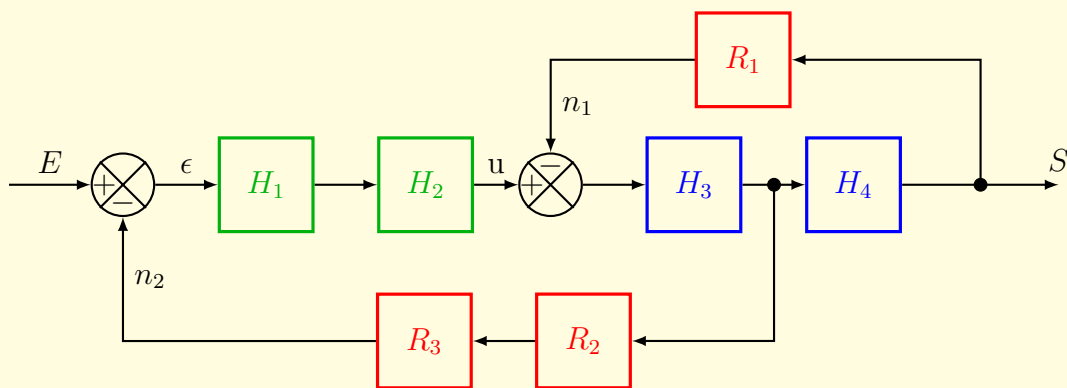


Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé
Automatique*



ANNÉE 2019–2020

Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé
Automatique*

Filipe Manuel Vasconcelos

écrit sous L^AT_EX, TikZ
version de janvier 2020.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence
Creative Commons “Attribution - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : filipe.vasconcelos@esme.fr

Table des matières

Table des matières	5
Avant-propos	11
Chapitre 1 Systèmes linéaires, continus...	13
1. Introduction	14
2. Définition SLCI	15
2.1. Système	15
2.2. Système à temps continu	16
2.3. Système linéaire	16
2.4. Système causal	16
2.5. Système invariant	17
2.6. Système stable	17
2.7. Modélisation d'un système linéaire continu et invariant . . .	17
3. Modélisation d'un signal	19
3.1. Propriétés générales des signaux continus (analogiques) . . .	20
3.2. Signaux usuels rencontrés...	23
4. La transformée de Laplace	30
4.1. Définition	30
4.2. Propriétés	31
4.3. Transformées des signaux usuels	34
4.4. Application de la transformée de Laplace	37
5. Fonction de Transfert	42
5.1. Définition	42
5.2. Fonction de transfert et réponse impulsionnelle	42
5.3. Représentation de la fonction de transfert	43
5.4. Notion de pôles dominants	47
Chapitre 2 Schéma fonctionnels	51
1. Introduction	52
2. Éléments de base des schémas fonctionnels	52
3. Transformation des schémas fonctionnels	54
3.1. Réduction de schéma-bloc	54
3.2. Manipulation de schéma-bloc	57
4. Cas d'entrées multiples	58

5.	Réduction de schéma-bloc de grande taille	60
5.1.	Exemple à entrée simple	60
5.2.	Exemple à entrées multiples	62
6.	Graphe de fluence	64
6.1.	Définitions	64
6.2.	Algèbre des graphes de fluences	65
6.3.	Règle de Mason	68
Chapitre 3	Modélisation des SLCI	71
1.	Introduction	72
2.	Système du premier ordre	73
2.1.	Définition d'un système du premier ordre	73
2.2.	Fonction de transfert d'un système du premier ordre	73
2.3.	Pôle de la fonction de transfert du premier ordre	73
2.4.	Réponses temporelles d'un système du premier ordre	74
3.	Système du second ordre	79
3.1.	Définition d'un système du second ordre	79
3.2.	Fonction de transfert d'un système du second ordre	79
3.3.	Pôles de la fonction de transfert du second ordre	79
3.4.	Réponses temporelles d'un système du second ordre	80
3.5.	Cas particulier de l'oscillateur harmonique	96
4.	Autres modèles particuliers	98
4.1.	Gain pur	98
4.2.	Intégrateur pur	98
4.3.	Dérivateur pur	99
4.4.	Retard pur	100
5.	Généralisation des modèles de SLCI	101
5.1.	Systèmes d'ordre supérieur à 2	101
5.2.	Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3	102
6.	Identification d'un modèle de comportement	103
6.1.	Formule de Bureau	103
6.2.	Modèle de Strejc	103
Chapitre 4	Analyse fréquentielle	105
1.	Réponse harmonique	106
1.1.	Exemple de réponse harmonique dans le domaine temporel	108
2.	Représentation graphique de la réponse harmonique	110
2.1.	Diagramme de Bode	110
2.2.	Diagramme de Nyquist	111
2.3.	Diagramme de Black-Nichols	112
3.	Analyse fréquentielle des modèles usuels	113
3.1.	Diagrammes de Bode : méthodologie générale	113

3.2.	Diagrammes de Nyquist : méthodologie générale	132
3.3.	Diagrammes de Black : méthodologie générale	141
4.	Etude du transitoire de la réponse harmonique	141
4.1.	Exemple d'un système du premier ordre	142
4.2.	Exemple d'un système du second ordre	142
Chapitre 5	Asservissements des systèmes linéaires	143
1.	Introduction	144
2.	Organisation d'un asservissement	146
2.1.	Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis	146
2.2.	Fonctions de transferts associées à un système asservi	148
3.	Asservissement des SLCI modèles	149
3.1.	Asservissement d'un intégrateur	149
3.2.	Asservissement d'un système du premier ordre	150
3.3.	Asservissement d'un système du second ordre	151
Chapitre 6	Performances des systèmes asservis	153
1.	Contexte	154
2.	Précision	154
2.1.	Précision en boucle ouverte	154
2.2.	Précision en boucle fermée	155
2.3.	Effet d'une perturbation	158
3.	Rapidité	158
3.1.	Réponse temporelle	158
3.2.	Réponse harmonique	158
3.3.	Influence des pôles dominants	158
3.4.	Influence du bouclage	159
Chapitre 7	Stabilité des systèmes asservis	161
1.	Contexte et critère de stabilité fondamentale	162
2.	Critère algébrique de Routh	164
2.1.	Tableau de Routh	165
2.2.	Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz	168
3.	Critère graphique du revers	169
3.1.	Critère du revers dans le plan de Nyquist	172
3.2.	Critère du revers dans le plan de Black	173
3.3.	Critère du revers dans le plan de Bode	174
4.	Critère de Nyquist	175
Chapitre 8	Correction des systèmes asservis	181
1.	Nécessité de la correction	182
2.	Correcteur P, I et D	182
3.	Correcteur PI et PD	182
4.	Correcteur PID	182

Chapitre 9	Initiation à la représentation d'état	183
Annexes		187
Annexe A	Alphabet Grec	187
Annexe B	Unités du Système International	189
Annexe C	Pierre-Simon de Laplace	191
Annexe D	Transformation de Laplace	193
1.	Définitions	193
2.	Propriétés	193
3.	Table des transformées de Laplace	195
Annexe E	Rappel sur les nombres complexes	197
Annexe F	Équations différentielles à coefficients constants	203
1.	Résolution équation différentielle du premier ordre	203
1.1.	Sans second membre	204
Annexe G	Décomposition en éléments simples	207
1.	Contexte	207
2.	Fractions rationnelles rencontrées en automatique	207
3.	Décomposition en éléments simples	208
4.	Détermination des coefficients de la DES	209
4.1.	Par identification	209
Annexe H	Systèmes du second ordre	211
1.	Abaques de la réponse temporelle	212
2.	Analyse fréquentielle	215
Annexe I	Initiation à Scilab	217
1.	Présentation générale	217
2.	Syntaxe : console	218
3.	Polynômes et fractions rationnelles	219
4.	Vecteurs et matrices	222
5.	Tracer de figures	225
6.	Programmation	226
7.	SLCI avec Scilab	228
7.1.	Définition d'un système linéaire	228
7.2.	Simulation temporelle d'un système linéaire	229
7.3.	Système du premier ordre	230
7.4.	Carte des pôles et zéros	233
7.5.	Asservissement	233
8.	Scilab-Xcos	234
8.1.	Lancer Xcos	234
8.2.	Diagramme simple	234
8.3.	Simulation	235
8.4.	Blocs « To Workspace » ou « From Workspace »	235

Annexe J	Échelle logarithmique et le décibel	237
1.	Rappel sur le logarithme décimal	237
2.	Échelle logarithmique décimale	238
3.	Le décibel	239
4.	Diagramme de Bode	239
5.	Tracé d'un diagramme de Bode avec Scilab	242
Annexe K	Transformée de Laplace inverse	243
1.	Contexte	243
2.	Méthode de Gaver-Stehfest	243
3.	Méthode de Talbot fixe	243
Annexe L	TODO	245
Références		249
Index		251
Glossaire		253
Liste des Symboles		255

Avant-propos

Programme

Ce cours est une introduction à l'**automatique** pour des étudiants de deuxième année de classe préparatoire scientifique.

L'objectif principal de l'automatique est de permettre le contrôle des **systèmes dynamiques** de toutes natures que ce soient : mécanique, chimique, électronique, optique, thermique, acoustique... Tout en respectant certaines contraintes de performances (rapidité, précision, stabilité...).

Nous limiterons notre étude aux **systèmes linéaires continus et invariants**.

La **modélisation** de ces systèmes passe par la mise en équation du comportement physique des systèmes sous forme d'équations différentielles. Cette étape ne fait pas à proprement parler partie d'un cours d'automatique, en effet chacune des disciplines construisent cette modélisation en se basant sur les principes et les hypothèses les plus adaptés à un problème donné. La modélisation permet une étude systématique des équations différentielles en proposant des modèles généraux et ce quelque soit la nature du procédé.

L'**analyse** nous permettra de caractériser et d'identifier ces modèles à partir des réponses aux sollicitations et de leurs performances.

Le **contrôle** est un concept très générale permettant de regrouper toutes les méthodes et techniques permettant de commander un système dynamique. Dans ce cours nous présenterons que les principes d'asservissement et de régulation. Nous verrons comment il est possible d'élaborer une commande adaptée (corrigée) pour un procédé quelconque, notamment lorsque ceux-ci présenterons des défauts de performance.

Organisation du document

Les chapitres suivent un découpage classique autour des trois piliers discutés précédemment que sont la **modélisation**, l'**analyse** et le **contrôle**. (c.f **Figure A**).

Le lecteur pourra s'appuyer sur un grand nombre d'annexes qui ont pour objectifs de rappeler et de détailler des notions prérequis ou encore approfondir quelques aspects hors programme pour une deuxième lecture.

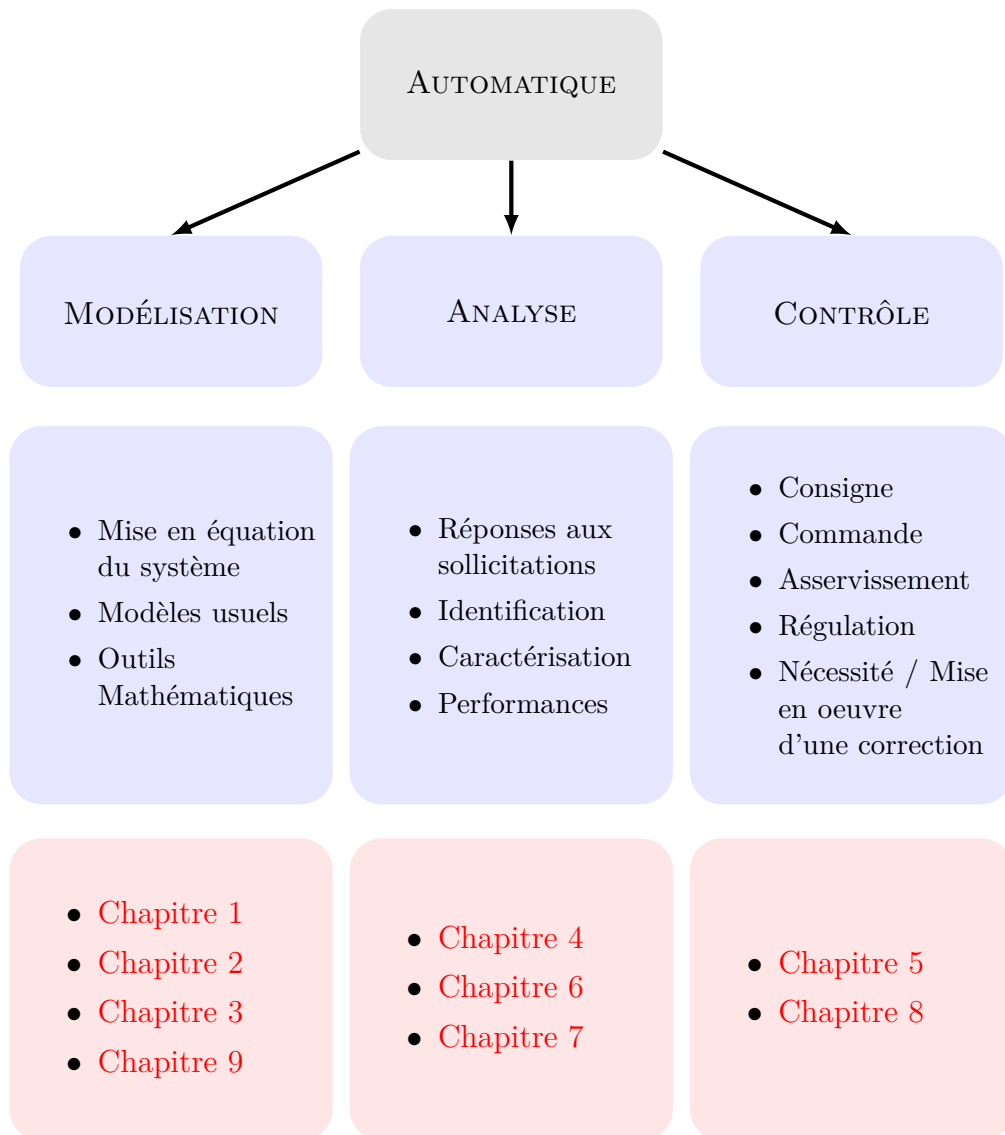


Figure A. – Organisation du document.

2. Schémas fonctionnels et graphes de fluence

Sommaire

1.	Introduction	52
2.	Éléments de base des schémas fonctionnels	52
3.	Transformation des schémas fonctionnels	54
3.1.	Réduction de schéma-bloc	54
3.2.	Manipulation de schéma-bloc	57
4.	Cas d'entrées multiples	58
5.	Réduction de schéma-bloc de grande taille	60
5.1.	Exemple à entrée simple	60
5.2.	Exemple à entrées multiples	62
6.	Graphe de fluence	64
6.1.	Définitions	64
6.2.	Algèbre des graphes de fluences	65
6.3.	Règle de Mason	68

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire un outil graphique pour faciliter la représentation des relations mathématiques entre les différents éléments constituant un **système linéaire continu et invariant (SLCI)**. Cet outil est le **schéma fonctionnel** ou également appelé **schéma-bloc**. Les schémas fonctionnels nous seront très utiles pour l'étude des systèmes asservis. Nous introduirons une algèbre de blocs permettant de réduire les schémas-blocs qui nous permettront de s'affranchir de la manipulation d'expression mathématique de grande taille. Nous aborderons également le cas des entrées multiples.

Dans une dernière partie nous introduirons les graphes de fluence, comme présenté dans [15]. Ces derniers sont moins utilisés pour l'étude des **SLCI**, et peuvent donc être négligés dans une première lecture, l'algèbre qui lui est associée s'avère cependant bien plus efficace et pourra être utilisée dans d'autres applications (ex : électronique, réseaux de neurones).

2. Éléments de base des schémas fonctionnels

Les schémas fonctionnels sont composés de quatre éléments de base : **les flèches**, **les blocs**, **les comparateurs et sommateurs** et **les points de prélèvement**

Flèche

Les flèches donnent la direction de l'information (i.e du signal) au sein du schéma-blocs. Elles peuvent être ornées de la grandeur mathématique qui leurs sont associée. Celles-ci peuvent être des grandeurs temporelles ou dans le domaine de Laplace.

$$\xrightarrow{e(t)} \quad \xrightarrow{E(p)}$$

Cependant, nous nous limiterons à l'usage de ces schémas fonctionnelles pour la représentation de grandeur dans le domaine de Laplace.

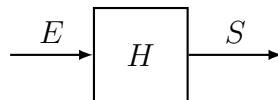
Pour alléger la notation dans ce chapitre, nous omettrons très souvent la variable p des grandeurs dans le domaine de Laplace désignées par une majuscule.

Bloc

Le bloc est la représentation d'une fonction de transfert entre deux grandeurs dans le domaine de Laplace. Par exemple, la relation entre l'entrée E et la sortie S définit par la fonction de transfert H qui s'écrit formellement,

$$S = HE, \quad (2.1)$$

est équivalente au schéma fonctionnel¹ suivant :

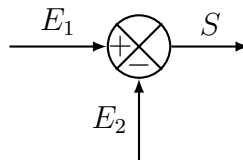
**Comparateur/Sommateur :**

Les comparateurs ou sommateurs permettent de représenter des opérations simples entre différentes grandeurs. Nous parlerons respectivement de comparateur ou de sommateur dans le cas d'une différence ou d'une somme entre deux grandeurs.

Par exemple, la relation

$$S = E_1 - E_2$$

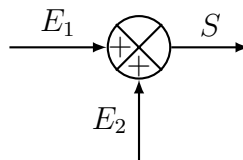
est équivalente au comparateur suivant :



De même la somme de deux grandeurs,

$$S = E_1 + E_2$$

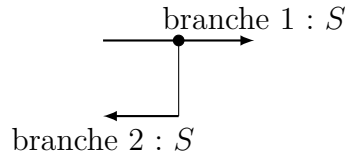
est équivalente au sommateur suivant :



¹Les schémas-blocs de ce document ont tous été réalisés avec les macros TikZ (`schemabloc`) écrit par R. Papanicola[16]. À noter que des macros TikZ (`gfluence`) pour représenter les graphes de fluence de ce même chapitre, ont été fortement inspirés par ce même auteur.

Point de prélèvement

Un point de prélèvement (ou point de dérivation ou encore jonction) est un point d'une flèche où une information est prélevée ne modifiant pas sa valeur. Par exemple, la jonction suivante (représentée par un point) donne lieu à deux branches auxquelles sont associées la même grandeur S .



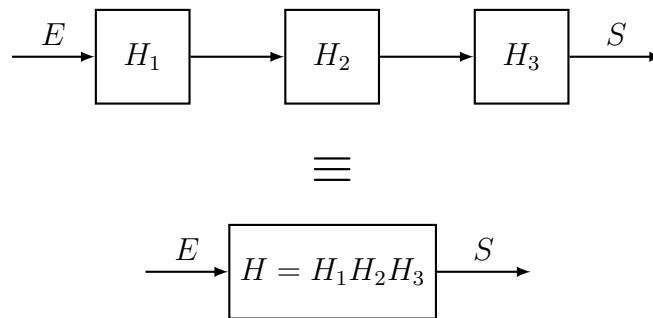
Dans cette configuration, la branche 1 est dite « direct » et la branche 2 est dite de « retour ».

3. Transformation des schémas fonctionnels

3.1. Réduction de schéma-bloc

Blocs en série / produit

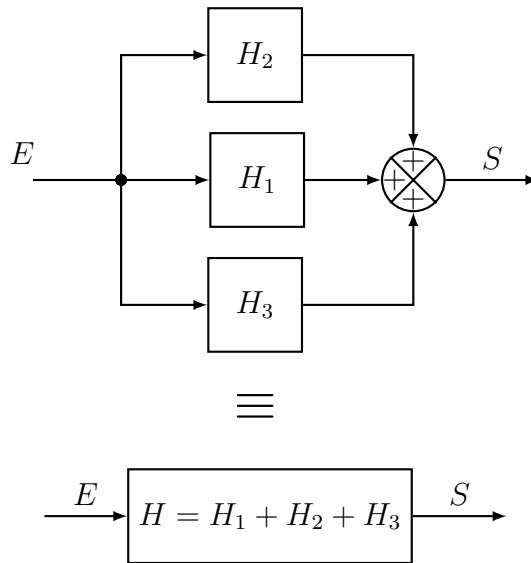
Lorsque les blocs sont placés en série, la fonction de transfert entre la sortie et l'entrée globale est le produit des fonctions de transfert mis en jeu. Par exemple, les deux schémas fonctionnels suivants sont équivalents.



Nous laissons au lecteur la démonstration triviale à partir des relations mathématiques.

Blocs en parallèle

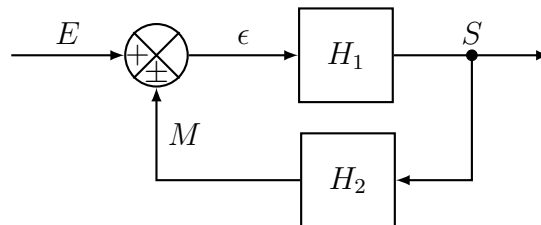
Lorsque les blocs sont placés en parallèle, la fonction de transfert entre la sortie et l'entrée globale est la somme des fonctions de transfert mis en jeu. Par exemple, les deux schémas fonctionnels suivants sont équivalents.



La démonstration est également triviale.

La boucle de contre-réaction (positive ou négative)

La boucle de contre-réaction² peut être réduite à une simple fonction de transfert. Considérons un système défini par le schéma-bloc ci-dessous, composé des différents éléments de bases.



Notons l'utilisation du symbole \pm pour envisager à la fois les comparateurs et sommateurs.

Déterminons la relation entre l'entrée E et la sortie S de ce système. Pour cela réécrivons les relations linéaires simples issus de ce schéma-bloc. On sait que :

$$\epsilon = E \pm M \quad (2.2)$$

$$M = H_2 S \quad (2.3)$$

$$S = H_1 \epsilon \quad (2.4)$$

² « Positive or negative feedback », chez nos collègues anglophones.

Introduisons l'équation (2.3) dans (2.2) et le résultat ainsi obtenu dans (2.4) :

$$\begin{aligned}\epsilon &= E \pm H_2 S \\ S &= H_1 (E \pm H_2 S) \\ S &= H_1 E \pm H_1 H_2 S\end{aligned}$$

Regroupons les termes dépendant de la sortie ensemble pour déterminer la relation entre l'entrée et la sortie.

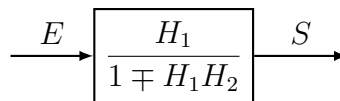
$$S(1 \mp H_1 H_2) = H_1 E$$

On obtient alors la formule de Black³, reliant la sortie à l'entrée d'une boucle de contre-réaction :

$$S = \frac{H_1}{1 \mp H_1 H_2} E \quad (2.5)$$

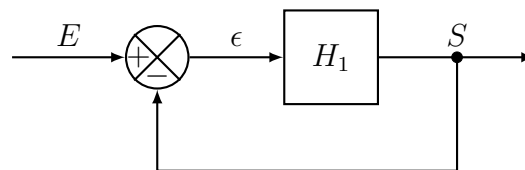
Notons l'inversion du signe du dénominateur de la formule selon que la boucle est positive ou négative.

La boucle de contre-réaction est donc équivalente au schéma-bloc simplifié suivant :



Boucle de contre-réaction unitaire

Une boucle de contre-réaction unitaire est une boucle de contre-réaction sans fonction de transfert de retour (ex : dans le cas présenté précédemment $H_2 = 1$).



La formule de Black se simplifie alors de la façon suivante :

$$S = \frac{H_1}{1 + H_1} E \quad (2.6)$$

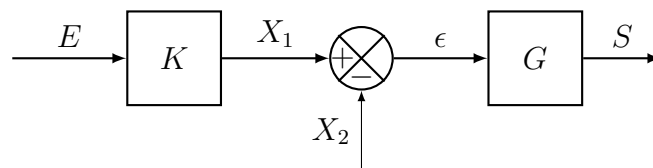
³Harold Stephen Black (1898-1983) ingénieur, électronicien américain.

3.2. Manipulation de schéma-bloc

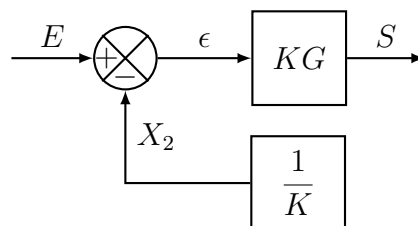
Nous allons ici présenter différentes manipulations que nous pourrions appliquer au schéma-bloc. Ces manipulations peuvent être vues comme des opérations d'une **algèbre de blocs**.

Déplacement d'un comparateur vers la gauche

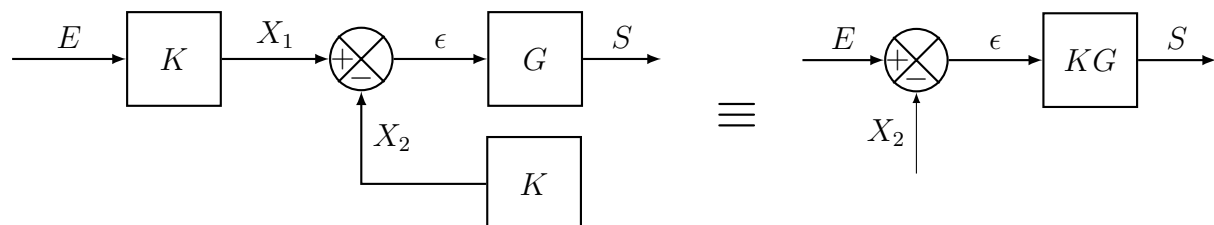
Considérons le schéma-bloc suivant :



Pour pouvoir déplacer le comparateur vers la gauche, il faut introduire le bloc K dans la chaîne direct. En conséquence, la chaîne de retour doit être modifiée pour ne pas affecter la sortie globale S . Le schéma fonctionnel précédent est donc équivalent au schéma ci-dessous :

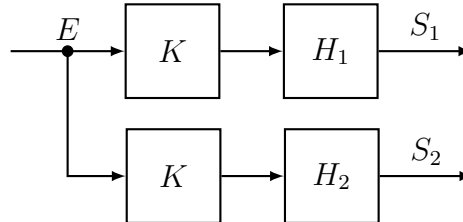


Dans le cas particulier où les deux branches du comparateur sont toutes les deux affectées par la même fonction de transfert, il suffit de déplacer la fonction de transfert après le comparateur. Par exemple, les deux schémas-blocs suivants sont équivalents :

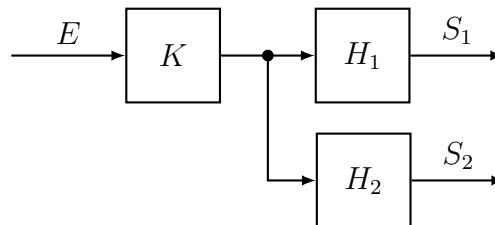


Déplacement d'un point de prélèvement vers la droite

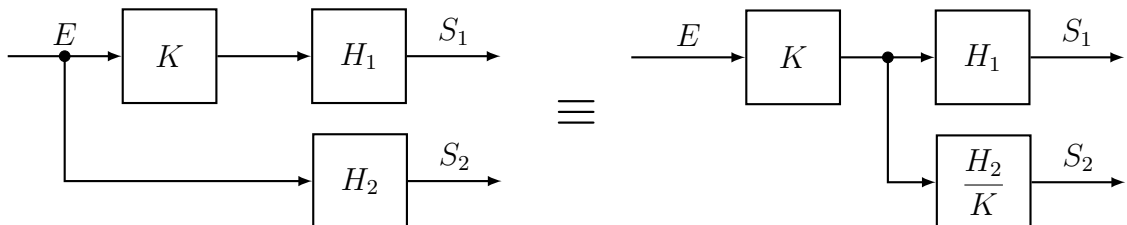
Considérons le schéma-bloc suivant :



Il est aisé de déplacer le bloc K devant le point de prélèvement :



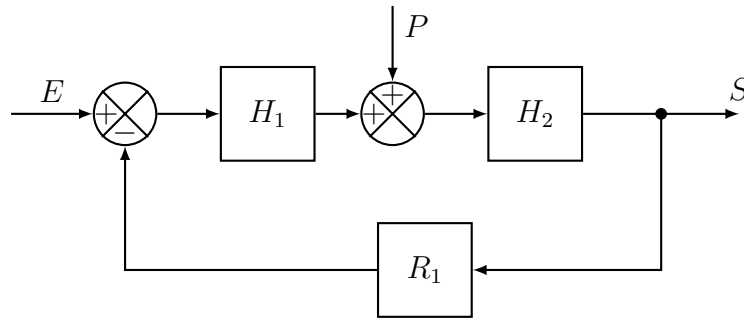
Dans le cas particulier où seul une branche est affectée par le bloc, il faut réduire la branche non affectée après avoir déplacé le point de prélèvement. Ainsi les deux schémas-blocs ci-dessous sont équivalents :



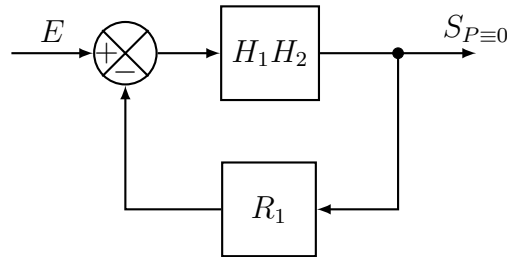
4. Cas d'entrées multiples

Dans le cas d'un système possédant plusieurs entrées, il est possible de simplifier le problème en appliquant le principe de superposition. La réponse totale devient alors la somme des réponses individuelles de chaque entrée lorsque toutes les autres sont considérées comme nulles.

Considérons le schéma-blocs suivant :



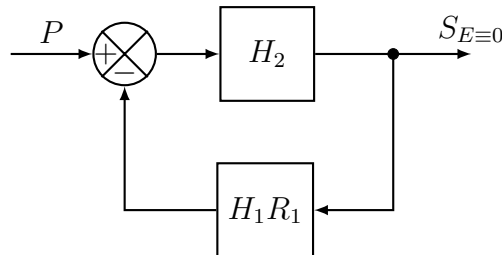
Dans un premier temps, on considère l'entrée P nulle, le schéma-bloc devient :



La sortie $S_{P=0}$ (i.e lorsque $P \equiv 0$) est donc donnée par la formule de Black pour la boucle de contre-réaction ainsi obtenue.

$$S_{P=0} = \frac{H_1 H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} E$$

Dans le cas où l'on considère maintenant l'entrée E comme nulle, le schéma-bloc se réduit de la façon suivante :



La sortie $S_{E=0}$ est donc donnée par,

$$S_{E=0} = \frac{H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} P$$

La sortie totale S du système à deux entrées est la somme de ses sorties indépendantes,

$$S = S_{P=0} + S_{E=0} \quad (2.7)$$

$$S = \frac{H_1 H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} E + \frac{H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} P \quad (2.8)$$

$$S = H_E E + H_P P \quad (2.9)$$

Si E est une entrée de consigne et P une perturbation, H_E et H_P sont respectivement appelées **fonction de transfert d'asservissement** et **fonction de transfert de régulation**. Remarquons que le dénominateur de ces fonctions de transferts sont identiques.

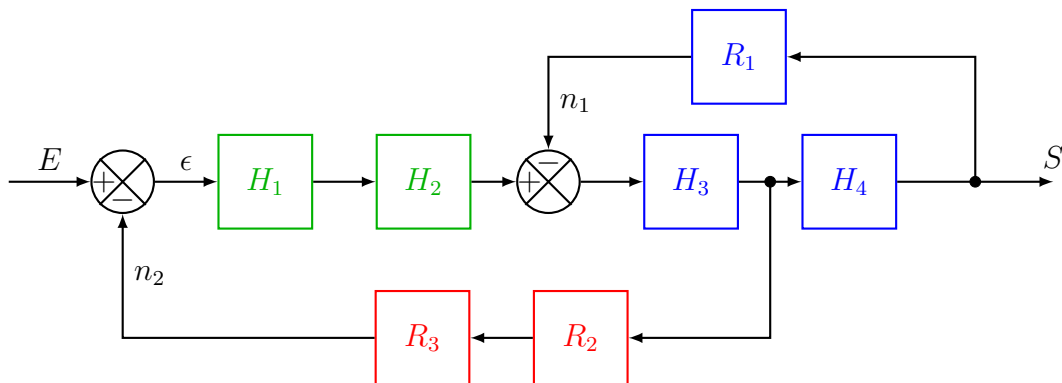
5. Méthodologie générale pour la réduction de schéma-bloc de grande taille

Nous venons de présenter les principales transformations et manipulations qui peuvent être appliquées aux schémas fonctionnels. Nous donnons ici une approche simple pour la réduction de schéma-bloc de grande taille [15] :

1. Regrouper les blocs en parallèle et en série.
2. Éliminer les boucles de contre-réaction locales.
3. Déplacer les sommateurs/comparateurs vers la gauche et déplacer les jonctions vers la droite.
4. Répéter pour obtenir une forme canonique pour une entrée particulière.
5. Dans le cas d'entrée multiple, répéter (1-4) pour chaque entrée.

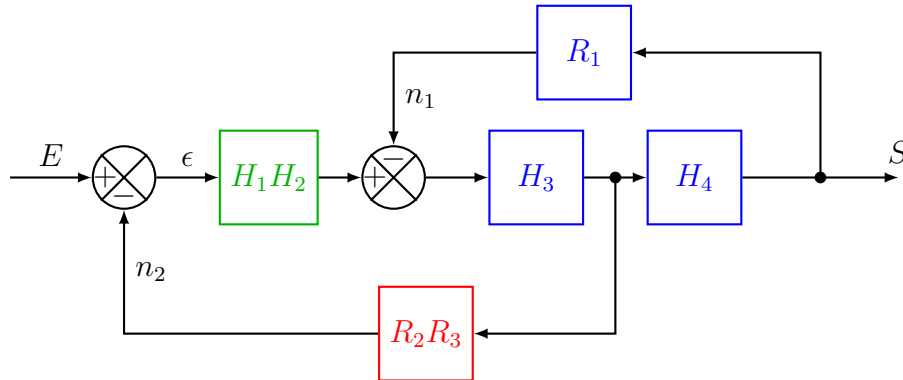
5.1. Exemple à entrée simple

Nous allons appliquer étape par étape cette méthodologie à la réduction du schéma-bloc, à une seule entrée, suivant :

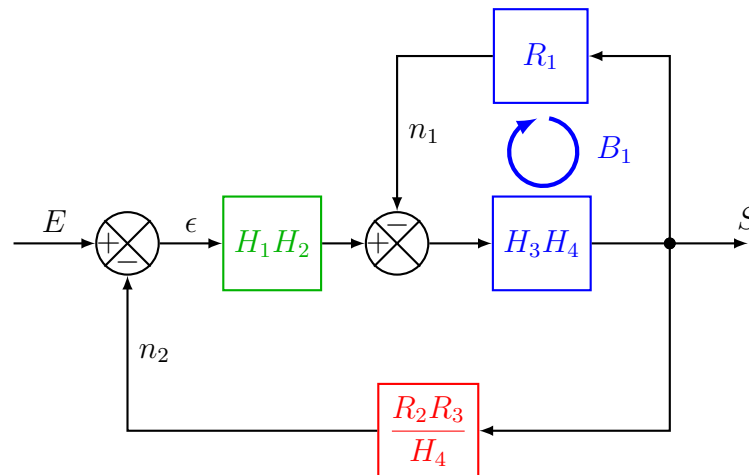


Étape 1

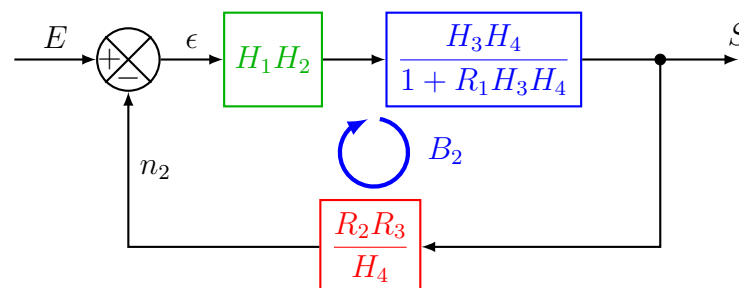
Regroupons d'abord les blocs en cascades :

**Étape 2**

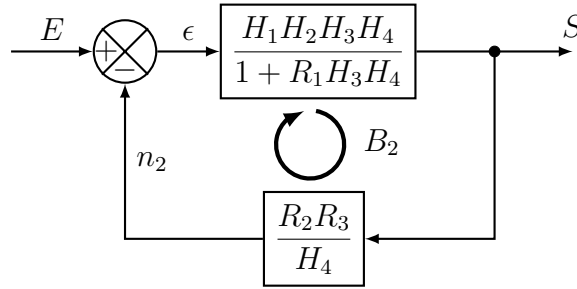
Déplaçons le point de prélèvement de la boucle de retour inférieur vers la droite :



L'étape précédente nous permet d'identifier une boucle de contre-réaction locale (B_1). Après réduction de cette boucle, le schéma-blocs devient :

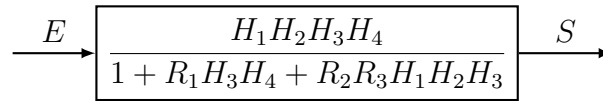


À nouveau il est possible d'identifier une boucle de contre-réaction B_2 :



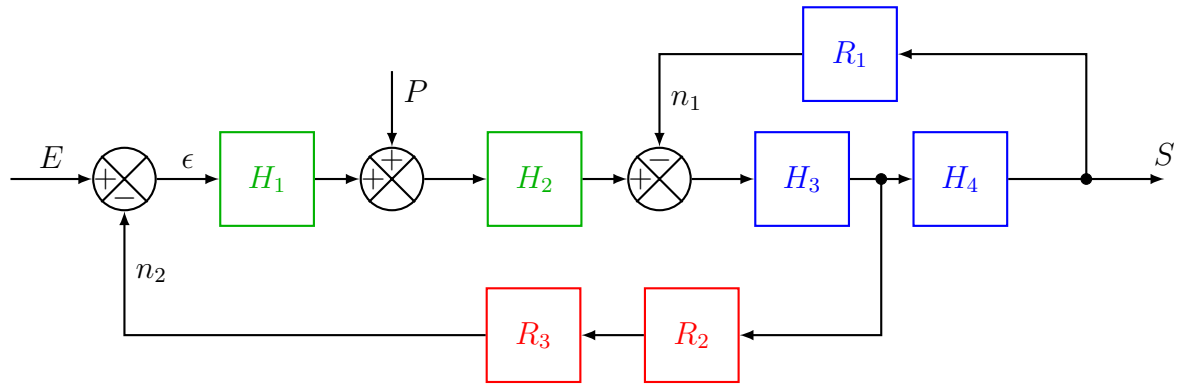
Étape 3

Enfin, il nous suffit de réduire la boucle de contre-réaction B_2 par la formule de Black :



5.2. Exemple à entrées multiples

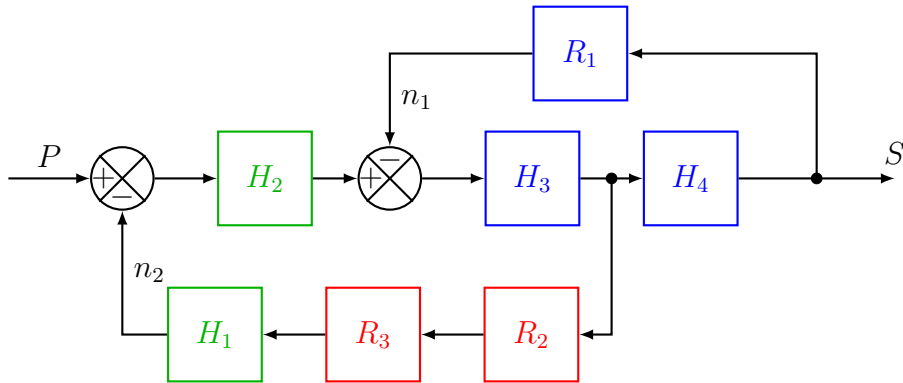
On considère le schéma fonctionnel suivant qui est exactement celui traité précédemment mais en ayant incorporer une nouvelle entrée P .



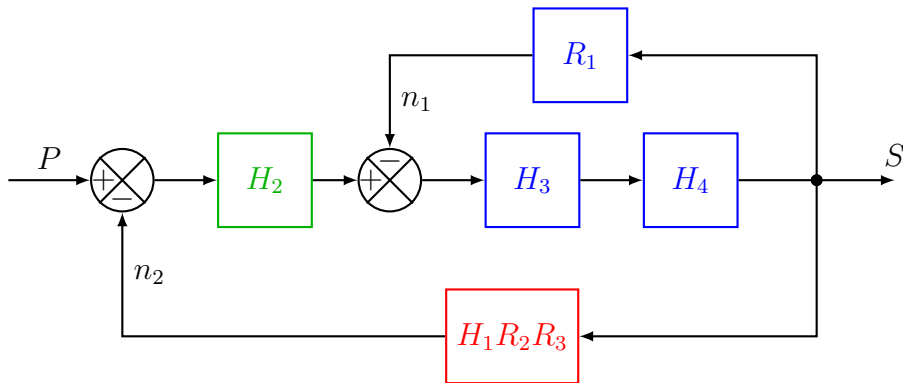
La première étape consiste à déterminer la fonction de transfert globale entre la sortie S et E pour $P \equiv 0$. Celle-ci correspond à la fonction de transfert déterminée précédemment, soit :

$$S_{P=0} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} E$$

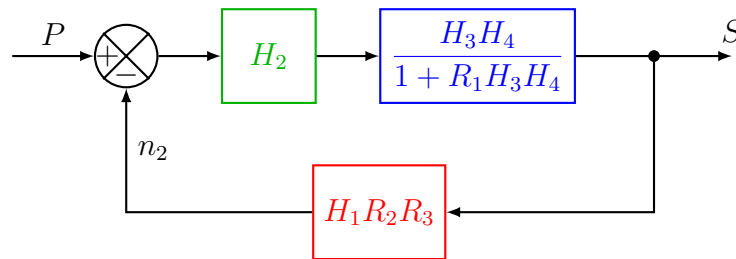
Le schéma fonctionnel réduit pour $E \equiv 0$ est maintenant :



Déplaçons le point de jonction situé entre les blocs H_3 et H_4 vers la droite et réduisons les blocs en série :



La réduction de la boucle de contre réaction interne nous donne :



La réduction de cette dernière boucle de contre réaction nous donne alors la fonction de transfert globale pour $E \equiv 0$. En utilisant le principe de superposition, on montre alors que la fonction de transfert globale pour les deux entrées est :

$$S = S_{P \equiv 0} + S_{E \equiv 0}$$

$$S = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} E + \frac{H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} P$$

6. Graphe de fluence

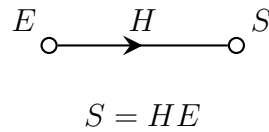
Nous discutons ici d'une approche sensiblement différente pour la représentation graphique des relations mathématiques intervenants dans les **SLCI**. Cette partie est largement inspirée de [15]. Elle peut être omise au cours d'une première lecture. L'algèbre de ces graphes de fluence est cependant très efficace et trouve de nombreuses applications en dehors de l'automatique.

6.1. Définitions

Branche et noeud

Dans l'application qui nous intéresse, un graphe de fluence peut être vu comme un schéma fonctionnel allégé. En effet, le graphe de fluence ne comporte que deux éléments de base : le **noeud** et la **branche orientée**. Les noeuds portent les variables du système (entrée, sortie, perturbation, commande...). Une branche reliant deux noeuds peut être ornée du facteur multiplicatif ou de la fonction de transfert.

L'équation (2.1) reliant une entrée et sortie par l'intermédiaire d'une fonction de transfert se représente par le graphe de fluence suivant :



Source, puits et parcours

Nous allons considérer le graphe de fluence suivant, pour illustrer différentes définitions :

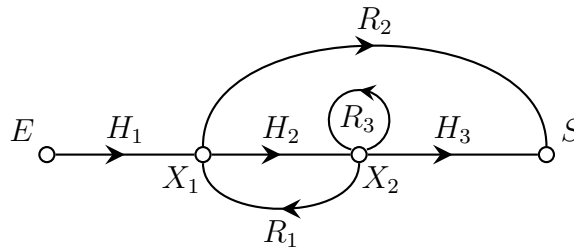


Figure 2.1. – Graphe de fluence présentant les différents éléments de bases, types de noeuds et de branches.

- Une **source** ou noeud d'entrée est un noeud dont toutes les branches sont divergentes. Exemple : le noeud E est une source.

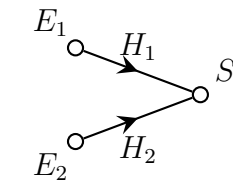
- Un **puits** ou noeud de sortie est un noeud dont toutes les branches sont convergentes. Exemple : le noeud S est un puits.
- Un **parcours** est une succession continue, unidirectionnelle de branches. Exemples : $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$, $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$, $\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$, $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$
- Un **parcours ouvert** est un parcours le long duquel chaque noeud n'est franchi qu'une fois. Exemples : $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$, $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$
- Un **parcours fermé** ou **boucle** est un parcours qui aboutit au noeud dont il est parti, chaque autre noeud n'étant franchi qu'une seule fois. Exemples : $\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1\}$, $\{X_2 \rightarrow X_2\}$ (cette dernière est appelée boucle élémentaire)

6.2. Algèbre des graphes de fluences

Nous présentons ici 7 opérations de bases liées à l'algèbre des graphes de fluence.

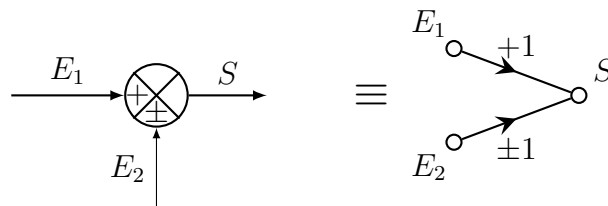
1. Addition en un noeud

La valeur d'un noeud est égale à la somme de tous les signaux convergeant vers ce noeud.



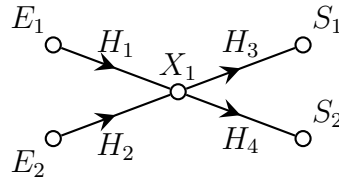
$$S = H_1 E_1 + H_2 E_2$$

Le comparateur/sommeur présentait précédemment est équivalent au graphe de fluence suivant :



2. Distribution par un noeud

La valeur d'un noeud est transmise par chaque branche quittant ce noeud.



Ce graphe représente les équations suivantes :

$$\begin{aligned} X_1 &= H_1 E_1 + H_2 E_2 \\ S_1 &= H_3 X_1 = H_1 H_3 E_1 + H_2 H_3 E_2 \\ S_2 &= H_4 X_1 = H_1 H_4 E_1 + H_2 H_4 E_2 \end{aligned}$$

3. Branches en série

Un suite de branches en série peut être réduite à une unique branche, dont la fonction de transfert est égale au produit des fonctions de transfert des diverses branches.

$$E \circ \xrightarrow{H_1} X \xrightarrow{H_2} S \quad \equiv \quad E \circ \xrightarrow{H_1 H_2} S$$

4. Branche en parallèle

Deux ou plusieurs branches connectées en parallèle, reliant le même noeud d'origine au même noeud extrémité, peuvent être réduites par une branche unique, dont la fonction de transfert est égale à la somme des fonctions de transfert des diverses branches.

$$E \circ \begin{array}{c} \xrightarrow{H_1} \\ \xrightarrow{H_2} \end{array} S \quad \equiv \quad E \circ \xrightarrow{H_1 + H_2} S$$

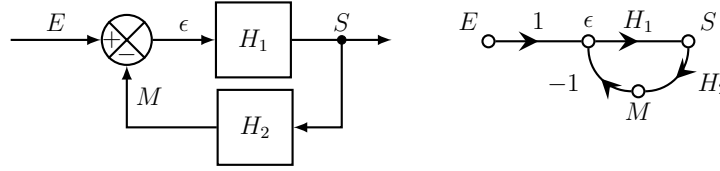
5. Absorption d'un noeud

Un noeud qui n'est ni une source ni un puits peut être supprimé de la manière suivante :

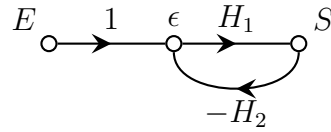
$$\begin{array}{c} E_1 \circ \xrightarrow{H_1} \\ E_2 \circ \xrightarrow{H_2} \end{array} X \xrightarrow{K} S \quad \equiv \quad \begin{array}{c} E_1 \circ \xrightarrow{KH_1} \\ E_2 \circ \xrightarrow{KH_2} \end{array} S$$

6. Boucles de contre-réaction

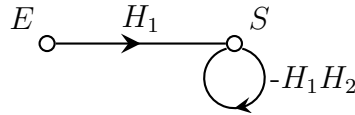
Considérons la boucle de contre-réaction définie par le schéma fonctionnel et le graphe de fluence équivalent :



La variable M du graphe de fluence peut être réduite, ce qui donne :



Il est possible d'éliminer le noeud porté par la variable ϵ :



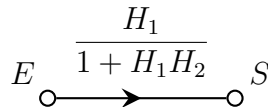
Ce dernier graphe exprime la relation suivante :

$$S = H_1 E - H_1 H_2 S$$

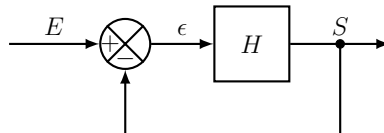
d'où l'expression déjà établie :

$$S = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} E,$$

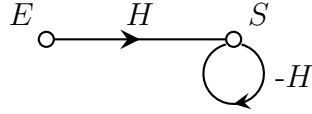
qui se représente simplement par le graphe de fluence :



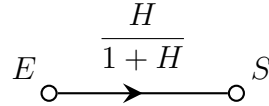
Comme nous l'avons déjà discuté, dans le cas d'une boucle de contre-réaction unitaire, la branche de retour est égale à 1



De la même manière que précédemment, le graphe de fluence se limite à deux noeud et deux branches (dont une boucle élémentaire).



La fonction de transfert est simplement représentée par le graphe suivant⁴



7. Le gain d'un parcours

Le gain d'un parcours est le produit des toutes les fonctions de transfert des branches parcourues.

6.3. Règle de Mason

Ces opérations de bases vont nous permettre d'introduire la règle de Mason⁵. Cette règle permet de réduire le graphe de fluence et déterminer la fonction de transfert entre l'entrée et la sortie d'un graphe de fluence.

La fonction de transfert globale H entre la source E et le puits S d'un graphe de fluence est égale à

$$H = \frac{S}{E} = \frac{1}{\Delta} \sum_k G_k \Delta_k \quad (2.10)$$

où

⁴Remarquons que le graphe précédent exprime la relation $S = H(E - S)$ qui nous donne bien la fonction de transfert $\frac{H}{1+H}$. Cependant, cette expression exprime une grandeur que l'on cherche en fonction d'elle même. En remplaçant, S par sa définition $H(E - S)$, on obtient

$$S = HE - H(H(E - S)) = HE - H^2E + H^2S = H(1 - H)E + H^2S.$$

En procédant de même avec cette nouvelle expression, on obtient une relation de récurrence.

$$S = EH \sum_k^n (-1)^k H^k + (-1)^{(n+1)} H^{n+1} S$$

Pour $n \rightarrow \infty$, on reconnaît la série géométrique $\sum_k^n (-1)^k H^k = \frac{1}{1+H}$ et $H^{n+1} \rightarrow 0$ pour $|H| < 1$. La sortie S tend donc bien vers la fonction de transfert attendue, seulement si $|H| < 1$. Cette dernière condition pourra être interprétée comme une limite de stabilité du gain de la fonction de transfert dans le cas d'un système dans une boucle de contre réaction.

⁵Samuel Jefferson Mason (1921-1974), électronicien américain.

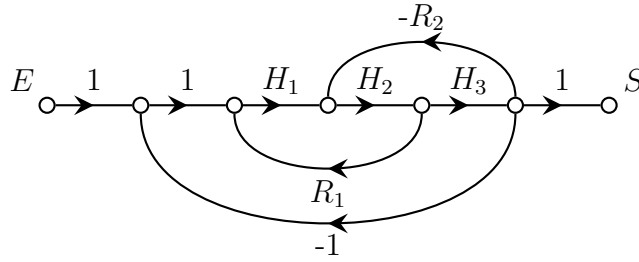
- k dénombre les parcours ouverts entre E et S ,
- G_k est le gain du k -ème parcours ouverts
- Δ est le **déterminant du graphe**, donné par :

$$\Delta = 1 - \sum_i B_i - \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k \dots \quad (2.11)$$

où les B_i sont les gains des boucles du graphe de fluence, d'abord pris séparément ($\sum_i B_i$) puis deux à deux ($\sum_{i,j} B_i B_j$), puis par trois ($\sum_{i,j,k} B_i B_j B_k$) et ainsi de suite. On ne prend en compte que les produits de boucles disjoints, c'est à dire n'ayant aucun noeud en commun.

- Δ_i est le déterminant du graphe obtenu en supprimant le parcours ouvert de gain G_i .

Exemple 1



Ce graphe de fluence possède trois boucles de gain :

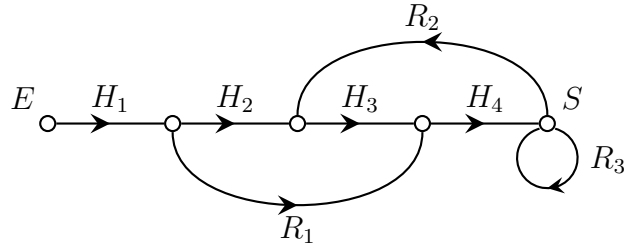
- $-H_1 H_2 H_3$
- $R_1 H_1 H_2$
- $-R_2 H_2 H_3$

et un parcours ouvert $H_1 H_2 H_3$ de déterminant $\Delta_k = 1$. Les boucles étant toutes disjointes, le déterminant du graphe est donc simplement donné par :

$$\Delta = 1 - R_1 H_1 H_2 + H_1 H_2 H_3 + R_2 H_2 H_3$$

La fonction de transfert de ce graphe de fluence est donc :

$$H = \frac{H_1 H_2 H_3}{1 - R_1 H_1 H_2 + H_1 H_2 H_3 + R_2 H_2 H_3}$$

Exemple 2

Ce graphe de fluence présente 2 boucles non disjointes de gain R_3 et $R_2H_3H_4$ et 2 parcours ouverts de gain $H_1H_2H_3H_4$ et $R_1H_1H_4$. Le déterminant du graphe est donc donné par

$$\Delta = 1 - R_3 - R_2H_3H_4$$

La fonction de transfert associé à ce graphe de fluence est donc :

$$H = \frac{H_1H_2H_3H_4 + R_1H_1H_4}{1 - R_3 - R_2H_3H_4}$$

Annexes

A. Alphabet Grec

Nom	Minuscule	Majuscule	Correspondance latine	Usages courants
alpha	α	A	a	angles
bêta	β	B	b	angles
gamma	γ	Γ	g	angles
delta	δ	Δ	d	variations
epsilon	ϵ, ε	E	e	petite quantité
zéta	ζ	Z	z	-
êta	η	H	é (long)	rendement
thêta	θ, ϑ	Θ	th	angles
iota	ι	I	i	-
kappa	κ, \varkappa	K	k	-
lambda	λ	Λ	l	longueur, densité linéique
mu	μ	M	m	masse réduite
nu	ν	N	n	fréquence
ksi	ξ	Ξ	ks	coefficient sans dimension
omicron	o	O	o	-
pi	π, ϖ	Π	p	Π : plan
rhô	ρ, ϱ	P	r	densité volumique
sigma	σ, ς	Σ	s	σ : densité surfacique, Σ : Système
tau	τ	T	t	temps, durée relative
upsilon	υ	Y	u	-
phi	ϕ, φ	Φ	f, ph	angles
khi	χ	X	kh	coefficients
psi	ψ	Ψ	ps	fonction d'onde
oméga	ω	Ω	ô	vitesse angulaire, angle solide

Tableau A.1. – Lettres de l'alphabet Grec et leurs usages courants en physique (non exhaustifs)

Références

- [1] Régulation automatique (analogique) (REG). <http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/>.
- [2] <http://www.demosciences.fr/projets/scilab-xcos/-utilisation/premiers-pas>.
- [3] Xcos pour les vrais debutants. <https://scilab.developpez.com/tutoriels/debuter/apprendre-xcos-debutant/>.
- [4] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes lineaires (pc7bis), 2005.
- [5] B. Bayle and J. Gangloff. Systèmes et asservissements à temps continu, 2009.
- [6] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier, and R. Nikoukhah. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. Springer, 2006.
- [7] H. Garnier. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/hugues.garnier/?q=content/teaching>.
- [8] Y. Granjon. *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, événements discrets*. Dunod, Paris, 2015.
- [9] E. Laroche and H. Halalchi. Asservissement des systèmes lineaires à temps continu. <http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>.
- [10] O. Le Gallo. *Automatique des systèmes mécaniques : Cours, travaux pratiques et exercices corrigés*. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009.
- [11] Joe Mabel. Régulateur à boules au Georgetown PowerPlant Museum à Seattle. CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5694146>.
- [12] B. Marx. Outils Mathématiques pour l'ingénieur - Traitement du Signal. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html>.
- [13] B. Marx. Contrôle des systèmes linéaires. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/-benoit.marx/enseignement.html>.
- [14] F. Orioux. *Automatique : Systèmes linéaires et asservissements*. Notes de Cours, Master 2 Outils et systèmes de l'astronomie et de l'Espace, 20017-1018.

- [15] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses Marketing, 2004.
- [16] R. Papanicola. Schéma-blocs avec PGF/TIKZ. <https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/schema-bloc.pdf>.
- [17] R. Papanicola. *Sciences industrielles PCSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2003.
- [18] R. Papanicola. *Sciences industrielles PSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2010.
- [19] Marsyas-Travail personnel. Clepsydre athénienne reconstituée, Musée de l'Agora antique d'Athènes. CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=476174>.
- [20] Consortium Scilab. Introduction to Scilab. www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf.
- [21] S. Steer and Y. Degré. *Scilab : De la théorie à la pratique - II. Modéliser et simuler avec Xcos*. Éditions D-BookeR, 2014.
- [22] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. *Automatique des systèmes continus*. Editions Technip.
- [23] E. Thomas. TP Scilab. http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP_INFO/TP_info_12_ordre/co/module_TP_1_2_ordre_5.html.

Index

Black, Harold, 56

Mason, Samuel, 68

Glossaire

SLCI Système Linéaire Continu et Invariant

Liste des Symboles

t	Variable temporelle
p	Indéterminée de polynôme
$s(t)$	Fonction/Signal dans le domaine temporel
$S(p)$	Fonction/Signal dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$
$u(t)$	Fonction échelon unité ou de Heaviside
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
$r(t)$	Fonction rampe unité
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformation de Laplace de la fonction $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	Transformation de Laplace inverse de la fonction $F(p)$
$H(p)$	Fonction de transfert
$N(p)$	Polynôme du numérateur d'une fraction rationnelle
$D(p)$	Polynôme du dénominateur d'une fraction rationnelle
ω	Pulsation
$H(j\omega)$	Nombre complexe associé à la fonction de transfert $H(p)$
E_0	Paramètre dimensionnelle d'amplitude de l'entrée
K	Gain statique
ω_0	Pulsation propre

$\text{Im}[H(j\omega)]$	Partie imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
$\text{Re}[H(j\omega)]$	Partie réelle du nombre complexe $H(j\omega)$
ξ	Coefficient d'amortissement
$G(\omega)$	Gain naturel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$G_{dB}(\omega)$	Gain en dB de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$\phi(\omega)$	Déphasage de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
D_k	k-ème dépassement
$t_{5\%}$	Temps de réponse à 5%

