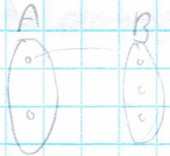
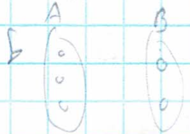
Ficha 5

1

a) Numa função $A \to B$, a cada elemento de A poderá corresponder um ~~grupo~~ elemento B (entre 3 possíveis) logo, pelo princípio de multiplicação, será: $3 \times 3 = 9$





então cada um dos 3 elementos de A poderá corresponder 2: $2 \times 2 \times 2 = 8$

b) Uma função é injetiva se $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

$\underline{\ \ }_{3}\ \underline{\ \ }_{2}$

$3 \times 2 = 6$

2 Existem 51 numeros pares entre 0 e 100:

$\frac{100}{2} = 50$

$\frac{0}{2} = 0$, logo 0 também é divisível por 2

$50 + 1 = 51$

Com números distintos sera $51 - 5 = 46$

Pares com números iguais: 22, 44, 66, 88, 100

3 X: "Números não superiores a 1000" $|X| - |A \cup B \cup C|$

A: "Números divisíveis por 4"

B: "Números divisíveis por 6"

C: " " " 9"

$|A|$ 1000 $\quad |A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| = 250+183+111$

$-83-28-56$

$+28$

$=$

$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor = 250$

$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 183$

$|C| = \left\lfloor \frac{1000}{9} \right\rfloor = 111$

$|A\cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor = 83$

$|A\cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{36} \right\rfloor = 28$

$|B\cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{18} \right\rfloor = 56$

$|A\cap B\cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{36} \right\rfloor = 28$

5. $|A| = 200$ $\quad |M| = 60$ $\quad |H| = |A|-|M| = 200-60 = 140$

$|Mat| = 50$ $\quad |M\cap Mat| = 20$ $\quad |H\cap Mat| = |Mat| - |M\cap Mat| = 30$

$|Ecol| = 140$ $\quad |M\cap Ecol| = 45$ $\quad |H\cap Ecol| = |Ecol| - |M\cap Ecol| = 95$

$|Mat\cap Ecol| = 24$ $\quad |M\cap Eco\cap Mat| = 16$ $\quad |H\cap Mat\cap Ecol| = 8$

$|H| - |H\cap Mat| - |H\cap Ecol| + |H\cap Mat\cap Ecol| = 8$

$= 140 - 30 - 95 + 8 = 23$

4.

$|P| = 50$

$|E|$ ... $\quad |I\cap Esp\cap Fra| = 3$

... $17-10-5-7+3)$

$\pi = (4\ 6\ 2\ 1\ 5\ 3\ 7)$

ii) $\begin{matrix}1 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & & \end{matrix}$ ...

b) $13\times 2 = 26$

$26+1 = 27$ $\quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (73264\ldots$

Con 27 convidados, ...

¬C(y) v ¬grito(a,y)

¬C(y) v ¬grito(a,y)

¬C(PI) v ¬grito(a,PI)

C(PI)

¬grito(a,PI)

grito(a,PI)

□

$|A|$ ~~1000~~ $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 250 + 183$
$- 83 - 28 -$
$+ 28$
$=$

$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor = 250$

$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor \approx 183$

$|C| = \left\lfloor \frac{1000}{9} \right\rfloor = 111$

$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor = 83$

$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{36} \right\rfloor = 28$

$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{18} \right\rfloor = 56$

$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{36} \right\rfloor = 28$

5

$|A| = 200$ $\quad$ $|M| = 60$ $\quad$ $|H| = |A| - |M| = 200 - 60 =$

$|Mat| = 50$ $\quad$ $|M \cap Mat| = 20$ $\quad$ $|H \cap Mat| = |Mat| - |M \cap Mat| = 3$

$|Eco| = 140$ $\quad$ $|M \cap Eco| = 45$ $\quad$ $|H \cap Eco| = |Eco| - |M \cap Eco| = 9$

$|Mat \cap Eco| = 24$ $\quad$ $|M \cap Eco \cap Mat| = 16$ $\quad$ $|H \cap Mat \cap Eco| = 8$

$|H| - |H \cap Mat| - |H \cap Eco| + |H \cap Mat \cap Eco| = 8$

$= 140 - 30 - 95 + 8 = 23$

4.

$|P| = 50$

$|I| = 22$ $\quad$ $|I \cap Esp| = 10$ $\quad$ $|I \cap Esp \cap Fra| = 3$

$|Esp| = 23$ $\quad$ $|I \cap Fra| = 5$

$|Fra| = 17$ $\quad$ $|Fra \cap Esp| = 7$

$|P| - |I \cup Esp \cup Fra| = 50 - (22 + 23 + 17 - 10 - 5 - 7 + 3)$

$= 50 - 43 = 7$

6

a) $\pi \circ \rho = (1\ 3\ 4\ 2\ 6\ 5\ 7)$ $\qquad$ $\rho \circ \pi = (4\ 6\ 2\ 1\ 5\ 3\ 7)$

$\rho = (7\ 2\ 6\ 3\ 1\ 4\ 5)$

$\pi = (6\ 3\ 2\ 5\ 7\ 4\ 1)$

b) $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (732$

$\rho^{-1} = (5\ 2\ 4\ 6\ 7\ 3\ 1) = (5246731)$

c) π

$\pi(1)=6$ $\quad$ $\pi(2)=3$ $\quad$ $\pi=\{\{1,6,4,5,7\},\{2,3\}\}$

$\pi(6)=4$ $\quad$ $\pi(3)=2$

$\pi(4)=5$

$\pi(5)=7$

$\pi(7)=1$

$\rho(1)=7$ $\quad$ $\rho(2)=2$ $\quad$ $\rho(3)=6$ $\quad$ $\rho=\{\{7,5,1\},\{2\},\{6,4,3\}\}$

$\rho(7)=5$ $\quad$ $\rho(6)=4$

$\rho(5)=1$ $\quad$ $\rho(4)=3$

d) π é do tipo $2^1 5^1$

ρ é do tipo $1^1 3^2$

e) $sgn(\pi)=(-1)^1=-1$, par

$sgn(\rho)=(-1)^0=1$, impar

f) $\theta=(72618345)$

$\theta(1)=7$ $\quad$ $\theta(2)=2$ $\quad$ $\theta=\{\{1,7,5,3,6,4\},\{2\}\}$

$\theta(7)=5$ $\quad$ do tipo $1^1 6^1$

$\theta(5)=3$

$\theta(3)=6$

$\theta(6)=4$

$\theta(4)=1$

g) As permutações do tipo $2^1 3^2 4^1$ tem $2+3+3+4=12$

$$\frac{12!}{2^1\cdot 3^2\cdot 4^1\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!}=$$

7

a)

	1	2	3	4	5	6	7	8
θ	6	2	3	7	4	8	1	5
π	1	3	2	6	5	7	8	4
ρ	7	3	2	8	6	4	1	5

b) $\pi=\{\{1\},\{2,3\},\{4,6,7,8\},\{5\}\}$

$\pi=1^2 2^1 4^1$

$$\frac{8!}{1^2 2^1 4^1\, 2!\cdot 1!\cdot 1!}=2520$$

8

a) n^k

b) $\underline{\quad}_{n}\ \underline{\quad}_{n-1}\ \underline{\quad}_{n-1}\ \underline{\quad}\ \dots\ \underline{\quad}$ $\quad$ $n\cdot(n-1)^k$

c) $\underline{\quad}_{n}\ \underline{\quad}_{n-1}\ \underline{\quad}_{n-1}\ \underline{\quad}_{n-1}\ \underline{\quad}_{1}\ \underline{\quad}_{1}\ \underline{\quad}_{1}$ $\quad$ $n\cdot(n-1)^{(k/2)}$

$\underline{\quad}_{n}\ \underline{\quad}_{n-1}\ \underline{\quad}_{n-1}\ \underline{\quad}_{1}\ \underline{\quad}_{1}\ \underline{\quad}_{1}$

9

a) _ _ _ _

$\underset{8}{\uparrow}\ \underset{9}{\uparrow}$

$9000 - 8 + 9^3$

b)

1 1 8 7

7 1 1 7

7 7 1 1

$8 \times 7 + 7^2 \times 2$

c) _ _ _ _

4 5 5 5

4×5^3

10

$|P| = 230$

$|H| = 164$

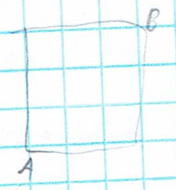
$|M| = 66$

$\cancel{{}^{165}\ {}^{164}A_5 \times {}^{66}A}$

${}^{164}C_5 \times \binom{164}{5} \times \binom{66}{5}$

11

a)



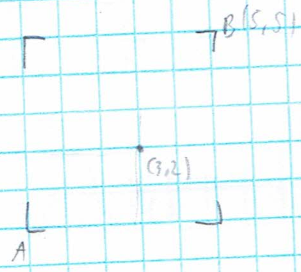
$A \to B$ $\underset{\text{direita}}{DDD}\ \underset{\text{cima}}{CCC}$

Numero de palavras diferentes com n D's e n C's:

$\binom{2n}{n,n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$

(Permutação com repetição)

b)



$\binom{5}{3,2} \times \binom{5}{2,3} = \frac{5!}{3!\,2!} \times \frac{5!}{3!\,2!} = 10 \times 10 = 100$

13

$\binom{8+12-1}{\cancel{12}\ 8} = \binom{19}{8}$

12

a) $\binom{8+5-1}{8} = \binom{12}{8}$

b) 5^8

14

$\underbrace{\binom{6+5-1}{6}}_{Bb} \times \underset{FB}{5^7} =$

Exempo $\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

$x^k - 4x^{k-1} + 4x^{k-2} = 0$

$x^{k-2}(x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x = 2$

$a_n = (C_1 + C_2 n) 2^n$

$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

15

$\binom{9}{7,2} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \times 8}{2!} = 36$

16

a) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ pode ser escrito como:

111..1 0 11..1 0...

Ou seja considerando r 1's, a soma pode ser escrita como uma palavra com o mesmo número de 1's mas separado por $n-1$ 0's para indicar sinal soma, ou seja, o fim do número

b) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$

3 + 5 + 3 = 11 (exemplo)

$\Rightarrow$ 1110111110111

$\binom{13}{11,2} = \frac{13!}{11!2!} = \frac{13 \times 12}{2} = 13 \times 6$

~~c)~~ Se $x_1 \geq 1$ e $x_2 \geq 2$ então o número é

$|U| - |A \cup B| = 13 \times 6 - 33 = 45$

número total de soluções

número de soluções com $x_1 < 1$

número de soluções com $x_2 < 2$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$= \binom{12}{11} + 23 - 2$

$= 33$

$|A| = x_1 + x_2 + x_3$

0 0 1...1 0 1...1

$\binom{12}{11}$

$|B| = x_1 + x_2 + x_3$

1...1 0 0 1...1 $\rightarrow$ 12

1...1 0 1 0 1...1 $\rightarrow$ 11

23

$|A \cap B| = 2$

17

18 $\;{}^{57}A_{20}$

19

a) $\binom{57}{45,\underbrace{1,1,1,\ldots,1}_{12\text{ uns}}} = \dfrac{57!}{45!}$

b)

$\underline{}$ S $\underline{}$ E $\underline{}$ E $\underline{}$ E ... S $\underline{}$ E $\underline{}$ E $\underline{}$ E

É preciso 3 espaços entre símbolos, logo pelo menos 11x3=33 espaços, portanto o resto da mensagem será

$\binom{57-33}{45-33,1,1,1,\ldots,1} = \dfrac{24!}{12!}$

20

a) $\binom{14}{2,3,1,2,3,1,1}$

b) $\binom{14}{2,3,1,2,3,1,1} - 12\times\binom{11}{2,1,2,3,1,1}$