Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

15 de dezembro de 2021
Duração total: 2 horas

Questão 1 (65 pts)

Seja f a função definida por $f(x) = \text{arcsen}(\sqrt{x-2}) - \dfrac{\pi}{2}$.

1. Determine o domínio de f, D_f.
2. Justifique que f tem máximo e mínimo globais em D_f e calcule os seus valores.
3. Indique, justificando, o contradomínio de f.
4. Justifique que f é invertível e defina a função inversa de f (indique expressão analítica, domínio e contradomínio).
5. Determine o limite $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x-3}$.

Resolução:

1. Como
$$D_{\sqrt{x}} = [0, +\infty[\quad \text{e} \quad D_{\text{arcsen}\, x} = [-1, 1],$$
resulta que:
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0 \wedge -1 \leq \sqrt{x-2} \leq 1\}.$$
Assim,
$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$
$$-1 \leq \sqrt{x-2} \text{ condição universal pois } 0 \leq \sqrt{x-2}$$
$$\sqrt{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-2 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$$
e o domínio de f é
$$D_f = [2, 3].$$

2. Apresentam-se duas hipóteses de resposta:

   (a) Como as funções $a(x) = \text{arcsen}\, x$ e $r(x) = \sqrt{x-2}$ são ambas crescentes, a função composta é também crescente, e portanto os extremos absolutos da função ocorrem nas extremidades do intervalo que corresponde ao domínio da função, ou seja
$$\text{Máximo global de } f: \ f(3) = \text{arcsen}(\sqrt{3-2}) - \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\text{mínimo global de } f: \ f(2) = \text{arcsen}(\sqrt{2-2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

   (b) Usando a função derivada para estudar a monotonia:
$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x-2})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x-2})^2}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{1-(x-2)}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}\sqrt{3-x}}$$
   O domínio da função derivada é $D_{f'} =]2, 3[$. A função f é estritamente crescente neste intervalo, já que $f'(x) > 0$, $\forall x \in]2, 3[$. Sendo a função f contínua, os extremos globais da função são atingidos nas extremidades do domínio:
$$\text{Máximo global de } f: \ f(3) = \text{arcsen}(\sqrt{3-2}) - \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\text{mínimo global de } f: \ f(2) = \text{arcsen}(\sqrt{2-2}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Como foi visto na alínea anterior, o máximo de f é 0 e o mínimo é $-\dfrac{\pi}{2}$, logo o contradomínio de f é

$$CD_f = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

4. Duas hipóteses de resposta para justificar que f é invertível:

   (a) Sendo f estritamente crescente, f é injetiva, logo invertível.

   (b) A função f é injetiva, porque as funções $a(x) = \operatorname{arcsen} x$ e $r(x) = \sqrt{x-2}$ são ambas injetivas:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \operatorname{arcsen}(\sqrt{x_1 - 2}) - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x_2 - 2}) - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arcsen}(\sqrt{x_1 - 2}) = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x_2 - 2}) \underset{\text{porque } a(x) \text{ é injetiva}}{\Leftrightarrow} \sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2}$$

$$\underset{\text{porque } r(x) \text{ é injetiva}}{\Leftrightarrow} x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

   então a função f é injetiva, logo invertível.

   Para determinar a expressão da inversa, resolve-se em ordem ao x a equação:

$$y = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x-2}) - \frac{\pi}{2}.$$

$$y + \frac{\pi}{2} = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x-2}) \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \left(\operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + 2 = x.$$

   e a função inversa é dada por

$$f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$$

   com $x \in D_{f^{-1}} = CD_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$. O contradomínio de f^{-1} é $CD_{f^{-1}} = D_f = [2, 3]$.

5. O limite $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x-3}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ dado que $\operatorname{arcsen}\sqrt{3-2} = \operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$. Aplicando a regra de Cauchy a este limite, tem-se

$$\lim_{x \to 3} \frac{f'(x)}{(x-3)'} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}\sqrt{3-x}}}{1} = +\infty.$$

   Como este último limite existe, pode-se afirmar que

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{f'(x)}{(x-3)'} = +\infty.$$

Questão 2 (40 pts)

1. Determine a função f que satisfaz as condições

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 2\pi.$$

2. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$.

Resolução:

1. Tendo em conta que

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(e^x) + C,\ C \in \mathbb{R},$$

$f(x)$ é da forma $\operatorname{arcsen}(e^x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Deste modo,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\pi \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} (\operatorname{arcsen}(e^x) + C) = 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + C = 2\pi \Leftrightarrow C = \frac{3\pi}{2}.$$

Assim, a função f que satisfaz as condições dadas é

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x) + \frac{3\pi}{2}.$$

2. Primitivando por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int x\ln(x+1)\,dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

.

Universidade de Aveiro 15 de dezembro de 2021

Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2 Duração total: 2 horas

Questão 3 (40 pts)

Calcule os seguintes integrais indefinidos:

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} \, dx$, com $x > 2$.

Resolução 1. Como

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x),$$

temos que

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x),$$

por aplicação directa da fórmula fundamental da trigonometria. Assim,

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2(x) \, \mathrm{d}\,x &= \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\,x - \frac{1}{4}\int \big(2\cos(2x)\big) \, \mathrm{d}\,x \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Resolução 2. Efetuando a mudança de variável

$$x = 2\sec(t), \ t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

e atendendo que $\mathrm{d}\,x = 2\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}\,t$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} \, \mathrm{d}\,x &= \left(\int \frac{\cos^2(t)}{4} \frac{1}{\sqrt{4(\sec^2(t)-1)}} 2\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)} \, \mathrm{d}\,t\right)_{t=\arccos\left(\frac{2}{x}\right)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\int \cos(t) \, \mathrm{d}\,t\right)_{t=\arccos\left(\frac{2}{x}\right)} \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{2}{x}\right)\right) + c \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} + c \\
&= \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c, \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Questão 4 (25 pts)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ tal que:

- f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ e
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

1. Mostre que existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 0$.
2. O que pode concluir sobre a existência de extremo global em c? Caso exista, classifique-o.

Resolução.
Como f é uma função duas vezes derivável em $\mathbb{R}$, então f e f' são contínuas em $\mathbb{R}$.

Agora, como $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, então

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_{f'}, x > \delta \Rightarrow f'(x) > \epsilon.$$

Assim, se consideramos, por exemplo, $\epsilon = 100$, $\exists \delta > 0$: $x_1 \in D_{f'}$, $x_1 > \delta$, então $f'(x_1) > 100 > 0$.
Do mesmo modo, como $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$, então

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_{f'}, -x > \delta \Rightarrow -f'(x) > \epsilon.$$

Assim, se consideramos $\epsilon = 100$, $\exists \delta > 0 : x_2 \in D_{f'}$, $x_2 < -\delta$, então $f'(x_2) < -100 < 0$.

Portanto, pelo corolário do Teorema de Bolzano, como f' é contínua em $\mathbb{R}$ e $f'(x_1)f'(x_2) < 0$, então existe um $c \in]x_1, x_2[$ tal que:

$$f'(c) = 0.$$

Dado que f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, podemos garantir que c é único.
Como f é derivável em $\mathbb{R}$, temos que $x = c$ é o único ponto crítico de f.

Uma vez que c é o único ponto de interseção de f' com o eixo x, f' é estritamente crescente, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$, então $f'(x) < 0$ se $x < c$ e $f'(x) > 0$ se $x > c$. Logo,

x		c	
f'	$-$ $-\infty$	0	$+$ $+\infty$
f	$\searrow$	$f(c)$ $\downarrow$ mínimo absoluto	$\nearrow$

Portanto, em $x = c$ a função f atinge um mínimo absoluto.

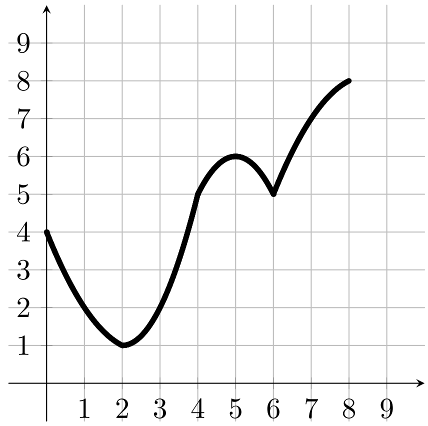
Universidade de Aveiro
Teste 1 de Cálculo I - Agrupamento 2

15 de dezembro de 2021
Duração total: 2 horas

Questão 5 (30 pts)

Para cada uma das questões seguintes, assinale a opção correta.

1. Considere a função f definida no intervalo $[0, 8]$ cujo gráfico se apresenta na figura.
Seja $\overline{S}_f(P)$ a soma superior de f relativamente à partição P do intervalo $[0, 8]$ definida por
$$P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
Então, $\overline{S}_f(P)$ é igual a:



(A) $4+2+3+4+5+6+7+8$. ☐
(B) $2+1+2+5+6+5+7+8$. ☐
(C) $4+2+2+5+6+6+7+8$. ☒
(D) $4+2+1+2+5+6+5+7$. ☐

2. O número de raízes reais distintas do polinómio $p(x) = \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}$ é

(A) 1. ☐
(B) 2. ☒
(C) 3. ☐
(D) 4. ☐

3. Considere a função racional definida por $f(x) = \dfrac{x^4 + 5x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 2x + 5)(x - 2)^2(x^2 + 2)^2}$. A sua decomposição em fatores simples é dada por

(A) $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C_1}{x-2} + \dfrac{C_2}{(x-2)^2} + \dfrac{D_1x + E_1}{x^2+2} + \dfrac{D_2x + E_2}{(x^2+2)^2}$. ☐
(B) $\dfrac{Ax + B}{x^2+2x+5} + \dfrac{C_1}{x-2} + \dfrac{C_2}{(x-2)^2} + \dfrac{D_1x + E_1}{x^2+2} + \dfrac{D_2x + E_2}{(x^2+2)^2}$. ☒
(C) $\dfrac{Ax + B}{x^2+2x+5} + \dfrac{C}{(x-2)^2} + \dfrac{Dx + E}{(x^2+2)^2}$. ☐
(D) $\dfrac{A}{x^2+2x+5} + \dfrac{C_1}{x-2} + \dfrac{C_2}{(x-2)^2} + \dfrac{D_1}{x^2+2} + \dfrac{D_2}{(x^2+2)^2}$. ☐