Álgebra Linear e Geometria Analítica

Aplicações lineares

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Definição de aplicação linear

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços vetoriais reais.

Uma aplicação linear (ou transformação linear) de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ é uma função

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathcal{V} & \rightarrow & \mathcal{W} \\ & X & \mapsto & L(X) \end{array}$$

tal que

1. $L(X+Y) = L(X) + L(Y), \quad \forall\, X, Y \in \mathcal{V};$
2. $L(c\,X) = c\,L(X), \quad \forall\, c \in \mathbb{R}, \ \forall\, X \in \mathcal{V}.$

Se $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, então L diz-se um operador linear (ou endomorfismo) de $\mathcal{V}$.

Exemplos de aplicações lineares

1. A reflexão em relação ao eixo dos xx é dada pelo operador linear

$$L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}.$$

2. A aplicação derivada

$$L: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_n & \to & \mathcal{P}_{n-1} \\ p(x) & \mapsto & p'(x) \end{array}$$

   é uma aplicação linear.

3. A rotação em torno do eixo dos zz de ângulo θ é o operador linear

$$L: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta), z) \end{array}.$$

Teorema 1

Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então $L(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$.

Teorema 2

Se $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é uma aplicação então

$$L\left(c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k\right) = c_1 L(X_1) + \cdots + c_k L(X_k),$$

para quaisquer $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Corolário

Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear e $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$. Para $X \in \mathcal{V}$, tem-se que $L(X)$ é completamente determinado por $L(X_1), \ldots, L(X_n)$.

Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear.
Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, respetivamente.

Questão: Dado $X \in \mathcal{V}$, qual a relação entre $[X]_{\mathcal{S}}$ e $[L(X)]_{\mathcal{T}}$?

Exemplo Sejam

$$\mathcal{S} = ((1,1),(1,0)) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T} = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$$

bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que

$$L(1,1) = (2,3,1) \qquad \text{e} \qquad L(1,0) = (1,2,1).$$

Passo 1. Determinação de $L(X)$

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2) = x_2\,(1,1) + (x_1 - x_2)\,(1,0) \\ L(X) &= L(x_1, x_2) = x_2\,L(1,1) + (x_1 - x_2)\,L(1,0) \end{aligned}$$

Passo 2. Determinação de $[L(X)]_{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned}[L(X)]_{\mathcal{T}} &= x_2\,[L(1,1)]_{\mathcal{T}} + (x_1 - x_2)\,[L(1,0)]_{\mathcal{T}} \\ &= \underbrace{\left[\ [L(1,1)]_{\mathcal{T}} \mid [L(1,0)]_{\mathcal{T}}\ \right]}_{[L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{S}}}\end{aligned}$$

Portanto

$$[L(X)]_{\mathcal{T}} = [L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}}\,[X]_{\mathcal{S}}.$$

$[L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}} \rightarrow$ matriz representativa de L relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$

Passo 3. Determinação da matriz $[L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$

$$[L(1,1)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{pois} \quad L(1,1) = 0\,(1,0,1) + 2\,(1,1,0) + 1\,(0,1,1)$$

$$[L(1,0)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{pois} \quad L(1,0) = 0\,(1,0,1) + 1\,(1,1,0) + 1\,(0,1,1)$$

$$[L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição de matriz de uma aplicação linear

Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear,
$\mathcal{S} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{T}$ uma base de $\mathcal{W}$.

Matriz representativa de L relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$:

$$\boxed{[L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}} = \left[\ [L(X_1)]_{\mathcal{T}} \mid \quad \cdots \quad \mid [L(X_n)]_{\mathcal{T}}\ \right],}$$

matriz cujas colunas são os vetores das coordenadas na base $\mathcal{T}$ das imagens dos vetores da base $\mathcal{S}$.

Para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$\boxed{[L(X)]_{\mathcal{T}} = [L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}}\, [X]_{\mathcal{S}}.}$$

Núcleo e imagem de uma aplicação linear

Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. O núcleo de L é o conjunto

$$\ker(L) = \{X \in \mathcal{V} : \; L(X) = 0_{\mathcal{W}}\}.$$

Nota: $\ker(L) \neq \emptyset$ já que $0_{\mathcal{V}} \in \ker(L)$.

A imagem de L é o conjunto

$$\mathrm{im}(L) = \{Y \in \mathcal{W} \; : \; \exists \, X \in \mathcal{V} \text{ tal que } L(X) = Y\}$$

de todos os vetores Y de $\mathcal{W}$ que são imagem de algum vetor de $\mathcal{V}$.

Teorema 3: Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

- $\ker(L)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$;
- $\mathrm{im}(L)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{W}$.

Exemplos

1. Determinar $\ker(L)$ e $\mathrm{im}(L)$ para $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$L(x, y, z) = (x + y, x + y + z).$$

2. Determinar bases para $\ker(L)$ e $\mathrm{im}(L)$ de $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$L(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} X.$$

3. Dada A uma matriz $m \times n$ e L a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} L : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & X & \mapsto & L(X) = AX \end{array},$$

mostrar que $\ker(L) = \mathcal{N}(A)$ e $\mathrm{im}(L) = \mathcal{C}(A)$.

Aplicação linear injetiva e sobrejetiva

Recordar que uma função $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é injetiva se

$$\forall\, X_1, X_2 \in \mathcal{V}, \quad X_1 \neq X_2 \;\Rightarrow\; L(X_1) \neq L(X_2),$$

ou equivalentemente, $\forall\, X_1, X_2 \in \mathcal{V},\; L(X_1) = L(X_2) \;\Rightarrow\; X_1 = X_2$.

Teorema 4 Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Então

$$L \text{ é injetiva} \;\Leftrightarrow\; \ker(L) = \{0_{\mathcal{V}}\}.$$

Recordar que uma função $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é sobrejetiva se $\mathrm{im}(L) = \mathcal{W}$.

Teorema 5 Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear com $\dim(\mathcal{V})$ finita. Então

$$L \text{ é sobrejetiva} \;\Leftrightarrow\; \dim(\mathrm{im}(L)) = \dim(\mathcal{W}).$$

Núcleo e espaço nulo, imagem e espaço das colunas

Sejam $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\dim \mathcal{V} = n$, $\dim \mathcal{W} = m$,
$\mathcal{S}$ uma base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{T}$ uma base de $\mathcal{W}$ e $A = [L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ (matriz $m \times n$).

Considerando

$$\ker(L) = \{X \in \mathcal{V} : L(X) = 0_{\mathcal{W}}\} \text{ o núcleo de } L,$$
$$\mathcal{N}(A) = \{\overline{X} \in \mathbb{R}^n : A\overline{X} = 0_{\mathbb{R}^m}\} \text{ o espaço nulo de } A,$$

e

$$\mathrm{im}(L) = \{Y \in \mathcal{W} : \exists X \in \mathcal{V},\ L(X) = Y\} \text{ a imagem de } L,$$
$$\mathcal{C}(A) = \{\overline{Y} \in \mathbb{R}^m : \exists \overline{X} \in \mathbb{R}^n,\ A\overline{X} = \overline{Y}\} \text{ o espaço das colunas de } A,$$

verifica-se que

$$X \in \ker(L) \;\Leftrightarrow\; [X]_{\mathcal{S}} \in \mathcal{N}(A) \qquad \text{e} \qquad Y \in \mathrm{im}(L) \;\Leftrightarrow\; [Y]_{\mathcal{T}} \in \mathcal{C}(A).$$

Teorema das dimensões

Teorema 6 (Teorema das dimensões)
Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear com $\dim(\mathcal{W})$ finita. Então

$$\dim(\ker(L)) + \dim(\mathrm{im}(L)) \;=\; \dim \mathcal{V}.$$

Corolário
Seja $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear com $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ finita. Então

$$L \text{ é injetiva} \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ é sobrejetiva}.$$

Isomorfismo e invertibilidade

Um isomorfismo é uma aplicação linear injetiva e sobrejetiva.

Seja

$L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = n$,

$\mathcal{S}$ uma base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{T}$ uma base de $\mathcal{W}$,

$A = [L]_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ (matriz $n \times n$).

Então

$$L \text{ é isomorfismo } \Leftrightarrow A \text{ é invertível.}$$

Se L é um isomorfismo, então L é invertível e $L^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ é uma aplicação linear:

$$A^{-1} = [L^{-1}]_{\mathcal{T},\mathcal{S}}.$$