Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

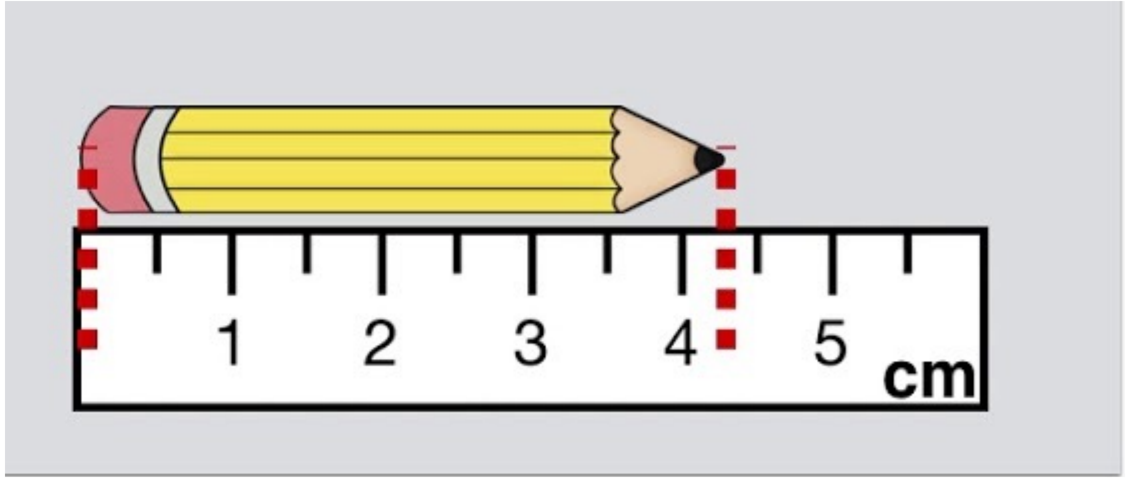
1ª aula Prática

Sumário:

Resolução de problemas sobre o cap. 1

Bibliografia:
Serway, cap. 1
Sorenssen, cap. 3

Observação e medição



Registo de uma quantidade usando só uma medição:

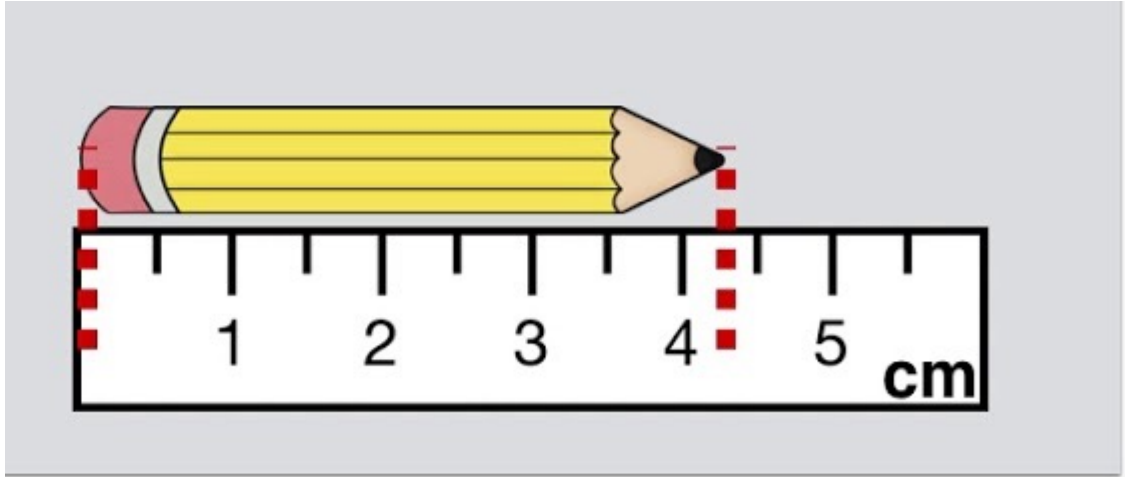
O valor da medição de uma quantidade (como também a representação digital de um número real) está sempre afetado de uma incerteza,

À quantidade que se mede, na figura o comprimento do lápis, c,
associamos ao valor que melhor se estima, $\bar{c}$, um outro valor, Δc, chamado erro ou indeterminação,
Tal que se tem a certeza que o comprimento está entre $\bar{c} - \Delta c$ e $\bar{c} + \Delta c$

Pela figura tem-se a certeza que $4{,}0 \text{ cm} < c < 4{,}5 \text{ cm}$
E pode-se considerar $\bar{c} = 4{,}25 \text{ cm}$ e $\Delta c = 0{,}25 \text{ cm}$

O comprimento do lápis indica-se $c = 4{,}3 \pm 0{,}3 \text{ cm}$

Observação e medição

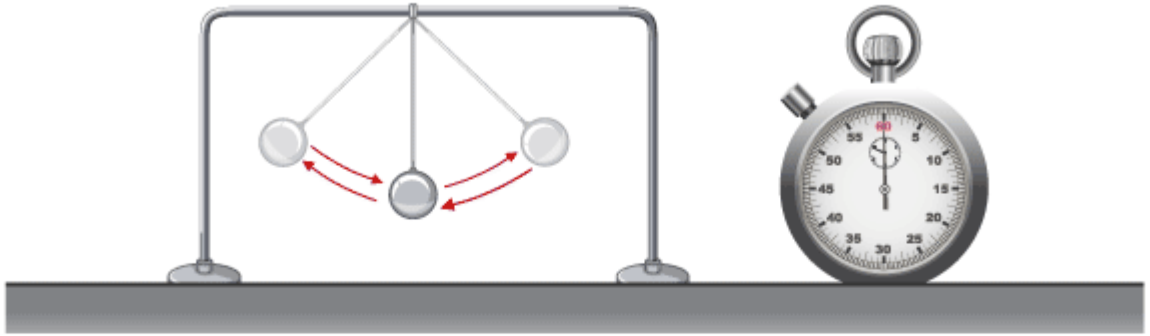


Este erro é considerado um exemplo de um erro de leitura ou instrumental.

Instrumentos de escala contínua: O erro é metade da menor divisão da escala

Instrumentos de escala digital: O erro é uma divisão da escala.

Observação e medição



Registo de uma quantidade usando 10 ou mais medições:
Cada vez que se mede o tempo de uma oscilação completa (período, T) obtêm-se um valor diferente.

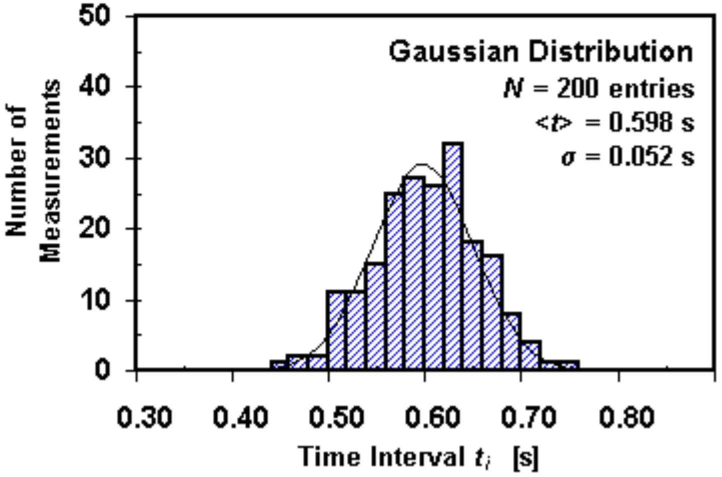
A melhor estimativa do período é o valor médio $\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i$

O desvio padrão indica a variação em cada medição: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(T_i - \bar{T})^2}$

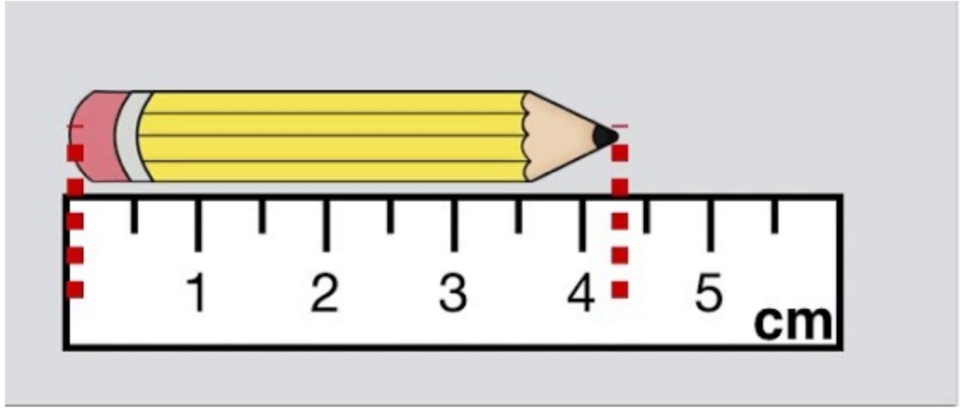
O erro na media diminuia com o número de medições: $S = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Este é um erro de observação

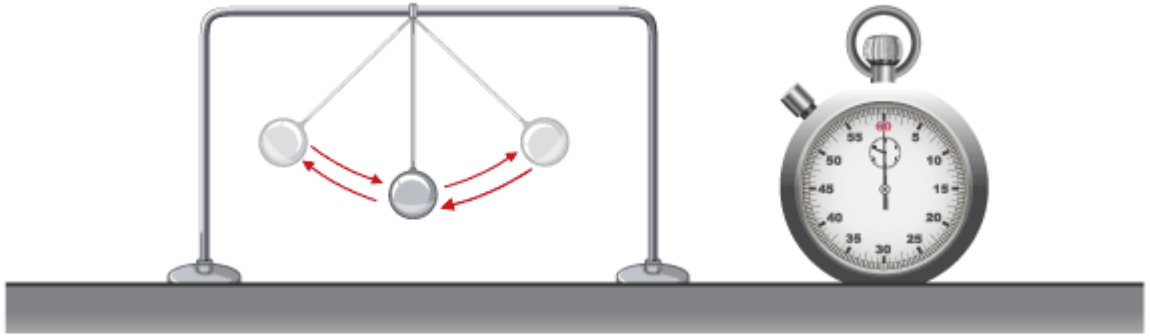
Então o valor do período indica-se por $T = \bar{T} \pm s$



Observação e medição



Erro de leitura

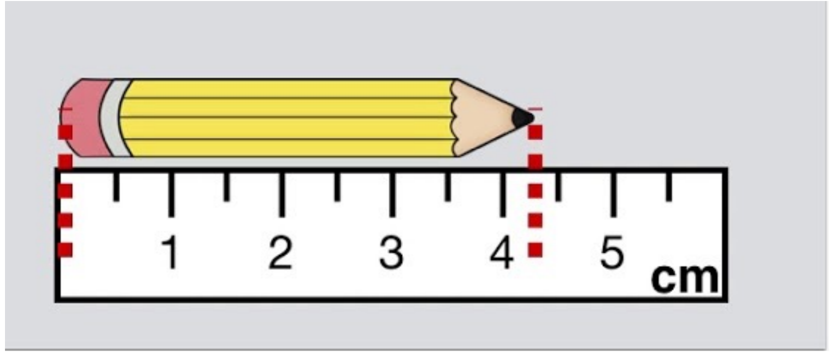


Erro de observação

Os erros de leitura e os erros de observação são independentes.

Como erro a associar ao valor, toma-se como erro o maior destes dois erros.

Observação e medição



Precisão e Exatidão:

Precisão mede o grau de variação da medição obtido na experiência.

$$\text{erro relativo} = \left|\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right|$$

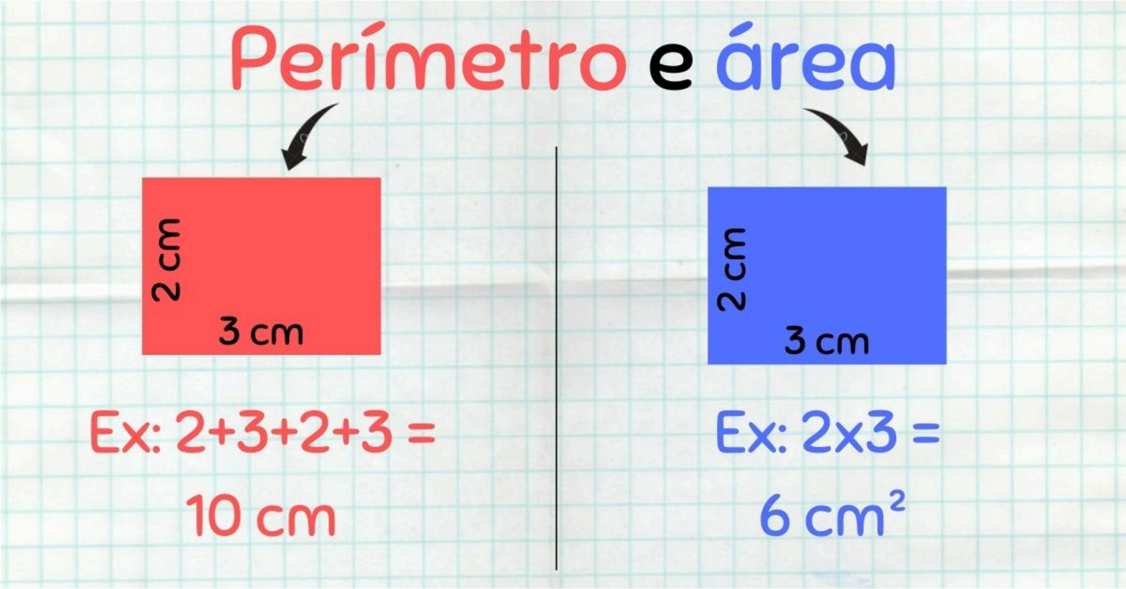
A precisão é tanto maior quanto o erro relativo for menor.

Exatidão mede a proximidade do valor medido e do valor correto.

Quanto menor for a diferença entre estes últimos dois valores maior é a exatidão.

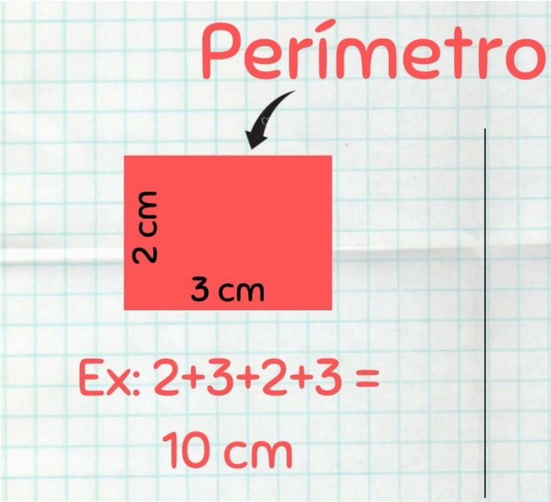
Precisão e Exatidão são dois conceitos diferentes.

Observação e medição



Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas?
Exemplo: O perímetro e a área de um retângulo?

Observação e medição



Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas?

Adição de duas parcelas: largura, L, e profundidade, P,

$$S = L + P$$

Em que $L = 3{,}0 \pm 0{,}1$ cm

$P = 2{,}0 \pm 0{,}1$ cm

$$S = 5{,}0 \text{ cm} \;\; \text{mas } \Delta S?$$

O valor mínimo de $S = 5{,}0 \, - (\Delta L + \Delta P)$

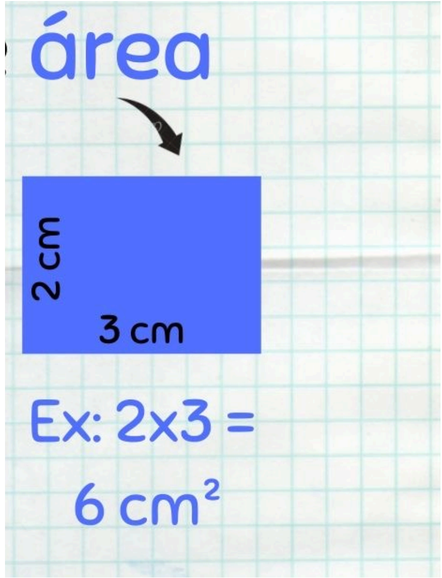
O valor máximo de $S = 5{,}0 + (\Delta L + \Delta P)$

$$\Delta S = \Delta L + \Delta P$$

O mesmo de a subtração de duas parcelas, $D = L - P$

$$\Delta D = \Delta L + \Delta P$$

Observação e medição



Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas?
E o produto de 2 quantidades? Exemplo, a área do retângulo?

$$A = L \times P$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \left|\frac{\Delta L}{L}\right| + \left|\frac{\Delta P}{P}\right|$$

Igual expressão para a divisão de duas quantidades.

Geral: $F = F(x, y, \cdots)$ $\qquad \Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \Delta y + \cdots$

Observação e medição

Derivada Total ($\frac{d}{dx}$) da função $f(x) = 4x^2$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = 8x$$

Derivada Parcial ($\frac{\partial}{\partial x}$) da função $g(x, y) = 4x^2 y$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x + \delta x, y) - g(x, y)}{\delta x} = 8xy$$

na derivada parcial é como se as outras variáveis (neste caso y) fossem constantes (não variam na definição de derivada parcial)

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 4x^2$$

Observação e medição

Problema cap 1

3. Encontre as derivadas parciais das funções

$$h(x,y) = 8x + 10x^2y + y^2$$

e

$$p(x,y,z) = -4xy + 10x^2yz + y^2 + yz$$

a) $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$

b) $\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}$

c) $\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}$

Observação e medição

Problema cap 1

1. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 25 \pm 1 \text{ cm}$$
$$Q = 10 \pm 1 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades $S = P + Q$

b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = P - Q$

c) Calcule o produto das duas quantidades $M = P\,Q$

Observação e medição

Problema cap 1

2. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 15.2 \pm 0.1 \text{ cm}$$
$$Q = 14.9 \pm 0.3 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades $S = P + Q$

b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = P - Q$

c) Calcule o erro relativo da diferença D

Observação e medição

Algarismos Significativos de uma quantidade
São os algarismos que se conhecem com certeza (100%) mais o 1º algarismo que é afetado pelo erro

Ex: Comprimento

a) $4{,}10\ \pm 0{,}02\ \text{m}$ possui 3 algarismos significativos (o erro afeta as centésimas)

b) $4{,}100\ \pm 0{,}02\ \text{m}$ possui 3 algarismos significativos (o erro afeta as centésimas)

c) $4{,}100\ \pm 0{,}2\ \text{m}$ possui 2 algarismos significativos (o erro afeta as décimas)

Permite escrever os valores de um modo mais simples: Escrever só os algarismos significativos

a) 4,10 m possui 3 algarismos significativos
b) 4,10 m possui 3 algarismos significativos
c) 4,1 m possui 2 algarismos significativos

Em Física $4{,}10\ \text{m} \neq 4{,}1\ \text{m}$

Serway, 1.6; Sorenssen, 3.3

Observação e medição

Operações

Produto e divisão: O resultado da operação deve apresentar o número de algarismos significativos igual ao menor dos fatores

ex: Círculo de raio $r = 6{,}0 \ \pm 0{,}1$ cm

de área $A = \pi \times (6{,}0 \text{ cm})^2 = 113{,}097 \cdots \text{ cm}^2$

<u>apresenta-se com 2 algarismos significativos</u>

$$A = \pi \times (6{,}0 \text{ cm})^2 = 1.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$$

Adição e subtração: O resultado da operação deve apresentar o número de casas decimais igual ao menor número de casa decimais das parcelas.

ex: $23{,}2 + 5{,}174 = 28{,}4$

$3{,}4 + 10 = 13$

$1{,}0001 + 0{,}0003 = 1{,}0004$

$1{,}002 - 0{,}998 = 0{,}004$

Cálculos intermédios fazem-se com os todos os algarismos (na máquina de calcular ou computador)

Observação e medição

Problema cap 1

2. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 15.2 \pm 0.1 \text{ cm}$$
$$Q = 14.9 \pm 0.3 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades $S = P + Q$

b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = P - Q$

c) Calcule o erro relativo da diferença D

Observação e medição

Problema cap 1

4. Um carro americano segue à velocidade de 85,0 milhas/hora. Passa por uma estrada com o limite de velocidade 50 km/h. Está o carro a exceder o limite de velocidade?
Note: 1 milha = 1609 m

Observação e medição

Problema cap 1

4. Um carro americano segue à velocidade de 85,0 mil has/hora. Passa por uma estrada com o limite de velocidade 50 km/h. Está o carro a exceder o limite de velocidade? Expresse a velocidade do carro em m/s?
Note: 1 milha = 1609 m

Resolução:

85.0 milhas / hora =

$$85.0\,\frac{\text{milhas}}{\text{hora}} = \frac{85.0 \times 1609\ \text{m}}{\text{hora}} = \frac{136765\ \text{m}}{\text{hora}} = 137 \times 10^3\ \text{m} = 137\ \text{km}$$

$$85.0\,\frac{\text{milhas}}{\text{hora}} = \frac{85.0 \times 1609\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 38.0\ \text{m/s}$$

Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Quando se tem um conjunto x, y de N medições, o método dos mínimos quadráticos oferece o ajuste linear que apresenta a menor diferença entre os valores medidos e os estimados por uma reta $y = m\,x + b$. Se se considerar que os erros que afetam os valores de y são iguais, as expressões que o método fornece são:

$$m = \frac{N\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2\ \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$r^2 = \frac{\left(N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}{\left[N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]\ \left[N \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}$$

$$\Delta m = |m| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}} \qquad \Delta b = \Delta m \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}.$$

O coeficiente de determinação r^2 é tal que quando ~1 indica um ótimo ajuste, enquanto que ~ 0 indica que o modelo não é linear.

Escreva um programa em python que calcule as quantidades anteriores.

Problema cap 1.5 **Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos**

Escreva um programa em python que calcule as quantidades anteriores. Como teste ao programa escrito, compare os seus resultados com os de um problema conhecido, indicado na tabela abaixo,

L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

Com os valores

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 2322.4; \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1286.0 \,; \sum_{i=1}^{N} y_i = 13.5;$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 221719.5; \sum_{i=1}^{N} y_i^2 = 24.33;$$

$$m = 0.01015505 \,; \, \Delta m = 0.000162973$$

$$b = 0.05507544; \, \Delta b = 0.02713077$$

$$r^2 = 0.99845714$$

Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

a) Comece por representar os dados experimentais num gráfico.

b) Calcular as somas das expressões acima.

c) De seguida calcule o declive, a ordenada na origem e o coeficiente de determinação ou de correlação r^2.

d) faça um gráfico com os pontos experimentais e a reta cujos parâmetros *m* e *b* calculou anteriormente.

e) Encontre o valor de X, quando $L = 165.0$ cm. Use a reta determinada pela regressão linear.

f) Afaste da reta encontrada um dos valores medidos de y. Compare o coeficiente de determinação com o valor anterior. Faça um gráfico com os novos pontos experimentais e a nova reta.

Nota: os valores da tabela acima são as medições realizadas numa experiência de difração por uma dupla fenda de um feixe de luz, em que L é a distância da dupla fenda ao alvo e X a distância entre máximos luminosos consecutivos da figura de difração.