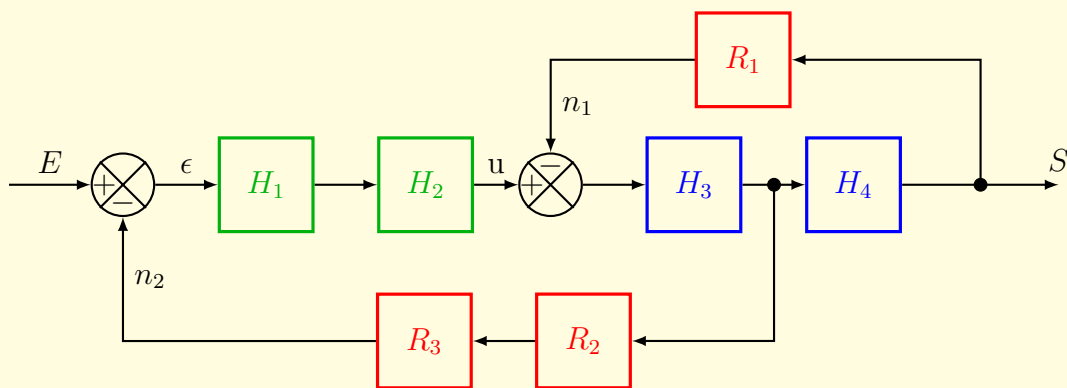


Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé
Automatique*



ANNÉE 2019–2020

Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé
Automatique*

Filipe Manuel Vasconcelos

écrit sous L^AT_EX, TikZ
version de janvier 2020.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence
Creative Commons “Attribution - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : filipe.vasconcelos@esme.fr

Table des matières

Table des matières	5
Avant-propos	7
Chapitre 1 Systèmes linéaires, continus...	9
1 Introduction	10
2 Définition SLCI	11
2.1 Système	11
2.2 Système à temps continu	12
2.3 Système linéaire	12
2.4 Système causal	12
2.5 Système invariant	13
2.6 Système stable	13
2.7 Modélisation d'un système linéaire continu et invariant . . .	13
3 Modélisation d'un signal	15
3.1 Propriétés générales des signaux continus (analogiques) . . .	16
3.2 Signaux usuels rencontrés...	17
4 La transformée de Laplace	25
4.1 Définition	25
4.2 Propriétés	26
4.3 Transformées des signaux usuels	29
4.4 Application de la transformée de Laplace	32
5 Fonction de Transfert	37
5.1 Définition	37
5.2 Fonction de transfert et réponse impulsionnelle	37
5.3 Représentation de la fonction de transfert	38
5.4 Notion de pôles dominants	42

Avant-propos

Programme

Ce cours est une introduction à l'**automatique** pour des étudiants de deuxième année de classe préparatoire scientifique.

L'objectif principal de l'automatique est de permettre le contrôle des **systèmes dynamiques** de toutes natures que ce soient : mécanique, chimique, électronique, optique, thermique, acoustique... Tout en respectant certaines contraintes de performances (rapidité, précision, stabilité...).

Nous limiterons notre étude aux **systèmes linéaires continus et invariants**.

La **modélisation** de ces systèmes passe par la mise en équation du comportement physique des systèmes sous forme d'équations différentielles. Cette étape ne fait pas à proprement parler partie d'un cours d'automatique, en effet chacune des disciplines construisent cette modélisation en se basant sur les principes et les hypothèses les plus adaptés à un problème donné. La modélisation permet une étude systématique des équations différentielles en proposant des modèles généraux et ce quelque soit la nature du procédé.

L'**analyse** nous permettra de caractériser et d'identifier ces modèles à partir des réponses aux sollicitations et de leurs performances.

Le **contrôle** est un concept très générale permettant de regrouper toutes les méthodes et techniques permettant de commander un système dynamique. Dans ce cours nous présenterons que les principes d'asservissement et de régulation. Nous verrons comment il est possible d'élaborer une commande adaptée (corrigée) pour un procédé quelconque, notamment lorsque ceux-ci présenterons des défauts de performance.

Organisation du document

Les chapitres suivent un découpage classique autour des trois piliers discutés précédemment que sont la **modélisation**, l'**analyse** et le **contrôle**. (c.f **Figure A**).

Le lecteur pourra s'appuyer sur un grand nombre d'annexes qui ont pour objectifs de rappeler et de détailler des notions prérequis ou encore approfondir quelques aspects hors programme pour une deuxième lecture.

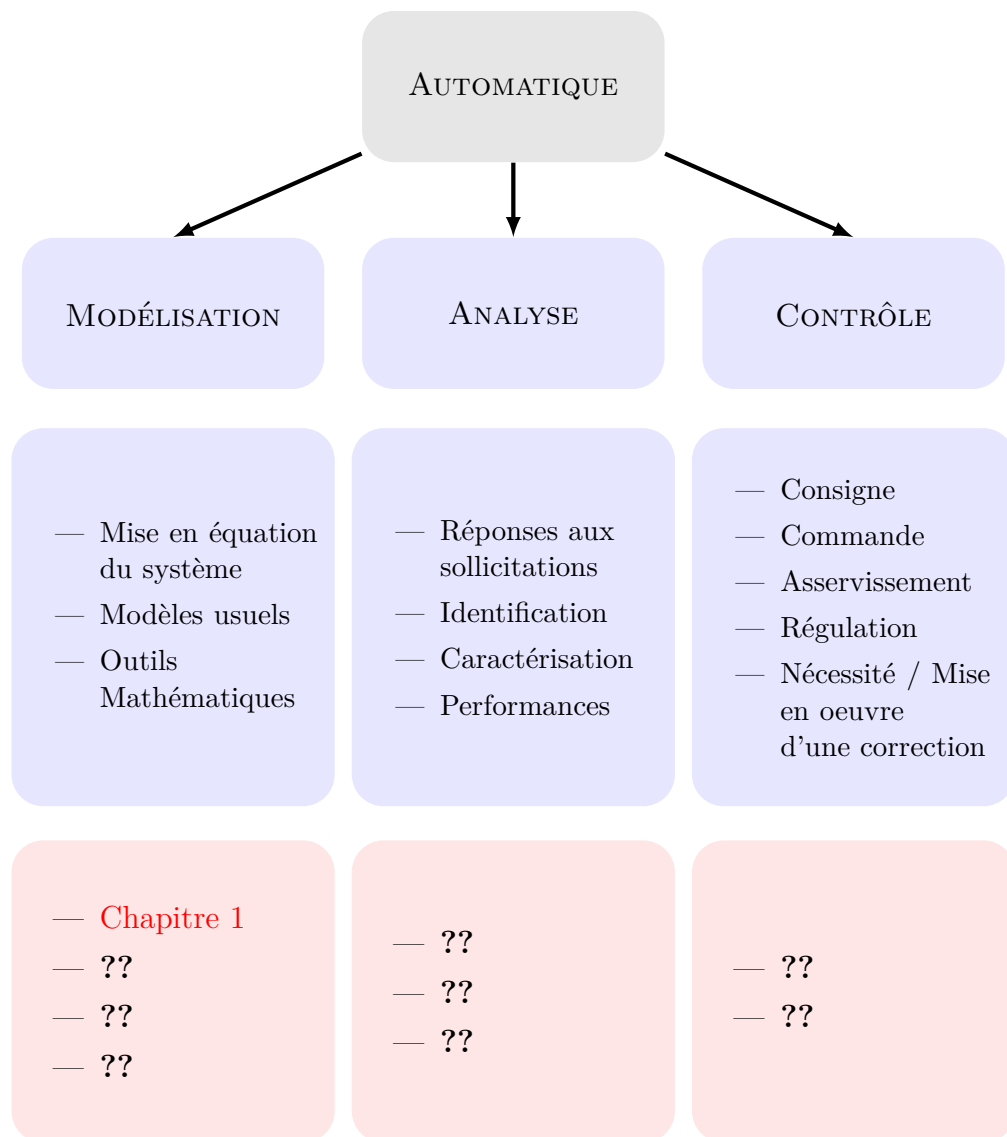


Figure A – Organisation du document.

1 Systèmes linéaires, continus et invariants

Sommaire

1	Introduction	10
2	Définition SLCI	11
2.1	Système	11
2.2	Système à temps continu	12
2.3	Système linéaire	12
2.4	Système causal	12
2.5	Système invariant	13
2.6	Système stable	13
2.7	Modélisation d'un système linéaire continu et invariant	13
3	Modélisation d'un signal	15
3.1	Propriétés générales des signaux continus (analogiques)	16
3.2	Signaux usuels rencontrés...	17
4	La transformée de Laplace	25
4.1	Définition	25
4.2	Propriétés	26
4.3	Transformées des signaux usuels	29
4.4	Application de la transformée de Laplace	32
5	Fonction de Transfert	37
5.1	Définition	37
5.2	Fonction de transfert et réponse impulsionnelle	37
5.3	Représentation de la fonction de transfert	38
5.4	Notion de pôles dominants	42

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les outils mathématiques et notions fondamentales pour la **modélisation** de l'automatique.

Dans un premier temps, nous donnerons une définition de chacun des termes qui compose la notion centrale de **système linéaire continu et invariant (SLCI)** ainsi que quelques exemples classiques de système électronique ou mécanique. Nous aborderons les différents signaux usuels rencontrés en automatique¹. Ce chapitre nous permettra d'introduire la transformée de Laplace qui est l'outil mathématique indispensable de l'automaticien. Celle-ci nous conduira naturellement à la définition de la **fonction de transfert** qui caractérisera de façon univoque les systèmes dynamiques linéaires.

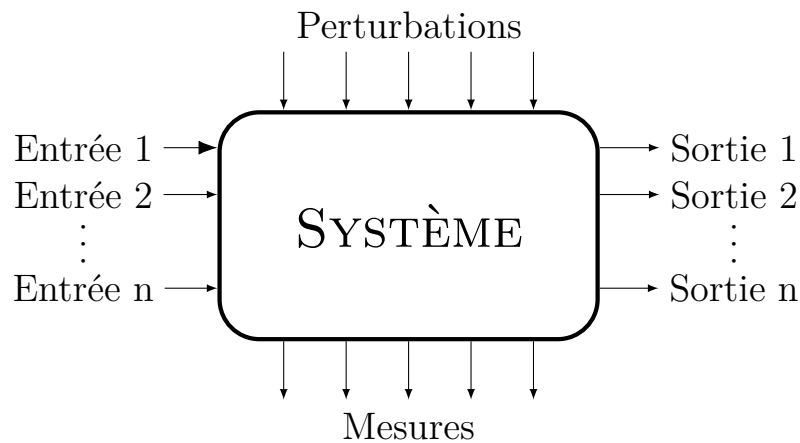


Figure 1.1 – Représentation d'un système en interaction avec son environnement. Par définition, un système aura une ou plusieurs entrée/sortie bien définis de flux de **matière-énergie-information (MEI)**. Dans le cas général, des perturbations de l'environnement et des mesures de son état pourront être considérés.

¹et en traitement du signal de façon générale.

2 Définition des systèmes linéaires continus et invariants

2.1 Système

La notion de **système** est centrale dans le monde de l'ingénierie. Il existe de nombreuses définitions selon le domaine d'application auquel il est associé. Dans le cadre de ce cours, nous nous reposerons sur la systémique² qui nous donne une définition à la fois **structurelle** et **fonctionnelle** de la notion de système.

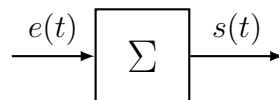
Au niveau structurel, **un système est un ensemble d'éléments constitutifs ayant des relations entre eux et une frontière avec son environnement..** Cette définition est parfaitement représenté par le schéma de la **figure 1.1**.

Au niveau fonctionnel, **un système modifie des flux dynamiques (c.a.d dépendant du temps) de matière, d'énergie et d'informations provenant de son environnement.**

C'est essentiellement cette dernière qui nous sera la plus utile. Un système sera alors considéré comme une « boîte » traitant une ou plusieurs entrées et élaborant une ou plusieurs sorties (c.f **Figure 1.1**). On distinguera les systèmes à une entrée et une sortie, dit **monovariable**³ des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties, dit **multivariable**⁴.

L'objectif de ce cours est de permettre la modélisation, l'identification et la caractérisation de ces systèmes. À noter que cet objectif atteint, il nous sera possible de représenter les systèmes comme des « boîtes noires » pour lesquelles la structure interne est inaccessible⁵. Une approche basée sur la représentation des états internes au système sera introduite au ??.

Pour résumer, nous ne traiterons dans ce document que des systèmes monovariables que nous représenterons simplement de la façon suivante :



où $e(t)$ et $s(t)$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie dépendants du temps et Σ est le système traitant l'entrée $e(t)$ et élaborant la sortie $s(t)$ délimité par un bloc. Cette représentation, dite en **bloc** ou **schema-bloc**, sera généralisée au ??.

²Avec la cybernétique, la systémique est un courant de pensée pluridisciplinaire apparue progressivement au milieu du XX^e siècle, sous l'impulsion des travaux précurseurs de Claude Shannon, Warren McCulloch, Norbert Wiener ou encore Marvin Minsky.

³ou **“Single Input Single Output” (SISO)** en anglais

⁴ou **“Multiple Input Multiple Output” (MIMO)** en anglais

⁵« Ce qui - en dernière analyse - justifie l'attitude ludique, c'est que le seul moyen concevable de dévoiler une boîte noire, c'est de jouer avec. » (René Thom)

2.2 Système à temps continu

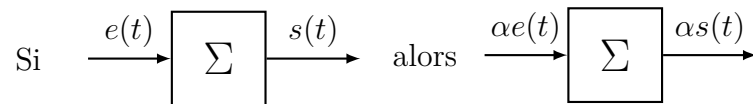
Un système à temps continu met en oeuvre des signaux à temps continu. Comme nous le verrons, ces signaux seront modélisés par des fonctions d'une variable continue t de temps.

2.3 Système linéaire

Un système est dit linéaire si il respecte les deux principes suivants :

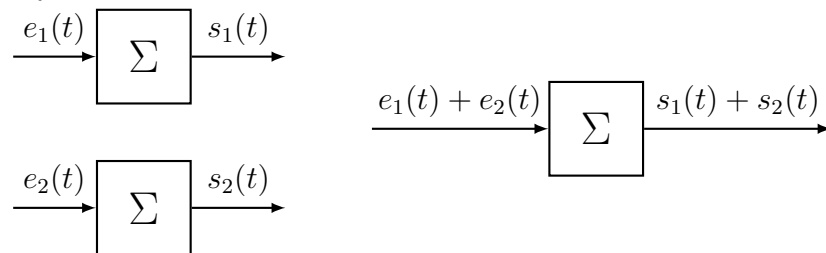
- *Principe de proportionnalité* : Si $s(t)$ est la réponse à une entrée $e(t)$, alors pour une entrée $\alpha e(t)$ la réponse est $\alpha s(t)$.

On exprime, schématiquement, ce principe de la façon suivante pour un système linéaire Σ :

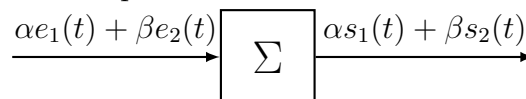


- *Principe de superposition* : Si l'entrée du système se décompose en une somme de plusieurs entrées alors la sortie du système sera la somme des sorties correspondant à chaque entrée séparée.

Une nouvelle fois, il est possible d'exprimer ce principe de la façon suivante pour un système linéaire Σ :



Notons que ceci reste vrai pour une combinaison linéaire des entrées :



avec α et $\beta \in \mathbb{R}$, ou un nombre quelconques d'entrées.

2.4 Système causal

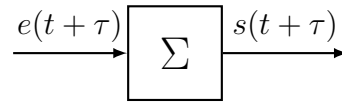
- *Principe de causalité* : C'est un principe fort de la physique : « **L'effet ne précède pas sa cause** » alors « **La réponse du système ne précède pas son excitation** ». Formellement, un système est dit causal si

$$e(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0 \Rightarrow s(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0$$

2.5 Système invariant

Un système est dit invariant si la sortie ne dépend pas explicitement du temps autrement que par l'intermédiaire de l'entrée.

On représente, schématiquement, un système invariant Σ , à l'aide d'un schéma-bloc ci-dessous (avec τ un temps quelconque.) :



2.6 Système stable

Il existe deux définitions équivalentes de la stabilité pour un système **SLCI**.

Un système est dit stable si à une entrée bornée le système produit une sortie bornée⁶

Un système est dit stable lorsque écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir

Nous présentons ici une définition encore peu pratique de la stabilité des **SLCIs**. Nous aurons l'occasion de préciser cette définition par des exemples plus concrets lorsque les outils de modélisation des systèmes et des signaux auront été introduits. Le ?? est d'ailleurs totalement dédié à l'étude de cette propriété fondamentale.

2.7 Modélisation d'un système linéaire continu et invariant

Un système dit linéaire continu et invariant ou **SLCI** peut être modélisé par une équation différentielle à coefficients constants possédant les propriétés précédentes qui s'écrit dans le cas générale :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad (1.1)$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, $s(t)$ le signal de sortie, $e(t)$ le signal d'entrée et $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sont des coefficients constants. Le degré de dérivation de la sortie n le plus grand est appelé **ordre**.

Ces équations différentielles proviennent directement de la modélisation de la physique d'un problème donnée (qu'il soit mécanique, électronique, optique ...).

Par exemple, dans le cas d'un problème de mécanique, c'est la relation fondamentale de la dynamique qui est la source importante d'équations différentielles

⁶Chez nos collègues anglo-saxons, on rencontre la notion de BIBO (« bounded input bounded output »)

(appelées équations du mouvement). En électronique, ce sont, par exemple, les lois des noeuds et mailles qui permettront d'écrire de telles équations.

Le degré de dérivation le plus grand de la sortie n est appelé ordre. On parlera alors de **l'ordre du système** n .

Prenons l'exemple d'un système d'ordre $n = 2$, son équation différentielle sera généralement de la forme :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

2.7.1 Exemples de mise en équation

Décharge d'un condensateur

Considérons un condensateur de capacité électrique C initialement chargé en circuit ouvert. À la fermeture de l'interrupteur, en $t = 0$, un courant $i(t)$ parcourt le circuit. On observe alors la décharge du condensateur à travers une résistance R . On souhaite suivre la quantité de charge aux bornes du condensateur au cours du temps.

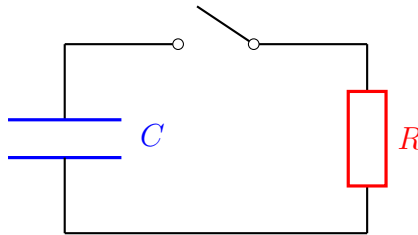


Figure 1.2 – Circuit RC ouvert.

La somme des tensions aux bornes du condensateur et de la résistance étant nulle, on a :

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0$$

Comme précédemment, on identifie formellement cette équation différentielle à la forme générale de l'équation (1.1) avec $s(t) = q(t)$, $e(t) = 0$, $n = 1$, $m = 0$, $a_1 = R$, $a_0 = \frac{1}{C}$.

Nous laissons au lecteur la résolution de cette équation différentielle par une approche directe classique. Nous la rencontrerons à nouveau au ??, après avoir présenté la méthode générale pour la résolution de ce type d'équation.

Système masse-ressort

On considère un système mécanique constitué d'une masse m en translation couplée avec un ressort de constante de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux b (c.a.d que la force est proportionnelle à la vitesse). La masse est soumise à une force $\vec{F} = F(t)\vec{X}$.

En appliquant le principe fondamentale de la dynamique en projection sur la direction x , on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$

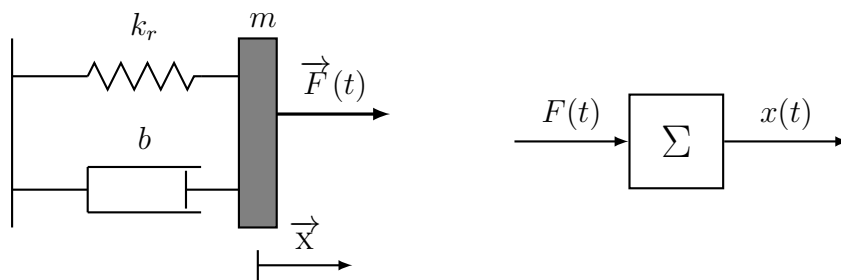


Figure 1.3 – (gauche) Système masse-ressort. (droite) Schéma-bloc de ce même système.

La résolution de cette équation du mouvement permet de connaître la position de la masse à chaque instant connaissant la force extérieure appliquée $F(t)$. Le système masse-ressort peut être assimilé à un **SLCI** dont l'entrée $e(t)$ est la force $F(t)$ et la sortie $s(t)$ est la position $x(t)$ de la masse (c.f le schéma-bloc de la **figure 1.3**). Formellement, on identifie cette équation différentielle à la forme générale de l'**équation (1.1)** pour $s(t) = x(t)$, $e(t) = F(t)$, $n=2$, $m = 0$, $a_2 = m$, $a_1 = b$, $a_0 = k_r$ et $b_0=1$.

3 Modélisation d'un signal

Un signal est une variation d'une grandeur qui porte l'information de la sollicitation ou de la réponse d'un système.

Les signaux continus sont modélisés mathématiquement par des fonctions continues du temps. Formellement, par une fonction s telle que :

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow s(t) \end{aligned}$$

Il existe cependant d'autres type de signaux qui sont très souvent confondus à tort :

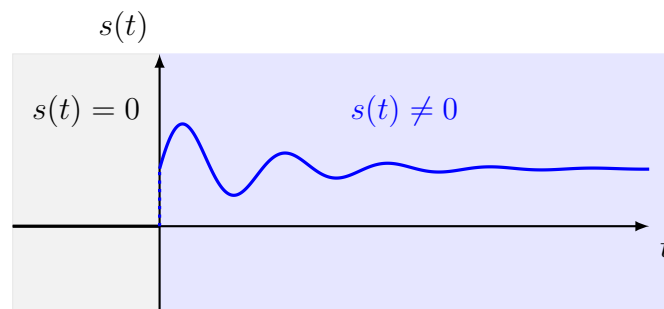
- un signal *quantifié* est un signal continu dont la valeur ne peut prendre que des valeurs discrètes.
- un signal *discret* est un signal à temps discret.
- un signal *numérique* est un signal discret et quantifié.

Dans le reste de ce document, nous ne traiterons que du cas de signaux en temps continu. Les signaux en temps discret sont généralement abordées lors d'un cours avancé d'automatique en cycle ingénieur.

3.1 Propriétés générales des signaux continus (analogiques)

Causal

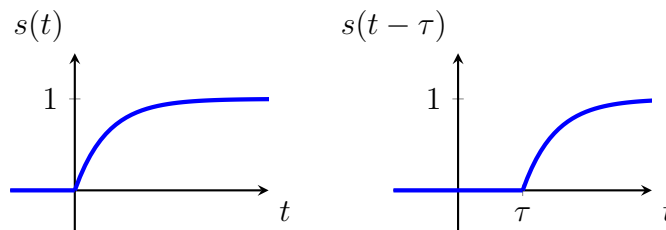
Un signal modélisé par la fonction $s(t)$ est dit **causal** si ce signal est nul pour tout $t < 0$. Pour un signal en entrée, le temps $t = 0$ permet de définir une origine des



temps.

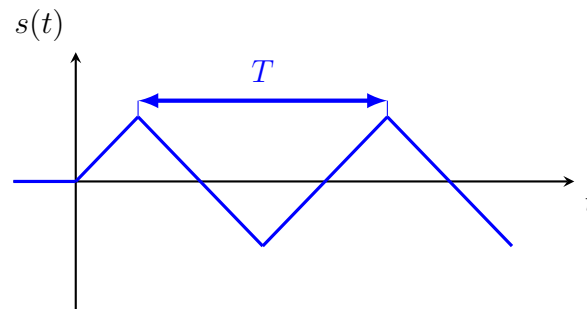
Retardé

Un signal $s(t - \tau)$ est dit **retardé** d'un temps τ par rapport à $s(t)$, si on lui a fait subir un changement d'origine des temps par rapport au signal $s(t)$.



Périodique

Un signal est dit **périodique** s'il se reproduit identique à lui même au bout d'un même intervalle de temps ou période T . On définit alors sa fréquence f qui est l'inverse de la période $f = 1/T$ ou la pulsation ω défini par rapport au cercle unité $\omega = 2\pi f$. Le signal complet peut être totalement décrit en considérant un



motif de base $s_0(t)$ telle que

$$s_0(t) = \begin{cases} s(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{pour } t > T \end{cases}$$

Le signal $s(t)$ est alors la somme (série) du motif retardé de nT avec $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$s(t) = \sum_0^{\infty} s_0(t - nT)$$

L'analyse de Fourier est un outil fondamental pour l'étude de ces signaux périodiques. Elle sort cependant légèrement du cadre de ce cours.

Stable

En se basant sur la définition donnée d'un système stable. Nous ne limiterons à dire qu'un signal stable est un signal borné. Il va sans dire que les signaux usuels en entrée de nos systèmes sont bornés et donc stables.

3.2 Signaux usuels rencontrés...

Certains signaux sont des briques de base pour la construction de signaux plus complexes. Il est alors essentiel de bien les caractériser. Ici, nous distinguons les signaux généralement utilisés en entrée des signaux généralement rencontrés en sortie des **SLCI**.

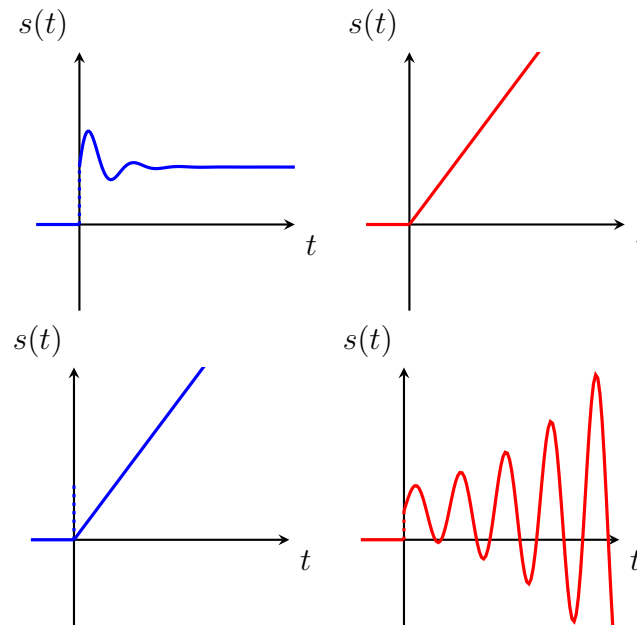


Figure 1.4 – Trois exemples de réponses d'un sclci à une sollicitation bornée : (en bleu) réponses stables (en rouge) réponses instables

3.2.1 ... en entrée

Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac⁷ $\delta(t)$ est une « fonction »⁸ telle que

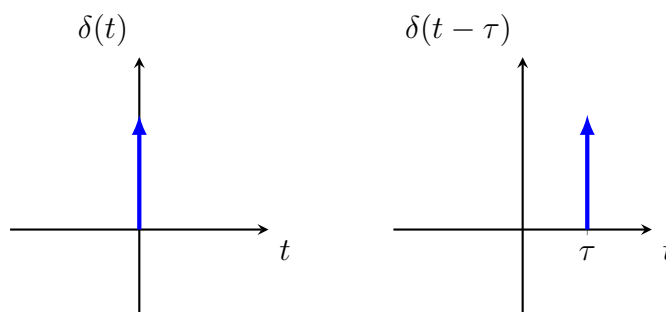
$$\delta(t) : \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \, dt &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \, dt &= f(0) \end{cases}$$

Cette fonction est donc nulle partout sauf en $t = 0$ où elle prend une valeur infinie. C'est pourquoi l'intégrale sur tous les nombres réels d'une impulsion de Dirac est normalisée à 1. Graphiquement une impulsion de Dirac $\delta(t)$ est représentée par une flèche en $t = 0$. La figure ci-dessous présente une impulsion de Dirac ainsi

⁷Paul Dirac, (1902-1984) mathématicien et physicien britannique

⁸Les guillemets sont essentiels pour ne pas se fâcher avec nos collègues mathématiciens. En effet ce signal est un exemple classique de la théorie des distributions qui étend la notion de fonction

qu'une impulsion retardée de τ noté $\delta(t - \tau)$.



L'impulsion de Dirac est expérimentalement approchée par un signal bref et de grande amplitude. Il est possible de montrer que la fonction suivante $\delta_a(t)$ est une impulsion de Dirac lorsque $a \rightarrow 0$.

Nous la rencontrerons quelque fois sous sa forme généralisée,

$$e(t) = E_0 \delta(t)$$

où $e(t)$ est le signal d'entrée du système et E_0 la valeur de l'amplitude de l'impulsion de Dirac dont l'unité dépend de la nature du problème considéré.

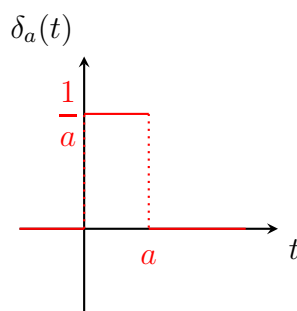


Figure 1.5 – Représentation de l'impulsion de Dirac approchée. Celle-ci tend vers l'impulsion de Dirac pour $a \rightarrow 0$. On remarquera que l'aire du rectangle est toujours égale à 1.

La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée **réponse impulsionnelle**.

Dans la pratique, une telle sollicitation brève et de grande amplitude permet de parfaitement caractériser le système. La réponse impulsionnelle, qui en résulte, contient toute l'information du système linéaire qui l'a élaboré.

Échelon-unité

L'échelon-unité est défini par la fonction, noté $u(t)$, telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction présente une marche⁹ à $t = 0$. Ci dessous nous la représentons avec la fonction retardée $u(t - \tau)$.

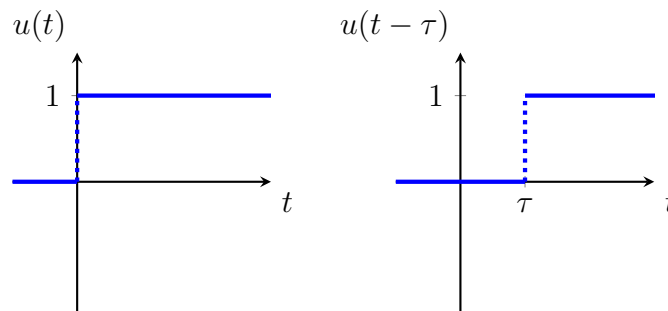


Figure 1.6 – Représentation graphique de (gauche) la fonction échelon-unité et (droite) la fonction échelon-unité retardée de τ

En général, l'échelon-unité est utilisé en entrée de nos systèmes pour modéliser des états fermé/ouvert (« on/off ») ou encore en régulation. Nous la rencontrerons souvent sous sa forme généralisée,

$$e(t) = E_0 u(t)$$

où $e(t)$ est le signal d'entrée du système et E_0 la valeur seuil de l'échelon dont l'unité dépend de la nature du problème considéré.

D'après les propriétés du signal échelon-unité et de la causalité, il est possible de rendre causale une fonction quelconque en la multipliant par un échelon-unité.

La réponse d'un système à un échelon est appelée **réponse indicielle**.

Remarquons que la fonction échelon-unité est l'intégrale de la distribution de Dirac,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \, d\tau$$

⁹Nos collègues anglo-saxons l'appelle la « *step function* »

Rampe-unité

Le signal rampe-unité¹⁰ est modélisé par la fonction $r(t)$ telle que :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

ou autrement dit, en utilisant la propriété de causalité de l'échelon :

$$r(t) = t \cdot u(t)$$

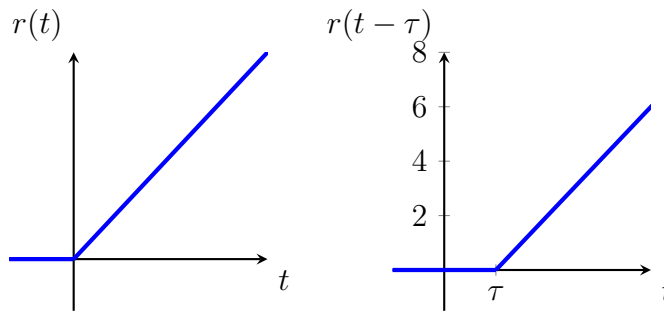


Figure 1.7 – Représentation graphique de (gauche) la fonction rampe-unité et (droite) la fonction rampe-unité retardée de τ

Remarquons que la fonction rampe est l'intégrale de l'échelon-unité, notamment

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) \, d\tau$$

La réponse d'un système à une rampe ne possède pas de nom spécifique, utilisé pour la distinguer des autres réponses. On parlera donc simplement de **réponse à une rampe**.

Sinusoïde

Le signal périodique sinusoïdale $s(t)$ est la fonction telle que :

$$s(t) = A \sin(\omega t + \phi) \cdot u(t)$$

avec A son amplitude, ω sa pulsation (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et ϕ sa phase (rad).

¹⁰On retrouve parfois [?] le terme d'échelon vitesse pour désigner la fonction rampe

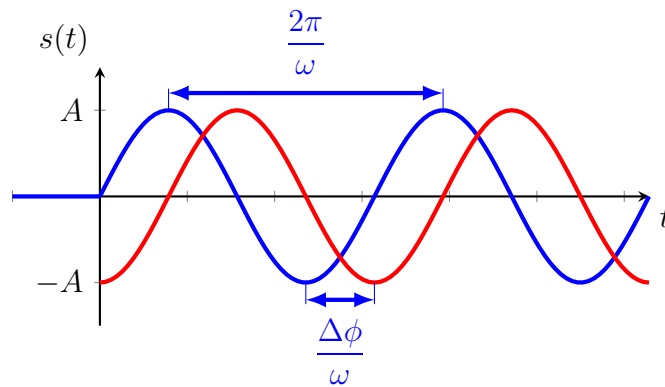


Figure 1.8 – Représentation de signaux sinusoïdaux de même pulsation et amplitude. (bleu) de phase $\phi = 0$ et (rouge) de phase $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

La réponse d'un système à une sinusoïde est appelée la **réponse harmonique** et son analyse fera l'objet de tout un chapitre (??).

Le **tableau 1.1** rappelle la terminologie associée au déphasage entre deux signaux sinusoïdaux.

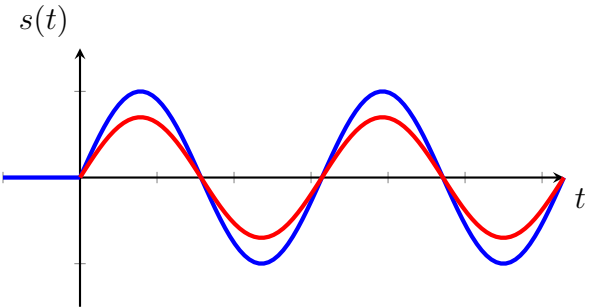
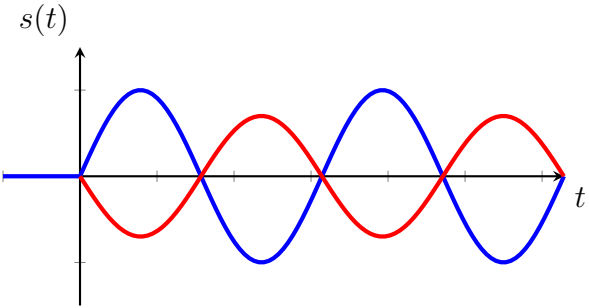
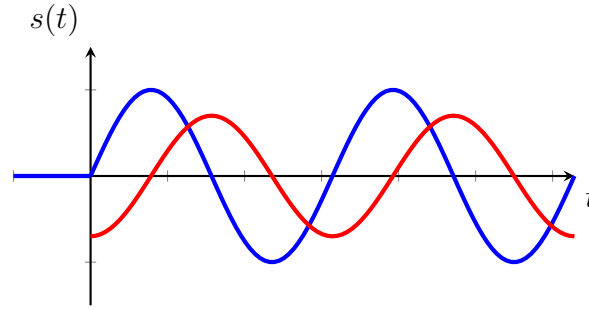
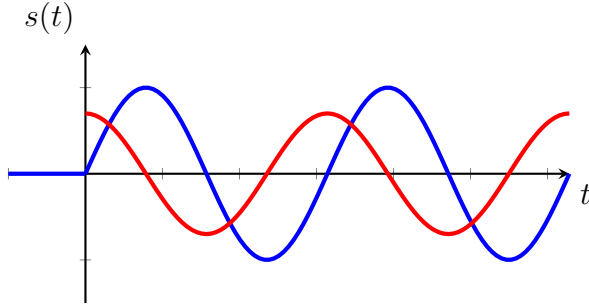
Déphasage	Terminologie	Graphe
$\Delta\phi = 0$	« en phase »	
$\Delta\phi = \pm\pi$	« en opposition de phase »	
$\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$	« en quadrature de phase » (retard de phase)	
$\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$	« en quadrature de phase » (avance de phase)	

Tableau 1.1 – Différents types de déphasage d'un (rouge) signal sinusoïdal $s_2(t)$ par rapport à (bleu) un signal de référence $s_1(t)$ de phase nulle.

3.2.2 ... en sortie

Exponentielle décroissante

La fonction exponentielle décroissante $s(t)$ est telle que :

$$s(t) = e^{-at} \cdot u(t)$$

avec a l'inverse d'un temps caractéristique d'un amortissement. Cette fonction tend vers 0 pour tout $a > 0$ à $t \rightarrow \infty$ et diverge pour $a < 0$.

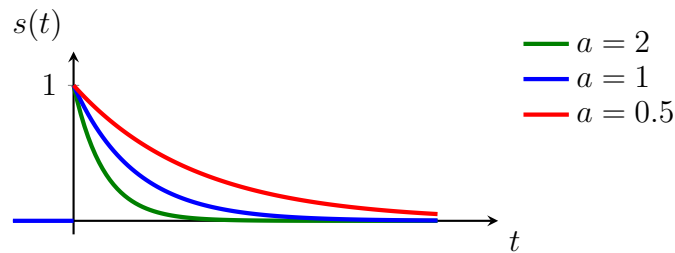


Figure 1.9 – Représentation de la fonction exponentielle pour différentes valeurs du paramètre a .

Sinusoïde amortie

La fonction sinusoïdale amortie $s(t)$ est la fonction telle que :

$$s(t) = Ae^{-at} \sin(\omega t + \phi) \cdot u(t)$$

Cette fonction est donc le produit d'une exponentielle décroissante et d'une sinusoïde.

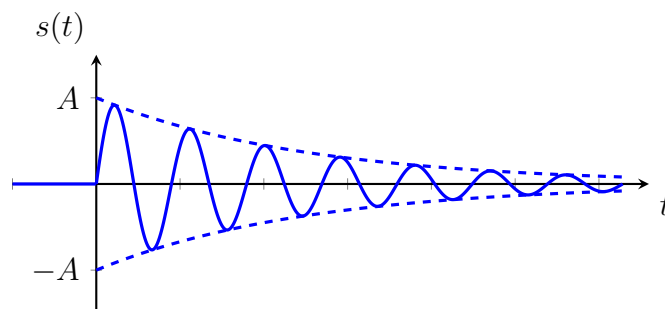


Figure 1.10 – Représentation d'un sinusoïde amortie. L'enveloppe en pointillé correspond aux fonctions e^{-at} et $-e^{-at}$.

4 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace¹¹ est l'outil indispensable pour l'étude des **SLCI**. Celle-ci nous sera très utile pour la résolution des équations différentielles et nous permettra également de définir la notion de fonction de transfert reliant l'entrée et la sortie d'un système linéaire.

4.1 Définition

La **transformée de Laplace (TL)**, notée \mathcal{L} , d'une fonction causale s (pour signal) d'une variable réelle t (pour temps), est la fonction S de la variable complexe p , définie par :

$$S(p) = \mathcal{L} \{s(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t) dt. \quad (1.2)$$

On dit également que $S(p)$ est **l'image dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$ du domaine temporel**. De plus la transformée $S(p)$ de $s(t)$ est unique et parfaitement définie. Connaissant $S(p)$ on en déduit $s(t)$ par la transformation inverse

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(p)\}$$

Il existe une forme analytique de la transformée inverse basée sur la formule de Mellin-Fourier[?] :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(p)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} S(p) dp$$

L'intégration de celle-ci est difficile à mettre en oeuvre¹², on préférera utiliser les tables de transformations de Laplace pour réaliser la correspondance inverse (??). Lorsque la transformation n'existe pas dans les tables, il est possible de réaliser une décomposition en éléments simples de la réponse $S(p)$ pour se placer dans un cas usuel (??).

Remarquons, dès à présent l'utilisation d'une convention utile : **les fonctions du temps seront toujours désignées par une minuscule, et les fonctions complexes par la majuscule respective**.

¹¹ Pierre-Simon de Laplace, (1749-1827) mathématicien, astronome, physicien et homme politique français

¹² Il existe différentes méthodes numériques de transformée de Laplace inverse (??). Ces méthodes, hors programme, peuvent cependant faire l'objet d'un projet numérique intéressant.

4.2 Propriétés

Nous allons ici uniquement présenter les principales propriétés de la TL, on se rapportera à nouveau à l'?? pour une liste exhaustive de ces propriétés.

La propriété fondamentale de la transformée de Laplace est d'être linéaire.

Linéarité

Soit deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ continus et $S_1(p)$ et $S_2(p)$ leurs transformées de Laplace respectives. La transformée de Laplace d'une relation linéaire quelconque de $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est une relation linéaire de $S_1(p)$ et $S_2(p)$. Autrement dit,

$$\mathcal{L}\{as_1(t) + bs_2(t)\} = aS_1(p) + bS_2(p) \quad (1.3)$$

Retard en t (temporel)

Soit $s(t - \tau)$ un signal $s(t)$ présentant un retard τ .

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t - \tau) dt$$

en appliquant le changement de variable $t' = t - \tau$, on obtient $t = t' + \tau$ et $dt = dt'$

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-p(t'+\tau)} s(t') dt' = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} e^{-pt'} s(t') dt'$$

on reconnaît dans cette dernière expression la définition de la transformée de Laplace, on écrit alors :

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = e^{-p\tau} S(p) \quad (1.4)$$

Retard en p (Théorème de l'amortissement)

Soit $s(t)$ un signal de transformée de Laplace $S(p)$. La transformée de Laplace du signal modifié $e^{-at}s(t)$ s'écrit :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}s(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} s(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} s(t) dt$$

on reconnaît dans cette dernière expression la définition de la transformée de Laplace pour $p + a$, on obtient donc la transformée,

$$\mathcal{L} \left\{ e^{-at} s(t) \right\} = S(p + a) \quad (1.5)$$

ou encore,

$$\mathcal{L}^{-1} \{ S(p + a) \} = e^{-at} s(t). \quad (1.6)$$

Dérivation

Soit un signal $s(t)$ continu et dérivable pour $t \geq 0$ et $S(p)$ sa transformée. Par définition de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{ds(t)}{dt} dt$$

par intégration par parties

$$\begin{aligned} v &= e^{-pt} & du &= \frac{ds(t)}{dt} dt \\ dv &= -pe^{-pt} dt & u &= s(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} &= \left[s(t)e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - p \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t) dt \\ &= -s(0) + pS(p) \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = pS(p) - s(0) \quad (1.7)$$

On généralise à tous les ordres de dérivation dans le cas de conditions initiales nulles.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n s(t)}{dt^n} \right\} = p^n S(p)$$

Remarquons alors que **dériver dans le domaine temporel consiste à multiplier par p dans le domaine de Laplace.**

Intégration

Soient des signaux $v(t)$ et $s(t)$ tel que $v(t) = \int_0^t s(\tau) d\tau$. Par définition,

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} v(t) dt$$

par intégration par parties,

$$\begin{aligned} v &= v(t) & du &= e^{-pt} dt \\ dv &= s(t) dt & u &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v(t)\} &= \left[-\frac{1}{p} v(t) e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} s(t) dt \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t) dt + \frac{s(0)}{p} \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t s(\tau) d\tau\right\} = \frac{S(p)}{p} + \frac{s(0)}{p} \quad (1.8)$$

Remarquons alors que **intégrer dans le domaine temporel** consiste à **diviser par p dans le domaine de Laplace**.

Théorème de la valeur initiale

$$s(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pS(p) \quad \forall S(p) \quad (1.9)$$

où $s(0)$ est la valeur d'un signal $s(t)$ pour $t = 0$. Ce théorème est utilisé pour déterminer la valeur initiale dans le domaine temporel d'un signal dont on connaît uniquement la transformée de Laplace.

Théorème de la valeur finale

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) \quad (1.10)$$

où $s(\infty)$ est la valeur d'un signal $s(t)$ pour $t \rightarrow \infty$. Ce théorème n'est valable que si $s(\infty)$ est définie. On dira plus tard si le signal est stable.

Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Le produit de convolution de deux signaux $h(t)$ et $e(t)$ que l'on note $(h * e)(t)$ est défini par :

$$(h * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)e(\tau)d\tau$$

La transformée de Laplace transforme le produit de convolution en un simple produit des signaux dans le domaine de Laplace. Formellement,

$$\mathcal{L}\{(h * e)(t)\} = H(p)E(p) \quad (1.11)$$

Si cette propriété est fondamentale, nous ne l'utiliserons que très exceptionnellement. Nous la rencontrerons à nouveau lorsque nous introduirons la fonction de transfert d'un système linéaire.

4.3 Transformées des signaux usuels

Nous présentons les transformées de Laplace des signaux usuels introduits au paragraphe 3.2

Transformée d'une impulsion de Dirac

Par simple application des définitions de la **TL** et de l'impulsion de Dirac, la transformée d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ s'écrit :

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \delta(t)dt = 1$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (1.12)$$

Transformée d'un échelon-unité

La transformée de Laplace d'un signal échelon-unité s'écrit :

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{-e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p} \quad (1.13)$$

Dans le cas de la forme généralisée, il suffit de multiplier par une constante.

Transformée d'une rampe

La transformée de Laplace d'un signal rampe s'écrit :

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} r(t) dt = \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{p} e^{-pt} & du &= dt \\ dv &= e^{-pt} dt & u &= t \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt = \left[-t \frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot u(t)\} = \frac{1}{p^2}. \quad (1.14)$$

On généralise aux ordres supérieures (parabolique, cubique...) :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{n!} t^n \cdot u(t)\right\} = \frac{1}{p^{n+1}}. \quad (1.15)$$

Transformée d'une exponentielle décroissante

La transformée de Laplace d'une exponentielle décroissante s'écrit :

$$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt = \frac{1}{p+a}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{p+a} \quad (1.16)$$

Nous aurions pu utiliser la propriété du retard en p (Théorème de l'amortissement)

pour déterminer cette transformée de Laplace.

Transformée d'un sinus

La transformée de Laplace d'un sinus s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{ \sin \omega t \cdot u(t) \} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) \\
 &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \{ \sin \omega t \cdot u(t) \} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (1.17)$$

Transformée d'un cosinus

La transformée de Laplace d'un cosinus s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{ \cos \omega t \cdot u(t) \} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) \\
 &= \frac{p}{p^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \{ \cos \omega t \cdot u(t) \} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (1.18)$$

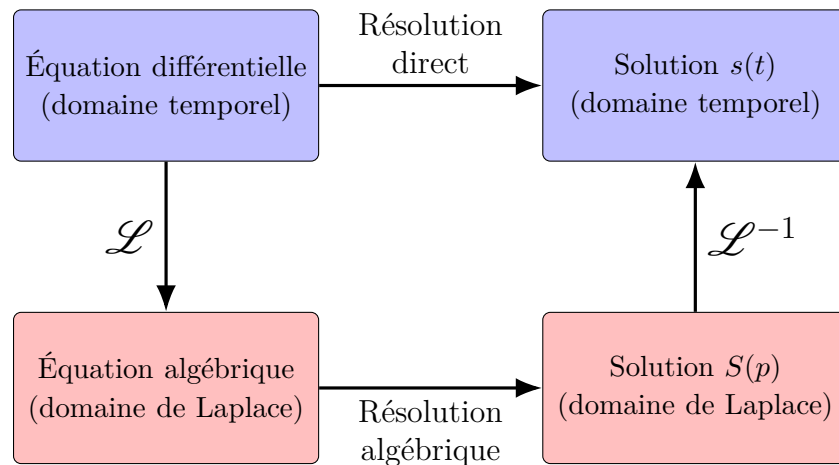


Figure 1.11 – Représentation schématique de la méthode employée pour la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

4.4 Application de la TL à la résolution d'équation différentielle

4.4.1 Méthodologie

Lorsqu'une équation différentielle à coefficients constants a pu être établie pour définir la relation entre l'entrée et la sortie d'un **SLCI**, il nous faut en trouver une solution. Les méthodes classiques de résolution d'équations différentielles peuvent être difficiles et fastidieuses à mettre en oeuvre, notamment dans le cas d'équation différentielle d'ordre élevé ou encore pour des systèmes composés de sous-systèmes. La transformée de Laplace permet de mettre en oeuvre une méthode plus simple et systématique pour la résolution de ces équations différentielles à coefficients constants.

Comme nous l'avons déjà discuté, la forme générale de ces équations est donnée par :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad (1.19)$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, $s(t)$ le signal de sortie, $e(t)$ le signal d'entrée et $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. L'équation est dite d'ordre n .

Sous cette forme, cette équation différentielle constitue ce que l'on nomme **la loi temporelle** du système. Sans perte de généralité, on ne considèrera dans un premier temps que les systèmes pour lesquels toutes les **conditions initiales** sont

nulles, appelées également les conditions d'Heaviside¹³.

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.19), on obtient ce que l'on nomme **la loi fréquentielle** du système :

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i S(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i E(p) \quad (1.20)$$

La résolution algébrique de cette équation est simplement donnée par :

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} E(p) \quad (1.21)$$

La solution dans le domaine temporelle $s(t)$ de l'équation différentielle est alors simplement obtenue par transformée de Laplace inverse de $S(p)$.

Cette méthode, résumée par l'organigramme de la figure 1.11, est appliqué à un exemple complet au paragraphe suivant.

4.4.2 Exemple complet

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (1.22)$$

où $e(t)$ et $s(t)$ sont respectivement les fonctions temporelles d'entrée et de sortie du système régit par cette équation différentielle avec pour conditions initiales (CI) $s(0) = -1$ et $s'(0) = 2$. Nous considérons la réponse à un échelon-unité (i.e $e(t) = u(t)$)

Nous allons résoudre cette équation par deux méthodes différentes : la méthode direct de résolution d'équations différentielles avec second membre, et par l'application de la transformée de Laplace.

Nous pourrons observer que l'application de la TL pour la résolution des équations différentielles est une méthode plus systématique qui s'affranchit de la forme particulière de l'équation différentielle auquel on a à faire. Nous verrons que la transformée de Laplace devient totalement indispensable pour la caractérisation d'un **SLCI**.

¹³Oliver Heaviside, (1850-1925), physicien britannique.

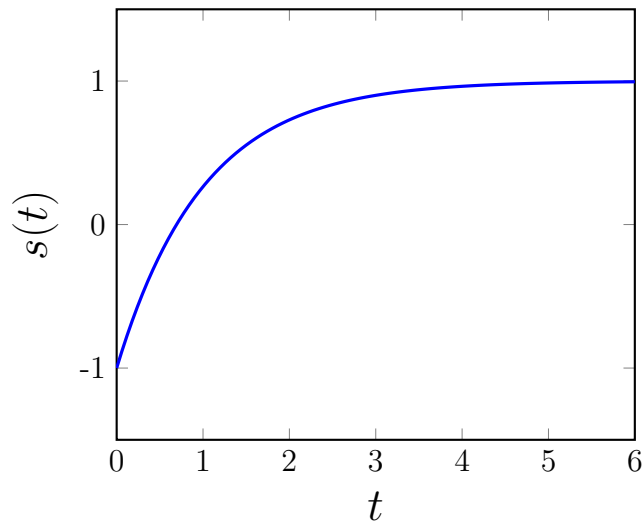


Figure 1.12 – Représentation de la solution générale de l'équation différentielle (1.22). On vérifie lors du tracé que l'on observe bien les principales propriétés du signal (i.e conditions initiales, valeurs finales).

Résolution par la méthode direct

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est donnée par

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

cette équation possède une solution double $r_{1,2} = -1$. La solution générale de l'équation homogène $s_0(t)$ (c.a.d sans second membre) est donc de la forme :

$$s_0(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t}.$$

Une solution particulière $s_1(t) = 1$ nous est trivialement donnée par l'entrée en échelon qui correspond au régime permanent. La solution générale est donc donnée par :

$$s(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t} + 1$$

Dérivons cette solution générale pour pouvoir déterminer les coefficients α , β en utilisant les conditions initiales,

$$\begin{aligned} s'(t) &= \alpha e^{-t} - (\alpha t + \beta)e^{-t} \\ s(0) &= -1 \Rightarrow \beta + 1 = -1 \Rightarrow \beta = -2 \\ s'(0) &= 2 \Rightarrow \alpha + 2 = 2 \Rightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation différentielle (1.22) est donc donnée par

$$s(t) = 1 - 2e^{-t}. \quad (1.23)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette fonction est solution de l'équation 1.22, et qu'elle respecte notamment les conditions initiales. Le graphe de la solution est également présenté (Figure 1.12).

Résolution par application de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est linéaire. Il nous est alors possible de l'appliquer aux différents termes de l'équation différentielle (1.22) séparément. On obtient pour chacun des termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{s(t)\} &= S(p), \\ \mathcal{L}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} &= pS(p) - s(0) = pS(p) + 1, \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right\} &= p^2S(p) - ps(0) - s'(0) = p^2S(p) + p - 2, \\ \mathcal{L}\{u(t)\} &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle (1.22) devient dans le domaine de Laplace :

$$p^2S(p) + p - 2 + 2pS(p) + 2 + S(p) = \frac{1}{p}$$

En réarrangeant cette expression, il est possible de déterminer la forme de la réponse $S(p)$ dans le domaine de Laplace.

$$\begin{aligned} S(p)(p^2 + 2p + 1) + p &= \frac{1}{p} \\ S(p)(p + 1)^2 &= \frac{1 - p^2}{p} \\ S(p) &= \frac{1 - p^2}{p(p + 1)^2} \end{aligned}$$

Cette forme « n'existant » pas dans les tableaux de transformation de Laplace usuels, nous allons décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples (??).

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}$$

Par identification,

$$S(p) = \frac{A(p+1)^2 + Bp(p+1) + Cp}{p(p+1)^2} = \frac{1-p^2}{p(p+1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B & = -1 \\ 2A+B+C & = 0 \\ A & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B & = -2 \\ C & = 0 \end{cases}$$

La réponse $S(p)$ se décompose donc de la façon suivante en éléments simples :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1}$$

Il est maintenant plus aisé d'appliquer la transformation de Laplace inverse, en utilisant le tableau des transformées de Laplace usuels (c.f lignes 3 et 7 du tableau de l'??) pour obtenir la réponse temporelle $s(t)$. Notamment,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1$$

et

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p+1} \right\} = 2e^{-t}$$

soit

$$\mathcal{L}^{-1} \{S(p)\} = s(t) = 1 - 2e^{-t} \quad (1.24)$$

Comme attendu, les deux méthodes donnent le même résultat, cependant la transformée de Laplace permet de définir dans le domaine de Laplace, une relation direct entre l'entrée et la sortie d'un système. C'est la fonction de transfert qui réalise ce lien.

5 Fonction de Transfert

5.1 Définition

La fonction de transfert $H(p)$ d'un système est donnée par le rapport de la sortie $S(p)$ et l'entrée $E(p)$ dans le domaine de Laplace.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (1.25)$$

ou encore,

$$S(p) = H(p)E(p) \quad (1.26)$$

Cette fonction $H(p)$, également appelé **transmittance**, caractérise le système de façon univoque. Pour une entrée donnée il est possible de prévoir la sortie d'un système caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$

5.2 Fonction de transfert et réponse impulsionnelle

À partir de l'équation 1.26, le lien entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle paraît évident. Pour une impulsion de Dirac en entrée, la réponse impulsionnelle est alors simplement la fonction de transfert puisque $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = E(p) = 1$. Autrement dit, la fonction de transfert d'un système est la réponse impulsionnelle dans le domaine de Laplace. Formellement, si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un système alors,

$$H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

D'après la propriété du produit de convolution, nous savons que le produit de deux fonctions dans le domaine de Laplace correspond au produit de convolution de ces deux fonctions dans le domaine temporelle, dans le cas de l'équation 1.26,

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)E(p)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)e(\tau)d\tau$$

ou encore,

$$s(t) = (h * e)(t)$$

ce qui exprime que **la réponse d'un système est donnée par le produit de convolution de l'entrée et la réponse impulsionnelle**.

5.3 Représentations algébrique et graphique de la fonction de transfert

D'après la loi fréquentielle (Équation (1.21)), la fonction de transfert d'un **SLCI** peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle,

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}. \quad (1.27)$$

Il existe différentes façons équivalentes d'écrire cette fonction de transfert. Nous allons en introduire deux : la forme canonique et la forme factorisée. La forme canonique permet de faire apparaître les intégrateurs purs du système. La forme factorisée utilise les racines de la fraction rationnelle définissant la fonction de transfert. Pour montrer l'équivalence de ces représentations nous allons les construire à partir de la forme générale de l'équation (1.27) et ou de la connaissance des pôles et zéros de la fonction de transfert.

Une fonction de transfert peut être vue comme le fraction de deux polynômes (i.e fraction rationnelle) : un polynôme au numérateur $N(p)$ et un polynôme au dénominateur $D(p)$.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Ces polynômes possèdent des racines dans \mathbb{C} . Les **racines de $N(p)$ sont dits les zéros de $H(p)$** et les **racines de $D(p)$ sont dits les pôles de $H(p)$** . Il en vient qu'une fonction de transfert possède m zéros et n pôles.

Exemple

Reprenons l'équation différentielle de la section précédente, dans les conditions de Heaviside, afin de construire la fonction de transfert qui lui est associée.

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (1.28)$$

La transformée de Laplace de cette équation nous donne,

$$\begin{aligned} p^2 S(p) + 2pS(p) + S(p) &= E(p) \\ S(p) (p^2 + 2p + 1) &= E(p) \\ S(p) &= \frac{1}{p^2 + 2p + 1} E(p) \end{aligned}$$

La fonction de transfert associée à cette équation différentielle est donc

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}$$

Il est aisé de constater que la fonction de transfert est d'ordre deux et ne possède pas de zéro.

Forme canonique de la fonction de transfert

Développons les sommes de l'équation (1.27),

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n}.$$

La forme canonique dépend du nombre d'intégrateur du système. Par exemple, si a_0 est non nul, l'expression précédente se factorise sous la forme,

$$H(p) = K_0 \cdot \frac{1 + b'_1p + b'_2p^2 + \dots + b'_mp^m}{1 + a'_1p + a'_2p^2 + \dots + a'_np^n}.$$

avec $K_0 = \frac{b_0}{a_0}$, $a'_i = \frac{a_i}{a_0}$ et $b'_i = \frac{b_i}{b_0}$. Dans ce cas, le système est dit de classe 0 et ne possède aucun intégrateur.

Si maintenant a_0 est nul et a_1 non nul, la fonction de transfert peut s'écrire,

$$H(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{1 + b'_1p + b'_2p^2 + \dots + b'_mp^m}{1 + a'_1p + a'_2p^2 + \dots + a'_{n-1}p^{n-1}}.$$

avec $K_1 = \frac{b_0}{a_1}$, $a'_i = \frac{a_{i+1}}{a_1}$ et $b'_i = \frac{b_i}{b_0}$. Dans ce cas, le système est dit de classe 1 et possède un intégrateur.

On généralise donc la forme canonique de la fonction de transfert d'un système de classe $\alpha \geq 0$ sous la forme,

$$H(p) = \frac{K_\alpha}{p^\alpha} \cdot \frac{\sum_{i=0}^m b'_i p^i}{\sum_{i=0}^{n-\alpha} a'_i p^i} \quad (1.29)$$

où $K_\alpha = \frac{b_0}{a_\alpha}$ est le **gain statique**, α est la **classe du système** et les coefficients de la forme canonique a'_i et b'_i sont déterminés à partir des coefficients de l'équation

différentielle régissant le système¹⁴.

En posant respectivement $N(p)$ et $D(p)$ les polynômes du numérateur et du dénominateur. La forme canonique de la fonction de transfert s'écrira également très souvent :

$$H(p) = \frac{K_\alpha N(p)}{p^\alpha D(p)}$$

On rappellera que sous cette forme les polynômes $N(p)$ et $D(p)$ sont de la forme

$$1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha}$$

et donc $N(0) = 1$ et $D(0) = 1$.

Exemple de forme canonique

Soit un système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2p + 5}{p^3 + 2p^2 + 4p}$$

Le coefficient d'ordre 0 étant nul au dénominateur, le système est de classe 1, la forme canonique de cette fonction de transfert est donc¹⁵ donnée par

$$H(p) = \frac{K(0.4p + 1)}{p(0.25p^2 + 0.5p + 1)},$$

où le gain statique $K = 1.25$.

Forme factorisée de la fonction de transfert

Soient les pôles p_i avec $i \in [1, n]$ et les zéros z_j avec $j \in [1, m]$ de la fonction de transfert $H(p)$. Il est alors possible de factoriser par les pôles et les zéros pour écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = k \cdot \frac{\prod_{j=0}^m (p - z_j)}{\prod_{i=0}^n (p - p_i)}, \quad (1.30)$$

avec $k = \frac{b_m}{a_n}$. On remarquera que cette constante k n'est pas le gain statique de la

¹⁴Pour simplifier la notation, les primes des coefficients de la forme canonique peuvent être omises, cependant ceux-ci restent toujours différents des coefficients de l'équation différentielle.

¹⁵Il est d'usage en automatique d'écrire les nombres rationnels par leurs valeurs numériques plutôt que par leurs fractions.

forme canonique.

Cette forme factorisée est très utile pour la représentation graphique de la réponse harmonique (c.f ??).

Exemple de fonction de transfert factorisée

Soit la fonction de transfert $H(p)$ tel que

$$H(p) = \frac{6p + 12}{2p^2 + 4p + 1.5}$$

En factorisant par les coefficients d'ordre maximum au numérateur et au dénominateur, et en observant que la fonction de transfert possède un zéro ($z_1 = -2$) et deux pôles ($p_1 = -1.5$ et $p_2 = -0.5$), on peut réécrire $H(p)$ sous sa forme factorisée :

$$H(p) = \frac{6}{2} \cdot \frac{p + 2}{p^2 + 2p + 0.75}$$

La fonction de transfert possède un zéro ($z_1 = -2$) et deux pôles ($p_1 = -1.5$ et $p_2 = -0.5$). Elle peut alors s'écrire :

$$H(p) = \frac{k(p + 2)}{(p + 1.5)(p + 0.5)}$$

avec $k = 3$.

Carte des pôles et zéros d'une fonction de transfert

Il est également possible de représenter une fonction de transfert graphiquement à l'aide d'une carte des pôles et des zéros dans le plan complexe (les racines d'un polynôme pouvant être complexes). Dans ce type de représentation, les pôles sont représentés par des (\times) et les zéros par des (\circ). La carte des pôles et des zéros d'une fonction de transfert est essentielle pour la construction du lieu d'Evans¹⁶ pour l'étude des systèmes asservis.

Exemple de carte de pôles et zéros d'une fonction de transfert

Soit $H(p)$ une fonction de transfert telle que,

$$H(p) = \frac{p - 1}{p^2 + 2p + 2} \quad (1.31)$$

¹⁶Walter Richard Evans, (1920-1999), ingénieur, automaticien américain

Cette fonction de transfert possède un zéro réel ($z_1 = 1$) et deux pôles complexes conjugués ($p_{1,2} = -1 \pm j$). La forme factorisée de $H(p)$ est donc

$$H(p) = \frac{p - 1}{(p + 1 + j)(p + 1 - j)} \quad (1.32)$$

La figure 1.13 présente la carte des pôles de cette fonction de transfert.

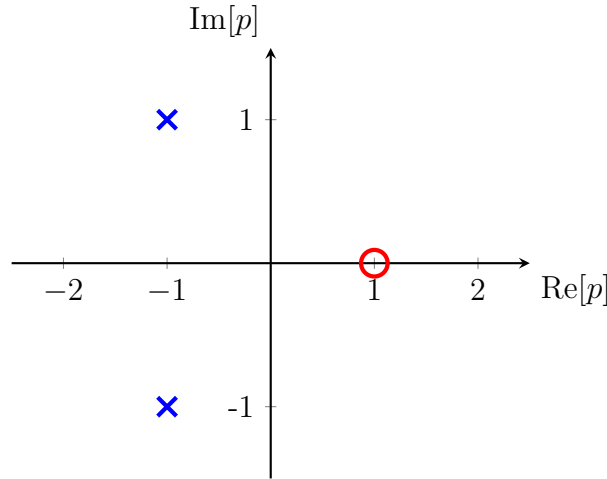


Figure 1.13 – Exemple d’une carte de pôles et zéros associés à la fonction de transfert Équation (1.31)

5.4 Notion de pôles dominants

Soient p_1, \dots, p_n les pôles d’un système stable¹⁷. Le pôle p_i est dit dominant si la valeur absolue de sa partie réelle est largement plus petite que celle de tout autre pôle du système¹⁸

$$|\operatorname{Re}[p_i]| \ll |\operatorname{Re}[p_j]| \quad \forall j \neq i \quad (1.33)$$

Pour observer l’influence d’un pôle dominant sur la réponse temporelle d’un système linéaire, nous nous allons l’illustrer par l’étude d’une fonction de transfert du second ordre en régime apériodique. Une telle fonction de transfert est équivalente à deux systèmes du premier ordre en série.

¹⁷À partir des résultats obtenus dans ce chapitre il est déjà clair que la stabilité d’un système dépend également des pôles de sa fonction de transfert

¹⁸Dans la pratique un rapport de 5 est suffisant pour considérer une domination d’un pôle sur les autres

Prenons l'exemple de la fonction de transfert définie par

$$H(p) = \frac{5}{(p+1)(5p+1)}$$

et de décomposition en éléments simples telle que :

$$H(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{5p+1}$$

Par identification on peut écrire $H(p)$ en fonction de deux fonctions de transferts $H_1(p)$ et $H_2(p)$ tel que :

$$\begin{aligned} H(p) &= H_1(p) - H_2(p) \\ H_1(p) &= \frac{6.25}{5p+1} \\ H_2(p) &= \frac{1.25}{p+1} \end{aligned}$$

Par définition, le pôle dominant est donné par $H_1(p)$. Pour observer son effet traçons les réponses indicielles de ces trois fonctions de transfert.

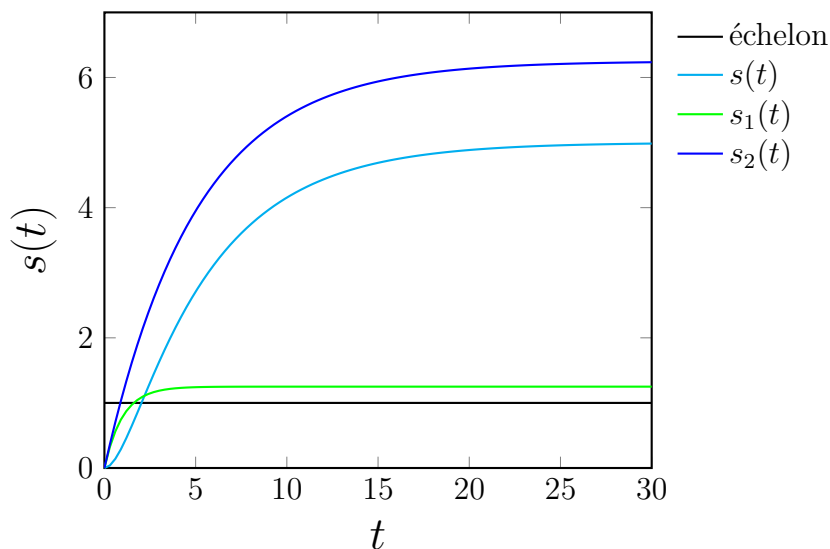


Figure 1.14

