Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Exame - Resolução
Parte Cálculo Analítico

Data: 6 julho 2022
Hora: 14H30

Duração: 1 hora e 15 minutos
Disciplina: 41769

Salas: 23.3.15

Cotação: 1) 0.5 + 1 + 1 = 2.5 valores
2) 0.5 + 1 + 1 = 2.5 valores
3) 1 = 1 valores
4) 1 = 1 valores
5) 0.5 + 0.5 + 1 + 1 = 3 valores

Só é permitido o uso de máquina de calcular científica

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Foram medidos três comprimentos:

$T = 25.3 \pm 0.2$ cm

$R = 10.0 \pm 0.1$ cm

$S = 5.0 \pm 0.2$ cm

a) Calcule a soma das duas quantidades $A = T + R$

b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = T - S$

c) Calcule a razão $r = T/R$.

Resolução resumida

a) $A = 35.3 \pm 0.3$ cm

b) $D = 20.3 \pm 0.4$ cm

c) $r = 2.53$ sem o erro

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right| = \left|\frac{\Delta T}{T}\right| + \left|\frac{\Delta R}{R}\right| \qquad \Delta r = 0.0453$$

e $r = 2.53 + 0.05$ com o erro arredondado por excesso.

2. Considere um espaço a 3 dimensões. Neste espaço o vetor $\vec{a}$ está no plano OXY, tem comprimento 3 m e faz um ângulo 30º com o eixo dos XX.

a) Determine as componentes do vetor $\vec{a}$.

b) Encontre o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o vetor $\vec{b} = (1,0,-1)$.

c) Encontre um vetor que seja perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Resolução resumida

a)

$$\begin{cases} a_x = |\vec{a}| \cos 30^0 \\ a_y = |\vec{a}| \sin 30^0 \\ a_z = 0. \end{cases}$$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}| \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\,\sqrt{2} \cos\theta = 2.598$$

$\cos\theta = \frac{2.598}{3\,\sqrt{2}}$ e,

$$\theta = arc\cos\frac{2.598}{3\,\sqrt{2}} = 60^0$$

c) $\vec{v}$ vetor perp. a $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2.598 & 1.5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.5\,\hat{\imath} + 2.598\,\hat{\jmath} - 1.5\,\hat{k} \text{ m}^2$$

3. O integral definido de uma função definida desde a até b

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Pode ser calculado aproximadamente pela aproximação retangular, onde se faz:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = f(x_{i+1})\,\delta x$$

onde $\delta x = (b-a)/n$ e n um número inteiro.

Determine como varia o erro local do integral I em função do passo δx?

Resolução resumida

Erro de truncatura (local) da aproximação retangular:

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right)_{exato} - \left(f(x_{i+1})\,\delta x \; \right)_{ap.\ retangular} \right|$$

A função $f(x)$ pela série de Taylor à volta de x_{i+1}

$$f(x) = f(x_{i+1}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1}) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 + \sigma((x - x_{i+1})^3)$$

Subst. no integral temos

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_{i+1}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1}) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 + \sigma((x - x_{i+1})^3) \right] dx$$

$$= f(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i) - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \sigma((x_{i+1} - x_i)^3)$$

$= f(x_{i+1})\,\delta x - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3)$Subst. no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right)_{exato} - \left(f(x_{i+1})\,\delta x \; \right)_{ap.\ retangular} \right|$$

$$= \left| f(x_{i+1})\,\delta x - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3) - (f(x_{i+1})\,\delta x\,) \right| = \sigma(\delta x^2)$$

O erro de truncatura de um integral de uma fatia é da $\sigma(\delta x^2)$.

O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é o acumular dos erros locais

$$n\,\sigma(\delta x^2) = \frac{b-a}{\delta x}\,\sigma(\delta x^2) = \sigma(\delta x).$$

É da ordem de grandeza de δx.

4. Considere um corpo de massa 2 kg com a energia potencial $E_p = \frac{1}{2}k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2$, em que x_{eq} é a posição de equilíbrio e k uma constante. Determine a força aplicada ao corpo em função de x, k e x_{eq}.

Resolução resumida:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$F_x = -\frac{1}{2}\,k\,2\,\left(x^2 - x_{eq}^2\right)x$$

$$F_x = -k\,x\,\left(x^2 - x_{eq}^2\right)$$

5. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo, em que A e B são constantes.

b) Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

c) Calcule A e B , no caso em que a velocidade inicial é -2 m/s e a posição inicial a posição de equilíbrio do sistema.

d) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo. Mantêm-se constante ao longo do tempo?

Resolução resumida

a) Eq. de Newton $\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$, uma vez que $F_x = -k\,x$,

a ser satisfeita se $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

for solução

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left[A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] = -\frac{k}{m}\,x(t)$$

Ou $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\ x(t)$

E como queríamos demonstrar $m\ \frac{d^2x}{dt^2} = -k\ x(t)$

b) $v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \left[-A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$

c) $\begin{cases} t = 0 \\ v_x(t=0) = -2\ \text{m/s} \\ x(t=0) = x_{eq} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ [-A\sin(\ 0\ ) + B\cos(\ 0)] \\ 0 = A\cos(\ 0\ ) + B\sin(\ 0\ ) \end{cases}$

$$\begin{cases} -2 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \ B \\ 0 = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -2\sqrt{\frac{m}{k}} = -2\ \text{m} \\ A = 0 \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} x(t) = -2\sin t \\ v_x(t) = -2\cos t \end{cases}$$

d) Energia mecânica

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\ v_x^2 + \frac{1}{2}k\ x^2$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\ 4\ \cos^2 t + \frac{1}{2}4\ \sin^2 t = 2\ \text{J}$$: constante

Formulário:

$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ $\qquad$ $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$ $\qquad$ $\int_C \vec{F}^{(conservativa)}\cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$

$\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2}A\,\rho_{ar}|\vec{v}|\,\vec{v}$ $\qquad$ $\left|\vec{F}_{rol}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|$

$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\qquad$ $\vec{F}_{elástica} = -k\,\vec{r}$

$\vec{F}_{elet} = -k_e\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\qquad$ $\vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$

$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$ $\qquad$ $E_p = m\,g\,y$ $\qquad$ $E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$ $\qquad$ $E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|}$

$P_o = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

$\sum\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$x(t) = A\,\cos(\omega t + \phi)$ $\qquad$ $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ $\qquad$ $E = \frac{1}{2}k\,A^2$

$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}}\delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}}\delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_{min}}\delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$

$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \cdots$

$a_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt,$ $\qquad$ $b_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt,$ $\qquad$ $n = 1,\ 2,\ \cdots$

$x(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(\omega t - \phi_1) + A_2\cos(2\omega t - \phi_2) + A_3\cos(3\omega t - \phi_3) + \cdots$

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\quad n = 0,\ 1, 2,\ \cdots$ $\qquad$ $\phi_n = \sin\frac{b_n}{A_n} = \cos\frac{a_n}{A_n}\quad n = 1, 2,\ \cdots$

$x(t) = A\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi)$ $\qquad$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi)$

Grandezas físicas e conversões:

1 polegada = 1 in = 0,39370 m $\qquad$ 1 pé = 1 ft = 2,54 cm $\qquad$ 1 milha = 1,609344 km

1 rad = 57.29578 graus

1 cv (cavalo − vapor métrico) = 735,4975 W $\qquad$ 1 hp (cavalo − vapor inglês) = 745,715 W

M_{Sol} = M = 1.989 × 10^{30} kg $\qquad$ 1 AU = 1.489 × 10^{11} m $\qquad$ 1 ano = 365,24 dias

$G = 6.67 \times 10^{11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)} = 4\pi^2\ \mathrm{AU^3/(M \cdot ano^2)}$ $g = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$

$\rho_{ar} = 1.225\ \mathrm{kg/m^3}$ $v_{som} = 340\ \mathrm{m/s}$

$c = 299792{,}458\ \mathrm{km/s} = 2{,}99792458 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$

$k_B = 1.380649 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} = 8.61733 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}$

$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}98755188 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

$m_e = 9{,}10938356 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

$m_p = 1{,}67262 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1836.151\ m_e$

$m_n = 1{,}67493 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ $1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \mathrm{m}$

$e = 1{,}602176208 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ $e/c = 5{,}34428 \times 10^{-28}\ \mathrm{C \cdot m/s}$

Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$\mathrm{e} = 2{,}71828183$ $\pi = 3{,}14159265$

$\mathrm{sen}\,(-x) = -\,\mathrm{sen}\,(x)$ $\mathrm{sen}\,(\pi - x) = \mathrm{sen}\,(x)$ $\mathrm{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$

$\cos(-x) = +\cos(x)$ $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\,\mathrm{sen}\,(x)$

$\mathrm{sen}\,(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \cos x\ \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x\ \cos y \mp \mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sen}\,y$

$\sin x\ \cos y = \frac{1}{2}\ [\mathrm{sen}\,(x+y) + \mathrm{sen}\,(x-y)]$

$\cos x\ \sin y = \frac{1}{2}\ [\mathrm{sen}\,(x+y) - \mathrm{sen}\,(x-y)]$

$\sin x\ \sin y = \frac{1}{2}\ [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\cos x\ \cos y = \frac{1}{2}\ [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$\mathrm{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\mathrm{sen}\,x \pm \mathrm{sen}\,y = 2\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)$

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos x - \cos y = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$