Universidade de Aveiro 14 de novembro de 2018
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração: 2h

1. **(40 pts)** Considere a função h definida por $h(x) = \arccos(e^{x-1}) + \pi$.
   (a) Determine o domínio de h, D_h.
   (b) Estude h quanto à monotonia e existência de extremos locais e globais.
   (c) Justifique que h é invertível e caracterize a função inversa de h, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

2. **(35 pts)** Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = e^x - x - 1$.
   (a) Justifique que a função g tem um único zero e determine-o.
   (b) Determine o contradomínio da função g.
   (c) Diga, justificando, se a função g é injetiva.

3. **(15 pts)** Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $s(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x^3}}$. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x)$.

4. **(20 pts)** Determine, em função do parâmetro $m \in \mathbb{R}$, a correspondente família de primitivas $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx$, com $x > 1$.

5. **(30 pts)** Considere a função definida em $I = \mathbb{R}^+$ por

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

   (a) Determine $\displaystyle\int f(x)\,dx$.
   (b) Determine a função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e que satisfaz a condição $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

6. **(40 pts)** Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):
   (a) $\displaystyle\int \left(3x^4 + \frac{1}{2x} + \cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\right) dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ (Sugestão: utilize a mudança de variável dada por $x = 2\operatorname{tg} t$, indicando um domínio adequado a esta substituição).

7. **(20 pts)** Seja f uma função que admite derivadas contínuas até à ordem dois em $\mathbb{R}$ e tal que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, defina-se $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$. Justificando convenientemente as suas respostas, diga qual o número mínimo de zeros distintos que a função g'' tem em $]a, b[$ em cada um dos seguintes casos:
   (a) se $\alpha = 0$;
   (b) se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Uma ajuda

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}; \quad \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}; \quad \operatorname{cotg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}; \quad \operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2};$$

$$1+\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u; \quad 1+\operatorname{cotg}^2 u = \operatorname{cosec}^2 u$$

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v))$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(u-v) + \operatorname{sen}(u+v))$$

$(e^u)' = u'\, e^u$	$(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$	$(u^r)' = r\, u^{r-1} u'$
$(a^u)' = a^u \ \ln a\, u' (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\log_a \lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u \ln a} \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$	$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$	$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
$(\sec u)' = \sec u \operatorname{tg} u\, u'$	$(\operatorname{cosec} u)' = -\operatorname{cosec} u \ \operatorname{cotg} u\, u'$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

$P(u' \sec u) = \ln\lvert \sec u + \operatorname{tg} u\rvert$	$P(u' \operatorname{cosec} u) = -\ln\lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$

P - primitiva

1. **(40 pts)** Considere a função h definida por $h(x) = \arccos(e^{x-1}) + \pi$.

   (a) Determine o domínio de h, D_h.

   (b) Estude h quanto à monotonia e existência de extremos locais e globais.

   (c) Justifique que h é invertível e caracterize a função inversa de h, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

2. **(35 pts)** Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = e^x - x - 1$.

(a) Justifique que a função g tem um único zero e determine-o.

(b) Determine o contradomínio da função g.

(c) Diga, justificando, se a função g é injetiva.

3. **(15 pts)** Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $s(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x^3}}$. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x)$.

4. **(20 pts)** Determine, em função do parâmetro $m \in \mathbb{R}$, a correspondente família de primitivas $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx$, com $x > 1$.

5. **(30 pts)** Considere a função definida em $I = \mathbb{R}^+$ por

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

(a) Determine $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

(b) Determine a função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e que satisfaz a condição $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

6. **(40 pts)** Determine os seguintes integrais (simplificando o mais possível o resultado):

(a) $\displaystyle\int \left(3x^4 + \frac{1}{2x} + \cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}\right) dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$ (Sugestão: utilize a mudança de variável dada por $x = 2\operatorname{tg} t$, indicando um domínio adequado a esta substituição).

7. **(20 pts)** Seja f uma função que admite derivadas contínuas até à ordem dois em $\mathbb{R}$ e tal que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$ onde $a,\, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, defina-se $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$. Justificando convenientemente as suas respostas, diga qual o número mínimo de zeros distintos que a função g'' tem em $]a, b[$ em cada um dos seguintes casos:

   (a) se $\alpha = 0$;

   (b) se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.