

## Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

## Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

## Soluções da Folha Prática 1

1. (a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ ; (d)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ; (e)  $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 16 \end{bmatrix}$ ; (f)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ .

2.  $\begin{bmatrix} -6 & -8 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ .

3.  $ADBC = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$  ou  $BADC = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

4. A primeira coluna é  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  e a segunda linha é  $[3 \ 4]$ .

6.  $EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \neq AE = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 31 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ .

7.  $\begin{bmatrix} \mu_1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n^4 \end{bmatrix}$ .

9. i.  $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ ;  
 ii.  $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$ ;  
 iii.  $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$ ;  
 iv.  $(AB)^2 = ABAB$ .

10. (a) Verdadeira; (b) Falsa; (c) Falsa.

14. (a)  $AC = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ; (b)  $AC = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x-y+z \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 1-z \\ 1-z \\ z \end{bmatrix}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

15. (b) e (d).

i. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

ii. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; (d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ .

16. (a)  $x_1 = t$ ,  $x_2 = \frac{1}{3} - 2t$ ,  $x_3 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

(b) impossível

(c)  $x_1 = 6 - t$ ,  $x_2 = -5 + t$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = -1 - t$ ,  $x_5 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

(d)  $x_1 = 4/3$ ,  $x_2 = 4/3$ ,  $x_3 = -2/3$ .

17. (a)  $\alpha = -1$ ; (b)  $\alpha \neq 1$  e  $\alpha \neq -1$ ; (c)  $\alpha = 1$ .

18. O sistema é impossível se  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 1$ .

O sistema é possível e determinado se  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  e nesse caso o conjunto solução é  $\left\{ \left( 0, \frac{1}{\alpha-1}, 1 - \frac{3}{\alpha} \right) \right\}$ .

19. O sistema é  $\begin{cases} \text{impossível} & \text{se } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1 \\ \text{possível e indeterminado de grau um} & \text{se } \alpha = -2 \\ \text{possível e determinado} & \text{se } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\} \end{cases}$ .

20. Se  $B$  é a coluna  $i$  de  $A$ , então  $X = [0 \cdots 1 \cdots 0]^T$  com 1 na linha  $i$  e as restantes entradas nulas é uma solução.

21.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  não é singular e  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$  é singular.

22. (b) Sim.

(c)  $C^5 = AD^5B = \begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}$ .

23. (a)  $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ; (d)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ .

26.  $(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n - A^k = I_n$ .

27. Sendo  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , tem-se  $A^3 = O$ , logo  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

28.  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

30.  $X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ .

31.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ .

32. (a)  $X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ;

(b)  $X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

33. (a)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b)  $x = 1, y = 0, z = -1$ .

36. (a)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo  $Ly = b$  vem  $y = [-7 \quad -2 \quad 6]^T$ . Resolvendo  $Ux = y$  vem  $x = [3 \quad 4 \quad -6]^T$ .

(b)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo  $Ly = b$  vem  $y = [2 \quad 0 \quad 6]^T$ .

Resolvendo  $Ux = y$ , tem-se  $x = [-11 \quad -6 \quad -3]^T$ .

(c)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Resolvendo  $Ly = b$ ,  $y = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -18 \end{bmatrix}^T$ . Resolvendo  $Ux = y$ ,  $x = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ .

37. A resposta ao Exercício 37 (a), depende da forma como o estudante ordena os setores. Se ordenar os setores por manufaturação, agricultura e serviços, então a matriz de consumo é:

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & -0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

A demanda interna (necessidades intermédias) para a produção de  $x$  é dada por  $Cx$ . Neste caso tem-se que

$$Cx = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(b) Resolva a equação  $x = Cx + d$  para  $d$ .

$$d = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9x_1 - 0.6x_2 - 0.6x_3 \\ -0.3x_1 + 0.8x_2 \\ -0.3x_1 - 0.1x_2 + 0.9x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução é  $x = \begin{bmatrix} 33.33 \\ 35.00 \\ 15.00 \end{bmatrix}$

(c) Resolvendo como no ponto anterior  $d = x - Cx$  vem  $x = \begin{bmatrix} 40 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$

(d) Resolvendo como no ponto anterior  $d = x - Cx$  vem  $x = \begin{bmatrix} 73.33 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix}$ .

$$38. x = (I - C)^{-1}d = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 1.2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

$$39. x = (I - C)^{-1}d = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.5 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{40}{21} & \frac{30}{21} \\ \frac{25}{21} & \frac{45}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 45 \end{bmatrix}.$$

$$40. \text{ Já sabemos que } (I - C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 1.2 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Assim, } x_1 = (I - C)^{-1}d_1 = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 1.2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{e } x_2 = (I - C)^{-1}d_2 = \begin{bmatrix} 111.6 \\ 121.2 \end{bmatrix}.$$