Guiões de Cálculo I - Agrupamento 2

Guião 2

Primitivas / Integral indefinido

Paula Oliveira

2021/22

Universidade de Aveiro

Conteúdo

Capítulo 5

Primitivas

A derivação é um processo conhecido do Ensino Secundário: "Dada uma função f, determinar a sua derivada f'."

Neste capítulo iremos resolver o problema recíproco: "Dada uma função f, determinar uma função F tal que $F' = f$."

Por exemplo, se $f(x) = F'(x) = \cos x$ então qual será a função $F(x)$? Será única?

5.1 Definição de primitiva

No que se segue I designa um intervalo de números reais não degenerado (isto é, com mais do que um ponto).

Definição 5.1. *Seja f uma função real de variável real definida num intervalo I de números reais, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Uma função $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em I diz-se uma* ***primitiva*** *de f em I se*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Resulta imediatamente da definição que toda a primitiva F de uma função f é contínua em I, já que F é derivável em I.

Consideremos alguns exemplos imediatos:

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$F(x) = -\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sec^2 x$	$F(x) = \operatorname{tg} x$	$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercício 5.1 Preeencha a seguinte tabela

$x^{1/3}$

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = $ e^{2x}	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = $ $-\ln(\cos x)$	$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = $ $x^6/6$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = $ $\frac{x^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = $ $\sqrt{7}x.$	$x \in \mathbb{R}$

Uma primitiva da função $f(x) = 2e^{2x}$ é $F(x) = e^{2x}$; contudo, se $G(x) = e^{2x} + 5$, $G'(x) = 2e^{2x}$ e G é uma outra primitiva da função f. Pode encontrar outras primitivas?

A primitiva quando existe não é *única*!

Se $F' = f$ então $(F + C)' = f$, qualquer que seja a constante $C \in \mathbb{R}$.

Conhecida uma primitiva F de uma função f pode determinar-se uma infinidade de primitivas de f; basta para isso adicionar a F uma constante.

$$f(x) = x^2$$

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{2}, \quad F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2, \quad F_3(x) = \frac{x^3}{3} + \sqrt[5]{23}$$

são primitivas de f porque

$$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = f(x).$$

Qualquer função $G(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, em que C é uma constante real, é uma primitiva de f.

Teorema 5.1. *Seja I um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$. Se $G : I \to \mathbb{R}$ e $H : I \to \mathbb{R}$ são duas primitivas quaisquer de $f : I \to \mathbb{R}$, então elas diferem de uma constante, i.e., existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que,*

$$G(x) - H(x) = K, \forall x \in I.$$

Basta recordar que se a derivada de uma função for nula num intervalo I, a função será constante nesse intervalo. Assim, como $(G - H)'(x) = G'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$, a função $G - H$ é constante.

Repare-se que, sendo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{com} \quad x \in]-1, 1[$$

$G(x) = \operatorname{arcsen} x$ e $H(x) = -\arccos x$ são primitivas de f. Então existe $K \in \mathbb{R}$, tal que

$$\operatorname{arcsen} x - (-\arccos x) = K. \qquad\qquad K = ?$$

Pelo teorema anterior podemos concluir que se F é uma primitiva de f, num intervalo I, então toda a primitiva de f se pode escrever na forma

$$F + C, C \in \mathbb{R}.$$

A família de todas as primitivas de f, num dado intervalo I, denota-se pelo símbolo

$$\int f(x)dx.$$

Assim, sendo F uma primitiva de f num intervalo I, tem-se

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}.$$

No entanto escreveremos mais simplesmente

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R},$$

continuando a encarar a expressão que figura no segundo membro, como uma designação do conjunto de todas as primitivas de f no intervalo considerado.

Atendendo a que

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0 \quad \text{(porquê?)}$$

podemos dizer que

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

representa a <u>família de todas as primitivas</u> da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $I \subseteq \mathbb{R}^+$ ou em $I \subseteq \mathbb{R}^-$ e **não** em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De facto, repare que dada a função h tal que

$$h(x) = \begin{cases} \ln x + \sqrt{5} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ \ln(-x) - \pi & \text{se} \quad x < 0 \end{cases},$$

se tem $h'(x) = \dfrac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Note-se que a primitiva de uma função f foi definida apenas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e não num subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$, como por exemplo a reunião de intervalos.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Será que esta função é primitivável no seu domínio, i.e., admite primitiva em $\mathbb{R}$?
Suponhamos que sim. Seja H uma primitiva de f, isto é, $H'(x) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$. Então

$$H(x) = \begin{cases} x + C_1 & \text{se} \quad x > 0 \\ C_2 & \text{se} \quad x = 0 \\ C_3 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Se H é derivável, H é contínua, em particular em $x = 0$ e portanto $C_1 = C_2 = C_3$. Calculando a derivada em $x = 0$ temos

$$H'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{C_3 - C_2}{x} = 0 \text{ e } H'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + C_1 - C_2}{x} = 1$$

e podemos concluir que não existe $H'(0)$. Esta função não é primitivável em qualquer intervalo que contenha o zero no seu interior, contudo é primitivável em qualquer intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^-$ e em qualquer intervalo $J \subseteq \mathbb{R}^+$.

Teorema 5.2. *Toda a função contínua num intervalo de números reais I é primitivável em I.*

(Este resultado será provado no capítulo de Cálculo Integral.)

Há no entanto determinadas funções, por exemplo, $f(x) = e^{x^2}$ e $f(x) = \text{sen}(x^2)$, que são primitiváveis em $\mathbb{R}$ mas não é possível determinar uma expressão analítica da sua primitiva.

Exercício resolvido 5.1. Se a taxa de crescimento da população de uma cidade é dada como função do tempo x (em anos) por

$$f(x) = 117 + 200x$$

e actualmente existem 10000 pessoas na cidade, qual será o número total de habitantes da cidade daqui a 5 anos?

Resolução do exercício 5.1. A taxa de crescimento é a derivada, $P'(x) = f(x)$. Podemos obter a função P, primitivando f:

$$P(x) = \int f(x)\ dx = 117x + 100x^2 + C \quad \text{em que } C \text{ é uma constante real.}$$

Sabendo que $P(0) = 10000$, podemos concluir que $C = 10000$. Então, a função P que procuramos é

$$P(x) = 117x + 100x^2 + 10000$$

e portanto, daqui a 5 anos, a população da cidade será:

$$P(5) = 13085 \text{ habitantes.}$$

5.2 Primitivas Imediatas

Da definição de primitiva de uma função resulta que toda a fórmula de derivação conduz à seguinte fórmula de primitivação, válida num intervalo de números reais adequado,

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

- $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, C \in \mathbb{R}$ porque $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$;
- $\int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C, C \in \mathbb{R}$ porque $\left(\frac{t^{-2}}{-2}\right)' = t^{-3}$
- $\int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx =$ ... porque ...

Mais geralmente é válida a fórmula seguinte em $]0, +\infty[$,

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, C \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \neq -1$$

Facilmente se deduzem as seguintes fórmulas em intervalos de números reais adequados a cada uma das funções:

Exercício resolvido 5.1. Se a taxa de crescimento da população de uma cidade é dada como função do tempo x (em anos) por

$$f(x) = 117 + 200x$$

e actualmente existem 10000 pessoas na cidade, qual será o número total de habitantes da cidade daqui a 5 anos?

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(0) = 10000 \end{cases} \qquad F(5)\,?$$

$$F(x) = 117x + 100x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = 10000 \Leftrightarrow 0 + 0 + C = 10000 \Leftrightarrow C = 10000$$

$$F(x) = 100x^2 + 117x + 10000$$

$$F(5) = 2500 + 585 + 10000 =$$

$$= 13085.$$

- $\displaystyle\int dx = x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \csc x \operatorname{cotg} x\, dx = -\csc x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, C \in \mathbb{R},\ a > 0$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \sec x\, dx = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C, C \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int \csc x\, dx = -\ln|\operatorname{cotg} x + \csc x| + C, C \in \mathbb{R}$

Indique para cada caso um intervalo onde sejam válidas as fórmulas anteriores.

Nota: O Geogebra pode ajudar a consolidar as primitivas. O comando `integral(f(x),x)` devolve a família de primitivas da função f. Pode-se variar a constante para visualizar alguns elementos dessa família de funções.

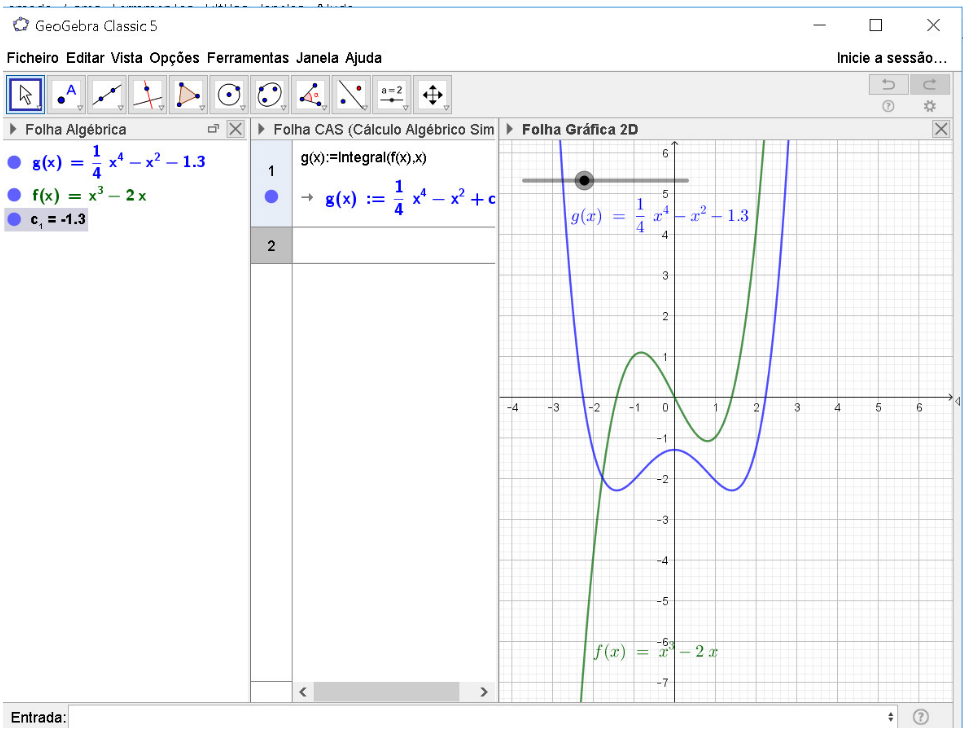

Figura 5.1: Primitivas da função $f(x) = x^3 - 2x$ no Geogebra.

5.3 Propriedades das Primitivas

Teorema 5.3. *Sejam F e G primitivas de f e g, respetivamente, i.e.,*

$$F' = f \text{ e } G' = g,$$

- $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C, C \in \mathbb{R}$

$$(\sec x + C)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{(\cos x)^2} \times (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \operatorname{tg} x$$

✓

- $\int \sec x \, dx = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C, C \in \mathbb{R}$

$$(\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C)' =$$

$$\frac{(\operatorname{tg} x)' + (\sec x)'}{\operatorname{tg} x + \sec x} =$$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \sec x \operatorname{tg} x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + 1}{\cos x}} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{1 + \sin x}}{\cos^2 x}}{\frac{\cancel{1 + \sin x}}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \sec x$$

então

$$\alpha F + \beta G \text{ é uma primitiva de } \alpha f + \beta g, \text{ quaisquer que sejam } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Em particular, αF é uma primitiva de αf, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $F+G$ é uma primitiva de $f+g$. Na notação anteriormente introduzida, temos respetivamente:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Exercício 5.2 Calcule:

1. $\int \left(4x^3 - 5x + 9\right) dx$ 2. $\int \left(5x^3 + 2\cos x\right) dx$ 3. $\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$ 4. $\int \sec^2 x\, dx$
5. $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\, dx$ 6. $\int \left(\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2x}\right) dx$ 7. $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) dx$ 8. $\int \frac{\operatorname{tg} u}{\cos u}\, du$

5.4 Primitivas quase imediatas

Consideremos a função f dada por $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^5)$. Pela regra de derivação da composta tem-se

$$f'(x) = \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}$$

Assim,

$$\int \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}dx = \operatorname{arcsen}(x^5) + C, C \in \mathbb{R}$$

Teorema 5.4. *Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função primitivável e $g : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $g(J) \subseteq I$. Se g é derivável em J então $(f \circ g) \cdot g'$ é primitivável e*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, C \in \mathbb{R},$$

em que F é uma primitiva de f.

Observe que, pela derivada da função composta, temos:

$$(F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exercício 5.3 Admitindo que g é uma função derivável e que, em cada um dos seguintes casos, a composta de funções considerada está definida num intervalo aadequado, determine as seguintes primitivas:

1. $\int (g(x))^n.g'(x)dx \ (n \neq -1)$ 2. $\int \cos(g(x)).g'(x)dx$ 3. $\int \operatorname{sen}(g(x)).g'(x)dx$

4. $\int \sec^2(g(x)).g'(x)dx$ 5. $\int \csc^2(g(x)).g'(x)dx$ 6. $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}dx$

7. $\int e^{g(x)}.g'(x)dx$ 8. $\int a^{g(x)}.g'(x)dx$ 9. $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx$

10. $\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}dx$ 11. $\int g'(x)\operatorname{tg}(g(x))dx$ 12. $\int g'(x)\sqrt[n]{g(x)}dx$

Exercício 5.2 Calcule:

1. $\displaystyle\int (4x^3 - 5x + 9)\,dx$ 2. $\displaystyle\int (5x^3 + 2\cos x)\,dx$ 3. $\displaystyle\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$ 4. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\,dx$ 6. $\displaystyle\int \left(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x + \frac{1}{2x}\right) dx$ 7. $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)\,dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\,u}{\cos u}\,du$

1. $x^4 - \frac{5x^2}{2} + 9x + C$

2. $\frac{5x^4}{4} + 2\sin x + C$

6. $-\sqrt{3}\cos x + \frac{1}{2}\ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.4 Mostre que, se $C \in \mathbb{R}$, então:

1. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \ln(1+x^2) + C$
2. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = \frac{2}{3} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x + C$
3. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$
4. $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\, dx = e^{x^2} + C$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\, dx = \arctan \sqrt{x} + C$
6. $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

Exercício 5.5 Determine as seguintes primitivas:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+7}\, dx;$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}}\, dx;$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx;$
4. $\displaystyle\int e^{3\cos^2 x} \operatorname{sen} x \cos x\; dx;$
5. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\, dx;$
6. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx;$
7. $\displaystyle\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2}\, dx;$
8. $\displaystyle\int e^{x^2+4x+3}(x+2)\; dx.$

5.5 Primitivação por Partes

Recordemos que se $g, h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são deriváveis a derivada do produto das duas funções é dada por:

$$(g(x)h(x))' = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

O método de primitivação por partes baseia-se nesta regra de derivação, reescrevendo a igualdade acima na forma

$$g'(x)h(x) = (g(x)h(x))' - h'(x)g(x)$$

Então, sendo f uma função que se pode escrever como um produto $f(x) = g'(x)h(x)$, em que h é uma função derivável, temos

$$\boxed{\int g'(x)h(x)\, dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)\; dx.}$$

Note-se que uma primitiva de $(g(x)h(x))'$ é $g(x)h(x)$[1].

Exemplo 5.1. Consideremos o problema de determinar a família de primitivas $\displaystyle\int x \sec^2 x\; dx.$

Sejam $g'(x) = \sec^2 x$ e $h(x) = x$. Uma primitiva de $sec^2 x$ é $\operatorname{tg} x$ e a derivada da função x é 1. Então,

$$\int x \sec^2 x\; dx = \int x(\operatorname{tg} x)'\; dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\; dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.2. Consideremos agora a determinação da família de primitivas $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$

Neste caso é indiferente a escolha de g' e de h. Seja, por exemplo,

$$g'(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad h(x) = \operatorname{sen} x$$

$$g(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad h'(x) = \cos x$$

[1] $\displaystyle\int (g(x)h(x))'\, dx = g(x)h(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

5. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx;$ $\displaystyle = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2e^{2x}}^{u'}}{1+(\underbrace{e^{2x}}_{u})^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(e^{2x}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan u + C,\ C \in \mathbb{R}}$$

$$\int e^{u}\cdot u'$$

4. $\displaystyle\int e^{\overbrace{3\cos^2 x}^{u}} \operatorname{sen} x \cos x\,dx;$ $=$

$$= -\frac{1}{6}\int e^{\overbrace{3\cos^2 x}^{u}} \times \underbrace{6\cos x \times (-\sin x)}_{u'}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\,e^{3\cos^2 x} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

7. $\displaystyle\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx;$ $\displaystyle = -\int \cos\Big(\underbrace{\frac{1}{x}}_{u}\Big)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx =$

$$= -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}}\,dx;$ $= \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{8}}}\,dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2}}\,dx$

$= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C, \; C \in \mathbb{R}.$

Aplicando o método de primitivação por partes, vem:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx. \tag{5.1}$$

Vamos aplicar de novo o método de primitivação por partes ao integral $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx$, mas mantendo a escolha de $g'(x) = e^x$:

$$g'(x) = e^x \quad \text{e} \quad h(x) = \cos x$$

$$g(x) = e^x \quad \text{e} \quad h'(x) = -\operatorname{sen} x$$

Neste caso,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Substituindo agora em 5.1 temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\right),$$

ou seja,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \Leftrightarrow 2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + K,\ K \in \mathbb{R}.$$

Concluímos assim que,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\ dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C,\ \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.3. Há ainda outros exemplos que aparentemente não são primitivas de produto de funções mas que se podem transformar num produto de modo a aplicar o método de primitivação por partes, como é o caso de $\displaystyle\int \ln x\ dx$.

Neste exemplo basta observar que $\ln x = 1 \times \ln x$. A escolha de g' e de h será

$$g'(x) = 1 \quad \text{e} \quad h(x) = \ln x$$

$$g(x) = x \quad \text{e} \quad h'(x) = \tfrac{1}{x}$$

Aplicando o método de primitivação por partes vem:

$$\int \ln x\ dx = x \ln x - \int x\, \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + C.$$

Obtemos assim a família de primitivas pretendida:

$$\int \ln x\ dx = x \ln x - x + C,\ \text{com } C \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+.$$

Exercício 5.6 Calcule as seguintes famílias de primitivas:

1. $\displaystyle\int \arctan x\ dx$;
2. $\displaystyle\int \sec^3 x\ dx$;
3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x) \operatorname{sen}(7x)\ dx$;
4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x) \cos(3x)\ dx$;
5. $\displaystyle\int x \arctan x\ dx$;
6. $\displaystyle\int x 3^x\ dx$;
7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\ dx$;
8. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\ dx$;
9. $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\, dx$.

Porque vale a pena aprender a primitivar por partes.... Se calcular esta primitiva com recurso a alguns CAS pode obter este resultado...

$\int x(2x+5)^{10}\,dx = \dfrac{256}{3}\,x^{12} + \dfrac{25600}{11}\,x^{11} + 28800\,x^{10} + \dfrac{640000}{3}\,x^9 + 1050000\,x^8 + 3600000\,x^7 + 8750000\,x^6 + 15000000\,x^5 + 17578125\,x^4 + \dfrac{39062500}{3}\,x^3 + \dfrac{9765625}{2}\,x^2 + c.$

5.6 Primitivação por Substituição: mudança de variável

O processo de mudança de variável é conhecido do Ensino Secundário. Por exemplo, para resolver a equação $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ podemos recorrer à mudança de variável $e^x = y$ e resolver a equação $y^2 - 2y + 1 = 0$. A solução desta equação é $y = 1$ e regressando à variável x, temos $e^x = 1$, ou seja, $x = 0$.

Este processo é também utilizado para calcular algumas primitivas que não são "tão" imediatas.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável, onde I designa um intervalo de números reais. Dizer que f é primitivável significa que existe uma função $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$.

Seja agora $h : J \to \mathbb{R}$ uma função derivável e invertível no intervalo não degenerado J tal que $h(J) = I$. Recorrendo à derivada da função composta, podemos dizer que

$$(F \circ h)'(t) = F'(h(t)) \cdot h'(t). \tag{5.2}$$

Como $F' = f$, podemos reescrever a igualdade (5.2) da seguinte forma

$$(F \circ h)'(t) = f(h(t)) \cdot h'(t),$$

o que traduz o facto de que $F \circ h$ é uma primitiva de $(f \circ h) \cdot h'$.

Para obter a expressão da função F, e sendo h invertível, basta fazer a composta $F \circ h \circ h^{-1}$.

Na prática procede-se da seguinte forma. Seja $\int f(x)\,dx$ a família de primitivas a determinar. Faz-se a substituição de x por uma função $h(t)$ onde f e h estão nas condições acima referidas. Determina-se de seguida a família de primitivas de

$$\int f(\underbrace{h(t)}_{x}) \cdot \underbrace{h'(t)dt}_{dx} = \int g(t)dt = G(t) + C, \;\; C \in \mathbb{R},$$

em que $G'(t) = g(t) = f\,(h(t)) \cdot h'(t)$. A função G é uma primitiva de $(f \circ h) \cdot h'$, ou seja, $G = F \circ h$. Para determinar a função F faz-se a composta de G com a função h^{-1}, $F = G \circ h^{-1}$:

$$\int f(x)\;dx = G\big(\underbrace{h^{-1}(x)}_{t}\big) + C, \;\; C \in \mathbb{R}. \text{ (Regresso à variável inicial)}$$

Exemplo 5.4. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$?

A função f é definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$ com $x \in I = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$.

Consideremos, a mudança de variável definida por

$$x = h(t) = t^2 \;\text{ com }\; t \in J = [0, +\infty[$$

e observemos que h é uma função derivável, invertível e que

$$h^{-1}(x) = \sqrt{x} \;\text{ com }\; x \in I = [0, +\infty[.$$

Como $h'(t) = 2t$ e $f(h(t)) = \dfrac{t^2}{1+t}$ vamos determinar a família de primitivvas

$$\int \frac{t^2}{1+t} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^3}{t+1}dt.$$

Como $\dfrac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1}$ (porquê?), a determinação das primitivas torna-se muito fácil:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{t^3}{t+1}\,dt &= 2\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\,dt \\ &= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t|\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Voltando à variável inicial, como $t = \sqrt{x}$, temos:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5.7

Calcule, fazendo uma mudança de variável adequada, as seguintes famílias de primitivas:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; 2. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx$; 3. $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x + 1)}dx$; 4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$;

5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x+3}dx$; 6. $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}dx$; 7. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}dx$.

Pode recorrer ao http://m.wolframalpha.com/ ou ao Geogebra para calcular estes integrais e confirmar os seus resultados.

5.6.1 Substituição por Funções Trigonométricas

Duas relações trigonométricas,

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \ \text{ e } \ 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x,$$

são fundamentais para primitivar funções que envolvam os radicais

$$\sqrt{a^2+x^2}\ ,\ \sqrt{a^2-x^2} \ \text{ e } \ \sqrt{x^2-a^2}, \quad \text{com} \quad a > 0.$$

1. No caso do radical $\sqrt{a^2+x^2}$, pode utilizar-se a mudança de variável $x = h(t) = a\operatorname{tg} t$ com $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   $$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{\sec^2 t} = a\sec t \ (a > 0 \text{ e como } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \sec t > 0)$$

   Neste caso, $h^{-1}(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$, com $x \in \mathbb{R}$.

2. No caso do radical $\sqrt{a^2-x^2}$, pode utilizar-se a mudança de variável $x = h(t) = a\operatorname{sen} t$ com $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (ou $x = a\cos t$ com $t \in [0, \pi]$).

   $$\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\cos t \ (a > 0 \text{ e como } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \ \cos t \geq 0)$$

   Neste caso, $h^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, com $x \in]-a, a[$.

Soluções dos exercícios

Exercício 5.1

Função	Primitiva	Domínio
$f(x) = 2e^{2x}$	$F(x) = e^{2x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$F(x) = -\ln(\cos x)$	$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
$f(x) = x^5$	$F(x) = \frac{x^6}{6}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{7}$	$F(x) = \sqrt{7}\,x$	$x \in \mathbb{R}$

Exercício 5.2

1. $x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 9x + C$ 2. $\frac{5}{4}x^4 + 2\operatorname{sen} x + C$ 3. $2t^4 - 4\sqrt{t^3} - \frac{1}{2t^2} + C$ 4. $\operatorname{tg} x + C$
5. $\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C$ 6. $-\sqrt{3}\cos x + \frac{1}{2}\ln|x| + C$ 7. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + x + C$ 8. $\frac{1}{\cos u} + C$

, com $C \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.3

1. $\frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$ 2. $\operatorname{sen}(g(x)) + C$ 3. $-\cos(g(x)) + C$
4. $\operatorname{tg}(g(x)) + C$ 5. $-\operatorname{cotg}(g(x)) + C$ 6. $\operatorname{arcsen}(g(x)) + C$
7. $e^{g(x)} + C$ 8. $\frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C$ 9. $\ln|g(x)| + C$
10. $\arctan((g(x))) + C$ 11. $-\ln|\cos(g(x))| + C$ 12. $\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{g(x)^{n+1}} + C$

, com $C \in \mathbb{R}$

Exercício 5.5

1. $\frac{\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$;
2. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C$;
3. $-2\sqrt{1-x} + C$;
4. $-\frac{1}{6}e^{3\cos^2 x} + C$;
5. $\frac{1}{2}\arctan\left(e^{2x}\right) + C$;
6. $-\ln|\cos x| + C$;
7. $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C$;
8. $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C$.

Exercício 5.6

1. $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$;
2. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} x \sec x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\right) + C$;
3. $\frac{2}{45}\cos(2x)\operatorname{sen}(7x) - \frac{7}{45}\operatorname{sen}(2x)\cos(7x) + C$;
4. $-\frac{3}{16}\operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(3x) - \frac{5}{16}\cos(5x)\cos(3x) + C$;
5. $\frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$;
6. $\frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C$;
7. $\frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C$(Sugestão: $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2}\, x$);
8. $\frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)\right) + C$;
9. $x\frac{(2x+5)^{11}}{22} - \frac{(2x+5)^{12}}{528} + C$;

com $C \in \mathbb{R}$

Exercício 5.7