Série Clássica de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) + \sum_{m=1}^{+\infty} b \,\text{sen}\left(2\pi m \frac{t}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\, dt$$

$$a = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\, \text{sen}\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \text{sen}(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Codificação

$H \leq$ nº médio de bits $< H+1$

Teorema da amostragem

$$x(n) = x(nT_a) = \cos(2\pi f_0 n T_a) = \cos\left(2\pi \overbrace{\frac{f_0}{f_a}}^{\text{interesse}} n\right)$$

$$\cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_a} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{f_0 + k f_a}{f_a} n\right), \; k \in \mathbb{Z}$$

sem ambiguidade

↳ $f_a > 2f_0$

Transformada discreta de Fourier

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} X(m)\, e^{j\frac{2\pi}{N} m n}, \quad \text{com } \overbrace{X(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N} m n}}^{\text{FFT}}$$

$T_a = \frac{T_0}{N} \Leftrightarrow f_a = \frac{N}{T_0} \Leftrightarrow f_a = N f_0$ frequência de $X(m)$: $\frac{m}{T_0} = \frac{m}{N T_a} = \frac{m}{N} f_a$

Aliasing → Ocorre quando 2 réplicas do sinal se cruzam de modo que não é possível recuperar o sinal por amostragem e interpolação ideal. Quando $f_a < 2f_0$, uma alta frequência é medida errado como se fosse mais baixa. Assim, devemos remover todas as componentes com $f_0 > \frac{f_a}{2}$ antes da amostragem, através de um filtro analógico

Quantização

$\Delta = \frac{2A}{N}$ $\quad x_q(n) = \text{round}\left(\frac{x(n)}{\Delta}\right)$ $\quad x_r(n) = \Delta x_q(n) = \Delta\, \text{round}\left(\frac{x(n)}{\Delta}\right)$

$dB = 10\log_{10}(x)$ $\quad E_{abs} \leq \frac{\Delta}{2}$ $\quad P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{2}$

$$P(\varepsilon) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varepsilon^2(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2\, \text{pdf}(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

$SNR = \frac{P_x}{P_\varepsilon} = \frac{6A^2}{\Delta^2}$

↓

signal to noise ratio

Filtragem de sinais

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, x(n-k)$$

resposta em f do sistema

$$\text{Se } x(n) = e^{j2\pi f_0 n} \to y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, e^{j2\pi f_0 (n-k)} = e^{j2\pi f_0 n}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, e^{-j2\pi f_0 k}\right]$$

Código Huffman

Enquanto existem 2 ou mais símbolos, aglomeram-se os dois símbolos menos prováveis num novo símbolo, e usa-se um bit na codificação binária respetiva para os distinguir. Estes códigos binários, começam com o código do novo símbolo e terminam com o bit de desambiguação

nº bits médio = nº bits × p + ... $\quad H = -\sum p_i \log_2(p_i)$

Run Length Encoding (RLE)

→ Para codificar uma sequência de símbolos no RLE conta-se quantas vezes aparece consecutivo o mesmo símbolo e envia-se o símbolo e a respetiva contagem

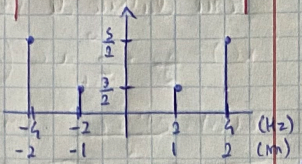
$\boxed{N}\boxed{S}$ → N+1 repetições de S

$\boxed{N}\boxed{S_1}\boxed{S_2}\boxed{S_{N+1}}$ → usa-se quando aparecem 2 ou mais símbolos sem repetição

[$x(t) = 3\sin(4\pi t) + 5\cos(8\pi t)$

$3\sin(4\pi t) \rightarrow f = 2Hz$
$5\cos(8\pi t) \rightarrow f = 4Hz$ $\Big\}$ $f = mdc(2,4) = \underline{2Hz}$

$x(t) = 3 \times \frac{e^{j2\pi 2t} - e^{-j2\pi 2t}}{2j} + 5 \times \frac{e^{j2\pi 4t} + e^{-j2\pi 4t}}{2}$]



$m = f \times T$

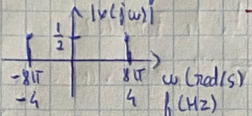
[$x(t) = \cos(8\pi t)$ com $f_a = 3Hz$ confunde-se com que sinais? gráfico $|x(j\omega)|$

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, com $f_0 = 4$

$x(nT_a) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_a} t\right)$, com $f_a = 3 \Rightarrow \cos\left(2\pi \frac{f_0 + k f_a}{f_a} t\right) \rightarrow f_0 + k f_a$ → ...; -2, $k=-2$; 1, $k=-1$; 4, $k=0$; 7, $k=1$; ...

confunde com estas freq

$\cos(8\pi t) = \frac{e^{j2\pi 4t} + e^{-j2\pi 4t}}{2}$]



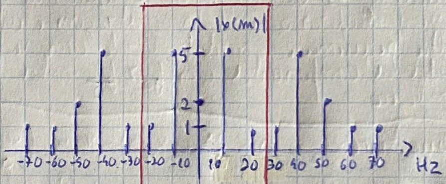
[Sinal com $f = 10Hz$ amostrado 5 vezes num período. gráfico de $|x(n)|$ com eixo x em Hz

n	$x(n)$
0	2
1	$3+4j$
2	-1
3	-1
4	$3-4j$

$f_a = 5 \times 10 = 50Hz$ ($5 \rightarrow N$, $10 \rightarrow f_0$)

frequência $x(n) \rightarrow \frac{n}{N} f_a = n f_0 = 10n$

n	$\lvert x(n)\rvert$	f
-5,0,5	2	-50,0,50
-4,0,4	5	-40,10,60
-3,0,3	1	-30,20,70
-2,0,2	1	-20,30,80
-1,0,1	5	-10,40,90



[$x(n) = 2\cos(8\pi t + 1) - 2\sin(13\pi t) + \cos(17\pi t)$ com 10 bits → A, Δ, x_q, x_r, ε_{abs}, ε quadrático médio

$|x(n)| \leq |2\cos(8\pi t + 1)| + |-2\sin(13\pi t)| + |\cos(17\pi t)| = 2 + 2 + 1 = \underline{5}$

$\Delta = \frac{2A}{2^N - 2} = \frac{2 \times 5}{1024 - 2} \simeq \frac{10}{1000} = \underline{\frac{1}{100}}$ $\quad x_q(n) = round\left(\frac{x(n)}{\Delta}\right) = \underline{round(100\, x(n))}$

$x_r(n) = \Delta x_q(n) = \underline{0{,}01\, round(100\, x(n))}$ $\quad \varepsilon_{abs} = \frac{\Delta}{2} = \underline{0{,}005}$ $\quad \varepsilon_{quad} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{0{,}0001}{12} \simeq \underline{10^{-5}}$

[$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$ → gráfico valor absoluto resposta em frequência

$x(n) = e^{j2\pi f_0 n} \rightarrow y(n) = x(n)\left[1 + 2e^{-j2\pi f_0} + e^{-j4\pi f_0}\right]$

$1 + 2e^{-j2\pi f_0} + e^{-j4\pi f_0} = e^{-j2\pi f_0}\left[e^{j2\pi f_0} + 2 + e^{-j2\pi f_0}\right] =$

$= e^{-j2\pi f_0}\left[2 + 2\cos(2\pi f_0)\right] \rightarrow 2\left[1 + \cos(2\pi f_0)\right]$