T Bolzano - Cauchy
f contínua $[a,b] \subset D_f$
então
$\forall u \in D_f \wedge k \in]f(a), f(b)[$
$\exists c \in]a,b[: f(c) = k$

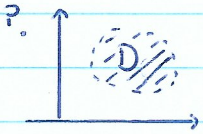
Corolário T. B.C.
f contínua $[a,b] \subset D_f$
$\wedge$
$f(a) \times f(b) < 0$
então
$\exists c \in]a,b[: f(c) = 0$

revisões

2. Teoremas do Cálculo Diferencial

intervalo compacto | $J \subseteq \mathbb{R}^k$ onde J é limitado e fechado

ponto isolado | $V_{(P)} \cap D_f = P$



$D_f = D \cup P$

extremos locais e globais

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in D_f$

$f(a) \geq f(u)$, $\forall u \in V_\delta(a) \cap D_f$ maximizante local
$\quad\quad, \forall u \in D_f$ maximizante global
$f(b) \leq f(u)$, $\forall u \in V_\varepsilon(b) \cap D_f$ minimizante local
$\quad\quad, \forall u \in D_f$ minimizante global

máximos e mínimos locais / globais $\Leftrightarrow$ extremos locais / globais
maximizantes e minimizantes locais / globais $\Leftrightarrow$ extremantes L/g

teorema de Weierstrass

$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua D_f ou conjunto compacto $[a,b] \subset D_f$
D_f um conjunto compacto (limitado e fechado)
então f atinge em D_f um máximo e mínimo globais
$\exists u_1, u_2 \in \overline{D_f} : f(u_1) \leq f(u) \leq f(u_2)$, $\forall u \in D_f$

teorema de Fermat

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ é função diferenciável em $c \in]a,b[$ ...
$\exists f'(c^-) = f'(c^+) = f'(c)$
... se c é um extremante local de f $\Rightarrow f'(c) = 0$
$A \Rightarrow B$, B é condição necessária de A

teorema de Rolle

f contínua em $[a,b]$
f diferenciável em $]a,b[$
$f(a) = f(b)$
então $\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$ ($\exists$ pelo menos um)

corolário do teorema de Rolle

f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$
(i) entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'
(ii) entre dois zeros consecutivos de f' existe no máximo um zero de f

teorema de Lagrange

f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$
então $\exists\, c \in]a,b[: f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

↳ tangente e secante têm mm declive
↳ reta que passa por dois pontos

condições suficientes p/ existência de extremo

f contínua em $\overline{D_f} \subseteq \mathbb{R}$
f diferenciável em $\overset{\text{interior}}{\operatorname{int}}(D_f)$
↳ exceto possivelmente em $c \in]a,b[$
então
(i) se $f'(x) < 0,\ \forall x \in]a,c[$ e $f'(x) > 0\ \forall x \in]c,b[$
c é um minimizante
(ii) se $f'(x) > 0,\ \forall x \in]a,c[$ e $f'(x) < 0\ \forall x \in]c,b[$
c é um maximizante

como estudar os extremos

(1) Pontos críticos de $f'(x)$ em $\operatorname{int}(D_f)$
• se $\exists\, c \in \operatorname{int}(D_f) : f'(c) = 0$ ou $f'(c) = \pm\infty$ ou $\nexists\, f'(c)$
↳ c é um ponto crítico
(2) Tabela de intervalos de monotonia
Teorema de Lagrange → condições suficientes

teorema de Cauchy

f e g contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$
se $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a,b[$
então $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

regra de Cauchy

página 3

nota
quando temos indeterminações do tipo 0^0, ∞^0 ou 1^∞

$$f^g = e^{\ln f^g} = e^{\underset{(0\times\infty)}{g \ln f}}$$

regra de Cauchy — f e g são diferenciáveis em...

(1) ... $]a,b[: \forall x \in]a,b[\quad g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$

se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$ $\underline{e}$ $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

então $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(2) ... $]a,b[: \forall x \in]a,b[, \ g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$

se $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$ $\underline{e}$ $\exists \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

então $\exists \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(3) ... $]a,b[: \forall x \in]a,b[\setminus \{c\} , \ g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$

se $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$ $\underline{e}$ $\exists \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

então $\exists \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(4) ... $]a; +\infty[: \forall x \in]a, +\infty[, \ g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$

se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$ $\underline{e}$ $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

então $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(5) ... $]-\infty; b[: \forall x \in]-\infty, b[, \ g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$

se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$ $\underline{e}$ $\exists \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

então $\exists \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

nota: $\lim\limits_{x \to X} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to X} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to X} f(x) = \lim\limits_{x \to X} g(x) = 0$ ou $\pm\infty$

$$\hookrightarrow \frac{\lim\limits_{x \to X} f(x)}{\lim\limits_{x \to X} g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ ou } \frac{-\infty}{-\infty}$$