CÁLCULO 2

EDO's de Bernoulli

Se a EDO se pode escrever na forma:

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha = 0 \Rightarrow y' + a(x)y = b(x) \longrightarrow$ EDO Linear 1ª ordem

Se $\alpha = 1 \Rightarrow y' + a(x)y = b(x)y$

$\Leftrightarrow y' + (a(x) - b(x))y = 0 \longrightarrow$ EDO Linear de 1ª ordem homogénea

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$ permite transformar a EDO de Bernoulli em uma EDO Linear 1º ordem.

Se consideramos $z = y^{1-\alpha}$ então $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

Para conseguirmos fazer a mudança de variável na EDO temos de a manipular, fazendo surgir estas expressões.

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}$$

1º Passo: multiplicar tudo por $y^{-\alpha}$

$$\Leftrightarrow y^{-\alpha}y' + a(x)\,y\,y^{-\alpha} = b(x)\,y^{\alpha}y^{-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow y^{-\alpha}y' + a(x)\,y^{1-\alpha} = b(x)$$

2º passo: Multiplicar tudo por $(1-\alpha)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(1-\alpha)y^{-\alpha}y'}_{z'} + (1-\alpha)a(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)b(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)}_{\text{EDO Linear 1º ordem}}$$

3º passo: Encontrar o integral geral da EDO Linear de 1º ordem.

4º passo: Mudança de variável inversa: $z = y^{1-\alpha}$

Exemplo: $xy' + y = y^2 \ln x \quad x > 0 \qquad \alpha = 2$

1º passo $\times y^{-2}$

$$xy^{-2}y' + yy^{-2} = y^2y^{-2}\ln x$$

2º passo $\times(-1)$

$$-xy^{-2}y' - y^{-1} = -\ln(x)$$

Mud. Variável

$$xz' - z = -\ln(x)$$

Mud. Variável:

$z = y^{-1}$

$z' = -1y^{-2}y'$

$y^{-\alpha} = y^{-2}$

$(1-\alpha) = -1$

3º passo: $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x}\ln(x)$

fator integrante: $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z}_{} = -\frac{1}{x^2}\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}z\right)' = -\frac{1}{x^2}\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}z = \int -\frac{1}{x^2}\ln(x)\,dx$$

integração por partes

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}z = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z = \ln(x) + 1 + Cx, \quad C \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{Integral geral EDO Linear}$$

4º passo:

$$\Leftrightarrow y^{-1} = \ln(x) + 1 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln(x) + 1 + Cx}, \quad C \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{Integral geral EDO de Bernoulli}$$

EXERCÍCIOS:

1. $y' - xy = xy^3$
2. $y' - y = e^x y^2$
3. $xy' - (1+x)y = xy^2$
4. $x^2y' + y^2 = xy$
5. $x^2y' - 2xy = 3y^4$
6. $y' + x^2y = e^{x^3}\frac{y^4}{3}, \quad y(0) = \frac{1}{2}$
7. $6x^2y^3 + (1-x)y + 2xy' = 0$
8. $y' = y + e^{-3x}y^4$
9. $2x^3y' = y^3 + 3x^2y$
10. $x^3y' = 2y(\sqrt[3]{y} + 3x^2)$
11. $y' = 5y - \frac{4x}{y}$
12. $y' = y - y^3$
13. $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$
14. $y' = y - y^2$