Álgebra Linear e Geometria Analítica

Espaços Vetoriais

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Definição de espaço vetorial real

O conjunto $\mathcal{V}$, munido das operações $\oplus$ (adição) e $\odot$ (multiplicação por escalar real), é um espaço vetorial (e.v.) real se, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\oplus$ $\qquad X \oplus Y \in \mathcal{V}$
2. $\oplus$ é comutativa $\qquad X \oplus Y = Y \oplus X$
3. $\oplus$ é associativa $\qquad (X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$
4. existe (único) o el. neutro $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ (zero de $\mathcal{V}$) para $\oplus$ $\qquad 0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$
5. existe (único) o simétrico $\ominus X \in \mathcal{V}$ de X em relação a $\oplus$ $\qquad \ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$
6. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\odot$ $\qquad \alpha \odot X \in \mathcal{V}$
7. $\odot$ é distributiva em relação a $\oplus$ $\qquad \alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$
8. $\odot$ é "distributiva" em relação a $+$ $\qquad (\alpha+\beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$
9. os produtos (o de $\mathbb{R}$ e $\odot$) são "associativos" $\qquad (\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$
10. o escalar 1 é o "elemento neutro" para $\odot$ $\qquad 1 \odot X = X$

Exemplos de espaços vetoriais reais

1. $\mathbb{R}^n$ munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.

2. $\mathbb{R}^+$ munido das operações:
$$x \oplus y = xy \qquad \text{e} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha, \qquad\qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. O conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ das matrizes $m \times n$ munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

4. O conjunto de todas as funções reais de variável real munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.

5. Os conjuntos $\mathcal{P}$ de todos os polinómios (de qualquer grau) e $\mathcal{P}_n$ dos polinómios de grau menor ou igual a n com as operações usuais.

<u>Não</u> é e.v. o conjunto dos polinómios de grau n com as operações usuais.

Propriedades básicas de um espaço vetorial real

Proposição: Seja $\mathcal{V}$ um e.v. real. Então

(a) $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$;

(b) $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}} \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ ou $X = 0_{\mathcal{V}}$;

(d) $(-1) \odot X = \ominus X$ é o simétrico de X em relação a $\oplus$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$.

Daqui em diante, escreve-se:

i. $X + Y$ em vez de $X \oplus Y$, para $X, Y \in \mathcal{V}$;

ii. αX em vez de $\alpha \odot X$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{V}$;

iii. $-X$ em vez de $\ominus X$, para $X \in \mathcal{V}$.

Subespaço vetorial

O subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço (vetorial) do e.v. real $\mathcal{V}$ se, munido das mesmas operações de $\mathcal{V}$, for ele próprio um e.v. real.

Teorema: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço (vetorial) do e.v. real $\mathcal{V}$ se e só se

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
2. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à adição de $\mathcal{V}$;
3. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à multiplicação por escalar de $\mathcal{V}$.

Proposição: Se $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathcal{V}$, então $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$.
Corolário: Se $0_{\mathcal{V}} \notin \mathcal{S}$, então $\mathcal{S}$ não é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Exemplos:
- $\mathcal{V}$ e $\{0_{\mathcal{V}}\}$ são os subespaços triviais de $\mathcal{V}$;
- $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;
- $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$;
- $\mathcal{N}(A)$, o espaço nulo da matriz A $m \times n$, é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Espaço gerado

Dados os vetores $X_1, \ldots, X_k$ de $\mathcal{V}$ e os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, o vetor $X \in \mathcal{V}$ tal que

$$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$$

é uma combinação linear dos vetores $X_1, \ldots, X_k$.

Seja $K = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$. Chama-se espaço gerado por K ao conjunto

$$S = \langle K \rangle = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle = \{X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k : \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

formado por todas as combinações lineares de $X_1, \ldots, X_k$. Diz-se também que K gera $\mathcal{S}$ ou é um conjunto gerador de $\mathcal{S}$.

Exercício: Confirme que $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.

Exemplo: Dados os vetores não colineares $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

1. $\langle X_1 \rangle$ é a reta que passa pela origem e tem vetor director X_1;
2. $\langle X_1, X_2 \rangle$ é o plano que passa pela origem e que contém X_1 e X_2.

Espaço das linhas e das colunas de uma matriz

A matriz $m \times n$ $A = \begin{bmatrix} {L_1}^T \\ \vdots \\ {L_m}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$ tem linhas $L_1, \ldots, L_m \in \mathbb{R}^n$ e colunas $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}^m$. Logo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A são os subespaços de $\mathbb{R}^n$ e, respetivamente, $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}(A) = \langle L_1, \ldots, L_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Lema: Dados $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, com $i \neq j$,

i. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle$;

ii. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, \alpha X_i, \ldots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

iii. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_i + \beta X_j, \ldots, X_k \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}$.

É claro que $\mathcal{C}(A)$ é $\mathcal{L}(A^T)$.

Teorema: Se as matrizes A e B são equivalentes por linhas, $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$.

Observa-se que

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{C}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \; B = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_n C_n \\ &\Leftrightarrow \quad AX = B \; \text{ é um sistema possível,} \end{aligned}$$

visto que para $X = [\alpha_1 \; \cdots \; \alpha_n]^T$ se tem

$$AX = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_n C_n$$

(vide exercício 13 da Folha Prática 1) .

Independência linear

$\mathcal{K}=\{X_1,\ldots,X_k\}\subseteq\mathcal{V}$ é linearmente independente (l.i.) no e.v. real $\mathcal{V}$ se

$$\alpha_1 X_1+\cdots+\alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}} \qquad \Rightarrow \quad \alpha_1=\cdots=\alpha_k=0.$$

Caso contrário, $\mathcal{K}$ é linearmente dependente (l.d.) em $\mathcal{V}$, ou seja,

- existem $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\alpha_1 X_1+\cdots+\alpha_k X_k=0_{\mathcal{V}}$;
- existe $X\in\mathcal{K}$ tal que X é combinação linear dos vetores de $\mathcal{K}\backslash\{X\}$.

Nota: $0_{\mathcal{V}}\in\mathcal{K} \ \Rightarrow\ \mathcal{K}$ é linearmente dependente.

Exemplos:

- Dois vetores não nulos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ são colineares se e só se são l.d.
- Três vetores não colineares de $\mathbb{R}^3$ definem um plano se e só se são l.d.

Geradores e independência linear

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. real, $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{S} = \langle K \rangle$.

Lema: Seja $X \in \mathcal{K}$. Então, as afirmações são equivalentes:

1. X é combinação linear dos vetores de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$;

2. $\mathcal{S}$ é gerado por $\mathcal{K} \setminus \{X\}$.

Teorema: $\mathcal{K}$ é um conjunto linearmente

- dependente $\iff$ existe $X \in \mathcal{K}$ que satisfaz 1. ou 2. do lema anterior;
- independente $\iff$ para cada $X \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$, o conjunto $\mathcal{K} \cup \{X\}$ é l.i.

Corolário:

- Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ e não é l.i., o conjunto obtido retirando um oportuno elemento de $\mathcal{K}$ ainda é gerador de $\mathcal{V}$.
- Se $\mathcal{K}$ é l.i. e não gera $\mathcal{V}$, é possível acrescentar um oportuno elemento a $\mathcal{K}$ mantendo a independência linear.

Base de um espaço vetorial

Uma base de um e.v. $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um conjunto (a) l.i. e (b) gerador de $\mathcal{V}$.

Nota: • Por convenção, o e.v. trivial $\{0_{\mathcal{V}}\}$ tem como base o conjunto vazio.
• Um conjunto l.i. é base do espaço por ele gerado.

Exemplos:

1. Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Então $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$.

2. Seja E_{ij} a matriz $m \times n$ que tem a entrada (i, j) igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Então $\mathcal{C}_{m\times n} = \{E_{ij} : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{m\times n}$.

3. A base canónica do e.v. $\mathcal{P}_n$ dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n é $\mathcal{P}_n = \{1, x, \ldots, x^n\}$. O e.v. $\mathcal{P}$ de todos os polinómios não admite uma base com um número finito de elementos.

Base de um espaço vetorial

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. real e $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Proposição:

- Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$, então qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode escrever-se como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$, de pelo menos uma maneira.
- Se $\mathcal{K}$ é l.i., então qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode escrever-se como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$, de no máximo uma maneira.

Proposição: Se $\mathcal{K}$ é uma base de $\mathcal{V}$, então cada vetor de $\mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$.

Dimensão de um espaço vetorial

Teorema: $\mathcal{V}$ tem uma base de n elementos e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ contém r vetores.

i. $\mathcal{K}$ l.i. $\Rightarrow$ $r \leq n$ (ou seja, $r > n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ linearmente dependente)
Neste caso, existe uma base de $\mathcal{V}$ que contém $\mathcal{K}$.

ii. $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $r \geq n$ (ou seja, $r < n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ não gera $\mathcal{V}$)
Neste caso, existe um subconjunto de $\mathcal{K}$ que é uma base de $\mathcal{V}$.

Corolário: Duas bases de $\mathcal{V}$ possuem o mesmo número de elementos.

A dimensão de $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V}$, é o número de elementos de qualquer base dele.

Exemplos: $\dim\{0_{\mathcal{V}}\} = 0$, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$ e $\dim \mathcal{P}_n = n+1$.

Teorema: Se $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathcal{V}$ e $\dim \mathcal{V} = n$, então

i. $\mathcal{K}$ l.i. $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ é base de $\mathcal{V}$;

ii. $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ é base de $\mathcal{V}$.

Exemplo – Espaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo A_e e A_r as formas escalonada e, respetivamente, reduzida de A.

Teorema: As linhas não nulas de A_e e A_r formam bases de $\mathcal{L}(A)$.

Seja $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Então, $X \in \mathcal{N}(A) \iff AX = 0 \iff A_r X = 0 \iff$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \iff X = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Os vetores na combinação linear de X (N_2 e N_4) são uma base de $\mathcal{N}(A)$.
Teorema: Assim, chamando nulidade de A, $\mathrm{nul}(A)$, à dimensão do espaço nulo, tem-se $\dim \mathcal{N}(A) = \mathrm{nul}(A) = \mathrm{n}^o$ de inc. livres do sistema $AX = 0$.

Exemplo – Espaço $\mathcal{C}(A)$

$B=(a,b,c)\in\mathcal{C}(A) \iff$ o sistema $AX=B$ é possível. Logo, sendo $[A|B]=$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & a \\ 2 & -4 & -7 & 5 & b \\ 1 & -2 & -3 & 2 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right],\ B\in\mathcal{C}(A) \iff a-b+c=0.$$

Assim, $\mathcal{C}(A) = \langle (1,1,0), (-1,0,1)\rangle$.
Mas, ainda podemos usar o resultado:

Teorema: $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A)$ (coincidente com $\operatorname{car}(A)$) e as colunas de A que correspondem às colunas dos pivots da sua forma escalonada, formam uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Assim, as colunas 1 e 3 de A são l.i. e $\mathcal{C}(A)=\langle (1,2,1), (-4,-7,-3)\rangle$.
Nota: Se A é $m\times n$, $\operatorname{car}(A)+\operatorname{nul}(A)=n$.
Corolários: • A característica de uma matriz é o máximo número de linhas (colunas) l.i.
• Uma matriz quadrada é invertível se e só se o conjunto das suas linhas (colunas) é l.i.

Coordenadas de um vetor numa base

Seja $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base ordenada de um e.v. $\mathcal{V}$.

Teorema: Cada vetor $X \in \mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, ou seja, existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n.$$

Estes coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ dizem-se as coordenadas de X na base $\mathcal{B}$.

O vetor das coordenadas de X na base $\mathcal{B}$ é $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Exemplo: Verifique que, relativamente à base $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,2)\big)$,

$$[(0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [(1,-1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Mudança de base

Nota: Para $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{V}$, $\mathcal{S}$ base ordenada de $\mathcal{V}$ e $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$,

$$[a_1 Y_1 + \cdots + a_r Y_r]_{\mathcal{S}} = a_1[Y_1]_{\mathcal{S}} + \cdots + a_r[Y_r]_{\mathcal{S}}.$$

Sejam $\mathcal{S}$, $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e $X \in \mathcal{V}$.
Qual a relação entre $[X]_{\mathcal{S}}$ e $[X]_{\mathcal{T}}$?

$$[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = a_1 Y_1 + \cdots + a_n Y_n$$

$$\Rightarrow \quad [X]_{\mathcal{S}} = a_1[Y_1]_{\mathcal{S}} + \cdots + a_n[Y_n]_{\mathcal{S}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \cdots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}$$

Matriz de mudança de base

Teorema: Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$.

Para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$\boxed{[X]_{\mathcal{S}} = M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}\,[X]_{\mathcal{T}}}$$

onde

$$\boxed{M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}} = \left[\,[Y_1]_{\mathcal{S}} \quad \cdots \quad [Y_n]_{\mathcal{S}}\right]}$$

é a Matriz de mudança de base de $\mathcal{T}$ para $\mathcal{S}$

cujas colunas são os vetores das
coordenadas na base $\mathcal{S}$ dos elementos da base $\mathcal{T}$

Sejam $\mathcal{S} = \big((1,1),(1,2)\big)$ e $\mathcal{T} = \big((0,1),(1,-1)\big)$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

Dado $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, tem-se que

$$X = a\,(0,1) + b\,(1,-1).$$

Logo, $[X]_{\mathcal{S}} = a[(0,1)]_{\mathcal{S}} + b[(1,-1)]_{\mathcal{S}}$. Pelo exemplo anterior,

$$[(0,1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [(1,-1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

então

$$[X]_{\mathcal{S}} = a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}.$$

Invertibilidade de uma matriz de mudança de base

Teorema: Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ duas bases de $\mathcal{V}$. Então $M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}$ é invertível e

$$M_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{T}}^{-1} = M_{\mathcal{T}\leftarrow\mathcal{S}}.$$