Ficha 4

1.

Se n é par, $n=2k$

$(2k)^3-3(2k)-1 = 8k^3-6k-1 = 2(4k^3-3k)+1 = 2a-1$ impar

Considerando $4k^3-3k$ um número a, sabe-se que se $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$

2.

n^2 é par $\Rightarrow n$ é par

$\Leftrightarrow$ n é impar $\Rightarrow n^2$ é impar

Se n é impar, $n=2k-1$

$(2k-1)^2 = 4k^2-2k+1 = 2(2k^2-k)+1 = 2b+1$ impar

3. $n! > n+1 \Rightarrow n > 2$

$n \leq 2 \Rightarrow n! \leq n+1$

Se $n=0$, $n! = 1 = 0+1$

Se $n=1$, $n! = 1! = 1 \leq 1+1 = 2$

Se $n=2$, $n! = 2! = 2 < 2+1 = 3$

4.

Por redução ao absurdo, ~~basta~~ tem-se que

$200 = p^2 \wedge p \in \mathbb{N}$

$p = \sqrt{200}$

$p = \sqrt{100 \times 2}$

$p = 10\sqrt{2}$, $p \notin \mathbb{N}$

Logo 200 não é quadrado perfeito

5

Por contraposição, ~~com 22 dias~~ escolhendo 22 dias do

obtem-se no máximo 3 dias que são o mesmo dia de semana

Isto é, no max., escolhe-se 3 segundas, 3 terças, ..., por dia de semana, ou seja, no máximo escolhe-se $3 \times 7 = 21$.

Mas escolhem-se 22 dias, logo contradição

6

Se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}$ não se pode escrever como uma fração irredutível $\left(\frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{Z}\right)$

$\frac{a}{b}$ | $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{2} \cdot b$

$\Leftrightarrow a^2 = 2b^2$ — a é par, logo pode-se escrever com $a = 2k$

$\Leftrightarrow (2k)^2 = 2b^2$

$\Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2$

$\Leftrightarrow b^2 = 2k^2$ — b também é par, mas se são ambos pares $\frac{a}{b}$ não é uma fração irredutível

7

a) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

$\frac{n}{2n+1} = \frac{n-1+1}{2n+1} = \frac{n-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}$

$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots$

a)

Por indução ~~de~~ matemática

Se $n=1$

$$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(2\times1-1)\cdot(2\times1+1)}=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\underbrace{\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}_{P(n)}+\frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2(n+1)(n+\frac{1}{2})}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{n+1}{2n+3}$$

$2n^2+3n+1=0$

$n=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}$

$n=\frac{-3\pm1}{4}$

$n=-1 \vee n=-\frac{1}{2}$

$$P(n+1)=\frac{n+1}{2(n+1)+1}=\frac{n+1}{2n+3}$$

b)

Se n é ímpar, $n=2k+1$

$n^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4k(k+1)$

Por indução

Se $k=1$, $4k(k+1)=4\cdot1\cdot(1+1)=8$

8 é divisível por 8, logo é verdadeiro

~~Com~~ $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$4(k+1)(k+2)=4(k+2)(k+1)=(4k+8)(k+1)=4k(k+1)+8(k+1)$

Por hipótese $4k(k+1)$ é divisível por 8 e, 8 com $8(k+1)$ também é, $P(n+1)$ também é divisível

c) Para $n=1$

$4^1+15\cdot1-1=4+15-1=18 \% 9=0$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Se $P(n)$ é divisível por 9, então $4^n+15n-1=9k$

$4^{n+1}+15(n+1)-1=4\cdot4^n+15n+15-1=4\cdot4^n+60n-45n-4+3+15$

$=4(4^n+15n-1)+9(-5n+2)=9k\cdot4+9(-5n+2)$, logo divisível por 9

(d) $\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{(r^n-1)r}{r-1}$

$P(n) = \sum_{i=1}^{n} r^i \qquad S(n) = \frac{(r^n-1)r}{r-1}$

$P(1) = \sum_{i=1}^{1} r^i = r^1 = r$

$S(1) = \frac{(r^1-1)r}{r-1} = \frac{\cancel{(r-1)}r}{\cancel{(r-1)}} = r$

$P(1) = S(1)$

$(P(n) = S(n)) \Rightarrow (P(n+1) = S(n+1))$

$S(n+1) = \frac{(r^{n+1}-1)r}{r-1} = \frac{(r \cdot r^n - 1)r}{r-1}$

$P(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} r^i = \sum_{i=1}^{n} r^i + r^{n+1} = \frac{(r^n-1)r}{r-1} + r^{n+1}$

$= \frac{(r^n-1)r + r^{n+1}(r-1)}{r-1} = \frac{r(r^n-1) + r \cdot r^n(r-1)}{r-1}$

$= \frac{r(r^n - 1 + r^{n+1} - r^n)}{r-1} = \frac{r(r^{n+1}-1)}{r-1} = S(n+1)$

e) $H_{2^0} = H_1 = 1$

$1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{0}{2} = 1$

$H_{2^0} \geq 1 + \frac{0}{2}$ Verdade Para 1° elemento

$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$

$H_{2^{n+1}} = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\geq 1 + \frac{n}{2}} + \frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$

$\Leftrightarrow$

8

Para $t_1 = 1$

$t_1 = \frac{1^2+1}{2} = 1$

Para t_{n+1}

$t_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$t_{n+1} = t_n + n + 1 = \frac{n^2+n}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

9 $A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $n=1$ $\quad A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

Para $n+1$ $\quad A^{n+1} = A \times A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

10

Para não ser multiplo de 2 $\quad a_n = 2K-1, \ \forall K \in \mathbb{N}, \ \cancel{n \geq 2}$

$a_0 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$

$a_1 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$

$a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$

Para a_{n+1}

$a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1} = 2 \cdot (2K-1) - (2(K-1)-1)$

$= 4K - 2 - 2K + 3 = 2K+1$, confirma-se ser impar

11

para a_1

Por hipotese

$a_1 = \frac{5^0 + 2(-1)^0}{3} = \frac{1+2 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \qquad a_1 = 1$

$a_2 = \frac{5^1 + 2(-1)^1}{3} = \frac{5-2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \qquad a_2 = 1$

$a_3 = \frac{5^2 + 2(-1)^2}{3} = \frac{25+2}{3} = \frac{27}{3} = 9 \qquad a_3 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9$

$a_4 = \frac{5^3 + 2(-1)^3}{3} = \frac{125-2}{3} = \frac{123}{3} = 41 \qquad a_4 = 4 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = 41$

para a_{n+1}

$a_{n+1} = 4a_n + 5a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{5^n + 2(-1)^n}{3} = 4 \times \frac{5^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} + 5 \times \frac{5^{n-2} + 2(-1)^{n-2}}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{5^n + 2(-1)^n}{3} = 4 \times \frac{5^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} + \frac{5^{n-1} + 5 \cdot 2(-1)^n}{3}$

$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 4 \times 5^{n-1} + 4 \times 2(-1)^{n-1} + 5^{n-1} + 5 \cdot 2(-1)^n$

$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 5^{n-1}(4+1) + 2(-1)^n(-4+5)$

$\Leftrightarrow 5^n + 2(-1)^n = 5^n + 2(-1)^n$

12

$f(0) = 0 \qquad f(n=0) = (0)^2 = 0$ ✓

$f(1) = f(0) + 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \qquad f(n=1) = 1^2 = 1$ ✓

$f(2) = 4 f(\frac{2}{2}) = 4 \cdot 1 = 4 \qquad f(n=2) = 2^2 = 4$

Para $f(n+1)$

Se $n+1$ for impar

$f(n+1) = f(n) + 2(n+1) - 1$

$= n^2 + 2n + 1$

$= (n+1)^2$ ✓

Se $n+1$ for par

$f(n+1) = 4 f(\frac{n+1}{2}), \quad n+1 = 2K \Leftrightarrow K = \frac{n+1}{2}$

$= 4 f(\frac{2K}{2})$

$= 4 f(K)$

$= 4K^2 = 4(\frac{n+1}{2})^2 = 4 \times \frac{1}{4} \times (n+1)^2 = (n+1)^2$

13

★ Considerando $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Sabe-se que n é primo ou não é primo

Se n é primo, n é divisível por ele próprio

Se n não é primo,

Considere-se $n=4$, divisível por 2, número primo
$n=6$, " " " " "

n é divisível por primos $\Rightarrow n+1$ é div por primo

$n+1 = ab$, como ~~ab~~ a e b são divisíveis por um primo (por hipótese)
$n+1 = p_1 q_1 p_2 q_2$

$a = p_1 q_1$
$b = p_2 q_2$

divisível por primos

14

Se $C=1$, as palavras são x, y, z, têm o mesmo número de (e)

Se $C=2$, não existem palavras nesta linguagem

Se $C=3$, (x) é palavra tem 1 (e 1)

Portanto se com $C=n$, se pode escrever uma palavra A e essa palavra tiver o mesmo número P de (e) então pode se escrever

(A) -> quem tem $p+1$ (e $p+1$), continuando a ser o mesmo número

(A)(x) -> com $p+2$ ( )

(A)+(x) -> com $p+2$ ( )

Logo vai ter sempre o mesmo número de ( )

15

a)

i) Há 15 pessoas na família
Há 12 meses

$15 \underline{|12}$
$3 \quad 1$

Há 1 mês para cada pessoa mais 3 meses

Logo pelo menos 2 pessoas nasceram no mesmo mês

ii) $15 \underline{|7}$
$1 \quad 2$

Existem 3 pessoas a nascer no mesmo dia da semana

b) $13 \times 2 = 26$
$26 + 1 = 27$

Com 27 convidados, pelo menos um filho tem 3 amigos

~~16~~ 17

1 ~~a)~~ Soma que dá 9: ~~Escolhendo 5 números aleatórios entre~~
2 $1+8$
3 1 e 8, Como há 4 somas possíveis,
4 $2+7$
5 escolher 5 números aleatórios implica escolher
6 $3+6$ duas parcelas da mesma soma
7
8 $4+5$

16

Existem 4 possíveis restos de divisões, escolhendo 5 números ~~pessoas~~ aleatórios entre 2 deles vão ter o mesmo resto

18 $]0,1[=]0,0.1] \cup]0.1,0.2] \cup]0.2,0.3] \cup]0.3,0.4] \cup]0.4,0.5] \cup \ldots$

Existem 10 grupos de amplitude 0,1 entre 0 e 1. Escolhendo 11 números aleatórios, 2 deles pertencem ao mesmo grupo, logo com uma diferença menor a 0,1