5 Integrais Impróprios

introdução

até aqui estudámos intervalos de integração limitados, mas existem casos onde esta condição não se verifica, sendo por isso necessário um novo conceito de integral: o integral impróprio

espécies		
	1ª espécie	J é ilimitado
	2ª espécie	f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de J
	3ª espécie	J é ilimitado e f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de J

1ª espécie

$f: J \to \mathbb{R}$ $\quad J = [a, +\infty[$ (1)

$=]-\infty, b]$ (2)

$=]-\infty, +\infty[$ (3)

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

(2) $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx$

natureza dos integrais

~~espécie~~

convergente ✓

divergente

2ª espécie

$f: J \to \mathbb{R}$, $\quad J = [a, b[$ ilimitada em b^- (1)

$=]a, b]$ ilimitada em a^+ (2)

$= [a, b]$ ilimitada em $c \in]a, b[$ (3)

(1) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

conclusões 1ª e 2ª espécies

- (1), (2) se $\exists$ limite finito (e único) então o integral impróprio é convergente (se $\pm\infty$, ñ é único)
- (3) se $\nexists$ limite, é divergente

3^a espécie | 1^a espécie $\cup$ 2^a espécie

propriedades $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

① se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são convergentes

então $\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx$ é convergente $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$= \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

② se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente

então $\int_a^{+\infty} \alpha f(x)\,dx$ é divergente $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

③ se $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável à Riemann $\forall [a,t] \subset [a, +\infty[$
$b > a$

então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$

logo $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ têm a mesma natureza

critério de comparação

$f, g: [a, +\infty[$ integráveis $\forall [a,t] \subset [a, +\infty[$ $\quad$ $f, g:]a, b]$

$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, +\infty[$ $\quad$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$

então ① se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente
$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)$ é convergente

② se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente
$\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente

critério do limite

$f, g: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integráveis $\forall [a,t] \subset [a, +\infty[$

$f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \in [a, +\infty[$

$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad$ $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

então ① se $L \in \mathbb{R}^+$ finito e único
$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ têm mm natureza

② se $L = 0 \rightarrow g(x) > f(x)$ critério de comparação

③ se $L = +\infty \rightarrow f(x) > g(x)$ critério de comparação

convergência absoluta	$f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável $\forall [a, t] \subset [a, +\infty[$ $\int_a^{+\infty} \lvert f(x) \rvert \, dx$ é convergente então $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ é absolutamente convergente

conclusões 1ª espécie	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx$	divergente se $\alpha \leq 1$ convergente se $\alpha > 1$
	$\int_0^{+\infty} e^{\beta x} \, dx$	divergente se $\beta \geq 0$ convergente se $\beta < 0$
	$\int_{-\infty}^{0} e^{\beta x} \, dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ podemos, desde que provemos	

conclusões 2ª espécie	$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha} \, dx$	divergente se $\alpha \geq 1$ convergente se $\alpha < 1$