Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

18 de novembro de 2022
Duração total: 2 horas

NOME: ______________________________ Nº MEC.: ____________

DECLARO QUE DESISTO ______________________________

Informações

1. Esta prova é constituída por 4 questões.
   (a) Cada folha contém uma questão que deve ser respondida na própria folha (utilize, sempre que necessário, também o verso da folha).
   (b) Caso necessite de folhas de continuação, deve utilizar uma para cada questão e indicar na folha de continuação o número da questão no local indicado para o efeito.
   (c) Caso não responda a uma das questões escreva isso na respetiva folha.
2. Quando terminar a sua prova, organize-a de forma a juntar as folhas de continuação (caso as tenha utilizado) à folha da questão respetiva e coloque-as nos locais indicados pelo professor vigilante da sala. Não será necessário entregar esta folha de informações, exceto em caso de desistência da prova.
3. Caso pretenda desistir desta prova, assinale-o no cabeçalho desta folha, assinando no local a isso destinado e entregue todas as folhas de prova que lhe foram distribuídas. Contudo, se desistir mantém-se no regime de avaliação discreta, não podendo realizar o exame final.
4. Justifique todas as suas respostas das questões, indicando os cálculos efetuados e/ou os conceitos teóricos utilizados.
5. Só pode levar para a mesa onde vai realizar a prova material de escrita.
   (a) Não é permitida a utilização de qualquer tipo de calculadora.
   (b) Não pode ter consigo telemóvel nem qualquer dispositivo eletrónico (ainda que desligado).
   (c) Garanta que tem em cima da mesa de prova um documento que o identifique, com fotografia (preferencialmente o Cartão de Cidadão).

Fórmulas trigonométricas

$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$	$\operatorname{cosec} u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	$\operatorname{cotg} u = \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$	$1 + \operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u$	$1 + \operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$
$\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos(2u)}{2}$	$\cos^2 u = \dfrac{1+\cos(2u)}{2}$	$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ $\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$		
$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \dfrac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{2}$ $\cos u \cos v = \dfrac{\cos(u-v) + \cos(u+v)}{2}$ $\operatorname{sen} u \cos v = \dfrac{\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v)}{2}$	$\cos^2(\operatorname{arcsen} u) = 1 - u^2$ $\operatorname{sen}^2(\arccos u) = 1 - u^2$			

Duas primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u' \sec u$	$\ln \lvert \sec u + \operatorname{tg} u \rvert$	$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln \lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u \rvert$

Uma fórmula de recorrência

$$\int \frac{1}{(x^2+a)^n}\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-1}\int \frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}\,dx\right),\ a \neq 0,\ n \neq 1.$$

Formulário de Derivadas

Função	Derivada	Função	Derivada
$K\,u\ (K \in \mathbb{R})$	$K\,u'$	$\ln \lvert u \rvert$	$\dfrac{u'}{u}$
u^r	$r\,u^{r-1}u'$	$\log_a \lvert u \rvert\ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$\dfrac{u'}{u \ln a}$
e^u	$u'\,e^u$	$a^u (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$a^u\ \ln a\, u'$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$	$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$	$\operatorname{cotg} u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$\sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$\operatorname{cosec} u$	$-\operatorname{cosec} u\ \operatorname{cotg} u\, u'$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arccotg} u$	$-\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{senh} u$	$u' \cosh u$	$\cosh u$	$u' \operatorname{senh} u$

Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

18 de novembro de 2022
Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:__________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 1 (65 pts)

1.1 Determine $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\dfrac{5}{13}\right)\right)$.

1.2 Considere a função definida por

$$f(x) = \operatorname{arctg}\,(e^x - 1).$$

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

(b) Calcule a derivada da função f e estude f quanto a intervalos de monotonia.

(c) A função f admite máximo absoluto? E mínimo absoluto? Justifique a sua resposta.

(d) A função f admite assíntotas? Em caso afirmativo, determine-as.

(e) Justifique que f é invertível e determine a sua inversa, indicando expressão analítica, domínio e contradomínio.

Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

18 de novembro de 2022
Duração total: 2 horas

NOME:________________________________	Nº MEC.:__________
CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________	

Questão 2 (40 pts)

2.1 Determine os seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x + x^2}{\operatorname{sen}(2x) - 2x - x^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x})$.

2.2 (a) Enuncie o Teorema de Rolle.

(b) Sejam a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$ números reais tais que $a_1+a_2+\ldots+a_n = 0$. Mostre que o polinómio $q(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$ tem pelo menos uma raiz real.

Universidade de Aveiro 18 de novembro de 2022
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

NOME:______________________________ Nº MEC.:__________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________________

Questão 3 (65 pts)

3.1 Encontre a função real contínua que satisfaz

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases}.$$

3.2 Determine as famílias de primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)\operatorname{cotg}(x)}dx$ com $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ com $x \in]0, +\infty[$.

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$.

Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

18 de novembro de 2022
Duração total: 2 horas

NOME:______________________ Nº MEC.:__________

CLASSIFICAÇÃO QUESTÃO: ______________________

Questão 4 (30 pts)

Para cada uma das questões seguintes, assinale **a opção correta**.

4.1 Se uma função não está definida em a então

(A) $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe. ☐

(B) $\lim_{x\to a} f(x)$ pode ser 0. ☐

(C) $\lim_{x\to a} f(x)$ deve ser ∞. ☐

(D) nenhuma das afirmações acima. ☐

4.2 Se f é uma função contínua em $[a, b]$ então

(A) Existem m e M em $\mathbb{R}$ tal que $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a, b]$. ☐

(B) Têm que existir extremos locais em $[a, b]$, mas pode não existir um máximo ou mínimo absoluto. ☐

(C) Qualquer máximo ou mínimo absoluto de f em $[a, b]$ ocorre ou nos extremos do intervalo ou num ponto do interior onde $f'(x) = 0$. ☐

(D) O contradomínio de f é $[f(a), f(b)]$. ☐

4.3 Se $f'(a)$ existe, $\lim_{x\to a} f(x)$

(A) tem que existir mas não temos informação suficiente sobre qual o seu valor. ☐

(B) é igual a $f(a)$. ☐

(C) é igual a $f'(a)$. ☐

(D) pode não existir. ☐

4.4 Sabemos que $f(1) = 1$ e que $f'(1) = 3$. Então, $(f(f(x)))'$ em $x = 1$ é

(A) 1. ☐

(B) 6. ☐

(C) 3. ☐

(D) 9. ☐