calculolista8

Filipe Campos

May 2023

1 Questão 2

Determine a taxa de variação de f em P na direção e sentido de $\vec{v}$.

$f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2$ $P(3, -1) e \vec{v} =$ (1,1)

Primeiro vamos calcular o vetor unitário

Dado o vetor $\mathbf{v} = (1, 1)$, vamos calcular o vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}$.

Primeiro, precisamos encontrar o comprimento do vetor $\mathbf{v}$. Isso pode ser feito usando a fórmula da norma:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Substituindo os valores de $\mathbf{v}$, temos:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Agora, podemos calcular o vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}$ dividindo cada componente de $\mathbf{v}$ pelo seu comprimento:

$$\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Portanto, o vetor unitário correspondente a $\mathbf{v} = (1, 1)$ é $\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Dada a função $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2$ e o ponto $P = (3, -1)$, vamos substituir os valores de x e y nas derivadas parciais.

A derivada parcial de f em relação a x, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}$, é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 5y$$

Substituindo os valores de x e y pelo ponto P, temos:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = 2(3) - 5(-1) = 6 + 5 = 11$$

A derivada parcial de f em relação a y, denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}$, é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -5x + 6y$$

Substituindo os valores de x e y pelo ponto P, temos:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = -5(3) + 6(-1) = -15 - 6 = -21$$

Portanto, substituindo os pontos $P = (3, -1)$ nas derivadas parciais de f, obtemos:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P = 11$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P = -21$$

article amsmath

Dada a função $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2$, o ponto $P = (3, -1)$ e o vetor unitário $\hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, vamos multiplicar os resultados das derivadas parciais pelo vetor unitário.

A derivada parcial de f em relação a x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, avaliada no ponto P, é 11. Multiplicando esse valor pelo componente x do vetor unitário, obtemos:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P \cdot \hat{u}_x = 11 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

A derivada parcial de f em relação a y, $\frac{\partial f}{\partial y}$, avaliada no ponto P, é -21. Multiplicando esse valor pelo componente y do vetor unitário, obtemos:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_P \cdot \hat{u}_y = -21 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{21}{\sqrt{2}}$$

Somando os dois resultados obtemos que a derivada direcional é $16\sqrt{2}$

2 Questão 2

Para determinar a taxa de variação de f em P na direção e sentido de $\mathbf{v}$, podemos usar a derivada direcional. Primeiro, vamos encontrar o vetor gradiente de f no ponto P.

Dada a função $f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}$, queremos calcular a derivada direcional de f no ponto $P(2, 1)$ na direção do vetor $\mathbf{v}(1, 1)$.

O vetor gradiente ∇f de f é dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(x+y) - x^2}{(x+y)^2} = \frac{x(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

Agora podemos calcular ∇f no ponto $P(2,1)$:

$$\nabla f(P) = \left(\frac{2}{2+1}, \frac{2^2}{(2+1)^2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$$

O vetor $\mathbf{v}(1,1)$ já está dado. Para que ele seja unitário, podemos dividir cada componente pelo seu comprimento:

$$\mathbf{v}_{unit\acute{a}rio} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Agora, podemos calcular a taxa de variação usando a fórmula da derivada direcional:

$$D_{\mathbf{v}} f = \nabla f(P) \cdot \mathbf{v}_{unit\acute{a}rio}$$

Substituindo os valores, temos:

$$D_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{4}{9\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+4}{9\sqrt{2}}$$

Portanto, a taxa de variação de f em P na direção e sentido de $\mathbf{v}$ é $\frac{2\sqrt{2}+4}{9\sqrt{2}}$.

3 Questão 8

Dada a função $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, vamos determinar a direção em que a função decresce mais rapidamente no ponto $P(1,1)$.

O gradiente da função $f(x,y)$ é dado pelo vetor $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Calculando as derivadas parciais, obtemos:
$\frac{\partial f}{\partial x} = x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y$

Portanto, o gradiente de $f(x,y)$ é:
$\nabla f(x,y) = (x,y)$

Agora, avaliando o gradiente em $P(1,1)$, temos:
$\nabla f(1,1) = (1,1)$

Assim, a direção em que a função decresce mais rapidamente em $P(1,1)$ é $\nabla f(1,1) = (1,1)$.