,$$

pois o valor deste produto é único. O alcance máximo será o valor de  $y_m$  correspondente ao valor de  $y_m$  mais perto de zero.

Para usarmos o método de Euler temos de escolher o passo tempo  $\delta t$ , o que deverá ser muito mais pequeno do que o a duração do movimento,  $t_f$ , tal como  $\delta t = t_f/200$ . Uma estima grosseira por excesso, poderá ser deste tempo  $t_f = 2t_{\text{ solo}} \approx 2$  s, o que faz  $\delta t = 0.01$  s. Na tabela abaixo está os resultados para vários passos temporais.

$\delta t$	$y_m$ (m)	$t_{\text{ solo}}$ (s)	$x_{\text{ solo}}$ (m)
0.1	1.43178	1.100000	30.09135
0.01	1.21128	0.990000	27.08221
0.001	1.18949	0.985000	26.94543
0.0001	1.18732	0.984500	26.93176
<b>exato</b>	<b>1.1871</b>	<b>0.98440</b>	<b>26.929</b>

A convergência para os valores exatos é muito lenta. Para o passo  $\delta t = 0.001$  s obtém-se valores com a precisão de 3 dígitos. Vamos usar este passo para o estudo do movimento com resistência do ar.

### Movimento com resistência do ar

$\delta t$	$y_m$ (m)	$t_{\text{ solo}}$ (s)	$x_{\text{ solo}}$ (m)
0.01	1.0923	0.95000	22.466
0.001	1.0723	0.93500	22.135
0.0001	1.0703	0.93370	22.106

Os valores convergem para

$$\begin{cases} y_m = 1.07 \text{ m} \\ x_{\text{ solo}} = 22.1 \text{ m} \\ t_{\text{ solo}} = 0.93 \text{ s} \end{cases}$$

Estes valores são mais pequenos que os correspondentes ao movimento sem resistência do ar.

#### 4.4 Estudo da trajetória de uma bola de futebol com resistência do ar e rotação da bola

Problema 3. Um jogador de futebol executa um canto e chuta a bola de modo a ela entrar na baliza. Para conseguir uma trajetória que possibilite à bola entrar na baliza, pontapeia a bola com uma rotação lateral sobre si própria, o que resulta no aparecimento da força de Magnus,  $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$ , em que  $A = \pi r^2$  é a área da secção de corte da bola,  $r$  o raio da bola e  $\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$  a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm. Esta força de resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola. Se a bola for chutada com a rotação descrita pelo vetor  $\vec{\omega} = (0,400,0) \text{ rad/s}$  e a velocidade inicial for  $\vec{v} = (25,5, -50) \text{ m/s}$ , e a posição inicial for o canto  $(0,0,23.8) \text{ m/s}$ , a bola entra na baliza? A massa da bola de futebol é 0,45 kg. O sistema de eixos considerado é: OX de baliza a baliza, OY o eixo vertical e OZ o eixo deste o poste da baliza e passa pela marca de canto. É golo quando:  $x < 0$  e  $0 < z < 7.3 \text{ m}$  e  $0 < y < 2.4 \text{ m}$ . A velocidade terminal é  $v_T = 100 \text{ km/h}$ .

Vamos estudar o movimento de uma bola de futebol em rotação e sujeita à resistência do ar, assim como à gravidade.

O peso é

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

A força de resistência do ar apresentamos na forma

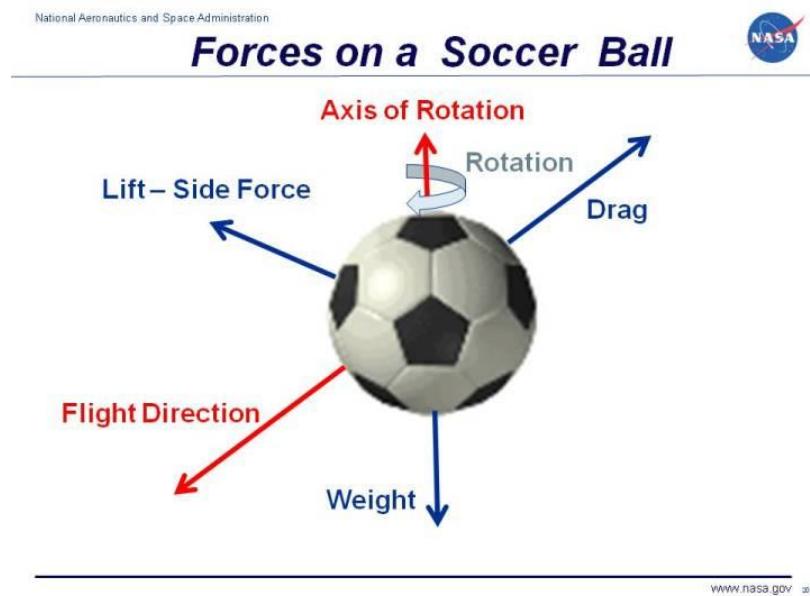
$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v}$$

A rotação da bola faz que o escoamento do ar seja diferente nos lados opostos da bola. O resultado é o aparecimento de uma força perpendicular ao eixo de rotação. É a força de Magnus, que tem a forma

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

onde,  $A = \pi r^2$  a área da secção da bola,  $\rho_{ar}$  a densidade do ar e  $r$  o raio da bola. A rotação é caracterizada pelo vetor rotação  $\vec{\omega}$ , em que  $|\vec{\omega}| = \text{ângulo (rad)/segundo}$ .

Estas forças estão ilustradas na figura abaixo.



A força total aplicada à bola durante o seu trajeto é:

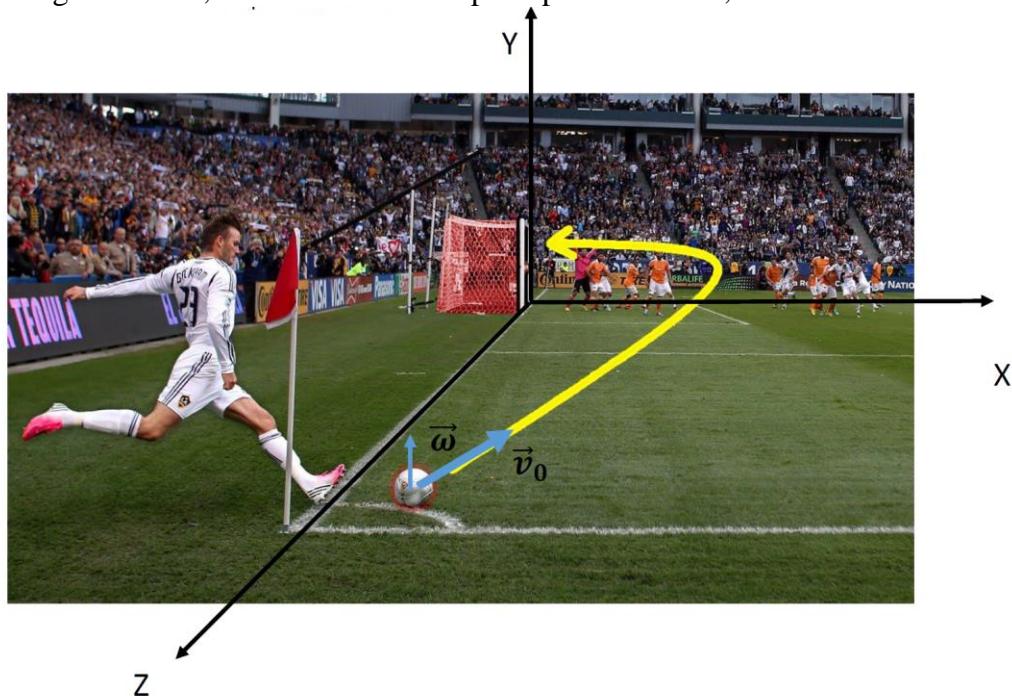
$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{Magnus}$$

As três forças aplicadas não têm a mesma direção, o que origina um movimento a 3 dimensões. Vamos por isso usar a equação fundamental da dinâmica nos três eixos cartesianos

$$\vec{F} = \vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{Magnus} = m \vec{a} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + F_{res,x} + F_{Magnus,x} = ma_x \\ F_y = P_y + F_{res,y} + F_{Magnus,y} = ma_y \\ F_z = P_z + F_{res,z} + F_{Magnus,z} = ma_z \end{cases}$$

Na figura abaixo, de um futebolista a pontapear um canto, estão os eixos cartesianos.



As projeções das forças são:

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \quad \text{e} \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_{res,x} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_{res,y} = -m D |\vec{v}| v_y \\ F_{res,z} = -m D |\vec{v}| v_z \end{cases}$$

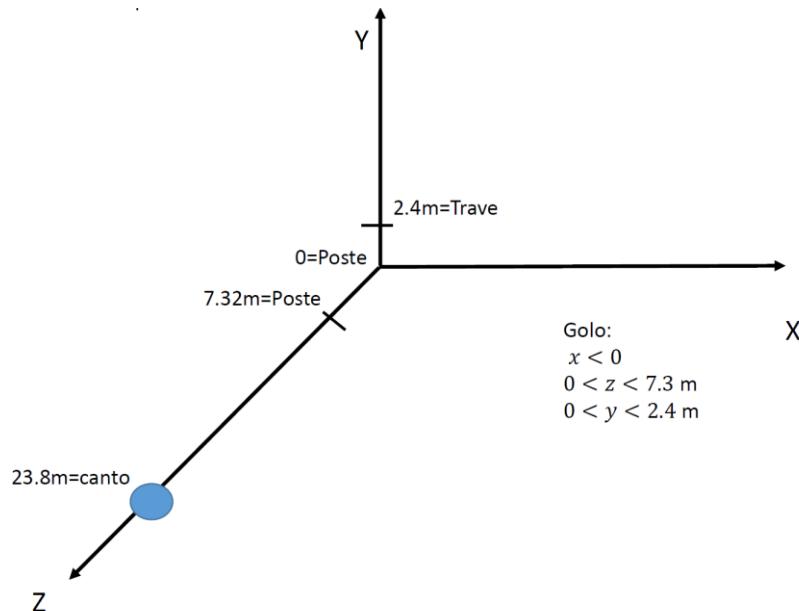
O vetor velocidade angular  $\vec{\omega} = (0,400,0)$  rad/s, faz que a força de Magnus seja

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Magnus} &= \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 400 & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} A \rho_{ar} r (400 v_z \hat{i} - 400 v_x \hat{k}) \end{aligned}$$

e assim as projeções são:

$$\begin{cases} F_{Magnus,x} = 200 \rho_{ar} r v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -200 \rho_{ar} r v_x \end{cases}$$

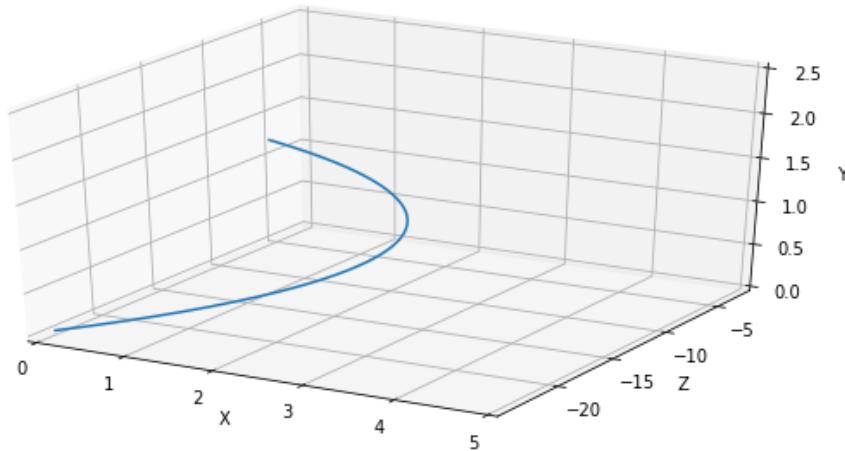
A baliza tem postes separados de 7.32 m, e a trave está à altura de 2.4. O canto está à distância 23.8 m do poste mais afastado. Posicionamos a baliza no sistema de coordenadas como está na figura abaixo.



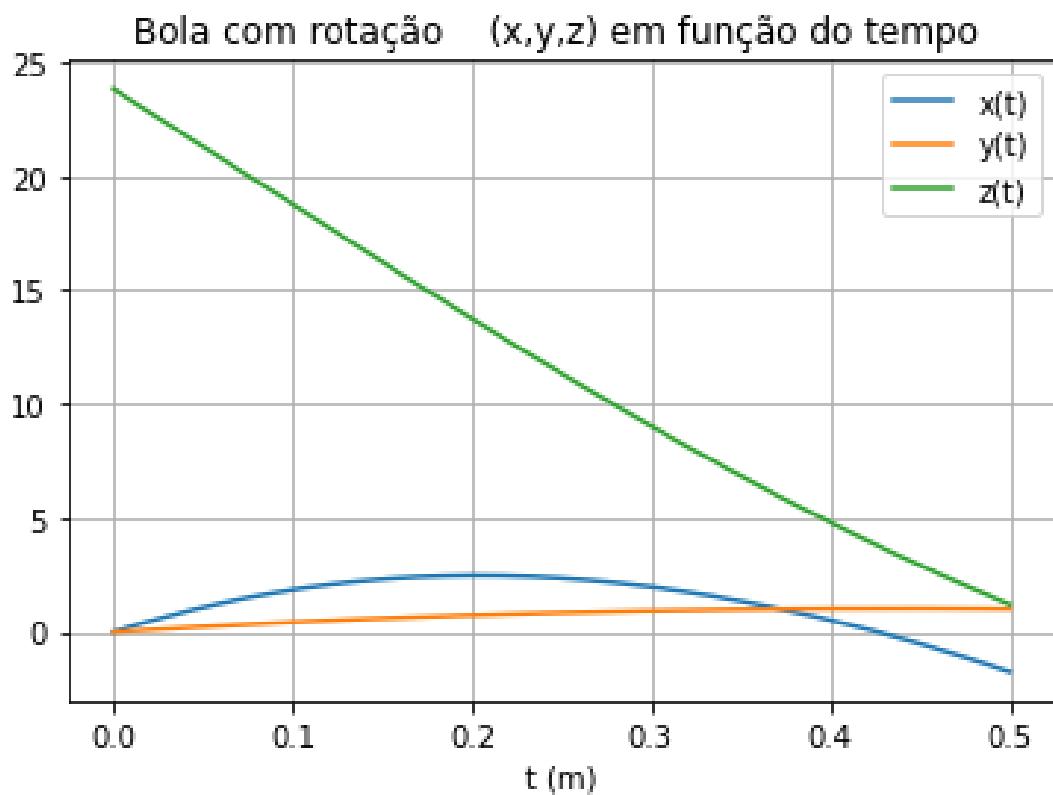
Neste sistema de coordenadas, é golo quando :

$$\begin{cases} x < 0 \\ 0 < y < 2.4 \text{ m} \\ 0 < z < 7.3 \text{ m} \end{cases}$$

Com os dados do problema, a trajetória da bola está na figura



Se comparamos as dimensões e a posição da baliza, vimos que é marcado golo direto. Mas vamos visualizar mais em detalhe as proções da trajetória nos três eixos, figura abaixo.



Efetivamente em instantes entre 4 e 5 s, as três coordenadas obedecem às condições de golo

$$\begin{cases} x < 0 \\ 0 < y < 2.4 \text{ m} \\ 0 < z < 7.3 \text{ m} \end{cases}$$

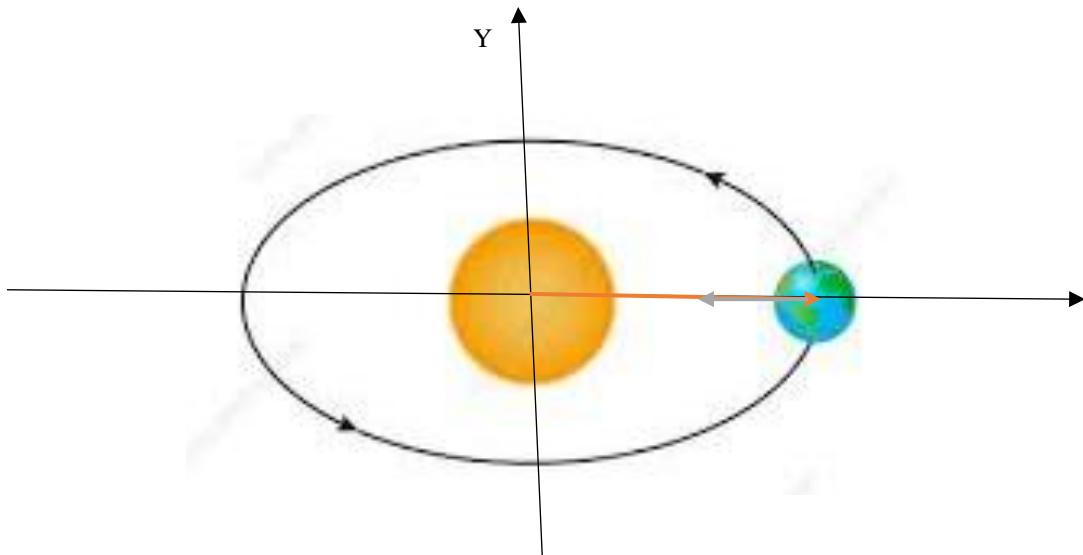
É Golo!

#### 4.5 Trajetória da Terra à volta do Sol.

Vamos tratar o movimento da Terra à volta do Sol com um modelo muito simples. Consideremos o Sol como fixo e o sistema Sol-Terra sujeito à força gravítica que cada astro exerce no outro. A força que a Terra está sujeita é

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad \text{em que } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

e  $\vec{r}$  é o vetor com origem no Sol e termina na Terra. Na figura abaixo o vetor posição da Terra está a laranja e a força gravítica a cinzento claro.



Num sistema de eixos centrado no Sol, a posição da Terra é dada por  $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$  e a força que o Sol exerce na Terra é

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} (\vec{x} \hat{i} + \vec{y} \hat{j}) = \left( -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} x, -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} y \right)$$

Esta força não altera o plano do movimento. Temos um problema a 2D:

$$\vec{F} = \vec{F}_{grav} = m \vec{a} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} F_{grav,x} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} x = ma_x \\ F_{grav,y} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} y = ma_y \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} a_x = -G \frac{M}{|\vec{r}|^3} x \\ a_y = -G \frac{M}{|\vec{r}|^3} y \end{cases}$$

Como sabemos a aceleração instantânea, podemos integrar as equações

diferenciais. 
$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

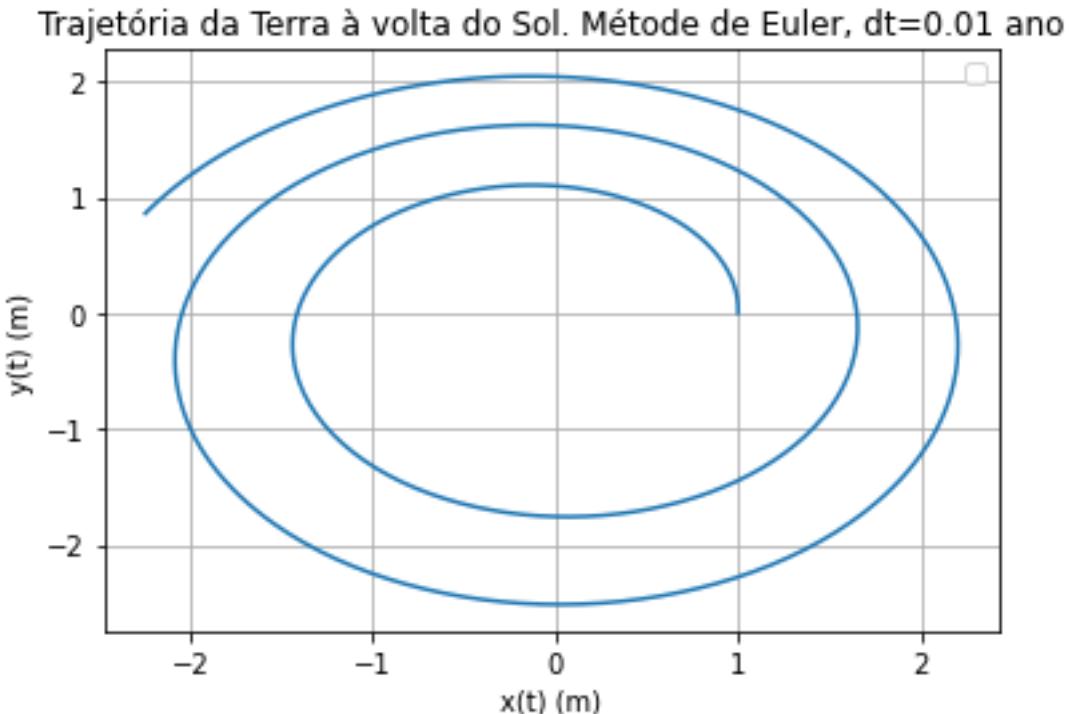
Este problema tem solução analítica. A solução é conhecida por nós, a Terra movimenta-se em órbitas elípticas. Mas nós vamos estudar o movimento da Terra usando métodos numéricos. Vamos verificar qual o desempenho do método de Euler neste problema.

Se usarmos um dos programas (uma cópia) que já fizemos sobre movimento a 2 dimensões, e mudando só a parte da aceleração, como no programa abaixo

```
# Integração pelo método de Euler
```

```
....  
t[0]=0  
vx[0]=v0x  
vy[0]=v0y  
x[0]=x0  
y[0]=y0  
for i in range(n):  
    t[i+1]=t[i]+dt  
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)  
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]  
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]  
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt  
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt  
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt  
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

obtemos trajetórias abaixo. Mesmo com um passo pequeno, as órbitas não se fecham.



### Método de Euler-Cromer

Foi descoberto (devido a um erro no programa) que se alterar a forma como a posição é calculada, não a partir da velocidade no instante anterior, mas sim no posterior

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t + \delta t) \times \delta t$$

Permanecendo o cálculo da velocidade como no método de Euler,

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

como está implementado no programa abaixo

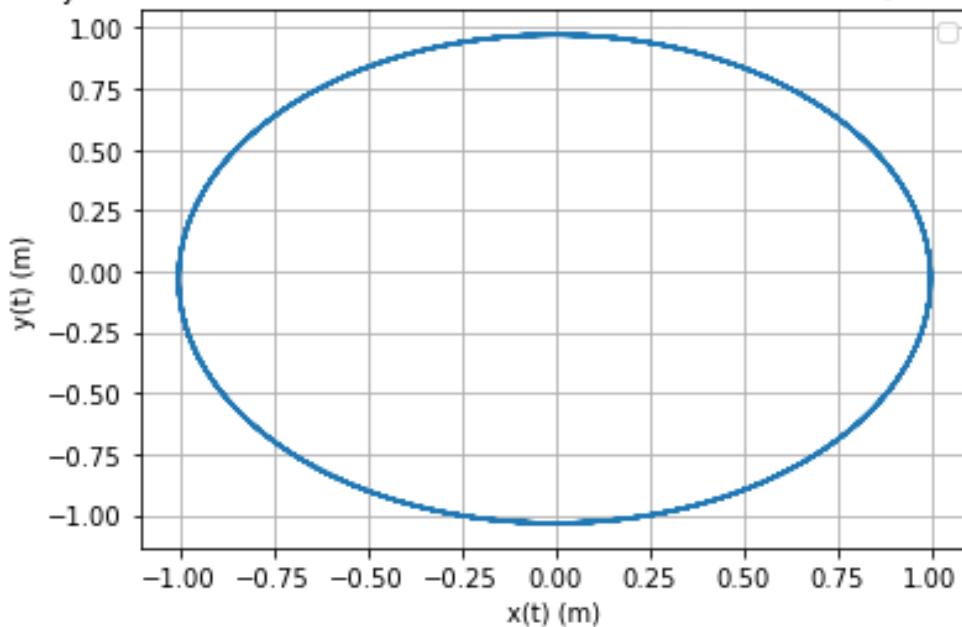
```
#Integração pelo método de Euler-Cromer ou Euler modificado
...
t[0]=0
vx[0]=v0x
vy[0]=v0y
x[0]=x0
y[0]=y0
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt
```

as órbitas terrestres já se fecham, como mostra a figura abaixo.

Cromer, o professor que viu o erro, mostrou que este método apresenta:

- Mesmo erro de truncatura que o método de Euler
- Mas para movimentos periódicos, o erro anula-se ao fim de um período (Terra à volta do Sol demora um ano)

**Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler-Cromer, dt=0.01 ano**



Cromer, o professor que viu o erro, mostrou que este método apresenta:

- Mesmo erro de truncatura que o método de Euler
- Mas para movimentos periódicos, o erro anula-se ao fim de um período (Terra à volta do Sol demora um ano)

Este novo método é apelidado de Euler-Cromer, ou método de Euler modificado. Este estudo mostra que o método de Euler é medíocre para movimentos periódicos.

**Bibliografia**

Serway, cap. 4;

Sørensen, cap. 6;

Villate, cap. 6

### Problemas

- 1.** Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10° com o campo (horizontal).
- Encontre a lei do movimento usando métodos analíticos, se só considerar o peso da bola. Faça um gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.
  - Nas condições da alínea a), qual a altura máxima atingida pela bola e em que instante?
  - Nas condições da alínea a), qual o alcance (distância entre a posição onde foi chutada e o ponto onde alcançou no campo) da trajetória da bola e quanto tempo demorou?
  - Desenvolva um programa que obtenha a lei do movimento e a lei da velocidade em função do tempo, usando o método de Euler. Tem confiança que o seu programa está correto?
  - Considerando agora a resistência do ar. A força de resistência do ar ao movimento da bola é:

$$\begin{cases} F_x^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_y^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

em que  $D = g/v_T^2$ , e a velocidade terminal é  $v_T = 100$  km/h. Atualize o seu programa de modo a considerar a força de resistência do ar. Faça o gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.

- Nas condições da alínea e), determine qual a altura máxima atingida pela bola e em que instante? Tem confiança no seu resultado?
- Nas condições da alínea e), qual o alcance (distância entre a posição onde foi chutada e o ponto onde alcançou no campo) da trajetória da bola e quanto tempo demorou? Tem confiança no seu resultado?

- 2.** Um volante de badminton é batido à altura de 3 m (a partir do chão), com velocidade 200 km/h e a fazer um ângulo de 10° com a horizontal. Considerando que a velocidade terminal é 6.80 m/s,

- Faça o gráfico da trajetória (altura em função da distância percorrida na horizontal).
- Em ponto cai no chão e quanto demorou?

- 3.** Um jogador de futebol executa um canto e chuta a bola de modo a ela entrar na baliza. Para conseguir uma trajetória que possibilite à bola entrar na baliza, pontapeia a bola com uma rotação lateral sobre si própria, o que resulta no aparecimento da força de Magnus,  $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$ , em que  $A = \pi r^2$  é a área da secção de corte da bola,  $r$  o raio da bola e  $\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$  a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm. Esta força de resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola. Se a bola for chutada com a rotação descrita pelo vetor  $\vec{\omega} = (0,400,0)$  rad/s e a velocidade inicial for  $\vec{v} = (25,5, -50)$  m/s, e a posição inicial for o canto  $(0,0,23.8)$  m/s, a bola entra na baliza? A massa da bola de futebol é 0,45 kg. O sistema de eixos considerado é: OX de baliza a baliza, OY o eixo vertical e OZ o eixo deste o poste da baliza e passa pela marca de canto. É golo quando:  $x < 0$  e  $0 < z < 7.3$  m e  $0 < y < 2.4$  m. A velocidade terminal é  $v_T = 100$  km/h.

- 4.** Numa partida de ténis, muitas vezes a bola é batida de modo a adquirir rotação, num eixo horizontal e perpendicular à velocidade. Calcule a trajetória da bola, quando parte da posição inicial  $(-10,1,0)$  com a velocidade 130 km/h, a fazer um ângulo de 10° com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo

vertical. A bola de ténis tem a massa 57 g, o diâmetro 67 mm e no ar tem a velocidade terminal 100 km/h. Calcule a altura máxima e o alcance (quando bate em  $y = 0$ ) da trajetória da bola, quando

- a) A rotação é nula.
- b) A rotação é descrita por  $\vec{\omega} = (0, 0, +100)$  rad/s
- c) A rotação é descrita por  $\vec{\omega} = (0, 0, -100)$  rad/s

**5.** Simule a órbita da Terra á volta do sol, usando o método de Euler sabendo que a força de atração da Terra exercida pelo Sol é

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

em que  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$  e  $\vec{r}$  o vetor da posição da Terra relativamente ao Sol.

Como as quantidades envolvidas são enormes, trabalhe no sistema astronómico de unidades (ver apêndice) Considere a posição inicial da Terra (1,0) AU, e a velocidade inicial ( $0,2\pi$ ) AU/ano e o Sol como fixo na origem do sistema de eixos.

- a) A órbita da Terra à volta do sol é fechada? Consegue obter elipses?
- b) Implemente o método de Euler-Cromer. Este método a 1D integra as equações diferenciais

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

ao fazer as aproximações

$$\begin{aligned} v_x(t + \delta t) &= v_x(t) + a_x(t) \times \delta t \\ x(t + \delta t) &= x(t) + v_x(t + \delta t) \times \delta t \end{aligned}$$

Consegue órbitas fechadas? São elipses? Concordam com as leis de Kepler?

- c) Encontre o erro de truncatura deste método de Euler-Cromer.

**6.** Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1$  N/m e  $m = 1$  kg.

- a) Mostre que a lei do movimento  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , com  $\omega = \sqrt{k/m}$ , é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola, Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola, em que  $A$  e  $\phi$  são constantes?
- b) Calcule numericamente a lei da velocidade e compare com o resultado analítico. Qual o método numérico que escolhe? Considere nula a velocidade inicial e a posição inicial 4 m.
- c) Calcule numericamente a lei do movimento nas condições da alínea anterior e compare com o resultado analítico.

## Capítulo 5

### Leis de Conservação: Energia e Potência

#### Sumário

Física:

Trabalho realizado por uma força  $W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Teorema Trabalho-Energia  $W_{0,1} = E_{c1} - E_{c0}$ .

Energia Cinética  $E_c = \frac{1}{2}m |\vec{v}|^2$

Trabalho realizado por uma força constante.

Trabalho realizado por uma força elástica

Forças conservativas. Energia potencial  $E_p$  (posição),  $W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$

Conservação da energia mecânica  $E_c + E_p = E$

Potência.

Perda de energia por um ciclista.

#### Apêndice 5.A Integração numérica a 1 dimensão

Métodos Numéricos:

Integração numérica: Aproximação trapezoidal de integrais definidos

Note: Para simplificar, a partir deste capítulo, a notação no formalismo vetorial do **módulo de um vetor** passa a ser representado só pela letra, sem indicação da seta, nem das barras laterais, ou seja por exemplo

$$|\vec{v}| = v$$

## 5.1 Introdução

O conhecimento das forças que atuam num corpo permite-nos calcular a aceleração  $\vec{a}(t)$  pela equação fundamental da dinâmica

$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t).$$

E o conhecimento da aceleração permite-nos calcular a velocidade  $\vec{v}(t)$  e a posição  $\vec{r}(t)$  em função do tempo.

Pela equação fundamental da dinâmica também se tem

$$\begin{aligned} \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad , \quad d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \end{aligned}$$

ao longo da trajetória  $C$  do corpo, e independente desta, ou seja, para qualquer relação entre  $x, y$  e  $z$ . A 1 dimensão temos

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} m a_x dx$$

Esta formulação permite determinar a relação da velocidade com a posição, (mesmo sem sabermos as relações temporais), pois a força em muitos casos depende da posição. E também permite a definição de uma quantidade escalar muito útil, a energia de um corpo.

## 5.2 Teorema Trabalho – Energia

O teorema trabalho-energia estabelece que o trabalho

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{Trabalho} = W_{0,1}$$

realizado por uma força  $\vec{F}$  ao longo de uma trajetória é igual à variação da energia cinética  $E_c = \frac{1}{2}m |\vec{v}|^2$ , nas posições  $\vec{C}_0$  até à posição  $\vec{C}_1$ ,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2$$

Se soubermos  $|\vec{v}_0|$  e o trabalho efetuado  $W_{0,1}$ , obtemos  $|\vec{v}_1|$

Demonstração:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad \text{ou} \quad d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\text{e} \quad \frac{d}{dt} [v_x(t)^2] = 2 \frac{d v_x(t)}{dt} v_x(t)$$

então

$$\begin{aligned} \int_C m \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{t_0}^{t_1} m \vec{a}(t) \cdot \vec{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} m \left( \frac{d v_x}{dt} v_x + \frac{d v_y}{dt} v_y + \frac{d v_z}{dt} v_z \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} m \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} [v_x(t)^2] + \frac{d}{dt} [v_y(t)^2] + \frac{d}{dt} [v_z(t)^2] \right) dt = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &= \frac{1}{2} m (|\vec{v}|^2) \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 \end{aligned}$$

e

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

### Exemplo de aplicação: (problema 5.1)

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce no átomo a força

$$F_x = -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}$$

em que  $x$  é a posição do átomo e  $b$  a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal.

- a) Se o átomo partir da posição  $x_0$  com velocidade  $v_{0x}$ , qual a dependência da velocidade em função da posição?
- b) É possível integrar analiticamente e calcular a lei do movimento e a lei da velocidade?

$$\text{A 1D} \quad \int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F_x dx &= \int_{x_1}^{x_2} -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b} dx = -F_0 \frac{b}{2\pi} \left( -\cos \frac{2\pi x}{b} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{b F_0}{2\pi} \left[ \cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right] \\ &= \frac{b F_0}{2\pi} \left[ \cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right] = \frac{1}{2} m v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2 \end{aligned}$$

$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b F_0}{\pi m} \left[ \cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right],$$

$x_1$  é uma posição qualquer

Se  $x_0 = 0$ , então

$$v_x = \pm \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b F_0}{\pi m} \left[ \cos \frac{2\pi x}{b} - 1 \right]} \quad \begin{array}{l} + \text{ sentido positivo do eixo OX} \\ - \text{ sentido negativo do eixo OX} \end{array}$$

Muitas forças relevantes dependem da posição (e de constantes):

Gravítica Peso:  $\vec{P} = m \vec{g}$

Gravítica Geral:  $\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Elástica:  $\vec{F} = -k \vec{r}$

Elétrica:  $\vec{F}_{elet} = -k \frac{q Q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Elétrica num campo:  $\vec{F}_{elet} = q \vec{E}_{elet}$

Forças que não dependem da posição:

$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}| \vec{v}$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

**Trabalho realizado por uma força constante**  $F_x = F_0$

Ex: 1D – O carro a acelerar ou a travar

$$\begin{aligned} W_{0,1} &= \int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} F_0 dx = F_0 (x_1 - x_0) \\ &= F_0 \Delta x = \begin{cases} + \text{ se força e deslocamento mesmo sentido} \\ - \text{ se força e deslocamento sentidos opostos} \end{cases} \end{aligned}$$

- caso: Peso  $F_y = -mg$  (eixo OY positivo a apontar para cima)

$$W_{0,1} = -m g (y_1 - y_0)$$

$$= m g (y_0 - y_1) = \begin{cases} + & y_0 > y : \text{ponto inicial mais alto} \\ - & y_0 < y_1 : \text{ponto inicial mais baixo} \end{cases}$$

**Trabalho realizado por uma força elástica**  $\vec{F} = -k \vec{r}$

Ex: 1D –

$$F_x = -k x$$

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x dx = \int_{x_0}^{x_1} -k x dx = -\frac{1}{2} k(x^2)|_{x_0}^{x_1} = \frac{1}{2} k(x_0^2 - x_1^2)$$

$$W_{0,1} = \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

## Energia Potencial

O trabalho da força peso e da força elástica entre duas posições, determinados atrás:

Trabalho realizado por uma força constante  $F_y = -mg$

$$W_{0,1} = m g y_0 - m g y_1$$

Trabalho realizado por uma força elástica  $F_x = -k x$

$$W_{0,1} = \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

só depende da posição inicial e final, e não da trajetória que o corpo seguiu. Podemos definir uma outra quantidade  $E_p$ , tal que

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

O que para

- Peso:  $E_p(y) = m g y + Constante$
- Força elástica  $E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 + Constante$

Esta quantidade tem a dimensão de energia, a unidade no Sistema Internacional o joule (J), e é chamada Energia potencial.

Quando as **forças dependem só da posição**, o trabalho realizado é

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

e a energia potencial  $E_p$  está relacionada com a força por

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

Estas forças chamam-se conservativas

## Conservação da Energia Mecânica

Para forças conservativas, o trabalho realizado é

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

E por sua vez é igual à variação da energia cinética

$$W_{0,1} = E_{c1} - E_{c0},$$

o que faz

$$E_{c1} - E_{c0} = E_{p0} - E_{p1}$$

ou

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c0} + E_{p0}.$$

Como os pontos inicial (0) e final (1) são quaisquer, temos:

$$E_c + E_p = \text{constante em toda a trajetória}$$

o que indica que a quantidade

$$E_c + E_p = E$$

chamada **energia mecânica, e conserva-se em toda a trajetória.**

A energia mecânica é para o

Peso:  $E = \frac{1}{2}m v_y^2 + mgy$

Força Elástica :  $E = \frac{1}{2}m v_x^2 + \frac{1}{2}k x^2$

E não depende da constante (arbitrária) com que a energia potencial é definida. Por exemplo, para a força elástica

$$E_p = \frac{1}{2}k x^2 + \text{Constante}$$

Esta constante é arbitrária. É escolhida por nós e frequentemente opta-se por ser nula.

Temos sempre a velocidade num ponto como função da posição (se soubermos as condições iniciais ou equivalente).

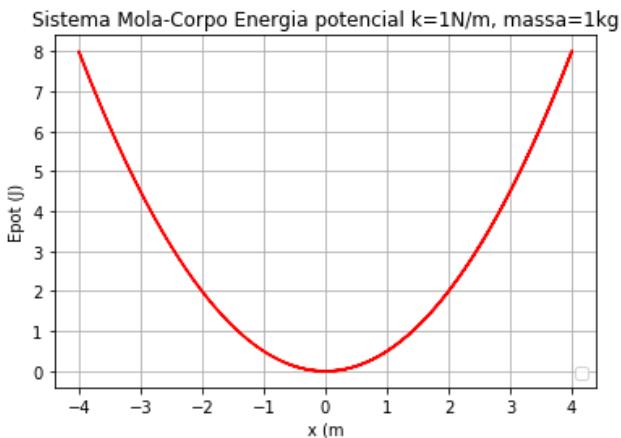
### **Diagrama de Energia**

No gráfico a seguir está a representação da energia potencial para a força elástica,

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k x^2 + \text{Constante}$$

em que a constante é escolhida como zero, de modo que a energia potencial é nula no mínimo, quando  $x = 0$ , e é

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k x^2$$



O gráfico da energia potencial em função do espaço, diagrama de energia, e a lei de conservação de energia mecânica oferecem a possibilidade de avaliar o movimento dum corpo sem integrar as equações do movimento.

### Por exemplo:

Sistema mola-corpo  $E_p(x) = \frac{1}{2}k x^2$

1. Se a energia total for  $E = 8 \text{ J}$

O corpo não se desloca em  $x < -0.4 \text{ m}$  nem em  $x > 0.4 \text{ m}$ , uma vez que a energia cinética é sempre positiva e a energia mecânica ultrapassa 8 J.

2. Pontos em que  $\frac{dE_p}{dx} = 0$ , são posições de equilíbrio, pois  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$ . Neste sistema o ponto de equilíbrio é quando  $x = 0$ .
3. A velocidade é máxima (a energia cinética é máxima) quando a energia potencial for mínima. Neste caso é quando o corpo passa por  $x = 0$ .
4. A energia potencial é máxima quando a energia cinética for nula. Neste caso é quando a energia cinética for nula, e  $E_p = 8 \text{ J}$ .

Sistema oscilador duplo  $E_p(x) = \frac{1}{2}k(x^2 - x_{eq}^2)^2$

Pontos de equilíbrio  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$

Estável: 2 pontos  $(-x_{eq}, 0)$  e  $(x_{eq}, 0)$

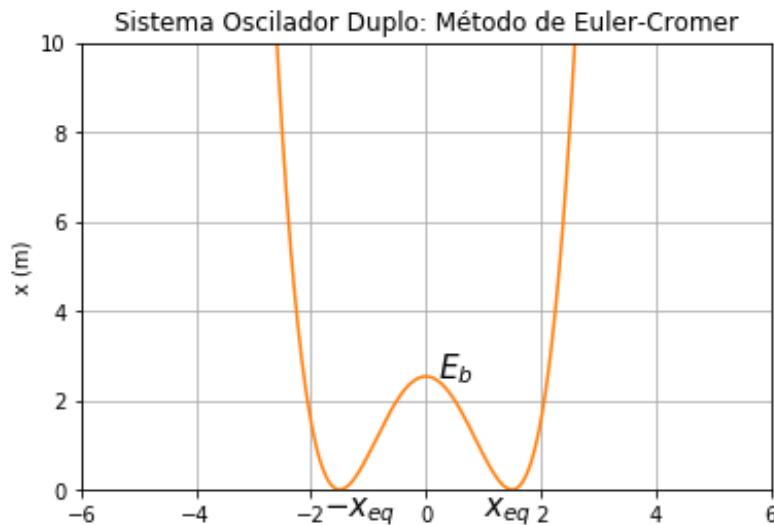
Instável: 1 ponto  $(0, E_b)$

1. Se a energia total do corpo for  $E < E_b$

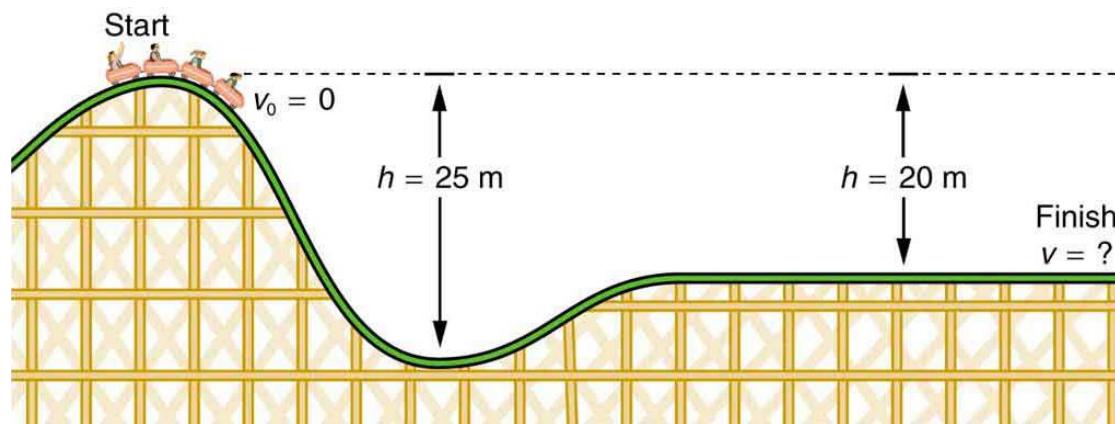
O corpo desloca-se ou na parte esquerda ou (exclusive) na parte direita, à volta de  $x_{eq}$ , limitado pelas posições em que a  $E_p = E$

2. Se a energia total do corpo for  $E > E_b$

O corpo desloca-se na parte esquerda e na parte direita, à volta de  $x_{eq}$ , limitado pelas posições em que a  $E_p = E$



### Sistema Montanha russa



Carruagem de massa  $m$

1. Pontos de equilíbrio:  $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$   
o mais baixo: ponto de equilíbrio estável  
cimo da montanha: ponto de equilíbrio instável (a mais pequena perturbação faz o corpo sair da posição de equilíbrio)

2. Conservação da Energia Mecânica:

Instante inicial  $v_0 = 0$  e  $y_0 = 25 \text{ m}$

$$E = E_c + E_p = 0 + m g y_0 = 25 mg$$

em que se considera o ponto mais baixo  $y = 0$  e  $E_p(0) = 0$ .

Na posição  $B$  de altura  $h = 25 \text{ m}$

$$E = E_{c,B} + E_p(0) = E_{c,b} = \frac{1}{2}m v_{Bx}^2$$

Na posição  $F$ , de altura 5 m

$$E = E_{c,F} + E_p(5) = \frac{1}{2}m v_{Fx}^2 + 5m g$$

Pela conservação da energia mecânica nas três posições, temos

$$25 mg = \frac{1}{2}m v_{Bx}^2$$

e

$$25 mg = \frac{1}{2}m v_{Fx}^2 + 5m g$$

A solução é

$$v_{Bx}^2 = 50 g \quad \Rightarrow \quad v_{Bx} = \pm 22.14 \text{ m/s}$$

$$v_{Fx}^2 = 40 g \quad \Rightarrow \quad v_{Fx} = \pm 19.80 \text{ m/s}$$

e

$$v = 19.80 \text{ m/s}$$

## **Conservação de Energia e Métodos Numéricos**

Vamos verificar qual o desempenho dos dois métodos numéricos que aprendemos, o método de Euler e o de Euler-Cromer, para calcular a energia mecânica.

### Problema:

Nas condições do problema 2.6:

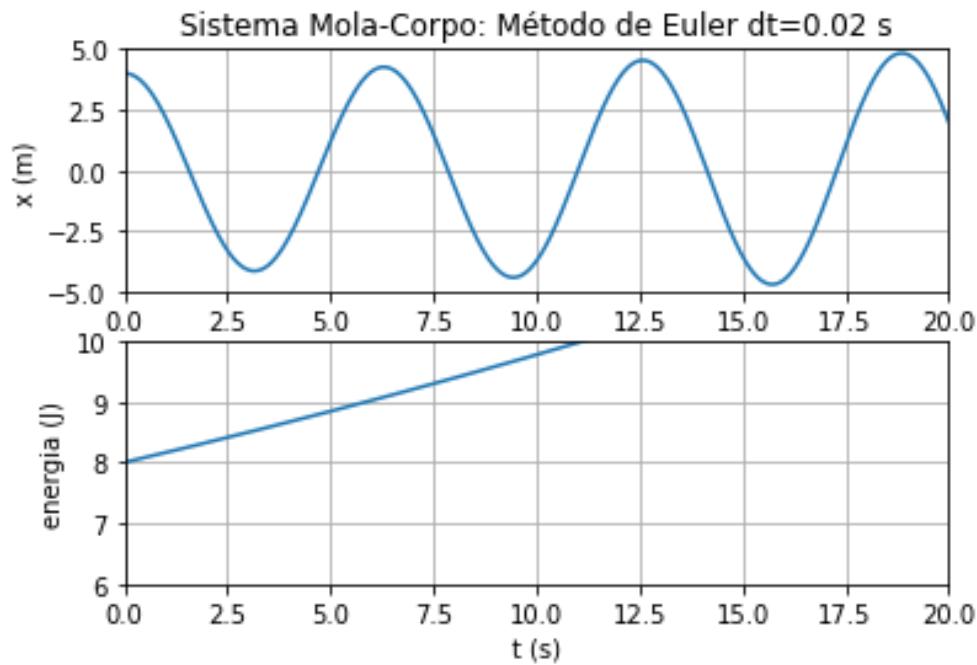
Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

- Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais:  $x_0 = 4 \text{ m}$  e  $v_{0x} = 0$ .
- Compare o cálculo de energia mecânica se integrar numericamente as equações  $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$  e  $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$  para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer.

### Resolução:

$$\text{a)} E = E_c + E_p(x) = 0 + \frac{1}{2}k 4^2 = 8 \text{ J}$$

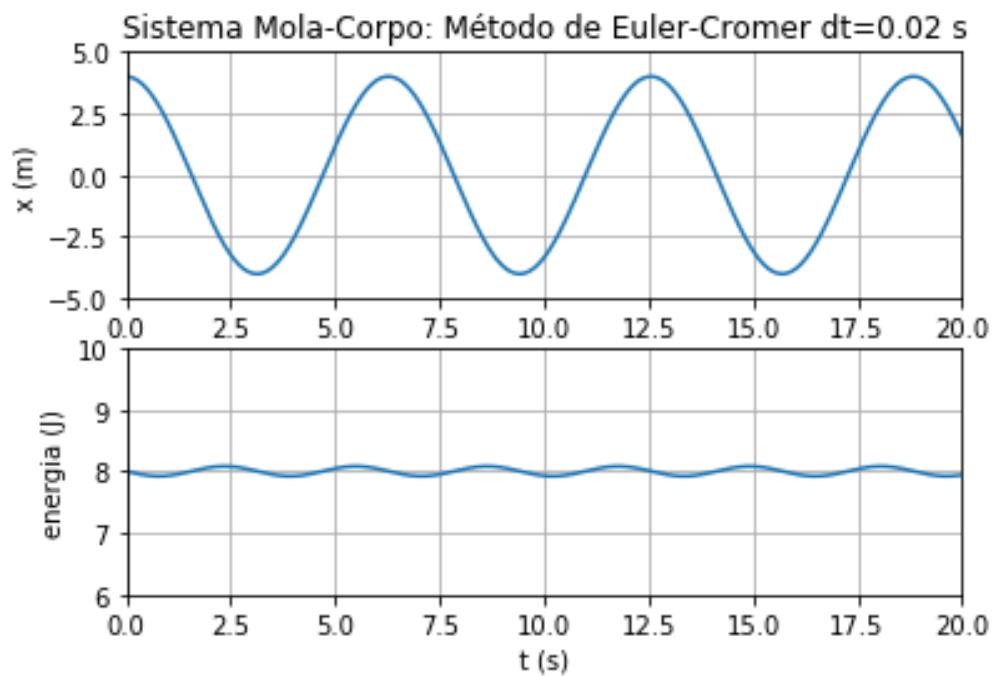
- Para um passo  $\delta t = 0.2 \text{ s}$ , a lei do movimento e a energia mecânica calculados usando o método de Euler estão no seguinte gráfico:



Podemos concluir:

O método de Euler produz uma solução para a lei do movimento satisfatória (aproximadamente sinusoidal) mas a energia mecânica não se mantém constante, nem aproximadamente, antes, pelo contrário, explode.

Se usarmos o método de Euler-Cromer, e o mesmo passo de  $\delta t = 0.2$ , como se pode ver no gráfico abaixo



A lei do movimento obtida é sinusoidal e a energia mecânica mantém-se, em média constante, com pequenos desvios.

Cromer provou que erro de truncatura do método de Euler-Cromer é nulo ao fim de um período. A solução obtida da lei do movimento possui exatidão nas amplitudes máxima e mínima, e a anergia mecânica volta ao seu valor nos múltiplos do período. Para outras posições, a energia mecânica apresenta pequenos desvios ao seu valor.

A conservação da energia total é um bom teste aos métodos de integração numérica. O método de Euler é muito mau, enquanto que o método de Euler-Cromer é muito eficiente no cálculo da energia mecânica, para o mesmo número de operações.

Devemos escolher os métodos que melhor conservam a energia mecânica, quando só existem forças conservativas.

**Conservação de Energia mecânica como teste extra (ou critério) de validação do método numérico de integração.** Um outro critério é a convergência do resultado com o decréscimo do passo temporal.

Vamos verificar em outros movimentos qual o desempenho dos dois métodos numéricos que aprendemos, o método de Euler e o de Euler-Cromer, para calcular a energia mecânica.

### Terra à volta do Sol

A terra move-se em trajetórias elíticas à volta do Sol, num movimento periódico. Vamos usar o programa para este problema, escrito anteriormente, e basta implementar o cálculo da energia mecânica.

A energia potencial é obtida através da força gravítica

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -G \frac{m M}{x^2+y^2} \frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

em que  $x$  e  $y$  são as coordenadas da posição da Terra à volta do Sol.

Pela relação

$$\begin{cases} F_{grav,x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_{grav,y} = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \end{cases}$$

Mostre se a energia potencial da Terra à volta do Sol, considerado fixo, é definida por

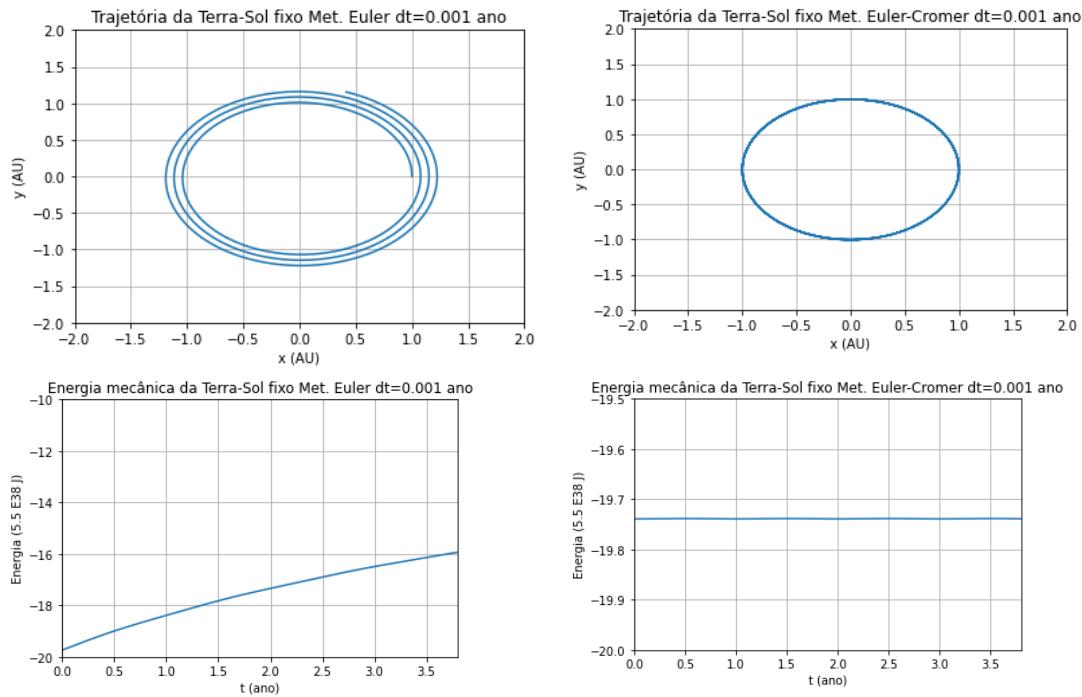
$$E_p = -G \frac{m M}{|\vec{r}|} = -G \frac{m M}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

encontra a força gravítica escrita atrás.

A energia mecânica da Terra é

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_{xy}^2) - G \frac{m M}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Os quatro gráficos abaixo mostram a órbita da Terra e a evolução temporal da energia mecânica (que deve ser constante) obtidas pelo método de Euler e o de Euler-Cromer.



Neste sistema periódico:

O método de Euler obtém trajetória da Terra abertas e em expansão e a energia mecânica não se mantêm constante, duas características falsas.

O método de Euler-Cromer obtem trajetória da Terra fechadas (aproximadamente circulares) e a energia mecânica mantém-se constante, que são duas características observadas.

De novo o Método de Euler é ineficaz, enquanto o método de Euler-Cromer é eficaz, para um movimento periódico,

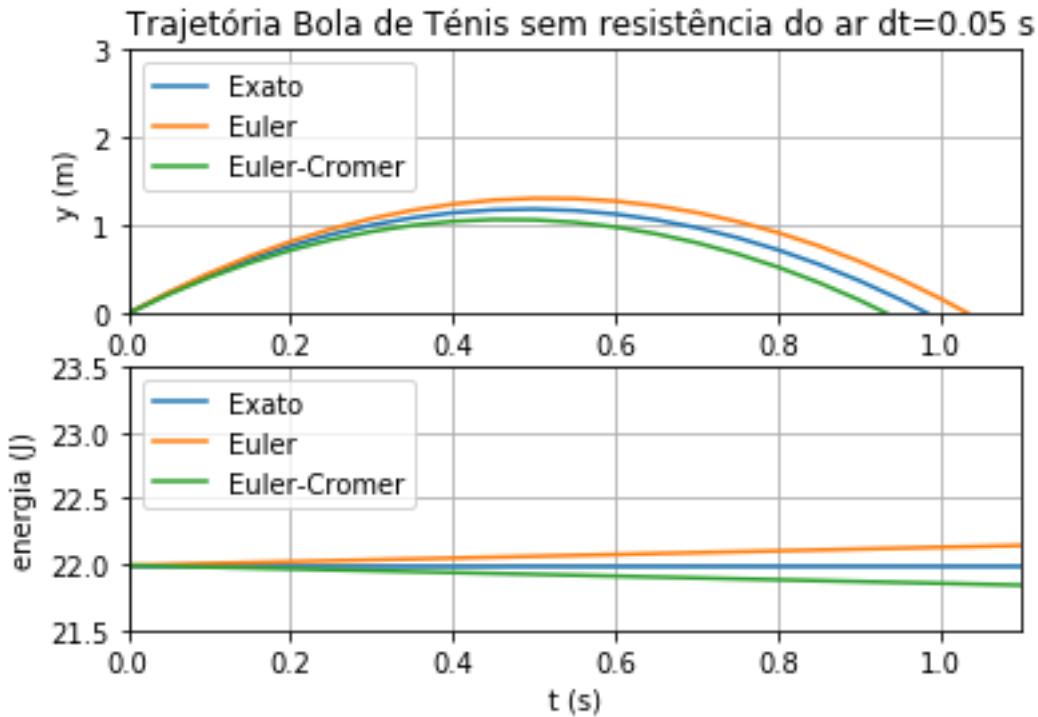
### Projétil sem resistência do ar

Vamos verificar qual o desempenho do método de Euler-Cromer no problema do projétil sem resistência do ar, uma vez que o método de Euler forneceu resultados concordantes com os resultados exatos.

No gráfico abaixo temos justapostos a trajetória e a energia calculados pelos dois métodos, Euler e Euler-Cromer, e o resultado exato (analítico). Usamos um passo temporal relativamente grande para enfatizar as diferenças.

Podemos ver claramente que os dois métodos dão respostas muito perto dos valores exatos, em que o método de Euler a resposta é por excesso, enquanto o método de Euler-Cromer a resposta é por defeito. Ambos os métodos fornecem respostas que nós podemos confiar, visto que a convergência da solução numérica já foi verificada.

No caso da energia, no intervalo de tempo de interesse, a energia mecânica é numa boa aproximação constante. Note que a escala da energia é muito pequena.



### Trabalho de forças não conservativas

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{c1} - E_{c0} = \frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2$$

e pela definição de energia potencial :  $\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$

#### Sobreposição do trabalho:

Notar:  $\vec{F}$  é a força resultante de todas as forças aplicadas  $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(conservativa)} + \vec{F}^{(não conservativa)}$$

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [\vec{F}^{(conservativa)} + \vec{F}^{(não conservativa)}] \cdot d\vec{r} = \\ \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F}^{(não conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

Como  $\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1} + \int_C \vec{F}^{(não conservativa)} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2$$

e

$$\frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não conservativo)} = \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2 + E_{p0}$$

em que

$$W_{0,1}^{(não conservativo)} = \int_C \vec{F}^{(não conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

### Exemplo: Movimento da bola de ténis com resistência do ar

Vamos explicitar estas relações no movimento do projétil sujeito à resistência do ar, o mesmo problema tratado anteriormente. Todas as forças estão no plano onde decorre o movimento, logo temos um problema a duas dimensões. É necessário calcular:

A energia potencial gravítica é  $mg y$

A energia cinética  $\frac{1}{2}m |\vec{v}|^2$

E o trabalho realizado pela força de resistência do ar

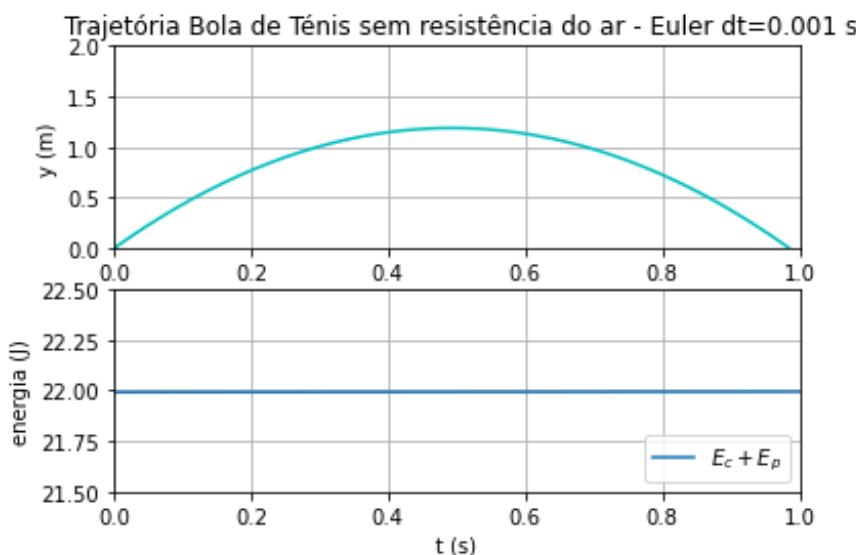
$$\vec{F}^{(não conservativa)} = \vec{F}^{res} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v}, \quad \text{em que } \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad D = g/v_T^2$$

que é

$$\begin{aligned} W_{0,1}^{(não conservativo)} &= W_{0,1}^{res} = \int_C -m D |\vec{v}|^2 \hat{v} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_C (-m D |\vec{v}| v_x dx - m D |\vec{v}| y dy) \end{aligned}$$

Estes dois integrais não são resolúveis por métodos analíticos. Vamos pois integrar por um método numérico, simples e com um erro de truncatura de  $\sigma(\delta x^2)$ , o método trapezoidal. Este método e a sua implementação estão no apêndice no final deste capítulo.

Escolhemos o método de Euler, e um passo pequeno de  $\delta t = 0.001$ s. No gráfico abaixo vê-se que a energia mecânica é conservada no intervalo de tempo do movimento acima do solo.



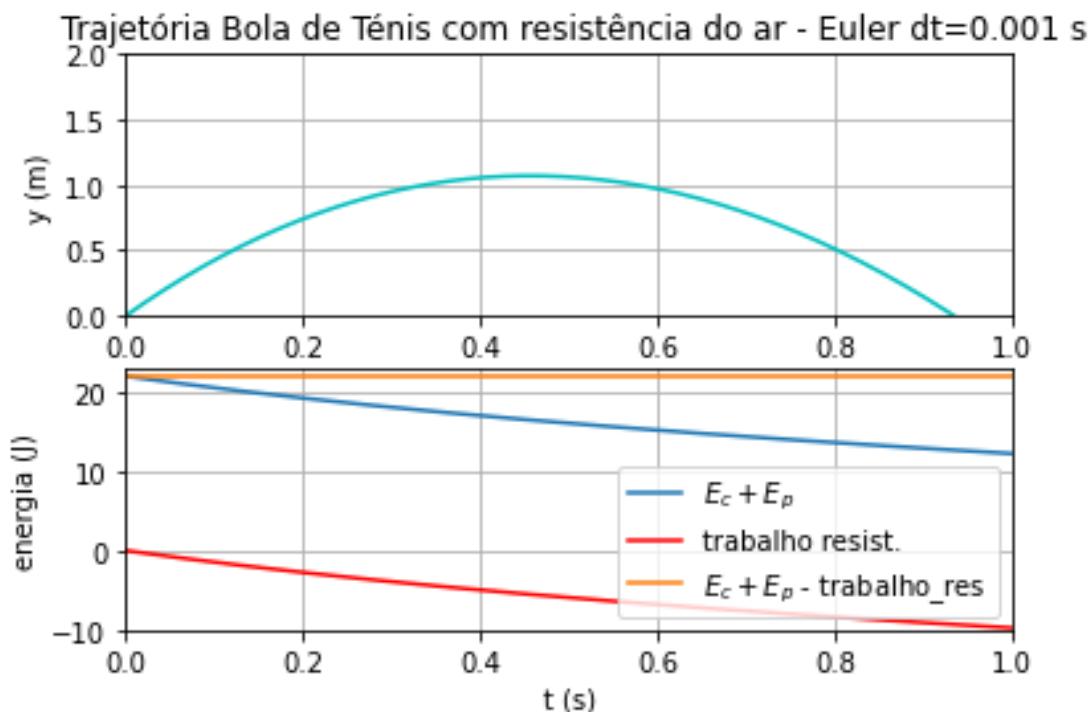
No caso de se considerar a resistência do ar ao movimento, a energia mecânica inicial é

$$E(0) = \frac{1}{2}m |\vec{v}_0|^2 + E_{p0}$$

O gráfico abaixo mostra que a quantidade

$$\frac{1}{2}m |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{res} = E(0)$$

se mantém constante durante o movimento.



Mesmo na presença de forças não conservativas, **a energia mecânica adicionada à energia dissipada é constante e é também um critério extra de validação da solução.**

## Potência

Uma quantidade conveniente para analisar o desempenho de motores é a potência, que é a variação do trabalho (ou energia) realizado por unidade de tempo:

$$\frac{dW}{dt} = P_o$$

Como um elemento infinitesimal de trabalho é:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e       $d\vec{r} = \vec{v} dt$

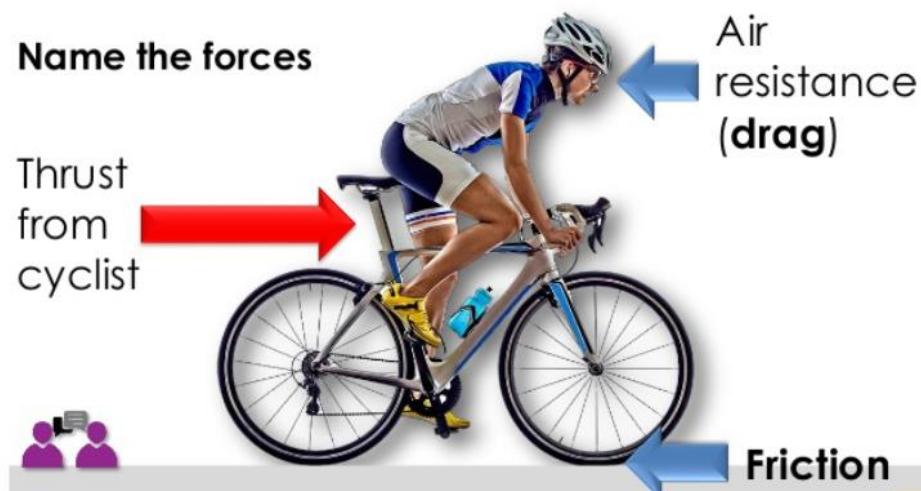
temos  $dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$

e       $\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

A unidade de potência no sistema internacional é o watt, que é  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ .

### 5.3 Potência desenvolvida por um ciclista:

Um ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar. O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar e a força de resistência ao rolamento (ou fricção).

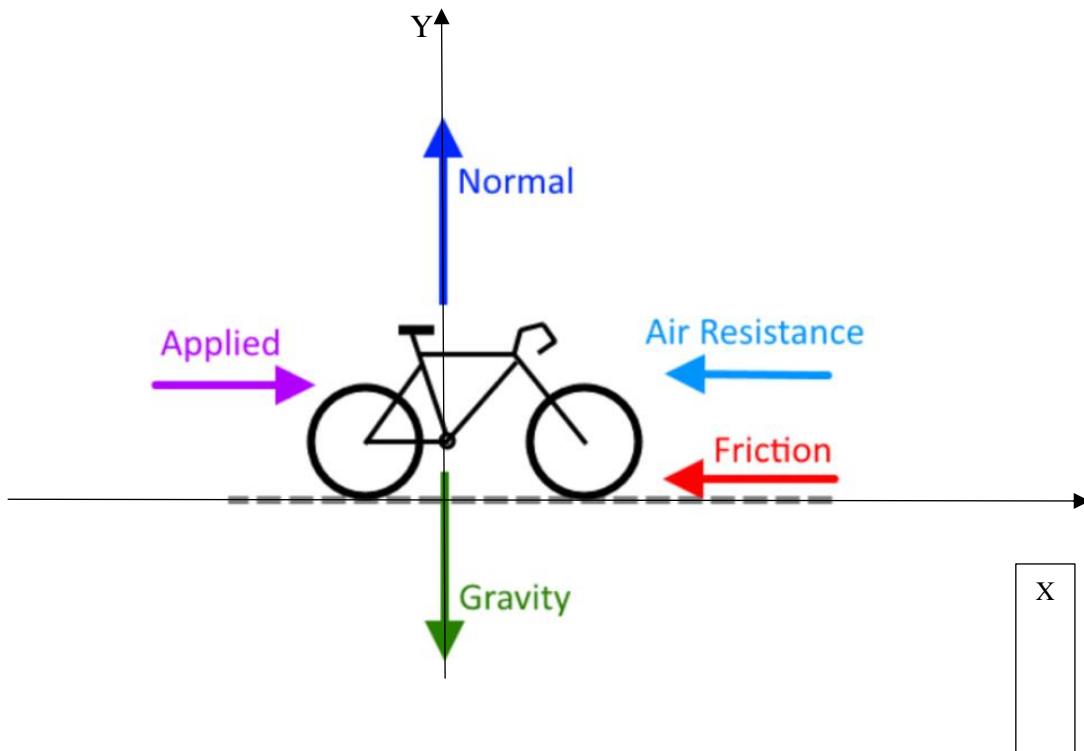


As forças aplicadas ao ciclista:

- Força desenvolvida pelo ciclista  $\vec{F}_{cic}$
- Força de resistência do ar  $\vec{F}_{res} = -\frac{c_{res}}{2} A \rho_{ar} |\vec{v}| \vec{v}$ , A=área
- Peso

- Normal  $\vec{N}$
- Força de resistência ao rolamento ou fricção  $|\vec{F}_{rol}| = \mu |\vec{N}|$ .

Podem ver vistas na figura abaixo.



**Notação do módulo das forças para simplificar:**  $|\vec{N}| = N$

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N} \text{ segundo OX}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} + 0 - F_{res} - F_{rol} + 0 \\ F_y = 0 - P + 0 + 0 + N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ 0 = -mg + N \end{cases} \quad \begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ N = mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g \\ N = mg \end{cases}$$

Qual a potência desenvolvida pelo ciclista manter uma velocidade uniforme (constante) (ou  $F_x = 0$ ) ?

Por medições efetuadas, o coeficiente de resistência  $\mu$  de um piso liso de alcatrão é de 0.004 e o coeficiente de resistência do ar é  $C_{res} = 0.9$ .

Potência  $P_{o,cic} = F_{cic} v = ?$

$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = 0$  e movimento sempre no sentido positivo  $v_x = +v$

$$F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v^2 + \mu m g$$

E a potência desenvolvida pelo ciclista é

$$P_{o,cic} = \left( \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v^2 + \mu m g \right) v$$

Ou seja a potência que um ciclista tem de fornecer à bicicleta, numa superfície horizontal é de, para uma massa do ciclista-bicicleta é de 75 kg, e uma área frontal do ciclista de  $A = 0.30 \text{ m}^2$  (problema 9):

$$v = 30 \text{ km/h} \quad P_{o,cic} = 120 \text{ W} = 0.163 \text{ cv}$$

$$v = 40 \text{ km/h} \quad P_{o,cic} = 260 \text{ W} = 0.353 \text{ cv}$$

$$v = 296.010 \text{ km/h} \quad P_{o,cic} = 92177 \text{ W} = 125 \text{ cv}$$

O record mundial de velocidade, obtido em setembro de 2018 por Denise Mueller-Korenek, é de 183.932 mph (milhas/hora) = 296.010 km/h. Este record foi obtido com a minimização da resistência do ar, figuras abaixo.



Matt Ben Stone/Alamy



**Problema 12**

Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s?

- a) Qual a sua velocidade terminal?
- b) Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?
- c) Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema 9.

Forças:

$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N} \text{ segundo OX}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g = m a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

$$m a_x = \frac{P_{o,cic}}{v} - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu m g$$

**Problema 13**

O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de 5°.

- a) Quanto tempo demora a percorrer 2 km?
- b) Qual a sua velocidade terminal?

Resolução:

Forças:

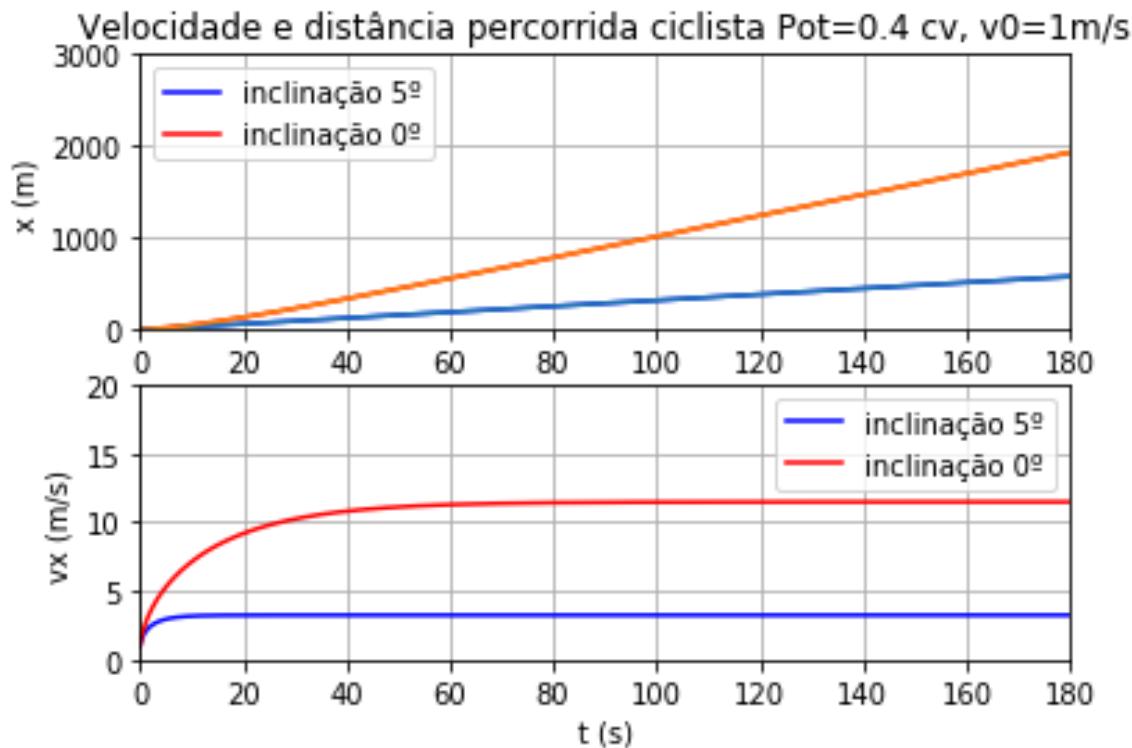
$$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N} \text{ segundo OX}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - P \sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu N + 0 = m a_x \\ F_y = -m g \cos 5^\circ + N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P_{o,cic}}{v} + P \sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} v v_x - \mu N = m a_x \\ N = m g \cos 5^\circ \end{cases}$$

$$a_x = \frac{P_{o,cic}}{m v} - g \sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2m} A \rho_{ar} v v_x - \mu g \cos 5^\circ$$

Abaixo estão os gráficos da distância percorrida e da velocidade atingida, para um ciclista a desenvolver sempre a potência de 0.4 cv. É de notar que a velocidade terminal é aproximadamente um terço a subir o plano de 5° de inclinação do que na horizontal.



## Bibliografia

- Serway, cap. 7 e 8;
- Sørensen, cap. 10 e 11;
- Villate, cap. 6

## Apêndice 5.A

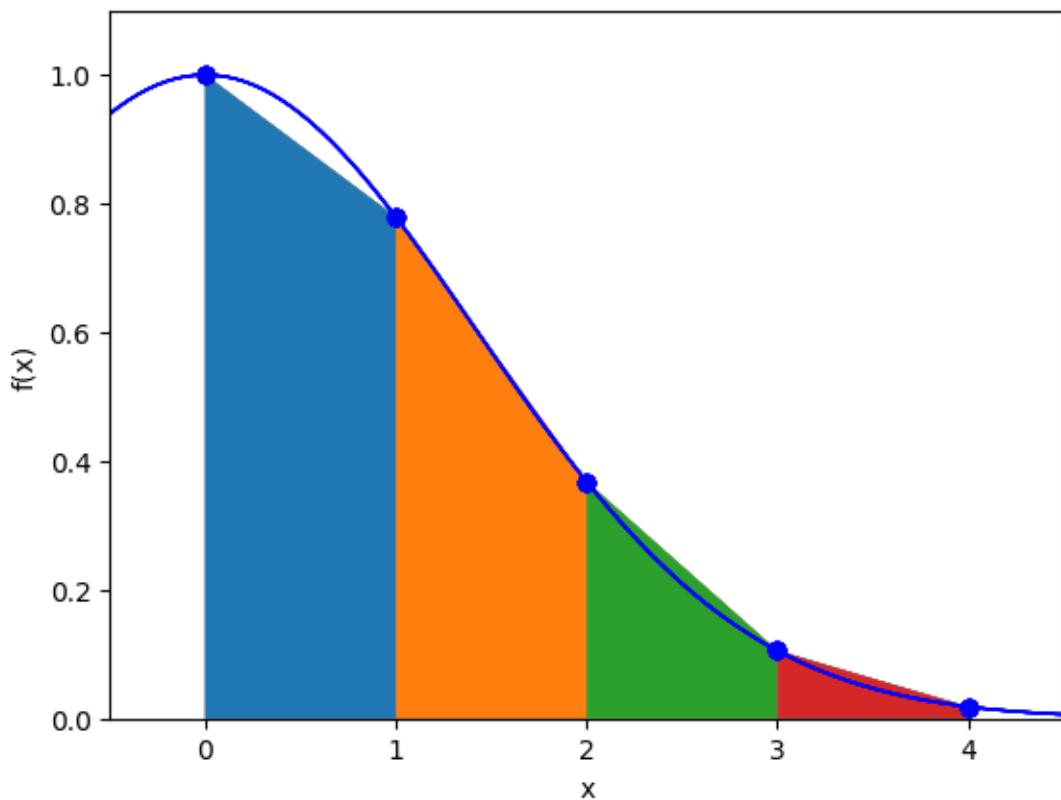
### Integração numérica a 1 dimensão:

Quando temos uma função  $f(x)$  expressa só em pontos  $x_i$ , de **índices  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$** , igualmente espaçados por  $\delta x$ , num total de  **$n + 1$  elementos**. O integral desta função de pontos discretos, entre dois pontos  $a$  e  $b$

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

e onde  $n = (b - a)/\delta x$  e  $x_i = a + i \delta x$ , obtém-se facilmente por integração numérica.

A interpretação geométrica do integral é a área limitada pela função entre os dois pontos extremos  $a$  e  $b$ . Na figura abaixo  $a = 0$  e  $b = 4$ .



Essa área pode ser considerada como uma soma de  $n$  fatias de espessura  $x_{i+1} - x_i = \delta x$ , em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Assim  $\delta x = (b - a)/n$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

Aproximação retangular:  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx f(x_i) \delta x$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Aproximação trapezoidal:  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \delta x$

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \delta x = \\ &= \delta x \times \left( \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \end{aligned}$$

Em python podemos obter o integral da função  $f(x)$  pela aproximação trapezoidal:

$$\text{Integral} = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))$$

Note que temos  $n + 1$  elementos da função.

Em termos da dimensão do vetor a integrar, ou seja de  $n + 1 = n_{dim}$

a integração trapezoidal é calculada por

$$\text{integral} = dx * ((f[0]+f[n_{dim}-1])*0.5+np.sum(f[1:n_{dim}-1]))$$

### Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:

$$\text{erro} = \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right)_{\text{exato}} - \left( \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \delta x \right)_{\text{ap. trap}} \right|$$

A função  $f(x)$  pela série de Taylor à volta de  $x_i$

$$f(x) = f(x_i) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} (x - x_i) + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3)$$

Subst. em

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(x_i) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} (x - x_i) + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(x_i) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} (x - x_i) + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(x_i) (x_{i+1} - x_i) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \sigma((x_{i+1} - x_i)^3) \\
&= f(x_i) \delta x + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3)
\end{aligned}$$

E, por sua vez

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + \sigma((x_{i+1} - x_i)^3)$$

o que faz

$$\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = f(x_i) + \frac{1}{2} \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \delta x^2 + \sigma(\delta x^3)$$

Subst. no erro que se pretende calcular

$$\begin{aligned}
\text{erro} &= \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right)_{\text{exato}} - \left( \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \delta x \right)_{\text{ap. trap}} \right| \\
&= \left| \left( f(x_i) \delta x + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \left( f(x_i) + \frac{1}{2} \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_i} \delta x^2 + \sigma(\delta x^3) \right) \delta x \right) \right| \\
&= \sigma(\delta x^3)
\end{aligned}$$

O erro local de truncatura de um integral de uma fatia é da  $\sigma(\delta x^3)$ .

O erro global do integral completo, que é um somatório de  $n$  fatias, é o acumular dos erros locais

$$n \sigma(\delta x^3) = \frac{b-a}{\delta x} \sigma(\delta x^3) = \sigma(\delta x^2).$$

### Problemas

- 1.** Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}$$

em que  $x$  é a posição do átomo e  $b$  a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal. Se o átomo partir da posição  $x_0$  com velocidade  $v_{0x}$ , qual a dependência da velocidade em função da posição? É possível integrar analiticamente e desse modo calcular a lei do movimento e a lei da velocidade?

- 2** A relação entre a força conservativa e a energia potencial é

$$\begin{cases} F_x = -\frac{dE_p}{dx} \\ F_y = -\frac{dE_p}{dy} \\ F_z = -\frac{dE_p}{dz} \end{cases}$$

Calcule a força associada à energia potencial:

- a) elástica  $E_p = \frac{1}{2}k x^2$
- b) gravítica superfície da Terra  $E_p = m g y$
- c) elástica do oscilador duplo  $E_p = \frac{1}{2}k(x^2 - x_{eq}^2)^2$
- d) gravítica  $E_p = -G \frac{m M}{|\vec{r}|} = -G \frac{m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- e) da carga elétrica  $q$  originada pela carga  $Q$ ,  $E_p = -K \frac{q Q}{|\vec{r}|}$

- 3.** O método numérico de integração numérica de um integral definido

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

de menor precisão é a aproximação retangular (ver apêndice).

- a) Determine como varia o erro de truncatura local com o passo  $\delta x$ .
- b) Determine como varia o erro de truncatura global com o passo  $\delta x$ .

R: a)  $\sigma(\delta x^2)$  b)  $\sigma(\delta x)$

- 4.** Como teste de integração numérica, calcule usando a aproximação trapezoidal o integral

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx$$

que é igual a 1. Use vários passos  $\delta x$  e verifique que o erro é proporcional a  $\delta x^2$ .

**5.** Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial  $y = 0$ ) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical.

a) Calcule a energia mecânica em qualquer instante, no caso de não considerar a resistência do ar.

b) Considerando a resistência do ar, calcule a energia mecânica nos três instantes  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 0.4$  s e  $t_2 = 0.8$  s.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes

$t_0 = 0$ ,  $t_1 = 0.4$  s e  $t_2 = 0.8$  s.

Use a aproximação trapezoidal para calcular os integrais. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A bola de ténis tem a massa 57 g.

**6.** Nas condições do problema 4.6:

Uma mola exerce uma força  $F_x = -k x(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1$  N/m e  $m = 1$  kg.

a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais:  $x_0 = 4$  m e  $v_{0x} = 0$ .

b) Compare o cálculo de energia total se integrar numericamente as equações

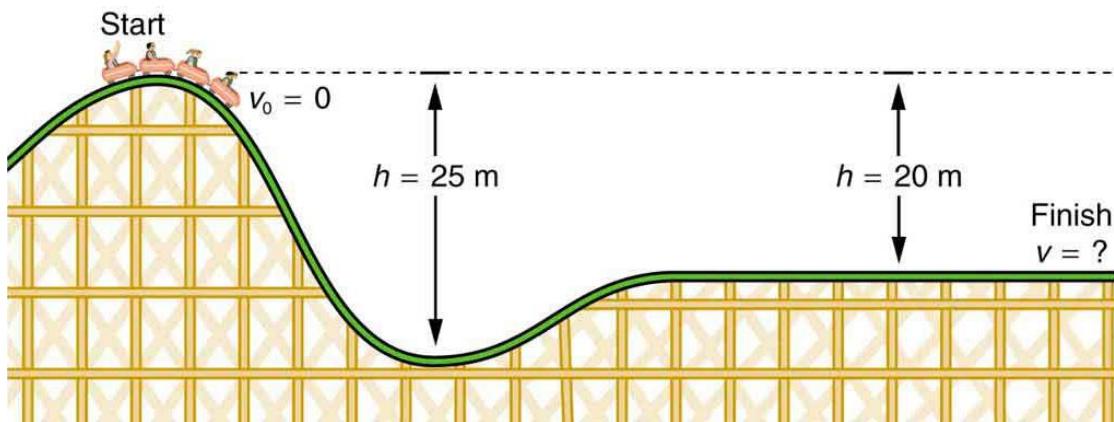
$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer.

**7.** Se na montanha russa esquematizada na figura abaixo, a carruagem com os passageiros tiver a massa de 1000 kg, qual a velocidade

a) no ponto mais baixo?

b) na zona plana?



- 8.** Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio,  $x_{eq} = 2 \text{ m}$ . O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k(|x| - x_{eq})^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = \begin{cases} -(x - x_{eq}) & x > 0 \\ (-x - x_{eq}) & x < 0 \end{cases}$$

onde  $k = 1 \text{ N/m}$ .

- a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial.
- b) Qual o movimento quando a energia mecânica é 1J?
- c) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Qual a amplitude e a frequência do movimento?
- d) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 1.5 J? Qual a amplitude e a frequência do movimento?

- 9.** Qual a potência desenvolvida por um ciclista de massa 75 kg para manter a velocidade uniforme, na horizontal,

- a) a 30 km/h?
- b) a 40 km/h?
- c) a 296.010 km/h?

O coeficiente de resistência  $\mu$  de um piso liso de alcatrão é de 0.004, o coeficiente de resistência do ar é  $C_{res} = 0.9$ , de área frontal  $0.30 \text{ m}^2$  e densidade do ar  $\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ .

**10.** Um ciclista no pelotão varre uma área eficaz 30% inferior à do ciclista à frente do pelotão.

- Calcule a potência a desenvolver pelos dois ciclistas quando rolarem a uma velocidade de 40 km/h.
- Calcule a potência a desenvolver pelos dois ciclistas quando rolarem a uma velocidade de 50 km/h?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema 9.

**11.** Muitos ciclistas amadores conduzem com o tronco levantado. Esta posição aumenta a área de varrimento para o dobro.

- Calcule a potência a desenvolver pelo ciclista se a velocidade for 30 km/h.
- E se a velocidade for de 40 km/h, qual a potência desenvolvida pelo ciclista?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema 9.

**12.** Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s?

- Qual a sua velocidade terminal?
- Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?
- Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema 9.

**13.** O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de 5°.

- Quanto tempo demora a percorrer 2 km?
- Qual a sua velocidade terminal?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema 9.

## **Capítulo 6**

### **Leis de Conservação: Momento e colisões**

#### **Sumário**

Física:

Impulso de uma força  $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt$

Teorema  $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

Momento  $\vec{p} = m\vec{v}$

Força média  $\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t) dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$

## 6.1 Introdução

Uma outra relação decorrente da equação fundamental da dinâmica:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

em que o impulso  $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt$  da força  $\vec{F}(t)$ , aplicada a um corpo, é igual à variação do momento  $\vec{p} = m\vec{v}$  desse corpo, entre os instantes  $t_1$  e  $t_0$ .

Esta relação é generalizável a sistemas de 2 e de muitos corpos e é muito útil em colisões de corpos, em que as forças são desconhecidas.

## 6.2 Teorema Impulso-momento e Conservação do momento

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a} dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m\vec{v}(t)|_{t_0}^{t_1} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

em que  $m\vec{v}(t) = \vec{p}(t)$  é o momento do corpo no instante  $t$ .

A lei fundamental da dinâmica é reescrita em termos do momento

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Quando a massa do corpo é constante obtemos a forma conhecida

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

## 6.3 Conservação do momento de um corpo

Quando não existem forças aplicadas ao corpo,  $\vec{F} = 0$ , o que implica, devido à igualdade do impulso e da variação do momento, a

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_0$$

Como os instantes  $t_1$  e  $t_0$  são quaisquer, o momento mantém-se constante, ou seja tem-se conservação do momento.

## 6.4 Estimativa da força média numa colisão

Quando um corpo colide com outro objeto, podemos estimar o valor médio da força se soubermos o tempo de contato e a variação do momento. Por exemplo, a trajetória de uma bola de ténis altera-se completamente depois de sofrer uma pancada de uma raquete.

Durante o contacto bola-raquete a bola sofre uma força, esboçada na figura em baixo. Por medições efetuadas o contacto raquete-bola durou 0.06 s. Um radar registou 30 km/h a velocidade da bola, antes e depois da pancada da raquete.

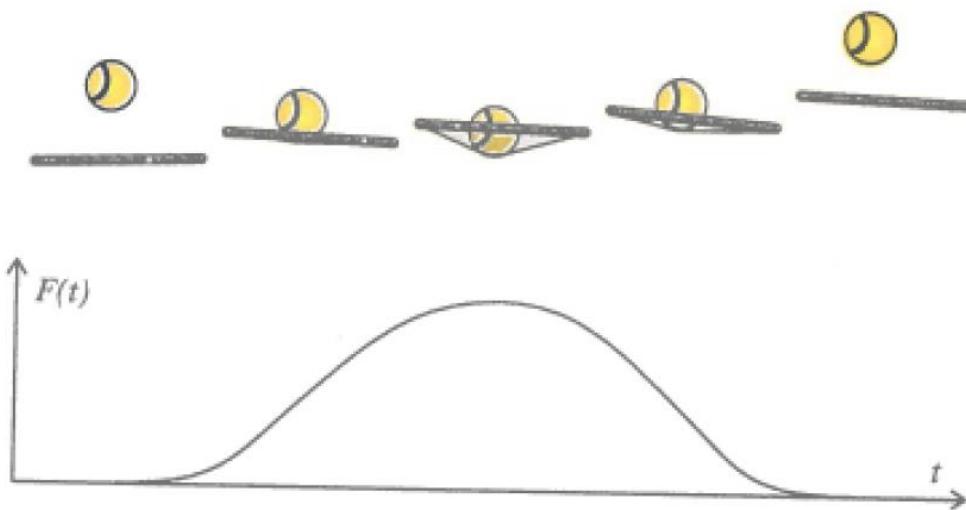


Figura 6.1

Uma raquete de ténis bate numa bola de ténis que vem de cima para baixo (na figura) e depois da pancada segue para cima. Durante o contato raquete-bola a força é para cima e deve ter a máxima intensidade no instante que a bola para e muda de sentido. Um esquema da dessa força em função do tempo é esboçada no gráfico.

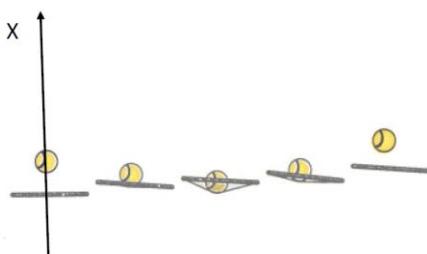
Por definição do valor médio da força

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t) dt = \bar{F}_x (t_1 - t_0)$$

temos que o valor médio é

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t) dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$

Para se estimar o valor médio, vamos colocar um sistema de eixos. Como a bola viaja só numa direção antes e depois da pancada da raquete, temos um problema a 1 dimensão.



Neste eixo

$$\vec{v}_0 = -30 \hat{i} \text{ km/h}$$

$$\vec{v}_1 = 30 \hat{i} \text{ km/h}.$$

A massa da bola são 57 g e o tempo da pancada durou 0.06 s., Substituindo na expressão

$$\bar{F}_x = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$

temos  $\bar{F}_x = 15.8 \text{ N} = 1.61 \text{ kgf}$ ,  
em que  $1 \text{ kgf} = 9.80 \text{ N}$ .

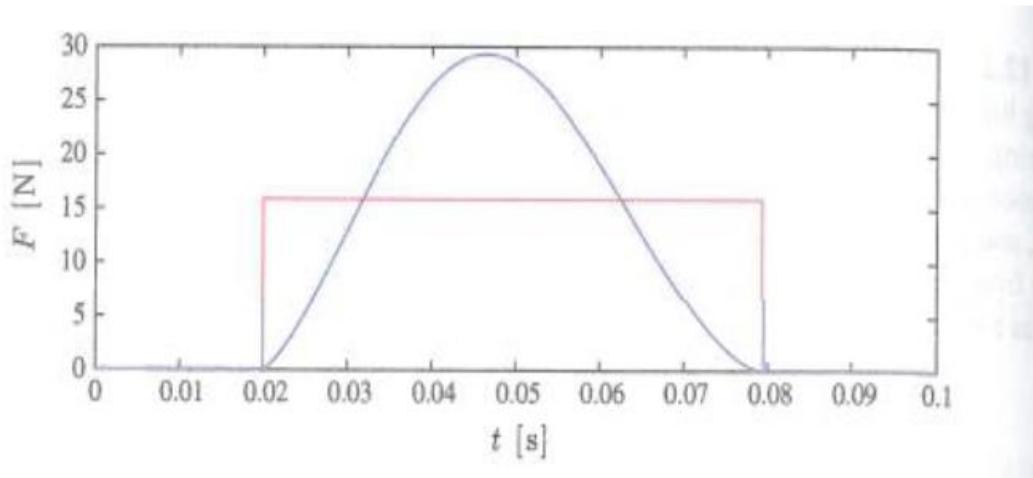


Figura 6.3 O gráfico da força,  $F_x$ , em função do tempo que durou a colisão, e a força média,  $\bar{F}_x$ , a vermelho.

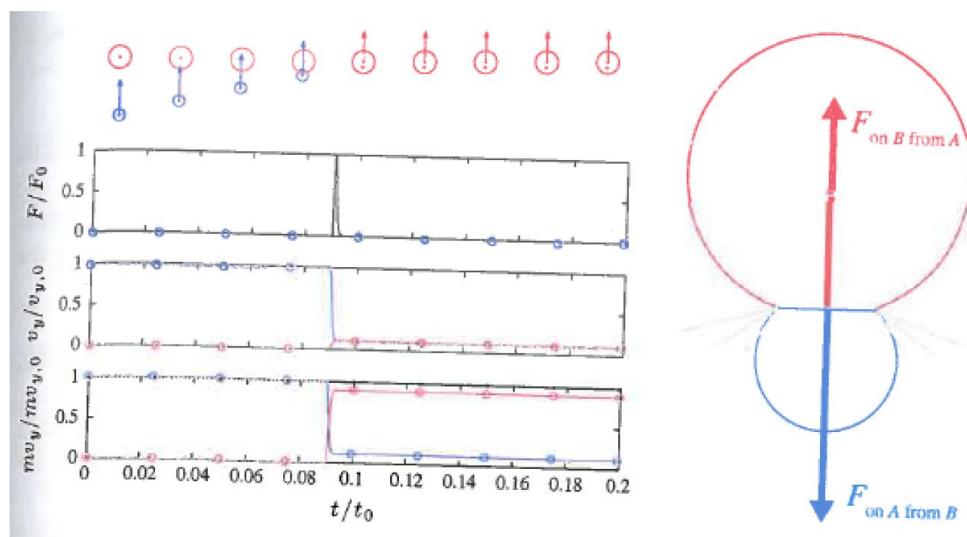
#### Problema 6.4:

Um carro segue a 60 km/h. Sofre um acidente e o carro para em 0.2 s. O condutor não tem o cinto colocado e embate no volante do carro.

- Se o condutor tiver a massa de 75 kg, qual a força média que sofre (no torax) durante o acidente?
- Qual a função do ‘airbag’? O que muda no acidente?

#### 6.5 Sistema de 2 corpos e momento total do sistema

Um outro problema importante é o da colisão de um meteoro com um planeta. Um esquema dessa colisão está na figura abaixo. Novamente não é conhecido a força durante a colisão. O que se sabe é, pela 3<sup>a</sup> lei de Newton,



$$\vec{F}_B^{(A)} = -\vec{F}_A^{(B)},$$

em que designamos por  $A$  e  $B$  ao meteoro e ao planeta, respetivamente. O Corpo A possui a massa  $m_A$  e a velocidade  $\vec{v}_A$  e o Corpo B a massa  $m_B$  e a velocidade  $\vec{v}_B$ .

Vamos tratar este problema de um ponto de vista mais geral. As forças aplicadas a estes corpos

$$\vec{F}_A^{(B)} = m_A \vec{a}_A$$

$$\vec{F}_B^{(A)} = m_B \vec{a}_B,$$

são a força aplicada ao corpo  $A$  devida ao corpo  $B$ , e ao corpo  $B$  devida ao corpo  $A$ , respetivamente. Se somarmos estas duas equações

$$\vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B$$

e aplicarmos a 3<sup>a</sup> lei de Newton,

$$m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B = 0.$$

O integral no tempo desta equação

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( m_A \frac{d\vec{a}_A}{dt} + m_B \frac{d\vec{a}_B}{dt} \right) dt = 0$$

é

$$m_A \vec{v}_A(t)|_{t_0}^{t_1} + m_B \vec{v}_B(t)|_{t_0}^{t_1} = 0$$

ou

$$m_A \vec{v}_A(t_1) + m_B \vec{v}_B(t_1) = m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0).$$

Como os instantes  $t_1$  e  $t_0$  são quaisquer, a quantidade

$$m_A \vec{v}_A(t) + m_B \vec{v}_B(t) = constante$$

conserva-se durante toda a colisão.

Ou seja o momento total

$$\vec{P} = m_A \vec{v}_A(t) + m_B \vec{v}_B(t)$$

é uma constante do movimento.

### **2<sup>a</sup> lei de Newton generalizada para o sistema de 2 corpos**

Se considerarmos todas as forças a atuarem nos 2 corpos, podemos classificá-las como:

- Forças internas: forças entre os corpos do sistema (planeta-meteoro: força de contacto e a força gravítica de atração), e
- Forças externas: forças entre os corpos do sistema e o meio envolvente (forças gravíticas exercidas por outros planetas e o Sol)

$$\text{Corpo A} \quad \sum \vec{F}_A^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$$

$$\text{Corpo B} \quad \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

$$\text{Somarmos: } \sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

Obtemos a 2<sup>a</sup> lei de Newton generalizada

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

onde se fez

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \sum \vec{F}^{ext}$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{P}$$

Se todas as forças externas forem nulas temos  $\sum \vec{F}^{ext} = 0$ ,

Ou seja um sistema de 2 corpos isolado

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{implica} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

a conservação do momento total

### Generalização para sistema de muitos corpos ( $N$ )

Para um sistema de  $N$  corpos, o momento total é

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

e a 2ª lei de Newton é

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Se o sistema for isolado temos a conservação do momento total  $\vec{P}$

## 6.6 Colisões

Colisões: Num sistema de 2 corpos isolado, em que o momento total conserva-se.

Se só atuarem forças conservativas,

a energia mecânica total também se conserva (mais uma equação)

Quando acontece chama-se Colisão Elástica

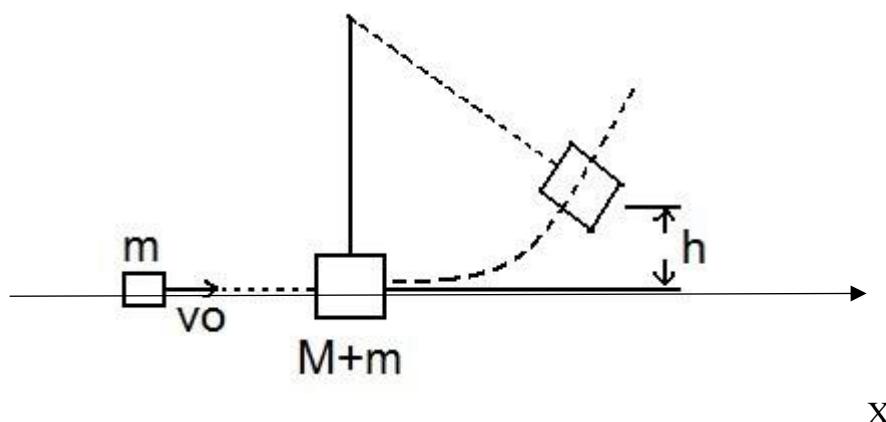
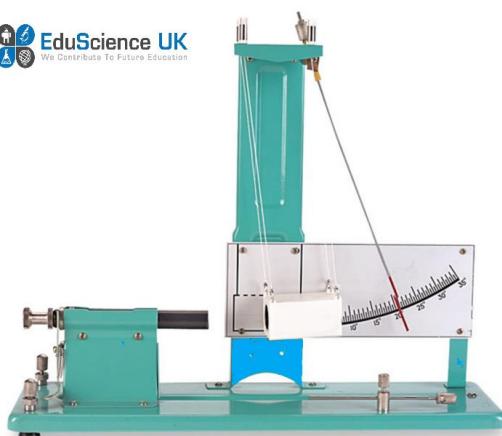
Quando não há conservação da energia mecânica, chama-se Colisão Inelástica

As colisões entre bolas de bilhar, onde o atrito do pano é muito pequeno podemos considerar como colisões elásticas.

Antes da colisão	Depois da colisão
A: com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,0}$	A: com massa $m_A$ e velocidade $\vec{v}_{A,1}$
B: com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,0}$	B: com massa $m_B$ e velocidade $\vec{v}_{B,1}$
Momento $m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}$ $m_A v_{A,0y} + m_B v_{B,0y}$ $m_A v_{A,0z} + m_B v_{B,0z}$	Momento $m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$ $m_A v_{A,1y} + m_B v_{B,1y}$ $m_A v_{A,1z} + m_B v_{B,1z}$
<u>Conservação do momento total</u>	
$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$ $m_A v_{A,0y} + m_B v_{B,0y} = m_A v_{A,1y} + m_B v_{B,1y}$ $m_A v_{A,0z} + m_B v_{B,0z} = m_A v_{A,1z} + m_B v_{B,1z}$	

## Pêndulo balístico

Instrumento que possibilita a medição da velocidade de uma bala.



<u>Antes da colisão</u>	<u>Depois da colisão</u>
Momento da bala $m_{bala}v_{bala,x}$	Bala-bloco $(m_{bala} + M_{bloco})V$
Momento do bloco      0	
<u>Conservação do momento total</u>	
$m_{bala}v_{bala,x} = (m_{bala} + M_{bloco})V$	

Pela conservação do momento total

$$m_{bala}v_{bala,x} = (m_{bala} + M_{bloco})V$$

e

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala} + M_{bloco})}{m_{bala}} V$$

Depois da colisão bala-bloco, os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura  $h$ , transformando energia cinética em energia potencial

$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 = (m_{bala} + M_{bloco})g h.$$

Se soubermos as massas da bala e do bloco e medindo a altura  $h$ , obtemos a velocidade do boco-bala logo após a colisão

$$V^2 = 2 g h$$

E de imediato a velocidade com que a bala foi dispara

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala} + M_{bloco})}{m_{bala}} \sqrt{2 g h}.$$

Nota-se que a colisão não é elástica (a energia mecânica total) não se conserva:

A energia mecânica da bala é

$$\frac{1}{2}m_{bala}v_{bala,x}^2$$

que é diferente da energia mecânica total depois da colisão

$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2$$

ou

$$\frac{1}{2}m_{bala} \left( \frac{(m_{bala} + M_{bloco})}{m_{bala}} \right)^2 V^2 \neq \frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2$$

**Problemas**

**1.** Uma raquete de ténis bate uma bola de ténis durante 0.06 s. A bola sai da raquete com a mesma velocidade e na mesma direção com que incidiu, mas de sentido oposto. Considere a direção de movimento a horizontal. A massa da bola de ténis é 57 g e atinge a raquete à velocidade 30 km/h.

- Qual o impulso da força de contacto da bola com a raquete?
- Qual a força média do impacto?

**2. Sorensen, ex. 12.3.2**

Uma bola de ténis move-se na horizontal a uma velocidade 20 km/h. O jogador bate a bola de volta para o campo adversário a uma velocidade de 15 km/h a fazer um ângulo de 45º com a horizontal, de modo a fazer uma bola alta ('lob'). A massa da bola de ténis é 57 g.

- Qual é o impulso e
- a força média de contacto, se o tempo de contacto for de 2 ms?

**3.** Uma pessoa e seu patim têm a massa de 70 kg. Qual a velocidade que deverão atingir para que o seu momento seja igual a de outra pessoa que segue numa moto à velocidade de 20 km/h? A massa da pessoa e da sua moto é de 120 kg.

**4.** Um carro segue a 60 km/h. Sofre um acidente e o carro para rapidamente. O condutor não tem o cinto colocado e embate no volante do carro durante 0.2 s.

- Se o condutor tiver a massa de 75 kg, qual a força média que sofre (no tórax) durante o acidente?
- Qual a função do 'airbag'? O que muda no acidente?

**5.** Quatro bolas iguais estão suspensas, cada uma por um fio. Estas bolas estão todas junto em linha reta. Quando uma bola da extremidade é puxada para cima e depois largada, o resultado é sair outra bola na outra extremidade. Mostre que esta colisão de uma bola com as restantes bolas mantém constante a energia mecânica.

**6. Pêndulo balístico**

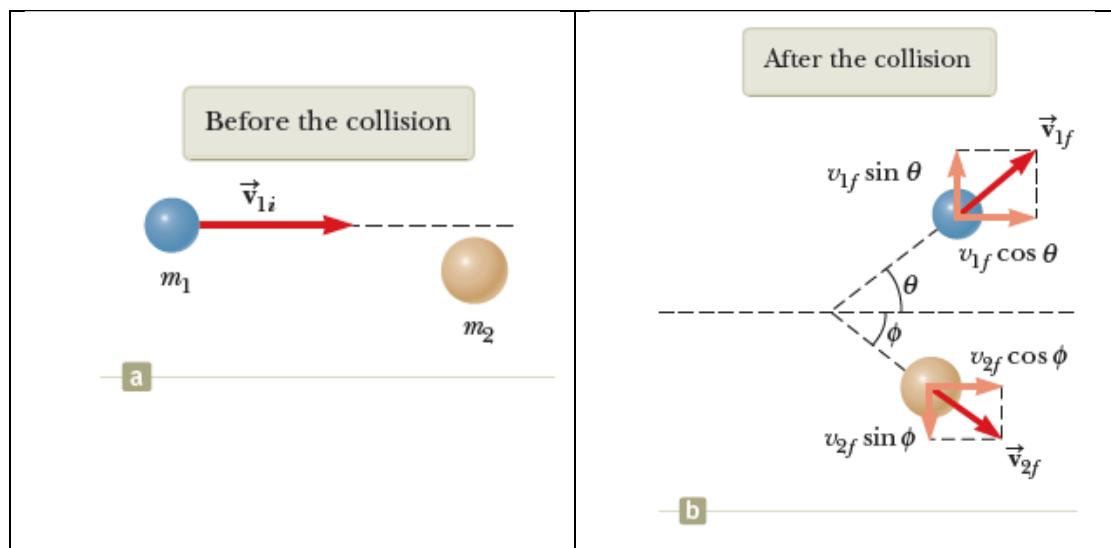
Um bloco de madeira está suspenso por um fio de aço de comprimento 1 m. Quando em equilíbrio, parado, o pêndulo recebe uma bala à velocidade de 1000 km/h,

que se aloja no seu interior do bloco. Se o bloco de madeira e a bala tiverem a massa de 1 kg e 28 g, respectivamente,

- Qual a velocidade logo após a colisão do conjunto bloco-bala?
- Calcule a energia cinética do conjunto bloco-bala logo após o impacto da bala.
- Nesta colisão, mostre que a energia mecânica não se conserva.

### 7. Serway, ex. 9.11

Num jogo de snooker, um jogador vai jogar a bola azul contra a amarela de modo a que a bola amarela caia na bolsa do canto direito. Para tal a bola amarela tem de sair da colisão com a bola azul a fazer um ângulo de  $\phi = 35^\circ$ . Não considerando o atrito e a resistência do ar, de modo que a colisão é elástica. A bola azul bate na amarela com a velocidade de 1 m/s. Nestas condições calcule



- o ângulo  $\theta$  que a bola azul faz com a direção inicial.

Pista: Eleve ao quadrado a expressão vetorial da lei de conservação do momento e considere a conservação da energia mecânica total.

- O ângulo que as duas bolas fazem após a colisão depende do impacto da colisão (velocidade da bola azul e o local da bola amarela que sofreu a colisão?)
- a velocidade da bola azul depois da colisão.
- a velocidade da bola amarela depois da colisão.

Note: As bolas de snooker têm a mesma massa.

## Formulário MSF20022:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_t \delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 v_x}{dt^2} \right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 v_x}{dt^3} \right|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 \quad \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}| \vec{v} \quad \vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} |\vec{v}| \vec{v} \quad |\vec{F}_{rol}| = \mu |\vec{N}| \quad |\vec{F}_{impulsão}| = m_{fluido} g$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{F}_{elástica} = -k \vec{r}$$

$$\vec{F}_{elet} = -k_e \frac{q Q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{F}_{elet} = q \vec{E}_{elet}$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad E_p = m g y \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad E_p = -G \frac{m M}{|\vec{r}|}$$

$$P_o = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 E_p}{dx^3} \right|_{x_{min}} \delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad b_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A_a = \sqrt{x(0)^2 + ((v_x(0) + x(0)\frac{b}{2m})/\omega)^2} \quad \phi = \arctan [-(\frac{v_x(0)}{x(0)} + \frac{b}{2m})/\omega]$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b \omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

## Grandezas físicas e conversões:

$$\begin{aligned}
1 \text{ polegada} &= 1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm} & 1 \text{ pé} &= 1 \text{ ft} = 0,39370 \text{ m} & 1 \text{ milha} &= 1,609344 \text{ km} \\
1 \text{ rad} &= 57.29578 \text{ graus} & 1 \text{ kgf} & & & \\
1 \text{ cv (cavalo - vapor métrico)} &= 735,4975 \text{ W} & 1 \text{ hp (cavalo - vapor inglês)} &= 745,715 \text{ W} & & \\
M_{Sol} = M &= 1.989 \times 10^{30} \text{ kg} & 1 \text{ AU} &= 1.489 \times 10^{11} \text{ m} & 1 \text{ ano} &= 365,24 \text{ dias} \\
g = 9,80 \text{ m/s}^2 & & G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) &= 4\pi^2 \text{ AU}^3/(M \cdot \text{ano}^2) & R_{Terra} &= 6371 \text{ km} \\
1 \text{ kgf} &= 9,80 \text{ N} & \rho_{ar} &= 1.225 \text{ kg/m}^3 & v_{som} &= 340 \text{ m/s} \\
c &= 299792,458 \text{ km/s} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} & & & & \\
k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.61733 \times 10^{-5} \text{ eV/K} & & & & \\
\varepsilon_0 &= 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m} & k_e &= 1/4\pi\varepsilon_0 = 8,98755188 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 & & \\
m_e &= 9,10938356 \times 10^{-31} \text{ kg} & & & & \\
m_p &= 1,67262 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836.151 m_e & & & & \\
m_n &= 1,67493 \times 10^{-27} \text{ kg} & 1 \text{ \AA} &= 10^{-10} \text{ m} & & \\
e &= 1,602176208 \times 10^{-19} \text{ C} & e/c &= 5,34428 \times 10^{-28} \text{ C} \cdot \text{m/s} & & 
\end{aligned}$$

## Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$$\begin{aligned}
e &= 2,71828183 & \pi &= 3,14159265 \\
\sin(-x) &= -\sin(x) & \sin(\pi - x) &= \sin(x) & \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \pm \cos(x) \\
\cos(-x) &= +\cos(x) & \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \mp \sin(x) \\
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \\
\cos x \sin y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)] \\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x & \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\
\sin x \pm \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 & \tanh(x) &= \sinh(x) / \cosh(x)
\end{aligned}$$

## Sistema Internacional de Unidades (SI):

### Quantidades básicas

Quantidade	unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Corrente elétrica	ampere	A

Outras quantidades importantes

Quantidade	unidade	Símbolo
Velocidade	metro/segundo	m/s
Aceleração	metro/segundo <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Força	kilograma × metro/segundo <sup>2</sup> = newton	N
Energia	kilograma × metro <sup>2</sup> /segundo <sup>2</sup> = joule	J
Potência	kilograma × metro <sup>2</sup> /segundo <sup>3</sup> = watt	W

### Sistema Astronómico de unidades

Grandeza	Símbolo	Definição	Valor no SI	Conversão do SI
Massa	M	Massa do Sol	$1,989 \times 10^{30}$ kg	$1 \text{ kg} = 5,028 \times 10^{-31} \text{ M}$
Distância	AU	Distância média da Terra ao Sol	$1,498 \times 10^{11}$ m	$1 \text{ m} = 6,676 \times 10^{-12} \text{ AU}$
Tempo	ano	Período da Terra em volta do Sol	$3,15 \times 10^7$ s	$1 \text{ s} = 3,17 \times 10^{-8} \text{ ano}$

Neste sistema, a constante de gravitação é

$$G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{(6.676 \times 10^{-12} \text{ AU})^3}{5.028 \times 10^{-31} \text{ M} (3.17 \times 10^{-8} \text{ ano})^2} = 4\pi^2 \text{ AU}^3/(\text{M} \cdot \text{ano}^2),$$

a unidade de energia é  $5.50 \times 10^{38}$  J e a unidade de velocidade é 4718.48 m/s.

### Quantidades experimentais do sistema solar.

	Massa (kg)	Período sideral (1 ano=365,24 dias)	Distância média ao Sol (semi-eixo maior)	Excentricidade	Inclinação eclíptica (grau)
			( $10^{11}$ m) (AU)		
Mercúrio	$3,301 \times 10^{23}$	0,2408	0,3871	0,2056	7,004
Vénus	$4,669 \times 10^{24}$	0,6151	0,723	0,0068	3,394
Terra	$5,978 \times 10^{24}$	1	1,496	1	0,0167
Marte	$6,420 \times 10^{23}$	1,881	2,279	1,523	0,0934
Júpiter	$1,899 \times 10^{27}$	11,86	5,203	0,0481	1,306
Saturno	$5,685 \times 10^{26}$	29,46	9,54	0,0533	2,489
Urano	$8,686 \times 10^{25}$	84,02	19,18	0,0507	0,773
Neptuno	$1,025 \times 10^{26}$	164,8	30,07	0,0040	1,773
Sol	$1,989 \times 10^{30}$				
Lua	$7,353 \times 10^{22}$		384 400 km à Terra	0,055	5,144
Plutão	$5 \times 10^{23}$	248	59,00	39,44	0,2533
					17,142

## Soluções de problemas

### Cap. 3

**1.** a) 5; b)  $(375, 4/5)$ ; c)  $(6,8), 10$ ; d)  $(-6,-8), 10$

**2.** 4,  $60,3^\circ$

**3.** 0,  $90^\circ$

**4.** a) Família de vetores  $(a, -3/4 a)$ , por exemplo o vetor  $(4, -3)$ ;

b) os versores  $(4/5, -3/5)$  e  $(-4/5, 3/5)$

**5.**  $(-1,0; 6,6) \text{ N} ; 6,7 \text{ N}$

**6.**  $+5,7 \text{ N}$  ou  $-5,7 \text{ N}$

**7.**  $4.0 \text{ N}$

**8.** a)  $(0.00, 2.00) \text{ N}$ ; b)  $(1.73, -1.0) \text{ N}$ ; c)  $(1.00, 1.73) \text{ N}$ ; d)  $(-1.00, 1.73) \text{ N}$ ;

e)  $(0.00, -2.00) \text{ N}$ ; f)  $(-1.73, 1.00) \text{ N}$ ; g)  $(1.29, -1.53) \text{ N}$ ; h)  $(-1.00, -1.73) \text{ N}$

**9.** a)  $(8.66, 5.00) \text{ N}$ ; b)  $(-9.85, 1.74) \text{ N}$ ; c)  $(-8.66, 5.00) \text{ N}$

**10.**  $(20, 40, 0) \text{ m/s}^2$

**11.**  $(0,5; 0,0; 1,0) \text{ N} ; 1,0 \text{ N}$

**12.**  $(5/2, 1/2, 1/2) \text{ m/s}^2$

**13.** 0,20

**14.**  $(0, -1.8, 0) \times 10^{12} \text{ m/s}^2$

**15.**  $[4., -1., 2.5]; 154.2^\circ$

**16.** a)  $\vec{v} = (2, 1, 0) \text{ m/s}$ ; b)  $\vec{L} = 0$

**17.** a)  $\vec{v} = (-\omega \sin \omega t, \omega \cos \omega t, 0) \text{ m/s}$ ; b)  $\vec{L} = (0, 0, 0.1) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

**18.**  $\vec{\tau} = (0, 0.1, 0) \text{ m} \cdot \text{N}$

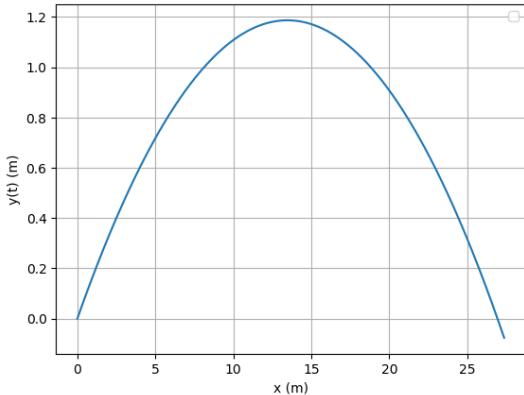
**19.**  $\vec{F}_{Magnus} = (-0.026, 0, 0) \text{ N}$

**20.**  $g \sin \theta$

## Cap. 4

$$1. \text{ a) } \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Trajetória de uma bola sem resistência do ar  $v_0=100 \text{ km/h}$ ,  $\theta=10^\circ$



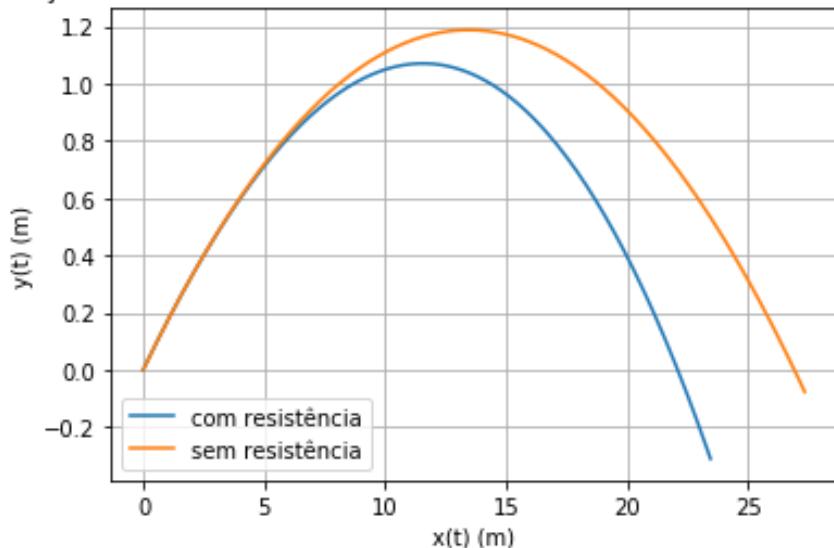
b)  $y_m = 1.19 \text{ m}$  e  $t_m = 0.49 \text{ s}$ ; c)  $x_{\text{solto}} = 26.9 \text{ m}$  e  $t_{\text{solto}} = 0.98 \text{ s}$ ;

d) Um teste ao seu programa para ter confiança é reproduzir os resultados exatos obtidos nas alíneas anteriores.

$\delta t \text{ (s)}$	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	1.440506	29.6646007221
0.01	1.2113	27.202581
0.001	1.18949136	26.95637
0.0001	1.18731954	26.931759207
0.00001	1.187102	26.9292971

A altura máxima é 1.187 m e o alcance é 26.9 m, o que reproduz os valores determinados pelo método exato.

Trajetória de uma bola sem e com resistência do ar  $v_0=100 \text{ km/h}, 10^9$

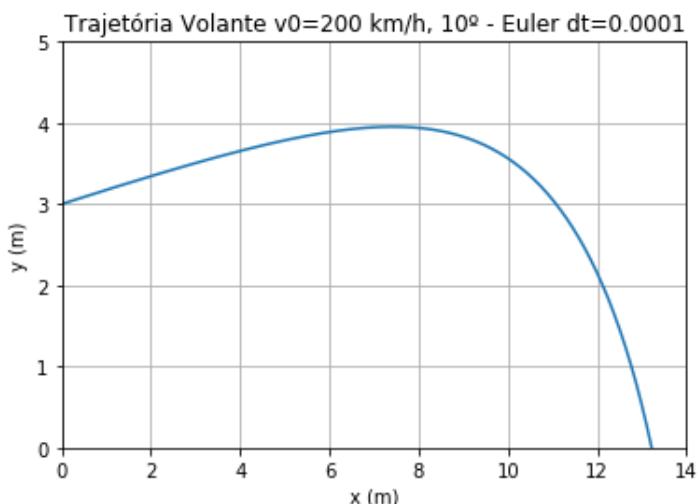


e)

f) e g)

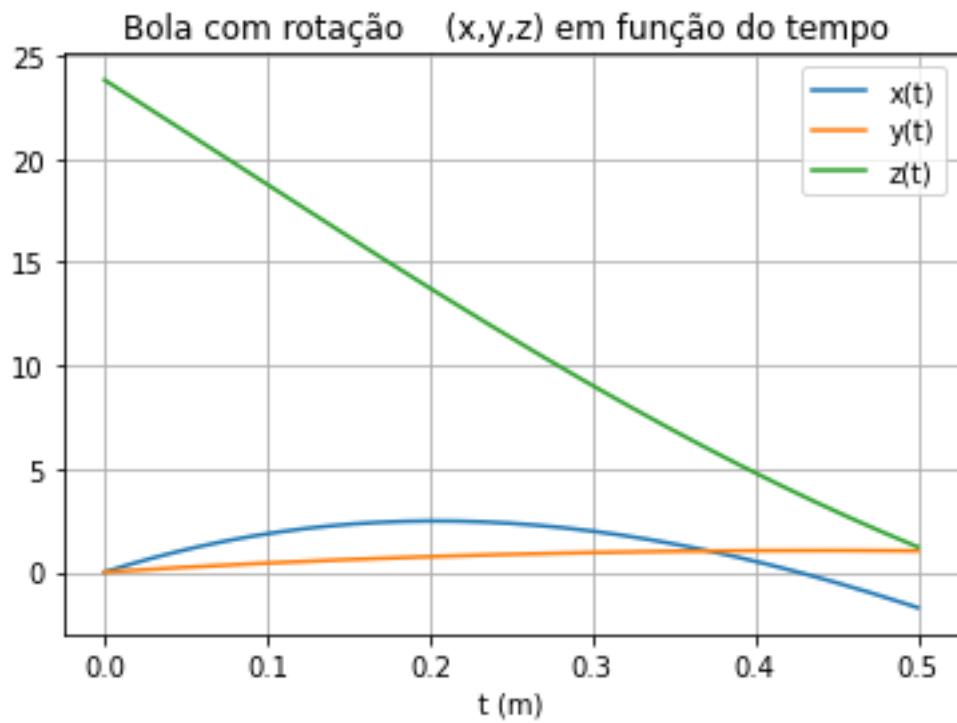
$\delta t$ (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	1.3050	24.1821
0.01	1.09232639	22.311966
0.001	1.072268232	22.1245316
0.0001	1.0702742	22.1057830
0.00001	1.07007500	22.103908

A altura máxima é 1.070 m e o alcance é 22.10 m.



2.

b) 13.2 m e 1.46 s



3.

Entra

4. a)

$\delta t$ (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	2.9868	29.16701087
0.01	2.7282197721	27.4047699
0.001	2.70360028	27.22868
0.0001	2.701150538	27.211076
0.00001	2.700905686	27.2093157962

altura máxima = 2.70 m; alcance 27.21 m;

b)

$\delta t$ (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	3.9019528	40.96493035
0.01	3.646755	39.4620245
0.001	3.622064	39.310731
0.0001	3.61960309	39.2955928
0.00001	3.61935707370	39.294078914

3.62 m; 39.29 m

c)

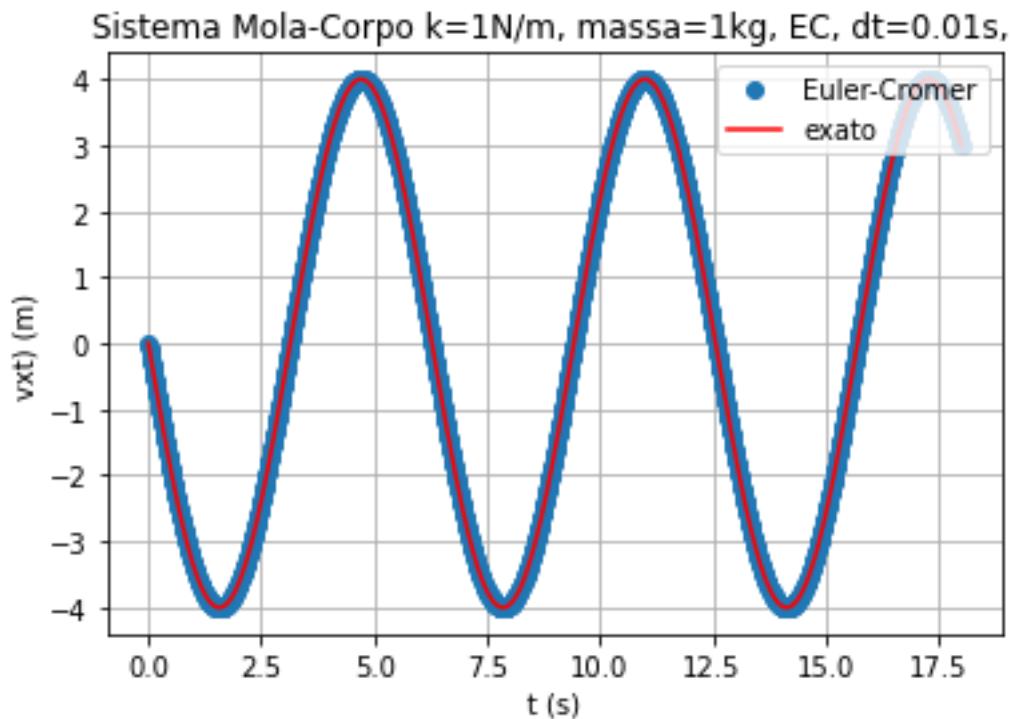
$\delta t$ (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	2.53547	21.74859
0.01	2.26736381	19.8336427
0.001	2.24225	19.6436191
0.0001	2.23976238	19.6246321
0.00001	2.239513193	19.6227335

2.24 m; 19.62 m;

5. a) Não; b) Sim.; são; Concordam com as leis de Kepler; c) erro linearmente proporcional a  $\delta t$

6. a)  $v_x(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi)$ ;

b) Método de Euler-Cromer;



## Cap. 5

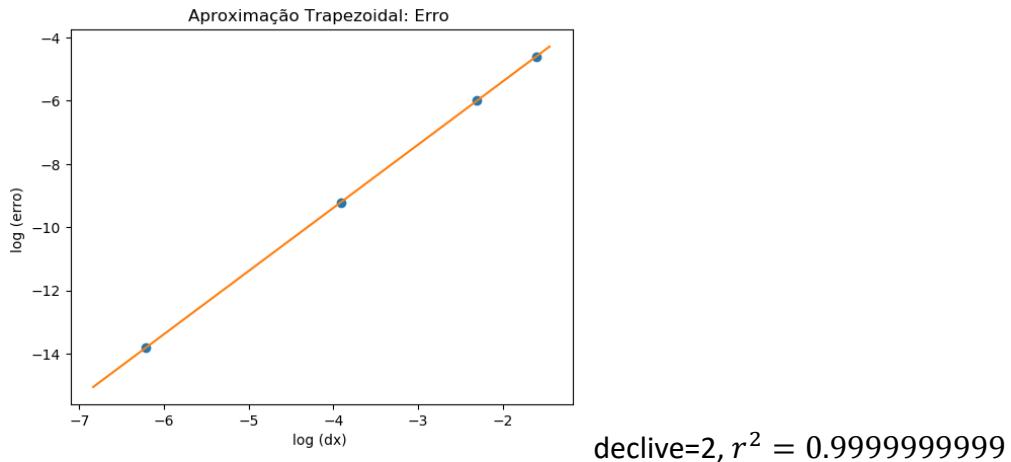
**1.** R:  $v_x = \pm \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b F_0}{\pi m} \left[ \cos \frac{2\pi x}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b} \right]}, \text{ Não}$

**2.** R: a)  $-kx$  b)  $-mg$  c)  $-2 k (x^2 - x_{eq}^2) x$  d)  $-G \frac{m M}{|r|^3} \vec{r}$  e)  $-K \frac{q Q}{|r|^3} \vec{r}$

**3.** R: a)  $\sigma(\delta x^2)$  b)  $\sigma(\delta x)$

**4.**

$\delta x$	Integral	erro
0.2	1.01	0.01
0.1	1.0025	0.0025
0.02	1.0001	0.0001
0.002	1.000001	0.000001



**5.** R: a) 21.99 J; b) 21.99 J; 17.01 J; 13.61 J; c) 0 J; -4.98 J; -8.38 J

**7.**  $|\vec{v}|^2 = 2 g (y_0 - y)$  a) 22.1 m/s; b) 19.8 m/s

**8.**

**9.** a) 120 W = 0.163 cv; b) 260 W = 0.353 cv; c) 92177 W = 125 cv.

**10.**

**11.**

**12.** a) 11.63 m/s; b) 23.66 s; c) 180.9 s = 477.3 s = 3' 0.9"

**13.** a) 4.21 m/s; b) 477.3 s = 7' 57.3"

**Cap. 6**

**1.** a)  $0.95 \text{ kg m/s}$ ; b)  $15.8 \text{ N}$

**2.** a)  $-0.49 \text{ kg m/s} \hat{i} + 0.17 \text{ kg m/s} \hat{j}$ ; b)  $-242 \text{ N} \hat{i} + 84 \text{ N} \hat{j}$

**3.**  $34.2 \text{ km/h}$

**4.** a)  $6250 \text{ N}$  aplicada ao tórax; b) aplicação de uma força média muito menor, pelo aumento de tempo de impacto condutor-volante

**5.**

**6.** R: a)  $7.57 \text{ m/s}$ ; b)  $29.4 \text{ J}$ ; c)  $16.3^\circ$

**7.** a)  $\theta = 55^\circ$ ; b) É sempre  $90^\circ$ ; c)  $0.574 \text{ m/s}$  d)  $0.819 \text{ m/s}$