

# Modelação de Sistemas Físicos

## 4ª aula Prática

Sumário:

Movimento a 1 dimensão. Método de Euler.  
Resolução dos problemas 2.3 e 2.7.

Bibliografia:

### Método de Euler (método numérico de integração)

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} = a_x(t)$$

aproximado por

$$\frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$$

$$\Leftrightarrow v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

matemática

Considere-se  $v_x(0) = v_{x0}$

$$v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x(0) \times \delta t$$

$$v_x(\delta t + \delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x(\delta t) \times \delta t$$

$$v_x(2\delta t + \delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x(2\delta t) \times \delta t$$

...

$$v_x(N\delta t + \delta t) \approx v_x(N\delta t) + a_x(N\delta t) \times \delta t$$

python

`vx[0] = vx0`

```
for i in range(n):  
    t[i+1]=t[i]+dt  
    aceler=g # queda livre  
    vx[i+1]=vx[i]+aceler*dt
```

## Cap. 2 Movimento a 1 dimensão

### Método de Euler (método numérico de integração) **programa completo**

```
# Queda sem resistência do ar
# Integração numérica de  $dx/dt = vx$ , pelo Método de Euler
import numpy as np

#parâmetros
dt=0.01                                # passo de tempo
t0=0
tf=4.0
y0=0
vy0=0

g=9.80

#inicialização
n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)                # +0.1 para garantir não arredondar para baixo
t=np.zeros(n+1)                         # n+1 elementos; último índice n
y=np.zeros(n+1)
vy=np.zeros(n+1)
ay=np.zeros(n+1)

vy[0]=vy0
t[0]=t0
x[0]=x0

# Método de Euler (n+1 elementos)
for i in range(n):
    ay[i] = g                            # queda livre
                                         # (em geral pode ser qualquer função de x[i] e vx[i])
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i] + ay[i]*dt             # atualizar velocidade sabendo aceleração
    t[i+1]=t[i]+dt
```

## Problema cap 2

3.

Um objeto pequeno é largado de uma altura elevada. Considere a queda livre, sem resistência do ar. Considere  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$

- a) Qual a relação entre a velocidade e a aceleração instantânea?
- b) Construa um programa que determine a velocidade do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo  $[0, 4 \text{ s}]$ . Qual a velocidade em 3s?
- c) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.
- d) Compare o resultado obtido em b) e c) com o resultado exato. Que conclui?
- e) Construa um programa que determine a posição do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo  $[0, 3 \text{ s}]$ . Qual a posição no instante 2 s, se o objeto partiu da posição 0 m? (Usa o passo de tempo usado em alínea b) .)
- f) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.
- g) Compare o resultado obtido em e) e f) com o resultado exato. Que conclui?
- h) Calcule novamente a posição no instante 2 s, com o passo 10 vezes menor. Faça o gráfico do desvio do valor aproximado com o valor exato em função do passo. Como varia o erro com o passo?

## Problema cap 2

7. Uma bola é lançada verticalmente para cima com a velocidade 10 m/s.

- a) Encontre analiticamente a lei do movimento  $y = y(t)$ , se não considerar a resistência do ar.
- b) Qual a altura máxima e o instante em que ocorre, no caso da alínea a)?
- c) Em que instante volta a passar pela posição inicial, no caso da alínea a)?
- d) Resolva as alíneas anteriores, considerando a resistência do ar. Resolva usando o método de Euler. A velocidade terminal da bola no ar é de 100 km/h.