

Modelação de Sistemas Físicos

6ª Aula Teórica

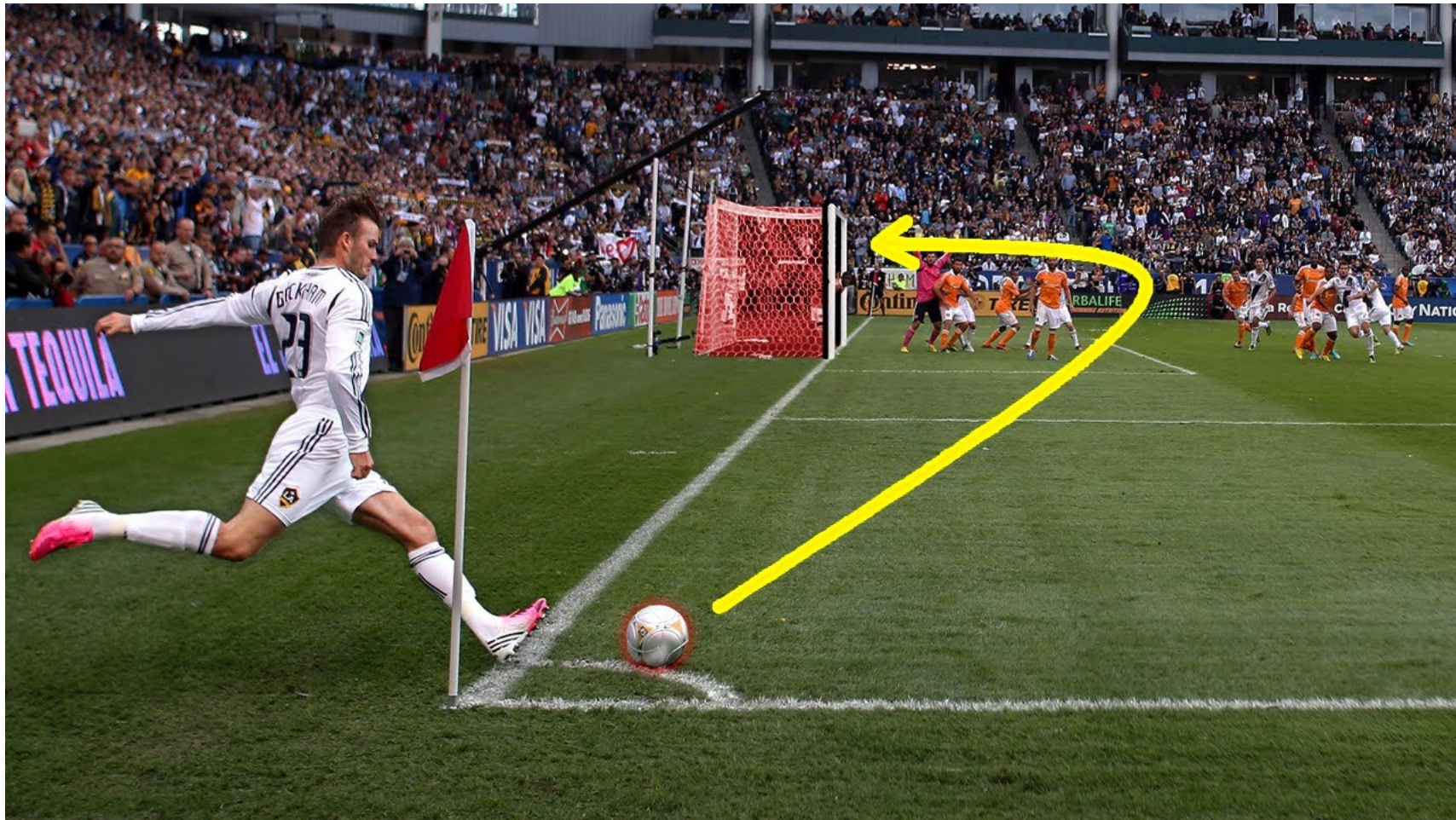
Sumário:

Cap. 4: Movimento no plano e no espaço

Bibliografia:

Cap. 4: Serway, cap. 4; Sørenssen, cap. 6; Villate, cap. 6

Cap. 4 Movimento a 3D



Se soubermos as forças aplicadas à bola saberemos a lei do movimento.

1. Peso da bola

$$\vec{F}_{grav} = -mg\hat{j}$$

2. Uma bola em movimento desloca o ar à sua passagem. Por isso sofre uma força de resistência do ar na forma

$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v}$$

3. A rotação da bola faz que o escoamento do ar seja diferente nos lados opostos da bola. O resultado é o aparecimento de uma força perpendicular ao eixo de rotação. É a força de Magnus, que tem a forma

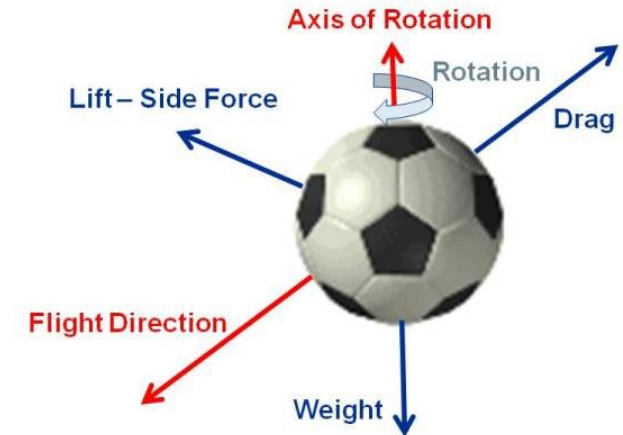
$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\vec{\omega}$ é o vetor rotação, $|\vec{\omega}|$ = ângulo (rad)/segundo

$A = \pi r^2$ a área da secção da bola

ρ_{ar} a densidade do ar

r o raio da bola



Problemas cap 4 Bola de futebol com rotação

Problema:

Determinar se é golo ou não, a bola ser chutada do canto com rotação. Implementar o movimento da bola com rotação, usando o método de Euler. Modificar um programa anterior que seja semelhante e adicionar a parte do método de Euler correspondente à dimensão extra z

Dados:

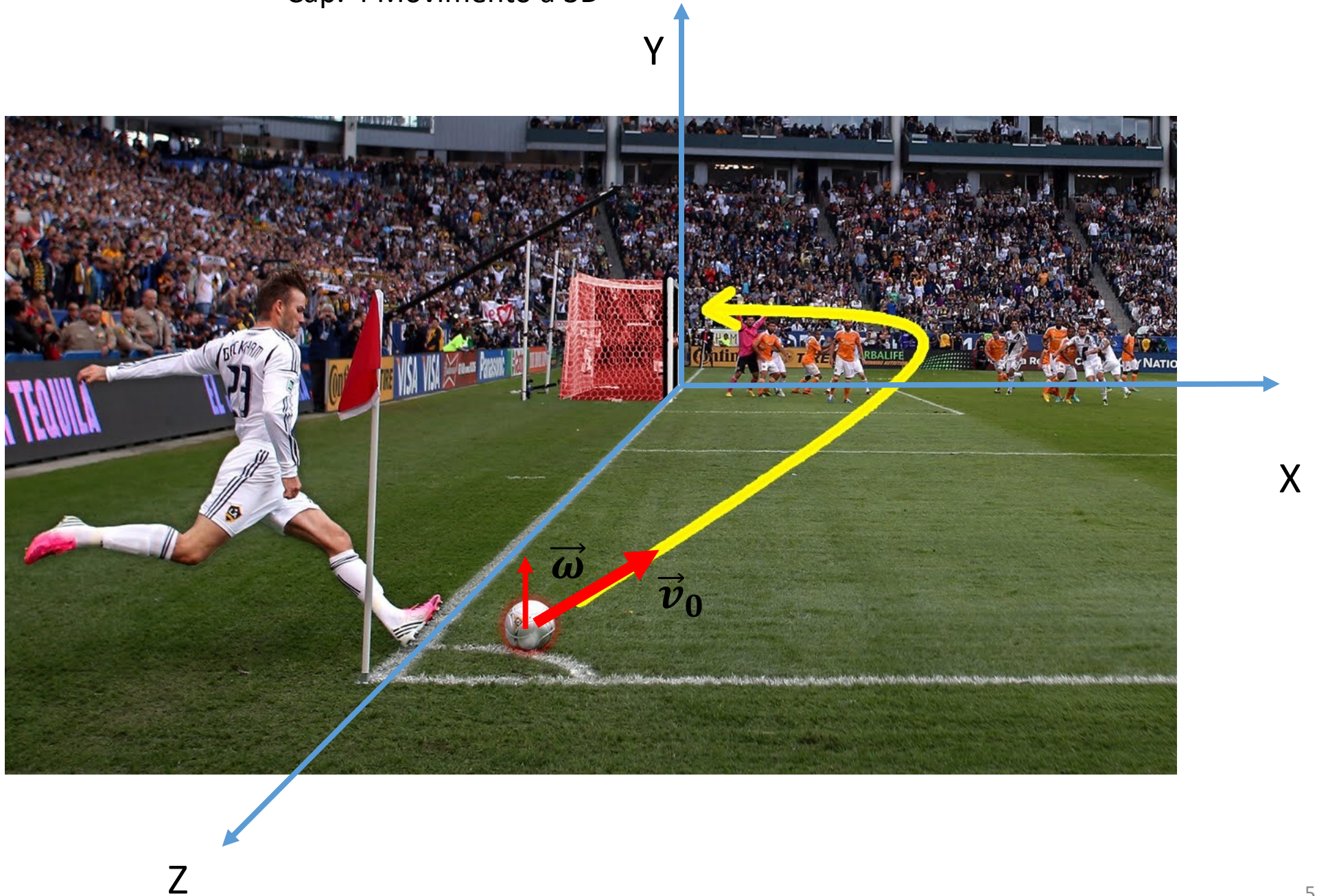
$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 23.8m) \\ \vec{v}_0 &= (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (25, 5, -50) \text{ m/s} \\ \vec{\omega} &= (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 400 \text{ rad/s}, 0) \\ t_0 &= 0 \text{ s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Massa da bola} & \quad m = 0.45 \text{ kg} \\ \text{Raio da bola:} & \quad r = 11 \text{ cm} \\ \text{Área transversal da bola:} & \quad A = \pi r^2 \\ & \quad \rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = (\omega_y v_z, 0, -\omega_y v_x) \text{ neste caso}$$

Cap. 4 Movimento a 3D



As projeções das forças de peso e resistência do ar são:

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} F_{res,x} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_{res,y} = -m D |\vec{v}| v_y \\ F_{res,z} = -m D |\vec{v}| v_z \end{cases}$$

O vetor velocidade angular $\vec{\omega} = (0, \omega_y, 0)$ rad/s, faz que a força de Magnus seja

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Magnus} &= \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \omega_y & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} A \rho_{ar} r (\omega_y v_z \hat{i} - \omega_y v_x \hat{k}) \end{aligned}$$

e assim as projeções da força de Magnus são:

$$\begin{cases} F_{Magnus,x} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \omega_y v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -\frac{1}{2} A \rho_{ar} r \omega_y v_x \end{cases}$$

Problemas cap 4 Bola de futebol com rotação

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_{res,x} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_{res,y} = -m D |\vec{v}| v_y \\ F_{res,z} = -m D |\vec{v}| v_z \end{cases} \quad \begin{cases} F_{Magnus,x} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \omega_y v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -\frac{1}{2} A \rho_{ar} r \omega_y v_x \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = -D |\vec{v}| v_x + \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \omega_y v_z \\ a_y = -g - D |\vec{v}| v_y \\ a_z = -m D |\vec{v}| v_z - \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \omega_y v_x \end{cases}$$

Problemas cap 4 Bola de futebol com rotação

Dados:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 23.8m)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (25, 5, -50) \text{ m/s}$$

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 400 \text{ rad/s}, 0)$$

$$t_0 = 0 \text{ s}$$

$$\text{Massa da bola} \quad m = 0.45 \text{ kg}$$

$$\text{Raio da bola:} \quad r = 11 \text{ cm}$$

$$\text{Área transversal da bola:} \quad A = \pi r^2$$

$$\text{Densidade do ar} \quad \rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x + \frac{1}{2}A \rho_{ar} r \omega_y v_z \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \\ a_z = -m D|\vec{v}|v_z - \frac{1}{2}A \rho_{ar} r \omega_y v_x \end{cases}$$

Dados:

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 23.8m)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (25, 5, -50) \text{ m/s}$$

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 400 \text{ rad/s}, 0)$$

$$t_0 = 0 \text{ s}$$

Massa da bola = 0.45 kg

Velocidade terminal da bola = 100 km/h

Raio da bola: $r = 11 \text{ cm}$

Área transversal da bola: $A = \pi r^2$

$$\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x + \frac{1}{2}A\rho_{ar}r\omega_yv_z \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \\ a_z = -mD|\vec{v}|v_z - \frac{1}{2}A\rho_{ar}r\omega_yv_x \end{cases}$$

Solução:

```
dres=g/vt**2 #coeficiente para resistência do ar
mag=0.5*1.225*0.11*np.pi*0.11**2 #coeficiente força Magnus
ómega_y = 400 #componente y da rotação
```

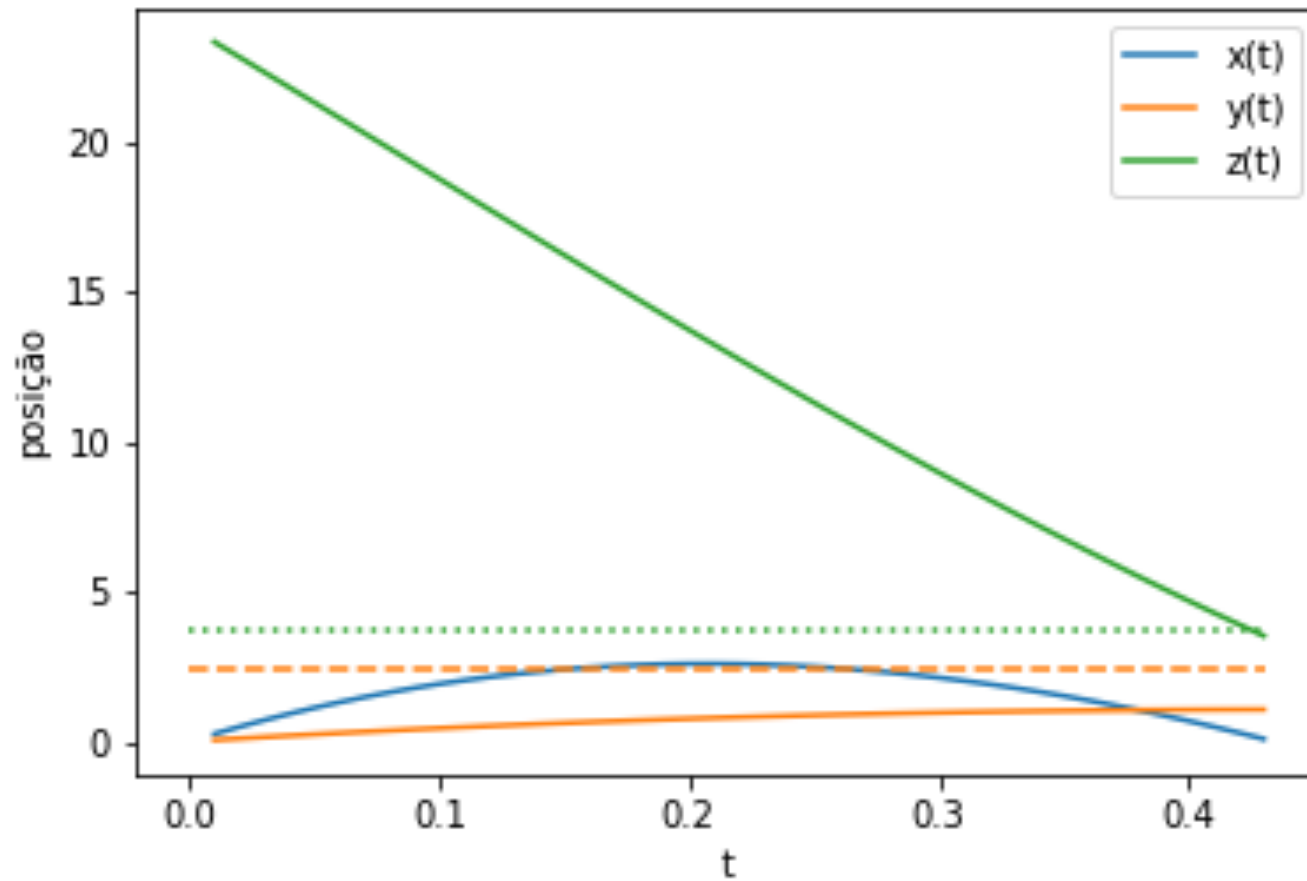
```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2+vz[i]**2) #|v|
    amx=mag*ómega_y*vz[i]/m #força de Magnus - x
    amz=-mag*ómega_y*vx[i]/m #força de Magnus - z
```

```
ax[i]=-dres*vv*vx[i]+amx
ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
az[i]=-dres*vv*vz[i]+amz
```

```
vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
vz[i+1]=vz[i]+az[i]*dt
```

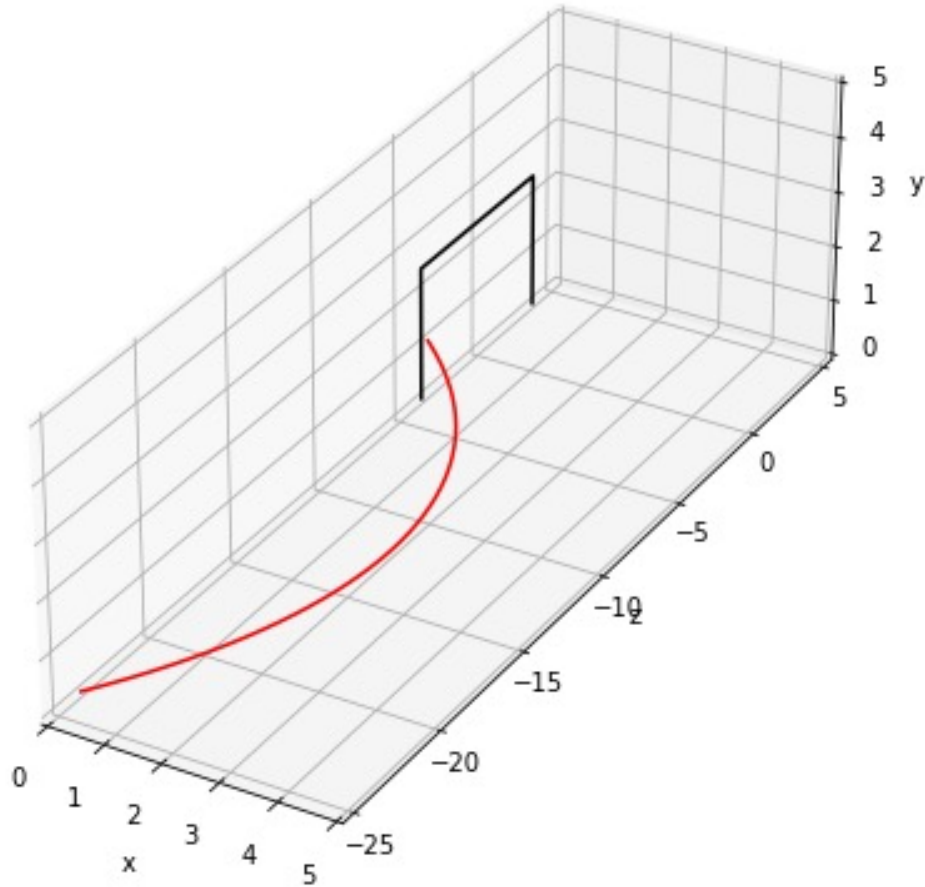
```
x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
z[i+1]=z[i]+vz[i]*dt
```

Cap. 4 Movimento a 3D



Golo:

$$\begin{aligned}x &< 0 \\-3.66 &< z < 3.66 \text{ m} \\0 &< y < 2.4 \text{ m}\end{aligned}$$



Golo:

$$x < 0$$

$$-3.7 < z < 3.7 \text{ m}$$

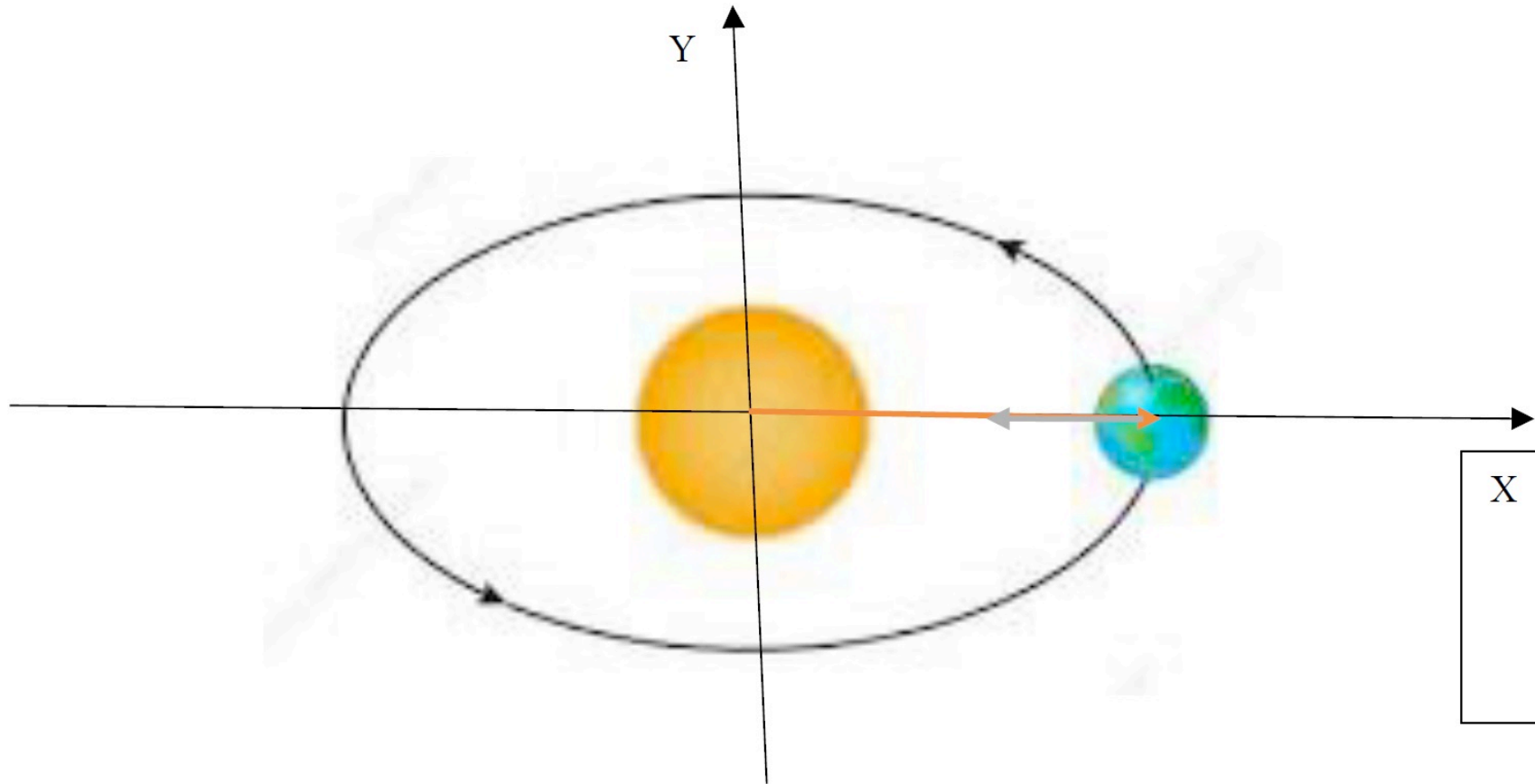
$$0 < y < 2.4 \text{ m}$$

É GOLO!

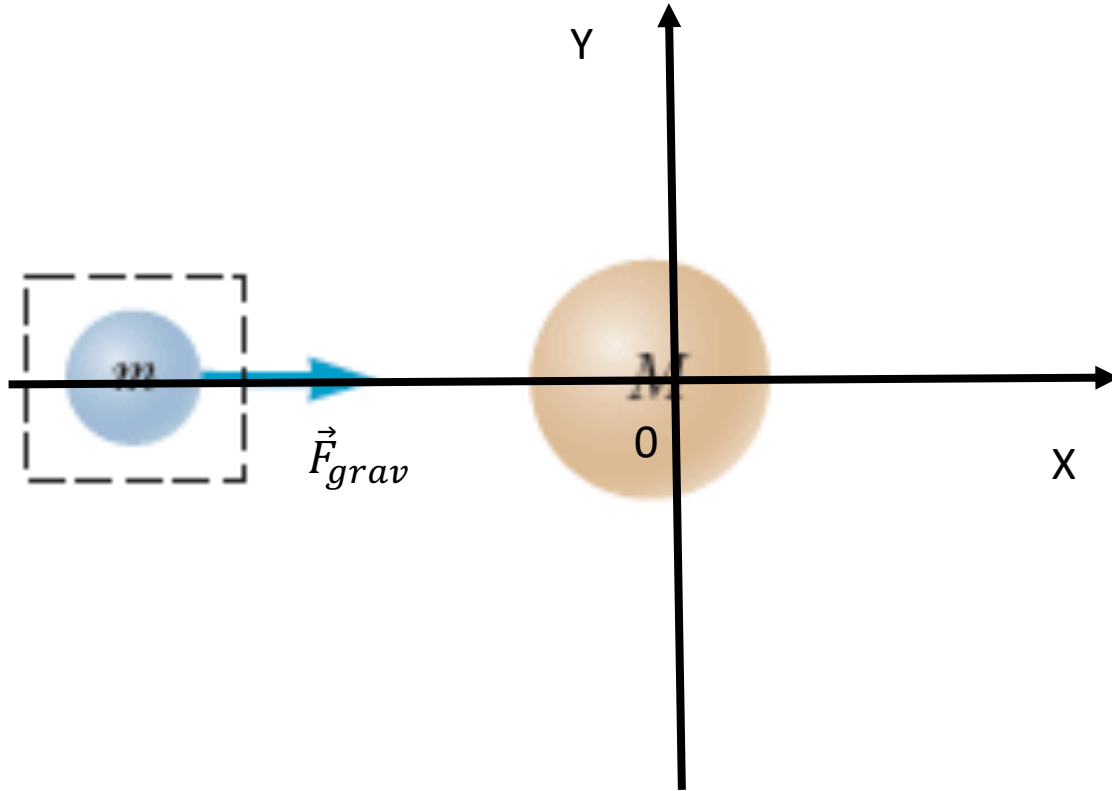
Código plot 3D:

```
plt.figure(figsize=(8,8))
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot3D(x[x>=0],-z[x>=0],y[x>=0], 'r')
goalx = [0,0,0,0]
goaly = [0,2.4,2.4,0]
goalz = [-3.66,-3.66,3.66,3.66]
ax.plot3D(goalx,goalz,goaly, 'k')
ax.set_xlim3d(0, 5)
ax.set_ylim3d(-25, 5)
ax.set_zlim3d(0, 5)
ax.set_box_aspect((2,6,2))
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('z')
ax.set_zlabel('y')
```

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



Força de gravidade

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad \text{em que} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

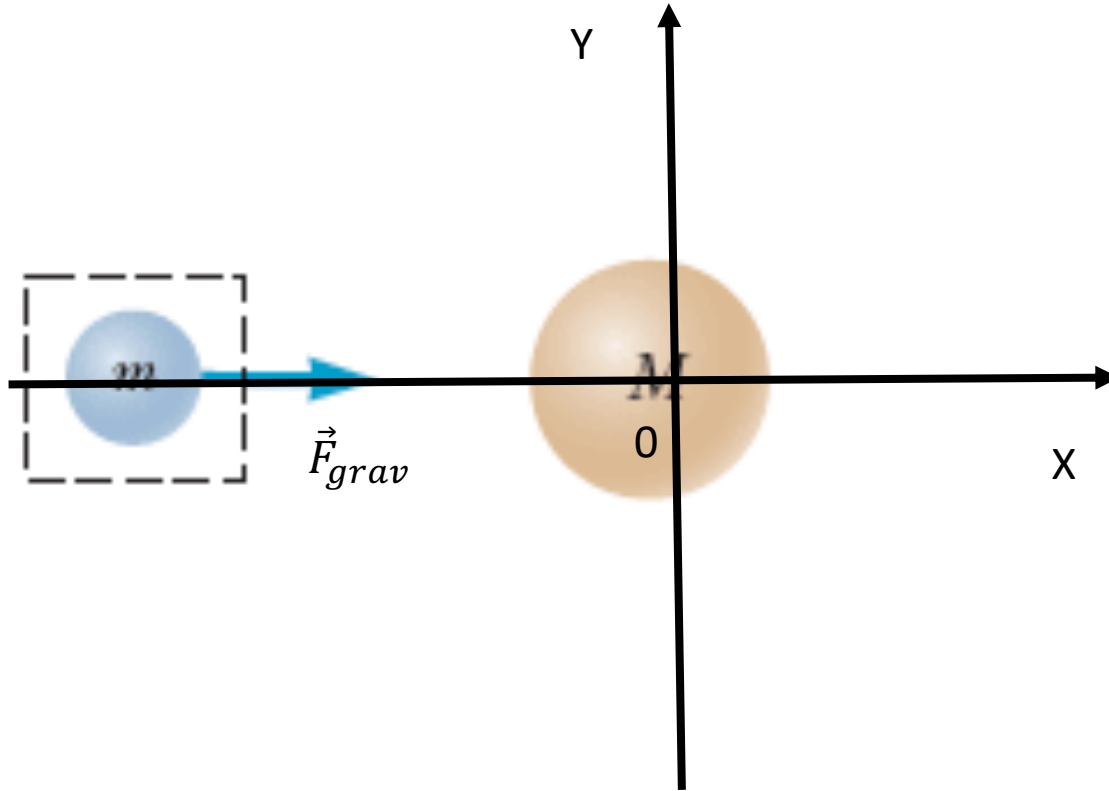
\vec{r} é o vetor com origem no Sol e termina na Terra

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$$

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$= -G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} (x \hat{i} + y \hat{j}) = \left(-G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} x, -G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} y \right)$$

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



Condições iniciais

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (-\text{distancia ao sol}, 0)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = \left(0, -2 \frac{\pi}{\text{ano}} * \text{distancia ao sol}\right)$$

Sistema Astronómico de unidades

Grandeza	Símbolo	Definição	Valor no SI	Conversão do SI
Massa	M	Massa do Sol	$1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$	$1 \text{ kg} = 5,028 \times 10^{-31} \text{ M}$
Distância	AU	Distância média da Terra ao Sol	$1,498 \times 10^{11} \text{ m}$	$1 \text{ m} = 6,676 \times 10^{-12} \text{ AU}$
Tempo	ano	Período da Terra em volta do Sol	$3,15 \times 10^7 \text{ s}$	$1 \text{ s} = 3,17 \times 10^{-8} \text{ ano}$

Neste sistema, a constante de gravitação é

$$G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{(6.676 \times 10^{-12} \text{ AU})^3}{5.028 \times 10^{-31} \text{ M} (3.17 \times 10^{-8} \text{ ano})^2} = 4\pi^2 \text{ AU}^3/(\text{M} \cdot \text{ano}^2),$$

a unidade de energia é $5.50 \times 10^{38} \text{ J}$ e a unidade de velocidade é 4718.48 m/s .

Condições iniciais neste sistema de unidades

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (-1, 0) \text{ AU}$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (0, -2\pi) \text{ AU/ano}$$

tornam-se muito mais simples.

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



$$\vec{F}_{grav} = \left(-G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} x, -G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} y \right)$$

Integração pelo método de Euler

`t[0]=0`

`vx[0]=v0x`

`vy[0]=v0y`

`x[0]=x0`

`y[0]=y0`

`for i in range(n):`

`t[i+1]=t[i]+dt`

`r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)`

`ax[i]=-gm/r**3*x[i]`

`ay[i]=-gm/r**3*y[i]`

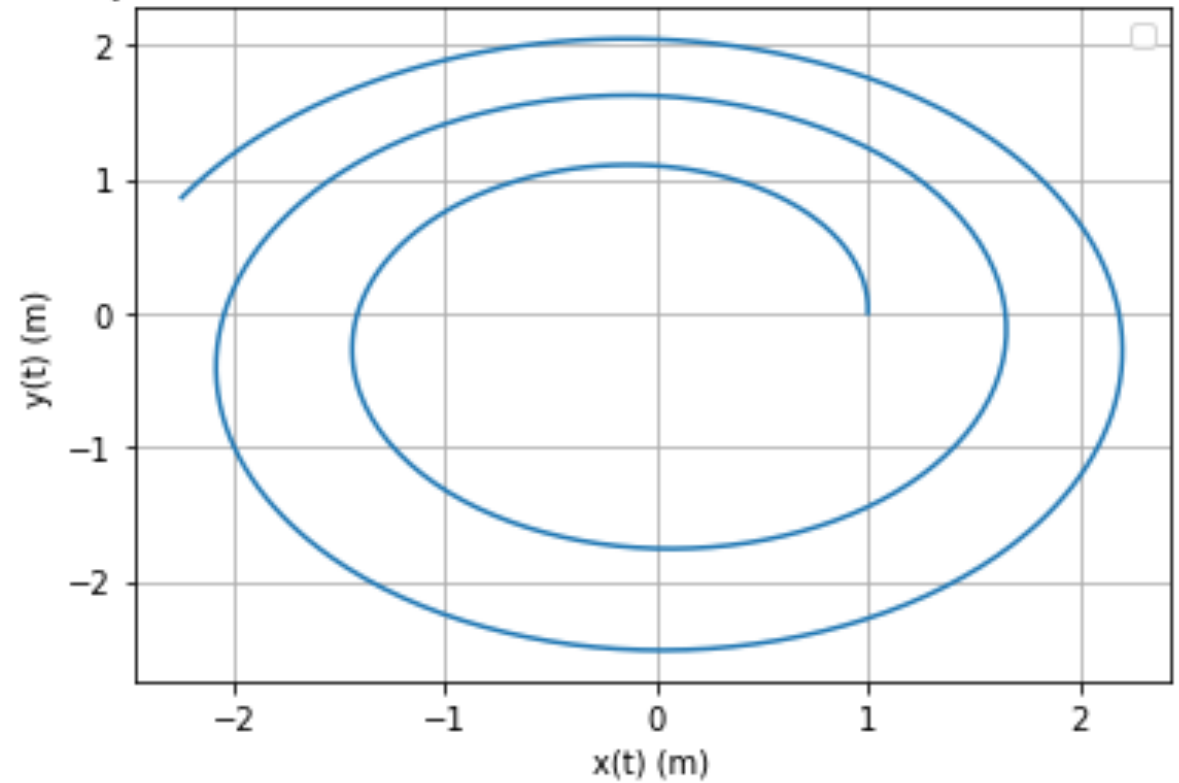
`vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt`

`vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt`

`x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt`

`y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt`

Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler, $dt=0.01$ ano



Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



$$\vec{F}_{grav} = \left(-G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} x, -G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} y \right)$$

Método de Euler

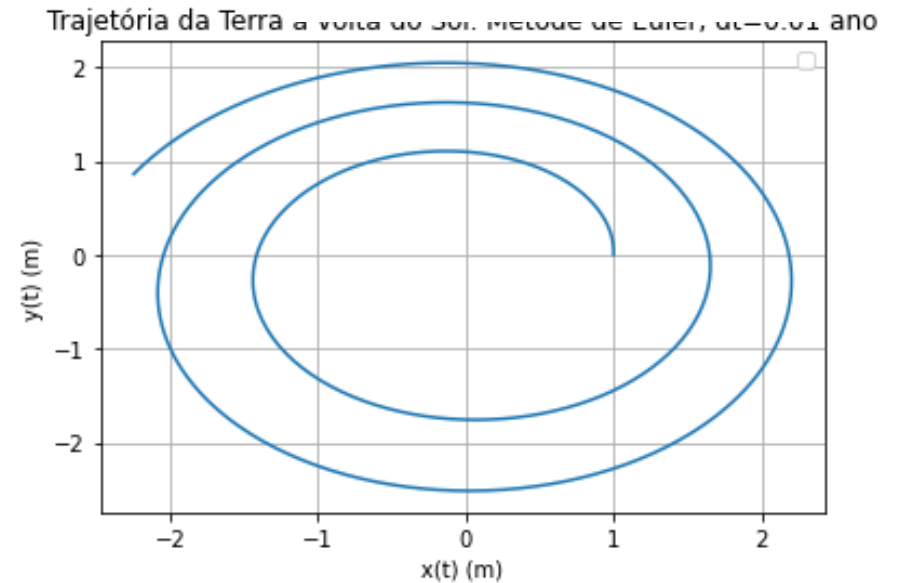
$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

Método de Euler-Cromer (ou Euler modificado)

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t + \delta t) \times \delta t$$



Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



$$\vec{F}_{grav} = \left(-G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} x, -G \frac{m M}{|\vec{r}|^3} y \right)$$

Integração pelo método de Euler-Cromer

`t[0]=0`

`vx[0]=v0x`

`vy[0]=v0y`

`x[0]=x0`

`y[0]=y0`

`for i in range(n):`

`t[i+1]=t[i]+dt`

`r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)`

`ax[i]=-gm/r**3*x[i]`

`ay[i]=-gm/r**3*y[i]`

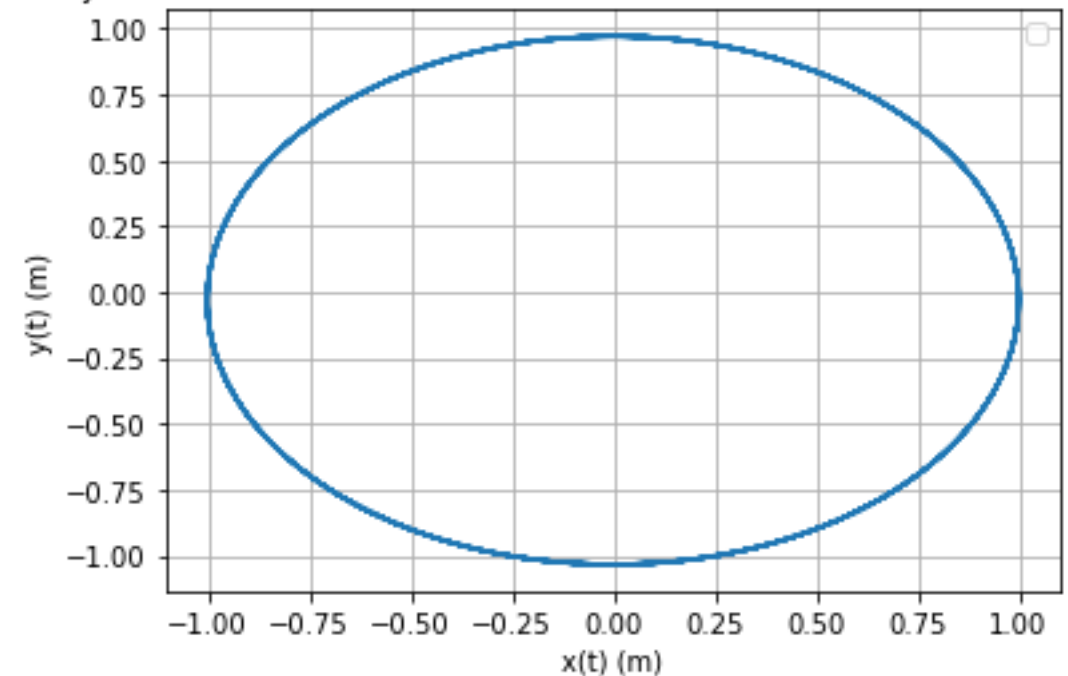
`vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt`

`vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt`

`x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt`

`y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt`

Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler-Cromer, dt=0.01 ano



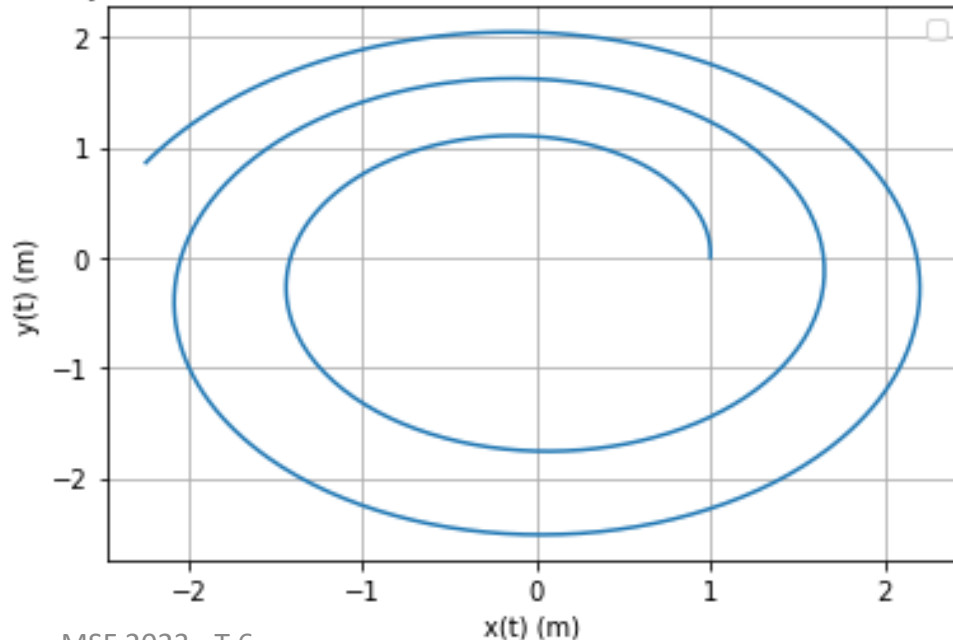
Produz órbitas fechadas

O método de Euler-Cromer :

- Mesmo erro de truncatura que o método de Euler
- Mas para movimentos periódicos, o erro anula-se ao fim de um período
- Conserve melhor a energia

Método de Euler mediocre para movimentos periódicos.

Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler, $dt=0.01$ ano



Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler-Cromer, $dt=0.01$ ano

