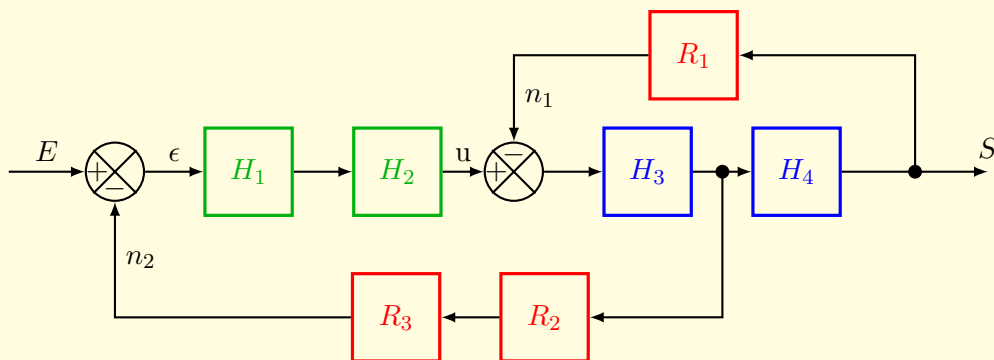


# Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé*

*Automatique Linéaire*



ANNÉE 2019–2020



# Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé*

*Automatique Linéaire*

Filipe Manuel Vasconcelos

écrit sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, TikZ  
version de janvier 2020.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence  
Creative Commons “Attribution - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : [filipe.vasconcelos@esme.fr](mailto:filipe.vasconcelos@esme.fr)

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>11</b>
<b>Chapitre 1 Systèmes linéaires, continus...</b>	<b>13</b>
1. Introduction	14
2. Définition SLCI	15
2.1. Système	15
2.2. Système à temps continu	16
2.3. Système linéaire	16
2.4. Système causal	16
2.5. Système invariant	17
2.6. Système stable	17
2.7. Modélisation d'un système linéaire continu et invariant	17
3. Modélisation d'un signal	19
3.1. Propriétés générales des signaux continus (analogiques)	20
3.2. Signaux usuels rencontrés...	22
4. La transformée de Laplace	28
4.1. Définition	28
4.2. Propriétés	28
4.3. Transformées des signaux usuels	32
4.4. Application de la transformée de Laplace	34
5. Fonction de Transfert	39
5.1. Définition	39
5.2. Fonction de transfert et réponse impulsionnelle	39
5.3. Représentation de la fonction de transfert	39
<b>Chapitre 2 Schéma fonctionnels</b>	<b>45</b>
1. Introduction	46
2. Éléments de base des schémas fonctionnels	46
3. Transformation des schémas fonctionnels	48
3.1. Réduction de schéma-bloc	48
3.2. Manipulation de schéma-bloc	51
4. Cas d'entrées multiples	52
5. Réduction de schéma-bloc de grande taille	53
5.1. Exemple à entrée simple	54
5.2. Exemple à entrées multiples	56
6. Graphe de fluence	58
6.1. Définitions	58

6.2.	Algèbre des graphes de fluences . . . . .	59
6.3.	Règle de Mason . . . . .	62
<b>Chapitre 3</b>	<b>Modélisation des SLCI</b>	<b>65</b>
1.	Introduction . . . . .	66
2.	Système du premier ordre . . . . .	67
2.1.	Définition d'un système du premier ordre . . . . .	67
2.2.	Fonction de transfert d'un système du premier ordre . . . . .	67
2.3.	Pôle de la fonction de transfert du premier ordre . . . . .	67
2.4.	Réponses temporelles d'un système du premier ordre . . . . .	67
3.	Système du second ordre . . . . .	72
3.1.	Définition d'un système du second ordre . . . . .	72
3.2.	Fonction de transfert d'un système du second ordre . . . . .	72
3.3.	Pôles de la fonction de transfert du second ordre . . . . .	72
3.4.	Réponses temporelles d'un système du second ordre . . . . .	74
3.5.	Cas particulier de l'oscillateur harmonique . . . . .	89
4.	Autres modèles particuliers . . . . .	90
4.1.	Gain pur . . . . .	90
4.2.	Intégrateur pur . . . . .	90
4.3.	Dérivateur pur . . . . .	91
4.4.	Retard pur . . . . .	91
5.	Généralisation des modèles de SLCI . . . . .	92
5.1.	Systèmes d'ordre supérieur à 2 . . . . .	92
5.2.	Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3 . . . . .	93
6.	Identification d'un modèle de comportement . . . . .	94
6.1.	Formule de Bureau . . . . .	94
6.2.	Modèle de Strejc . . . . .	94
<b>Chapitre 4</b>	<b>Analyse fréquentielle</b>	<b>95</b>
1.	Réponse harmonique . . . . .	96
1.1.	Exemple de réponse harmonique dans le domaine temporel . . . . .	98
2.	Représentation graphique de la réponse harmonique . . . . .	99
2.1.	Diagramme de Bode . . . . .	100
2.2.	Diagramme de Nyquist . . . . .	101
2.3.	Diagramme de Black-Nichols . . . . .	101
3.	Analyse fréquentielle des modèles usuels . . . . .	102
3.1.	Diagrammes de Bode : méthodologie générale . . . . .	102
3.2.	Diagrammes de Nyquist : méthodologie générale . . . . .	120
3.3.	Diagrammes de Black : méthodologie générale . . . . .	129
4.	Etude du transitoire de la réponse harmonique . . . . .	129
4.1.	Exemple d'un système du premier ordre . . . . .	129
4.2.	Exemple d'un système du second ordre . . . . .	130
<b>Chapitre 5</b>	<b>Asservissements des systèmes linéaires</b>	<b>131</b>
1.	Introduction . . . . .	132

2.	Organisation d'un asservissement . . . . .	134
2.1.	Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis . . . . .	134
2.2.	Présence d'une perturbation : la régulation . . . . .	135
2.3.	Schéma fonctionnel complet . . . . .	135
2.4.	Fonctions de transferts associées à un système asservi . . . . .	138
3.	Asservissement des SLCI modèles . . . . .	139
3.1.	Asservissement d'un intégrateur . . . . .	139
3.2.	Asservissement d'un système du premier ordre . . . . .	140
3.3.	Asservissement d'un système du second ordre . . . . .	140
<b>Chapitre 6</b>	<b>Performances des systèmes asservis</b>	<b>143</b>
1.	Introduction . . . . .	144
2.	Précision . . . . .	144
2.1.	Précision en boucle ouverte . . . . .	144
2.2.	Précision en boucle fermée . . . . .	145
2.3.	Effet d'une perturbation . . . . .	148
3.	Rapidité . . . . .	152
3.1.	Réponse temporelle . . . . .	152
3.2.	Réponse harmonique . . . . .	158
3.3.	Influence des pôles dominants . . . . .	158
<b>Chapitre 7</b>	<b>Stabilité des systèmes asservis</b>	<b>161</b>
1.	Contexte et critère de stabilité fondamentale . . . . .	162
2.	Critère algébrique de Routh . . . . .	164
2.1.	Tableau de Routh . . . . .	165
2.2.	Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz . . . . .	167
3.	Critère graphique du revers . . . . .	169
3.1.	Critère du revers dans le plan de Nyquist . . . . .	172
3.2.	Critère du revers dans le plan de Black . . . . .	173
3.3.	Critère du revers dans le plan de Bode . . . . .	174
4.	Critère de Nyquist . . . . .	175
<b>Chapitre 8</b>	<b>Correction des systèmes asservis</b>	<b>181</b>
1.	Nécessité de la correction . . . . .	182
2.	Correcteur P, I et D . . . . .	182
3.	Correcteur PI et PD . . . . .	182
4.	Correcteur PID . . . . .	182
<b>Chapitre 9</b>	<b>Initiation à la représentation d'état</b>	<b>183</b>
<b>Annexes</b>		<b>187</b>
<b>Annexe A</b>	<b>Alphabet Grec</b>	<b>187</b>
<b>Annexe B</b>	<b>Unités du Système International</b>	<b>189</b>
<b>Annexe C</b>	<b>Pierre-Simon de Laplace</b>	<b>191</b>
<b>Annexe D</b>	<b>Transformation de Laplace</b>	<b>193</b>
1.	Définitions . . . . .	193
2.	Propriétés . . . . .	193
3.	Table des transformées de Laplace . . . . .	195

<b>Annexe E</b>	<b>Rappel sur les nombres complexes</b>	<b>197</b>
<b>Annexe F</b>	<b>Équations différentielles à coefficients constants</b>	<b>203</b>
1.	Résolution équation différentielle du premier ordre . . . . .	203
1.1.	Sans second membre . . . . .	203
<b>Annexe G</b>	<b>Décomposition en éléments simples</b>	<b>207</b>
1.	Contexte . . . . .	207
2.	Fractions rationnelles rencontrées en automatique . . . . .	207
3.	Décomposition en éléments simples . . . . .	208
4.	Détermination des coefficients de la DES . . . . .	209
4.1.	Par identification . . . . .	209
<b>Annexe H</b>	<b>Systèmes du second ordre</b>	<b>211</b>
1.	Abaques de la réponse temporelle . . . . .	212
2.	Analyse fréquentielle . . . . .	215
<b>Annexe I</b>	<b>Initiation à Scilab</b>	<b>217</b>
1.	Présentation générale . . . . .	217
2.	Syntaxe : console . . . . .	218
3.	Polynômes et fractions rationnelles . . . . .	219
4.	Vecteurs et matrices . . . . .	221
5.	Tracer de figures . . . . .	225
6.	Programmation . . . . .	226
7.	SLCI avec Scilab . . . . .	228
7.1.	Définition d'un système linéaire . . . . .	228
7.2.	Simulation temporelle d'un système linéaire . . . . .	229
7.3.	Système du premier ordre . . . . .	230
7.4.	Carte des pôles et zéros . . . . .	233
7.5.	Asservissement . . . . .	233
8.	Scilab-Xcos . . . . .	234
8.1.	Lancer Xcos . . . . .	234
8.2.	Diagramme simple . . . . .	234
8.3.	Simulation . . . . .	234
8.4.	Blocs « To Workspace » ou « From Workspace » . . . . .	235
<b>Annexe J</b>	<b>Échelle logarithmique et le décibel</b>	<b>237</b>
1.	Rappel sur le logarithme décimal . . . . .	237
2.	Échelle logarithmique décimale . . . . .	237
3.	Le décibel . . . . .	239
4.	Diagramme de Bode . . . . .	239
5.	Tracé d'un diagramme de Bode avec Scilab . . . . .	242
<b>Annexe K</b>	<b>Transformée de Laplace inverse</b>	<b>243</b>
1.	Contexte . . . . .	243
2.	Méthode de Gaver-Stehfest . . . . .	243
3.	Méthode de Talbot fixe . . . . .	243
	<b>Références</b>	<b>245</b>
	<b>Index</b>	<b>247</b>



<b>Acronymes</b>	<b>249</b>
<b>Glossaire</b>	<b>251</b>
<b>Liste des Symboles</b>	<b>253</b>



# Avant-propos

## Programme

Ce cours est une introduction à l'**automatique** pour des étudiants de deuxième année de classe préparatoire scientifique.

L'objectif principal de l'automatique est de permettre le contrôle des **systèmes dynamiques** de toutes natures que ce soient : mécanique, chimique, électronique, optique, thermique, acoustique. . . . Tout en respectant certaines contraintes de performances (rapidité, précision, stabilité. . . ).

Nous limiterons notre étude aux **systèmes linéaires continus et invariants**. La **modélisation** de ces systèmes passe par la mise en équation du comportement physique des systèmes sous forme d'équations différentielles. Cette étape ne fait pas à proprement parler partie d'un cours d'automatique, en effet chacune des disciplines construisent cette modélisation en se basant sur les principes et les hypothèses les plus adaptés à un problème donné. La modélisation permet une étude systématique des équations différentielles en proposant des modèles généraux et ce quelque soit la nature du procédé.

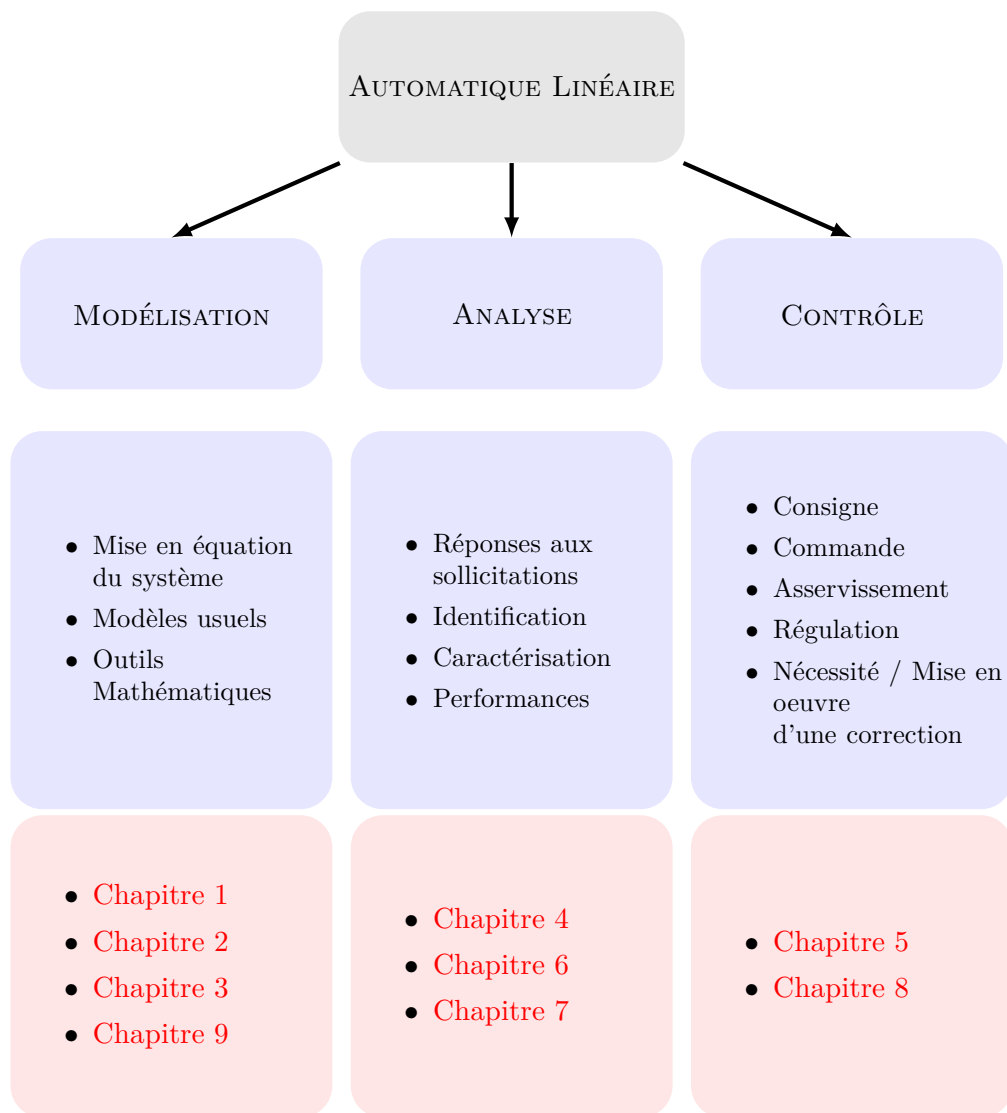
L'**analyse** nous permettra de caractériser et d'identifier ces modèles à partir des réponses aux sollicitations et de leurs performances.

Le **contrôle** est un concept très générale permettant de regrouper toutes les méthodes et techniques permettant de commander un système dynamique. Dans ce cours nous présenterons que les principes d'asservissement et de régulation. Nous verrons comment il est possible d'élaborer une commande adaptée (corrigée) pour un procédé quelconque, notamment lorsque ceux-ci présenteront des défauts de performance.

## Organisation du document

Les chapitres suivent un découpage classique autour des trois piliers discutés précédemment que sont la **modélisation**, l'**analyse** et le **contrôle**. (c.f **Figure A**).

Le lecteur pourra s'appuyer sur un grand nombre d'annexes qui ont pour objectifs de rappeler et de détailler des notions prérequis ou encore approfondir quelques aspects hors programme pour une deuxième lecture.



**Figure A.** – Organisation du document.

## 4. Analyse fréquentielle et représentation graphique

### Sommaire

---

<b>1.</b>	<b>Réponse harmonique</b>	<b>96</b>
1.1.	Exemple de réponse harmonique dans le domaine temporel	98
<b>2.</b>	<b>Représentation graphique de la réponse harmonique</b>	<b>99</b>
2.1.	Diagramme de Bode	100
2.2.	Diagramme de Nyquist	101
2.3.	Diagramme de Black-Nichols	101
<b>3.</b>	<b>Analyse fréquentielle des modèles usuels</b>	<b>102</b>
3.1.	Diagrammes de Bode : méthodologie générale	102
3.2.	Diagrammes de Nyquist : méthodologie générale	120
3.3.	Diagrammes de Black : méthodologie générale	129
<b>4.</b>	<b>Etude du transitoire de la réponse harmonique</b>	<b>129</b>
4.1.	Exemple d'un système du premier ordre	129
4.2.	Exemple d'un système du second ordre	130

---

Dans ce chapitre, nous allons établir la forme de la réponse d'un **système linéaire continu et invariant** (SLCI) à une entrée sinusoïdale, dite **réponse harmonique** en régime permanent. Nous présenterons ensuite en détail les différentes représentations graphiques qui constitueront l'**analyse fréquentielle** de cette réponse harmonique. Nous verrons en fin de chapitre une étude du transitoire dans des cas usuels.

## 1. Réponse harmonique

Soit un **SLCI** défini par une fonction de transfert  $H(p)$  auquel on applique une entrée sinusoïdale  $e(t)$  tel que :

$$e(t) = E_0 \sin \omega t$$

d'amplitude  $E_0$  et de pulsation  $\omega$ <sup>1</sup>. Dans le domaine de Laplace, la sortie  $S(p)$  est de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p)$$

où  $E(p)$  est la transformée de Laplace d'un sinus (c.f ligne 23 du tableau de l'**Annexe D**), on obtient alors :

$$S(p) = H(p) \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Les pôles de la fonction de transfert  $H(p)$  donnent lieu au régime transitoire alors que les pôles de l'excitation donnent lieu au régime permanent. Les deux pôles de l'excitation sont  $p_{1,2} = \pm j\omega$ . La forme factorisée s'écrit alors :

$$S(p) = H(p) \frac{E_0 \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)}$$

En régime permanent, la décomposition de  $S(p)$  en éléments simples s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p - j\omega} + \frac{B}{p + j\omega}$$

où les coefficients s'obtiennent par évaluation :

$$\begin{aligned} A &= (p - j\omega)S(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{E_0 \omega}{p + j\omega} H(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{E_0}{2j} H(j\omega) \\ B &= (p + j\omega)S(p) \Big|_{p=-j\omega} = \frac{E_0 \omega}{p - j\omega} H(p) \Big|_{p=-j\omega} = -\frac{E_0}{2j} H(-j\omega) \end{aligned}$$

nous obtenons donc :

$$S(p) = \frac{E_0}{2j} \left( \frac{H(j\omega)}{p - j\omega} - \frac{H(-j\omega)}{p + j\omega} \right)$$

<sup>1</sup>Strictement,  $\omega$  est une pulsation en unité  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , la fréquence associée étant  $f = \omega/2\pi$ , en  $\text{s}^{-1}$  ou Hz. Cependant, par abus de langage, il est courant de se référer en terme de fréquence en parlant de la pulsation  $\omega$ . Nous prendrons cependant soin d'utiliser la bonne forme dans nos applications numériques.

La transformée de Laplace inverse de la sortie  $S(p)$  permet d'obtenir la réponse temporelle

$$s(t) = \frac{E_0}{2j} \left( H(j\omega) e^{j\omega t} - H(-j\omega) e^{-j\omega t} \right)$$

En écrivant le nombre complexe  $H(j\omega)$  sous sa forme exponentielle ([Annexe E](#)) :

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= |H(j\omega)| e^{j\phi} \\ H(-j\omega) &= |H(j\omega)| e^{-j\phi} \end{aligned}$$

où  $|H(j\omega)|$  et  $\phi$  sont respectivement le module et l'argument du nombre complexe  $H(j\omega)$  et où l'on considère de plus que  $H(-j\omega)$  est égale à son conjugué (i.e  $H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)}$ ).

La réponse temporelle peut alors s'écrire sous la forme

$$s(t) = E_0 |H(j\omega)| \left( \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \right)$$

où l'on reconnaît la forme exponentielle de la fonction sinus qui nous permet d'écrire :

$$s(t) = E_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad (4.1)$$

Cette relation exprime que **l'excitation d'un SLCI par une entrée sinusoïdale donne lieu, en régime permanent, à une réponse harmonique dépendant de la fréquence d'excitation dont le gain en amplitude et la phase sont respectivement donné par le module et l'argument de la fonction de transfert du système.**

À noter que  $H(j\omega)$  correspond au rapport de la sortie sur l'entrée, ainsi le gain  $|H(j\omega)|$  et la phase peuvent être définis à partir de la sortie et de l'entrée du signal,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \\ |H(j\omega)| &= \frac{|S(j\omega)|}{|E(j\omega)|} \\ \arg H(j\omega) &= \arg S(j\omega) - \arg E(j\omega) \end{aligned}$$

Le gain  $|H(j\omega)|$  est une fonction réelle de  $\omega$  de ce fait nous utiliserons par la suite  $G(\omega)$  pour noter plus explicitement cette dépendance. La phase est également une fonction de la pulsation d'excitation, nous la noterons donc  $\phi(\omega)$  par la suite.

$\omega[\text{rad/s}]$	$\omega = 0.1$	$\omega = 1$	$\omega = 10$
$G(\omega)$	0.99	0.70	0.1
$\phi(\omega)$	-5.7°	-45°	-84.3°

**Tableau 4.1.** – Quelques valeurs particulières du gain et de la phase de la fonction de transfert du premier ordre, pour  $K = 1$  et  $\tau = 1$  s.

### 1.1. Exemple de réponse harmonique dans le domaine temporel

Considérons un **SLCI** défini par une fonction de transfert  $H(p)$  du premier ordre (Équation (3.2)) de forme canonique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + p}$$

avec  $K = 1$ ,  $\tau = 1$  s.

Comme nous venons de le montrer la réponse harmonique est complètement déterminée par la connaissance du module et de l'argument du nombre complexe  $H(j\omega)$ . Le module donnant accès au rapport du gain en amplitude de la sortie sur l'entrée et l'argument à la différence de phase entre la sortie et l'entrée.

Calculons donc ces deux quantités pour notre fonction de transfert du premier ordre :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\tau\omega} \right|$$

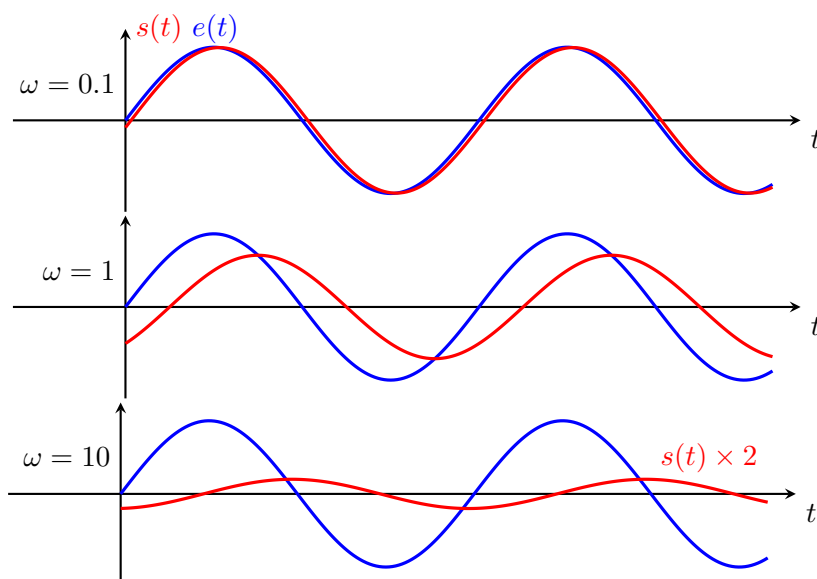
$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arctan(\omega\tau)$$

Le **tableau 4.1** présente le module et l'argument pour quelques valeurs particulières de  $\omega$  ( $\omega = 0.1, 1$  et  $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ). D'après ces valeurs, nous constatons que le rapport des amplitudes décroît et que le déphasage augmente lorsque la pulsation de l'excitation augmente.

La **figure 4.1** présente la forme des réponses temporelles de ce système pour les données calculées du gain et de la phase de la fonction de transfert considérée. Cette représentation graphique montre ses limites, en effet quand est-il de toutes les autres valeurs de la pulsation ?

Nous allons maintenant généraliser cette analyse sans pour autant avoir à tracer la réponse temporelle pour toutes les pulsations que l'on souhaite étudier.





**Figure 4.1.** – Réponse harmonique (en régime permanent) (Équation (4.1)) d'un système du premier ordre pour différentes pulsations d'excitation de la forme  $e(t) = \sin \omega t$ , (données du tableau 4.1). Cette figure permet d'observer l'augmentation du déphasage et la diminution de l'amplitude lorsque la fréquence d'excitations augmente. (bleu) excitation  $e(t)$  (rouge) sortie  $s(t)$ .

## 2. Représentation graphique de la réponse harmonique

Comme nous venons de le voir, il est possible d'étudier la réponse harmonique (en régime permanent) d'un **SLCI** dans le domaine temporel et observer la variation d'amplitude et du déphasage qui dépend de la pulsation d'excitation. Ces variations d'amplitude et de phase sont totalement déterminées par la connaissance du module et de l'argument du nombre complexe  $H(j\omega)$ , c'est ce qui constitue l'analyse fréquentielle des **SLCI**.

Dans cette partie, nous présenterons trois types de représentations graphiques, notamment :

- le diagramme de Bode,
- le diagramme de Nyquist,
- et le diagramme de Black-Nichols<sup>2</sup>.

Nous étudierons en détail les diagrammes des modèles usuels que nous avons déjà rencontrés au chapitre précédent (**Chapitre 3**)

Le terme **lieu de transfert** est communément utilisé pour parler du points de coordonnées  $(\omega, \phi(\omega), G(\omega))$ .

<sup>2</sup>Nathaniel B. Nichols, (1914–1997) ingénieur américain.

## 2.1. Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode<sup>3</sup> permet de représenter le comportement fréquentielle d'un système quelconque en fonction de la fréquence d'excitation en entrée. Il se compose de deux graphiques :

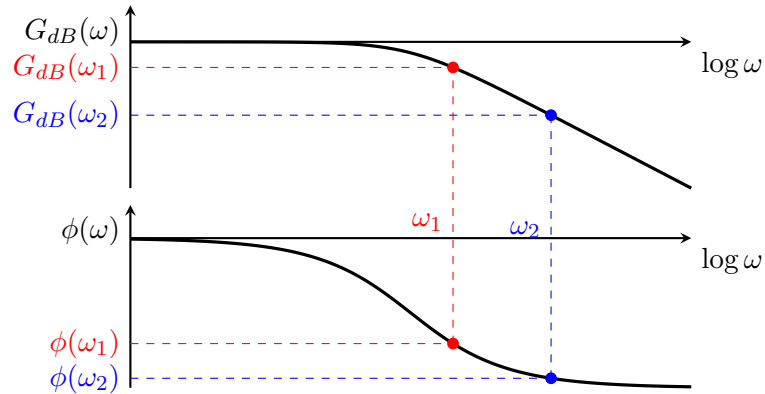
- i) le tracé du gain en décibel en fonction de la pulsation  $\omega$  :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| \quad (4.2)$$

- ii) le tracé de la phase en fonction de la pulsation  $\omega$  :

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) \quad (4.3)$$

L'axe des pulsations étant généralement représenté par une échelle logarithmique pour permettre la représentation de la réponse harmonique sur une large plage de valeurs en pulsation ([Annexe J](#)). Le calcul de la phase passe lui par la détermination de l'argument principale ([Annexe E](#)).



**Figure 4.2.** – Représentation schématique d'un diagramme de Bode. Le gain en décibel et la phase associé à une fonction de transfert sont représentés en fonction de la pulsation (à l'échelle log) sur deux repères distincts.

La principale propriété du diagramme de Bode est de permettre de simplifier un grand nombre calcul. En effet, dans le cas par exemple où deux systèmes  $H_1$  et  $H_2$  sont mis en série,

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega),$$

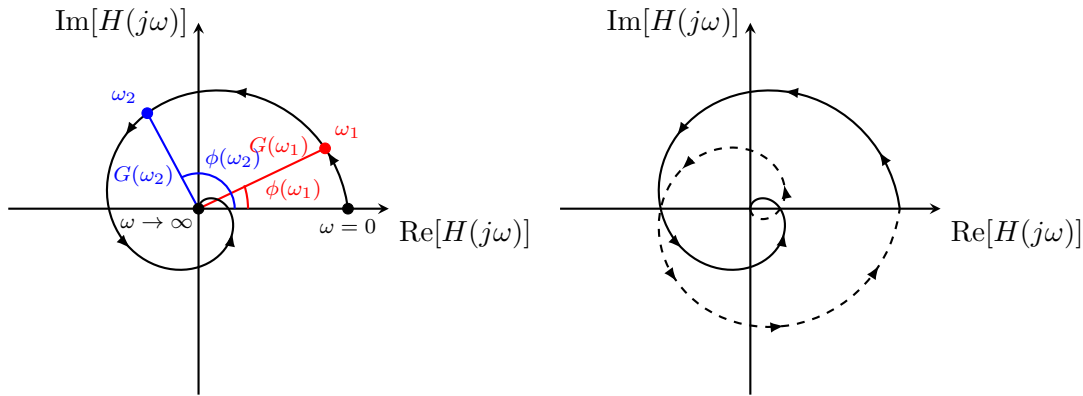
Le diagramme de Bode de  $H(j\omega)$  est la somme de deux diagrammes indépendants :

$$\text{Bode}(\text{total}) = \text{Bode}(1) + \text{Bode}(2)$$

<sup>3</sup>Hendrik Wade Bode (1905-1982), ingénieur, chercheur et inventeur américain

### 2.2. Diagramme de Nyquist

Un diagramme de Nyquist<sup>4</sup> présente la partie imaginaire et la partie réelle de  $H(j\omega)$  pour différentes valeurs paramétrées de  $\omega$ . Il a l'avantage de combiner les deux graphiques du diagramme de Bode en un seul. En effet, la phase et l'amplitude d'un point dans le plan complexe peut être déterminé graphiquement par respectivement l'angle avec l'axe des réels et la distance à l'origine ([Annexe E](#)). Cette représentation graphique est communément appelée **le lieu de Nyquist**. Le lieu de Nyquist complet est le tracé théorique des parties réel et imaginaire de  $H(j\omega)$ , en considérant les pulsations négatives, c'est à dire entre  $\omega \rightarrow -\infty$  et  $\omega \rightarrow +\infty$ .



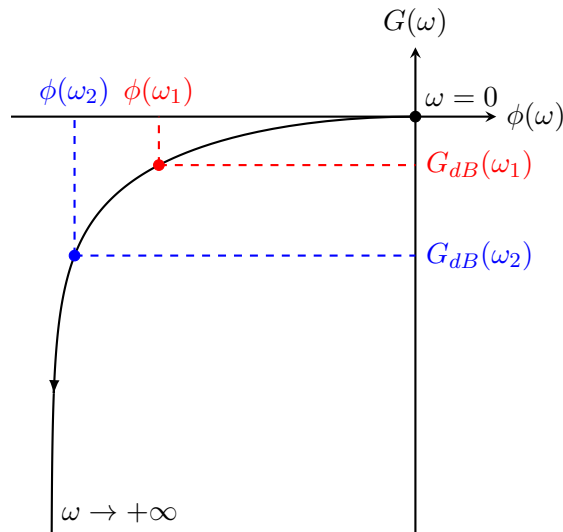
**Figure 4.3.** – (gauche) Représentation schématique d'un diagramme de Nyquist. Le nombre complexe  $H(j\omega)$  est représenté dans le plan complexe pour différentes valeurs de la pulsation  $\omega$  de 0 à  $\infty$ . (droite) Représentation schématique du lieu complet de Nyquist, symétrique par rapport à l'axe des réels.

### 2.3. Diagramme de Black-Nichols

Le diagramme de Black-Nichols<sup>5</sup> consiste à tracer le gain en décibel  $G_{dB}(\omega)$  en fonction de la phase, paramétré par la pulsation  $\omega$ . À l'instar du diagramme de Nyquist, le diagramme de Black à l'avantage de combiner les deux graphiques du diagramme de Bode. La diagramme de Black est habituellement utilisé dans l'étude des systèmes asservis ([Chapitre 5](#)) pour déterminer le lieu de transfert dans le plan de Black d'un système en boucle fermée (FTBF) à partir de la connaissance du lieu de transfert dans le plan de Black de la Fonction de Transfert en Boucle ouverte (FTBO).

<sup>4</sup>Harry Nyquist (1889-1976), électronicien, ingénieur américain.

<sup>5</sup>Il également simplement appelé diagramme de Black.



**Figure 4.4.** – Représentation schématique d'un diagramme de Black. Le gain et la phase de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  sont représentés sur le lieu de Black pour différentes valeurs de la pulsation  $\omega$  de 0 à  $\infty$ .

### 3. Analyse fréquentielle des modèles usuels

Nous allons ici présenter la forme canonique des diagrammes fréquentiels (Bode, Nyquist et Black-Nichols) pour les modèles usuels rencontrés dans l'étude des **SLCI**. Les diagrammes de Bode restent l'outil principale et fera l'objet d'une présentation plus détaillée.

#### 3.1. Diagrammes de Bode : méthodologie générale

Pour chacun des modèles usuels, nous appliquerons la procédure suivante :

- Définir la fonction de transfert  $H(p)$  du modèle pour  $p = j\omega$
- Établir la fonction du gain  $G(\omega)$  à partir du module de  $|H(j\omega)|$
- Établir la fonction de la phase  $\phi(\omega)$  à partir de l'argument principale de  $|H(j\omega)|$ . L'argument principale est défini à l'**Annexe E**.
- Si les fonctions  $G(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  ne sont pas de simples constantes, réaliser une étude asymptotique pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow +\infty$ .
- Tracer le diagramme de Bode **réel** et le diagramme de Bode **asymptotique**.

### 3.1.1. Diagramme de Bode d'un gain pur

La fonction de transfert d'un gain pur est de la forme  $H(j\omega) = K$ , le gain est donc simplement donné par

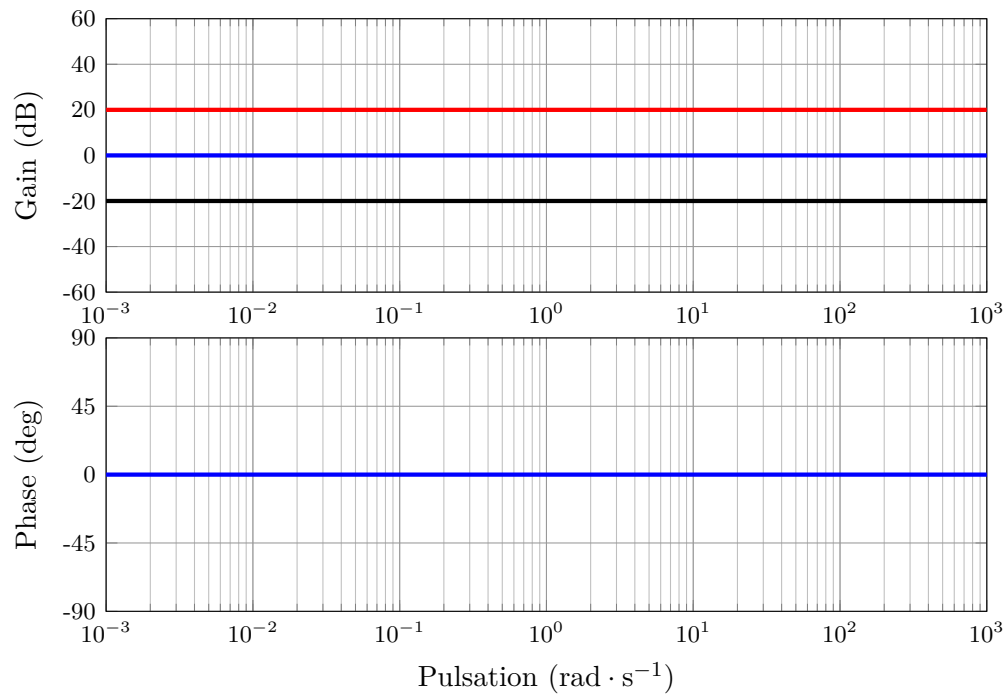
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = K$$

d'où le gain  $G_{dB}$  en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K$$

ce qui correspond à une constante en gain (Figure 4.5) et la phase s'obtient à partir de l'argument principale du nombre complexe  $H(j\omega)$  :

$$\phi(\omega) = 0$$



**Figure 4.5.** – Diagramme de Bode d'un gain pur avec (noir)  $K = 0.1$ , (bleu)  $K = 1$  et (rouge)  $K = 10$ . Remarquons que la phase reste inchangée lorsque le gain statique  $K$  varie et que seul le gain  $G_{dB}(\omega)$  est modifié.

### 3.1.2. Diagramme de Bode d'un intégrateur pur

La fonction de transfert d'un intégrateur pur est de la forme  $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$ , le gain est donc simplement donné par

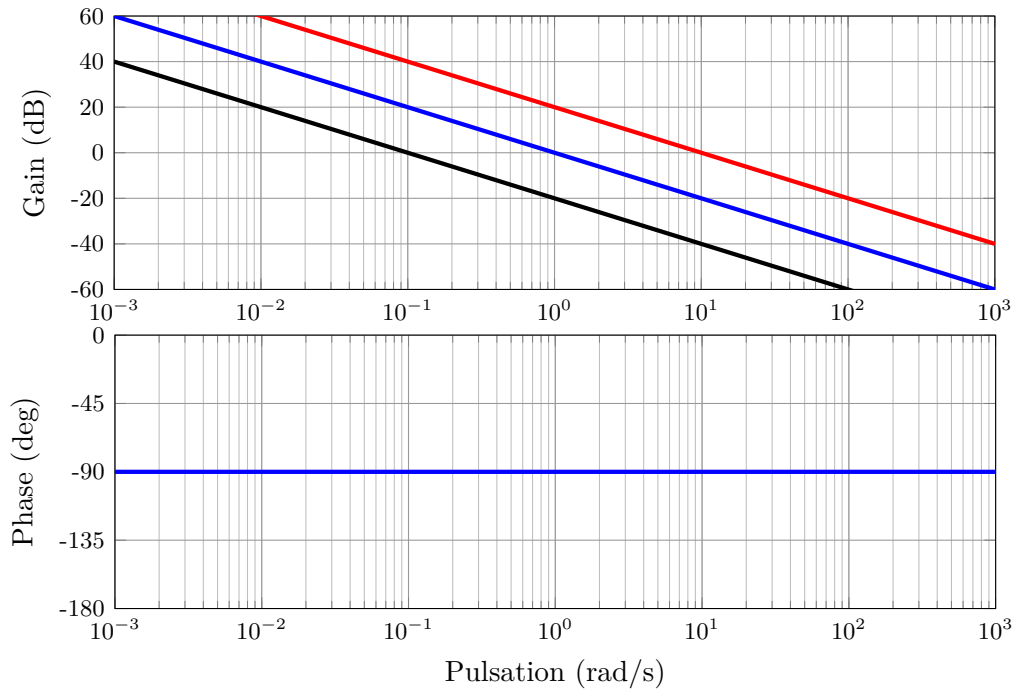
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$$

d'où le gain  $G_{dB}$  en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega$$

ce qui correspond à une pente de -20dB/décade (Figure 4.6) et la phase s'obtient à partir de l'argument principale du nombre complexe  $H(j\omega)$  :

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$



**Figure 4.6.** – Diagramme de Bode d'un intégrateur pur avec (noir)  $K = 0.1$ , (bleu)  $K = 1$  et (rouge)  $K = 10$ . Remarquons que le gain s'annule pour  $\omega = K$  et que la phase reste inchangée.

### 3.1.3. Diagramme de Bode d'un dérivateur pur

La fonction de transfert d'un dérivateur pur est de la forme  $H(j\omega) = Kj\omega$ , le gain est donc simplement donné par

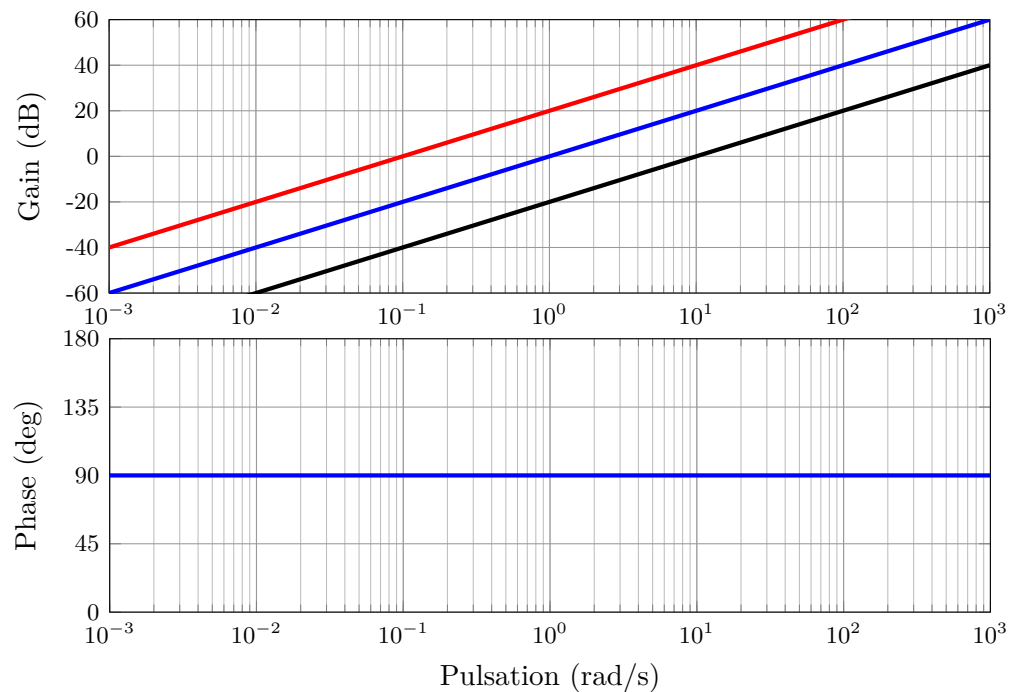
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = Kj\omega$$

d'où le gain  $G_{dB}$  en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \omega$$

ce qui correspond à une pente de +20dB/décade (Figure 4.7) et la phase s'écrit simplement

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$



**Figure 4.7.** – Diagramme de Bode d'un dérivateur pur avec (noir)  $K = 0.1$ , (bleu)  $K = 1$  et (rouge)  $K = 10$ . Remarquons que le gain s'annule pour  $\omega = \frac{1}{K}$  et que la phase reste inchangée.

### 3.1.4. Diagramme de Bode d'un système à retard pur

La fonction de transfert d'un retard pur est de la forme  $H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$ , le gain est donc simplement donné par

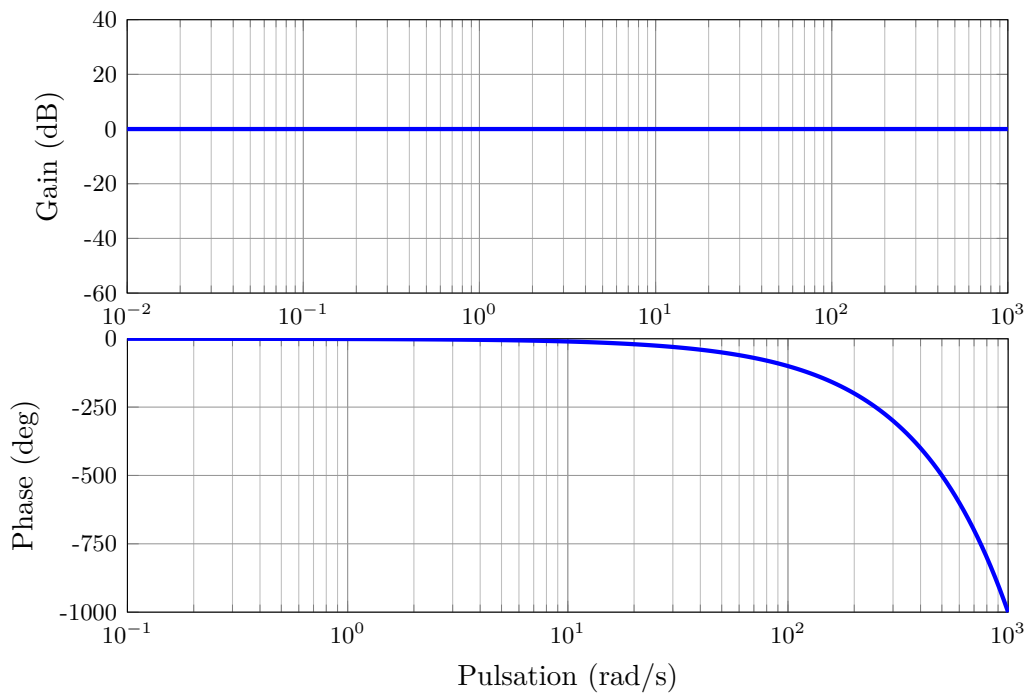
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = 1$$

d'où le gain  $G_{dB}$  en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 0 \text{ dB}$$

et la phase s'écrit simplement

$$\phi(\omega) = -\tau\omega$$



**Figure 4.8.** – Diagramme de Bode d'un retard pur avec  $\tau = 1$ . Remarquons que le gain est constant pour toutes pulsations et le déphasage est monotone décroissant en fonction de la pulsation.



### 3.1.5. Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre présente une fonction de transfert de la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} \quad (4.4)$$

Le module de cette fonction de transfert  $G(\omega) = |H(j\omega)|$  s'écrit :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

Le gain en dB s'obtient alors par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2\omega^2} \quad (4.5)$$

et la phase est simplement donné par la fonction tangente réciproque :

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\arctan(\tau\omega) \quad (4.6)$$

Ce sont ces deux fonctions de la fréquence que nous traçons sur un diagramme de Bode. Elles sont représentés sur les [figures 4.9](#) et [4.10](#), pour respectivement différentes valeurs du gain statique  $K$  et du temps caractéristique  $\tau$ .

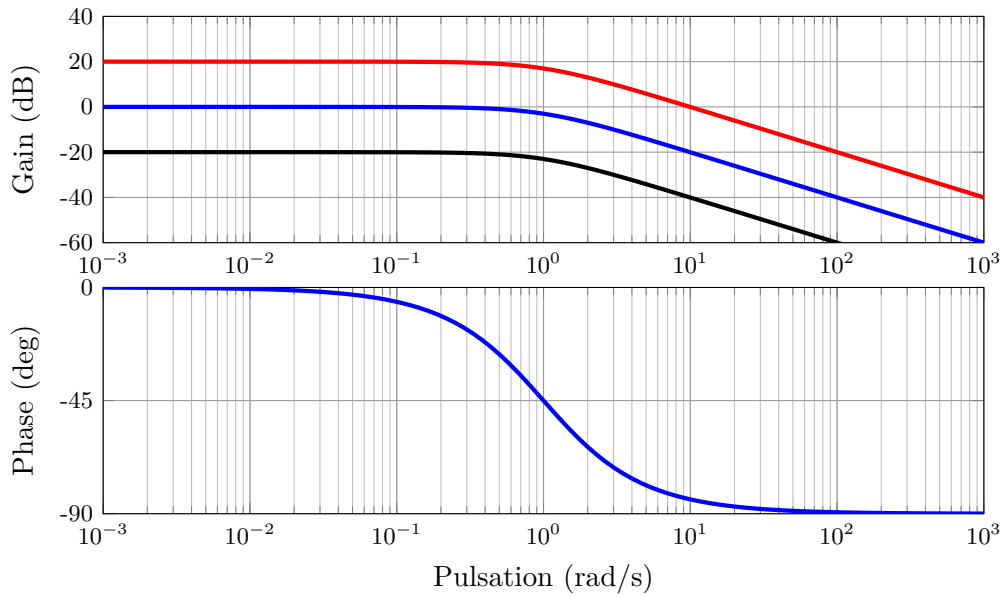
Il est cependant recommandé de déterminer les asymptotes de ces deux fonctions à basse et haute fréquence. Pour cela, nous introduisons une **fréquence de cassure**  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  qui délimite ces deux domaines. À cette fréquence, le gain en décibel est de  $G_{dB}(\omega_c) = 20 \log K - 3$  et la phase  $\phi(\omega) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ . Le gain de -3dB est la valeur approximative de  $20 \log \sqrt{2}$ , communément utilisée pour définir la **fréquence de coupure**.

À basse fréquence, c'est à dire lorsque  $\tau\omega \ll 1$  ou encore  $\omega \ll \omega_0$ , le gain et la phase se comporte comme,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K \\ \phi(\omega) &\sim 0^\circ. \end{aligned}$$

À haute fréquence, c'est à dire lorsque  $\tau\omega \gg 1$  ou encore  $\omega \gg \omega_0$ , le gain et la phase se comporte comme,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \\ \phi(\omega) &\sim -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



**Figure 4.9.** – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (Équation (4.4)) avec (noir)  $K = 0.1$  (bleu)  $K = 1$  et (rouge)  $K = 10$ . L'effet du gain  $K$  est de décaler verticalement la courbe de gain.

La figure 4.11 présente sur un même diagramme de Bode, les courbes réels et les courbes asymptotiques.

### 3.1.6. Diagramme de Bode de deux systèmes du premier ordre en série

La fonction de transfert globale de deux systèmes du premier ordre en série s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K_1 K_2}{(1 + j\tau_1 \omega)(1 + j\tau_2 \omega)} \quad (4.7)$$

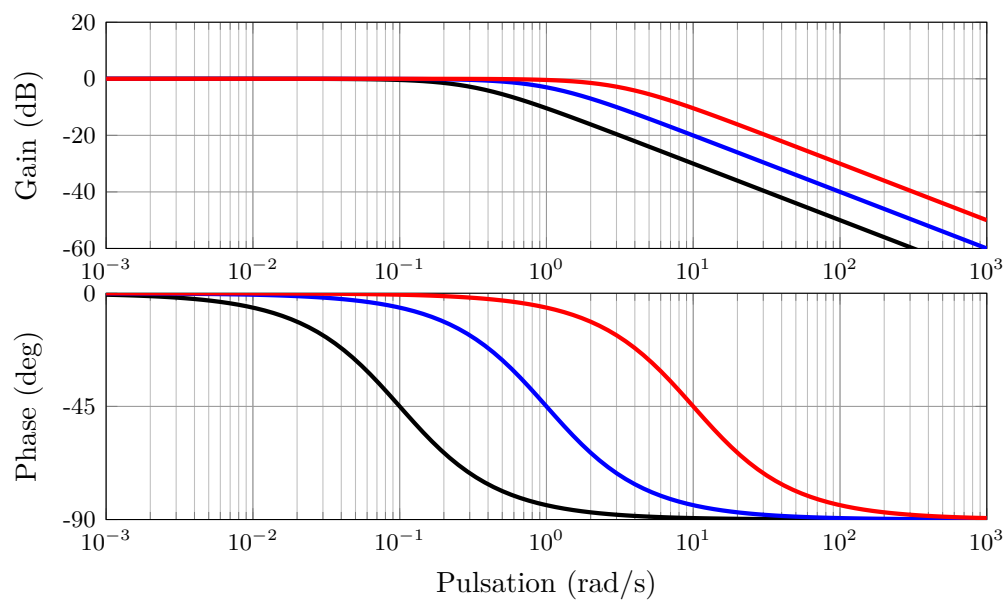
On utilise la propriété du logarithme pour écrire le gain globale  $G_{dB}(\omega)$  comme une somme de gain de deux systèmes du premier ordre, soit

$$G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$$

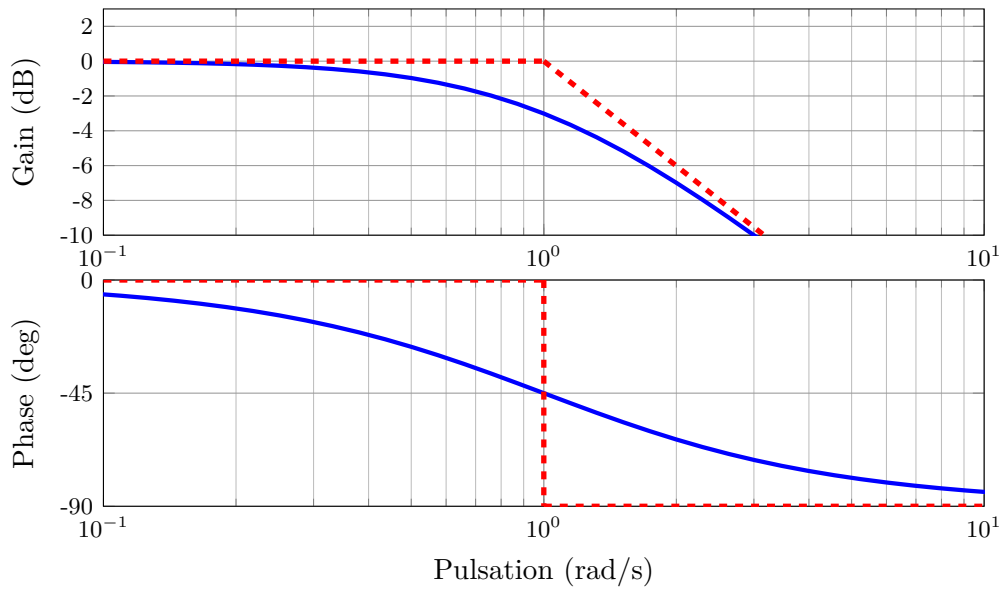
De même pour la phase :

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

En reprenant les équations (4.5) et (4.6) on établit facilement que,



**Figure 4.10.** – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (Équation (4.4)) avec (noir)  $\tau = 10$  (bleu)  $\tau = 1$  et (rouge)  $\tau = 0.1$ . L'effet du temps caractéristique  $\tau$  est de décaler horizontalement la courbe de phase.



**Figure 4.11.** – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (Équation (4.4)) (i.e  $K = 1$ ,  $\tau = 1$  et  $\omega_c = 1$ ) avec (bleu) le diagramme réel et (rouge) le diagramme asymptotique. On vérifie que les valeurs asymptotiques sont de bonnes approximations à basse et haute fréquence. Il est également possible de lire un gain de  $-3$  dB et une phase de  $-45^\circ$  à la fréquence de coupure.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K_1 K_2 - 20 \log \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}$$

et

$$\phi(\omega) = -\arctan \tau_1 \omega - \arctan \tau_2 \omega$$

L'étude asymptotique se fait en considérant deux fréquences de coupures  $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$  et  $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2}$ . Supposons d'abord, sans perte de généralité, que  $\omega_{c2} > \omega_{c1}$  et considérons les trois domaines de fréquence ainsi définits selon que  $\omega \ll \omega_{c1}$ ,  $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$  ou  $\omega \gg \omega_{c2}$

**Pour**  $\omega \ll \omega_{c1}$

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K_1 K_2 \\ \phi(\omega) &\sim 0^\circ \end{aligned}$$

**Pour**  $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$

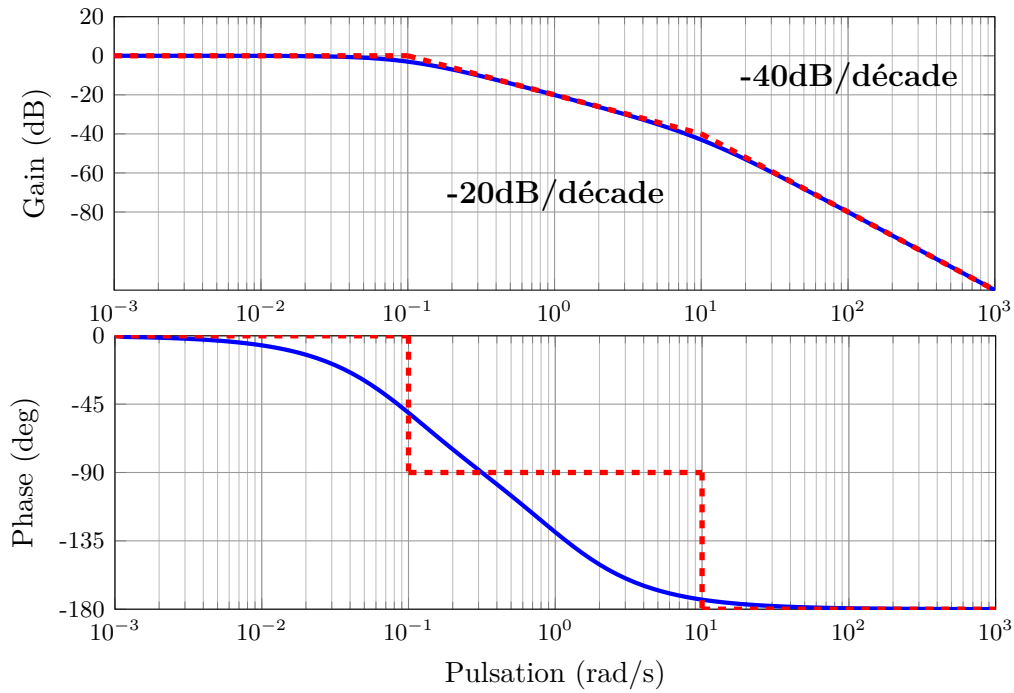
$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K_1 K_2 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_{c1} \omega_{c2}} \\ \phi(\omega) &\sim -90^\circ \end{aligned}$$

**Pour**  $\omega \gg \omega_{c2}$

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K_1 K_2 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_{c1} \omega_{c2}} \\ \phi(\omega) &\sim -180^\circ \end{aligned}$$

La [figure 4.12](#) présente le diagramme de Bode réel et asymptotique de deux systèmes du premier ordre en cascade. On remarquera que l'approximation asymptotique est suffisante pour décrire le gain de ce genre de système. En marquant la discontinuité dans le graphe de la phase, on distingue plus facilement les différentes zones et les changements de pente du gain. Pour la phase, il suffit de déterminer sa valeur pour quelques valeurs particulières de la pulsation.

Comme nous l'avons déjà rencontré, l'étude de deux systèmes du premier ordre en série correspond à l'étude d'un système du second ordre en régime apériodique.



**Figure 4.12.** – Diagramme de Bode de systèmes du premier ordre en série (Équation (4.7)) avec  $\tau_1 = 10$  et  $\tau_2 = 0.1$  (bleu) le diagramme réel et (rouge) le diagramme asymptotique.

### 3.1.7. Diagramme de Bode d'un système second d'ordre

La fonction de transfert d'un système du second ordre (Équation (3.6)) est donnée par :

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega} \quad (4.8)$$

Le gain s'obtient en calculant le module de ce nombre complexe :

$$G(\omega) = \frac{K\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}$$

Le gain en décibel s'écrit alors :

$$G_{db}(\omega) = 20 \log K\omega_0^2 - 20 \log \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}$$

et la phase par l'argument principale :

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \text{si } \omega^2 < \omega_0^2 \\ -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \pi & \text{si } \omega^2 > \omega_0^2 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } \omega^2 = \omega_0^2 \end{cases}$$

Comme précédemment, il est recommandé d'étudier les valeurs asymptotiques du gain et de la phase.

**Pour**  $\omega \ll \omega_0$

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K \\ \phi(\omega) &\sim 0^\circ \end{aligned}$$

**Pour**  $\omega \gg \omega_0$

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K \omega_0^2 - 40 \log \omega \\ \phi(\omega) &\sim -180^\circ \end{aligned}$$

La [figure 4.13](#) présente le diagramme de Bode associé à ces deux fonctions pour  $\xi = 1$ , ainsi que le diagramme de Bode asymptotique. La [figure 4.14](#) présente l'effet du taux d'amortissement  $\xi$  sur le diagramme de Bode. Il est possible d'observer une augmentation de la valeur maximum du gain proche de la fréquence de coupure. C'est ce phénomène de résonance que nous allons discuter dans la prochaine partie.

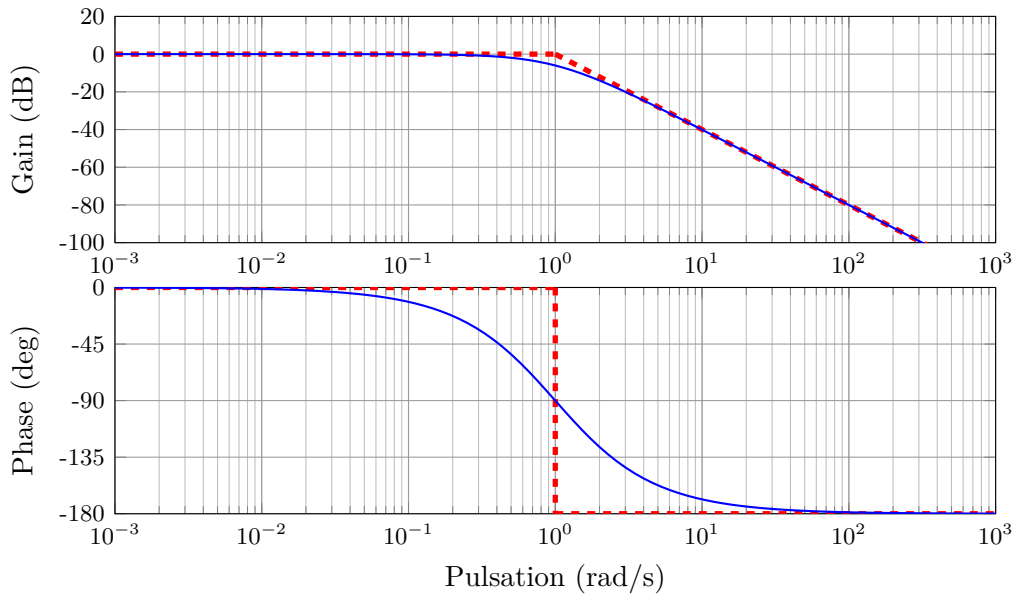
### Phénomène de résonance

Le gain d'un système du second ordre présente un maximum pour certaines valeurs du taux d'amortissement  $\xi$ . Nous allons établir en détail les différentes grandeurs caractéristiques de ce phénomène de résonance. L'approche suivante s'inspire en partie de [9]. Partons du gain naturel  $G(\omega)$  d'un système du second ordre pour lequel,

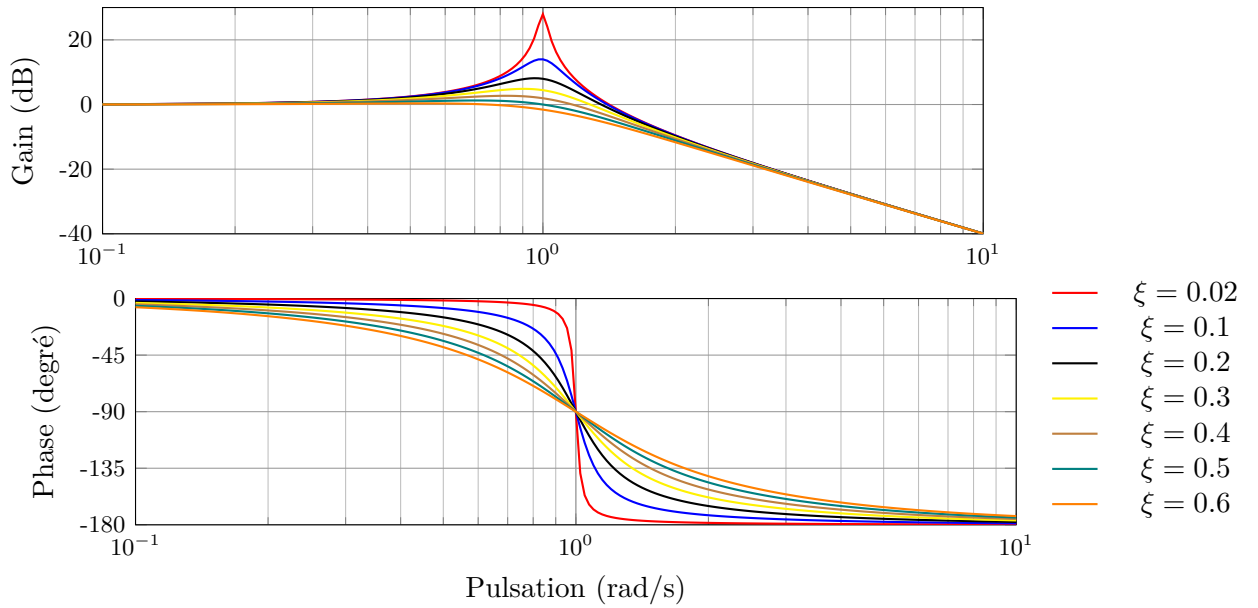
$$G(\omega) = \frac{K\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}$$

on pose  $X = \omega^2$ , et on porte le gain au carré pour éliminer la racine carrée. On obtient alors,

$$(G(\omega))^2 = \frac{K^2\omega_0^4}{(\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X}$$



**Figure 4.13.** – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert second ordre (Équation (4.8)) avec  $K = 1$ ,  $\omega_0 = 1$  et  $\xi = 1$



**Figure 4.14.** – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert du second ordre (Équation (4.8)) pour différentes valeurs de  $\xi$  avec  $K = 1$  et  $\omega_0 = 1$

Le numérateur étant constant, le gain présentera un maximum si le dénominateur pré-



sente un minimum. Notons  $D(X)$ , ce dénominateur qui s'écrit :

$$D(X) = (\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X$$

Calculons, la dérivée par rapport à  $X$ ,

$$\frac{dD(X)}{dX} = -2(\omega_0^2 - X) + (2\xi\omega_0)^2$$

qui s'annule pour

$$X = X_0 = \omega_0^2(1 - 2\xi^2).$$

La dérivée seconde étant positive, le dénominateur  $D(X)$  présente un minimum en  $X_0$ . Puisque  $X > 0$  et  $\omega_0^2 > 0$  alors la condition sur le taux d'amortissement est

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.9)$$

La **pulsation de résonance** est donc défini par :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (4.10)$$

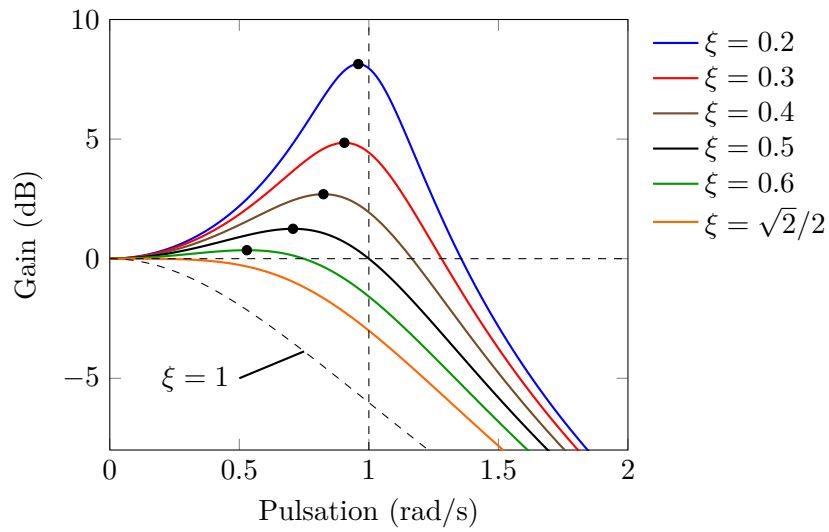
La valeur du gain maximal est obtenue à la pulsation de résonance,

$$G(\omega_r) = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}},$$

ce qui permet de définir le **facteur de surtension**  $Q$  qui est le rapport entre le maximum atteint par le gain et la valeur de l'asymptote à basse fréquence, d'où

$$Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.11)$$

D'après ces dernières expressions, on observe qu'à la limite  $\xi \rightarrow 0$ , la pulsation de résonance  $\omega_r$  tend vers  $\omega_0$ , et le gain maximal tend lui vers l'infini. La pulsation  $\omega_0$  est donc la valeur pour lequel le phénomène de résonance est le plus intense. La [figure 4.15](#) présente la position du gain maximum à la pulsation de résonance pour différentes valeurs du taux d'amortissement.



**Figure 4.15.** – Évolution du gain en décibel en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du taux d'amortissement du régime pseudo-périodique. Le gain maximal à la pulsation de résonance  $\omega_r$  est représenté par une pastille noir sur chacune des courbes pour  $\xi < \sqrt{2}/2$ . On remarquera l'utilisation exceptionnelle d'une échelle linéaire pour les pulsations.

### 3.1.8. Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

Dans le cas d'un système d'ordre supérieur à deux, nous allons utiliser les propriétés d'additivité des diagrammes de Bode, en décomposant la fonction de transfert en différents modèles simples.

Il est notamment toujours possible d'écrire une fonction de transfert ( [chapitre 3](#) ) sous la forme d'un produit de gains purs, d'intégrateurs, de dérivateurs, de systèmes du premier et du second ordre :

$$H(p) = K_0 p^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p)^{n_i} \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)^{n_j} \quad (4.12)$$

où les exposants  $\alpha$ ,  $n_i$  et  $n_j$  peuvent être positifs et négatifs.

Nous listons ci-dessous l'effet sur le gain et la phase d'un diagramme de Bode pour chacun de ces éléments selon le signe des exposants  $\alpha$ ,  $n_i$ , et  $n_j$ .

- le terme  $K_0$  (i.e gain pur) provoque :
  - gain :  $+20 \log K_0$
  - phase : rien
- le terme  $K_0 p^\alpha$  (i.e intégrateur si  $\alpha < 0$  ou dérivateur si  $\alpha > 0$ ) provoque :
  - gain : pente de  $20\alpha$  dB/décade
  - phase :  $90\alpha^\circ$
- un terme  $\frac{1}{(1 + \tau_i p)}$  (i.e premier ordre au dénominateur si  $n_i = -1$ ) provoque, en  $\omega = \frac{1}{\tau_i}$ 
  - gain : une rupture de pente de  $-20$  dB/décade
  - phase : un saut de  $-90^\circ$
- un terme  $(1 + \tau_i p)$  (i.e premier ordre au numérateur si  $n_i = 1$ ) provoque, en  $\omega = \frac{1}{\tau_i}$ 
  - gain : une rupture de pente de  $+20$  dB/décade
  - phase : un saut de  $+90^\circ$
- un terme  $\frac{1}{(1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)}$  (i.e second ordre au dénominateur si  $n_j = -1$ ) provoque, en  $\omega = \frac{1}{\tau_j}$ 
  - gain : une rupture de pente de  $-40$  dB/décade
  - phase : un saut de  $-180^\circ$
- un terme  $(1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)$  (i.e second ordre au numérateur si  $n_j = 1$ ) provoque, en  $\omega = \frac{1}{\tau_j}$ 
  - gain : une rupture de pente de  $+40$  dB/décade
  - phase : un saut de  $+180^\circ$

**Exemple**

Soit la fonction de transfert  $H(p)$  telle que

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)} \quad (4.13)$$

La première étape consiste à ordonner les temps caractéristiques par ordre décroissant cela nous permettra d'obtenir les pulsations propres par ordre croissant. Ensuite, il faut identifier les différents modèles. Pour cet exemple, nous identifions :

- un gain pur  $K_0 = 100$
- un second ordre double au numérateur de temps caractéristique  $\tau = 1$
- trois premier ordre au dénominateur de temps caractéristique  $\tau = \{0.01, 10, 100\}$

Enfin, nous regroupons dans un tableau l'effet sur le gain et la phase pour chaque domaines en pulsations compris entre les différentes pulsations caractéristiques. On adopte la notation suivante :  $\tau_1 = 100$ ,  $\tau_2 = 10$ ,  $\tau_3 = 1$  et  $\tau_4 = 0.01$ , avec  $\omega_i = 1/\tau_i$ , on obtient alors :  $\omega_1 = 0.01$ ,  $\omega_2 = 0.1$ ,  $\omega_3 = 1$  et  $\omega_4 = 100$ .

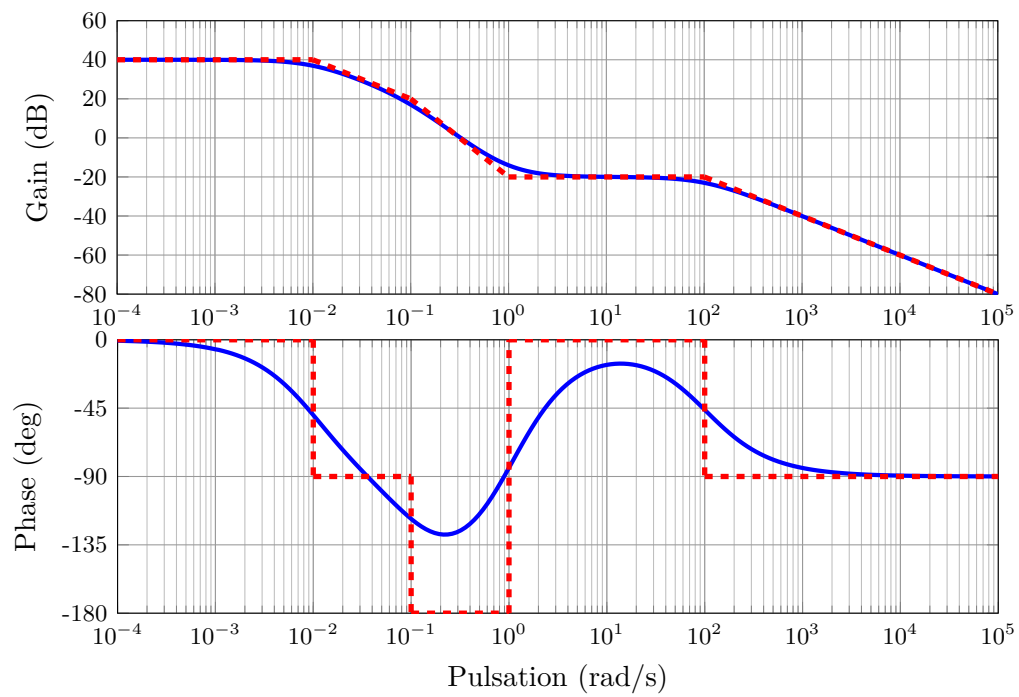
	$\omega \ll \omega_1$	$\omega_1 < \omega < \omega_2$	$\omega_2 < \omega < \omega_3$	$\omega_3 < \omega < \omega_4$	$\omega \gg \omega_4$
$G_{dB}(\omega)$ (pente)	0(40dB)	-20dB/décade	-20dB/décade	+40dB/décade	-20dB/décade
$\phi(\omega)$	0°	-90°	-90°	+180°	-90°
$G_{dB}(\omega)$ total	0(40dB)	-20dB/décade	-40dB/décade	0(-20dB)	-20dB/décade
$\phi(\omega)$ total	0°	-90°	-180°	0	-90°

Il est également possible de déterminer la forme analytique du gain et de la phase.

$$G_{dB}(\omega) = 40 + 20 \log(1 + \tau_3^2 \omega^2) - 10 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_2^2 \omega^2)(1 + \tau_4^2 \omega^2) \quad (4.14)$$

et

$$\phi(\omega) = 2 \arctan \tau_3 \omega - \arctan \tau_1 \omega - \arctan \tau_2 \omega - \arctan \tau_4 \omega \quad (4.15)$$



**Figure 4.16.** – Diagramme de Bode du système d'ordre quelconque de l'équation (4.13) (bleu) diagramme de Bode réel et (rouge) diagramme de Bode asymptotique.

### 3.2. Diagrammes de Nyquist : méthodologie générale

Pour chacuns des modèles usuels, nous appliquerons la procédure suivante :

- Définir la fonction de transfert  $H(p)$  du modèle pour  $p = j\omega$
- Établir la partie réelle et imaginaire du nombre complexe  $H(j\omega)$
- Tracer le lieu de Nyquist point par point, pour différentes valeurs de  $\omega$  de 0 à  $+\infty$ , c'est à dire  $\text{Re}[H(j\omega)]$  et  $\text{Im}[H(j\omega)]$  dans le plan complexe.

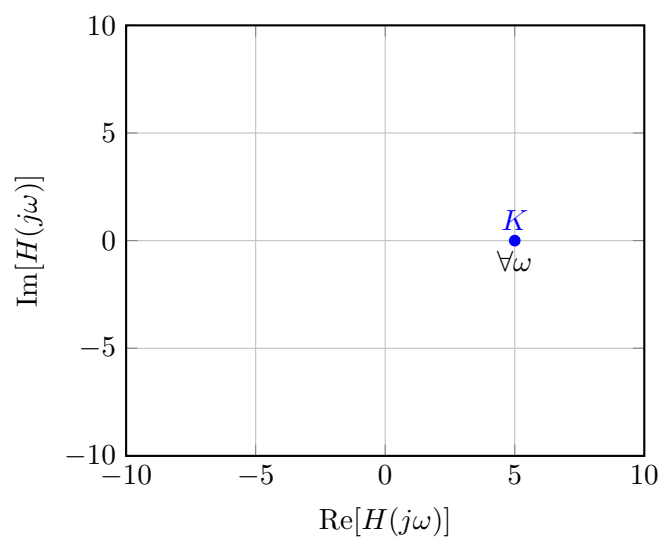
Dans chacuns des exemples suivants nous reproduisons le lieu de Nyquist complet le domaine des pulsations négatives étant représenté en pointillé. Dans la pratique, il suffit de tracer le symétrique par rapport à l'axe des réels et d'inverser le sens de la flèche pour obtenir le sens de la pulsation de  $-\infty \rightarrow 0$ .

### 3.2.1. Diagramme de Nyquist d'un gain pur

Le diagramme de Nyquist d'un gain pur est trivial. En effet le nombre complexe  $H(j\omega)$  étant égal à une constante réel  $K$ , le diagramme de Nyquist se limite à un point sur l'axe des réels quelque soit la valeur de  $\omega$ . Ce qui est en accord avec le fait qu'un gain pur présente un déphasage nul.

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = K$$

$$\operatorname{Im}[H(j\omega)] = 0$$

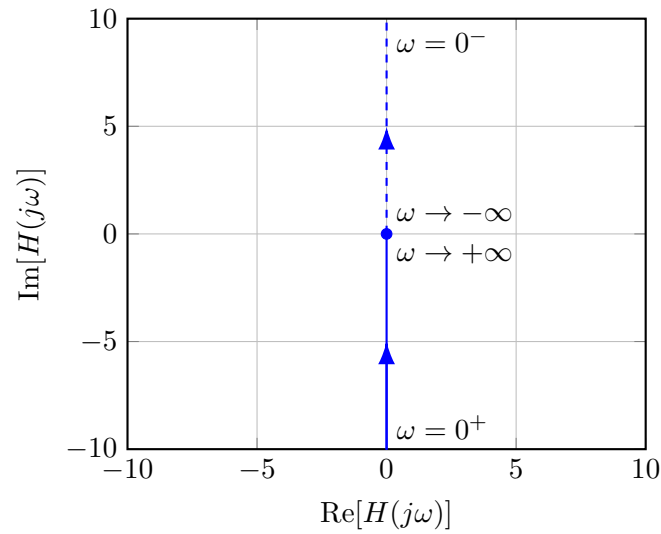


**Figure 4.17.** – Diagramme de Nyquist d'un gain pur. Le nombre complexe  $H(j\omega)$  est représenté par un point sur l'axe des réels à la valeur  $K$  (ici  $K = 5$ ).

### 3.2.2. Diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur

Le diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur est également trivial, puisque le nombre complexe  $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$  est un nombre imaginaire pur. Cependant il dépend de la pulsation  $\omega$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= 0 \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= \frac{-K}{\omega}\end{aligned}$$



**Figure 4.18.** – Diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur. Le lieu de Nyquist est représenté par une demi droite sur l'axe des nombres imaginaires purs négatifs.

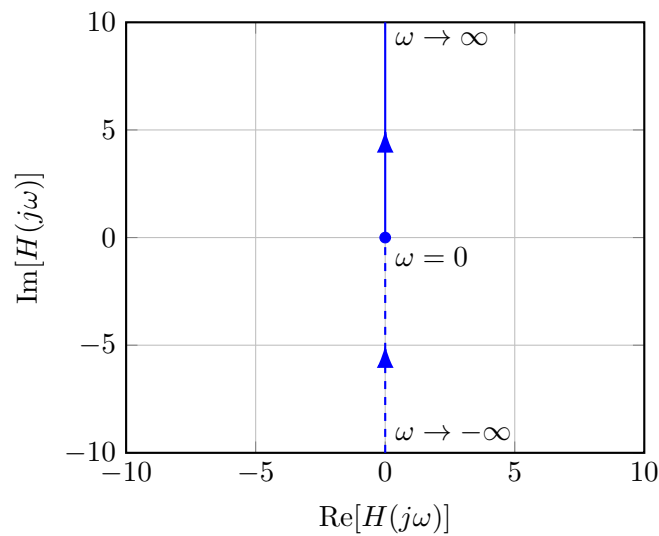


### 3.2.3. Diagramme de Nyquist d'un dérivateur pur

Le diagramme de Nyquist d'un dérivateur pur est également représentatif d'un nombre complexe  $H(j\omega) = Kj\omega$  imaginaire pur. Les parties réelles et imaginaire de ce nombre complexe sont :

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[H(j\omega)] = K\omega$$



**Figure 4.19.** – Diagramme de Nyquist d'un dérivateur pur. Le lieu de Nyquist est représenté par une demi droite sur l'axe des nombres imaginaires purs positifs.

### 3.2.4. Diagramme de Nyquist d'un retard pur

La fonction de transfert d'un retard pur s'écrit :

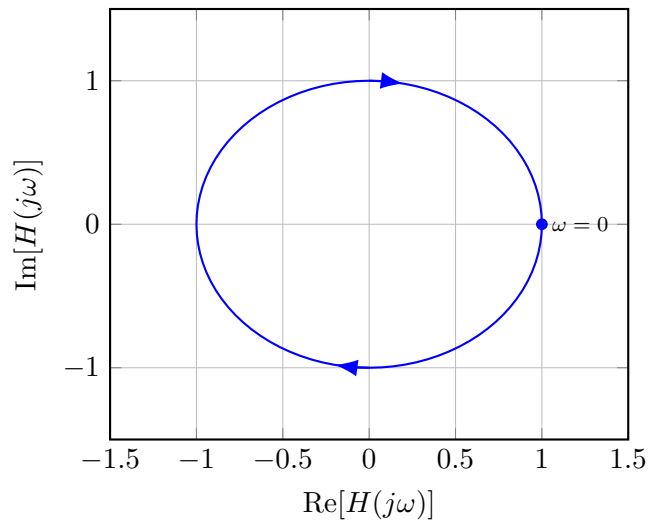
$$H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

Les parties réelles et imaginaires sont simplement donnés par :

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = \cos \tau\omega$$

$$\operatorname{Im}[H(j\omega)] = -\sin \tau\omega$$

Ces coordonnées dans le plan complexe sont celles du cercle unité centré sur l'origine. Le lieu de transfert (c.a.d  $\omega \rightarrow \infty$ ) est la rotation infinie sur ce cercle. La « vitesse angulaire » dépend de  $\tau$ .



**Figure 4.20.** – Diagramme de Nyquist d'un retard pur. Le lieu de Nyquist est représenté par le cercle unité dans le plan complexe.

On remarquera cependant que ce modèle est fondamentalement **instable** puisque le module  $|H(j\omega)|$  ne s'annule pas lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , de ce fait nous le trouverons jamais seul.

**3.2.5. Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre**

La fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

Les parties réelle et imaginaire de cette fonction de transfert sont données par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}\end{aligned}$$

Nous avons regroupé dans le [tableau 4.2](#) quelques valeurs particulières de  $\operatorname{Re}[H(j\omega)]$  et  $\operatorname{Im}[H(j\omega)]$  pour quelques valeurs de  $\omega$ .

Le lieu complet de Nyquist d'un système du premier ordre à la forme d'un cercle, nous allons établir ses caractéristiques[18].

Posons tout d'abord,

$$X = \operatorname{Re}[H(j\omega)] = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2}$$

on peut écrire,

$$\tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} - 1$$

En posant maintenant,

$$Y = \operatorname{Im}[H(j\omega)] = \frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} = -\tau\omega X$$

on obtient une relation entre  $Y$  et  $X$  :

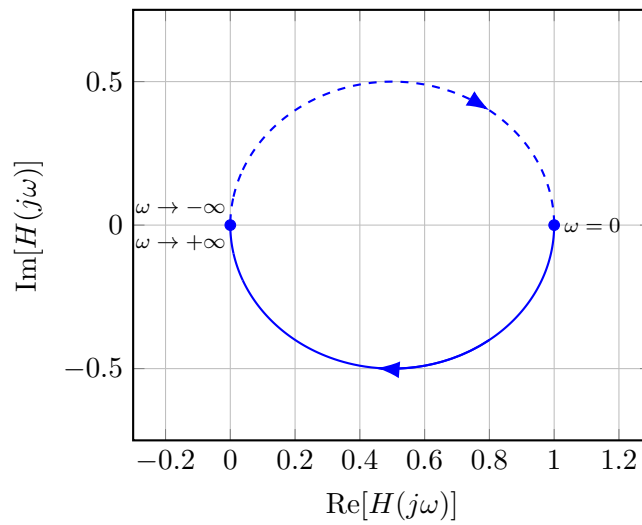
$$Y^2 = \left(\frac{K}{X} - 1\right) X^2$$

on reconnaît alors l'équation d'un cercle de centre  $(K/2, 0)$  et de rayon  $K/2$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

	$\omega = 0$	$\omega \rightarrow \infty$	$\omega = \frac{1}{\tau}$
$\text{Re}[H(j\omega)]$	$K$	$0$	$K/2$
$\text{Im}[H(j\omega)]$	$0$	$0$	$-K/2$

**Tableau 4.2.** – Quelques valeurs particulières de  $\text{Re}[H(j\omega)]$  et  $\text{Im}[H(j\omega)]$  selon  $\omega$  pour un système du premier ordre.



**Figure 4.21.** – Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre. Avec  $K = 1$  et  $\tau = 1$ . Le lieu de Nyquist est représenté par un demi cercle idans le plan des nombres imaginaires négatifs. Le lieu de Nyquist complet correspond à un cercle de rayon  $K/2$  et de centre  $(K/2, 0)$

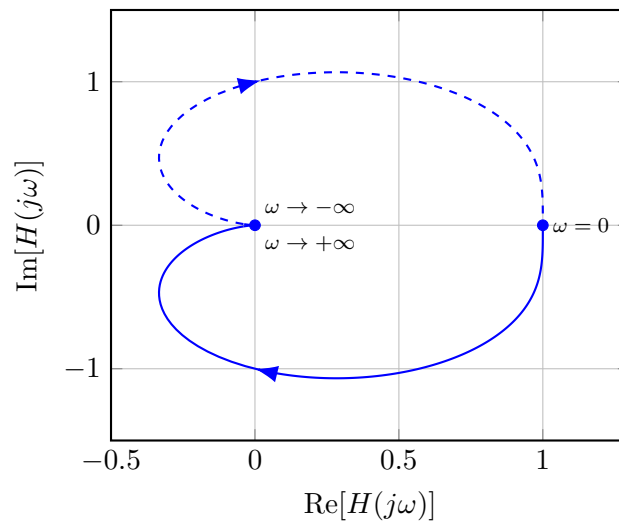
### 3.2.6. Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre

La fonction de transfert d'un système du second ordre s'écrit :

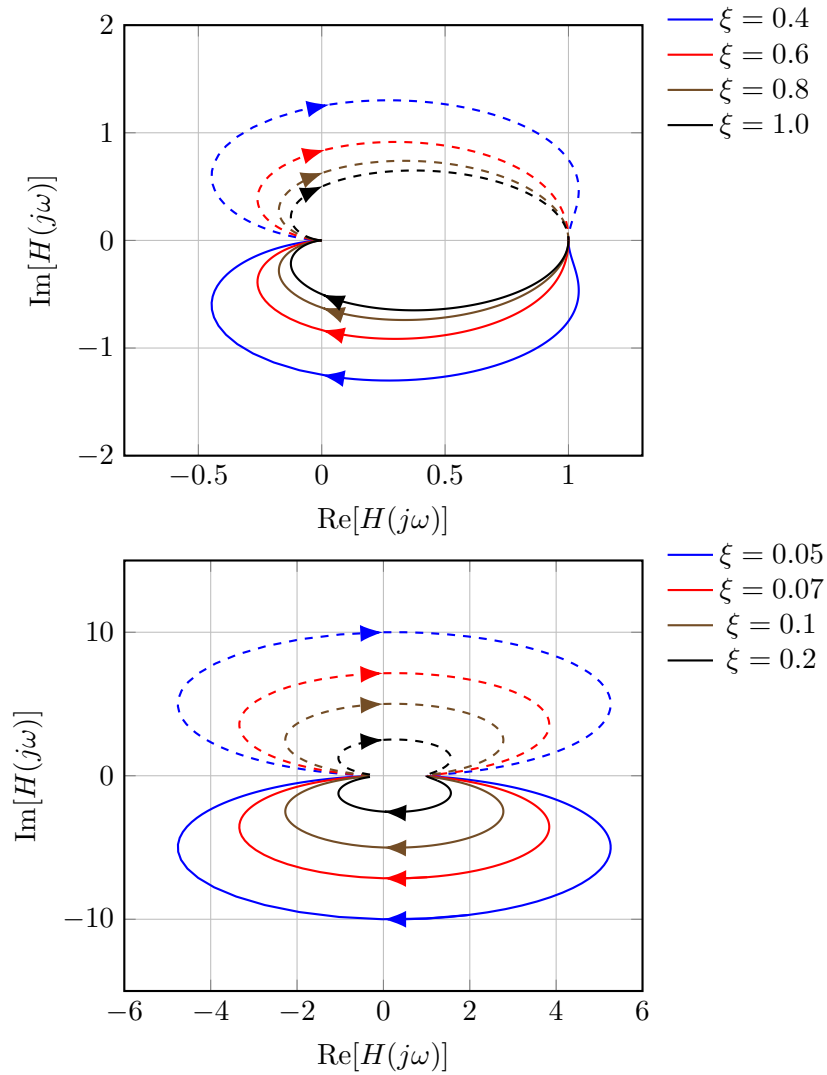
$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega}$$

Les parties réel et imaginaire de cette fonction de transfert sont données par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= \frac{-2\xi\omega_0^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}\end{aligned}$$



**Figure 4.22.** – Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre. Avec  $K = 1$  et  $\tau = 1$ . Le lieu de Nyquist est représenté par une demi cardioïde dans le plan des nombres imaginaires négatifs.



**Figure 4.23.** – Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre pour différentes valeurs du taux d'amortissement  $\xi$ . Avec  $K = 1$  et  $\tau = 1$ . Le lieu de Nyquist est représenté par une demi cardioïde dans le plan des imaginaires négatifs.

### 3.2.7. Effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist

La fonction de transfert  $H_R(j\omega)$  d'un retard est donnée par la relation :

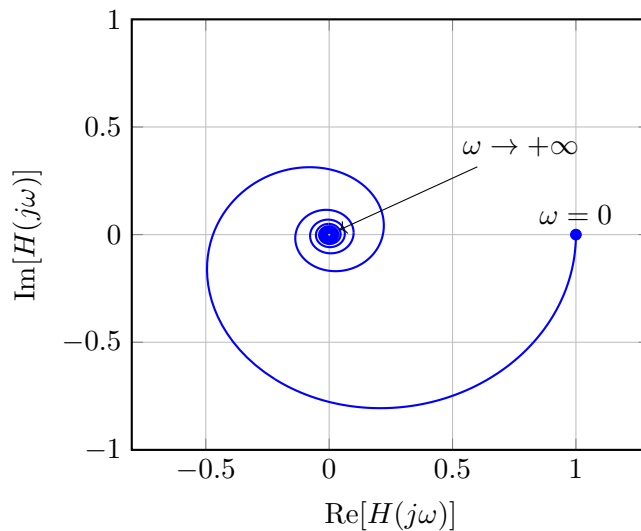
$$H_R(j\omega) = e^{-j\tau_1\omega} = \cos \tau_1\omega - j \sin \tau_1\omega$$

avec  $\tau_1$  le retard. Étudions l'effet de ce retard sur le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre  $H(j\omega)$ . La fonction de transfert modifiée est :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} H_R(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} (\cos \tau_1\omega - j \sin \tau_1\omega)$$

Les parties réels et imaginaire de la fonction de transfert sont :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K (\cos \tau_1\omega - \tau\omega \sin \tau_1\omega)}{1 + \tau^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= \frac{-K (\tau\omega \cos \tau_1\omega + \sin \tau_1\omega)}{1 + \tau^2\omega^2} \end{aligned}$$



**Figure 4.24.** – Effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre. Avec  $K = 1$ ,  $\tau = 1$  et  $\tau_1 = 2$ . Le lieu de Nyquist est représenté par une spirale.

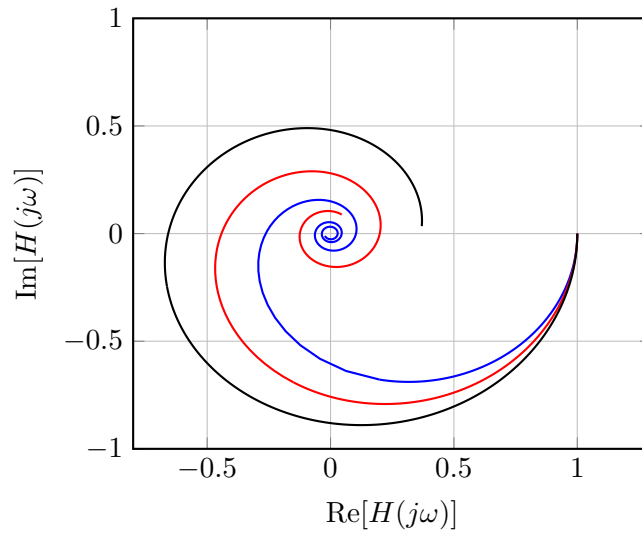
### 3.3. Diagrammes de Black : méthodologie générale

## 4. Etude du transitoire de la réponse harmonique

*à compléter (hors programme)...*

### 4.1. Exemple d'un système du premier ordre

*à compléter (hors programme)...*



**Figure 4.25.** – Effet d’un retard sur le diagramme de Nyquist d’un système du premier ordre pour différentes valeurs de retard. (bleu)  $\tau_1 = 0.5$ , (rouge)  $\tau_1 = 1.0$  et (noir)  $\tau_1 = 2.0$ . Avec  $K = 1$ ,  $\tau = 1$  et  $\tau_1 = 2$ . Le lieu de Nyquist est représenté par une spirale. Par souci de clarté, nous n’avons ici représenté que l’intervalle  $\omega \in [0, \frac{10}{\tau_1}]$

## 4.2. Exemple d’un système du second ordre

à compléter (hors programme)...





## 6. Performances des systèmes asservis

### Sommaire

---

<b>1. Introduction</b>	<b>144</b>
<b>2. Précision</b>	<b>144</b>
2.1. Précision en boucle ouverte	144
2.2. Précision en boucle fermée	145
2.3. Effet d'une perturbation	148
<b>3. Rapidité</b>	<b>152</b>
3.1. Réponse temporelle	152
3.2. Réponse harmonique	158
3.3. Influence des pôles dominants	158

---

## 1. Introduction

Les performances qui vont nous intéresser dans ce chapitre sont la **précision** et la **rapidité**. Dans les deux cas, nous allons observer que les performances en boucle fermée dépendent du système en boucle ouverte.

## 2. Précision

Un système est précis si l'écart que l'on note  $\epsilon(t)$  entre l'entrée  $e(t)$  et la sortie  $s(t)$  est nul. Dans le domaine de Laplace, cet écart devient :

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p)$$

On distingue deux cas :

- En régime permanent, cet écart  $\epsilon_s$  est nommée **erreur statique**.
- En régime transitoire, cet écart  $\epsilon(t) = e(t) - s(t)$  est nommée **erreur dynamique**.

L'erreur dynamique consiste à suivre l'écart défini précédemment durant le transitoire. Pour étudier l'erreur statique, on sollicite le système à différents types de signaux pour obtenir dans les différents cas :

- l'**erreur indicielle** ou l'erreur de position qui est l'erreur statique de la réponse indicielle.
- l'**erreur de poursuite** ou erreur de vitesse qui est l'erreur statique de la réponse à une rampe.
- l'**erreur en accélération** qui est l'erreur statique de la réponse à une parabole.

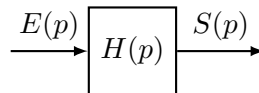
Concrètement pour étudier l'erreur statique on cherche la limite à l'infini de  $\epsilon(t)$  ou encore en appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - S(p)) \quad (6.1)$$

Rappelons que pour pouvoir appliquer ce théorème la valeur finale doit être finie ou en d'autre mot le système doit être stable.

### 2.1. Précision en boucle ouverte

Soit un système caractérisé par la fonction de transfert  $H(p)$  est sollicité par l'entrée  $E(p)$ . La sortie  $S(p)$  est alors donnée par :



L'erreur statique est alors donnée par :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - H(p)E(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(1 - H(p))E(p)$$

### 2.1.1. Exemple d'un premier ordre

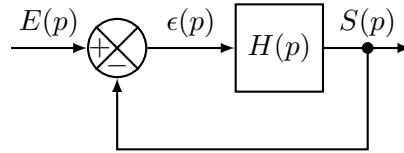
Prenons l'exemple d'un système du 1er ordre de fonction de transfert canonique  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$  que l'on sollicite avec un échelon d'amplitude (consigne)  $E_0$ . L'erreur statique est alors donnée par :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{K}{1 + \tau p} \right) E_0 = (1 - K)E_0$$

Le système est précis (c.a.d  $\epsilon(\infty) = 0$ ) si  $K = 1$ .

### 2.2. Précision en boucle fermée

Considérons le cas d'un système asservi de fonction de transfert  $H(p)$  par une boucle de contre-réaction à retour unitaire.



La **fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)** est simplement donnée par  $H(p)$ . Dans le cas le plus générale, il est toujours possible d'écrire une fonction de transfert sous la forme canonique (**Chapitre 1**) :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec  $\alpha$  la classe du système en boucle ouverte,  $K$  le gain statique et  $N(p)$  et  $D(p)$  deux polynômes tels que  $N(0) = D(0) = 1$ .

Dans le domaine de Laplace l'écart  $\epsilon(p)$  s'écrit :

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = \left( 1 - \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} \right) E(p)$$

en remplaçant  $H_{BO}(p)$  par sa représentation générale :

$$\epsilon(p) = \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} E(p) \quad (6.2)$$

L'erreur statique  $\epsilon_s$  est alors donnée par la limite (Théorème de la valeur finale) :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} pE(p)$$

ou encore en utilisant les valeurs des polynômes en 0 :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} p E(p) \quad (6.3)$$

Cette erreur dépend donc de la nature de la sollicitation (c.a.d  $E(p)$ ) et de la classe  $\alpha$  de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Nous allons maintenant considérer différents types de sollicitations pour différentes classes de système en boucle ouverte.

### 2.2.1. Erreur statique indicielle

L'erreur indicielle est l'erreur entre la sortie d'un système et une sollicitation en échelon  $e(t) = E_0 u(t)$  de transformée de Laplace  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ . Pour une telle entrée, l'erreur statique (c.f [équation \(6.3\)](#)) devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0$$

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha = 0$  en boucle ouverte :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p^0 + K} E_0 = \frac{E_0}{1 + K}.$$

L'erreur est finie mais les réponses indicielles des systèmes de classe  $\alpha = 0$  en boucle ouverte ne sont pas précis.

Dans les autres cas  $\alpha > 0$ , l'erreur statique s'annule :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 = 0$$

Les réponses indicielle des systèmes de classe  $\alpha > 0$  sont donc précis.

### 2.2.2. Erreur statique de poursuite

L'erreur de poursuite est l'erreur statique d'un système soumis à une rampe du type  $e(t) = r(t) = E_0 t u(t)$  de transformée de Laplace  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

Pour une telle entrée, l'erreur statique devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \frac{E_0}{p} = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} E_0$$

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha = 0$  en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{-1}}{p^0 + K} E_0 = +\infty$$

Entrée	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$\frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
$\frac{E_0}{p^2}$	$+\infty$	$\frac{E_0}{K}$	0	0
$\frac{2E_0}{p^3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{2E_0}{K}$	0

**Tableau 6.1.** – Résumé des erreurs statiques pour différentes sollicitations et classe de système en boucle ouverte

Le système est incapable de suivre l'entrée souhaitée.

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha = 1$  en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p+K} E_0 = \frac{E_0}{K}$$

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha > 1$  en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} E_0 = 0$$

Le système est donc précis.

### 2.2.3. Erreur statique d'accélération

L'erreur d'accélération est l'erreur statique d'un système soumis à un signal parabolique  $e(t) = E_0 t^2 u(t)$  de transformée de Laplace  $E(p) = \frac{2E_0}{p^3}$

Pour une telle entrée, l'erreur statique devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \frac{2E_0}{p^2} = \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} 2E_0$$

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha < 2$  en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = +\infty$$

Pour un système de classe  $\alpha = 2$  en boucle ouverte, l'erreur est finie :

$$\epsilon_s = \frac{2E_0}{K}$$

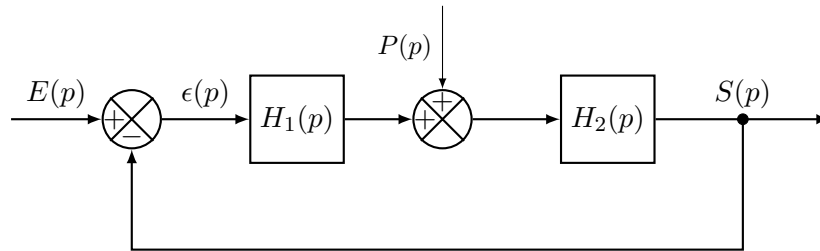
et s'annule pour  $\alpha > 2$

## 2.3. Effet d'une perturbation

### 2.3.1. Cas générale

On considère maintenant l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système asservi. Sans perte de généralité, on considère une perturbation en entrée (c'est à dire en amont d'un système linéaire défini par une fonction de transfert  $H_2(p)$ , la présence d'un correcteur  $H_1(p)$  n'est pas obligatoire mais facilite l'interprétation des résultats.

Soit le schéma-bloc suivant, présentant un système asservi par la consigne  $E(p)$  et soumis à une perturbation  $P(p)$ .



On se donne les formes canoniques suivantes pour les deux fonctions de transferts  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  tels que :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

$$H_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

avec  $K_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $N_i(p)$  et  $D_i(p)$  respectivement les gains statiques, la classe et les polynômes en  $p$  tels que  $N_i(0) = 1$  et  $D_i(0) = 1$ .

Pour déterminer l'écart, il nous faut déterminer la sortie globale  $S(p)$  pour des entrées multiples (c.f. [Chapitre 2-section 4](#)). Cette sortie est sous la forme :

$$S(p) = H_{P=0}E(p) + H_{E=0}P(p)$$

c'est à dire que c'est la somme des contributions des deux entrées prises séparément. L'écart est alors donné par

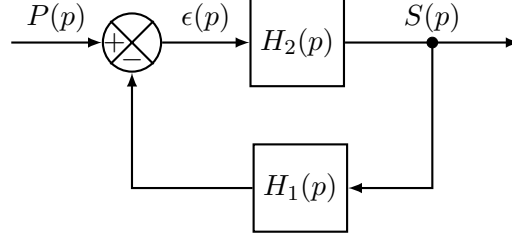
$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = (1 - H_{P=0}) E(p) - H_{E=0}P(p)$$

Le premier terme correspond à l'écart de l'asservissement que nous avons déjà étudié précédemment, le second terme, que l'on note  $\epsilon_P(p)$ , est la contribution à l'écart dû à la perturbation. La fonction de transfert de l'asservissement est donnée par :

$$H_{P=0} = \frac{H_1 H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p)}$$

Dans le cas de la régulation d'un système asservi, il est nécessaire de rejeter cette contribution.

La fonction de transfert  $H_{E=0}$ , de la régulation, correspondant à une consigne nulle, s'obtient en considérant le schéma-bloc suivant :



en boucle fermée, on a alors :

$$H_{E=0}(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

en remplaçant par leurs formes canoniques générales :

$$H_{E=0}(p) = \frac{p^{\alpha_1} K_2 N_2(p) D_1(p)}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

Examinons l'erreur en régime permanent pour une perturbation constante. C'est à dire pour perturbation  $P(p)$  en échelon telle que  $P(p) = \frac{P_0}{p}$ . L'erreur dû à la perturbation en régime permanent est alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon_P \\ \epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} -H_{E=0} P_0 \\ \epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha_1} K_2}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} + K_1 K_2} P_0 \end{aligned}$$

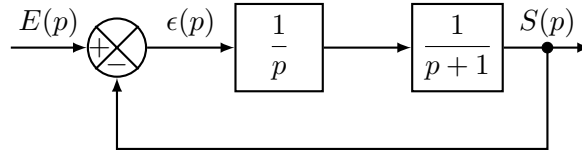
**La perturbation est rejetée si  $\alpha_1 > 0$ , c'est à dire s'il existe au moins un intégrateur en amont de la perturbation.** En effet si  $\alpha_1 = 0$ , l'erreur dû à la perturbation est finie et donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} + K_1 K_2} P_0$$

### 2.3.2. Exemple de rejet de perturbation

Nous allons voir ici le rejet d'une perturbation d'un système du premier ordre. On considère le système du premier ordre, en boucle ouverte, placé dans une boucle de contre réaction unitaire avec un intégrateur comme ci-dessous :





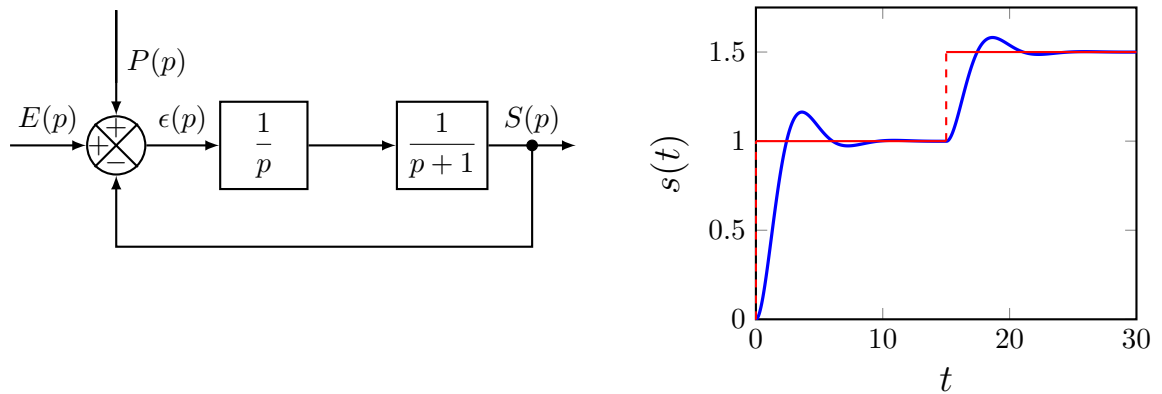
On souhaite réguler ce système pour une consigne en échelon. D'après les résultats précédents, l'erreur statique de position est nulle en asservissement puisque le système présente au moins un intégrateur. Pour observer le rejet de la perturbation, nous allons considérer deux positions possibles pour la perturbation (avant et après l'intégrateur). On considère une perturbation constante telle que  $P(p) = e^{-\tau p} \frac{P_0}{p}$  retardée d'un temps  $\tau > 0$ .

### Si l'intégrateur est en aval de la perturbation

Dans un tel cas l'erreur dû à la perturbation est donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon_P(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{-\tau p}}{p(p+1) + 1} P_0 = P_0$$

L'erreur statique de position totale est donc non nulle. La perturbation n'est pas rejetée comme on peut le voir sur la simulation de la réponse temporelle globale de ce système (c.f figure 6.1).



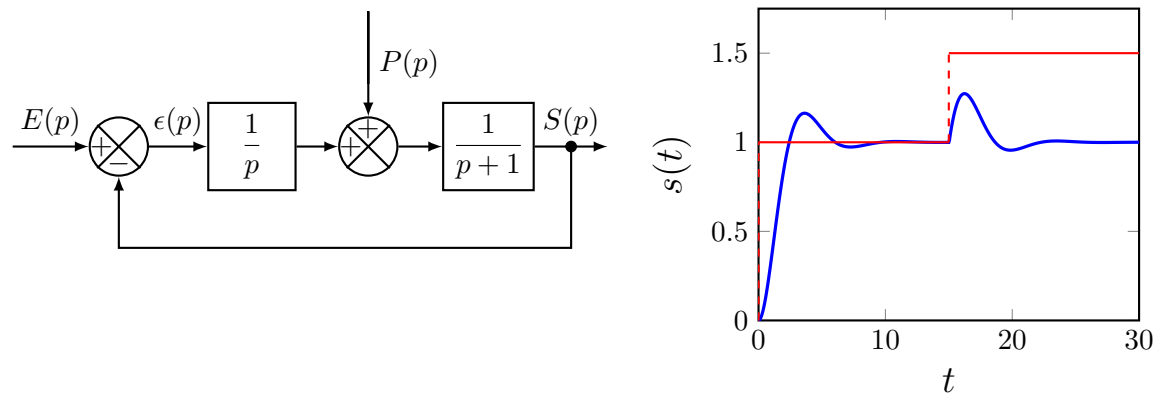
**Figure 6.1.** – Effet de la perturbation sur la réponse temporelle dans le cas où l'intégrateur est en aval de la perturbation. La simulation de la réponse temporelle est obtenue pour les paramètres suivants :  $E_0 = 1$ ,  $\tau = 15$

### Si l'intégrateur est en amont de la perturbation

Dans un tel cas l'erreur dû à la perturbation est donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pe^{-\tau p}}{p(p+1)+1} P_0 = 0$$

L'erreur statique de position totale est donc nulle. La perturbation est rejetée, comme on peut le voir sur la simulation de la réponse temporelle globale de ce système (c.f [figure 6.2](#)).



**Figure 6.2.** – Effet de la perturbation sur la réponse temporelle dans le cas où l'intégrateur est en amont de la perturbation. La simulation de la réponse temporelle est obtenue pour les paramètres suivants :  $E_0 = 1$ ,  $\tau = 15$

### 3. Rapidité

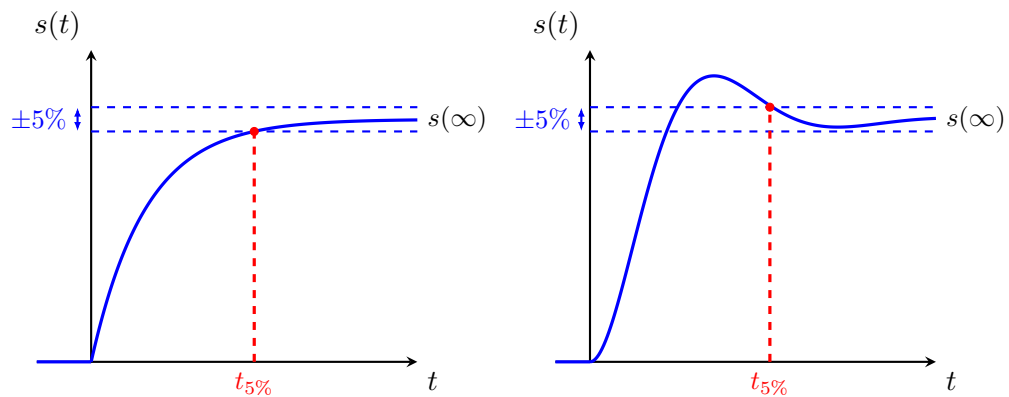
La rapidité est un critère important dans le contexte du contrôle des systèmes dynamiques. Cette rapidité correspond à la durée que met un système pour atteindre le régime permanent. Ce critère de performance dépend donc directement du transitoire de la réponse temporelle. En générale, la valeur finale de la réponse d'un système est atteinte de façon asymptotique. C'est pourquoi, ce critère est généralement évalué relativement à la valeur finale de la réponse indicielle. Dans le cas des systèmes en boucle ouverte, nous ne rappellerons que les résultats obtenues dans les chapitres précédents. L'objectif principale est ici d'évaluer l'effet du bouclage sur ce critère de performance.

#### 3.1. Réponse temporelle

Dans la pratique, on caractérise la rapidité d'une réponse temporelle par l'intermédiaire de deux valeurs :  $t_{5\%}$  le **temps de réponse à 5%** et  $t_m$  le **temps de montée**. On rappelle ici les définitions de ces deux temps ainsi que les résultats obtenues au [chapitre 3](#) pour les systèmes modèles.

##### 3.1.1. Temps de réponse à 5% et temps de montée

Le temps de réponse à 5% d'un système correspond au temps mis par la réponse pour atteindre 5% de sa valeur finale  $s(\infty)$ . Dans le cas où la réponse tend asymptotiquement en oscillant vers la valeur finale, le temps de réponse à 5% correspond au temps pour lequel le signal de la réponse reste dans une bande à 5% autour de la valeur finale.

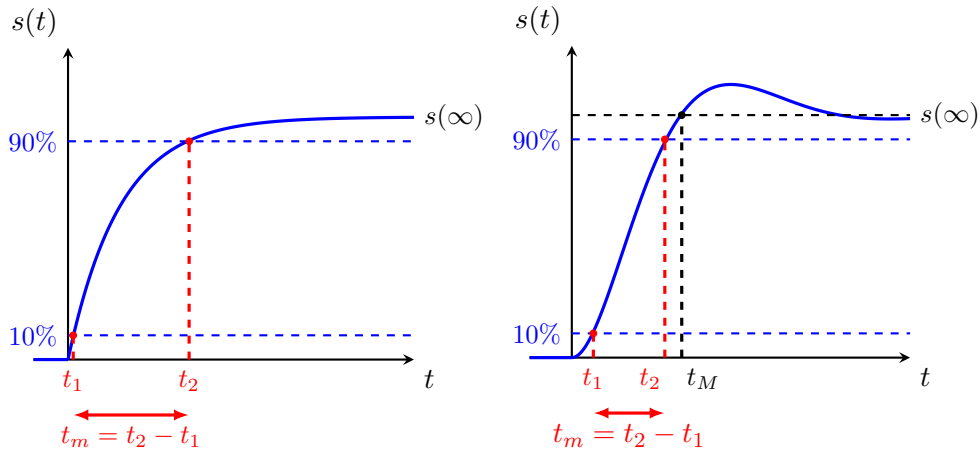


**Figure 6.3.** – Définition du temps de réponse à 5% : (à gauche) dans le cas d'une réponse temporelle sans pseudo-oscillations et (à droite) dans le cas d'une réponse temporelle avec pseudo-oscillations

Il apparaît clair que dans le cas d'une réponse présentant des oscillations, le temps de réponse à 5% va dépendre de l'amplitude et la période des pseudo-oscillations. Dans

le cas où l'on souhaite caractériser la rapidité indépendamment de ces oscillations, on utilisera le temps de montée.

Le temps de montée  $t_m$  est le temps mis par réponse temporelle d'un système pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Il existe une autre définition du temps de montée. Pour celle-ci le temps de montée (que nous noterons  $t_M$ ) correspond à la durée au bout de laquelle la réponse passe pour la première fois par la valeur finale. Cependant, il faut remarquer que pour certaine réponse la valeur finale n'est jamais atteinte en un temps fini. Cette dernière définition n'a donc de sens qu'en régime pseudo-périodique.



**Figure 6.4.** – Définition du temps de montée : (à gauche) dans le cas d'une réponse temporelle sans pseudo-oscillations et (à droite) dans le cas d'une réponse temporelle avec pseudo-oscillations

Quelque soit la grandeur utilisée pour caractériser les performances de rapidité d'un système linéaire, on dira que **plus le temps de réponse à 5% et le temps de montée  $t_m$  seront faibles plus le système sera rapide.**

### 3.1.2. Système du premier ordre

La réponse indicielle  $s(t)$ , à un échelon unitaire, d'un système du premier ordre est donnée par l'équation (3.4) du chapitre 3, à savoir :

$$s(t) = K \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

Le temps de réponse à 5%  $t_{5\%}$  est tel que  $s(t_{5\%}) = 0.95K$ ,

$$t_{5\%} = -\tau \log 0.05 \sim 3\tau.$$

Le temps de montée  $t_m = t_2 - t_1$  avec  $t_1$  et  $t_2$ , les temps tels que :

$$\begin{aligned}s(t_1) &= 0.1K \\ s(t_2) &= 0.9K \\ t_m &= -\tau \log \frac{0.1}{0.9} \sim 2.2\tau\end{aligned}$$

Le temps de réponse à 5% et le temps de montée  $t_m$  dépendent directement de la constante. Ce qui permet de conclure que **plus la constante de temps  $\tau$  d'un système du premier ordre est faible plus le système est rapide.**

### Effet du bouclage sur un système du premier ordre

Nous avons montré au chapitre 5 que les paramètres de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système du premier ordre ( $K_{BF}, \tau_{BF}$ ) peuvent être obtenues à partir des paramètres de la FTBO. Notamment les relations suivantes :

$$\begin{aligned}K_{BF} &= \frac{K}{1+K} \\ \tau_{BF} &= \frac{\tau}{1+K}\end{aligned}$$

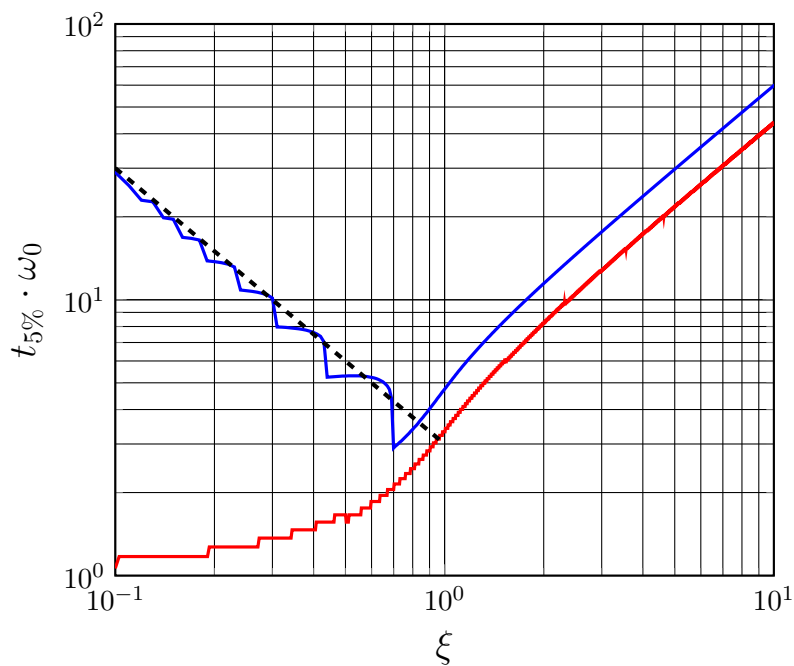
Il est alors possible de modifier la constante de temps en boucle fermée en modifiant la valeur du gain statique en boucle ouverte. Pour augmenter la rapidité d'un système, on augmentera le gain statique de la FTBO pour diminuer les temps de réponse et de montée.

### 3.1.3. Système du second ordre

Comme nous l'avons déjà souligné au chapitre 3, dans le cas d'un système du second ordre, il n'existe pas de forme analytique simple pour déterminer le temps de réponse à 5%. Celui-ci dépend en effet de la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  et de la pulsation propre du système  $\omega_0$ . Il est cependant possible de tracer les relations entre les temps de réponse à 5%, le temps de montée (les deux définitions

Pour déterminer le temps de réponse à 5%, on utilise l'abaque de la figure 6.5. Sur cette figure nous avons représenté le temps de réponse à 5% et le temps de montée réduits par rapport à la pulsation propre  $\omega_0$ . **En effet pour un même coefficient d'amortissement, plus la pulsation propre augmente plus le temps de réponse diminue, donc plus le système est rapide.**

Nous pouvons relever sur ces abaques les coefficients d'amortissement donnant lieu au système le plus rapide selon le régime du second ordre accepté. Dans le cas où les dépassements ne sont pas autorisés (c.a.d régime apériodique ( $\xi > 1$ )), le système est le plus rapide pour  $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim 5$ . Dans le cas où un dépassement relatif est autorisé, la temps de réponse minimal est obtenu pour  $\xi \sim 0.7$  soit pour  $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim 3$ .



**Figure 6.5.** – Caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre en fonction du taux d'amortissement  $\xi$  : par (bleu) le temps de réponse à 5%, (rouge) le temps de montée  $t_m$ . Ces deux temps sont donnés en unité réduite par rapport la pulsation propre  $\omega_0$ . Le minimum du temps de réponse à 5% est atteint pour  $\xi \sim 0.7$  pour lequel  $\omega_0 \cdot t_{5\%} \sim 3$ . Le droite en pointillé représente l'équation approchée  $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim \frac{3}{\xi}$  pour les faibles valeurs de  $\xi$ .

Il est possible de déterminer une relation analytique pour le temps de montée à la valeur finale  $t_M$ . Rappelons quelques résultats obtenus pour la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique (c.f [Chapitre 3 section 3.4.2](#)) :

- La fonction de transfert d'un système du second ordre est donnée par :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

- La réponse indicielle pour échelon unitaire tend vers le gain statique  $K$
- La réponse indicielle pour une échelon unitaire et en régime pseudo-périodique est donnée par :

$$s(t) = K \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \right)$$

Le temps de montée à la valeur finale  $t_M$  est tel que,

$$s(t_M) = K$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t_M} \sin(\omega_d t_M + \phi) = 0$$

Cette expression est nulle que si  $\sin(\omega_d t_M + \phi) = 0$ . On obtient alors :

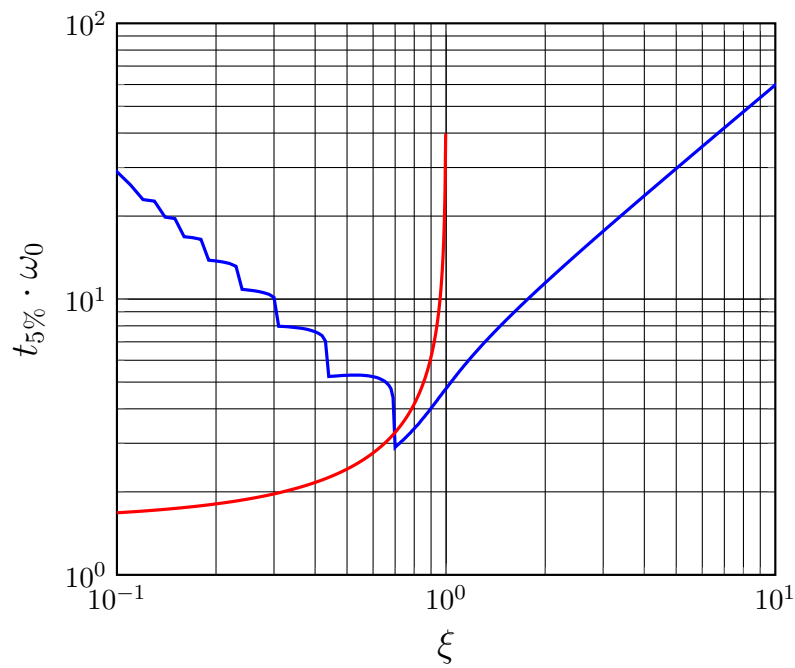
$$t_M = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} \quad (6.4)$$

en fonction de  $\xi$  uniquement cette relation devient :

$$t_M = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

ou encore sous sa forme réduite en  $\omega_0$  :

$$t_M \omega_0 = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (6.5)$$



**Figure 6.6.** — Caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre en fonction du taux d'amortissement  $\xi$  : par (bleu) le temps de réponse à 5%, (rouge) le temps de montée  $t_M$  à la valeur finale. Ce dernier est donné par la relation analytique établie dans le texte (c.f [équation \(6.5\)](#)).



### Effet du bouclage sur un système du second ordre

À l'instar des systèmes du premier ordre, nous avons montré au chapitre 5 que les paramètres de la FTBF d'un système du second ordre  $(K_{BF}, \xi_{BF}, \omega_{0,BF})$  peuvent être obtenues à partir des paramètres de la FTBO. Notamment les relations suivantes :

$$\begin{aligned} K_{BF} &= \frac{K}{1+K} \\ \omega_{0,BF} &= \omega_0 \sqrt{1+K} \\ \xi_{BF} &= \frac{\xi}{\sqrt{1+K}} \end{aligned}$$

En s'appuyant sur l'abaque discuté précédemment, il est possible de modifier les performances de rapidité de la boucle fermée en modifiant le gain de la boucle ouverte, notamment il est possible de rendre un système plus rapide en boucle fermée,

- en augmentant la valeur de la pulsation propre du système par l'intermédiaire du gain  $K$  de la FTBO.
- en diminuant coefficient d'amortissement  $\xi_{BF}$  pour  $\xi_{BF} > 0.7$ , c'est à dire en augmentant le gain en boucle ouverte  $K$ .

Dans le cas où  $\xi_{BF} < 0.7$  une conclusion générale est impossible on se reportera sur les abaques du temps de réponse ou du temps de montée en fonction du coefficient d'amortissement pour établir la rapidité du système en boucle fermée.

## 3.2. Réponse harmonique

### 3.2.1. Définition de la bande passante à -xdB

## 3.3. Influence des pôles dominants

Soient  $p_1, \dots, p_n$  les pôles d'un système stable<sup>1</sup>. Le pôle  $p_i$  est dit dominant si la valeur absolue de sa partie réelle est largement plus petite que celle de tout autre pôles du système<sup>2</sup>

$$|\operatorname{Re}[p_i]| \ll |\operatorname{Re}[p_j]| \quad \forall j \neq i \quad (6.6)$$

Pour observer l'influence d'un pôle dominant sur la réponse temporelle d'un système linéaire, nous nous allons l'illustrer par l'étude d'une fonction de transfert du second ordre en régime apériodique. Une telle fonction de transfert est équivalente à deux systèmes du premier ordre en série.

<sup>1</sup>À partir des résultats obtenus dans ce chapitre il est déjà clair que la stabilité d'un système dépend également des pôles de sa fonction de transfert

<sup>2</sup>Dans la pratique un rapport de 5 est suffisant pour considérer une domination d'un pôle sur les autres

Prenons l'exemple de la fonction de transfert définie par

$$H(p) = \frac{5}{(p+1)(5p+1)} \quad (6.7)$$

et de décomposition en éléments simples telle que :

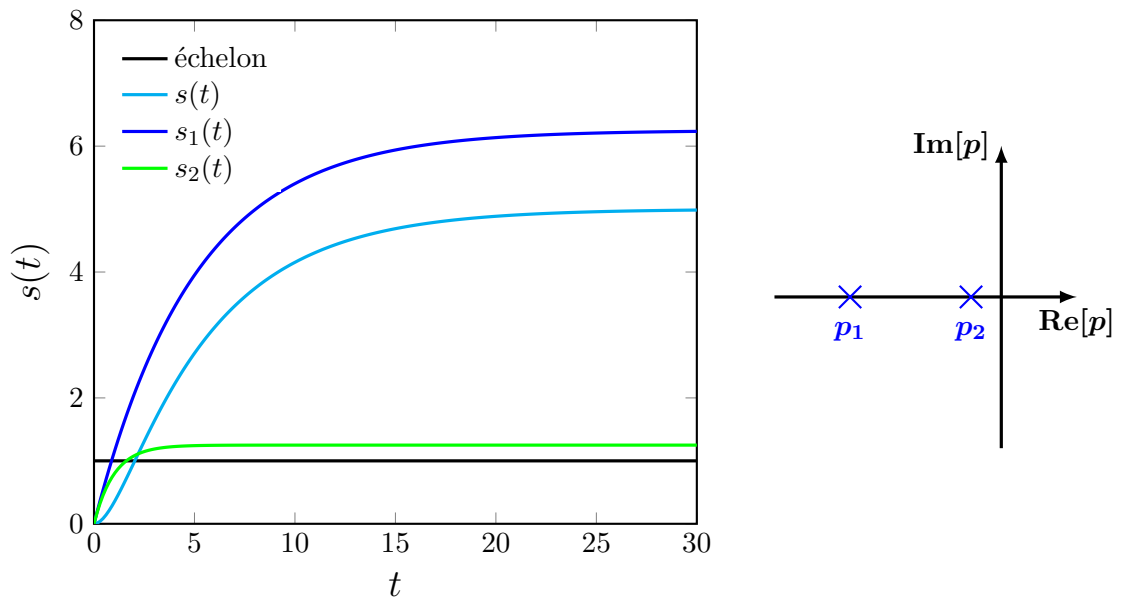
$$H(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{5p+1}$$

Par identification on peut écrire  $H(p)$  en fonction de deux fonctions de transferts  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  tel que :

$$\begin{aligned} H(p) &= H_1(p) - H_2(p) \\ H_1(p) &= \frac{6.25}{5p+1} \\ H_2(p) &= \frac{1.25}{p+1} \end{aligned}$$

Par définition, le pôle dominant est donné par  $H_1(p)$ . Pour observer, l'effet de chacun des pôles, nous avons tracé les réponses indicielles de ces trois fonctions de transfert (c.f [figure 6.7](#)) Nous constatons que la réponse indicielle  $s_1(t)$  de la fonction de transfert  $H_1(p)$  domine le temps de réponse de la sortie globale  $s(t)$ .

En conclusion, l'étude des pôles dominants de la fonction de transfert d'un système est, en première approximation, suffisante pour caractériser la rapidité d'un système que se soit en boucle ouverte ou en boucle fermée.



**Figure 6.7.** – (à gauche) Réponse indicielle  $s(t)$  de la fonction de transfert donnée par [équation \(6.7\)](#), ainsi que les réponses indicielles  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  des fonctions de transferts de sa décomposition en éléments simples. On constate que la réponse du pôle dominant ( $s_1(t)$ ) présente un temps de réponse proche de la réponse globale. (à droite) carte des pôles du système en question



# Annexes



## **A. Alphabet Grec**

Nom	Minuscule	Majuscule	Correspondance latine	Usages courants
alpha	$\alpha$	A	a	angles
bêta	$\beta$	B	b	angles
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	g	angles
delta	$\delta$	$\Delta$	d	variations
epsilon	$\epsilon, \varepsilon$	E	e	petite quantité
zéta	$\zeta$	Z	z	-
êta	$\eta$	H	é (long)	rendement
thêta	$\theta, \vartheta$	$\Theta$	th	angles
iota	$\iota$	I	i	-
kappa	$\kappa, \varkappa$	K	k	-
lambda	$\lambda$	$\Lambda$	l	longueur, densité linéique
mu	$\mu$	M	m	masse réduite
nu	$\nu$	N	n	fréquence
ksi	$\xi$	$\Xi$	ks	coefficient sans dimension
omicron	o	O	o	-
pi	$\pi, \varpi$	$\Pi$	p	$\Pi$ : plan
rhô	$\rho, \varrho$	P	r	densité volumique
sigma	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	s	$\sigma$ : densité surfacique, $\Sigma$ : Système
tau	$\tau$	T	t	temps, durée relative
upsilon	$\upsilon$	Y	u	-
phi	$\phi, \varphi$	$\Phi$	f,ph	angles
khi	$\chi$	X	kh	coefficients
psi	$\psi$	$\Psi$	ps	fonction d'onde
oméga	$\omega$	$\Omega$	ô	vitesse angulaire, angle solide

**Tableau A.1.** – Lettres de l'alphabet Grec et leurs usages courants en physique (non exhaustifs)





# Références

- [1] Régulation automatique (analogique) (REG). <http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/>.
- [2] <http://www.demosciences.fr/projets/scilab-xcos/-utilisation/premiers-pas>.
- [3] Xcos pour les vrais debutants. <https://scilab.developpez.com/tutoriels/debuter/apprendre-xcos-debutant/>.
- [4] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes lineaires (pc7bis), 2005.
- [5] B. Bayle and J. Gangloff. Systèmes et asservissements à temps continu, 2009.
- [6] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier, and R. Nikoukhah. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. Springer, 2006.
- [7] H. Garnier. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/hugues.garnier/?q=content/teaching>.
- [8] Y. Granjon. *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, événements discrets*. Dunod, Paris, 2015.
- [9] E. Laroche and H. Halalchi. Asservissement des systèmes lineaires à temps continu. <http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>.
- [10] O. Le Gallo. *Automatique des systèmes mécaniques : Cours, travaux pratiques et exercices corrigés*. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009.
- [11] Joe Mabel. Régulateur à boules au Georgetown PowerPlant Museum à Seattle. CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5694146>.
- [12] B. Marx. Outils Mathématiques pour l'ingénieur - Traitement du Signal. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html>.
- [13] B. Marx. Contrôle des systèmes linéaires. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/-benoit.marx/enseignement.html>.
- [14] F. Orioux. *Automatique : Systèmes linéaires et asservissements*. Notes de Cours, Master 2 Outils et systèmes de l'astronomie et de l'Espace, 20017-1018.
- [15] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses Marketing, 2004.
- [16] R. Papanicola. Schéma-blocs avec PGF/TIKZ. <https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/schema-bloc.pdf>.
- [17] R. Papanicola. *Sciences industrielles PCSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2003.

- [18] R. Papanicola. *Sciences industrielles PSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2010.
- [19] Marsyas-Travail personnel. Clepsydre athénienne reconstituée, Musée de l'Agora antique d'Athènes. CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=476174>.
- [20] Consortium Scilab. Introduction to Scilab. [www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf](http://www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf).
- [21] S. Steer and Y. Degré. *Scilab : De la théorie à la pratique - II. Modéliser et simuler avec Xcos*. Éditions D-BookeR, 2014.
- [22] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. *Automatique des systèmes continus*. Editions Technip.
- [23] E. Thomas. TP Scilab. [http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP\\_INFO/TP\\_info\\_12\\_ordre/co/module\\_TP\\_1\\_2\\_ordre\\_5.html](http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP_INFO/TP_info_12_ordre/co/module_TP_1_2_ordre_5.html).

# Index

Bode, Hendrik, 100

Nichols, Nathaniel, 99

Nyquist, Harry, 101

Retard pur

- diagramme de Bode, 106

- diagramme de Nyquist, 124

- effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist, 128

Système du premier ordre

- diagramme de Bode, 107

- diagramme de Nyquist, 125

- réponse harmonique dans le domaine temporel, 98

Système du second ordre

- diagramme de Nyquist, 126



# Acronymes

**DES** Décomposition en Éléments Simples

**FTBF** Fonction de Transfert en Boucle Fermée

**FTBO** Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

**FTCD** Fonction de Transfert de la Chaîne Directe

**FTCR** Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour

**MEI** Matière-Énergie-Information

**MIMO** Multiple Input Multiple Output

**SISO** Single Input Single Output

**SLCI** Système Linéaire Continu et Invariant

**TL** Transformée de Laplace



# Glossaire

<b>Asservissement</b>	L'asservissement consiste à contrôler un système dynamique pour que sa réponse temporelle suive une consigne variable au cours du temps.
<b>Régulation</b>	La régulation est un particulier d'asservissement consistant à garder une consigne constante en présence de perturbation.





# Liste des Symboles

$t$	Variable temporelle
$p$	Indéterminée de polynôme
$s(t)$	Fonction/Signal dans le domaine temporel
$S(p)$	Fonction/Signal dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$
$u(t)$	Fonction échelon unité ou de Heaviside
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
$r(t)$	Fonction rampe unité
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformation de Laplace de la fonction $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	Transformation de Laplace inverse de la fonction $F(p)$
$H(p)$	Fonction de transfert
$N(p)$	Polynôme du numérateur d'une fraction rationnelle
$D(p)$	Polynôme du dénominateur d'une fraction rationnelle
$\omega$	Pulsation
$H(j\omega)$	Nombre complexe associé à la fonction de transfert $H(p)$
$E_0$	Paramètre dimensionnelle d'amplitude de l'entrée
$K$	Gain statique
$\omega_0$	Pulsation propre
$\text{Im}[H(j\omega)]$	Partie imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
$\text{Re}[H(j\omega)]$	Partie réelle du nombre complexe $H(j\omega)$
$\xi$	Coefficient d'amortissement

$G(\omega)$	Gain naturel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$G_{dB}(\omega)$	Gain en dB de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$\phi(\omega)$	Déphasage de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$D_k$	k-ème dépassement
$t_{5\%}$	Temps de réponse à 5%



