

S de Rattrapage : Génie SPE

$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{2} \frac{1}{1 + j\omega T}\right)$

# Systèmes et Automatique Linéaires



**Filipe VASCONCELOS**

# **Systemes et Automatique Linéaires**

écrit sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, TikZ version de Juin 2025.

Pages de couverture par Lorraine Bayard.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence  
Creative Commons “Attribution - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : [filipe.vasconcelos@esme.fr](mailto:filipe.vasconcelos@esme.fr)

# Table des matières

Table des matières	5
Annexes	9
Annexe A   Alphabet Grec	9
Annexe B   Analyse de Fourier	11
1   Série de Fourier . . . . .	11
Références	13
Acronymes	17
Glossaire	19
Liste des Symboles	25



# Annexes





# A Alphabet Grec

Nom	Minuscule	Majuscule	Usages courants
alpha	$\alpha$	A	angles
bêta	$\beta$	B	angles
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	angles
delta	$\delta$	$\Delta$	variations
epsilon	$\epsilon, \varepsilon$	E	petite quantité
zéta	$\zeta$	Z	-
êta	$\eta$	H	rendement
thêta	$\theta, \vartheta$	$\Theta$	angles
iota	$\iota$	I	-
kappa	$\kappa, \varkappa$	K	-
lambda	$\lambda$	$\Lambda$	longueur, densité linéique
mu	$\mu$	M	masse réduite
nu	$\nu$	N	fréquence
ksi	$\xi$	$\Xi$	coefficient sans dimension
omicron	o	O	-
pi	$\pi, \varpi$	$\Pi$	$\Pi$ : plan
rhô	$\rho, \varrho$	P	densité volumique
sigma	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	$\sigma$ : densité surfacique, $\Sigma$ : Système
tau	$\tau$	T	temps, durée relative
upsilon	$\upsilon$	Y	-
phi	$\phi, \varphi$	$\Phi$	angles
khi	$\chi$	X	coefficients
psi	$\psi$	$\Psi$	fonction d'onde
oméga	$\omega$	$\Omega$	vitesse angulaire, angle solide

**Tableau A.1** – Lettres de l'alphabet Grec et leurs usages courants en physique (non exhaustifs)



## B Analyse de Fourier des signaux périodiques

*transformée de Laplace d'une fonction périodique et  $f(t)$  de période  $T$  :*

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-Tp}}$$

où  $F_0(p)$  est la transformée de Laplace du motif  $f_0(t)$  égal à  $f(t)$  sur le segment  $[0, T]$  et nul partout ailleurs.

### 1 Série de Fourier

$$e(t) = \frac{|C_0|}{2} + \sum_{n=1}^n |C_n| \cos n\omega_1 t + \phi_n$$

Avec  $C_n$  le coefficient de Fourier complexe tel que :

$$C_n = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$



# Références

- [1] <http://www.demosciences.fr/projets/scilab-xcos/-utilisation/premiers-pas>.
- [2] Régulation automatique (analogique) (REG). <http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/>.
- [3] Intro to Control - 16.3 Contour Mapping. [https://www.youtube.com/watch?v=k\\_XXfN1TZXM](https://www.youtube.com/watch?v=k_XXfN1TZXM).
- [4] MATLAB® Help Center - `impulse`. <https://fr.mathworks.com/help/control/ref/dynamicsystem.impulse.html>.
- [5] MATLAB® Help Center - `lsim`. <https://fr.mathworks.com/help/control/ref/dynamicsystem.lsim.html>.
- [6] MATLAB® Help Center - `step`. <https://fr.mathworks.com/help/control/ref/dynamicsystem.step.html>.
- [7] MATLAB® Help Center - `bode`. <https://fr.mathworks.com/help/control/ref/dynamicsystem.bode.html>.
- [8] Xcos pour les vrais debutants. <https://scilab.developpez.com/tutoriels/debuter/apprendre-xcos-debutant/>.
- [9] J. Abate and P. P. Valkó. Multi-precision laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(5) :979–993, 2004.
- [10] Joseph Abate and Ward Whitt. A unified framework for numerically inverting laplace transforms. *INFORMS Journal on Computing*, 18(4) :408–421, 2006.
- [11] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes lineaires (pc7bis), 2005.
- [12] Olivier E. Bachelier. 2021. <https://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/LIVRE.php>.
- [13] B. Bayle and J. Gangloff. Systèmes et asservissements à temps continu, 2009.
- [14] Henri Bourlès and Hervé Guillard. *Commande des systèmes performance et robustesse*. Technosup les filières technologiques des enseignements supérieurs. Ellipses, Paris, DL 2012, cop. 2012.
- [15] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier, and R. Nikoukhah. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. Springer, 2006.
- [16] D. M. Freeman. 6.003 Signal and Systems. <https://ocw.mit.edu/courses/6-003-signals-and-systems-fall-2011/pages/syllabus/>.
- [17] H. Garnier. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/hugues.garnier/?q=content/teaching>.
- [18] S. Genouel. Evaluation des performances des systèmes asservis - stabilité. <http://stephane.genouel.free.fr/>.
- [19] Y. Granjon. *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, événements discrets*. Dunod, Paris, 2015.

- 
- [20] E. Laroche and H. Halalchi. Asservissement des systèmes lineaires à temps continu. <http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>.
  - [21] O. Le Gallo. *Automatique des systèmes mécaniques : Cours, travaux pratiques et exercices corrigés*. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009.
  - [22] Joe Mabel. Régulateur à boules au Georgetown PowerPlant Museum à Seattle. CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5694146>.
  - [23] B. Marx. Outils Mathématiques pour l'ingénieur - Traitement du Signal. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html>.
  - [24] B. Marx. Contrôle des systèmes linéaires. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/-benoit.marx/enseignement.html>.
  - [25] F. Orieux. *Automatique : Systèmes linéaires et asservissements*. Notes de Cours, Master 2 Outils et systèmes de l'astronomie et de l'Espace, 20017-1018.
  - [26] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses Marketing, 2004.
  - [27] R. Papanicola. Schéma-blocs avec PGF/TIKZ. <https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/schema-bloc.pdf>.
  - [28] R. Papanicola. *Sciences industrielles PCSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2003.
  - [29] R. Papanicola. *Sciences industrielles PSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2010.
  - [30] Marsyas-Travail personnel. Clepsydre athénienne reconstituée, Musée de l'Agora antique d'Athènes. CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=476174>.
  - [31] Consortium Scilab. Introduction to Scilab. [www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf](http://www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf).
  - [32] S. Steer and Y. Degré. *Scilab : De la théorie à la pratique - II. Modéliser et simuler avec Xcos*. Éditions D-BookeR, 2014.
  - [33] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. *Automatique des systèmes continus*. Editions Technip.
  - [34] E. Thomas. TP Scilab. [http://cpgeptl.jg.free.fr/scenari/TP\\_INFO/TP\\_info\\_12\\_ordre/co/module\\_TP\\_1\\_2\\_ordre\\_5.html](http://cpgeptl.jg.free.fr/scenari/TP_INFO/TP_info_12_ordre/co/module_TP_1_2_ordre_5.html).
  - [35] Wikipédia. Transformation inverse de laplace — wikipédia, l'encyclopédie libre, 2023. [En ligne ; Page disponible le 22-janvier-2023].







# Acronymes

**BIBO** Bounded Input Bounded Output

**DES** Décomposition en Éléments Simples

**EBSB** Entrée Bornée/Sortie Bornée

**FTBF** Fonction de Transfert en Boucle Fermée

**FTBO** Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

**FTCD** Fonction de Transfert de la Chaîne Directe

**FTCR** Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour

**MEI** Matière-Énergie-Information

**MIMO** Multiple Input Multiple Output

**SISO** Single Input Single Output

**SLCI** Système Linéaire Continu et Invariant

**TL** Transformée de Laplace



# Glossaire

<b>Échelon unité</b>	L'échelon unité également connu comme la fonction d'Heaviside ou bien encore fonction marche d'escalier, est la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+$ . La fonction est très souvent utilisée dans les mathématiques du traitement du signal ou de l'automatique pour modéliser des états fermé/ouvert (« on/off ») d'un signal donné.
<b>Asservissement</b>	L'asservissement consiste à contrôler un système dynamique pour que sa réponse temporelle suive une consigne variable au cours du temps.
<b>Contrôle</b>	Le contrôle permet d'englober les notions d'asservissement et de régulation à l'idée de contrôle automatique des systèmes. C'est le terme qui est plus largement utilisé dans la littérature moderne.
<b>Correcteur</b>	Un correcteur permet d'ajuster ou de modifier la réponse du système en fonction des écarts entre la valeur souhaitée (la consigne) et la valeur réelle mesurée (la sortie) par le système. Le rôle principal du correcteur est d'améliorer les performances du système en minimisant les erreurs et en optimisant les performances telles que la stabilité, la rapidité et la précision. Il existe différents types de correcteurs, tels que les correcteurs proportionnels (P), intégrateurs (I), dérivés (D), et les combinaisons de ceux-ci, qui sont choisis en fonction des spécificités du système et des exigences de performance.

<b>Diagramme de Black-Nichols</b>	Le diagramme de Black-Nichols est un graphe utilisé en automatique pour étudier la réponse harmonique des systèmes linéaires. Il représente, dans un repère semi-logarithmique, le gain (en décibels) en fonction de la phase, selon une courbe paramétrée par la pulsation. Ce diagramme combine en un les deux diagrammes de Bode. À l'échelle internationale, ce diagramme est communément appelé diagramme de Nichols, alors qu'en France, il a longtemps été spécifiquement désigné comme le diagramme de Black.
<b>Diagramme de Bode</b>	C'est un diagramme pour lequel la réponse harmonique est représentée par deux graphes semi-logarithmique donnant d'une part le gain en décibel en fonction de la pulsation et d'autre part le déphasage en degré en fonction de la pulsation.
<b>Diagramme de Nyquist</b>	Le diagramme de Nyquist constitue un outil graphique fréquemment employé dans les domaines de l'électronique et de l'automatique afin d'évaluer la stabilité d'un système en boucle fermée. Il représente, dans le plan complexe, la réponse harmonique du système en boucle ouverte associé. L'angle de phase et la distance du point à l'origine déterminent respectivement la phase et l'amplitude de la réponse harmonique. À l'instar du <a href="#">Diagramme de Black-Nichols</a> , celui de Nyquist fusionne les deux types de diagrammes de Bode.
<b>Dépassement</b>	Le dépassement (ou plutôt le premier dépassement) est lié à valeur maximale prise par une réponse temporelle en régime pseudo-périodique.
<b>Fonction de Transfert</b>	La fonction de transfert définit la relation entre l'entrée et la sortie d'un système linéaire.
<b>Impulsion de Dirac</b>	Autrement appelée plus formellement <i>distribution de Dirac</i> , ce signal sert en physique à décrire des événements ponctuels. Pour les besoins du formalisme quantique, Dirac a introduit cet objet singulier, qu'on appelle aujourd'hui « impulsion de Dirac », notée $\delta(t)$ . Cette impulsion représente un signal de durée théoriquement nulle et d'énergie finie.

<b>Impulsionnelle</b>	(c.f <a href="#">Réponse impulsionnelle</a> )
<b>Indicielle</b>	(c.f <a href="#">Réponse indicielle</a> )
<b>Performances</b>	Les performances attendues par un système asservi ou régulé sont généralement liées à sa stabilité, sa précision et sa rapidité.
<b>Précision</b>	La précision est une performance recherchée par les automaticiens pour le système qu'ils souhaitent asservir. Un système automatique est précis si la différence (l'écart) entre la consigne et la sortie est nulle. Il est possible de définir une précision statique (en régime permanent) ou une précision dynamique (l'écart instantané)
<b>Pôle</b>	Un pôle est formellement la racine du dénominateur d'une fraction rationnelle irréductible. Dans le contexte de l'étude d'un système linéaire, c'est la racine au dénominateur de la fonction de transfert du système
<b>Rapidité</b>	La rapidité est une performance recherchée par les automaticiens pour le système qu'ils souhaitent asservir. La rapidité peut être quantifier par le temps de réponse ou le temps de montée. Un système est d'autant plus rapide que ces temps sont brefs.
<b>Régime apériodique</b>	Le régime apériodique est le régime pour lequel la réponse temporelle d'un système linéaire ne présente pas d'oscillations. On parle également de réponse fortement amortie.
<b>Régime critique</b>	Le régime critique est le régime intermédiaire entre le régime apériodique et le régime pseudo-périodique. Il correspond à un cas limite.
<b>Régime permanent</b>	Le régime permanent est la contribution de la réponse temporelle qui persiste lorsque le régime transitoire disparé.
<b>Régime pseudo-périodique</b>	Le régime pseudo-périodique est le régime pour lequel la réponse temporelle d'un système linéaire présente des oscillations faiblement amorties.

<b>Régime transitoire</b>	Le régime transitoire est la contribution de la réponse temporelle qui disparaît lorsque le régime permanent persiste.
<b>Régulation</b>	La régulation est un cas particulier d'asservissement consistant à garder une consigne constante en présence de perturbation.
<b>Réponse harmonique</b>	La réponse harmonique est la réponse d'un système à une sollicitation harmonique, ou autrement dit à une sollicitation sinusoïdale.
<b>Réponse impulsionnelle</b>	La réponse impulsionnelle est la réponse temporelle à une impulsion de Dirac.
<b>Réponse indicielle</b>	La réponse indicielle est la réponse temporelle à un signal échelon.
<b>Réponse temporelle</b>	La réponse temporelle correspond à la réponse d'un système dans le domaine temporel à n'importe quelle sollicitation.
<b>Schéma-bloc</b>	Un schéma-bloc ou un schéma fonctionnel permet de représenter graphiquement des relations mathématiques entre des grandeurs dans les domaines temporel ou de Laplace.
<b>Signal</b>	Un signal est la grandeur qui porte l'information. Elle peut être de différente nature selon le domaine d'application.
<b>Signal rampe</b>	Le signal rampe est l'échelon unitaire multipliée par l'application identité. Ce signal est connu sous le nom d'Unité Linéaire Rectifiée (ou ReLU pour <i>Rectified Linear Unit</i> ) dans le domaine des réseaux de neurones.
<b>Signaux usuels</b>	Les signaux usuels sont les trois entrées ou sollicitations couramment utilisées pour l'étude des systèmes linéaires. (c.f <a href="#">Impulsion de Dirac</a> , <a href="#">Échelon unité</a> , <a href="#">Signal rampe</a> )
<b>Stabilité</b>	Deux définitions sont possibles : (1) Un système est dit stable lorsque écarté de son état d'équilibre, il tend à y revenir. Un système est dit stable si à une entrée bornée le système produit une sortie bornée. On parle alors de stabilité <a href="#">"Entrée Bornée/Sortie Bornée" (EBSB)</a> .

<b>Système Linéaire</b>	Un système est dit linéaire si il respecte le principe de proportionnalité et le principe de superposition.
<b>Temps de montée</b>	Le temps de montée est la durée de l'intervalle de temps d'une réponse temporelle passe d'une réponse
<b>Temps de réponse</b>	Le temps de réponse est le temps écoulé entre le moment de la sollicitation et le moment de sa réponse.





# Liste des Symboles

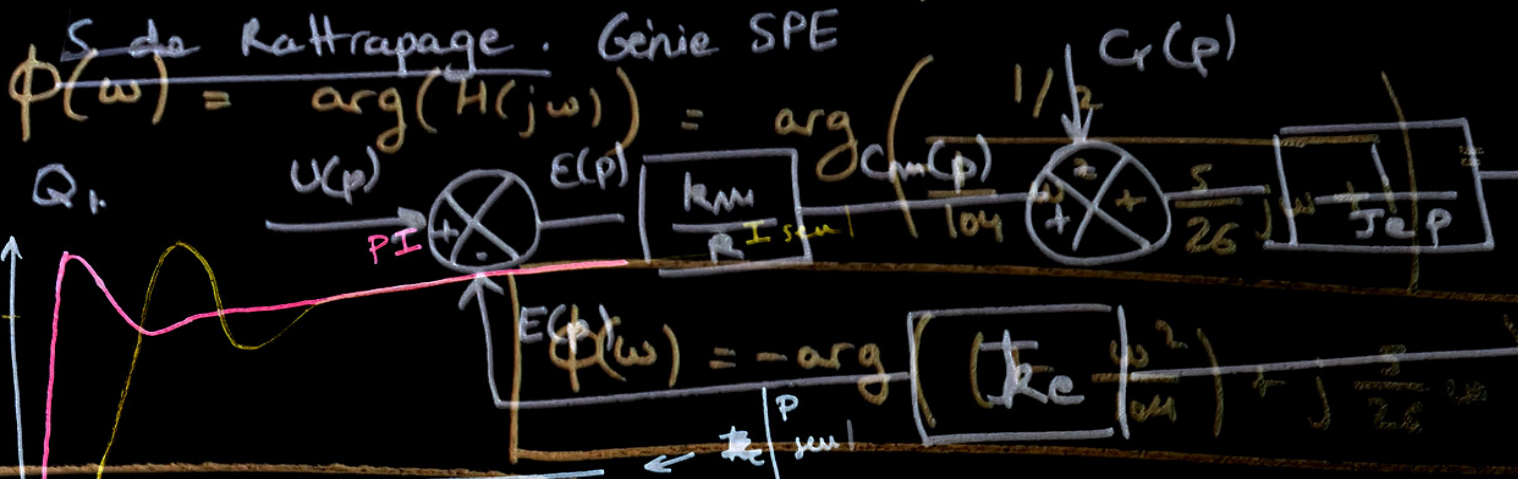
$t$	Variable temporelle
$p$	Indéterminée de polynôme
$s(t)$	Fonction/Signal dans le domaine temporel
$S(p)$	Fonction/Signal dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$
$u(t)$	Fonction échelon unité ou de Heaviside
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
$r(t)$	Fonction rampe unité
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformation de Laplace de la fonction $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	Transformation de Laplace inverse de la fonction $F(p)$
$H(p)$	Fonction de transfert
$N(p)$	Polynôme du numérateur d'une fraction rationnelle
$D(p)$	Polynôme du dénominateur d'une fraction rationnelle
$\omega$	Pulsation
$H(j\omega)$	Nombre complexe associé à la fonction de transfert $H(p)$
$E_0$	Paramètre dimensionnelle d'amplitude de l'entrée
$K$	Gain statique
$\omega_0$	Pulsation propre
$\text{Im}[H(j\omega)]$	Partie imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
$\text{Re}[H(j\omega)]$	Partie réelle du nombre complexe $H(j\omega)$
$\xi$	Coefficient d'amortissement
$G(\omega)$	Gain naturel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$G_{\text{dB}}(\omega)$	Gain en dB de la réponse harmonique en fonction de la pulsation

$\phi(\omega)$	Déphasage de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$\omega_{0dB}$	Pulsation de coupure à 0 dB
$D_k$	k-ème dépassement
$t_{5\%}$	Temps de réponse à 5%
$t_m$	Temps de montée
$t_M$	Temps de montée à la valeur finale
$H_{BO}(p)$	Fonction de transfert en boucle ouverte
$H_{BF}(p)$	Fonction de transfert en boucle fermée
$C(p)$	Fonction de transfert du correcteur



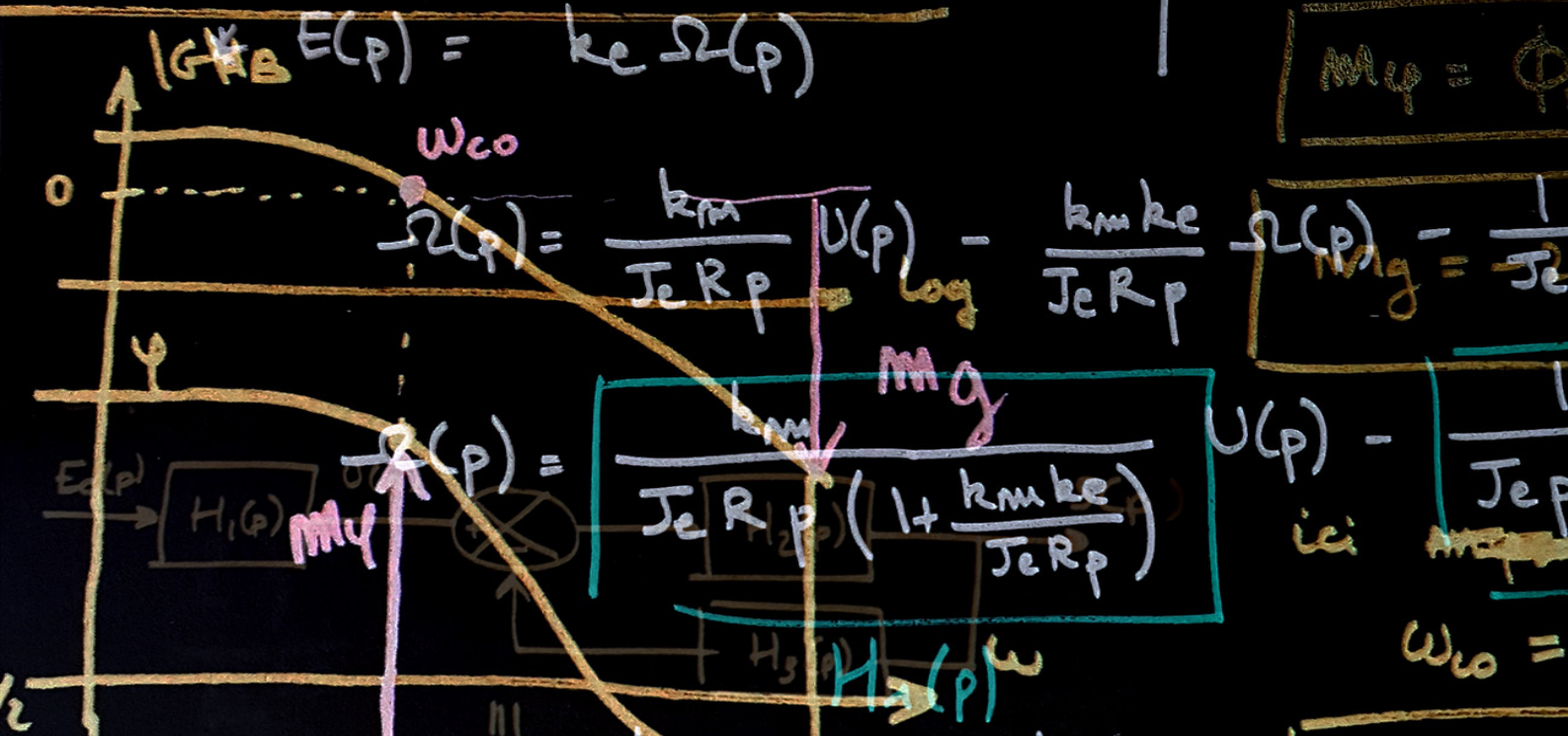


S de Rattrapage. Génie SPE



$A(\omega) = \frac{E_m(p)}{2} = \frac{(U(p) - E(p)) \frac{km}{R}}{\sqrt{\left(\frac{1}{104} \frac{km}{R} \omega^2\right)^2 + \left(\frac{km}{26} - C_r(p)\right)^2} \frac{1}{j\omega p}}$

$\Omega(p) = \left[ \frac{km}{R} U(p) - \frac{kmke}{j\omega p} \right]$



a)  $E(p) H_1(p) = \frac{km}{j\omega R p + kmke} = \frac{km}{kmke} \left( \frac{j\omega R}{1 + \frac{j\omega R}{kmke}} \right)$

avec  $k_1 = \frac{1}{ke}$  et  $\tau_1 = \frac{j\omega R}{kmke}$

b)  $H_2(p) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 H_3} = \frac{H_1 H_2}{1 + H_2 H_3} = \frac{kmke}{j\omega R p + kmke} = \frac{kmke}{R} \left( \frac{j\omega R}{1 + \frac{j\omega R}{kmke}} \right)$

$\Rightarrow \omega_{-1} = 0 \Rightarrow \dots$