Primitiva
= antiderivada

3. Integrais Indefinidos

primitivas | seja $f: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e F diferenciável $\forall x \in J$. F é primitiva de f sse $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in J$

toda a primitiva de uma função é uma função contínua

notas
F diferenciável em J sse | $\forall x \in]a,b[$ F é diferenciável
$\exists F'_+(a)$ e $F'_-(b)$ e são finitas

propriedades | se F for diferenciável...
(a) seja $F(x)$ primitiva de f, $G(x) = F(x) + C$ é tmb primitiva
(b) $F(x) - G(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$
(b1) $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$
(b2) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

integral indefinido de f | é a família de todas as primitivas de f
$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

propriedade | f e g primitiváveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int f(x) + \beta \int g(x)$$

primitivas quase imediatas | $G(h(x))$, função composta
$(G(h(x)))' = G'(h(x)) \times h'(x) = g(h(x)) \times h'(x)$
sendo G primitiva de g

$$\int g(h(x)) \times h'(x)\,dx = G(h(x)) + C, C \in \mathbb{R}$$ VIP

integração por partes | $\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x) g(x)\,dx + \int f(x) g'(x)\,dx$
$f(x)\,g(x) = \int f'(x) g(x)\,dx + \int f(x) g'(x)\,dx$

$$\int f'(x) g(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx$$

(i) $\int P_k(x) \operatorname{sen}(bx)$
$\cos(bx)$
e^{ax}
$g(x) = P_k(x)$

(ii) $\int P_k(x) \ln(bx)$
$\operatorname{arcsen}(x)$
$\arccos(x)$
$\operatorname{arctg}(x)$
$\operatorname{arccotg}(x)$
$f'(x) = P_k(x)$

(iii) $\int e^{ax} \operatorname{sen}(x)$
$\cos(x)$
por hipótese (uma ou outra)
2 vezes por partes

integração de funções trigonométricas

1 potências ímpares de sen u ou cos u
destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função, usando $sen^2 u + cos^2 u = 1$

1.2 duas potências ímpares de sen e cos u
destaca-se uma unid à uma das potências ímpares* e o fator resultante passa-se para a cofunção
$sen^2 u + cos^2 u = 1$
*(de preferência cos u)

2 potências pares de sen u ou cos u
passam-se para o arco duplo através das fórmulas
$cos^2 u = \frac{1 + cos(2u)}{2}$ $\quad sen^2 u = \frac{1 - cos(2u)}{2}$

3 produtos onde existem fatores tipo sen (mu) ou cos (mu)
aplicam-se as fórmulas
- $sen\,u\,sen\,y = 1/2\,(cos(u-y) - cos(u+y))$
- $cos\,u\,cos\,y = 1/2\,(cos(u+y) + cos(u-y))$
- $sen\,u\,cos\,y = 1/2\,(sen(u+y) + sen(u-y))$

ou faz-se integração por partes

4 potências pares e ímpares de tg u ou cotg u
destaca-se $tg^2 u$ ou $cotg^2 u$ e aplicam-se as fórmulas
$tg^2 u = sec^2 u - 1$ ou $cotg^2 u = cosec^2 u - 1$

5 potências pares de sec u ou cosec u
destaca-se $sec^2 u$ ou $cosec^2 u$ e ao fator resultante aplicam-se as fórmulas
$sec^2 u = 1 + tg^2 u$ $\quad cosec^2 u = 1 + cotg^2 u$

6 potências ímpares de sec u ou cosec u
destaca-se $sec^2 u$ ou $cosec^2 u$ e primitiva-se por partes escolhendo esse fator para primitivar

como resolver primitivas trigonométricas?

$\int sen\,u\,cos\,u$
- $\frac{1}{2}\int sen(2u)'\,du = \frac{1}{2}\,\frac{(-cos(2u))}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
- por partes (2x)
- integração de funções trigonométricas (acima) é a + rápida e + fácil

Divisão de polinómios

$\begin{array}{c|c} D & d \\ \hline r & q \end{array}$

$\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$

integração por substituição

$\int f(e^u)\,du \qquad t = e^u$

$\int f(\ln u)\,du \qquad t = \ln u$

$\int f(u, u^{p/q}, u^{r/s}, \dots)\,du \qquad t = u^{\frac{1}{m}}$, $m = \text{mmc}(q, s)$

integração de funções envolvendo radicais

$\sqrt{a^2 - b^2u^2} \qquad u = \frac{a}{b}\,\text{sen}\, t \quad \wedge \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$\sqrt{a^2 + b^2u^2} \qquad u = \frac{a}{b}\,\text{tg}\, t \quad \wedge \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$\sqrt{b^2u^2 - a^2} \qquad u = \frac{a}{b}\,\sec t \quad \wedge \quad t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

integração de funções racionais

$\int \frac{P_K(u)}{Q_S(u)}$. P_K polinómio de ordem K, $Q_S(u) \neq 0$
Q_S polinómio de ordem S

① $K < S$ nº de raízes (zeros) de $Q_S(u) = S$

a) $u_1, u_2, \dots, u_S \in \mathbb{R}$ raízes de $Q_S(u)$, tal que $u_i \neq u_j$ se $i \neq j$

$$\frac{P_K(u)}{Q_S(u)} = \frac{P_K(u)}{(u-u_1)\dots(u-u_S)} = \frac{A_1}{(u-u_1)} + \frac{A_2}{u-u_2} + \dots + \frac{A_S}{u-u_S}$$

b) $Q(s)$ tem raízes reais c/ multiplicidade ≥ 1

$Q(s) = (u-u_1)(u-u_2)\dots(u-u_{S-1})^2$ por exemplo

resolução pelo mesmo método

② $K < S$ raízes de $Q(s)$ reais e complexas

a) $Q(u)$ tem raízes complexas

$Q(u) \neq (u-u_1)(u-u_2)$ ñ se aplica às complexas

$Q_S(u) = E(u)F(u)$

$$\frac{P_K(u)}{Q_S(u)} = \frac{Au+B}{E(u)} + \frac{Cu+D}{F(u)}$$

b) $Q(\ )$ tem raízes reais e complexas

resolução pelo mesmo método

Fórmulas extra

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

números complexos

$\sqrt{-1} = i$

3 $K > S$

$$\frac{P_k(n)}{Q_s(n)} = q(n) + \frac{r(n)}{d(n)} \qquad \begin{array}{r|l} D & \underline{d} \\ r & q \end{array}$$

grau $d(n) >$ grau $r(n)$ casos 1 e 2