

# GUIÃO 1

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

LINGUAGEM DA MATEMÁTICA

REVISÕES SOBRE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

TEOREMAS SOBRE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVÁVEIS

PAULA OLIVEIRA

2021/22

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE AVEIRO

2.10.2	Assíntotas . . . . .	28
2.11	Funções deriváveis . . . . .	29
2.11.1	Derivada de uma função num ponto . . . . .	30
2.11.2	Reta tangente . . . . .	31
2.11.3	Noção de diferencial . . . . .	31
2.11.4	Derivadas laterais . . . . .	33
2.11.5	Continuidade e derivabilidade . . . . .	33
2.11.6	Função derivada . . . . .	33
2.11.7	Limites laterais da função derivada . . . . .	34
2.11.8	Regras de derivação . . . . .	34
2.11.9	Derivadas de ordem superior . . . . .	35
2.11.10	Derivada da função composta . . . . .	35
2.11.11	Derivada da função inversa . . . . .	36
2.12	Soluções dos exercícios do capítulo . . . . .	36
<b>3</b>	<b>As funções trigonométricas</b>	<b>39</b>
3.1	Funções trigonométricas diretas . . . . .	39
3.1.1	As funções secante, cossecante e cotangente . . . . .	40
3.2	Funções trigonométricas inversas . . . . .	42
3.2.1	Função arco seno . . . . .	42
3.2.2	Função arco coseno . . . . .	43
3.2.3	Função arco tangente . . . . .	45
3.2.4	Função arco cotangente . . . . .	46
3.3	Exercícios . . . . .	47
3.4	Soluções dos exercícios do capítulo . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis</b>	<b>50</b>
4.1	Teoremas sobre funções contínuas . . . . .	50
4.1.1	Teorema de Bolzano . . . . .	50
4.1.2	Teorema de Weierstrass . . . . .	51
4.2	Teoremas sobre funções deriváveis . . . . .	54
4.2.1	O Teorema de Rolle . . . . .	54
4.2.2	O Teorema de Lagrange . . . . .	55
4.2.3	Máximos e mínimos locais . . . . .	58
4.2.4	Convexidade, concavidade e pontos de inflexão . . . . .	59
4.3	Teorema e regra de Cauchy . . . . .	62
4.4	Soluções dos exercícios do capítulo . . . . .	68

## Capítulo 4

# Teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis

Neste capítulo serão estudados alguns teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis e a sua aplicação ao estudo completo de funções.

### 4.1 Teoremas sobre funções contínuas

Os teoremas seguintes foram estudados no ensino secundário e são aqui revisitados.

#### 4.1.1 Teorema de Bolzano

**Teorema 4.1.** (*Teorema de Bolzano ou dos valores intermédios*) Se  $f$  é uma função contínua num intervalo  $[a, b]$ ,  $a < b$ , e  $f(a) < Y < f(b)$  ou  $f(b) < Y < f(a)$  então existe  $X \in ]a, b[$  tal que  $f(X) = Y$ .

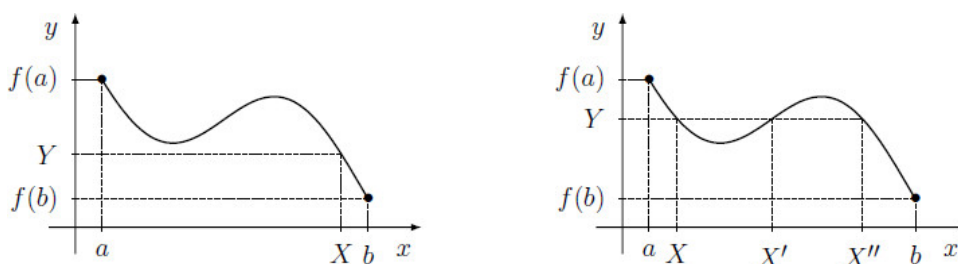


Figura 4.1: Interpretação geométrica do Teorema de Bolzano.

Este teorema estabelece que uma função contínua em  $[a, b]$  assume todos os valores intermédios entre  $f(a)$  e  $f(b)$  (uma ou mais vezes).

**Corolário 1.** Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $f(a) \cdot f(b) < 0$  então existe  $x_0 \in ]a, b[$  tal que  $f(x_0) = 0$ .

**Exemplo 4.1.** A equação  $\sin x + 2x - 1 = 0$  tem pelo menos uma solução em  $\mathbb{R}$ .

Consideremos a função contínua em  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sin x + 2x - 1$ . Calculando  $f(0)$  e  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  obtemos:

$$f(0) = -1 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi, \quad \text{portanto} \quad f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi < 0$$

e o Teorema de Bolzano (ou o seu corolário) permite-nos afirmar que a função se anula neste intervalo.

Veremos à frente que esta função tem um único zero em  $\mathbb{R}$ .

**Corolário 2.** *Seja  $I$  um intervalo qualquer de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então  $f(I)$  é um intervalo.*

*Demonstração.* Sejam  $y_1, y_2 \in f(I)$  arbitrários e suponha-se, sem perda de generalidade, que  $y_1 < y_2$ . Então

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad y_1 < y < y_2 \Rightarrow y \in f(I)$$

ou seja,  $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$ , o que prova ser  $f(I)$  um intervalo.  $\square$

#### 4.1.1.1 Método da Bissecção

Uma das aplicações do corolário do teorema de Bolzano é a localização de raízes de equações não lineares.

**Exemplo 4.2.** Seja  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ . Pretende-se encontrar  $\bar{x}$  entre 1 e 2 tal que  $f(\bar{x}) = 0$ . Como,

$$\left. \begin{array}{l} f(1)f(2) < 0 \\ f \text{ é contínua em } [1, 2] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \bar{x} \in ]1, 2[: f(\bar{x}) = 0$$

Consideremos agora o ponto médio de  $[1, 2]$ ,  $x_1 = 1.5$ . Como  $|x_1 - \bar{x}| < 0.5$ ,  $x_1$  é uma aproximação de  $\bar{x}$  com erro inferior a 0.5. Aplicando novamente o teorema,

$$\left. \begin{array}{l} f(1)f(x_1) < 0 \\ f \text{ é contínua em } [1, x_1] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \bar{x} \in ]1, x_1[: f(\bar{x}) = 0$$

Uma raiz da equação está em  $]1, 1.5[$ . Repetindo o processo anterior, seja  $x_2 = 1.25$  (ponto médio de  $[1, 1.5]$ ), temos

$$|x_2 - \bar{x}| < 0.25 \text{ e portanto } x_2 \text{ é uma aproximação da raiz da equação com erro inferior a } 0.25.$$

Como,

$$\left. \begin{array}{l} f(1)f(x_2) < 0 \\ f \text{ é contínua em } [1, x_2] \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \bar{x} \in ]1, x_2[: f(\bar{x}) = 0$$

podemos aplicar sucessivamente o resultado até obter uma aproximação de  $\bar{x}$  com a precisão desejada.

#### 4.1.2 Teorema de Weierstrass

Este teorema garante a existência de máximo e mínimo de uma função contínua num intervalo fechado. Começemos por recordar estas noções.

Seja  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  com contradomínio  $CD_f$ . Um ponto  $c \in D_f$  é

- ponto de *máximo (mínimo) global* se  $f(c)$  é o máximo (mínimo) de  $CD_f$ ;
- ponto de *máximo (mínimo) local* se existe uma vizinhança  $\mathcal{V}(c)$  tal que  $c$  é ponto de máximo (mínimo) global da restrição da função  $f$  ao conjunto  $D \cap \mathcal{V}(c)$ .

Um ponto  $c$  de máximo ou de mínimo local (global) diz-se *ponto de extremo local (global)* de  $f$ . Ao valor  $f(c)$  chama-se *extremo local (global)* de  $f$ .

Para encontrar os extremos globais é preciso estudar os extremos locais e compará-los.

Um ponto de extremo  $c$  da função  $f$  diz-se *extremo estrito* quando  $f(x) \neq f(c)$  para todo o  $x$  diferente de  $c$  numa vizinhança de  $c$ .

Pode recordar estes conceitos assistindo aos vídeos da Khan Academy [extremos](#) e [exemplo](#).

**Exercício 4.1** Encontre extremos e pontos de extremo locais e globais da função definida em  $[-4, 6[$  pelo gráfico representado na figura 4.2, indicando os extremos estritos:

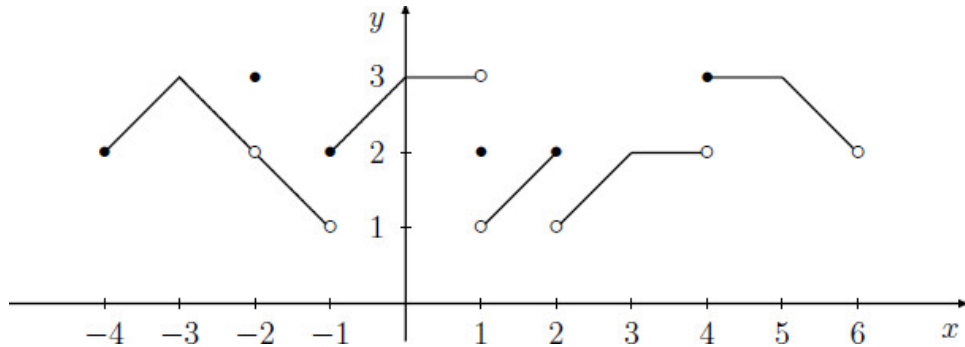


Figura 4.2: Gráfico da função.

**Teorema 4.2. (Teorema de Weierstrass)** Seja  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $D_f$  é um conjunto limitado e fechado e  $f$  é contínua em  $D_f$ , então  $f$  atinge em  $D_f$  o seu máximo e o seu mínimo, isto é, existem  $x_m, x_M \in D_f$  tais que,  $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ , para todo o  $x \in D_f$ . Consequentemente, o contradomínio da função é  $f(D_f) = [f(x_m), f(x_M)]$ .

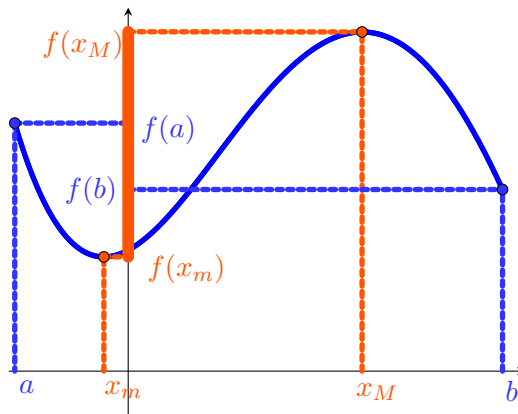


Figura 4.3: Interpretação geométrica do Teorema de Weierstrass.

*Demonstração.* Começemos por provar que  $f$  é limitada. Suponha-se, pelo contrário, que  $f$  é contínua, mas não limitada em  $[a, b]$ . Então, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $x_n \in [a, b]$  tal que se tem  $|f(x_n)| > n$ . A sucessão  $(x_n)_{n \geq 1}$  é limitada, já que  $a \leq x_n \leq b$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e, portanto, admite uma subsucessão  $(x_{n_\tau})_{\tau \geq 1}$ , convergente<sup>1</sup>. Seja  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_{n_\tau} = \bar{x} \in [a, b]$ .

Tem-se então, por um lado, que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |f(x_{n_\tau})| = +\infty$$

<sup>1</sup>Toda a sucessão limitada admite uma subsucessão convergente.

enquanto que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |f(x_{n_\tau})| = |f(\bar{x})| < +\infty$$

já que, da continuidade de  $f$  decorre (como facilmente se verifica) a continuidade de  $|f|$ .

A contradição resultou de se ter suposto que a função  $f$  era não limitada.

Seja  $M = \sup f(x)$  e suponha-se que

$$f(x) < M, \forall x \in [a, b].$$

Então a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \quad a \leq x \leq b$$

é contínua e, portanto, de acordo com o o que vimos no início da demonstração para a função  $f$ , é limitada.

Seja  $c = \sup g(x)$ . É claro que se tem  $c > 0$  e

$$g(x) \leq c, \quad \forall x \in [a, b]$$

donde resulta que

$$f(x) \leq M - \frac{1}{c}, \quad \forall x \in [a, b]$$

o que é contrário à definição de  $M$ .

Consequentemente,

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) = M$$

e, portanto,  $M = \max f(x)$ .

Demonstração análoga se pode fazer para o caso do mínimo. □

- A função  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  não é limitada. Isto contradiz o teorema anterior?
- A função  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$  é contínua e limitada. Assume o valor máximo em  $x = 0$ , mas não existe  $x \in [0, +\infty[$  tal que  $g(x)$  seja mínimo. Porquê?

**Exercício 4.2** Considere a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \arctan x & \text{se } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Estude  $f$  quanto à continuidade.
2. Determine, caso existam, as assíntotas ao gráfico de  $f$ .
3. Determine os pontos de intersecção do gráfico de  $f$  com a reta de equação  $y = \frac{1}{2}$ .

**Exercício 4.3** Considere a função  $g$  dada por

$$g(x) = \frac{3\pi}{5} - \arccos\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Utilize o teorema de Bolzano para justificar que  $g$  admite uma raiz no intervalo  $]0, 2[$ .

**Exercício 4.4** Considere a função  $f$ , real de variável real, tal que  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1.  $f$  é contínua em  $]1, 2[$ ?  $f$  é limitada em  $]1, 2[$ ?
2. Existe contradição com o teorema de Weierstrass?

$g(2) = \frac{3\pi}{5} - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

$g(0) = \frac{3\pi}{5} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{5} - \frac{2\pi}{3} = \frac{(9-10)\pi}{15} < 0$

## 4.2 Teoremas sobre funções deriváveis

Vamos estudar alguns teoremas sobre funções deriváveis em intervalos de  $\mathbb{R}$  que nos permitem fazer o estudo completo de funções, incluindo monotonia, extremos e sentidos das concavidades dos seus gráficos.

### 4.2.1 O Teorema de Rolle

**Teorema 4.3. (Teorema de Rolle)** *Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $]a, b[$ . Se  $f(a) = f(b)$  então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

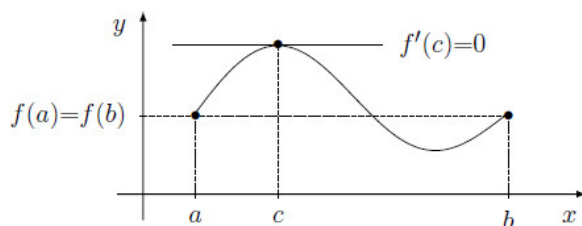


Figura 4.4: Teorema de Rolle.

Podemos afirmar que nas condições do Teorema de Rolle a função tem um ponto no interior do intervalo  $[a, b]$  onde a tangente é uma reta horizontal.

*Demonstração.* Nas condições do Teorema de Rolle,  $f$  tem máximo e mínimo em  $[a, b]$  (pelo Teorema de Weierstrass).

Se a função for constante em  $[a, b]$ , isto é,  $f(x) = k$  onde  $k = f(a) = f(b)$ ,  $\forall x \in [a, b]$  e o máximo é igual ao mínimo e igual a  $k$ . Então, em qualquer ponto do intervalo  $]a, b[$  a derivada é nula, pelo que o teorema é verdadeiro neste caso.

Suponhamos agora que  $f$  não é constante. Como  $f$  é contínua, então, pelo Teorema de Weierstrass, admite no intervalo  $[a, b]$  um máximo  $M$  e um mínimo  $m$  e  $m \neq M$  já que a função não é constante.

Então a função admite no interior do intervalo  $[a, b]$  um máximo, um mínimo ou até os dois.

Admita-se que  $f$  admite o valor máximo  $M$  no ponto  $c$  tal que  $a < c < b$ .

Então para valores de  $x < c$  vem  $x - c < 0$  e também  $f(x) - f(c) \leq 0$  e portanto

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Como  $f$  é derivável no intervalo, vem

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0.$$

Para valores de  $x$  à direita de  $c$ ,  $x - c > 0$  e  $f(x) - f(c) \leq 0$  e portanto

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

e também,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0.$$

Mas então conclui-se que

$$f'(c) \geq 0 \text{ e } f'(c) \leq 0$$

o que só é possível se  $f'(c) = 0$ , provando-se assim o teorema.

A prova seria análoga se considerássemos o mínimo  $m$  atingido num ponto do interior do intervalo.  $\square$

**Exercício resolvido 4.1.** 1. Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $]a, b[$  com  $f'(x) \neq 0, \forall x \in ]a, b[$ .  $f$  é injetiva em  $[a, b]$ ? E monótona? ✓

2. Se  $f$  é estritamente monótona e derivável em  $]a, b[$ , então  $f'(x) \neq 0, \forall x \in ]a, b[$ ? F

3. Prove que entre duas raízes (dois zeros) consecutivas duma função, derivável em  $\mathbb{R}$ , existe uma raiz da sua derivada. Prove ainda que entre raízes consecutivas da derivada existe quando muito uma raiz da função. f(c) = a^3 [-4, 4]

**Resolução do exercício 4.1.** 1. Provemos que  $f$  é injetiva. Suponhamos, por redução ao absurdo, que  $f$  não era injetiva, isto é, que existiam  $x_1$  e  $x_2$  distintos ( $x_1 < x_2$ ) mas  $f(x_1) = f(x_2)$ . Se aplicarmos o Teorema de Rolle ao intervalo  $[x_1, x_2]$ , como  $f$  é contínua neste intervalo, derivável em  $]x_1, x_2[$  e  $f(x_1) = f(x_2)$ , existiria um  $c \in ]x_1, x_2[ \subseteq ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ , contrariando a hipótese de que  $f'(x) \neq 0, \forall x \in ]a, b[$ .

Logo  $f$  é injetiva em  $[a, b]$ .

Provemos agora que a função é estritamente monótona em  $[a, b]$ . Suponhamos que não, isto é, ou existem  $x_1$  e  $x_2$  em  $[a, b]$  distintos tais que  $f(x_1) = f(x_2)$  e neste caso a função não seria injetiva, ou existem  $x_1 < x_2 < x_3$  em  $[a, b]$  tais que  $f(x_1) < f(x_2)$  e  $f(x_2) > f(x_3)$  ou  $f(x_1) > f(x_2)$  e  $f(x_3) > f(x_2)$ .

Consideremos o primeiro caso, isto é,  $x_1 < x_2 < x_3$  com  $f(x_1) < f(x_2)$  e  $f(x_3) < f(x_2)$ . Podem suceder duas situações:  $f(x_1) > f(x_3)$  ou  $f(x_1) < f(x_3)$ . Se  $f(x_1) > f(x_3)$ , pelo Teorema de Bolzano (4.1), existirá um  $c \in ]x_2, x_3[$  tal que  $f(c) = f(x_1)$  e a função não seria injetiva.

Se  $f(x_1) < f(x_3)$ , pelo Teorema de Bolzano (4.1), existirá um  $d \in ]x_1, x_2[$  tal que  $f(d) = f(x_3)$  e a função não seria injetiva.

A prova seria análoga para o caso em que  $f(x_1) > f(x_2)$  e  $f(x_3) > f(x_2)$ . Portanto podemos afirmar que a função tem que ser estritamente monótona em  $[a, b]$ .

2. Não. Seja  $f$  a função definida em  $[-1, 1]$  por  $f(x) = x^3$ . Esta função é estritamente crescente e no entanto a derivada anula-se em  $x = 0$ .

3. Sejam  $r_1 < r_2$  dois zeros consecutivos de  $f$ , isto é,  $f(r_1) = f(r_2) = 0$ .  $f$  é contínua em  $[r_1, r_2]$ , derivável em  $]r_1, r_2[$  e  $f(r_1) = f(r_2)$ . Aplicando o Teorema de Rolle podemos afirmar que existe um zero da derivada em  $]r_1, r_2[$ .

Sejam agora  $s_1 < s_2$  duas raízes consecutivas da derivada de  $f$ . Suponhamos que existiam dois zeros distintos de  $f$ ,  $r_1 < r_2$ , entre  $s_1$  e  $s_2$ , isto é,  $s_1 \leq r_1 < r_2 \leq s_2$ . Pelo que foi dito no parágrafo anterior, existiria um zero da derivada,  $s_3$ , entre  $r_1$  e  $r_2$ , contrariando o facto de que  $s_1$  e  $s_2$  são zeros consecutivos de  $f'$ , ou seja, teríamos  $s_1 \leq r_1 < s_3 < r_2 \leq s_2$ .

#### 4.2.2 O Teorema de Lagrange

O seguinte teorema é também conhecido por **Teorema dos Acréscimos Finitos**.

**Teorema 4.4. (Teorema de Lagrange)** *Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $]a, b[$ . Então existe um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



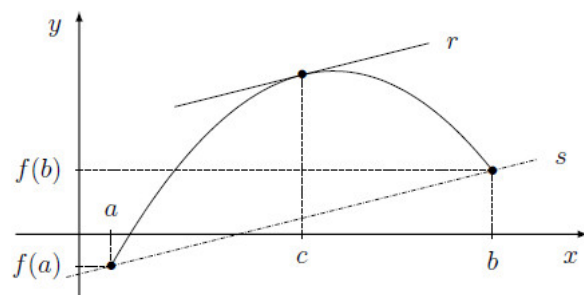


Figura 4.5: Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange.

*Demonstração.* Seja

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned}$$

Então  $g$  também é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $]a, b[$ . Além disso,  $g(a) = g(b) = 0$ . Logo, pelo Teorema de Rolle, existe algum  $c \in ]a, b[$  tal que  $g'(c) = 0$ . Mas

$$g'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Pelo teorema existe um ponto  $c \in ]a, b[$  em que a reta  $r$  tangente ao gráfico da função  $f$  é paralela à reta secante em  $a$  e  $b$  (a reta  $s$ , na figura).

Facilmente se constata que estando  $c$  estritamente compreendido entre  $a$  e  $b$ , então pode expressar-se de forma única como

$$c = a + \theta(b - a), \quad 0 < \theta < 1$$

e, portanto, a fórmula dos acréscimos finitos pode tomar o seguinte aspecto

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + \theta(b - a)), \quad 0 < \theta < 1$$

ou ainda, fazendo  $b = a + h$ ,

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

**Exercício 4.5** Seja  $f : [3, 2 + e] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x + \ln(x - 2)$ . Verifique que  $f$  satisfaz a hipótese do Teorema de Lagrange e encontre a equação da reta tangente ao gráfico e paralela à secante nos extremos do domínio.

#### 4.2.2.1 Monotonia e Teorema de Lagrange

Da definição de derivada resulta que, sendo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em  $]a, b[ \subseteq D$ ,

se  $f$  é crescente em sentido lato em  $[a, b]$  então  $f'(x) \geq 0, \forall x \in ]a, b[$  ;

se  $f$  é decrescente em sentido lato em  $[a, b]$  então  $f'(x) \leq 0, \forall x \in ]a, b[$  ;

(em particular) se  $f(x)$  é constante em  $[a, b]$  então  $f'(x) = 0, \forall x \in ]a, b[$  .

Contudo, o Teorema de Lagrange permite inferir acerca das recíprocas destas proposições. São consequências imediatas do Teorema de Lagrange as seguintes proposições:

**Corolário 3.** Sendo  $f$  uma função definida e derivável num intervalo aberto  $I \subseteq \mathbb{R}$  (com mais de um ponto) tal que  $f'(x) = 0, \forall x \in I$ , então  $f$  é uma função constante em  $I$ .

**Exercício 4.5** Seja  $f : [3, 2+e] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x + \ln(x-2)$ . Verifique que  $f$  satisfaz a hipótese do Teorema de Lagrange e encontre a equação da reta tangente ao gráfico e paralela à secante nos extremos do domínio.

$(x + \ln(x-2))$  está definido se  $x-2 > 0$  e  $x > 2$ .

A função é cont. e derivável em  $]2, +\infty[$  pois

é uma soma e composição de funções contínuas.

$\log$  é cont. em  $[3, 2+e] \subseteq ]2, +\infty[$

e derivável em  $]3, 2+e[$ . Assim, o

T. Lagrange pode ser aplicado.

*Demonstração.* Sejam  $x_1$  e  $x_2$  pontos arbitrários em  $I$ , com  $x_1 < x_2$ . Sendo  $f$  derivável em  $I$ , pode aplicar-se o Teorema de Lagrange ao intervalo  $[x_1, x_2]$  e portanto existe  $c \in ]x_1, x_2[$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como  $f'(x) = 0, \forall x \in I$ , resulta que  $f'(c) = 0$  e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \text{ ou seja, } f(x_2) = f(x_1).$$

Como  $x_1$  e  $x_2$  são pontos arbitrários de  $I$  podemos concluir que  $f$  é constante.  $\square$

**Corolário 4.** Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis em  $D$  e  $f'(x) = g'(x), \forall x \in D$ , então em cada intervalo  $I \subseteq D$  existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = g(x) + C, \forall x \in I$ .

**Corolário 5.** Se  $f$  é uma função derivável em  $I$  e para todo o  $x$  pertencente a um intervalo aberto  $I \subseteq \mathbb{R}$  (com mais de um ponto) se tiver  $f'(x) > 0$ , então  $f$  é estritamente crescente em  $I$  e, se for  $f'(x) < 0, \forall x \in I$ , então  $f$  é estritamente decrescente em  $I$ .

*Demonstração.* Sejam  $x_1$  e  $x_2$  pontos arbitrários em  $I$ , com  $x_1 < x_2$ . Sendo  $f$  derivável em  $I$ , pode aplicar-se o Teorema de Lagrange ao intervalo  $[x_1, x_2]$  e portanto existe  $c \in ]x_1, x_2[$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Se  $f'(x) > 0, \forall x \in I$ , resulta que  $f'(c) > 0$  e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \text{ ou seja, } f(x_2) > f(x_1) \text{ (já que } x_2 > x_1 \text{)}.$$

Como  $x_1$  e  $x_2$  são pontos arbitrários de  $I$  podemos concluir que  $f$  é estritamente crescente.

Se  $f'(x) < 0, \forall x \in I$ , resulta que  $f'(c) < 0$  e consequentemente,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \text{ ou seja, } f(x_2) < f(x_1) \text{ (já que } x_2 > x_1 \text{)}.$$

Como  $x_1$  e  $x_2$  são pontos arbitrários de  $I$  podemos concluir que  $f$  é estritamente decrescente.  $\square$

Note-se que nestes dois corolários  $I$  designa sempre um intervalo, pois de contrário não fica garantida a veracidade das afirmações feitas: por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

tem derivada nula em todos os pontos do seu domínio (que não é um intervalo) e, no entanto, não é constante nesse domínio.

Pode ainda deduzir-se do Teorema de Lagrange o seguinte corolário:

**Corolário 6.** Dadas duas funções  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deriváveis, então

$$f(a) \leq g(a) \wedge f'(x) \leq g'(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

*Demonstração.* Seja  $x \in [a, b]$  qualquer e  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ . Pela fórmula dos acréscimos finitos, para cada  $x \in ]a, b[$ , existe pelo menos um  $c \in ]a, x[$  tal que

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(c).$$

Como  $\varphi'(c) = f'(c) - g'(c) \leq 0$  qualquer que seja  $c \in ]a, b[$ , então obtém-se

$$\varphi(x) - \varphi(a) \leq 0, \forall x \in ]a, b[$$

donde resulta

$$f(x) - g(x) \leq f(a) - g(a) \leq 0$$

ou seja,

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b[$$

como se pretendia provar.  $\square$

#### Exercício 4.6

1. Mostre que  $\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$
2. Estude o domínio e o gráfico de  $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ . (Ajuda: calcule  $f'!$ )

**Exemplo 4.3.** Mostremos que  $f(x) = x + k \sin x$  é invertível se e só se  $|k| \leq 1$ .

A derivada de  $f$  é  $f'(x) = 1 + k \cos x$  e  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k \cos x = -1$ .

- Se  $|k| < 1$  então  $|k \cos x| = |k| |\cos x| \leq |k| < 1$  e assim  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- Se  $k = \pm 1$  então  $f'(x) \geq 0$  e  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \mp 1$  é satisfeita em pontos isolados
- Se  $|k| > 1$  então  $f'$  muda de sinal:  $f'(0) = 1 + k$  e  $f'(\pi) = 1 - k$  têm sinais opostos.

Conclui-se que  $f$  é estritamente crescente, logo invertível, se e só se  $|k| \leq 1$ .

#### 4.2.3 Máximos e mínimos locais

O elemento  $a \in \text{Int}(D_f)$  é *ponto crítico* de  $f$  se  $f'(a) = 0$  ou se  $a \notin D_{f'}$ , ou seja, se a derivada se anula nesse ponto ou se não existe derivada nesse ponto.

**Exemplo 4.4.** Seja  $f: ]-2, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = |1 - x^2|$ . Os pontos críticos são  $\{-1, 0, 1\}$ .

Esta função não tem derivada em  $c = -1$  nem em  $c = 1$  e a derivada anula-se em  $c = 0$ .

**Teorema 4.5. (Teorema de Fermat)** *Seja  $f$  uma função definida e derivável num intervalo aberto  $]a, b[$ ,  $a < b$ . Se  $f$  tiver um extremo local num ponto  $c \in ]a, b[$ , então  $f'(c) = 0$ .*

*Demonstração.* (a) Suponha-se que  $f$  tem um máximo local em  $c \in ]a, b[$ . Então, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\forall x \in ]a, b[ \quad x \in ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[ \Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

e, portanto, qualquer que seja  $x \in ]a, b[$ ,

$$\text{se } c - \varepsilon < x < c, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

e

$$\text{se } c < x < c + \varepsilon, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

donde resulta, por passagem ao limite quando  $x \rightarrow c$  à esquerda e à direita, que

$$f'_e(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{e} \quad f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Como  $f$  é derivável em  $c$ , então ter-se-á  $f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c)$ , o que implica que seja  $f'(c) = 0$ .

(b) Analogamente se demonstra o caso em que  $f$  tem um mínimo local no ponto  $c \in ]a, b[$ .  $\square$