Espaços Vetoriais Reais

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A **Folha Prática 3**

Subespaços vetoriais

1. Averigue se são subespaços vetoriais reais dos espaços indicados, com as operações usuais de adição e multiplicação por um escalar:
   (a) o conjunto dos vetores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tais que $x + 2y = 0$ e $z = 1$;
   (b) o conjunto dos vetores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ colineares a $(1, 2, 3)$, incluindo o vetor nulo;
   (c) o conjunto das funções reais de variável real que são pares.

2. (a) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, o conjunto dos vetores (x, y) tais que
   i. $x + y = 0$; ii. $(x, y) \neq (1, 1)$.
   (b) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos vetores (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
   (c) No espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em x de grau não superior a 2, o conjunto dos polinómios $ax^2 + bx + c$ com
   i. $c = 0$; ii. $b = 1$; iii. $bc = 0$.
   (d) No espaço vetorial $M_{n\times n}$ das matrizes quadradas de ordem n, o conjunto das matrizes
   i. simétricas; ii. triangulares ($n > 1$); iii. de determinante 1; iv. invertíveis;
   v. $X \in M_{n\times n}$ tais que $AX = O$; vi. $X \in M_{n\times n}$ tais que $AX = I_n$, sendo $A \in M_{n\times n}$.
   (e) No espaço vetorial $\mathbb{R}^m$, o conjunto $\{AX : X \in \mathbb{R}^n\}$, sendo $A \in M_{m\times n}$.
   (f) No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos vetores que são ortogonais a um dado vector $X \in \mathbb{R}^n$.

3. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real e $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{V}$. Mostre que o conjunto
$$\mathcal{S} = \{a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 : \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$
é um subespaço de $\mathcal{V}$. ($\mathcal{S}$ é o *subespaço de* $\mathcal{V}$ *gerado por* X_1, X_2, X_3.)

Combinação linear, espaço gerado e independência linear

4. Escreva, sempre que possível, o vetor
   (a) $(2, -3, -4, 3)$ como combinação linear dos vetores $(1, 2, 1, 0)$ e $(4, 1, -2, 3)$;
   (b) $(1, 1, 0)$ como combinação linear dos vetores $(2, 1, -2)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$;
   (c) $-t^2 + t + 4$ como combinação linear dos vetores $t^2 + 2t + 1$, $t^2 + 3$ e $t - 1$;
   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Determine o espaço gerado pelos conjuntos de vetores indicados.
   (a) $\{(0, 1), (2, 1), (2, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
   (b) $\{(0, 1), (0, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
   (c) $\{(2, 2, 3), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
   (d) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 2, 2)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
   (e) $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$ em $\mathcal{P}_2$.

6. Determine um conjunto gerador do espaço nulo da matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Verifique que $\langle u \rangle$ é a recta que passa pela origem e tem a direcção de u.

   (b) Represente geometricamente $\langle (1, -1) \rangle$.

8. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores u_1 e u_2 de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes.

   (a) Mostre que o subespaço gerado por u_1 é a recta que passa pela origem e tem a direção do vector u_1.

   (b) Mostre que o subespaço gerado pelos vetores u_1 e u_2 é o plano que passa pela origem e que contém os vetores u_1 e u_2.

   (c) Represente geometricamente:

      i. $\langle (1, -1, 2) \rangle$; ii. $\langle (1, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle$; iii. $\langle (1, -1, 1), (-2, 2, -2) \rangle$.

9. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.

   (a) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (1, -1, 1)\}$;

   (b) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$;

   (c) $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 2, 3), (1, 3, 0, -1)\}$;

   (d) $\{2t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$.

10. Seja $A = \{X_1, X_2, X_3\}$ um conjunto linearmente independente num espaço vetorial real $\mathcal{V}$. Averigue se conjunto $B = \{X_1 + X_2, X_1 + X_3, X_2 + X_3\}$ é linearmente independente em $\mathcal{V}$.

11. Seja $\{X_1, \ldots, X_n\}$ um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente. Mostre que, se A é uma matriz quadrada de ordem n invertível, então $\{AX_1, \ldots, AX_n\}$ é linearmente independente.

Bases e dimensão

12. Dos seguintes conjuntos de vetores indique os que são bases dos espaços vetoriais indicados:

    (a) $\{(1, 2), (2, 4)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

    (b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

    (c) $\{(1, 0, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

    (d) $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^4$;

    (e) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $M_{2\times 2}$;

    (f) $\{3t^2 + 2t + 1, t^2 + t + 1, t^2 + 1\}$ em $\mathcal{P}_2$.

13. Determine uma base e a dimensão do subespaço gerado pelos vetores:

    (a) $(1, 3, 0), (-1, 1, 0)$ em $\mathbb{R}^3$;

    (b) $(1, -1, 1), (0, 2, 1), (1, 1, 2)$ em $\mathbb{R}^3$;

    (c) $t^2 + 1, t^2 - t + 1$ em $\mathcal{P}_2$.

14. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

15. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1, 0, 1, 0)$ e $(0, 1, -1, 0)$.

16. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + 3z = 0\}$.

    (a) Verifique que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Determine um conjunto gerador de S e verifique se ele é linearmente independente.

    (c) Indique, justificando, a dimensão de S.

17. Mostre que, se $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ for uma base de um espaço vetoriais real $\mathcal{V}$, então

    (a) $\{cX_1, X_2 \ldots, X_n\}$ com $c \neq 0$ é também uma base de $\mathcal{V}$;

    (b) $\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n, X_2 + \cdots + X_n, \ldots, X_n\}$ é ainda uma base de $\mathcal{V}$.

Espaço das linhas e espaço das colunas, espaço nulo e nulidade

18. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base do espaço nulo de A e indique, justificando, a nulidade de A.

(b) Determine o subespaço $\mathcal{S} = \{AX : \ X \in \mathbb{R}^4\}$.

(c) Mostre que $\{(1,-1,-1),(4,-3,-2)\}$ é uma base de $\mathcal{S}$.

19. Para cada uma das matrizes $A \in M_{m\times n}$ a seguir:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

i. determine uma base para o espaço nulo de A;

ii. determine bases para o espaço das linhas e o espaço das colunas de A;

iii. calcule a característica e a nulidade, e verifique que $\mathrm{car}(A) + \mathrm{nul}(A) = n$;

iv. diga, usando a informação dada pela característica, se as linhas de A são linearmente independentes.

20. Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Mostre que

(a) o espaço das colunas de A é o conjunto $\{AX : \ X \in \mathbb{R}^n\}$;

(b) o espaço das colunas de AB está contido no espaço das colunas de A.

Coordenadas e mudança de base

21. Considere a base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ de $\mathbb{R}^4$ constituída pelos vetores

$$X_1 = (1,1,0,0), \quad X_2 = (1,0,0,0), \quad X_3 = (1,1,1,0), \quad X_4 = (1,1,1,1).$$

Determine as coordenadas dos seguintes vetores na base $\mathcal{B}$.

(a) $(-1,2,-6,5)$;

(b) $(2,1,0,0)$;

(c) $(1,2,3,4)$.

22. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1,2,1),(0,2,0),(0,0,-1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1,0,-1),(1,1,1),(2,3,-1))$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcule $[X]_{\mathcal{B}_1}$ e $[X]_{\mathcal{B}_2}$ para

i. $X = (2,3,5)$; ii. $X = (-1,2,0)$; iii. $X = (1,1,1)$.

(b) Determine a matriz P de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Confirme os resultados obtidos em (a) usando P.

23. Sejam $S = ((1,2),(0,1))$ e $T = ((1,1),(2,3))$ duas bases de $\mathbb{R}^2$ e o vetor $X = (1,5)$. Determine

(a) as coordenadas de X na base T;

(b) o vetor Z tal que $[Z]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$;

(c) a matriz P de mudança da base T para a base S;

(d) as coordenadas de X na base S usando P;

(e) as coordenadas de X na base S diretamente;

(f) a matriz Q de mudança da base S para a base T;

(g) as coordenadas de X na base T usando Q.

24. Sejam $S = (X_1, X_2, X_3)$ e $T = (Y_1, Y_2, Y_3)$ bases de $\mathbb{R}^3$ com $X_1 = (-1, 1, 0)$, $X_2 = (1, 0, 1)$ e $X_3 = (0, 0, 1)$. Determine T, sabendo que a matriz de mudança da base T para a base S é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

25. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.

(a) Todos os vetores da forma $(a, 0, -a)$ com $a \in \mathbb{R}$ formam um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Todo o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ com dois vetores é linearmente independente.

(c) O espaço das soluções do sistema homogéneo $AX = 0$ é gerado pelas colunas de A.

(d) Se as colunas de uma matriz $n \times n$ formarem uma base de $\mathbb{R}^n$, então o mesmo acontece com as linhas.

(e) Se A é uma matriz 8×8 tal que o sistema homogéneo $AX = 0$ só tem a solução trivial, então $\text{car}(A) < 8$.

(f) Todo o conjunto de 5 vetores em $\mathbb{R}^5$ é uma base em $\mathbb{R}^5$.

(g) Todo o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independente contém 3 vetores.

(h) Se A é uma matriz simétrica $n \times n$, então $\text{car}(A) = n$.

(i) Todo o conjunto de vetores que geram $\mathbb{R}^3$ contém pelo menos 3 vetores.