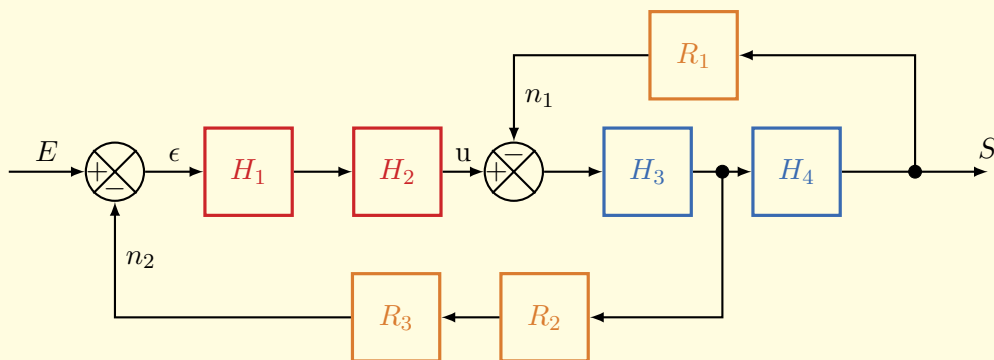


# Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé*

*Automatique Linéaire*



ANNÉE 2019–2020



# Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé*  
*Automatique Linéaire*

Filipe Manuel Vasconcelos

écrit sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, TikZ  
version de janvier 2020.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence  
Creative Commons “Attribution - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : [filipe.vasconcelos@esme.fr](mailto:filipe.vasconcelos@esme.fr)

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>9</b>
<b>Chapitre 1 Systèmes linéaires, continus...</b>	<b>11</b>
1. Introduction	12
2. Définition SLCI	13
2.1. Système	13
2.2. Système à temps continu	14
2.3. Système linéaire	14
2.4. Système causal	14
2.5. Système invariant	15
2.6. Système stable	15
2.7. Modélisation d'un système linéaire continu et invariant	15
3. Modélisation d'un signal	17
3.1. Propriétés générales des signaux continus (analogiques)	18
3.2. Signaux usuels rencontrés...	20
4. La transformée de Laplace	26
4.1. Définition	26
4.2. Propriétés	26
4.3. Transformées des signaux usuels	30
4.4. Application de la transformée de Laplace	32
5. Fonction de Transfert	37
5.1. Définition	37
5.2. Fonction de transfert et réponse impulsionnelle	37
5.3. Représentation de la fonction de transfert	37
<b>Chapitre 2 Schéma fonctionnels</b>	<b>43</b>
1. Introduction	44
2. Éléments de base des schémas fonctionnels	44
3. Transformation des schémas fonctionnels	46
3.1. Réduction de schéma-bloc	46
3.2. Manipulation de schéma-bloc	49
4. Cas d'entrées multiples	50
5. Réduction de schéma-bloc de grande taille	51
5.1. Exemple à entrée simple	52
5.2. Exemple à entrées multiples	54
6. Graphe de fluence	56
6.1. Définitions	56

6.2.	Algèbre des graphes de fluences . . . . .	57
6.3.	Règle de Mason . . . . .	60
<b>Chapitre 3</b>	<b>Modélisation des SLCI</b>	<b>63</b>
1.	Introduction . . . . .	64
2.	Système du premier ordre . . . . .	65
2.1.	Définition d'un système du premier ordre . . . . .	65
2.2.	Fonction de transfert d'un système du premier ordre . . . . .	65
2.3.	Pôle de la fonction de transfert du premier ordre . . . . .	65
2.4.	Réponses temporelles d'un système du premier ordre . . . . .	65
3.	Système du second ordre . . . . .	70
3.1.	Définition d'un système du second ordre . . . . .	70
3.2.	Fonction de transfert d'un système du second ordre . . . . .	70
3.3.	Pôles de la fonction de transfert du second ordre . . . . .	70
3.4.	Réponses temporelles d'un système du second ordre . . . . .	72
3.5.	Cas particulier de l'oscillateur harmonique . . . . .	87
4.	Autres modèles particuliers . . . . .	88
4.1.	Gain pur . . . . .	88
4.2.	Intégrateur pur . . . . .	88
4.3.	Dérivateur pur . . . . .	89
4.4.	Retard pur . . . . .	89
5.	Généralisation des modèles de SLCI . . . . .	90
5.1.	Systèmes d'ordre supérieur à 2 . . . . .	90
5.2.	Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3 . . . . .	91
6.	Identification d'un modèle de comportement . . . . .	92
6.1.	Formule de Bureau . . . . .	92
6.2.	Modèle de Strejc . . . . .	92
<b>Chapitre 4</b>	<b>Analyse fréquentielle</b>	<b>93</b>
1.	Réponse harmonique . . . . .	94
1.1.	Exemple de réponse harmonique dans le domaine temporel . . . . .	96
2.	Représentation graphique de la réponse harmonique . . . . .	97
2.1.	Diagramme de Bode . . . . .	98
2.2.	Diagramme de Nyquist . . . . .	99
2.3.	Diagramme de Black-Nichols . . . . .	99
3.	Analyse fréquentielle des modèles usuels . . . . .	100
3.1.	Diagrammes de Bode : méthodologie générale . . . . .	100
3.2.	Diagrammes de Nyquist : méthodologie générale . . . . .	118
3.3.	Diagrammes de Black : méthodologie générale . . . . .	127
4.	Etude du transitoire de la réponse harmonique . . . . .	127
4.1.	Exemple d'un système du premier ordre . . . . .	127
4.2.	Exemple d'un système du second ordre . . . . .	128
<b>Chapitre 5</b>	<b>Asservissements des systèmes linéaires</b>	<b>129</b>
1.	Introduction . . . . .	130

2.	Organisation d'un asservissement . . . . .	132
2.1.	Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis . . . . .	132
2.2.	Présence d'une perturbation : la régulation . . . . .	133
2.3.	Schéma fonctionnel complet . . . . .	133
2.4.	Fonctions de transferts associées à un système asservi . . . . .	136
3.	Asservissement des SLCI modèles . . . . .	137
3.1.	Asservissement d'un intégrateur . . . . .	137
3.2.	Asservissement d'un système du premier ordre . . . . .	138
3.3.	Asservissement d'un système du second ordre . . . . .	138
<b>Chapitre 6</b>	<b>Performances des systèmes asservis</b>	<b>141</b>
1.	Introduction . . . . .	142
2.	Précision . . . . .	142
2.1.	Précision en boucle ouverte . . . . .	142
2.2.	Précision en boucle fermée . . . . .	143
2.3.	Effet d'une perturbation . . . . .	146
3.	Rapidité . . . . .	150
3.1.	Réponse temporelle . . . . .	150
3.2.	Réponse harmonique . . . . .	156
3.3.	Influence des pôles dominants . . . . .	156
<b>Chapitre 7</b>	<b>Stabilité des systèmes asservis</b>	<b>159</b>
1.	Contexte et critère de stabilité fondamentale . . . . .	160
2.	Critère algébrique de Routh . . . . .	162
2.1.	Tableau de Routh . . . . .	163
2.2.	Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz . . . . .	165
3.	Critère graphique du revers . . . . .	167
3.1.	Critère du revers dans le plan de Nyquist . . . . .	170
3.2.	Critère du revers dans le plan de Black . . . . .	171
3.3.	Critère du revers dans le plan de Bode . . . . .	172
4.	Marge de stabilité . . . . .	173
4.1.	Marge de gain . . . . .	173
4.2.	Marge de phase . . . . .	173
5.	Critère de Nyquist . . . . .	173
<b>Chapitre 8</b>	<b>Correction des systèmes asservis</b>	<b>179</b>
1.	Nécessité de la correction . . . . .	180
2.	Correcteur P, I et D . . . . .	180
3.	Correcteur PI et PD . . . . .	180
4.	Correcteur PID . . . . .	180
<b>Chapitre 9</b>	<b>Initiation à la représentation d'état</b>	<b>181</b>
<b>Annexes</b>		<b>185</b>
<b>Annexe A</b>	<b>Alphabet Grec</b>	<b>185</b>
<b>Annexe B</b>	<b>Unités du Système International</b>	<b>187</b>
<b>Annexe C</b>	<b>Pierre-Simon de Laplace</b>	<b>189</b>

<b>Annexe D</b>	<b>Transformation de Laplace</b>	<b>191</b>
1.	Définitions . . . . .	191
2.	Propriétés . . . . .	191
3.	Table des transformées de Laplace . . . . .	193
<b>Annexe E</b>	<b>Rappel sur les nombres complexes</b>	<b>195</b>
<b>Annexe F</b>	<b>Équations différentielles à coefficients constants</b>	<b>201</b>
1.	Résolution équation différentielle du premier ordre . . . . .	201
1.1.	Sans second membre . . . . .	201
<b>Annexe G</b>	<b>Décomposition en éléments simples</b>	<b>205</b>
1.	Contexte . . . . .	205
2.	Fractions rationnelles rencontrées en automatique . . . . .	205
3.	Décomposition en éléments simples . . . . .	206
4.	Détermination des coefficients de la DES . . . . .	207
4.1.	Par identification . . . . .	207
<b>Annexe H</b>	<b>Systèmes du second ordre</b>	<b>209</b>
1.	Abaques de la réponse temporelle . . . . .	210
2.	Analyse fréquentielle . . . . .	212
<b>Annexe I</b>	<b>Échelle logarithmique et le décibel</b>	<b>215</b>
1.	Rappel sur le logarithme décimal . . . . .	215
2.	Échelle logarithmique décimale . . . . .	215
3.	Le décibel . . . . .	217
4.	Diagramme de Bode . . . . .	217
5.	Tracé d'un diagramme de Bode avec Scilab . . . . .	220
<b>Annexe J</b>	<b>Transformée de Laplace inverse</b>	<b>221</b>
1.	Contexte . . . . .	221
2.	Méthode de Gaver-Stehfest . . . . .	221
3.	Méthode de Talbot fixe . . . . .	221
	<b>Références</b>	<b>223</b>
	<b>Index</b>	<b>225</b>
	<b>Acronymes</b>	<b>227</b>
	<b>Glossaire</b>	<b>229</b>
	<b>Liste des Symboles</b>	<b>231</b>



# Avant-propos

## Programme

Ce cours est une introduction à l'**automatique** pour des étudiants de deuxième année de classe préparatoire scientifique.

L'objectif principal de l'automatique est de permettre le contrôle des **systèmes dynamiques** de toutes natures que ce soient : mécanique, chimique, électronique, optique, thermique, acoustique. . . . Tout en respectant certaines contraintes de performances (rapidité, précision, stabilité. . . ).

Nous limiterons notre étude aux **systèmes linéaires continus et invariants**. La **modélisation** de ces systèmes passe par la mise en équation du comportement physique des systèmes sous forme d'équations différentielles. Cette étape ne fait pas à proprement parler partie d'un cours d'automatique, en effet chacune des disciplines construisent cette modélisation en se basant sur les principes et les hypothèses les plus adaptés à un problème donné. La modélisation permet une étude systématique des équations différentielles en proposant des modèles généraux et ce quelque soit la nature du procédé.

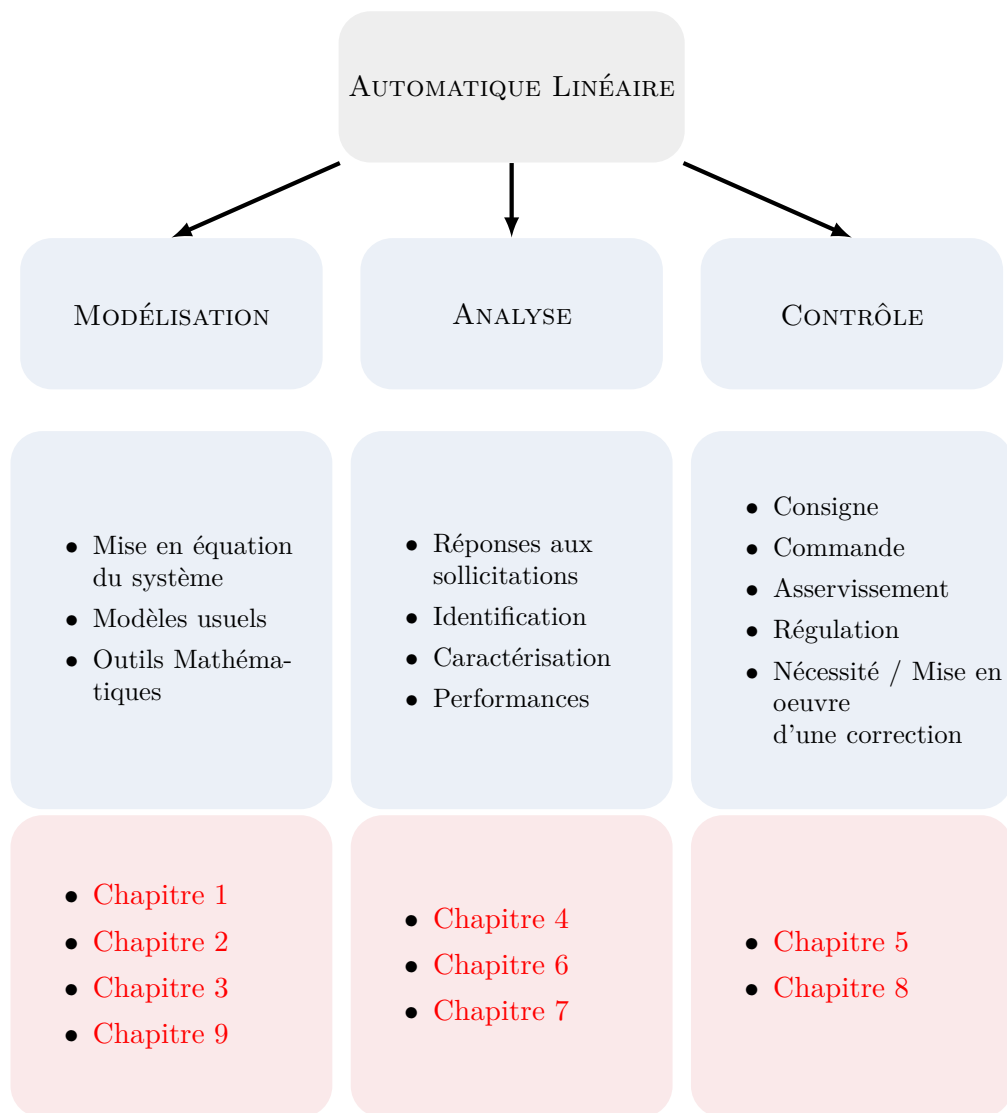
L'**analyse** nous permettra de caractériser et d'identifier ces modèles à partir des réponses aux sollicitations et de leurs performances.

Le **contrôle** est un concept très générale permettant de regrouper toutes les méthodes et techniques permettant de commander un système dynamique. Dans ce cours nous présenterons que les principes d'asservissement et de régulation. Nous verrons comment il est possible d'élaborer une commande adaptée (corrigée) pour un procédé quelconque, notamment lorsque ceux-ci présenteront des défauts de performance.

## Organisation du document

Les chapitres suivent un découpage classique autour des trois piliers discutés précédemment que sont la **modélisation**, l'**analyse** et le **contrôle**. (c.f **Figure A**).

Le lecteur pourra s'appuyer sur un grand nombre d'annexes qui ont pour objectifs de rappeler et de détailler des notions prérequis ou encore approfondir quelques aspects hors programme pour une deuxième lecture.



**Figure A.** – Organisation du document.

# 1. Systèmes linéaires, continus et invariants

## Sommaire

---

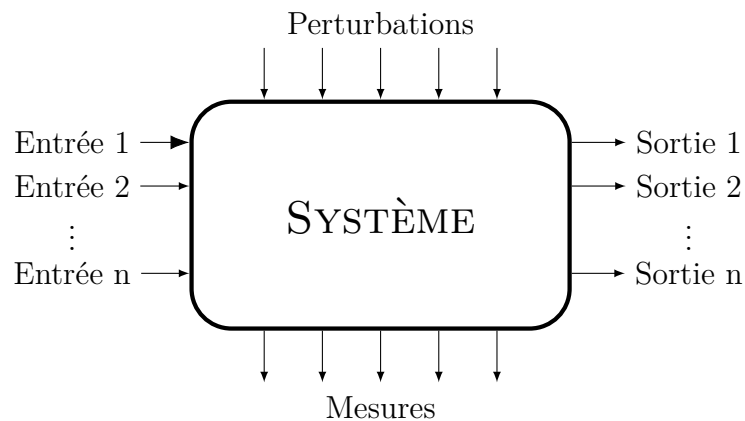
<b>1.</b>	<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>2.</b>	<b>Définition SLCI</b>	<b>13</b>
2.1.	Système	13
2.2.	Système à temps continu	14
2.3.	Système linéaire	14
2.4.	Système causal	14
2.5.	Système invariant	15
2.6.	Système stable	15
2.7.	Modélisation d'un système linéaire continu et invariant	15
<b>3.</b>	<b>Modélisation d'un signal</b>	<b>17</b>
3.1.	Propriétés générales des signaux continus (analogiques)	18
3.2.	Signaux usuels rencontrés...	20
<b>4.</b>	<b>La transformée de Laplace</b>	<b>26</b>
4.1.	Définition	26
4.2.	Propriétés	26
4.3.	Transformées des signaux usuels	30
4.4.	Application de la transformée de Laplace	32
<b>5.</b>	<b>Fonction de Transfert</b>	<b>37</b>
5.1.	Définition	37
5.2.	Fonction de transfert et réponse impulsionnelle	37
5.3.	Représentation de la fonction de transfert	37

---

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les outils mathématiques et notions fondamentales pour la **modélisation** de l'automatique.

Dans un premier temps, nous donnerons une définition de chacun des termes qui compose la notion centrale de **système linéaire continu et invariant (SLCI)** ainsi que quelques exemples classiques de système électronique ou mécanique. Nous aborderons les différents signaux usuels rencontrés en automatique<sup>1</sup>. Ce chapitre nous permettra d'introduire la transformée de Laplace qui est l'outil mathématique indispensable de l'automaticien. Celle-ci nous conduira naturellement à la définition de la **fonction de transfert** qui caractérisera de façon univoque les systèmes dynamiques linéaires.



**Figure 1.1.** – Représentation d'un système en interaction avec son environnement. Par définition, un système aura une ou plusieurs entrée/sortie bien définis de flux de **matière-énergie-information (MEI)**. Dans le cas général, des perturbations de l'environnement et des mesures de son état pourront être considérés.

---

<sup>1</sup>et en traitement du signal de façon générale.

## 2. Définition des systèmes linéaires continus et invariants

### 2.1. Système

La notion de **système** est centrale dans le monde de l'ingénierie. Il existe de nombreuses définitions selon le domaine d'application auquel il est associé. Dans le cadre de ce cours, nous nous reposerons sur la systématique<sup>2</sup> qui nous donne une définition à la fois **structurale** et **fonctionnelle** de la notion de système.

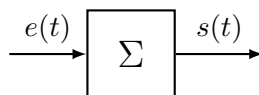
Au niveau structurel, **un système est un ensemble d'éléments constitutifs ayant des relations entre eux et une frontière avec son environnement.** Cette définition est parfaitement représentée par le schéma de la [figure 1.1](#).

Au niveau fonctionnel, **un système modifie des flux dynamiques (c.a.d dépendant du temps) de matière, d'énergie et d'informations provenant de son environnement.**

C'est essentiellement cette dernière qui nous sera la plus utile. Un système sera alors considéré comme une « boîte » traitant une ou plusieurs entrées et élaborant une ou plusieurs sorties (c.f [Figure 1.1](#)). On distinguera les systèmes à une entrée et une sortie, dit **monovariab**<sup>3</sup> des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties, dit **multivariable**<sup>4</sup>.

L'objectif de ce cours est de permettre la modélisation, l'identification et la caractérisation de ces systèmes. À noter que cet objectif atteint, il nous sera possible de représenter les systèmes comme des « boîtes noires » pour lesquelles la structure interne est inaccessible<sup>5</sup>. Une approche basée sur la représentation des états internes au système sera introduite au [chapitre 9](#).

Pour résumer, nous ne traiterons dans ce document que des systèmes monovariab



où  $e(t)$  et  $s(t)$  sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie dépendants du temps et  $\Sigma$  est le système traitant l'entrée  $e(t)$  et élaborant la sortie  $s(t)$  délimité par un bloc. Cette représentation, dite en **bloc** ou **schema-bloc**, sera généralisée au [chapitre 2](#).

<sup>2</sup>Avec la cybernétique, la systématique est un courant de pensée pluridisciplinaire apparue progressivement au milieu du xx<sup>e</sup> siècle, sous l'impulsion des travaux précurseurs de Claude Shannon, Warren McCulloch, Norbert Wiener ou encore Marvin Minsky.

<sup>3</sup>ou "Single Input Single Output" (SISO) en anglais

<sup>4</sup>ou "Multiple Input Multiple Output" (MIMO) en anglais

<sup>5</sup>« Ce qui - en dernière analyse - justifie l'attitude ludique, c'est que le seul moyen concevable de dévoiler une boîte noire, c'est de jouer avec. » (René Thom)

## 2.2. Système à temps continu

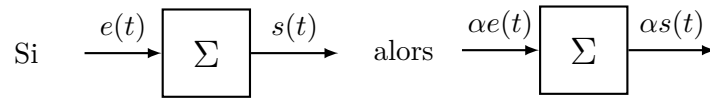
Un système à temps continu met en oeuvre des signaux à temps continus. Comme nous le verrons, ces signaux seront modélisés par des fonctions d'une variable continue  $t$  de temps.

## 2.3. Système linéaire

Un système est dit linéaire si il respecte les deux principes suivants :

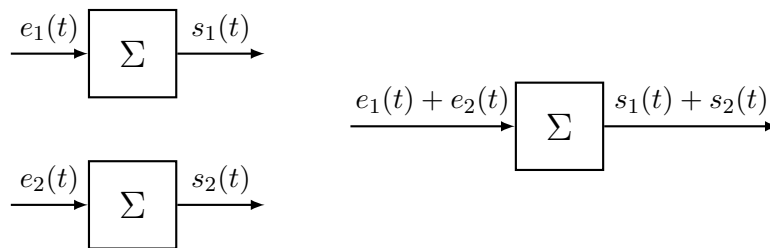
- *Principe de proportionnalité* : Si  $s(t)$  est la réponse à une entrée  $e(t)$ , alors pour une entrée  $\alpha e(t)$  la réponse est  $\alpha s(t)$ .

On exprime, schématiquement, ce principe de la façon suivante pour un système linéaire  $\Sigma$  :

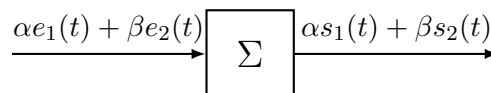


- *Principe de superposition* : Si l'entrée du système se décompose en une somme de plusieurs entrées alors la sortie du système sera la somme des sorties correspondant à chaque entrée séparée.

Une nouvelle fois, il est possible d'exprimer ce principe de la façon suivante pour un système linéaire  $\Sigma$  :



Notons que ceci reste vrai pour une combinaison linéaire des entrées :



avec  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , ou un nombre quelconques d'entrées.

## 2.4. Système causal

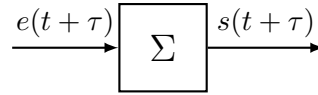
- *Principe de causalité* : C'est un principe fort de la physique : « L'effet ne précédant pas sa cause » alors « La réponse du système ne précède pas son excitation ». Formellement, un système est dit causal si

$$e(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0 \Rightarrow s(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0$$

### 2.5. Système invariant

Un système est dit invariant si la sortie ne dépend pas explicitement du temps autrement que par l'intermédiaire de l'entrée.

On représente, schématiquement, un système invariant  $\Sigma$ , à l'aide d'un schéma-bloc ci-dessous (avec  $\tau$  une temps quelconque.) :



### 2.6. Système stable

Il existe deux définitions équivalentes de la stabilité pour un système **SLCI**.

Un système est dit stable si à une entrée bornée le système produit une sortie bornée<sup>6</sup>

Un système est dit stable lorsque écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir

Nous présentons ici une définition encore peu pratique de la stabilité des **SLCIs**. Nous aurons l'occasion de préciser cette définition par des exemples plus concrets lorsque les outils de modélisation des systèmes et des signaux auront été introduits.

Le **chapitre 7** est d'ailleurs totalement dédié à l'étude de cette propriété fondamentale.

### 2.7. Modélisation d'un système linéaire continu et invariant

Un système dit linéaire continu et invariant ou **SLCI** peut être modélisé par une équation différentielle à coefficients constants possédant les propriétés précédentes qui s'écrit dans le cas générale :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad (1.1)$$

avec  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $s(t)$  le signal de sortie,  $e(t)$  le signal d'entrée et  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  sont des coefficients constants. Le degré de dérivation de la sortie  $n$  le plus grand est appelé **ordre**.

Ces équations différentielles proviennent directement de la modélisation de la physique d'un problème donnée (qu'il soit mécanique, électronique, optique ...).

Par exemple, dans le cas d'un problème de mécanique, c'est la relation fondamentale de la dynamique qui est la source importante d'équations différentielles (appelées équations du mouvement). En électronique, ce sont, par exemple, les lois des noeuds et mailles qui permettront d'écrire de telles équations.

Le degré de dérivation le plus grand de la sortie  $n$  est appelé ordre. On parlera alors de **l'ordre du système**  $n$ .

<sup>6</sup>Chez nos collègues anglo-saxons, on rencontre la notion de BIBO (« bounded input bounded output »)

Prenons l'exemple d'un système d'ordre  $n = 2$ , son équation différentielle sera généralement de la forme :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

### 2.7.1. Exemples de mise en équation

#### Décharge d'un condensateur

Considérons un condensateur de capacité électrique  $C$  initialement chargé en circuit ouvert. À la fermeture de l'interrupteur, en  $t = 0$ , un courant  $i(t)$  parcourt le circuit. On observe alors la décharge du condensateur à travers une résistance  $R$ .

On souhaite suivre la quantité de charge aux bornes du condensateur au cours du temps.

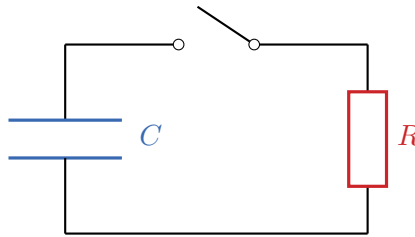


Figure 1.2. – Circuit RC ouvert.

La somme des tensions aux bornes du condensateur et de la résistance étant nulle, on a :

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0$$

Comme précédemment, on identifie formellement cette équation différentielle à la forme générale de l'équation (1.1) avec  $s(t) = q(t)$ ,  $e(t) = 0$ ,  $n = 1$ ,  $m = 0$ ,  $a_1 = R$ ,  $a_0 = \frac{1}{C}$ .

Nous laissons au lecteur la résolution de cette équation différentielle par une approche directe classique. Nous la rencontrerons à nouveau au chapitre 3, après avoir présenté la méthode générale pour la résolution de ce type d'équation.

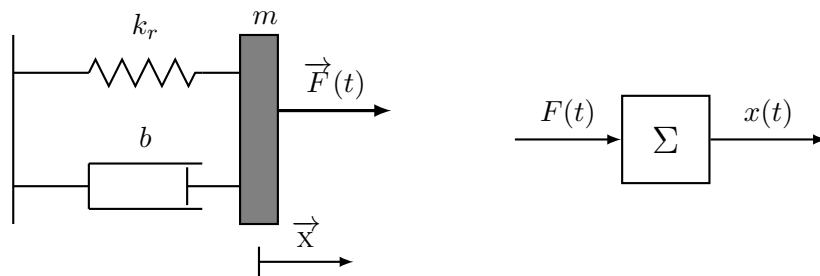
#### Système masse-ressort

On considère un système mécanique constitué d'une masse  $m$  en translation couplée avec un ressort de constante de raideur  $k$  et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $b$  (c.a.d que la force est proportionnelle à la vitesse). La masse est soumise à une force  $\vec{F} = F(t) \vec{x}$ .

En appliquant le principe fondamentale de la dynamique en projection sur la direction  $x$ , on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$





**Figure 1.3.** – (gauche) Système masse-ressort. (droite) Schéma-bloc de ce même système.

La résolution de cette équation du mouvement permet de connaître la position de la masse à chaque instant connaissant la force extérieure appliquée  $F(t)$ . Le système masse-ressort peut être assimilé à un **SLCI** dont l'entrée  $e(t)$  est la force  $F(t)$  et la sortie  $s(t)$  est la position  $x(t)$  de la masse (c.f le schéma-bloc de la **figure 1.3**)

Formellement, on identifie cette équation différentielle à la forme générale de l'équation (1.1) pour  $s(t) = x(t)$ ,  $e(t) = F(t)$ ,  $n=2$ ,  $m=0$ ,  $a_2 = m$ ,  $a_1 = b$ ,  $a_0 = k_r$  et  $b_0 = 1$ .

### 3. Modélisation d'un signal

**Un signal est une variation d'une grandeur qui porte l'information de la sollicitation ou de la réponse d'un système.**

Les signaux continus sont modélisés mathématiquement par des fonctions continues du temps. Formellement, par une fonction  $s$  telle que :

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow s(t) \end{aligned}$$

Il existe cependant d'autres type de signaux qui sont très souvent confondus à tort :

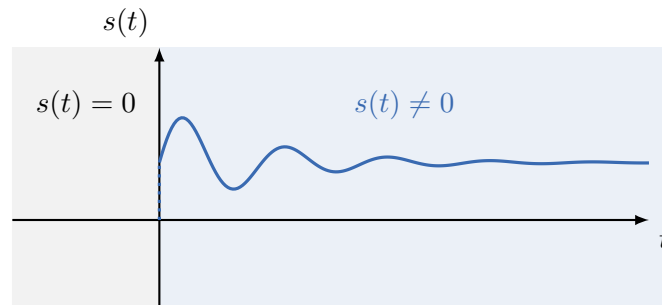
- un signal *quantifié* est un signal continu dont la valeur ne peut prendre que des valeurs discrètes.
- un signal *discret* est un signal à temps discret.
- un signal *numérique* est un signal discret et quantifié.

**Dans le reste de ce document, nous ne traiterons que du cas de signaux en temps continu.** Les signaux en temps discret sont généralement abordées lors d'un cours avancé d'automatique en cycle ingénieur.

### 3.1. Propriétés générales des signaux continus (analogiques)

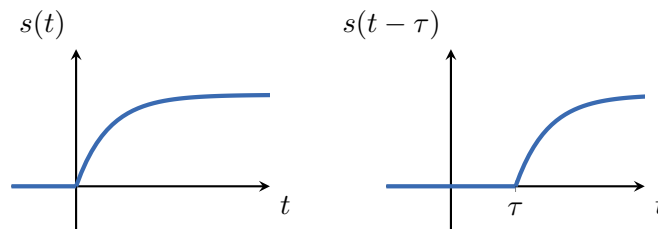
#### Causal

Un signal modélisé par la fonction  $s(t)$  est dit **causal** si ce signal est nul pour tout  $t < 0$ . Pour un signal en entrée, le temps  $t = 0$  permet de définir une origine des temps.



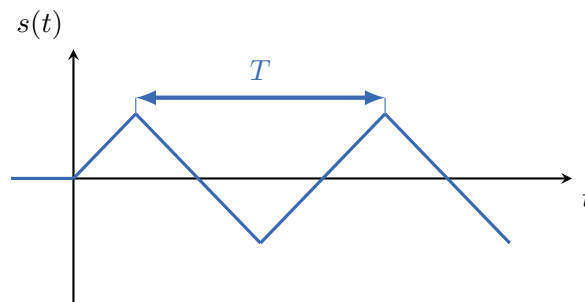
#### Retardé

Un signal  $s(t - \tau)$  est dit **retardé** d'un temps  $\tau$  par rapport à  $s(t)$ , si on lui a fait subir un changement d'origine des temps par rapport au signal  $s(t)$ .



#### Périodique

Un signal est dit **périodique** s'il se reproduit identique à lui même au bout d'un même intervalle de temps ou période  $T$ . On définit alors sa fréquence  $f$  qui est l'inverse de la période  $f = 1/T$  ou la pulsation  $\omega$  définit par rapport au cercle unité  $\omega = 2\pi f$ .



Le signal complet peut être totalement décrit en considérant un motif de base  $s_0(t)$  telle que

$$s_0(t) = \begin{cases} s(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{pour } t > T \end{cases}$$

Le signal  $s(t)$  est alors la somme (série) du motif retardé de  $nT$  avec  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

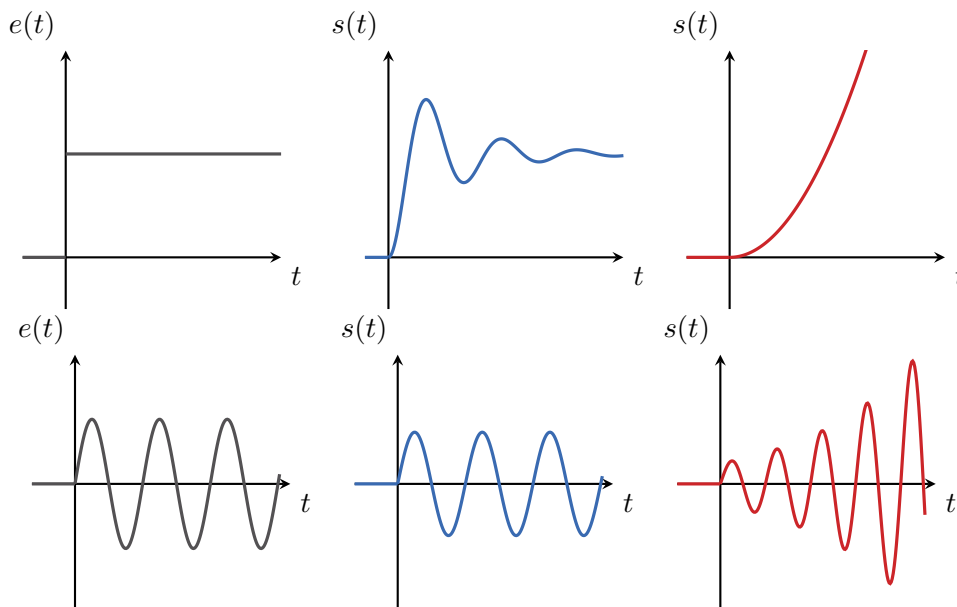
$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_0(t - nT)$$

L'analyse de Fourier est un outil fondamental pour l'étude de ces signaux périodiques. Elle sort cependant légèrement du cadre de ce cours.

#### Stable

En se basant sur la définition donnée d'un système stable. Nous ne limiterons à dire qu'un signal stable est un signal borné. Il va sans dire que les signaux usuels en entrée de nos systèmes sont bornés et donc stables.

La [figure 1.4](#) présente un exemple qualitatif de réponses stables et instables pour deux sollicitations bornées (respectivement une sollicitation constante et une sollicitation oscillante).



**Figure 1.4.** – Trois exemples de réponses d'un SLCI à des sollicitations bornées : (en bleu) réponses stables (en rouge) réponses instables.

### 3.2. Signaux usuels rencontrés...

Certains signaux sont des briques de base pour la construction de signaux plus complexes. Il est alors essentiel de bien les caractériser. Ici, nous distinguons les signaux généralement utilisés en entrée des signaux généralement rencontrés en sortie des **SLCI**.

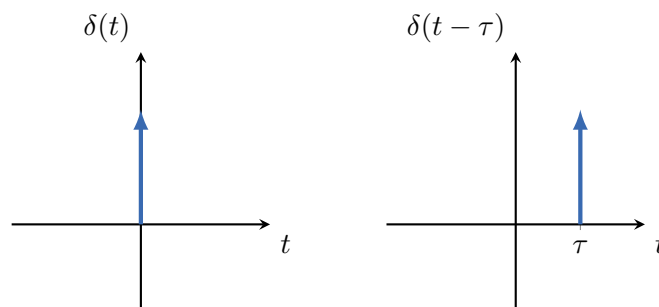
#### 3.2.1. ... en entrée

##### Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac<sup>7</sup>  $\delta(t)$  est une « fonction »<sup>8</sup> telle que

$$\delta(t) : \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0) \end{cases}$$

Cette fonction est donc nulle partout sauf en  $t = 0$  où elle prend une valeur infinie. C'est pourquoi l'intégrale sur tous les nombres réels d'une impulsion de Dirac est normalisée à 1. Graphiquement une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  est représentée par une flèche en  $t = 0$ . La figure ci-dessous présente une impulsion de Dirac ainsi qu'une impulsion retardée de  $\tau$  notée  $\delta(t - \tau)$ .



L'impulsion de Dirac est expérimentalement approchée par un signal bref et de grande amplitude. Il est possible de montrer que la fonction suivante  $\delta_a(t)$  est une impulsion de Dirac lorsque  $a \rightarrow 0$ .

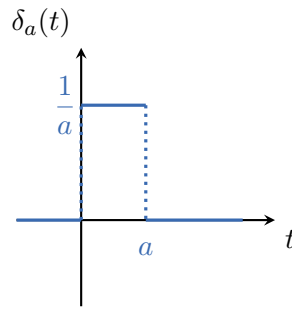
Nous la rencontrerons quelque fois sous sa forme généralisée,

$$e(t) = E_0 \delta(t)$$

où  $e(t)$  est le signal d'entrée du système et  $E_0$  la valeur de l'amplitude de l'impulsion de Dirac dont l'unité dépend de la nature du problème considéré.

<sup>7</sup>Paul Dirac, (1902-1984) mathématicien et physicien britannique

<sup>8</sup>Les guillemets sont essentiels pour ne pas se fâcher avec nos collègues mathématiciens. En effet ce signal est un exemple classique de la théorie des distributions qui étend la notion de fonction



**Figure 1.5.** – Représentation de l'impulsion de Dirac approchée. Celle-ci tend vers l'impulsion de Dirac pour  $a \rightarrow 0$ . On remarquera que l'aire du rectangle est toujours égale à 1.

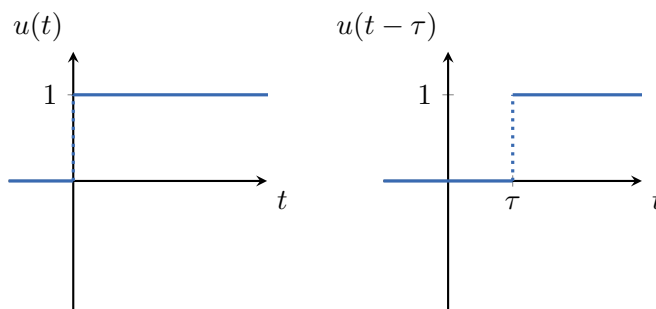
La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée **réponse impulsionnelle**. Dans la pratique, une telle sollicitation brève et de grande amplitude permet de parfaitement caractériser le système. La réponse impulsionnelle, qui en résulte, contient toute l'information du système linéaire qui l'a élaboré.

### Échelon-unité

L'échelon-unité est défini par la fonction, noté  $u(t)$ , telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction présente une marche<sup>9</sup> à  $t = 0$ . Ci dessous nous la représentons avec la fonction retardée  $u(t - \tau)$ .



**Figure 1.6.** – Représentation graphique de (gauche) la fonction échelon-unité et (droite) la fonction échelon-unité retardée de  $\tau$

En général, l'échelon-unité est utilisé en entrée de nos systèmes pour modéliser des états fermé/ouvert (« on/off ») ou encore en régulation. Nous la rencontrerons souvent sous

<sup>9</sup>Nos collègues anglo-saxons l'appelle la « *step function* »

sa forme généralisée,

$$e(t) = E_0 u(t)$$

où  $e(t)$  est le signal d'entrée du système et  $E_0$  la valeur seuil de l'échelon dont l'unité dépend de la nature du problème considéré.

D'après les propriétés du signal échelon-unité et de la causalité, il est possible de rendre causale une fonction quelconque en la multipliant par un échelon-unité.

La réponse d'un système à un échelon est appelée **réponse indicielle**.

Remarquons que la fonction échelon-unité est l'intégrale de la distribution de Dirac,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \, d\tau$$

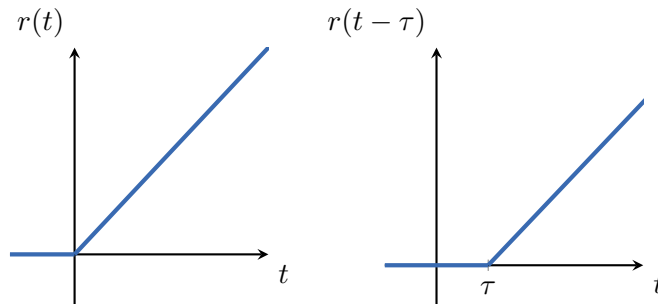
### Rampe-unité

Le signal rampe-unité<sup>10</sup> est modélisé par la fonction  $r(t)$  telle que :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

ou autrement dit, en utilisant la propriété de causalité de l'échelon :

$$r(t) = t \cdot u(t)$$



**Figure 1.7.** – Représentation graphique de (gauche) la fonction rampe-unité et (droite) la fonction rampe-unité retardée de  $\tau$

Remarquons que la fonction rampe est l'intégrale de l'échelon-unité, notamment

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) \, d\tau$$

La réponse d'un système à une rampe ne possède pas de nom spécifique, utilisé pour la

<sup>10</sup>On retrouve parfois [22] le terme d'échelon vitesse pour désigner la fonction rampe

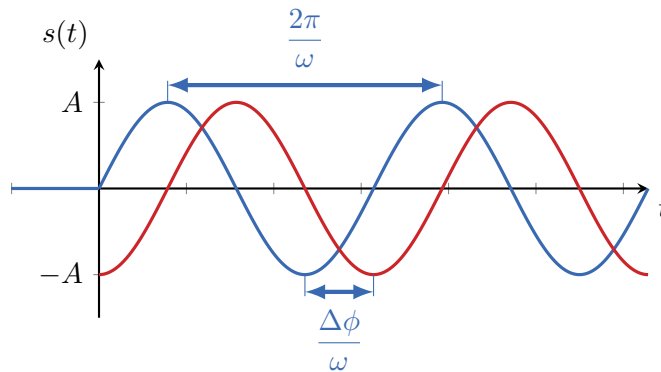
distinguer des autres réponses. On parlera donc simplement de **réponse à une rampe**.

### Sinusoïde

Le signal périodique sinusoïdale  $s(t)$  est la fonction telle que :

$$s(t) = A \sin(\omega t + \phi) \cdot u(t)$$

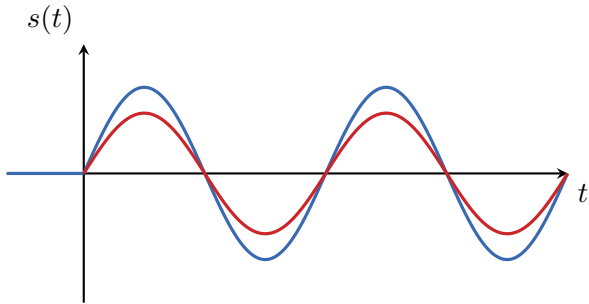
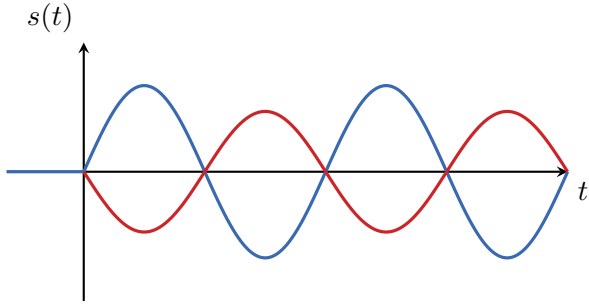
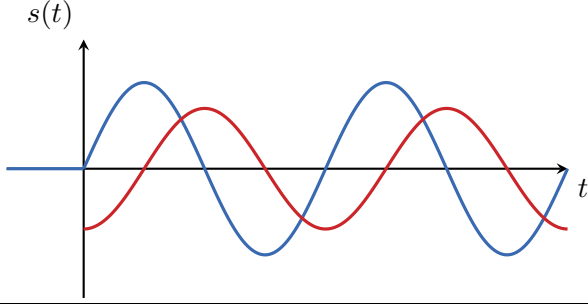
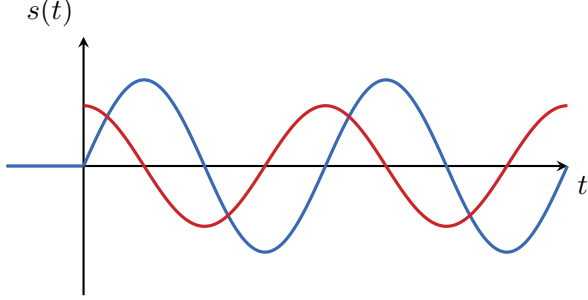
avec  $A$  son amplitude,  $\omega$  sa pulsation (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et  $\phi$  sa phase (rad).



**Figure 1.8.** – Représentation de signaux sinusoïdaux de même pulsation et amplitude. (bleu) de phase  $\phi = 0$  et (rouge) de phase  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ .

La réponse d'un système à une sinusoïde est appelée la **réponse harmonique** et son analyse fera l'objet de tout un chapitre ([Chapitre 4](#)).

Le [tableau 1.1](#) rappelle la terminologie associée au déphasage entre deux signaux sinusoïdaux.

Déphasage	Terminologie	Graphe
$\Delta\phi = 0$	« en phase »	
$\Delta\phi = \pm\pi$	« en opposition de phase »	
$\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$	« en quadrature de phase » (retard de phase)	
$\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$	« en quadrature de phase » (avance de phase)	

**Tableau 1.1.** – Différents types de déphasage d'un (rouge) signal sinusoïdal  $s_2(t)$  par rapport à (bleu) un signal de référence  $s_1(t)$  de phase nulle.



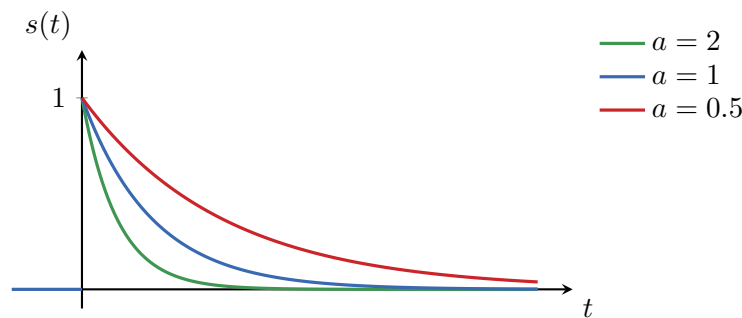
### 3.2.2. ... en sortie

#### Exponentielle décroissante

La fonction exponentielle décroissante  $s(t)$  est telle que :

$$s(t) = e^{-at} \cdot u(t)$$

avec  $a$  l'inverse d'un temps caractéristique d'un amortissement. Cette fonction tend vers 0 pour tout  $a > 0$  à  $t \rightarrow \infty$  et diverge pour  $a < 0$ .



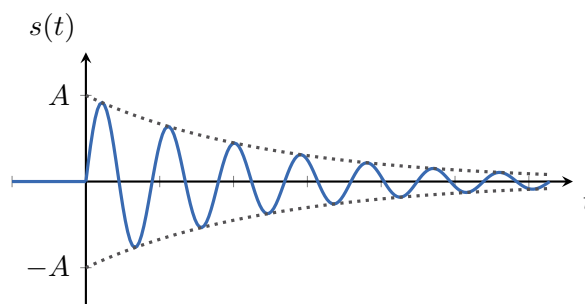
**Figure 1.9.** – Représentation de la fonction exponentielle pour différentes valeurs du paramètre  $a$ .

#### Sinusoïde amortie

La fonction sinusoïdale amortie  $s(t)$  est la fonction telle que :

$$s(t) = Ae^{-at} \sin(\omega t + \phi) \cdot u(t)$$

où  $a > 0$  est l'inverse d'un temps caractéristique de l'amortissement. Cette fonction est donc le produit d'une exponentielle décroissante et d'une sinusoïde.



**Figure 1.10.** – Représentation d'un sinusoïde amortie. L'enveloppe en pointillé correspond aux fonctions  $Ae^{-at}$  et  $-Ae^{-at}$ .

## 4. La transformée de Laplace

La transformée de Laplace<sup>11</sup> est l'outil indispensable pour l'étude des **SLCI**. Celle-ci nous sera très utile pour la résolution des équations différentielles et nous permettra également de définir la notion de fonction de transfert reliant l'entrée et la sortie d'un système linéaire.

### 4.1. Définition

La **transformée de Laplace (TL)**, notée  $\mathcal{L}$ , d'une fonction causale  $s$  (pour signal) d'une variable réelle  $t$  (pour temps), est la fonction  $S$  de la variable complexe  $p$ , définie par :

$$S(p) = \mathcal{L} \{s(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t) dt. \quad (1.2)$$

On dit également que  $S(p)$  est l'**image dans le domaine de Laplace de la fonction  $s(t)$  du domaine temporel**. De plus la transformée  $S(p)$  de  $s(t)$  est unique et parfaitement définie. Connaissant  $S(p)$  on en déduit  $s(t)$  par la transformation inverse

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(p)\}$$

Il existe une forme analytique de la transformée inverse basée sur la formule de Mellin-Fourier<sup>[15]</sup> :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(p)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} S(p) dp$$

L'intégration de celle-ci est difficile à mettre en oeuvre<sup>12</sup>, on préférera utiliser les tables de transformations de Laplace pour réaliser la correspondance inverse (**Annexe D**). Lorsque la transformation n'existe pas dans les tables, il est possible de réaliser une décomposition en éléments simples de la réponse  $S(p)$  pour se placer dans un cas usuel (**Annexe G**).

Remarquons, dès à présent l'utilisation d'une convention utile : **les fonctions du temps seront toujours désignées par une minuscule, et les fonctions complexes par la majuscule respective**.

### 4.2. Propriétés

Nous allons ici uniquement présenter les principales propriétés de la TL, on se rapportera à nouveau à l'**Annexe D** pour une liste exhaustive de ces propriétés.

La propriété fondamentale de la transformée de Laplace est d'être linéaire.

<sup>11</sup> Pierre-Simon de Laplace, (1749-1827) mathématicien, astronome, physicien et homme politique français

<sup>12</sup> Il existe différentes méthodes numériques de transformée de Laplace inverse (**Annexe J**). Ces méthodes, hors programme, peuvent cependant faire l'objet d'un projet numérique intéressant.

**Linéarité**

Soit deux signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  continus et  $S_1(p)$  et  $S_2(p)$  leurs transformées de Laplace respectives. La transformée de Laplace d'une relation linéaire quelconque de  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  est une relation linéaire de  $S_1(p)$  et  $S_2(p)$ . Autrement dit,

$$\mathcal{L}\{as_1(t) + bs_2(t)\} = aS_1(p) + bS_2(p) \quad (1.3)$$

**Retard en  $t$  (temporel)**

Soit  $s(t - \tau)$  un signal  $s(t)$  présentant un retard  $\tau$ .

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t - \tau) dt$$

en appliquant le changement de variable  $t' = t - \tau$ , on obtient  $t = t' + \tau$  et  $dt = dt'$

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-p(t'+\tau)} s(t') dt' = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} e^{-pt'} s(t') dt'$$

on reconnaît dans cette dernière expression la définition de la transformée de Laplace, on écrit alors :

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = e^{-p\tau} S(p) \quad (1.4)$$

**Retard en  $p$  (Théorème de l'amortissement)**

Soit  $s(t)$  un signal de transformée de Laplace  $S(p)$ . La transformée de Laplace du signal modifié  $e^{-at}s(t)$  s'écrit :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}s(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} s(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} s(t) dt$$

on reconnaît dans cette dernière expression la définition de la transformée de Laplace pour  $p + a$ , on obtient donc la transformée,

$$\mathcal{L}\{e^{-at}s(t)\} = S(p + a) \quad (1.5)$$

ou encore,

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p + a)\} = e^{-at}s(t). \quad (1.6)$$

### Dérivation

Soit un signal  $s(t)$  continu et dérivable pour  $t \geq 0$  et  $S(p)$  sa transformée. Par définition de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{ds(t)}{dt} dt$$

par intégration par parties

$$\begin{aligned} v &= e^{-pt} & du &= \frac{ds(t)}{dt} dt \\ dv &= -pe^{-pt} dt & u &= s(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} &= \left[ s(t)e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - p \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t) dt \\ &= -s(0) + pS(p) \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = pS(p) - s(0) \quad (1.7)$$

On généralise à tous les ordres de dérivation dans le cas de conditions initiales nulles.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n s(t)}{dt^n} \right\} = p^n S(p)$$

Remarquons alors que **dérivé dans le domaine temporel consiste à multiplier par  $p$  dans le domaine de Laplace.**

### Intégration

Soient des signaux  $v(t)$  et  $s(t)$  tel que  $v(t) = \int_0^t s(\tau) d\tau$ . Par définition,

$$\mathcal{L} \{v(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} v(t) dt$$

par intégration par parties,

$$\begin{aligned} v &= v(t) & du &= e^{-pt} dt \\ dv &= s(t) dt & u &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{v(t)\} &= \left[ -\frac{1}{p}v(t)e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p}e^{-pt}s(t)dt \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt}s(t)dt + \frac{s(0)}{p}\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t s(\tau)d\tau\right\} = \frac{S(p)}{p} + \frac{s(0)}{p} \quad (1.8)$$

Remarquons alors que **intégrer dans le domaine temporel consiste à diviser par  $p$  dans le domaine de Laplace.**

#### Théorème de la valeur initiale

$$s(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pS(p) \quad \forall S(p) \quad (1.9)$$

où  $s(0)$  est la valeur d'un signal  $s(t)$  pour  $t = 0$ . Ce théorème est utilisé pour déterminer la valeur initiale dans le domaine temporel d'un signal dont on connaît uniquement la transformée de Laplace.

#### Théorème de la valeur finale

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) \quad (1.10)$$

où  $s(\infty)$  est la valeur d'un signal  $s(t)$  pour  $t \rightarrow \infty$ . Ce théorème n'est valable que si  $s(\infty)$  est définie. On dira plus tard si le signal est stable.

#### Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Le produit de convolution de deux signaux  $h(t)$  et  $e(t)$  que l'on note  $(h * e)(t)$  est défini par :

$$(h * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)e(\tau)d\tau$$

La transformée de Laplace transforme le produit de convolution en un simple produit des signaux dans le domaine de Laplace. Formellement,

$$\mathcal{L}\{(h * e)(t)\} = H(p)E(p) \quad (1.11)$$

Si cette propriété est fondamentale, nous ne l'utiliserons que très exceptionnellement. Nous la rencontrerons à nouveau lorsque nous introduirons la fonction de transfert d'un système linéaire.

### 4.3. Transformées des signaux usuels

Nous présentons les transformées de Laplace des signaux usuels introduits au paragraphe 3.2

#### Transformée d'une impulsion de Dirac

Par simple application des définitions de la TL et de l'impulsion de Dirac, la transformée d'une impulsion de Dirac  $\delta(t)$  s'écrit :

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = 1$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (1.12)$$

#### Transformée d'un échelon-unité

La transformée de Laplace d'un signal échelon-unité s'écrit :

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[ \frac{-e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p} \quad (1.13)$$

Dans le cas de la forme généralisée, il suffit de multiplier par une constante.

#### Transformée d'une rampe

La transformée de Laplace d'un signal rampe s'écrit :

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} r(t) dt = \int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{p}e^{-pt} & du &= dt \\ dv &= e^{-pt}dt & u &= t \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt = \left[ -t\frac{1}{p}e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p}e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot u(t)\} = \frac{1}{p^2}. \quad (1.14)$$

On généralise aux ordres supérieures (parabolique, cubique... ) :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{n!}t^n \cdot u(t)\right\} = \frac{1}{p^{n+1}}. \quad (1.15)$$

### Transformée d'une exponentielle décroissante

La transformée de Laplace d'une exponentielle décroissante s'écrit :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}dt = \frac{1}{p+a}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{p+a} \quad (1.16)$$

Nous aurions pu utiliser la propriété du retard en  $p$  (Théorème de l'amortissement) pour déterminer cette transformée de Laplace.

### Transformée d'un sinus

La transformée de Laplace d'un sinus s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin \omega t \cdot u(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t \cdot u(t)\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (1.17)$$

### Transformée d'un cosinus

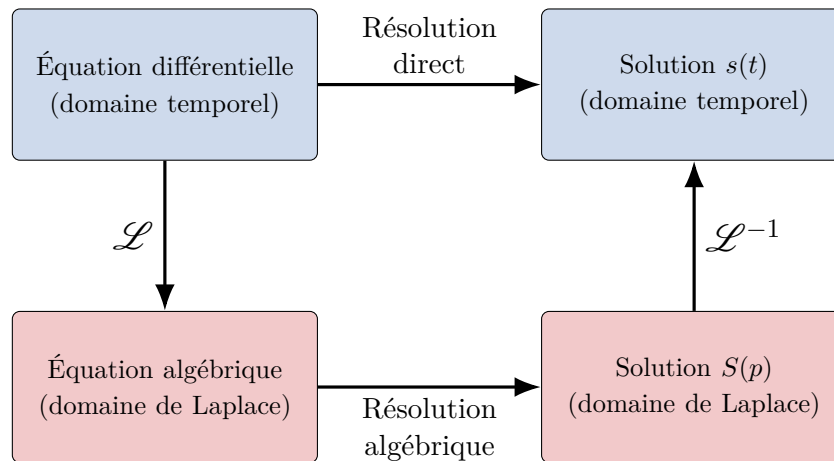
La transformée de Laplace d'un cosinus s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \{ \cos \omega t \cdot u(t) \} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt + \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) \\
 &= \frac{p}{p^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \{ \cos \omega t \cdot u(t) \} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (1.18)$$

## 4.4. Application de la TL à la résolution d'équation différentielle



**Figure 1.11.** – Représentation schématique de la méthode employée pour la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

### 4.4.1. Méthodologie

Lorsqu'une équation différentielle à coefficients constants a pu être établie pour définir la relation entre l'entrée et la sortie d'un **SLCI**, il nous faut en trouver une solution. Les méthodes classiques de résolution d'équations différentielles peuvent être difficiles et



fastidieuses à mettre en oeuvre, notamment dans le cas d'équation différentielle d'ordre élevé ou encore pour des systèmes composés de sous-systèmes.

La transformée de Laplace permet de mettre en oeuvre une méthode plus simple et systématique pour la résolution de ces équations différentielles à coefficients constants. Comme nous l'avons déjà discuté, la forme générale de ces équations est donnée par :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad (1.19)$$

avec  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $s(t)$  le signal de sortie,  $e(t)$  le signal d'entrée et  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ . L'équation est dite d'ordre  $n$ .

Sous cette forme, cette équation différentielle constitue ce que l'on nomme **la loi temporelle** du système. Sans perte de généralité, on ne considèrera dans un premier temps que les systèmes pour lesquels toutes les **conditions initiales sont nulles**, appelées également les conditions d'Heaviside<sup>13</sup>.

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.19), on obtient ce que l'on nomme **la loi fréquentielle** du système :

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i S(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i E(p) \quad (1.20)$$

La résolution algébrique de cette équation est simplement donnée par :

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} E(p) \quad (1.21)$$

La solution dans le domaine temporelle  $s(t)$  de l'équation différentielle est alors simplement obtenue par transformée de Laplace inverse de  $S(p)$ .

Cette méthode, résumée par l'organigramme de la figure 1.11, est appliquée à un exemple complet au paragraphe suivant.

#### 4.4.2. Exemple complet

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (1.22)$$

où  $e(t)$  et  $s(t)$  sont respectivement les fonctions temporelles d'entrée et de sortie du système régi par cette équation différentielle avec pour conditions initiales (CI)  $s(0) = -1$  et  $s'(0) = 2$ . Nous considérons la réponse à un échelon-unité ( i.e  $e(t) = u(t)$  )

<sup>13</sup> Oliver Heaviside, (1850-1925), physicien britannique.

Nous allons résoudre cette équation par deux méthodes différentes : la méthode directe de résolution d'équations différentielles avec second membre, et par l'application de la transformée de Laplace.

Nous pourrions observer que l'application de la TL pour la résolution des équations différentielles est une méthode plus systématique qui s'affranchit de la forme particulière de l'équation différentielle à laquelle on a à faire. Nous verrons que la transformée de Laplace devient totalement indispensable pour la caractérisation d'un **SLCI**.

### Résolution par la méthode directe

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est donnée par

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

cette équation possède une solution double  $r_{1,2} = -1$ . La solution générale de l'équation homogène  $s_0(t)$  (c.a.d sans second membre) est donc de la forme :

$$s_0(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t}.$$

Une solution particulière  $s_1(t) = 1$  nous est trivialement donnée par l'entrée en échelon qui correspond au régime permanent. La solution générale est donc donnée par :

$$s(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t} + 1$$

Dérivons cette solution générale pour pouvoir déterminer les coefficients  $\alpha, \beta$  en utilisant les conditions initiales,

$$\begin{aligned} s'(t) &= \alpha e^{-t} - (\alpha t + \beta)e^{-t} \\ s(0) &= -1 \Rightarrow \beta + 1 = -1 \Rightarrow \beta = -2 \\ s'(0) &= 2 \Rightarrow \alpha + 2 = 2 \Rightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

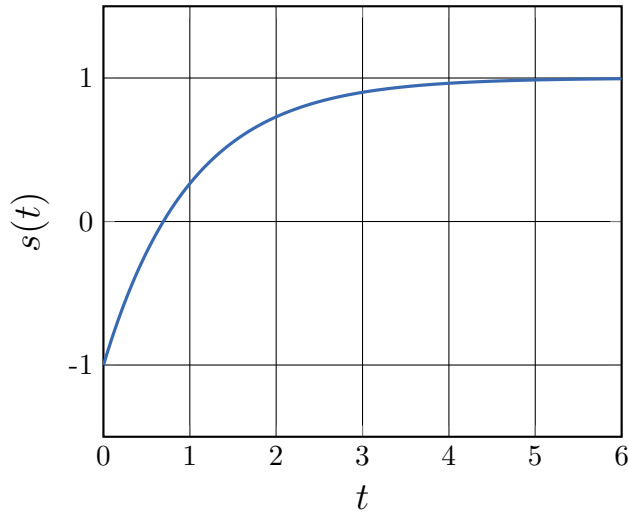
La solution générale de l'équation différentielle (1.22) est donc donnée par

$$s(t) = 1 - 2e^{-t}. \quad (1.23)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette fonction est solution de l'équation 1.22, et qu'elle respecte notamment les conditions initiales. Le graphe de la solution est également présenté (Figure 1.12).

### Résolution par application de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est linéaire. Il nous est alors possible de l'appliquer aux différents termes de l'équation différentielle (1.22) séparément. On obtient pour chacun



**Figure 1.12.** – Représentation de la solution générale de l'équation différentielle (1.22) pour  $e(t) = u(t)$ . On vérifie lors du tracé que l'on observe bien les principales propriétés du signal (i.e conditions initiales, valeurs finales).

des termes :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{s(t)\} &= S(p), \\ \mathcal{L}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} &= pS(p) - s(0) = pS(p) + 1, \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right\} &= p^2S(p) - ps(0) - s'(0) = p^2S(p) + p - 2, \\ \mathcal{L}\{u(t)\} &= \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

L'équation différentielle (1.22) devient dans le domaine de Laplace :

$$p^2S(p) + p - 2 + 2pS(p) + 2 + S(p) = \frac{1}{p}$$

En réarrangeant cette expression, il est possible de déterminer la forme de la réponse  $S(p)$  dans le domaine de Laplace.

$$\begin{aligned}
S(p) (p^2 + 2p + 1) + p &= \frac{1}{p} \\
S(p) (p + 1)^2 &= \frac{1 - p^2}{p} \\
S(p) &= \frac{1 - p^2}{p (p + 1)^2}
\end{aligned}$$

Cette forme « n'existant » pas dans les tableaux de transformation de Laplace usuels, nous allons décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples ([Annexe G](#)).

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 1} + \frac{C}{(p + 1)^2}$$

Par identification,

$$S(p) = \frac{A(p + 1)^2 + Bp(p + 1) + Cp}{p(p + 1)^2} = \frac{1 - p^2}{p(p + 1)^2}$$

$$\begin{cases} A + B \\ 2A + B + C \\ A \end{cases} = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B \\ C \end{cases} = \begin{cases} -2 \\ 0 \end{cases}$$

La réponse  $S(p)$  se décompose donc de la façon suivante en éléments simples :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p + 1}$$

Il est maintenant plus aisé d'appliquer la transformation de Laplace inverse, en utilisant le tableau des transformées de Laplace usuels (c.f lignes 3 et 7 du tableau de l'[Annexe D](#)) pour obtenir la réponse temporelle  $s(t)$ . Notamment,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1$$

et

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p + 1} \right\} = 2e^{-t}$$

soit

$$\mathcal{L}^{-1} \{S(p)\} = s(t) = 1 - 2e^{-t} \quad (1.24)$$

Comme attendu, les deux méthodes donnent le même résultat, cependant la transformée de Laplace permet de définir dans le domaine de Laplace, une relation direct entre l'entrée et la sortie d'un système. C'est la fonction de transfert qui réalise ce lien.

## 5. Fonction de Transfert

### 5.1. Définition

La fonction de transfert  $H(p)$  d'un système est donnée par le rapport de la sortie  $S(p)$  et l'entrée  $E(p)$  dans le domaine de Laplace.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (1.25)$$

ou encore,

$$S(p) = H(p)E(p) \quad (1.26)$$

Cette fonction  $H(p)$ , également appelé **transmittance**, caractérise le système de façon univoque. Pour une entrée donnée il est possible de prévoir la sortie d'un système caractérisé par sa fonction de transfert  $H(p)$

### 5.2. Fonction de transfert et réponse impulsionnelle

À partir de l'équation 1.26, le lien entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle paraît évident. Pour une impulsion de Dirac en entrée, la réponse impulsionnelle est alors simplement la fonction de transfert puisque  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = E(p) = 1$ . Autrement dit, la fonction de transfert d'un système est la réponse impulsionnelle dans le domaine de Laplace. Formellement, si  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle d'un système alors,

$$H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

D'après la propriété du produit de convolution, nous savons que le produit de deux fonctions dans le domaine de Laplace correspond au produit de convolution de ces deux fonctions dans le domaine temporelle, dans le cas de l'équation 1.26,

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)E(p)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)e(\tau)d\tau$$

ou encore,

$$s(t) = (h * e)(t)$$

ce qui exprime que **la réponse d'un système est donnée par le produit de convolution de l'entrée et la réponse impulsionnelle.**

### 5.3. Représentations algébrique et graphique de la fonction de transfert

D'après la loi fréquentielle (Équation (1.20)), la fonction de transfert d'un **SLCI** peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle,

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}. \quad (1.27)$$

Il existe différentes façons équivalentes d'écrire cette fonction de transfert. Nous allons en introduire deux : la forme canonique et la forme factorisée. La forme canonique permet de faire apparaître les intégrateurs purs du système. La forme factorisée utilise les racines de la fraction rationnelle définissant la fonction de transfert. Pour montrer l'équivalence de ces représentations nous allons les construire à partir de la forme générale de l'équation (1.27) et ou de la connaissance des pôles et zéros de la fonction de transfert.

Une fonction de transfert peut être vue comme la fraction de deux polynômes (i.e fraction rationnelle) : un polynôme au numérateur  $N(p)$  et un polynôme au dénominateur  $D(p)$ .

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Ces polynômes possèdent des racines dans  $\mathbb{C}$ . Les **racines de  $N(p)$  sont dits les zéros de  $H(p)$**  et les **racines de  $D(p)$  sont dits les pôles de  $H(p)$** . Il en vient qu'une fonction de transfert possède  $m$  zéros et  $n$  pôles.

### Exemple

Reprenons l'équation différentielle de la section précédente, dans les conditions de Heaviside, afin de construire la fonction de transfert qui lui est associée.

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (1.28)$$

La transformée de Laplace de cette équation nous donne,

$$\begin{aligned} p^2 S(p) + 2pS(p) + S(p) &= E(p) \\ S(p) (p^2 + 2p + 1) &= E(p) \\ S(p) &= \frac{1}{p^2 + 2p + 1} E(p) \end{aligned}$$

La fonction de transfert associée à cette équation différentielle est donc

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}$$

Il est aisé de constater que la fonction de transfert est d'ordre deux et ne possède pas de zéro.

**Forme canonique de la fonction de transfert**

Développons les sommes de l'équation (1.27),

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n}.$$

La forme canonique dépend du nombre d'intégrateur du système. Par exemple, si  $a_0$  est non nul, l'expression précédente se factorise sous la forme,

$$H(p) = K_0 \cdot \frac{1 + b'_1p + b'_2p^2 + \dots + b'_mp^m}{1 + a'_1p + a'_2p^2 + \dots + a'_np^n}.$$

avec  $K_0 = \frac{b_0}{a_0}$ ,  $a'_i = \frac{a_i}{a_0}$  et  $b'_i = \frac{b_i}{b_0}$ . Dans ce cas, le système est dit de classe 0 et ne possède aucun intégrateur.

Si maintenant  $a_0$  est nul et  $a_1$  non nul, la fonction de transfert peut s'écrire,

$$H(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{1 + b'_1p + b'_2p^2 + \dots + b'_mp^m}{1 + a'_1p + a'_2p^2 + \dots + a'_{n-1}p^{n-1}}.$$

avec  $K_1 = \frac{b_0}{a_1}$ ,  $a'_i = \frac{a_{i+1}}{a_1}$  et  $b'_i = \frac{b_i}{b_0}$ . Dans ce cas, le système est dit de classe 1 et possède un intégrateur.

On généralise donc la forme canonique de la fonction de transfert d'un système de classe  $\alpha \geq 0$  sous la forme,

$$H(p) = \frac{K_\alpha}{p^\alpha} \cdot \frac{\sum_{i=0}^m b'_i p^i}{\sum_{i=0}^{n-\alpha} a'_i p^i} \quad (1.29)$$

où  $K_\alpha = \frac{b_0}{a_\alpha}$  est le **gain statique**,  $\alpha$  est la **classe du système** et les coefficients de la forme canonique  $a'_i$  et  $b'_i$  sont déterminés à partir des coefficients de l'équation différentielle régissant le système<sup>14</sup>.

En posant respectivement  $N(p)$  et  $D(p)$  les polynômes du numérateur et du dénominateur. La forme canonique de la fonction de transfert s'écrira également très souvent :

$$H(p) = \frac{K_\alpha N(p)}{p^\alpha D(p)}$$

On rappellera que sous cette forme les polynômes  $N(p)$  et  $D(p)$  sont de la forme

$$1 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_{n-\alpha}p^{n-\alpha}$$

<sup>14</sup>Pour simplifier la notation, les primes des coefficients de la forme canonique peuvent être omis, cependant ceux-ci restent toujours différents des coefficients de l'équation différentielle.

et donc  $N(0) = 1$  et  $D(0) = 1$ .

### Exemple de forme canonique

Soit un système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2p + 5}{p^3 + 2p^2 + 4p}$$

Le coefficient d'ordre 0 étant nul au dénominateur, le système est de classe 1, la forme canonique de cette fonction de transfert est donc<sup>15</sup> donnée par

$$H(p) = \frac{K(0.4p + 1)}{p(0.25p^2 + 0.5p + 1)},$$

où le gain statique  $K = 1.25$ .

### Forme factorisée de la fonction de transfert

Soient les pôles  $p_i$  avec  $i \in [1, n]$  et les zéros  $z_j$  avec  $j \in [1, m]$  de la fonction de transfert  $H(p)$ . Il est alors possible de factoriser par les pôles et les zéros pour écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = k \cdot \frac{\prod_{j=0}^m (p - z_j)}{\prod_{i=0}^n (p - p_i)}, \quad (1.30)$$

avec  $k = \frac{b_m}{a_n}$ . On remarquera que cette constante  $k$  n'est pas le gain statique de la forme canonique.

Cette forme factorisée est très utile pour la représentation graphique de la réponse harmonique (c.f chapitre 4).

### Exemple de fonction de transfert factorisée

Soit la fonction de transfert  $H(p)$  tel que

$$H(p) = \frac{6p + 12}{2p^2 + 4p + 1.5}$$

En factorisant par les coefficients d'ordre maximum au numérateur et au dénominateur, et en observant que la fonction de transfert possède un zéro ( $z_1 = -2$ ) et deux pôles ( $p_1 = -1.5$  et  $p_2 = -0.5$ ), on peut réécrire  $H(p)$  sous sa forme factorisée :

$$H(p) = \frac{6}{2} \cdot \frac{p + 2}{p^2 + 2p + 0.75}$$

<sup>15</sup>Il est d'usage en automatique d'écrire les nombres rationnels par leurs valeurs numériques plutôt que par leurs fractions.



La fonction de transfert possède un zéro ( $z_1 = -2$ ) et deux pôles ( $p_1 = -1.5$  et  $p_2 = -0.5$ ). Elle peut alors s'écrire :

$$H(p) = \frac{k(p+2)}{(p+1.5)(p+0.5)}$$

avec  $k = 3$ .

### Carte des pôles et zéros d'une fonction de transfert

Il est également possible de représenter une fonction de transfert graphiquement à l'aide d'une carte des pôles et des zéros dans le plan complexe (les racines d'un polynôme pouvant être complexes). Dans ce type de représentation, les pôles sont représentés par des ( $\times$ ) et les zéros par des ( $\circ$ ). La carte des pôles et des zéros d'une fonction de transfert est essentielle pour la construction du lieu d'Evans<sup>16</sup> pour l'étude des systèmes asservis.

### Exemple de carte de pôles et zéros d'une fonction de transfert

Soit  $H(p)$  une fonction de transfert telle que,

$$H(p) = \frac{p-1}{p^2+2p+2} \quad (1.31)$$

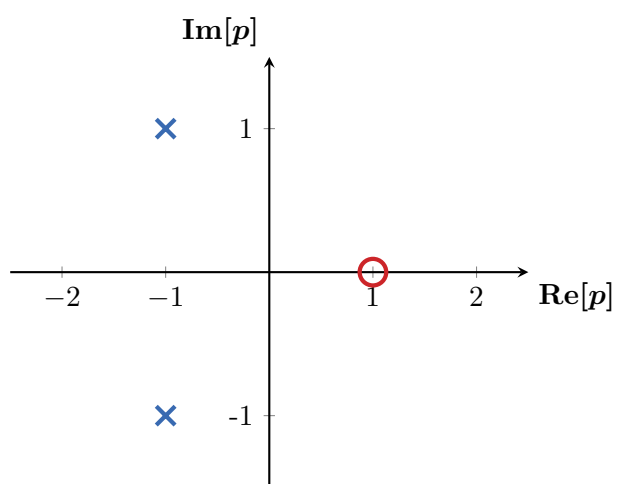
Cette fonction de transfert possède un zéro réel ( $z_1 = 1$ ) et deux pôles complexes conjugués ( $p_{1,2} = -1 \pm j$ ). La forme factorisée de  $H(p)$  est donc

$$H(p) = \frac{p-1}{(p+1+j)(p+1-j)} \quad (1.32)$$

La [figure 1.13](#) présente la carte des pôles de cette fonction de transfert.

---

<sup>16</sup>Walter Richard Evans, (1920-1999), ingénieur, automaticien américain



**Figure 1.13.** – Exemple d’une carte de pôles et zéros associés à la fonction de transfert Équation (1.31)

## 2. Schémas fonctionnels et graphes de fluence

### Sommaire

---

<b>1.</b>	<b>Introduction</b>	<b>44</b>
<b>2.</b>	<b>Éléments de base des schémas fonctionnels</b>	<b>44</b>
<b>3.</b>	<b>Transformation des schémas fonctionnels</b>	<b>46</b>
3.1.	Réduction de schéma-bloc	46
3.2.	Manipulation de schéma-bloc	49
<b>4.</b>	<b>Cas d'entrées multiples</b>	<b>50</b>
<b>5.</b>	<b>Réduction de schéma-bloc de grande taille</b>	<b>51</b>
5.1.	Exemple à entrée simple	52
5.2.	Exemple à entrées multiples	54
<b>6.</b>	<b>Graphe de fluence</b>	<b>56</b>
6.1.	Définitions	56
6.2.	Algèbre des graphes de fluences	57
6.3.	Règle de Mason	60

---

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire un outil graphique pour faciliter la représentation des relations mathématiques entre les différents éléments constituant un **SLCI**. Cet outil est le **schéma fonctionnel** ou également appelé **schéma-bloc**. Les schémas fonctionnels nous seront très utiles pour l'étude des systèmes asservis. Nous introduirons une algèbre de blocs permettant de réduire les schémas-blocs qui nous permettront de s'affranchir de la manipulation d'expression mathématique de grande taille. Nous aborderons également le cas des entrées multiples.

Dans une dernière partie nous introduirons les graphes de fluence, comme présenté dans [15]. Ces derniers sont moins utilisés pour l'étude des **SLCI**, et peuvent donc être négligés dans une première lecture, l'algèbre qui lui est associée s'avère cependant bien plus efficace et pourra être utilisée dans d'autres applications (ex : électronique, réseaux de neurones).

## 2. Éléments de base des schémas fonctionnels

Les schémas fonctionnels sont composés de quatre éléments de base : **les flèches, les blocs, les comparateurs et sommateurs et les points de prélèvement**

### Flèche

Les flèches donnent la direction de l'information (i.e du signal) au sein du schéma-blocs. Elles peuvent être ornées de la grandeur mathématique qui leurs sont associée. Celles-ci peuvent être des grandeurs temporelles ou dans le domaine de Laplace.

$$\xrightarrow{e(t)} \quad \xrightarrow{E(p)}$$

Cependant, nous nous limiterons à l'usage de ces schémas fonctionnelles pour la représentation de grandeur dans le domaine de Laplace.

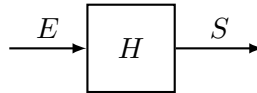
Pour alléger la notation dans ce chapitre, nous omettrons très souvent la variable  $p$  des grandeurs dans le domaine de Laplace désignées par une majuscule.

**Bloc**

Le bloc est la représentation d'une fonction de transfert entre deux grandeurs dans le domaine de Laplace. Par exemple, la relation entre l'entrée  $E$  et la sortie  $S$  définit par la fonction de transfert  $H$  qui s'écrit formellement,

$$S = HE, \quad (2.1)$$

est équivalente au schéma fonctionnel<sup>1</sup> suivant :

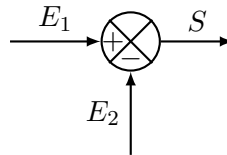
**Comparateur/Sommateur :**

Les comparateurs ou sommateurs permettent de représenter des opérations simples entre différentes grandeurs. Nous parlerons respectivement de comparateur ou de sommateur dans le cas d'une différence ou d'une somme entre deux grandeurs.

Par exemple, la relation

$$S = E_1 - E_2$$

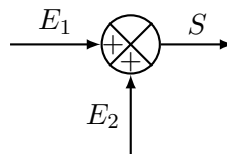
est équivalente au comparateur suivant :



De même la somme de deux grandeurs,

$$S = E_1 + E_2$$

est équivalente au sommateur suivant :

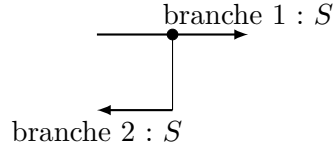
**Point de prélèvement**

Un point de prélèvement (ou point de dérivation ou encore jonction) est un point d'une flèche où une information est prélevée ne modifiant pas sa valeur. Par exemple, la jonction

---

<sup>1</sup>Les schémas-blocs de ce document ont tous été réalisés avec les macros TikZ (`schemabloc`) écrit par R. Papanicola[16]. À noter que des macros TikZ (`gfluence`) pour représenter les graphes de fluence de ce même chapitre, ont été fortement inspirés par ce même auteur.

suivante (représentée par un point) donne lieu à deux branches auxquelles sont associées la même grandeur  $S$ .



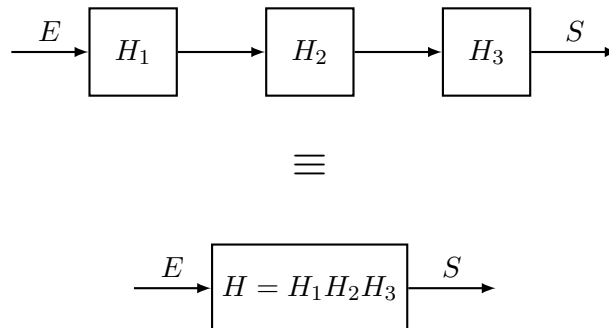
Dans cette configuration, la branche 1 est dite « direct » et la branche 2 est dite de « retour ».

### 3. Transformation des schémas fonctionnels

#### 3.1. Réduction de schéma-bloc

##### Blocs en série / produit

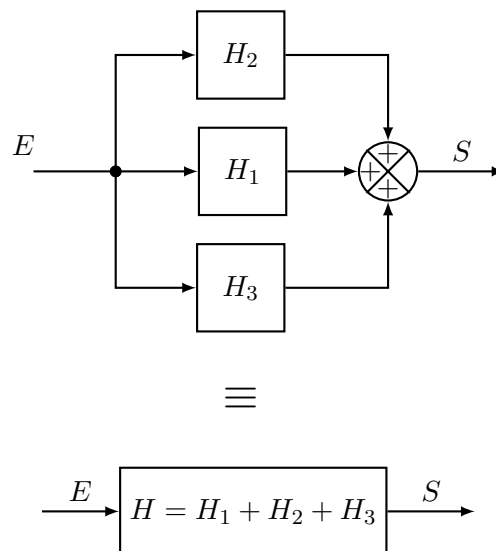
Lorsque les blocs sont placés en série, la fonction de transfert entre la sortie et l'entrée globale est le produit des fonctions de transfert mis en jeu. Par exemple, les deux schémas fonctionnels suivants sont équivalents.



Nous laissons au lecteur la démonstration triviale à partir des relations mathématiques.

##### Blocs en parallèle

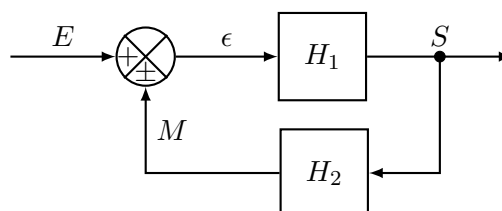
Lorsque les blocs sont placés en parallèle, la fonction de transfert entre la sortie et l'entrée globale est la somme des fonctions de transfert mis en jeu. Par exemple, les deux schémas fonctionnels suivants sont équivalents.



La démonstration est également triviale.

### La boucle de contre-réaction (positive ou négative)

La boucle de contre-réaction<sup>2</sup> peut être réduite à une simple fonction de transfert. Considérons un système défini par le schéma-bloc ci-dessous, composé des différents éléments de bases.



Notons l'utilisation du symbole  $\pm$  pour envisager à la fois les comparateurs et sommateurs.

Déterminons la relation entre l'entrée  $E$  et la sortie  $S$  de ce système. Pour cela réécrivons les relations linéaires simples issus de ce schéma-bloc. On sait que :

$$\epsilon = E \pm M \quad (2.2)$$

$$M = H_2 S \quad (2.3)$$

$$S = H_1 \epsilon \quad (2.4)$$

<sup>2</sup> « Positive or negative feedback », chez nos collègues anglophones.

Introduisons l'équation (2.3) dans (2.2) et le résultat ainsi obtenu dans (2.4) :

$$\begin{aligned}\epsilon &= E \pm H_2 S \\ S &= H_1 (E \pm H_2 S) \\ S &= H_1 E \pm H_1 H_2 S\end{aligned}$$

Regroupons les termes dépendant de la sortie ensemble pour déterminer la relation entre l'entrée et la sortie.

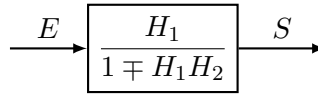
$$S(1 \mp H_1 H_2) = H_1 E$$

On obtient alors la formule de Black<sup>3</sup>, reliant la sortie à l'entrée d'une boucle de contre-réaction :

$$S = \frac{H_1}{1 \mp H_1 H_2} E \quad (2.5)$$

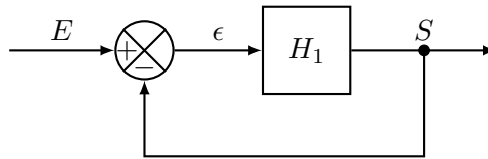
Notons l'inversion du signe du dénominateur de la formule selon que la boucle est positive ou négative.

La boucle de contre-réaction est donc équivalente au schéma-bloc simplifié suivant :



### Boucle de contre-réaction unitaire

Une boucle de contre-réaction unitaire est une boucle de contre-réaction sans fonction de transfert de retour (ex : dans le cas présenté précédemment  $H_2 = 1$ ).



La formule de Black se simplifie alors de la façon suivante :

$$S = \frac{H_1}{1 + H_1} E \quad (2.6)$$

<sup>3</sup> Harold Stephen Black (1898-1983) ingénieur, électronicien américain.

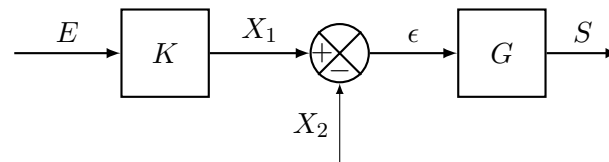


### 3.2. Manipulation de schéma-bloc

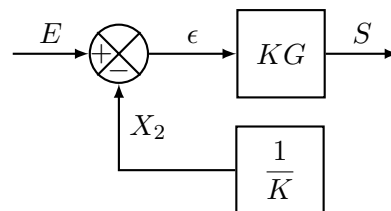
Nous allons ici présenter différentes manipulations que nous pourrions appliquer au schéma-bloc. Ces manipulations peuvent être vues comme des opérations d'une **algèbre de blocs**.

#### Déplacement d'un comparateur vers la gauche

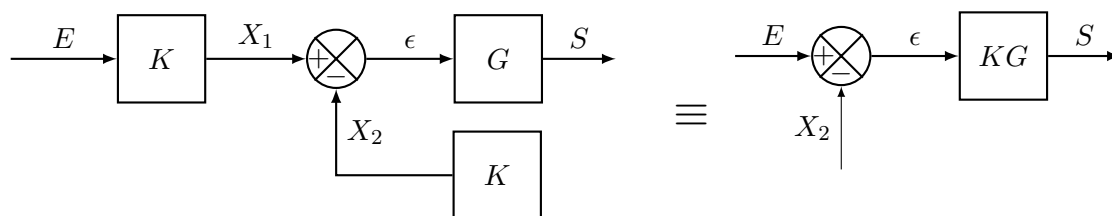
Considérons le schéma-bloc suivant :



Pour pouvoir déplacer le comparateur vers la gauche, il faut introduire le bloc  $K$  dans la chaîne direct. En conséquence, la chaîne de retour doit être modifiée pour ne pas affecter la sortie globale  $S$ . Le schéma fonctionnel précédent est donc équivalent au schéma ci-dessous :

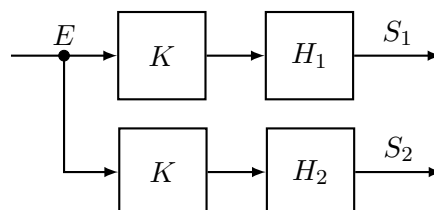


Dans le cas particulier où les deux branches du comparateur sont toutes les deux affectées par la même fonction de transfert, il suffit de déplacer la fonction de transfert après le comparateur. Par exemple, les deux schémas-blocs suivants sont équivalents :

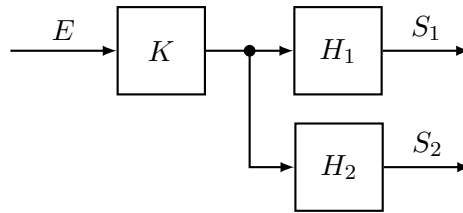


#### Déplacement d'un point de prélèvement vers la droite

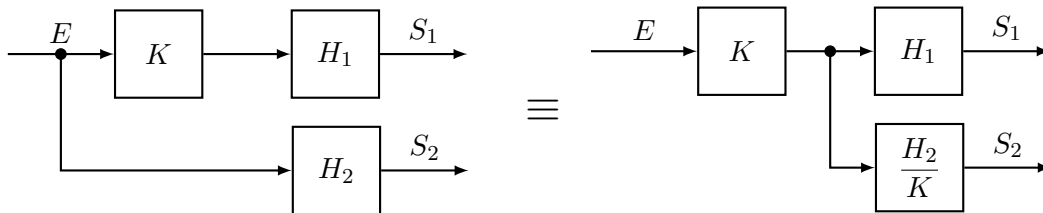
Considérons le schéma-bloc suivant :



Il est aisé de déplacer le bloc  $K$  devant le point de prélèvement :



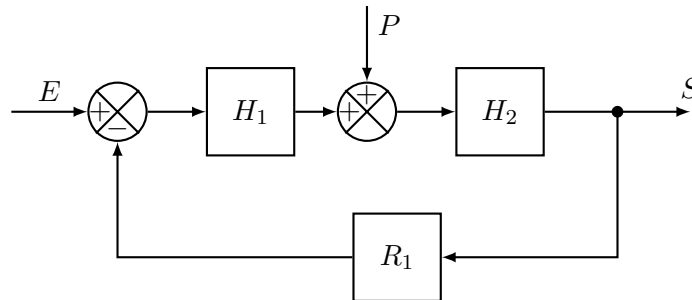
Dans le cas particulier où seul une branche est affectée par le bloc, il faut réduire la branche non affectée après avoir déplacé le point de prélèvement. Ainsi les deux schémas-blocs ci-dessous sont équivalents :



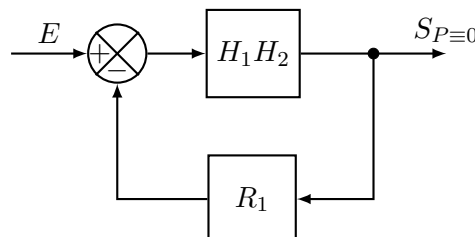
#### 4. Cas d'entrées multiples

Dans le cas d'un système possédant plusieurs entrées, il est possible de simplifier le problème en appliquant le principe de superposition. La réponse totale devient alors la somme des réponses individuelles de chaque entrée lorsque toutes les autres sont considérées comme nulles.

Considérons le schéma-blocs suivant :



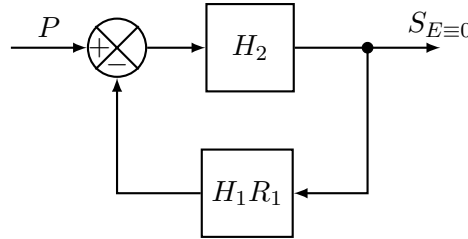
Dans un premier temps, on considère l'entrée  $P$  nulle, le schéma-bloc devient :



La sortie  $S_{P=0}$  (i.e lorsque  $P \equiv 0$ ) est donc donnée par la formule de Black pour la boucle de contre-réaction ainsi obtenue.

$$S_{P=0} = \frac{H_1 H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} E$$

Dans le cas où l'on considère maintenant l'entrée  $E$  comme nulle, le schéma-bloc se réduit de la façon suivante :



La sortie  $S_{E=0}$  est donc donnée par,

$$S_{E=0} = \frac{H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} P$$

La sortie totale  $S$  du système à deux entrées est la somme de ses sorties indépendantes,

$$S = S_{P=0} + S_{E=0} \quad (2.7)$$

$$S = \frac{H_1 H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} E + \frac{H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} P \quad (2.8)$$

$$S = H_E E + H_P P \quad (2.9)$$

Si  $E$  est une entrée de consigne et  $P$  une perturbation,  $H_E$  et  $H_P$  sont respectivement appelées **fonction de transfert d'asservissement** et **fonction de transfert de régulation**. Remarquons que le dénominateur de ces fonctions de transferts sont identiques.

## 5. Méthodologie générale pour la réduction de schéma-bloc de grande taille

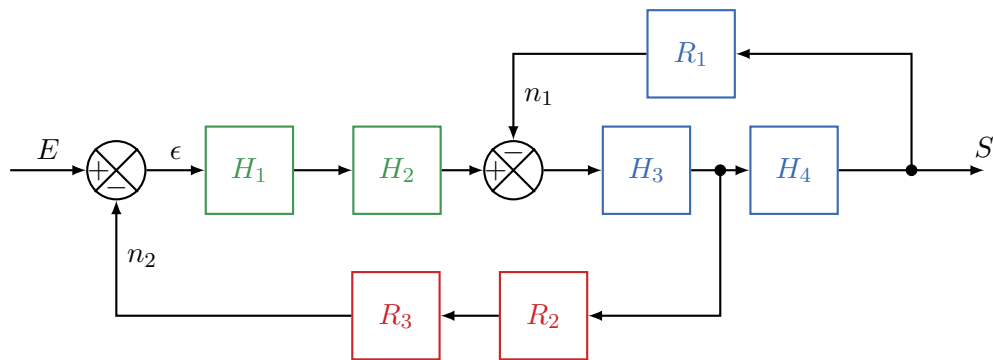
Nous venons de présenter les principales transformations et manipulations qui peuvent être appliquées aux schémas fonctionnels. Nous donnons ici une approche simple pour la réduction de schéma-bloc de grande taille [15] :

1. Regrouper les blocs en parallèle et en série.
2. Éliminer les boucles de contre-réaction locales.
3. Déplacer les sommateurs/comparateurs vers la gauche et déplacer les jonctions vers la droite.

4. Répéter pour obtenir une forme canonique pour une entrée particulière.
5. Dans le cas d'entrée multiple, répéter (1-4) pour chaque entrée.

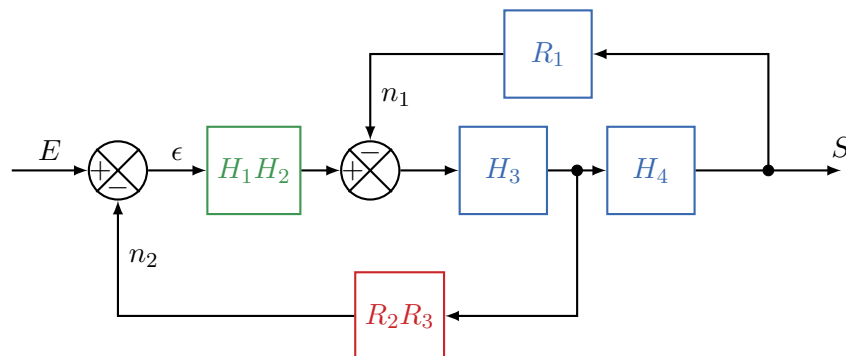
### 5.1. Exemple à entrée simple

Nous allons appliquer étape par étape cette méthodologie à la réduction du schéma-bloc, à une seule entrée, suivant :



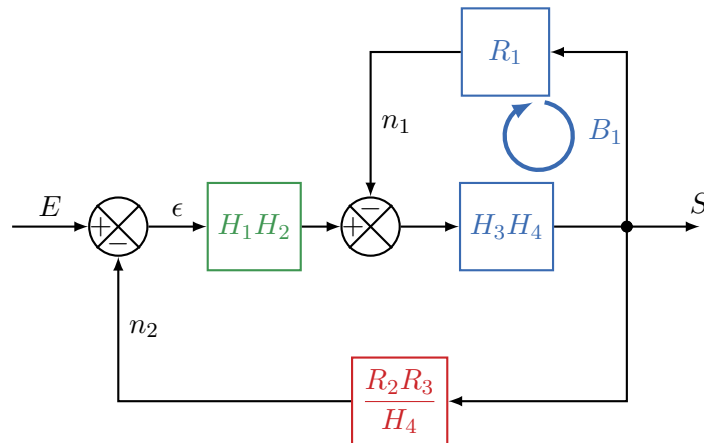
#### Étape 1

Regroupons d'abord les blocs en cascades :

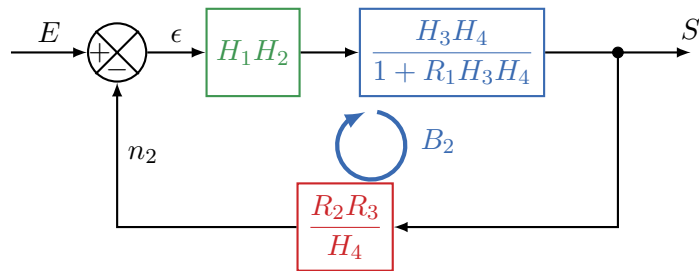


#### Étape 2

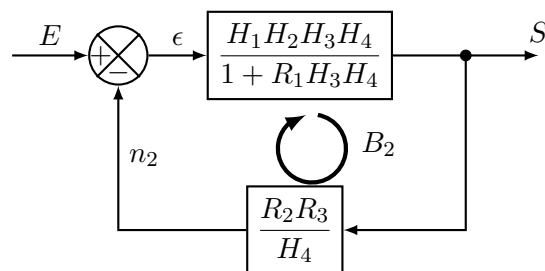
Déplaçons le point de prélèvement de la boucle de retour inférieur vers la droite :



L'étape précédente nous permet d'identifier une boucle de contre-réaction locale ( $B_1$ ). Après réduction de cette boucle, le schéma-blocs devient :

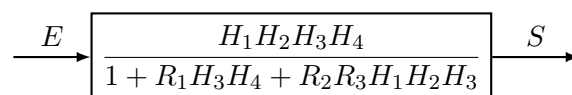


À nouveau il est possible d'identifier une boucle de contre-réaction  $B_2$  :



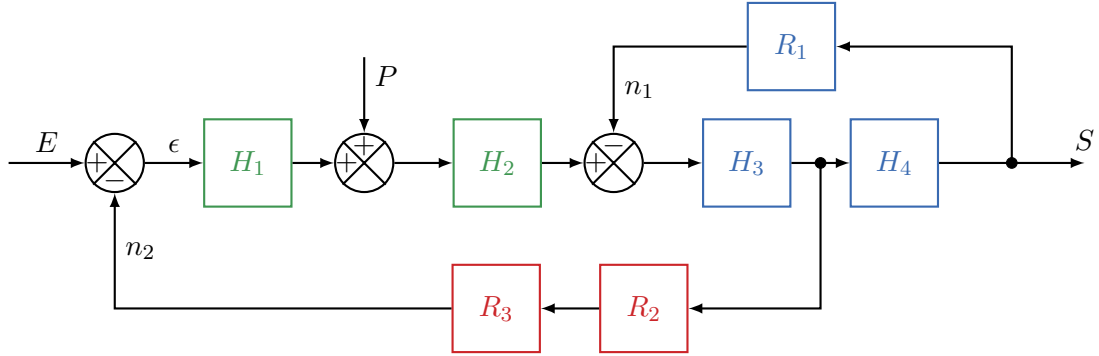
### Étape 3

Enfin, il nous suffit de réduire la boucle de contre-réaction  $B_2$  par la formule de Black :



## 5.2. Exemple à entrées multiples

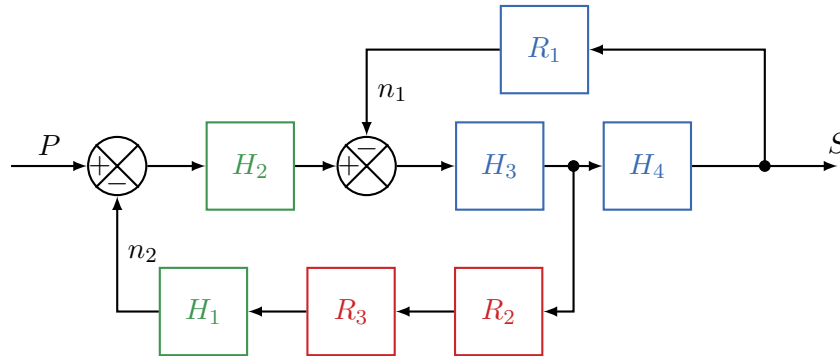
On considère le schéma fonctionnel suivant qui est exactement celui traité précédemment mais en ayant incorporer une nouvelle entrée  $P$ .



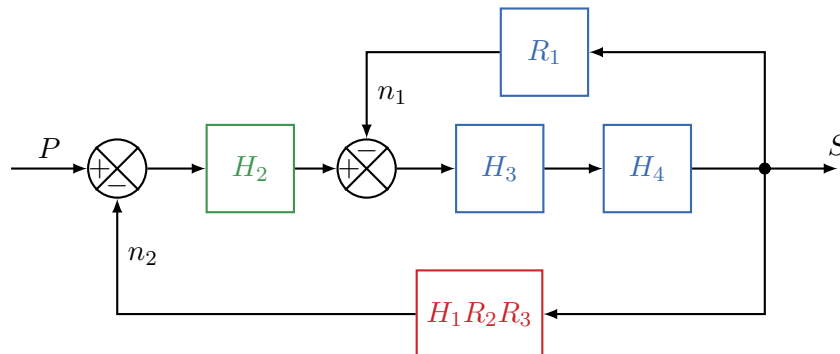
La première étape consiste à déterminer la fonction de transfert globale entre la sortie  $S$  et  $E$  pour  $P \equiv 0$ . Celle-ci correspond à la fonction de transfert déterminée précédemment, soit :

$$S_{P \equiv 0} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} E$$

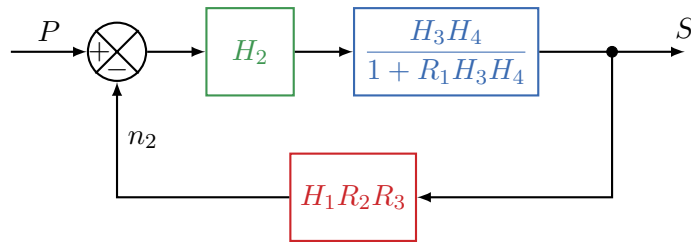
Le schéma fonctionnel réduit pour  $E \equiv 0$  est maintenant :



Déplaçons le point de jonction situé entre les blocs  $H_3$  et  $H_4$  vers la droite et réduisons les blocs en série :



La réduction de la boucle de contre réaction interne nous donne :



La réduction de cette dernière boucle de contre réaction nous donne alors la fonction de transfert globale pour  $E \equiv 0$ . En utilisant le principe de superposition, on montre alors que la fonction de transfert globale pour les deux entrées est :

$$S = S_{P \equiv 0} + S_{E \equiv 0}$$

$$S = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} E + \frac{H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} P$$

## 6. Graphe de fluence

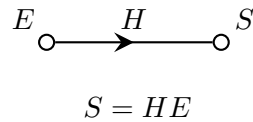
Nous discutons ici d'une approche sensiblement différente pour la représentation graphique des relations mathématiques intervenants dans les **SLCI**. Cette partie est largement inspirée de [15]. Elle peut être omise au cours d'une première lecture. L'algèbre de ces graphes de fluence est cependant très efficace et trouve de nombreuses applications en dehors de l'automatique.

### 6.1. Définitions

#### Branche et noeud

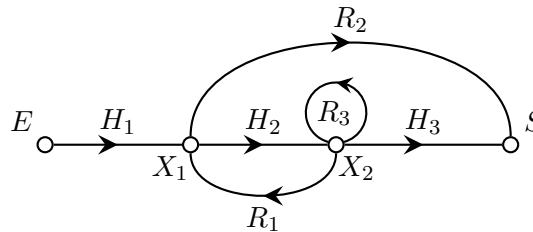
Dans l'application qui nous intéresse, un graphe de fluence peut être vu comme un schéma fonctionnel allégé. En effet, le graphe de fluence ne comporte que deux éléments de base : le **noeud** et la **branche orientée**. Les noeuds portent les variables du système (entrée, sortie, perturbation, commande...). Une branche reliant deux noeuds peut être ornée du facteur multiplicatif ou de la fonction de transfert.

L'équation (2.1) reliant une entrée et sortie par l'intermédiaire d'une fonction de transfert se représente par le graphe de fluence suivant :



#### Source, puits et parcours

Nous allons considérer le graphe de fluence suivant, pour illustrer différentes définitions :



**Figure 2.1.** – Graphe de fluence présentant les différents éléments de bases, types de noeuds et de branches.

- Une **source** ou noeud d'entrée est un noeud dont toutes les branches sont divergentes. Exemple : le noeud  $E$  est une source.
- Un **puits** ou noeud de sortie est un noeud dont toutes les branches sont convergentes. Exemple : le noeud  $S$  est un puits.
- Un **parcours** est une succession continue, unidirectionnelle de branches. Exemples :  $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$ ,  $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$ ,  $\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$ ,  $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$



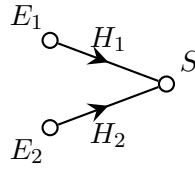
- Un **parcours ouvert** est un parcours le long duquel chaque noeud n'est franchi qu'une fois. Exemples :  $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$ ,  $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$
- Un **parcours fermé** ou **boucle** est un parcours qui aboutit au noeud dont il est parti, chaque autre noeud n'étant franchi qu'une seule fois. Exemples :  $\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1\}$ ,  $\{X_2 \rightarrow X_2\}$  (cette dernière est appelée boucle élémentaire)

## 6.2. Algèbre des graphes de fluences

Nous présentons ici 7 opérations de bases liées à l'algèbre des graphes de fluence.

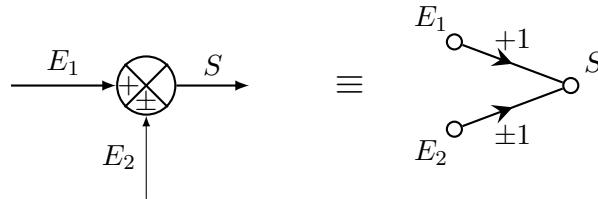
### 1. Addition en un noeud

La valeur d'un noeud est égale à la somme de tous les signaux convergeant vers ce noeud.



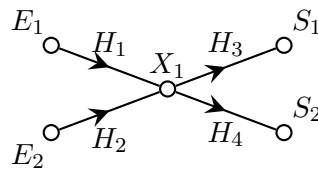
$$S = H_1 E_1 + H_2 E_2$$

Le comparateur/sommeur présentait précédemment est équivalent au graphe de fluence suivant :



### 2. Distribution par un noeud

La valeur d'un noeud est transmise par chaque branche quittant ce noeud.



Ce graphe représente les équations suivantes :

$$\begin{aligned} X_1 &= H_1 E_1 + H_2 E_2 \\ S_1 &= H_3 X_1 = H_1 H_3 E_1 + H_2 H_3 E_2 \\ S_2 &= H_4 X_1 = H_1 H_4 E_1 + H_2 H_4 E_2 \end{aligned}$$

### 3. Branches en série

Un suite de branches en série peut être réduite à une unique branche, dont la fonction de transfert est égale au produit des fonctions de transfert des diverses branches.

$$E \xrightarrow{H_1} X \xrightarrow{H_2} S \quad \equiv \quad E \xrightarrow{H_1 H_2} S$$

### 4. Branche en parallèle

Deux ou plusieurs branches connectées en parallèle, reliant le même noeud d'origine au même noeud extrémité, peuvent être réduites par une branche unique, dont la fonction de transfert est égale à la somme des fonctions de transfert des diverses branches.

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{H_1} \\ \xrightarrow{H_2} \end{array} S \quad \equiv \quad E \xrightarrow{H_1 + H_2} S$$

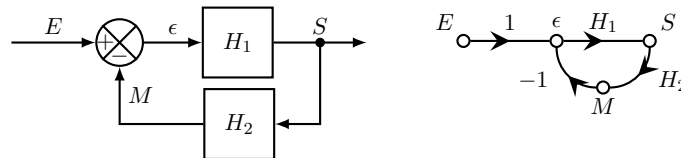
### 5. Absorption d'un noeud

Un noeud qui n'est ni une source ni un puits peut être supprimé de la manière suivante :

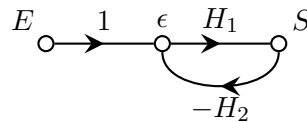
$$\begin{array}{c} E_1 \xrightarrow{H_1} \\ E_2 \xrightarrow{H_2} \end{array} X \xrightarrow{K} S \quad \equiv \quad \begin{array}{c} E_1 \xrightarrow{KH_1} \\ E_2 \xrightarrow{KH_2} \end{array} S$$

### 6. Boucles de contre-réaction

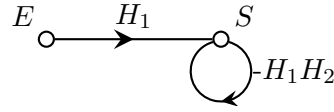
Considérons la boucle de contre-réaction définie par le schéma fonctionnel et le graphe de fluence équivalent :



La variable  $M$  du graphe de fluence peut être réduit, ce qui donne :



Il est possible d'éliminer le noeud porté par la variable  $\epsilon$  :



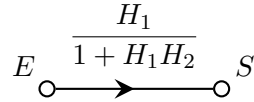
Ce dernier graphe exprime la relation suivante :

$$S = H_1 E - H_1 H_2 S$$

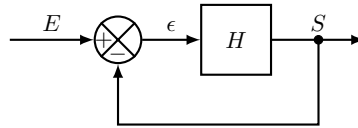
d'où l'expression déjà établie :

$$S = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} E,$$

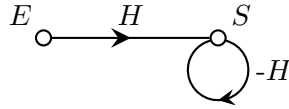
qui se représente simplement par le graphe de fluence :



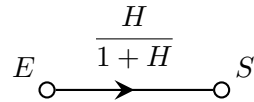
Comme nous l'avons déjà discuté, dans le cas d'une boucle de contre-réaction unitaire, la branche de retour est égale à 1



De la même manière que précédemment, le graphe de fluence se limite à deux noeud et deux branches (dont une boucle élémentaire).



La fonction de transfert est simplement représentée par le graphe suivant<sup>4</sup>



<sup>4</sup>Remarquons que le graphe précédent exprime la relation  $S = H(E - S)$  qui nous donne bien la fonction de transfert  $\frac{H}{1+H}$ . Cependant, cette expression exprime une grandeur que l'on cherche en fonction d'elle même. En remplaçant,  $S$  par sa définition  $H(E - S)$ , on obtient

$$S = HE - H(H(E - S)) = HE - H^2 E + H^2 S = H(1 - H)E + H^2 S.$$

En procédant de même avec cette nouvelle expression, on obtient une relation de récurrence.

$$S = EH \sum_k^n (-1)^k H^k + (-1)^{(n+1)} H^{n+1} S$$

Pour  $n \rightarrow \infty$ , on reconnaît la série géométrique  $\sum_k^n (-1)^k H^k = \frac{1}{1+H}$  et  $H^{n+1} \rightarrow 0$  pour  $|H| < 1$ . La sortie  $S$  tend donc bien vers la fonction de transfert attendue, seulement si  $|H| < 1$ . Cette dernière condition pourra être interprétée comme une limite de stabilité du gain de la fonction de transfert dans le cas d'un système dans une boucle de contre réaction.

### 7. Le gain d'un parcours

Le gain d'un parcours est le produit des toutes les fonctions de transfert des branches parcourues.

### 6.3. Règle de Mason

Ces opérations de bases vont nous permettre d'introduire la règle de Mason<sup>5</sup>. Cette règle permet de réduire le graphe de fluence et déterminer la fonction de transfert entre l'entrée et la sortie d'un graphe de fluence.

La fonction de transfert globale  $H$  entre la source  $E$  et le puits  $S$  d'un graphe de fluence est égale à

$$H = \frac{S}{E} = \frac{1}{\Delta} \sum_k G_k \Delta_k \quad (2.10)$$

où

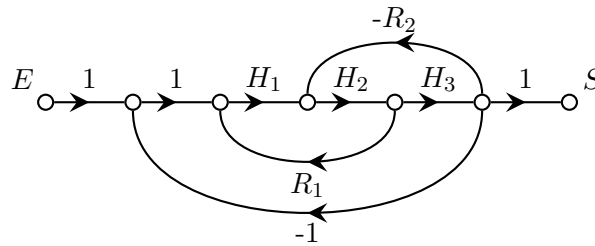
- $k$  dénombre les parcours ouverts entre  $E$  et  $S$ ,
- $G_k$  est le gain du  $k$ -ème parcours ouverts
- $\Delta$  est le **déterminant du graphe**, donné par :

$$\Delta = 1 - \sum_i B_i - \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k \dots \quad (2.11)$$

où les  $B_i$  sont les gains des boucles du graphe de fluence, d'abord pris séparément ( $\sum_i B_i$ ) puis deux à deux ( $\sum_{i,j} B_i B_j$ ), puis par trois ( $\sum_{i,j,k} B_i B_j B_k$ ) et ainsi de suite. On ne prend en compte que les produits de boucles disjoints, c'est à dire n'ayant aucun noeud en commun.

- $\Delta_i$  est le déterminant du graphe obtenu en supprimant le parcours ouvert de gain  $G_i$ .

#### Exemple 1



Ce graphe de fluence possède trois boucles de gain :

<sup>5</sup>Samuel Jefferson Mason (1921-1974), électronicien américain.

- $-H_1H_2H_3$
- $R_1H_1H_2$
- $-R_2H_2H_3$

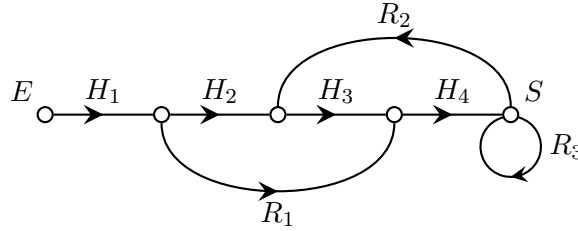
et un parcours ouvert  $H_1H_2H_3$  de déterminant  $\Delta_k = 1$ . Les boucles étant toutes disjointes, le déterminant du graphe est donc simplement donné par :

$$\Delta = 1 - R_1H_1H_2 + H_1H_2H_3 + R_2H_2H_3$$

La fonction de transfert de ce graphe de fluence est donc :

$$H = \frac{H_1H_2H_3}{1 - R_1H_1H_2 + H_1H_2H_3 + R_2H_2H_3}$$

### Exemple 2



Ce graphe de fluence présente 2 boucles non disjointes de gain  $R_3$  et  $R_2H_3H_4$  et 2 parcours ouverts de gain  $H_1H_2H_3H_4$  et  $R_1H_1H_4$ . Le déterminant du graphe est donc donné par

$$\Delta = 1 - R_3 - R_2H_3H_4$$

La fonction de transfert associé à ce graphe de fluence est donc :

$$H = \frac{H_1H_2H_3H_4 + R_1H_1H_4}{1 - R_3 - R_2H_3H_4}$$



# 3. Modélisation des SLCI et leurs réponses temporelles

## Sommaire

---

<b>1. Introduction</b>	<b>64</b>
<b>2. Système du premier ordre</b>	<b>65</b>
2.1. Définition d'un système du premier ordre	65
2.2. Fonction de transfert d'un système du premier ordre	65
2.3. Pôle de la fonction de transfert du premier ordre	65
2.4. Réponses temporelles d'un système du premier ordre	65
<b>3. Système du second ordre</b>	<b>70</b>
3.1. Définition d'un système du second ordre	70
3.2. Fonction de transfert d'un système du second ordre	70
3.3. Pôles de la fonction de transfert du second ordre	70
3.4. Réponses temporelles d'un système du second ordre	72
3.5. Cas particulier de l'oscillateur harmonique	87
<b>4. Autres modèles particuliers</b>	<b>88</b>
4.1. Gain pur	88
4.2. Intégrateur pur	88
4.3. Dérivateur pur	89
4.4. Retard pur	89
<b>5. Généralisation des modèles de SLCI</b>	<b>90</b>
5.1. Systèmes d'ordre supérieur à 2	90
5.2. Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3	91
<b>6. Identification d'un modèle de comportement</b>	<b>92</b>
6.1. Formule de Bureau	92
6.2. Modèle de Strejc	92

---

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier la réponse temporelle de différents systèmes modèles. Ces modèles sont

- les systèmes du **premier ordre**,
- les systèmes du **second ordre**,
- les systèmes gain, intégrateur, dérivateur et retard purs.

Ces modèles reflètent les différentes équations différentielles et systèmes physiques généralement rencontrés dans la nature. Les deux plus importants sont les systèmes du premier et second ordre qui sont pour cette raison examinés en détail. Nous généraliserons aux systèmes d'ordre supérieur en montrant que toute fonction de transfert peut se factoriser en un produit de ces systèmes modèles.

Nous suivrons la même présentation pour tous les modèles : nous donnerons d'abord l'équation différentielle régissant le système, puis sa fonction de transfert ainsi que ses pôles, avant de déterminer analytiquement les différentes réponses temporelles : impulsionnelle, indicielle et la réponse à une rampe. Le principal objectif de cette étude est d'établir les caractéristiques de ces modèles à partir de leurs réponses temporelles.



## 2. Système du premier ordre

### 2.1. Définition d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre est un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficient constant du premier ordre (i.e  $n = 1$  pour l'équation (1.1)), de la forme générale :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (3.1)$$

où  $K$  est le gain statique et  $\tau > 0$  la constante de temps du système. La condition sur le signe de  $\tau$  sera discutée au moment de l'établissement des réponses temporelles. L'analyse dimensionnelle de cette équation différentielle, nous permet de confirmer que  $\tau$  a la dimension d'un temps, mais surtout que la dimension du gain statique est donnée par le rapport des dimensions de la sortie sur l'entrée. Autrement dit, c'est un paramètre sans dimension c'est l'entrée et la sortie sont de même nature.

### 2.2. Fonction de transfert d'un système du premier ordre

La transformée de Laplace de l'équation (3.1), dans les conditions de Heaviside, nous donne :

$$\tau pS(p) + S(p) = KE(p)$$

La fonction de transfert  $H(p)$  d'un système du premier ordre est donc de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\tau p + 1} \quad (3.2)$$

### 2.3. Pôle de la fonction de transfert du premier ordre

Un système du premier ordre ne possède qu'un seul pôle qui est trivialement déterminé par la résolution de l'équation :

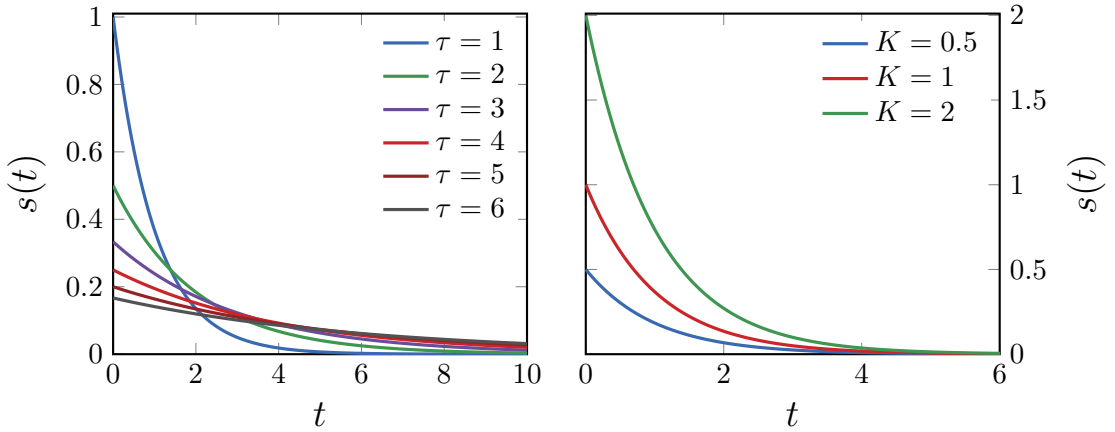
$$\tau p + 1 = 0$$

ce pôle  $p_1 = -\frac{1}{\tau}$  est donc réel négatif pour  $\tau > 0$ . La fonction de transfert d'un système du premier peut alors s'écrire sous la forme factorisée suivante

$$H(p) = \frac{K}{(p - p_1)} = \frac{K}{\tau \left( p + \frac{1}{\tau} \right)}$$

### 2.4. Réponses temporelles d'un système du premier ordre

Nous allons maintenant établir les réponses temporelles d'un système du premier ordre aux signaux usuels présentés au chapitre [chapitre 1](#).



**Figure 3.1.** – Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre avec :  $E_0 = 1$  et (gauche) différentes valeurs de la constante de temps  $\tau$  pour  $K = 1$  ; (droite) différentes valeurs du gain  $K$  pour  $\tau = 1$  (Équation (3.3)).

#### 2.4.1. Réponse impulsionnelle

Nous considérons une excitation impulsionnelle de la forme :

$$e(t) = E_0 \delta(t),$$

où  $\delta(t)$  est l'impulsion de Dirac et  $E_0$  est une constante.

La réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre est, dans le domaine de Laplace, de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{(\tau p + 1)}.$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f ligne 7 du tableau de l'Annexe D), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = \frac{KE_0}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (3.3)$$

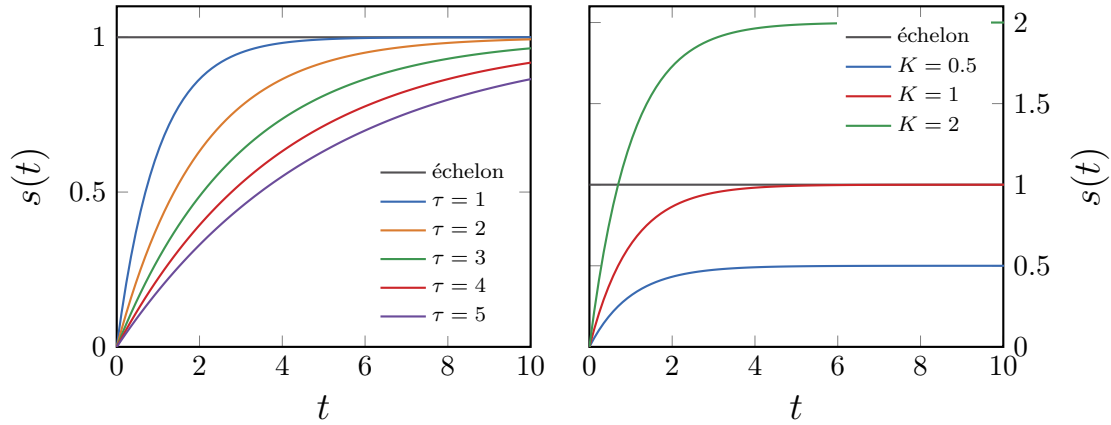
Cette réponse correspond à une simple exponentielle décroissante pour  $\tau > 0$ . La figure 3.1 présente la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre pour différentes valeurs de la constante de temps  $\tau$ . On observe que pour  $t \rightarrow \infty$ , la valeur de  $s(t)$  tend vers 0, ce qui est caractéristique d'un système stable. Nous pouvons donc considérer que  $\tau$  est strictement positif pour une question de stabilité.

Il est également possible d'observer que la pente à l'origine dépend de la constante de temps. La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle  $s(t)$

$$s'(0) = -\frac{KE_0}{\tau^2}$$

	$t = 0.5\tau$	$t = \tau$	$t = 3\tau$	$t = 7\tau$
$\frac{s(t)}{KE_0}$	0.606	0.368	0.05	$\sim 0$

**Tableau 3.1.** – Quelques valeurs particulières de la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.



**Figure 3.2.** – Réponse indicielle d'un système du premier ordre avec :  $E_0 = 1$  et (gauche) pour différentes valeurs de  $\tau$  et avec  $K = 1$  ; (droite) pour différentes valeurs du gain  $K$  et avec  $\tau = 1$ .

La pente à l'origine est négative et inversement proportionnelle au carré de la constante de temps du système  $\tau$ .

Le [tableau 3.1](#) donne quelques valeurs particulières de la réponse impulsionnelle. D'après celui-ci, on constate que le temps  $t_{5\%}$  de réponse à 5% est de l'ordre de  $3\tau$  (i.e  $-\log 5\%$ ). Le transitoire est lui de l'ordre de  $7\tau$  (c'est à dire le temps à partir duquel on considère que le signal est nul).

### 2.4.2. Réponse indicielle

Pour déterminer la réponse indicielle, nous considérons une entrée  $e(t)$  en échelon telle que :

$$e(t) = E_0 \cdot u(t),$$

où  $u(t)$  est l'échelon unitaire et  $E_0$  est une constante.

Dans le domaine de Laplace la sortie est donc de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{p(1 + \tau p)} = \frac{KE_0}{\tau p(p + \frac{1}{\tau})}$$

	$t = 0.5\tau$	$t = \tau$	$t = 3\tau$	$t = 7\tau$
$\frac{s(t)}{KE_0}$	0.393	0.632	0.950	0.999

**Tableau 3.2.** – Quelques valeurs particulières de la réponse indicielle d'un système du premier ordre.

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f ligne 11 du tableau de l'Annexe D), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (3.4)$$

La figure 3.2 présente cette réponse indicielle pour différentes valeurs de la constante de temps  $\tau$ . Pour  $t \rightarrow \infty$ , la valeur de  $s(t)$  tend vers  $KE_0$ . La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle  $s(t)$

$$s'(0) = \frac{KE_0}{\tau}$$

La pente à l'origine est positive et inversement proportionnelle à la constante de temps du système.

Le tableau 3.2 donne quelques valeurs particulières de la réponse indicielle. D'après celui-ci, on constate que le temps de réponse à 5%  $t_{5\%}$  (temps au bout duquel la réponse indicielle atteint 95% du signal final) est donné par :

$$t_{5\%} = -\tau \log 0.05 \sim 3\tau.$$

Le temps de montée  $t_m$  (temps au bout duquel la réponse de 10% à 90% du signal final) est donné par :

$$t_m = -\tau \log \frac{0.1}{0.9} \sim 2.2\tau$$

### 2.4.3. Réponse à une rampe

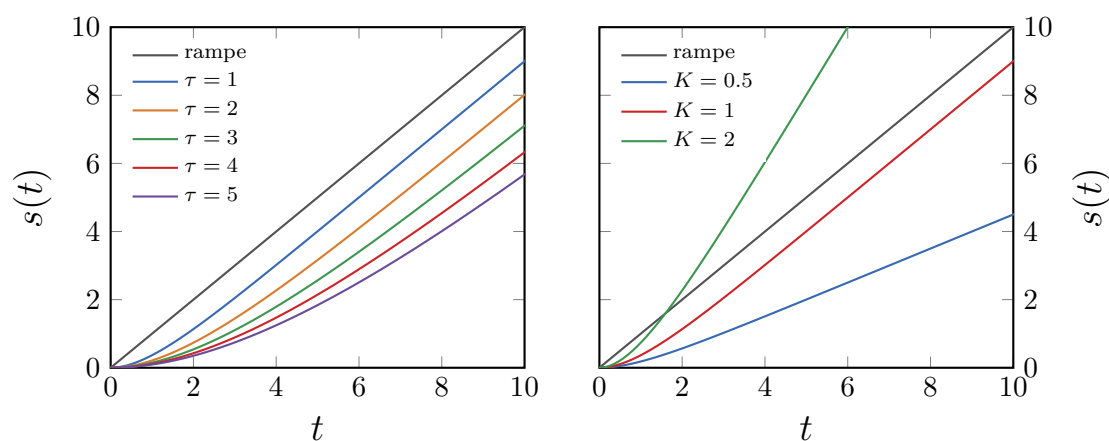
Nous considérons maintenant une excitation rampe de la forme :

$$e(t) = E_0 \cdot r(t) = E_0 t \cdot u(t)$$

où  $E_0$  est une constante,  $r(t)$  est la fonction rampe unitaire et  $u(t)$  la fonction échelon. La réponse à une rampe d'un système du premier ordre est, dans le domaine de Laplace, de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{p^2(1 + \tau p)}$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f ligne 12 du tableau de l'Annexe D), nous



**Figure 3.3.** – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre avec  $E_0 = 1$ . (gauche) Pour différentes valeurs de  $\tau$  et  $K = 1$  (droite) Pour différentes valeurs du gain  $K$  et  $\tau = 1$ .

donne la forme générale de la réponse à une rampe d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = KE_0 \left( t - \tau(1 - e^{-t/\tau}) \right) \quad (3.5)$$

La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle  $s(t)$ . On constate alors que  $s'(0) = 0$  quelque soit  $\tau$ . À la limite  $t \rightarrow \infty$  la réponse à une rampe tend vers  $t - \tau$ .

### 3. Système du second ordre

#### 3.1. Définition d'un système du second ordre

Un système du second ordre est un système régi par une équation différentielle du second ordre de forme générale :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

où  $\xi > 0$  est le coefficient d'amortissement,  $K$  le gain statique et  $\omega_0 > 0$  la pulsation propre du système. Cette pulsation est celle de l'oscillateur harmonique équivalent sans amortissement ( $\xi = 0$ ).

#### 3.2. Fonction de transfert d'un système du second ordre

La transformée de Laplace de l'équation différentielle est, lorsque les CI sont toutes nulles :

$$S(p) (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2) = K\omega_0^2 E(p).$$

La fonction de transfert  $H(p)$  de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (3.6)$$

La forme suivante, pour laquelle on a factorisée par  $\omega_0^2$ , est également très courante :

$$H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1}$$

#### 3.3. Pôles de la fonction de transfert du second ordre

Les pôles de la fonction de transfert sont donnés par les racines du polynôme :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

le discriminant de ce polynôme est :

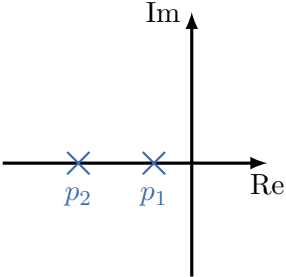
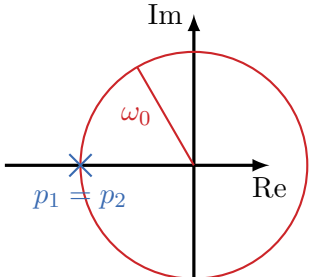
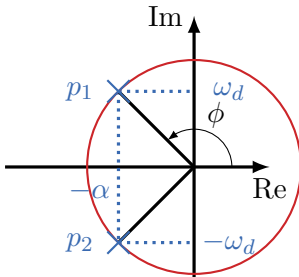
$$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$$

Les racines de ce polynôme dépendent donc du signe de  $\Delta$  et ainsi de la valeur du taux d'amortissement  $\xi$  définissant les différents régimes d'un système du second ordre :

- Régime apériodique pour  $\xi > 1$
- Régime apériodique critique pour  $\xi = 1$
- Régime pseudo-périodique pour  $0 < \xi < 1$

à noter que le cas  $\xi = 0$  correspond à un régime périodique associé à l'oscillateur harmonique au cas de l'oscillateur harmonique. Le cas  $\xi < 0$  correspond à un cas divergent par définition (instable) et ne sera donc pas traité.

Le **tableau 3.3** résume les différents types de pôles rencontrés dans les différents régimes du système du second ordre.

Régime	Pôles	Carte des pôles
Régime apériodique $\xi > 1$	Deux pôles réels $p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$	
Régime apériodique critique $\xi = 1$	Un pôle double réel $p_1 = p_2 = -\omega_0$	
Régime pseudo-périodique $0 < \xi < 1$	Deux pôles complexes conjugués $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ avec $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$	

**Tableau 3.3.** – Pôles de la fonction de transfert d'un système du second ordre selon le régime associé à l'amortissement.

Quelque soit le régime du système du second ordre, on peut écrire la fonction de transfert

de la façon suivante en utilisant les pôles appropriés :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Nous remarquerons également que le produit  $p_1 p_2 = \omega_0^2$  quelque soit le régime du système, cette relation nous sera très utile pour l'établissement des réponses temporelles des différents régimes.

### 3.4. Réponses temporelles d'un système du second ordre

Nous allons ici, comme dans le cas des systèmes du premier ordre données les formes analytiques des réponses temporelles (impulsionnelle, indicielle et rampe) des systèmes du second ordre. On trouvera les représentations graphiques de ces réponses temporelles à l'[Annexe H](#).

#### 3.4.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

où  $E(p) = 1$  dans le cas d'une impulsion de Dirac unitaire<sup>1</sup>.

Étudions la forme analytique des réponses impulsionnelles dans les différents régimes du système du second ordre. Nous rappelons que l'étude de la réponse impulsionnelle revient à étudier la fonction de transfert du système.

À l'aide du théorème de la valeur finale, il est d'ores et déjà possible de déterminer la valeur finale de la réponse indicielle quelque soit le régime.

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = 0$$

Un système du second ordre est intrinsèquement stable au vu de la définition de la stabilité.

**Dans le cas  $\xi > 1$  (régime apériodique),**

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f ligne 16 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime apériodique :

---

<sup>1</sup>Nous avons ici posé  $E_0 = 1$  pour alléger la notation.

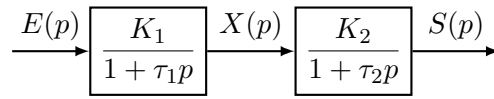


$$s(t) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (3.7)$$

les exponentielles étant sans unité, les pôles sont d'unité d'inverse d'un temps, posons donc  $p_1 = -1/\tau_1$  et  $p_2 = -1/\tau_2$ , la réponse devient :

$$s(t) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (3.8)$$

les paramètres  $\tau_1$  et  $\tau_2$  peuvent être considérés comme les constante de temps de deux systèmes du premier ordre fictifs placés en série :



où  $K_1 K_2 = K$ . Dans le régime apériodique un système du second ordre sera toujours considéré comme la mise en cascade de deux systèmes du premier ordre.

**Dans le cas  $\xi = 1$  (régime apériodique critique),**

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2}$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f ligne 8 du tableau de l'Annexe D), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime apériodique critique :

$$s(t) = K\omega_0^2 t e^{p_1 t} \quad (3.9)$$

posons  $p_1 = -1/\tau$ , la réponse devient :

$$s(t) = K\omega_0^2 t e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.10)$$

**Dans le cas  $0 < \xi < 1$  (régime pseudo-périodique),**

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{\omega_0^2}{(p + \xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})(p + \xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})}$$

en posant  $\alpha = \xi\omega_0$  et  $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ , la sortie  $S(p)$  devient :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha - j\omega_d)(p + \alpha + j\omega_d)} = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} = \frac{K\omega_d}{1 - \xi^2} \cdot \frac{\omega_d}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f ligne 30 du tableau de l'Annexe D), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique :

$$s(t) = \frac{K\omega_d}{1 - \xi^2} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_d t \quad (3.11)$$

### 3.4.2. Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

où  $E(p) = \frac{E_0}{p}$  est une entrée échelon.

Étudions la forme analytique des réponses indicielles dans les différents régimes du système du second ordre.

À l'aide du théorème de la valeur finale, il est d'ores et déjà possible de déterminer la valeur finale de la réponse indicielle quelque soit le régime.

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = KE_0$$

**Dans le cas  $\xi > 1$  (régime apériodique),**

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f ligne 19 du tableau de l'Annexe D), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique :

$$s(t) = KE_0 \left( 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right) \quad (3.12)$$

posons  $p_1 = -1/\tau_1$  et  $p_2 = -1/\tau_2$ , la réponse devient :

$$s(t) = KE_0 \left( 1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \right) \quad (3.13)$$

Nous pouvons à nouveau envisager cette réponse comme la réponse de deux systèmes du premier ordre en série.

**Dans le cas  $\xi = 1$  (régime apériodique critique),**

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f ligne 14 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique critique :

$$s(t) = \frac{KE_0\omega_0^2}{p_1^2} \left( 1 - (1 - p_1 t)e^{p_1 t} \right)$$

$$s(t) = KE_0 \left( 1 - e^{p_1 t} + p_1 t e^{p_1 t} \right) \quad (3.14)$$

en posant  $p_1 = -\frac{1}{\tau}$ , on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (3.15)$$

**Dans le cas  $0 < \xi < 1$  (régime pseudo-périodique),**

la sortie  $S(p)$  dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

où l'on a posé  $\alpha = \xi\omega_0$  et  $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ .

Décomposons  $S(p)$  en éléments simples,

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B(p + \alpha) + C}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

procédons par évaluation pour  $A$  :

$$A = pS(p) \Big|_{p=0} = \frac{KE_0\omega_0^2}{\alpha^2 + \omega_d^2} = KE_0$$

et identification pour B et C :

$$\begin{aligned}
 & KE_0((p + \alpha)^2 + \omega_d^2) + Bp^2 + \alpha Bp + Cp = KE_0\omega_0^2 \\
 \iff & KE_0p^2 + 2KE_0\alpha p + KE_0(\alpha^2 + \omega_d^2) + Bp^2 + \alpha Bp + Cp = KE_0\omega_0^2 \\
 \iff & \begin{cases} B + KE_0 = 0 \\ 2KE_0\alpha + \alpha B + C = 0 \end{cases} \\
 \iff & \begin{cases} B = -KE_0 \\ C = -KE_0\alpha \end{cases}
 \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 S(p) &= KE_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} - \frac{\alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right) \\
 S(p) &= KE_0 \left( \frac{1}{p} - \frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_d}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right)
 \end{aligned}$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f lignes 3, 30 et 31 du tableau de l'Annexe D), nous permet de déterminer la réponse indicielle :

$$\begin{aligned}
 s(t) &= KE_0 \left( 1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) \right) \\
 s(t) &= KE_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\alpha t} \left( \sqrt{1 - \xi^2} \cos(\omega_d t) + \xi \sin(\omega_d t) \right) \right)
 \end{aligned}$$

en posant :

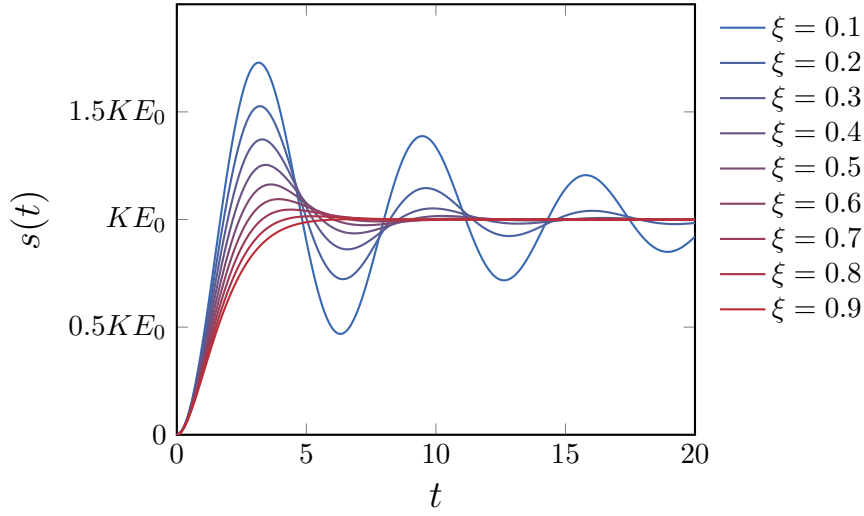
$$\begin{aligned}
 \cos \phi &= \xi \\
 \sin \phi &= \sqrt{1 - \xi^2}
 \end{aligned}$$

on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\alpha t} (\sin \phi \cos(\omega_d t) + \cos \phi \sin(\omega_d t)) \right)$$

et enfin la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique s'écrit :

$$s(t) = KE_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \right) \quad (3.16)$$



**Figure 3.4.** – Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique pour différentes valeurs du taux d'amortissement  $\xi$  (Équation (3.5)) avec  $\omega_0 = 1$ .

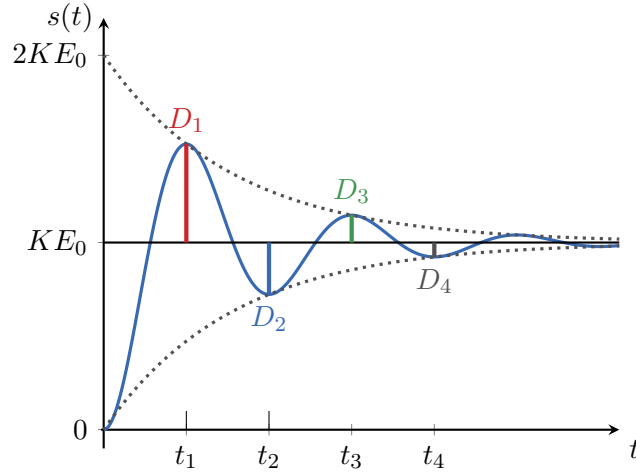
La valeur finale est obtenue pour

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p)$$

Il est maintenant possible d'interpréter les différentes grandeurs introduites. En effet, cette réponse a la forme d'une sinusoïde de pulsation  $\omega_d$  (dite pseudo-pulsation), de phase  $\phi$  et amortie par une exponentielle décroissante dépendant de  $\xi$ . La figure 3.4 présente cette réponse indicielle du régime pseudo-périodique pour différentes valeurs du taux d'amortissement pour une pulsation propre  $\omega_0 = 1$ . Nous constatons que comme attendu, l'amplitude des oscillations augmente lorsque le taux d'amortissement diminue.

### Dépassement et temps de réponse à 5%

Certaines propriétés de la réponse indicielle dans le régime pseudo-périodique sont fortement dépendantes du taux d'amortissement. C'est le cas du dépassement et du temps de réponse. La [figure 3.5](#) présente la réponse à un échelon unitaire pour un amortissement de  $\xi = 0.2$ , on observe que les dépassements successifs sont de moins en moins importants. Pour déterminer la relation entre le dépassement et le taux d'amortissement, il nous faut d'abord déterminer le temps du premier maximum  $t_1$ .



**Figure 3.5.** – Définition du dépassement observé dans le cas de la réponse indicielle en régime pseudo-périodique d'un système du second ordre. Les deux enveloppes correspondent aux exponentielles décroissantes  $1 + e^{-\alpha t}$  et  $1 - e^{-\alpha t}$ .

Pour cela il suffit de déterminer le temps pour lequel la dérivée du signal  $s(t)$  s'annule. On calcul alors un temps  $t_1$  à  $T_d/2$  où  $T_d$  est la pseudo-période définie à partir de la pseudo-pulsation  $\omega_d$ . On a alors :

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

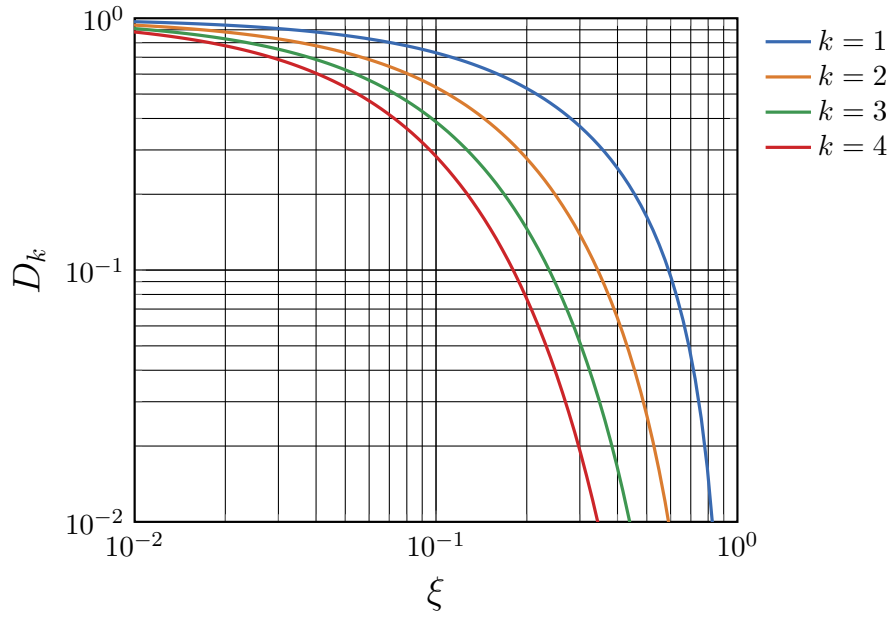
$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Formellement, le premier dépassement est défini par :

$$D_1 = \left| \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)} \right|$$

où  $s(0)$ ,  $s(\infty)$  et  $s(t_1)$  sont respectivement la valeur initiale, la valeur finale et la valeur du premier maximum du signal.

La valeur  $s(t_1)$  s'obtient en remplaçant la valeur de  $t_1$  dans la forme analytique de la



**Figure 3.6.** – Variation de la valeur  $D_k$  du  $k$ -ème dépassement en fonction du taux d'amortissement  $\xi$ .

réponse indicielle du régime pseudo-périodique (Section 3.1.3) :

$$\begin{aligned} s(t_1) &= KE_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha t_1} \sin(\omega_d t_1 + \phi) \right) \\ s(t_1) &= KE_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha \pi / \omega_d} \sin(\pi + \phi) \right) \\ s(t_1) &= KE_0 (1 + e^{-\alpha \pi / \omega_d}) \end{aligned}$$

Le dépassement est donc donné par l'expression :

$$D = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3.17)$$

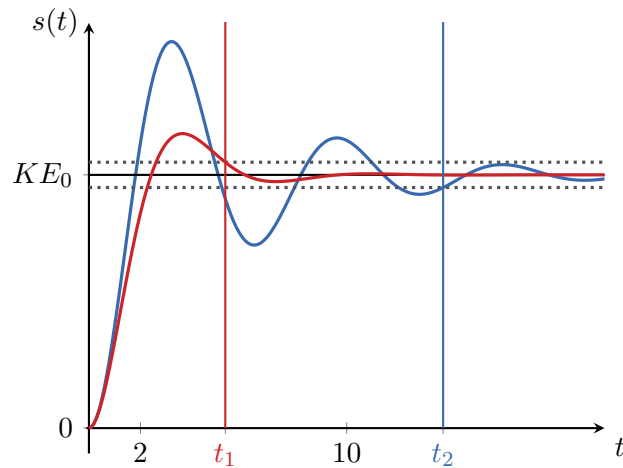
et le  $k$ -ème dépassement  $D_k$  est lui donné par :

$$D_k = e^{-\frac{k \xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3.18)$$

La figure 3.6 présente cette relation entre le dépassement et le taux d'amortissement. Il

est possible d'utiliser cette figure comme un abaque<sup>2</sup> facilitant le calcul du dépassement connaissant le taux d'amortissement et inversement.

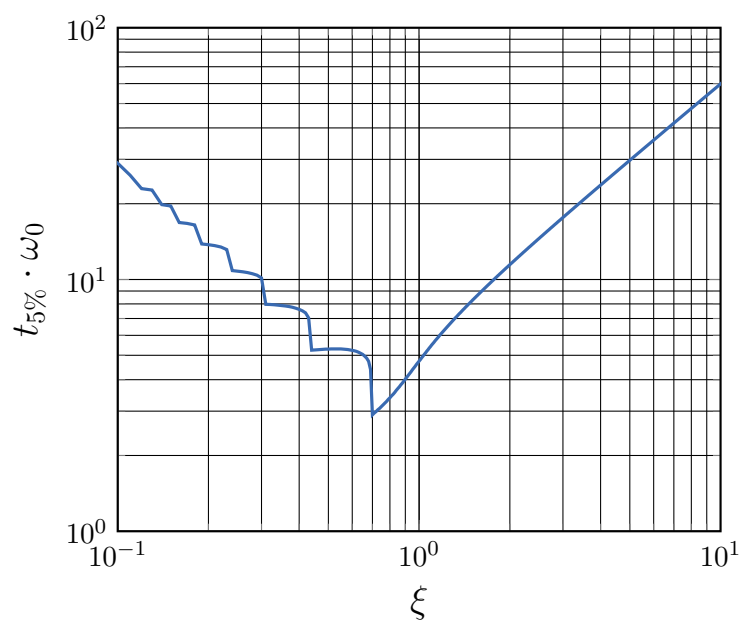
Il n'existe pas de relation analytique simple pour déterminer le temps de réponse à 5% (c.f définition donnée par la [figure 3.7](#)) en fonction du taux d'amortissement. Nous avons alors procédé par une méthode numérique, qui pourra constituer un exercice de travaux pratiques sous Scilab (??). La [figure 3.8](#) présente la variation du temps de réponse à 5% réduit à la pulsation (i.e  $\omega_0 \cdot t_{5\%}$ ) en fonction du taux d'amortissement  $\xi$ . On observe un minimum du temps de réponse pour  $\xi \sim 0.7$



**Figure 3.7.** – Définition du temps de réponse à 5% dans le cas de la réponse indicielle en régime pseudo-périodique d'un système du second ordre. Le temps de réponse à 5% est défini comme le temps minimal pour que le signal soit compris dans une bande à  $\pm 5\%$  autour de la valeur finale. Réponse indicielle pour (bleu)  $\xi = 0.2$  et (rouge)  $\xi = 0.5$ .

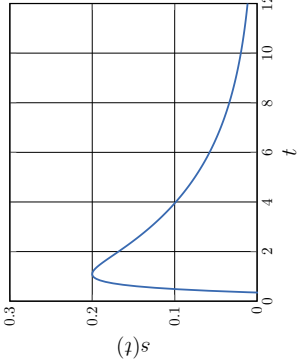
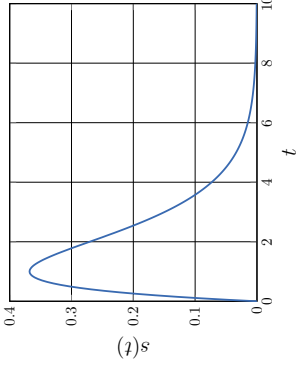
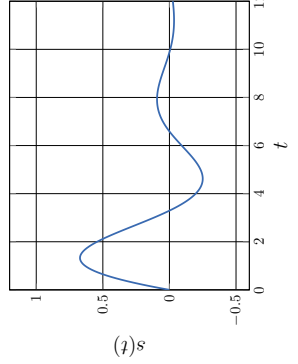
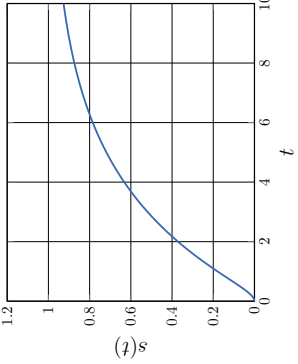
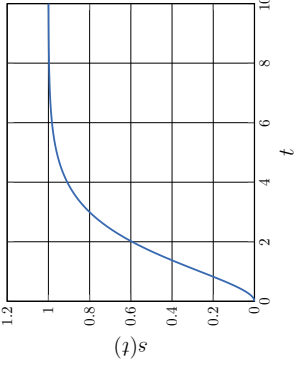
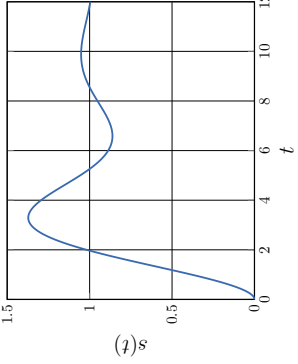
<sup>2</sup>Les abaques sont très répandus en automatique. Ils permettent de s'affranchir de nombreux calculs en lisant des valeurs directement sur un graphique.





**Figure 3.8.** – Temps de réponse à 5% réduit en fonction du taux d'amortissement  $\xi$ . Le minimum est atteint pour  $\xi \sim 0.7$  pour lequel  $\omega_0 \cdot t_{5\%} \sim 3$ .

**Tableau 3.4.** – Réponses temporelles d'un système du 2nd ordre pour les différents régimes.

Réponse	Régime apériodique ( $\xi > 1$ )	Régime critique ( $\xi = 1$ )	Régime pseudo-périodique ( $0 < \xi < 1$ )
Réponse impulsionnelle	 $s(t) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$	 $s(t) = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	 $s(t) = \frac{\omega_d}{1 - \xi^2} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_d t$
Réponse indicielle	 $s(t) = 1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$	 $s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$	 $s(t) = 1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \phi)$

Paramètres : (pour tous)  $K = 1$ ,  $E_0 = 1$  (apériodique)  $\xi = 2$ ,  $\omega_0 = 1$  (i.e  $\tau_1 = 3.73$  et  $\tau_2 = 0.26$ ) (critique)  $\xi = 1$ ,  $\omega_0 = 1$  (i.e  $\tau = 1$ ) (pseudo-périodique)  $\xi = 0.3$  et  $\omega_0 = 1$

### 3.4.3. Réponse à une rampe

La réponse à une rampe d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

où  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$  est un signal rampe. Étudions la forme analytique des réponses à une rampe dans les différents régimes du système du second ordre.

**Dans le cas  $\xi > 1$  (régime apériodique),**

écrivons la sortie  $S(p)$  sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

la décomposition en éléments simples de  $S(p)$  s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p - p_1} + \frac{D}{p - p_2}.$$

Procédons par évaluation pour obtenir les coefficients  $B$ ,  $C$  et  $D$  :

$$\begin{aligned} B &= p^2 S(p) \Big|_{p=0} = K E_0, \\ C &= (p - p_1) S(p) \Big|_{p=p_1} = \frac{K E_0 \omega_0^2}{p_1^2 (p_1 - p_2)} = \frac{K E_0 p_2^2}{\omega_0^2 (p_1 - p_2)}, \\ D &= (p - p_2) S(p) \Big|_{p=p_2} = \frac{K E_0 \omega_0^2}{p_2^2 (p_2 - p_1)} = \frac{-K E_0 p_1^2}{\omega_0^2 (p_1 - p_2)}, \end{aligned}$$

et par indentation pour  $A$  :

$$A = K E_0 \frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2}$$

la sortie  $S(p)$  devient alors :

$$S(p) = K E_0 \left( \frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{\omega_0^2 (p_1 - p_2)} \left( \frac{p_2^2}{p - p_1} - \frac{p_1^2}{p - p_2} \right) \right)$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f lignes 4 et 7 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime apériodique :

$$s(t) = K E_0 \left( t + \frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2 (p_1 - p_2)} \left( p_2^2 e^{p_1 t} - p_1^2 e^{p_2 t} \right) \right) \quad (3.19)$$

posons  $p_1 = -1/\tau_1$  et  $p_2 = -1/\tau_2$ , la réponse devient :

$$s(t) = KE_0 \left( t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)} \left( \tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right) \quad (3.20)$$

Dans le cas  $\xi = 1$  (régime apériodique critique),

écrivons la sortie  $S(p)$  sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2} \cdot \frac{E_0}{p^2}.$$

La décomposition en éléments simples de  $S(p)$  s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(p - p_1)} + \frac{D}{(p - p_1)^2}.$$

Procédons par évaluation pour obtenir les coefficients  $B$  et  $D$  :

$$\begin{aligned} B &= p^2 S(p) \Big|_{p=0} = KE_0, \\ D &= (p - p_1)^2 S(p) \Big|_{p=p_1} = KE_0, \end{aligned}$$

par identification on obtient :

$$A = KE_0 \frac{2}{p_1}$$

et en utilisant la parité de la fonction  $C = -A$ .

La sortie  $S(p)$  devient alors :

$$S(p) = KE_0 \left( \frac{2}{p_1} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p_1} \cdot \frac{1}{(p - p_1)} + \frac{1}{(p - p_1)^2} \right)$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f lignes 3, 4, 7 et 8 du tableau de l'Annexe D), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime apériodique critique :

$$s(t) = KE_0 \left( \frac{2}{p_1} + t - \frac{2}{p_1} e^{p_1 t} + t e^{p_1 t} \right) \quad (3.21)$$

posons  $p_1 = -1/\tau$ , la réponse devient :

$$s(t) = KE_0 (t - 2\tau + (t + 2\tau) e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.22)$$

Dans le cas  $0 < \xi < 1$  (régime pseudo-périodique),

écrivons la sortie  $S(p)$  sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \cdot \frac{E_0}{p^2},$$

où, rappelons que  $\alpha = \xi\omega_0$  et  $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$ .

La décomposition en éléments simples de  $S(p)$  s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C(p + \alpha) + D}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2}.$$

Procédons par évaluation pour obtenir le coefficient  $B$  :

$$B = p^2 S(p) \Big|_{p=0} = \frac{KE_0\omega_0^2}{\alpha^2 + \omega_d^2} = KE_0,$$

où  $\alpha^2 + \omega_d^2 = \omega_0^2$  par définition.

Par identification du numérateur, on obtient les relations suivantes sur les coefficients :

$$\begin{cases} p^3 : & A + C = 0 \\ p^2 : & B + 2A\alpha + C\alpha + D = 0 \\ p^1 : & 2B\alpha + A(\alpha^2 + \omega_d^2) = 0 \end{cases}$$

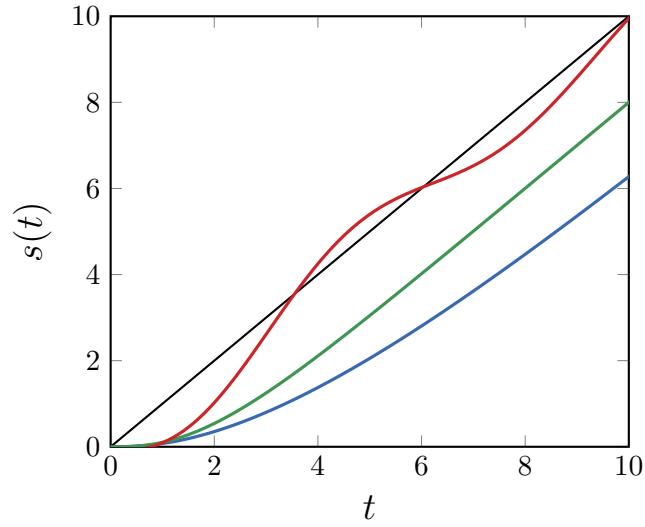
On a alors :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_d^2} B = -\frac{2\xi}{\omega_0} KE_0 \\ C &= -A = \frac{2\xi}{\omega_0} KE_0 \\ D &= -B - A\alpha = KE_0 \left( \frac{2\xi}{\omega_0} \alpha - 1 \right) = KE_0(2\xi^2 - 1) \end{aligned}$$

La sortie  $S(p)$  s'écrit donc :

$$S(p) = KE_0 \left( \frac{1}{p^2} - \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{p} + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right)$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  (c.f lignes 3, 4, 30 et 31 du tableau de l'Annexe D), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime pseudo-



**Figure 3.9.** – Réponse à une rampe d'un système du second ordre en (bleu) régime aperiodique avec  $\xi = 2$ , (vert) régime aperiodique critique (i.e  $\xi = 1$ ) et en (rouge) régime pseudo-periodique avec  $\xi = 0.1$ . Avec  $\omega_0 = 1$ ,  $K = 1$  et  $E_0 = 1$ .

périodique :

$$s(t) = KE_0 \left( t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right)$$

en posant à nouveau :

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \xi \\ \sin \phi &= \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

et en notant que :

$$\begin{aligned} \cos 2\phi &= 1 - 2 \sin^2 \phi = 2\xi^2 - 1 \\ \sin 2\phi &= 2 \sin \phi \cos \phi = 2\xi\sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left( t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{2\xi}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin (\omega_d t + 2\phi) \right) \quad (3.23)$$

### 3.5. Cas particulier de l'oscillateur harmonique

Dans le cas où l'équation différentielle est de la forme

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = K e(t)$$

c'est à dire sans amortissement ( $\xi = 0$ ), on se retrouve alors dans le cas classique de l'oscillateur harmonique. Nous allons ici étudier ce modèle limite qui est d'une grande importance en physique. Ceci afin de constater que l'approche utilisée tout le long de ce chapitre permet également de décrire ce modèle important.

La fonction de transfert de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^2 + \omega_0^2}$$

#### 3.5.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un oscillateur harmonique est, dans le domaine de Laplace, donnée par

$$S(p) = \frac{K E_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

La réponse dans le domaine temporel est donnée par :

$$s(t) = \mathcal{L} \{S(p)\} = \frac{K E_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Ce qui correspond bien à l'oscillation incessante d'un oscillateur non amortie que l'on a déplacé de son état d'équilibre.

## 4. Autres modèles particuliers

### 4.1. Gain pur

Dans le cas où l'équation différentielle<sup>3</sup> régissant le système est de la forme :

$$s(t) = Ke(t)$$

où  $K$  est une constante. On a affaire à un système dit à gain pur. Autrement dit, la sortie est proportionnelle à l'entrée et de même nature. La fonction de transfert d'un tel système s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \quad (3.24)$$

La **réponse impulsionnelle** pour une entrée du type impulsion de Dirac unitaire est elle-même une impulsion de Dirac :

$$s(t) = K\delta(t)$$

De même pour la **réponse indicielle** pour une entrée en échelon  $e(t) = E_0u(t)$

$$s(t) = KE_0u(t)$$

### 4.2. Intégrateur pur

Dans le cas où l'équation différentielle régissant le système est de la forme :

$$\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$$

où  $K$  est un gain. La sortie correspond à l'intégrale de l'entrée :

$$s(t) = K \int_0^t e(\tau) d\tau$$

La fonction de transfert est celle d'un intégrateur pur :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}. \quad (3.25)$$

<sup>3</sup>Bien évidemment dans ce cas présent, l'équation différentielle est d'ordre 0. Ce qui est un cas très particulier d'équation différentielle.



La **réponse impulsionnelle**, pour une entrée unitaire, est la fonction échelon unitaire :

$$s(t) = K \int_0^t \delta(\tau) d\tau = Ku(t)$$

La **réponse indicielle** est une rampe de pente  $KE_0$  :

$$s(t) = KE_0 \int_0^t u(\tau) d\tau = KE_0 [\tau]_0^t = KE_0 t$$

Autrement dit, le système est **instable**.

### 4.3. Dérivateur pur

Dans le cas où l'équation différentielle régissant le système est de la forme :

$$s(t) = K \frac{de(t)}{dt}$$

où  $K$  est un gain. On a à faire à un système dit dérivateur pur. La sortie correspond alors à la dérivée de l'entrée. Sa fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = Kp \quad (3.26)$$

La **réponse impulsionnelle** d'un dérivateur n'est pas définie. La **réponse indicielle** est une impulsion de Dirac, par définition de la dérivée d'un échelon :

$$s(t) = K\delta(t)$$

### 4.4. Retard pur

Un système régit par l'équation différentielle :

$$s(t) = e(t - \tau)$$

est dit à retard pur et sa fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = Ke^{-\tau p} \quad (3.27)$$

Les réponses temporelles sont donc de mêmes natures que leurs sollicitations, elles sont simplement retardées de  $\tau$ .

## 5. Généralisation des modèles de SLCI

Nous venons d'analyser un grand nombre de systèmes modèles d'ordre  $n < 2$ . Nous allons ici généraliser l'approche pour l'étude de systèmes d'ordre supérieur à deux.

### 5.1. Systèmes d'ordre supérieur à 2

Dans le cas d'un système d'ordre  $n > 2$ , il suffit de décomposer en éléments simples la fonction de transfert, qui n'est rien d'autre qu'une fraction rationnelle en  $p$  et d'utiliser la propriété de linéarité de la sortie.

Rappelons (c.f. chapitre 1) que toute fonction de transfert peut être mise sous la forme factorisée suivante

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec  $K$  le gain statique,  $\alpha$  la classe (ou le nombre d'intégrateur) et deux polynômes  $N(p)$  et  $D(p)$ .

Les deux polynômes peuvent se factoriser comme un produit de polynômes irréductibles unitaires, c'est à dire :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod_i (1 + \tau_i p) \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)}{\prod_i (1 + \tau_i p) \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)}$$

en toute rigueur il suffit d'exprimer le rapport des produits comme un simple produits en permettant les exposants d'être négatifs, soit alors la forme plus condensée :

$$H(p) = K p^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p)^{n_i} \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)^{n_j} \quad (3.28)$$

où  $n_i$  et  $n_j$  peuvent être positifs et négatifs.

Après décomposition en éléments simples,  $H(p)$  s'écrit sous la forme d'une somme de systèmes du 1er et second ordre.

$$H(p) = \sum_i H_i(p)$$

La réponse temporelle  $s(t)$  d'un tel système sortie est alors la somme des réponses de chacun des sous systèmes  $H_i(p)$

$$s(t) = \sum_i s_i(t)$$

### 5.2. Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3

Soit un système caractérisé par la fonction de transfert  $H(p)$  tel que :

$$H(p) = \frac{3p + 1}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15}$$

On détermine, après un peu d'algèbre, les trois pôles  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -3$  et  $p_3 = -5$  ainsi que la forme factorisée de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{3p + 1}{(p + 1)(p + 3)(p + 5)}$$

La décomposition en éléments simples est donné par :

$$H(p) = \frac{0.25}{p + 1} + \frac{1}{p + 3} - \frac{1.25}{p + 5}$$

et sous forme factorisée :

$$H(p) = \frac{0.25}{p + 1} + \frac{1/3}{\frac{1}{3}p + 1} - \frac{0.25}{0.2p + 1}$$

La réponse temporelle est donc la somme des réponses temporelles de trois systèmes du premier ordre  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$  et  $H_3(p)$  ayant respectivement pour paramètres ( $K_1 = 0.25, \tau_1 = 1$ ), ( $K_2 = 1/3, \tau_2 = 1/3$ ) et ( $K_3 = -0.25, \tau_3 = 0.2$ )

Pour la réponse indicielle à un échelon d'amplitude  $E_0$  les réponses  $s_i(t)$  de chacune de ces fonctions de transferts sont de la forme :

$$s_i(t) = K_i E_0 (1 - e^{-t/\tau_i})$$

La réponse indicielle du système est alors

$$s(t) = \sum_i s_i(t) = \frac{E_0}{4} (1 - e^{-t}) + \frac{E_0}{3} (1 - e^{-3t}) - \frac{E_0}{4} (1 - e^{-5t})$$

La valeur finale est donnée par la somme algébrique des valeurs finales de chacune des fonctions de transfert.

Cependant, les propriétés telle que le temps de réponse, les pseudo-oscillation (dans le cas de système du second ordre) le dépassement ou encore la stabilité sont gouvernées par la fonction de transfert de temps caractéristique le plus grand. L'influence des pôles dominants seront traités lors de l'étude de chacune des performances attendues par non système asservi.

## **6. Identification d'un modèle de comportement**

### **6.1. Formule de Bureau**

*à compléter (hors programme)...*

### **6.2. Modèle de Strejc**

*à compléter (hors programme)...*

## 4. Analyse fréquentielle et représentation graphique

### Sommaire

---

<b>1.</b>	<b>Réponse harmonique</b>	<b>94</b>
1.1.	Exemple de réponse harmonique dans le domaine temporel	96
<b>2.</b>	<b>Représentation graphique de la réponse harmonique</b>	<b>97</b>
2.1.	Diagramme de Bode	98
2.2.	Diagramme de Nyquist	99
2.3.	Diagramme de Black-Nichols	99
<b>3.</b>	<b>Analyse fréquentielle des modèles usuels</b>	<b>100</b>
3.1.	Diagrammes de Bode : méthodologie générale	100
3.2.	Diagrammes de Nyquist : méthodologie générale	118
3.3.	Diagrammes de Black : méthodologie générale	127
<b>4.</b>	<b>Etude du transitoire de la réponse harmonique</b>	<b>127</b>
4.1.	Exemple d'un système du premier ordre	127
4.2.	Exemple d'un système du second ordre	128

---

Dans ce chapitre, nous allons établir la forme de la réponse d'un **SLCI** à une entrée sinusoïdale, dite **réponse harmonique** en régime permanent. Nous présenterons ensuite en détail les différentes représentations graphiques qui constitueront l'**analyse fréquentielle** de cette réponse harmonique. Nous verrons en fin de chapitre une étude du transitoire dans des cas usuels.

## 1. Réponse harmonique

Soit un **SLCI** défini par une fonction de transfert  $H(p)$  auquel on applique une entrée sinusoïdale  $e(t)$  tel que :

$$e(t) = E_0 \sin \omega t$$

d'amplitude  $E_0$  et de pulsation  $\omega$ <sup>1</sup>. Dans le domaine de Laplace, la sortie  $S(p)$  est de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p)$$

où  $E(p)$  est la transformée de Laplace d'un sinus (c.f ligne 23 du tableau de l'**Annexe D**), on obtient alors :

$$S(p) = H(p) \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Les pôles de la fonction de transfert  $H(p)$  donnent lieu au régime transitoire alors que les pôles de l'excitation donnent lieu au régime permanent. Les deux pôles de l'excitation sont  $p_{1,2} = \pm j\omega$ . La forme factorisée s'écrit alors :

$$S(p) = H(p) \frac{E_0 \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)}$$

En régime permanent, la décomposition de  $S(p)$  en éléments simples s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p - j\omega} + \frac{B}{p + j\omega}$$

où les coefficients s'obtiennent par évaluation :

$$\begin{aligned} A &= (p - j\omega)S(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{E_0 \omega}{p + j\omega} H(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{E_0}{2j} H(j\omega) \\ B &= (p + j\omega)S(p) \Big|_{p=-j\omega} = \frac{E_0 \omega}{p - j\omega} H(p) \Big|_{p=-j\omega} = -\frac{E_0}{2j} H(-j\omega) \end{aligned}$$

nous obtenons donc :

$$S(p) = \frac{E_0}{2j} \left( \frac{H(j\omega)}{p - j\omega} - \frac{H(-j\omega)}{p + j\omega} \right)$$

---

<sup>1</sup>Strictement,  $\omega$  est une pulsation en unité  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , la fréquence associée étant  $f = \omega/2\pi$ , en  $\text{s}^{-1}$  ou Hz. Cependant, par abus de langage, il est courant de se référer en terme de fréquence en parlant de la pulsation  $\omega$ . Nous prendrons cependant soin d'utiliser la bonne forme dans nos applications numériques.

La transformée de Laplace inverse de la sortie  $S(p)$  permet d'obtenir la réponse temporelle

$$s(t) = \frac{E_0}{2j} \left( H(j\omega) e^{j\omega t} - H(-j\omega) e^{-j\omega t} \right)$$

En écrivant le nombre complexe  $H(j\omega)$  sous sa forme exponentielle ([Annexe E](#)) :

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= |H(j\omega)| e^{j\phi} \\ H(-j\omega) &= |H(j\omega)| e^{-j\phi} \end{aligned}$$

où  $|H(j\omega)|$  et  $\phi$  sont respectivement le module et l'argument du nombre complexe  $H(j\omega)$  et où l'on considère de plus que  $H(-j\omega)$  est égale à son conjugué (i.e  $H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)}$ ).

La réponse temporelle peut alors s'écrire sous la forme

$$s(t) = E_0 |H(j\omega)| \left( \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \right)$$

où l'on reconnaît la forme exponentielle de la fonction sinus qui nous permet d'écrire :

$$s(t) = E_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad (4.1)$$

Cette relation exprime que **l'excitation d'un SLCI par une entrée sinusoïdale donne lieu, en régime permanent, à une réponse harmonique dépendant de la fréquence d'excitation dont le gain en amplitude et la phase sont respectivement donné par le module et l'argument de la fonction de transfert du système.**

À noter que  $H(j\omega)$  correspond au rapport de la sortie sur l'entrée, ainsi le gain  $|H(j\omega)|$  et la phase peuvent être définis à partir de la sortie et de l'entrée du signal,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \\ |H(j\omega)| &= \frac{|S(j\omega)|}{|E(j\omega)|} \\ \arg H(j\omega) &= \arg S(j\omega) - \arg E(j\omega) \end{aligned}$$

Le gain  $|H(j\omega)|$  est une fonction réelle de  $\omega$  de ce fait nous utiliserons par la suite  $G(\omega)$  pour noter plus explicitement cette dépendance. La phase est également une fonction de la pulsation d'excitation, nous la noterons donc  $\phi(\omega)$  par la suite.

$\omega[\text{rad/s}]$	$\omega = 0.1$	$\omega = 1$	$\omega = 10$
$G(\omega)$	0.99	0.70	0.1
$\phi(\omega)$	$-5.7^\circ$	$-45^\circ$	$-84.3^\circ$

**Tableau 4.1.** – Quelques valeurs particulières du gain et de la phase de la fonction de transfert du premier ordre, pour  $K = 1$  et  $\tau = 1$  s.

### 1.1. Exemple de réponse harmonique dans le domaine temporel

Considérons un **SLCI** défini par une fonction de transfert  $H(p)$  du premier ordre (Équation (3.2)) de forme canonique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + p}$$

avec  $K = 1$ ,  $\tau = 1$  s.

Comme nous venons de le montrer la réponse harmonique est complètement déterminée par la connaissance du module et de l'argument du nombre complexe  $H(j\omega)$ . Le module donnant accès au rapport du gain en amplitude de la sortie sur l'entrée et l'argument à la différence de phase entre la sortie et l'entrée.

Calculons donc ces deux quantités pour notre fonction de transfert du premier ordre :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\tau\omega} \right|$$

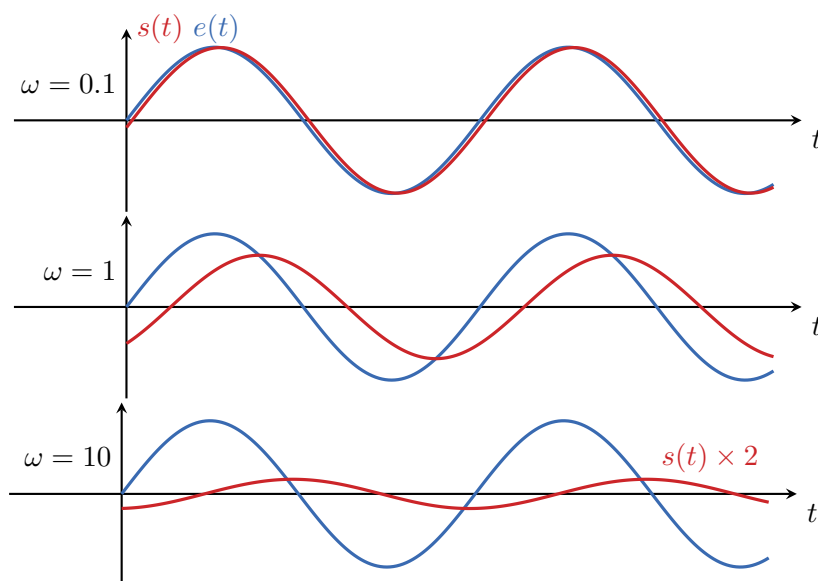
$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arctan(\omega\tau)$$

Le **tableau 4.1** présente le module et l'argument pour quelques valeurs particulières de  $\omega$  ( $\omega = 0.1, 1$  et  $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ). D'après ces valeurs, nous constatons que le rapport des amplitudes décroît et que le déphasage augmente lorsque la pulsation de l'excitation augmente.

La **figure 4.1** présente la forme des réponses temporelles de ce système pour les données calculées du gain et de la phase de la fonction de transfert considérée. Cette représentation graphique montre ses limites, en effet quand est-il de toutes les autres valeurs de la pulsation ?

Nous allons maintenant généraliser cette analyse sans pour autant avoir à tracer la réponse temporelle pour toutes les pulsations que l'on souhaite étudier.





**Figure 4.1.** – Réponse harmonique (en régime permanent) (Équation (4.1)) d'un système du premier ordre pour différentes pulsations d'excitation de la forme  $e(t) = \sin \omega t$ , (données du tableau 4.1). Cette figure permet d'observer l'augmentation du déphasage et la diminution de l'amplitude lorsque la fréquence d'excitations augmente. (bleu) excitation  $e(t)$  (rouge) sortie  $s(t)$ .

## 2. Représentation graphique de la réponse harmonique

Comme nous venons de le voir, il est possible d'étudier la réponse harmonique (en régime permanent) d'un **SLCI** dans le domaine temporel et observer la variation d'amplitude et du déphasage qui dépend de la pulsation d'excitation. Ces variations d'amplitude et de phase sont totalement déterminées par la connaissance du module et de l'argument du nombre complexe  $H(j\omega)$ , c'est ce qui constitue l'analyse fréquentielle des **SLCI**.

Dans cette partie, nous présenterons trois types de représentations graphiques, notamment :

- le diagramme de Bode,
- le diagramme de Nyquist,
- et le diagramme de Black-Nichols<sup>2</sup>.

Nous étudierons en détail les diagrammes des modèles usuels que nous avons déjà rencontrés au chapitre précédent (**Chapitre 3**)

Le terme **lieu de transfert** est communément utilisé pour parler du points de coordonnées  $(\omega, \phi(\omega), G(\omega))$ .

<sup>2</sup> Nathaniel B. Nichols, (1914–1997) ingénieur américain.

## 2.1. Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode<sup>3</sup> permet de représenter le comportement fréquentielle d'un système quelconque en fonction de la fréquence d'excitation en entrée. Il se compose de deux graphiques :

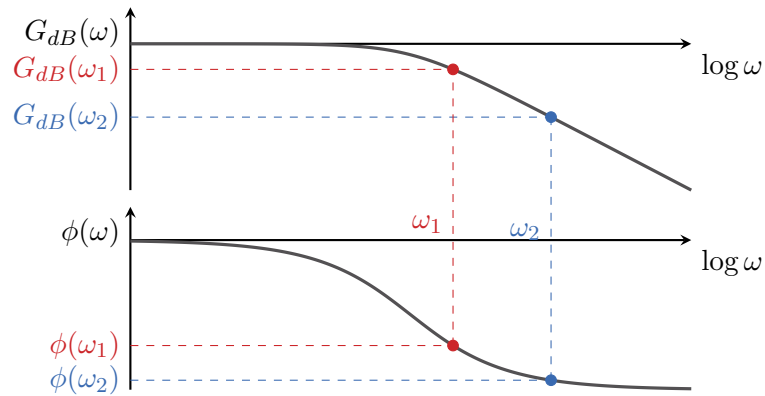
- i) le tracé du gain en décibel en fonction de la pulsation  $\omega$  :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| \quad (4.2)$$

- ii) le tracé de la phase en fonction de la pulsation  $\omega$  :

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) \quad (4.3)$$

L'axe des pulsations étant généralement représenté par une échelle logarithmique pour permettre la représentation de la réponse harmonique sur une large plage de valeurs en pulsation ([Annexe I](#)). Le calcul de la phase passe lui par la détermination de l'argument principale ([Annexe E](#)).



**Figure 4.2.** – Représentation schématique d'un diagramme de Bode. Le gain en décibel et la phase associé à une fonction de transfert sont représentés en fonction de la pulsation (à l'échelle log) sur deux repères distincts.

La principale propriété du diagramme de Bode est de permettre de simplifier un grand nombre calcul. En effet, dans le cas par exemple où deux systèmes  $H_1$  et  $H_2$  sont mis en série,

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega),$$

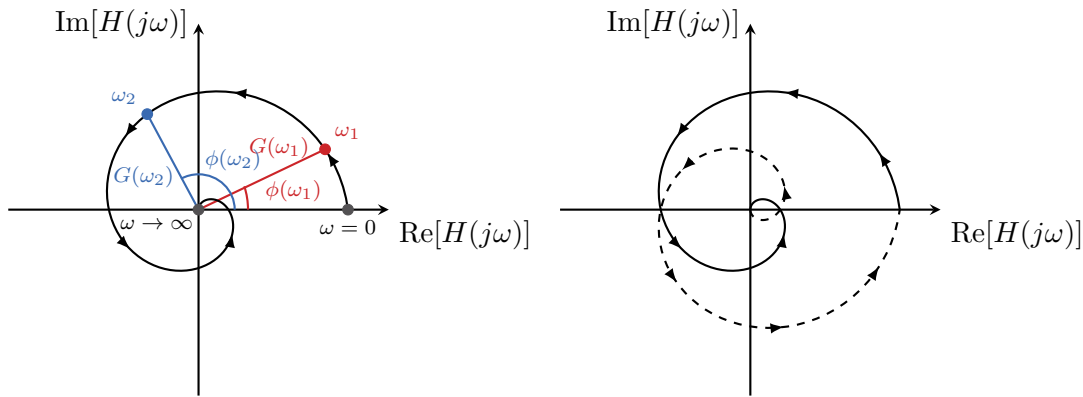
Le diagramme de Bode de  $H(j\omega)$  est la somme de deux diagrammes indépendants :

$$\text{Bode}(\text{total}) = \text{Bode}(1) + \text{Bode}(2)$$

<sup>3</sup>Hendrik Wade Bode (1905-1982), ingénieur, chercheur et inventeur américain

### 2.2. Diagramme de Nyquist

Un diagramme de Nyquist<sup>4</sup> présente la partie imaginaire et la partie réelle de  $H(j\omega)$  pour différentes valeurs paramétrées de  $\omega$ . Il a l'avantage de combiner les deux graphiques du diagramme de Bode en un seul. En effet, la phase et l'amplitude d'un point dans le plan complexe peut être déterminé graphiquement par respectivement l'angle avec l'axe des réels et la distance à l'origine ([Annexe E](#)). Cette représentation graphique est communément appelée **le lieu de Nyquist**. Le lieu de Nyquist complet est le tracé théorique des parties réel et imaginaire de  $H(j\omega)$ , en considérant les pulsations négatives, c'est à dire entre  $\omega \rightarrow -\infty$  et  $\omega \rightarrow +\infty$ .



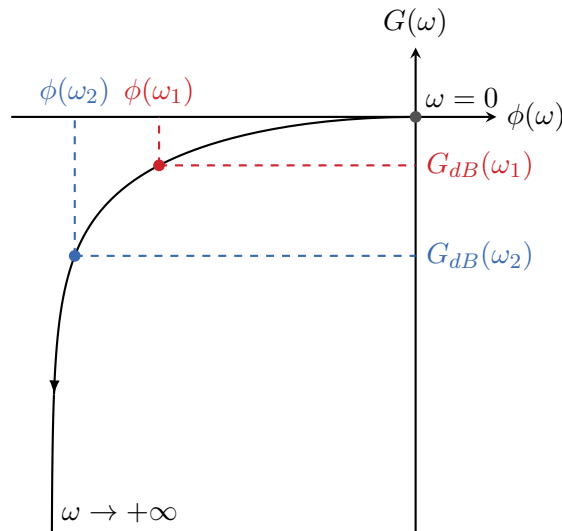
**Figure 4.3.** – (gauche) Représentation schématique d'un diagramme de Nyquist. Le nombre complexe  $H(j\omega)$  est représenté dans le plan complexe pour différentes valeurs de la pulsation  $\omega$  de 0 à  $\infty$ . (droite) Représentation schématique du lieu complet de Nyquist, symétrique par rapport à l'axe des réels.

### 2.3. Diagramme de Black-Nichols

Le diagramme de Black-Nichols<sup>5</sup> consiste à tracer le gain en décibel  $G_{dB}(\omega)$  en fonction de la phase, paramétré par la pulsation  $\omega$ . À l'instar du diagramme de Nyquist, le diagramme de Black à l'avantage de combiner les deux graphiques du diagramme de Bode. La diagramme de Black est habituellement utilisé dans l'étude des systèmes asservis ([Chapitre 5](#)) pour déterminer le lieu de transfert dans le plan de Black d'un système en boucle fermée (FTBF) à partir de la connaissance du lieu de transfert dans le plan de Black de la Fonction de Transfert en Boucle ouverte (FTBO).

<sup>4</sup>Harry Nyquist (1889-1976), électronicien, ingénieur américain.

<sup>5</sup>Il également simplement appelé diagramme de Black.



**Figure 4.4.** – Représentation schématique d'un diagramme de Black. Le gain et la phase de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  sont représentés sur le lieu de Black pour différentes valeurs de la pulsation  $\omega$  de 0 à  $\infty$ .

### 3. Analyse fréquentielle des modèles usuels

Nous allons ici présenter la forme canonique des diagrammes fréquentiels (Bode, Nyquist et Black-Nichols) pour les modèles usuels rencontrés dans l'étude des **SLCI**. Les diagrammes de Bode restent l'outil principal et fera l'objet d'une présentation plus détaillée.

#### 3.1. Diagrammes de Bode : méthodologie générale

Pour chacun des modèles usuels, nous appliquerons la procédure suivante :

- Définir la fonction de transfert  $H(p)$  du modèle pour  $p = j\omega$
- Établir la fonction du gain  $G(\omega)$  à partir du module de  $|H(j\omega)|$
- Établir la fonction de la phase  $\phi(\omega)$  à partir de l'argument principale de  $|H(j\omega)|$ . L'argument principale est défini à l'**Annexe E**.
- Si les fonctions  $G(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  ne sont pas de simples constantes, réaliser une étude asymptotique pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow +\infty$ .
- Tracer le diagramme de Bode **réel** et le diagramme de Bode **asymptotique**.

### 3.1.1. Diagramme de Bode d'un gain pur

La fonction de transfert d'un gain pur est de la forme  $H(j\omega) = K$ , le gain est donc simplement donné par

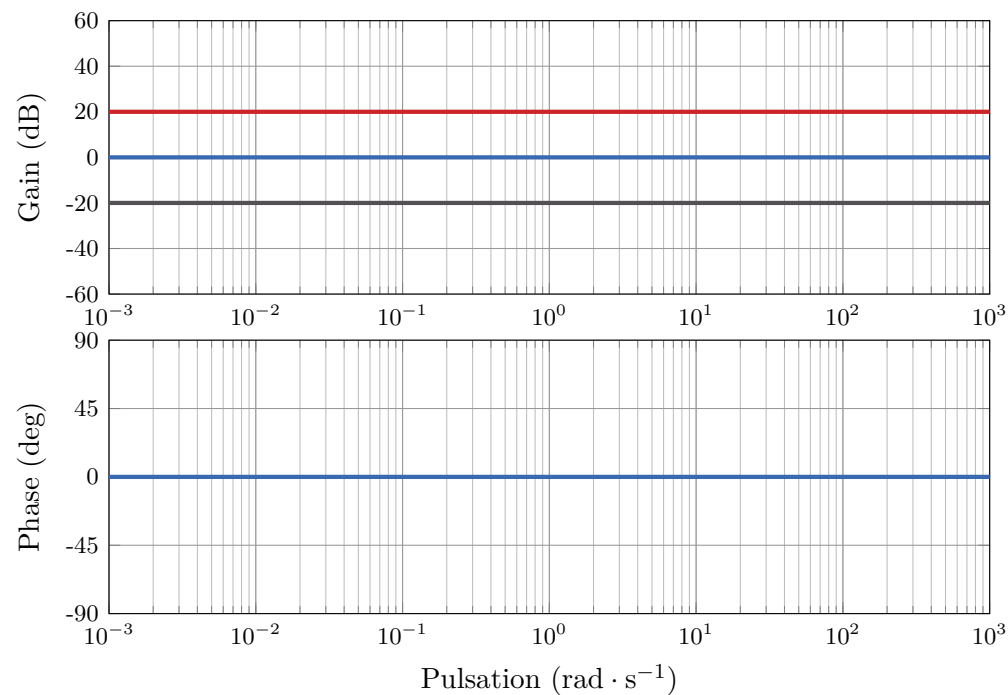
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = K$$

d'où le gain  $G_{dB}$  en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K$$

ce qui correspond à une constante en gain (Figure 4.5) et la phase s'obtient à partir de l'argument principale du nombre complexe  $H(j\omega)$  :

$$\phi(\omega) = 0$$



**Figure 4.5.** – Diagramme de Bode d'un gain pur avec (noir)  $K = 0.1$ , (bleu)  $K = 1$  et (rouge)  $K = 10$ . Remarquons que la phase reste inchangée lorsque le gain statique  $K$  varie et que seul le gain  $G_{dB}(\omega)$  est modifié.

### 3.1.2. Diagramme de Bode d'un intégrateur pur

La fonction de transfert d'un intégrateur pur est de la forme  $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$ , le gain est donc simplement donné par

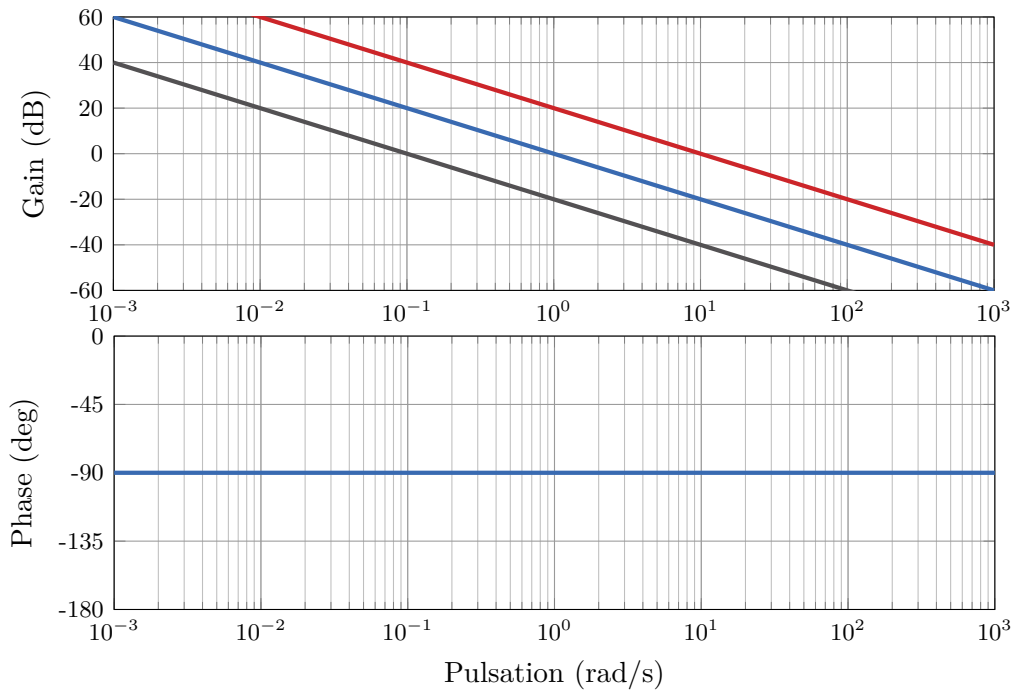
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$$

d'où le gain  $G_{dB}$  en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega$$

ce qui correspond à une pente de -20dB/décade (Figure 4.6) et la phase s'obtient à partir de l'argument principale du nombre complexe  $H(j\omega)$  :

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$



**Figure 4.6.** – Diagramme de Bode d'un intégrateur pur avec (noir)  $K = 0.1$ , (bleu)  $K = 1$  et (rouge)  $K = 10$ . Remarquons que le gain s'annule pour  $\omega = K$  et que la phase reste inchangée.

## 3.1.3. Diagramme de Bode d'un dérivateur pur

La fonction de transfert d'un dérivateur pur est de la forme  $H(j\omega) = Kj\omega$ , le gain est donc simplement donné par

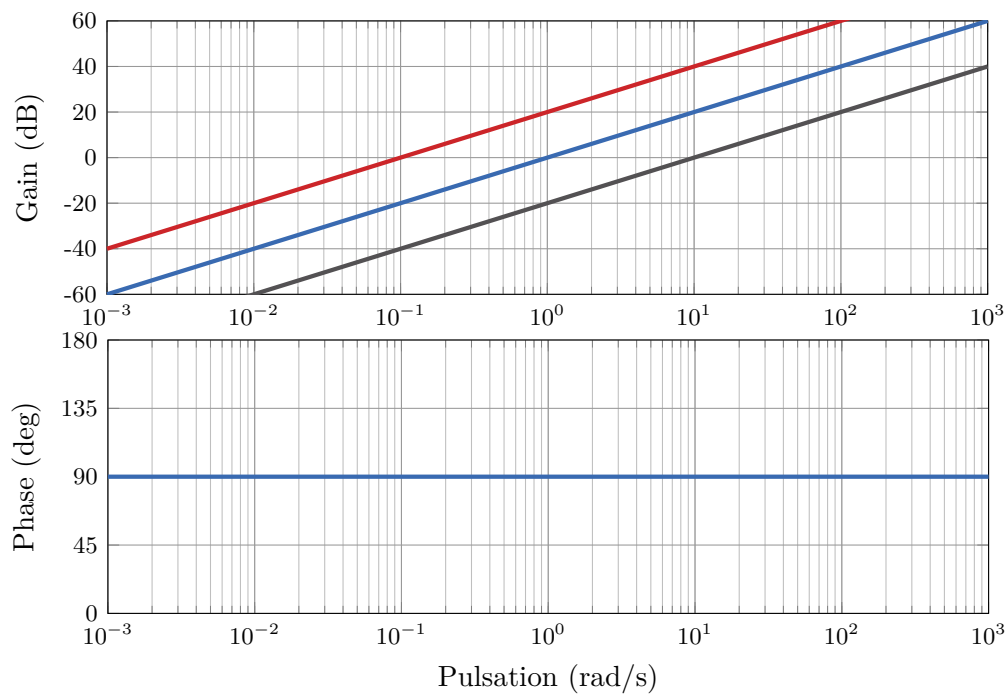
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = Kj\omega$$

d'où le gain  $G_{dB}$  en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \omega$$

ce qui correspond à une pente de +20dB/décade (Figure 4.7) et la phase s'écrit simplement

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$



**Figure 4.7.** – Diagramme de Bode d'un dérivateur pur avec (noir)  $K = 0.1$ , (bleu)  $K = 1$  et (rouge)  $K = 10$ . Remarquons que le gain s'annule pour  $\omega = \frac{1}{K}$  et que la phase reste inchangée.

### 3.1.4. Diagramme de Bode d'un système à retard pur

La fonction de transfert d'un retard pur est de la forme  $H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$ , le gain est donc simplement donné par

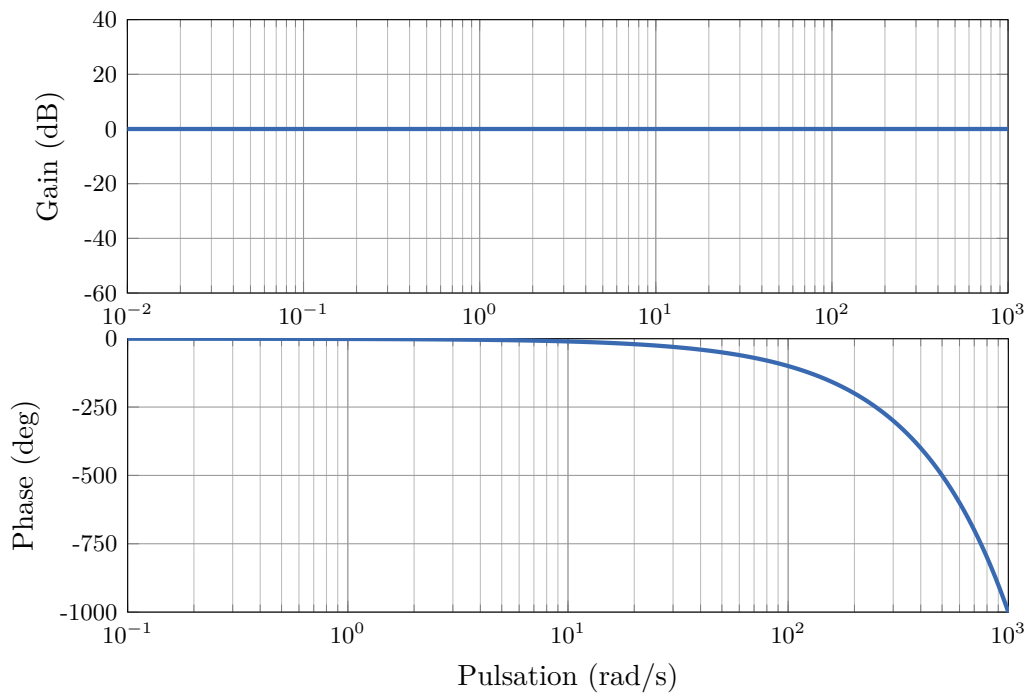
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = 1$$

d'où le gain  $G_{dB}$  en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 0 \text{ dB}$$

et la phase s'écrit simplement

$$\phi(\omega) = -\tau\omega$$



**Figure 4.8.** – Diagramme de Bode d'un retard pur avec  $\tau = 1$ . Remarquons que le gain est constant pour toutes pulsations et le déphasage est monotone décroissant en fonction de la pulsation.



### 3.1.5. Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre présente une fonction de transfert de la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} \quad (4.4)$$

Le module de cette fonction de transfert  $G(\omega) = |H(j\omega)|$  s'écrit :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

Le gain en dB s'obtient alors par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2\omega^2} \quad (4.5)$$

et la phase est simplement donné par la fonction tangente réciproque :

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\arctan(\tau\omega) \quad (4.6)$$

Ce sont ces deux fonctions de la fréquence que nous traçons sur un diagramme de Bode. Elles sont représentés sur les [figures 4.9](#) et [4.10](#), pour respectivement différentes valeurs du gain statique  $K$  et du temps caractéristique  $\tau$ .

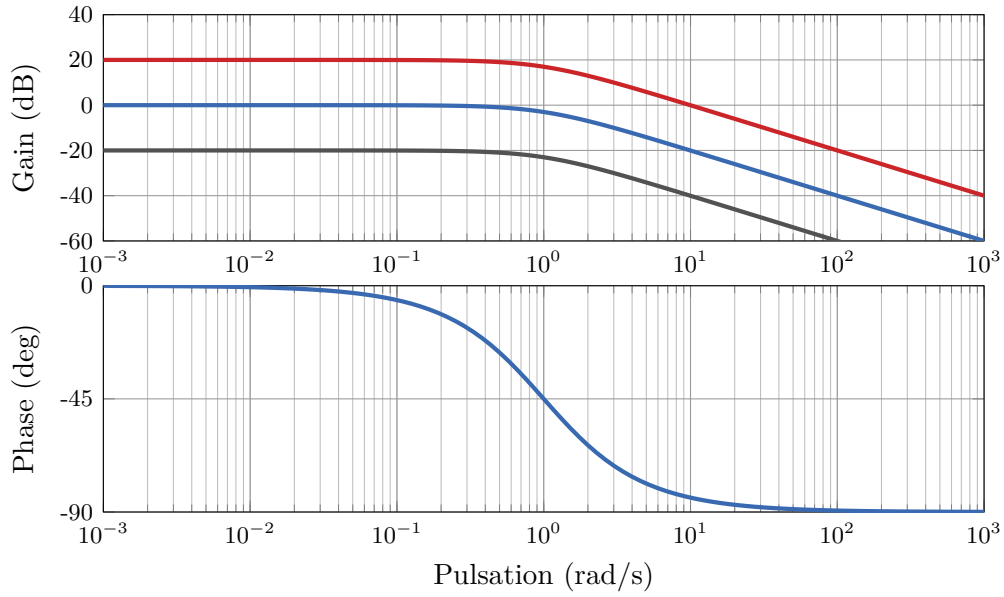
Il est cependant recommandé de déterminer les asymptotes de ces deux fonctions à basse et haute fréquence. Pour cela, nous introduisons une **fréquence de cassure**  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  qui délimite ces deux domaines. À cette fréquence, le gain en décibel est de  $G_{dB}(\omega_c) = 20 \log K - 3$  et la phase  $\phi(\omega) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ . Le gain de -3dB est la valeur approximative de  $20 \log \sqrt{2}$ , communément utilisée pour définir la **fréquence de coupure**.

À basse fréquence, c'est à dire lorsque  $\tau\omega \ll 1$  ou encore  $\omega \ll \omega_0$ , le gain et la phase se comporte comme,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K \\ \phi(\omega) &\sim 0^\circ. \end{aligned}$$

À haute fréquence, c'est à dire lorsque  $\tau\omega \gg 1$  ou encore  $\omega \gg \omega_0$ , le gain et la phase se comporte comme,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \\ \phi(\omega) &\sim -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



**Figure 4.9.** – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (Équation (4.4)) avec (noir)  $K = 0.1$  (bleu)  $K = 1$  et (rouge)  $K = 10$ . L'effet du gain  $K$  est de décaler verticalement la courbe de gain.

La figure 4.11 présente sur un même diagramme de Bode, les courbes réels et les courbes asymptotiques.

### 3.1.6. Diagramme de Bode de deux systèmes du premier ordre en série

La fonction de transfert globale de deux systèmes du premier ordre en série s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K_1 K_2}{(1 + j\tau_1 \omega)(1 + j\tau_2 \omega)} \quad (4.7)$$

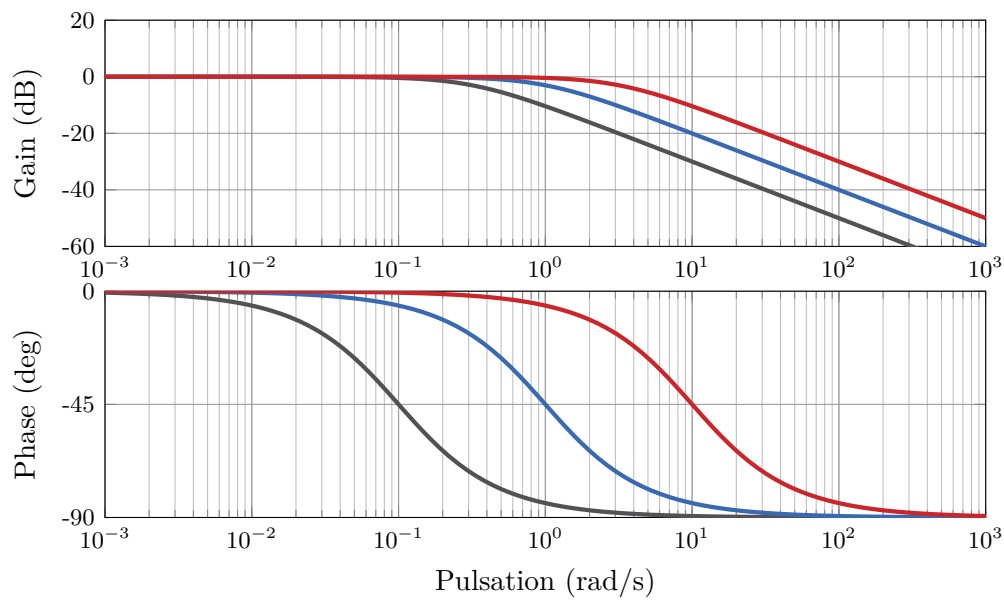
On utilise la propriété du logarithme pour écrire le gain globale  $G_{dB}(\omega)$  comme une somme de gain de deux systèmes du premier ordre, soit

$$G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$$

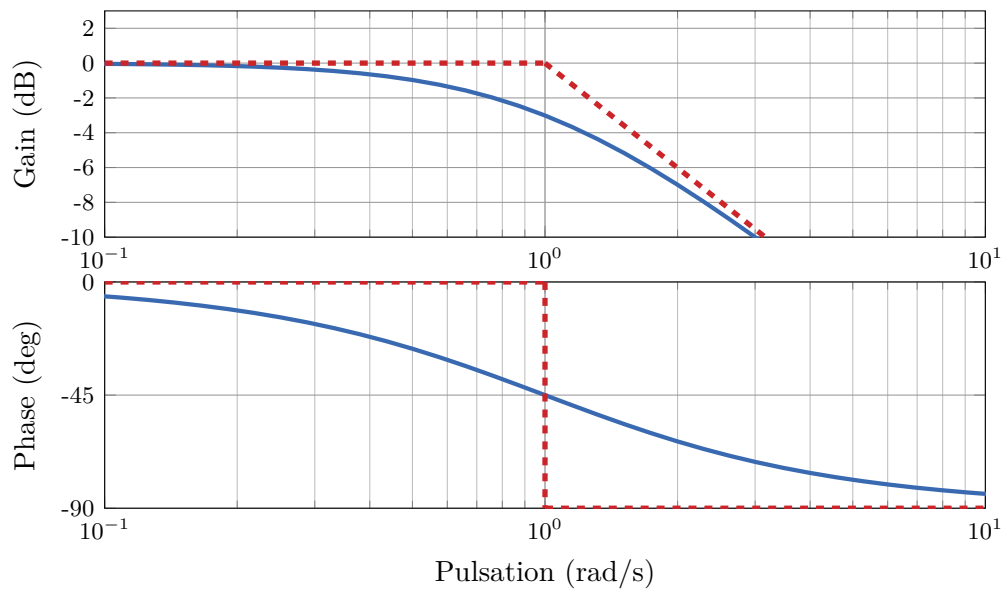
De même pour la phase :

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

En reprenant les équations (4.5) et (4.6) on établit facilement que,



**Figure 4.10.** – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (Équation (4.4)) avec (noir)  $\tau = 10$  (bleu)  $\tau = 1$  et (rouge)  $\tau = 0.1$ . L'effet du temps caractéristique  $\tau$  est de décaler horizontalement la courbe de phase.



**Figure 4.11.** – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (Équation (4.4)) (i.e  $K = 1$ ,  $\tau = 1$  et  $\omega_c = 1$ ) avec (bleu) le diagramme réel et (rouge) le diagramme asymptotique. On vérifie que les valeurs asymptotiques sont de bonnes approximations à basse et haute fréquence. Il est également possible de lire un gain de  $-3$  dB et une phase de  $-45^\circ$  à la fréquence de coupure.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K_1 K_2 - 20 \log \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}$$

et

$$\phi(\omega) = -\arctan \tau_1 \omega - \arctan \tau_2 \omega$$

L'étude asymptotique se fait en considérant deux fréquences de coupures  $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$  et  $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2}$ . Supposons d'abord, sans perte de généralité, que  $\omega_{c2} > \omega_{c1}$  et considérons les trois domaines de fréquence ainsi définits selon que  $\omega \ll \omega_{c1}$ ,  $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$  ou  $\omega \gg \omega_{c2}$

**Pour**  $\omega \ll \omega_{c1}$

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K_1 K_2 \\ \phi(\omega) &\sim 0^\circ \end{aligned}$$

**Pour**  $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$

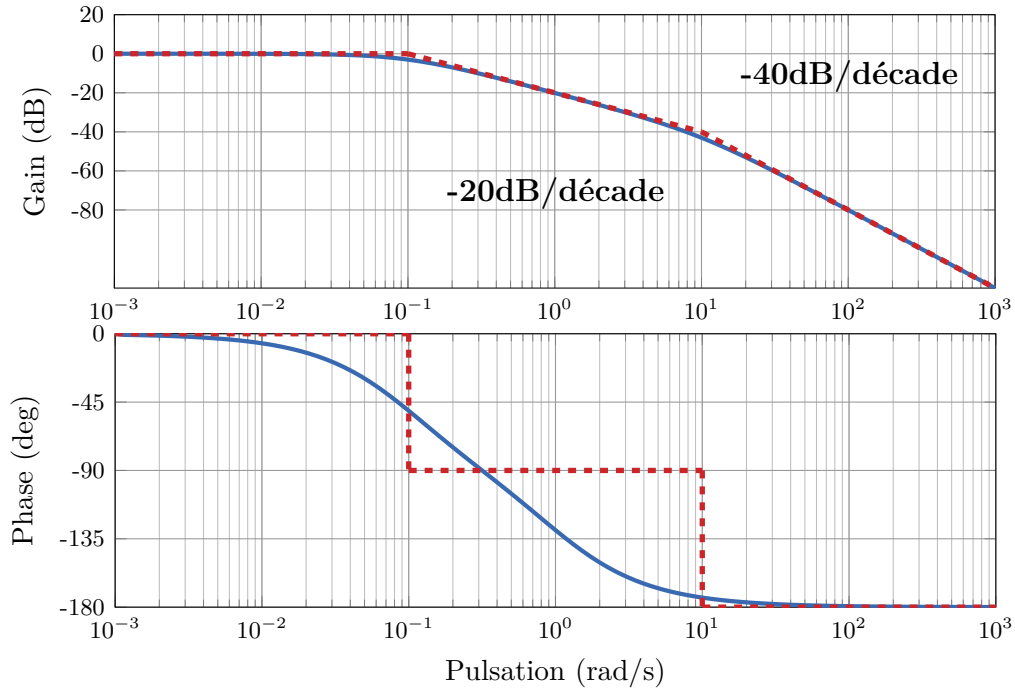
$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K_1 K_2 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_{c1} \omega_{c2}} \\ \phi(\omega) &\sim -90^\circ \end{aligned}$$

**Pour**  $\omega \gg \omega_{c2}$

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K_1 K_2 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_{c1} \omega_{c2}} \\ \phi(\omega) &\sim -180^\circ \end{aligned}$$

La [figure 4.12](#) présente le diagramme de Bode réel et asymptotique de deux systèmes du premier ordre en cascade. On remarquera que l'approximation asymptotique est suffisante pour décrire le gain de ce genre de système. En marquant la discontinuité dans le graphe de la phase, on distingue plus facilement les différentes zones et les changements de pente du gain. Pour la phase, il suffit de déterminer sa valeur pour quelques valeurs particulières de la pulsation.

Comme nous l'avons déjà rencontré, l'étude de deux systèmes du premier ordre en série correspond à l'étude d'un système du second ordre en régime apériodique.



**Figure 4.12.** – Diagramme de Bode de systèmes du premier ordre en série (Équation (4.7)) avec  $\tau_1 = 10$  et  $\tau_2 = 0.1$  (bleu) le diagramme réel et (rouge) le diagramme asymptotique.

### 3.1.7. Diagramme de Bode d'un système second d'ordre

La fonction de transfert d'un système du second ordre (Équation (3.6)) est donnée par :

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega} \quad (4.8)$$

Le gain s'obtient en calculant le module de ce nombre complexe :

$$G(\omega) = \frac{K\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}$$

Le gain en décibel s'écrit alors :

$$G_{db}(\omega) = 20 \log K\omega_0^2 - 20 \log \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}$$

et la phase par l'argument principale :

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \text{si } \omega^2 < \omega_0^2 \\ -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \pi & \text{si } \omega^2 > \omega_0^2 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } \omega^2 = \omega_0^2 \end{cases}$$

Comme précédemment, il est recommandé d'étudier les valeurs asymptotiques du gain et de la phase.

**Pour**  $\omega \ll \omega_0$

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K \\ \phi(\omega) &\sim 0^\circ \end{aligned}$$

**Pour**  $\omega \gg \omega_0$

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K \omega_0^2 - 40 \log \omega \\ \phi(\omega) &\sim -180^\circ \end{aligned}$$

La [figure 4.13](#) présente le diagramme de Bode associé à ces deux fonctions pour  $\xi = 1$ , ainsi que le diagramme de Bode asymptotique. La [figure 4.14](#) présente l'effet du taux d'amortissement  $\xi$  sur le diagramme de Bode. Il est possible d'observer une augmentation de la valeur maximum du gain proche de la fréquence de coupure. C'est ce phénomène de résonance que nous allons discuter dans la prochaine partie.

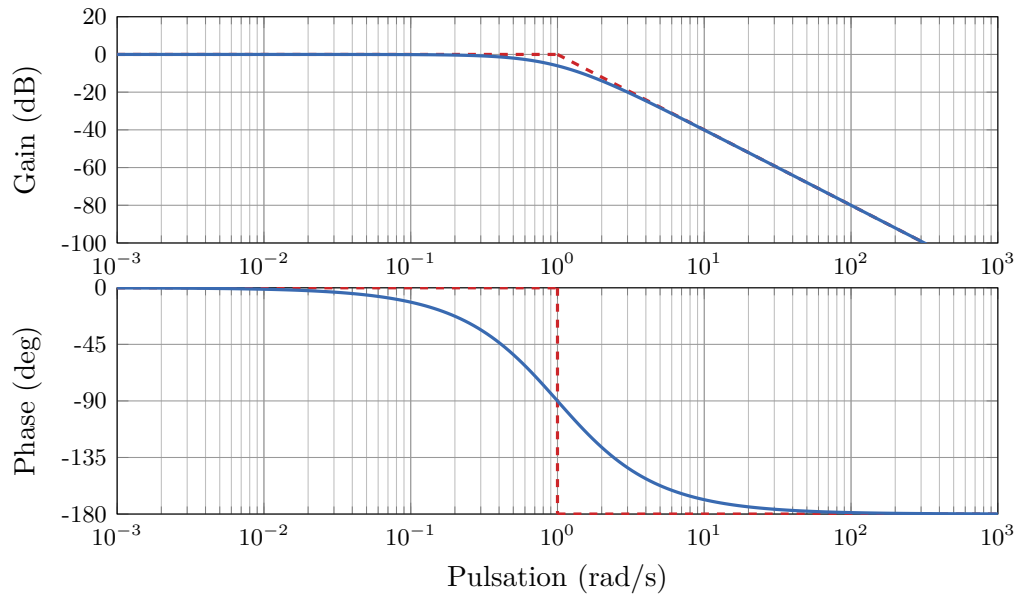
### Phénomène de résonance

Le gain d'un système du second ordre présente un maximum pour certaines valeurs du taux d'amortissement  $\xi$ . Nous allons établir en détail les différentes grandeurs caractéristiques de ce phénomène de résonance. L'approche suivante s'inspire en partie de [9]. Partons du gain naturel  $G(\omega)$  d'un système du second ordre pour lequel,

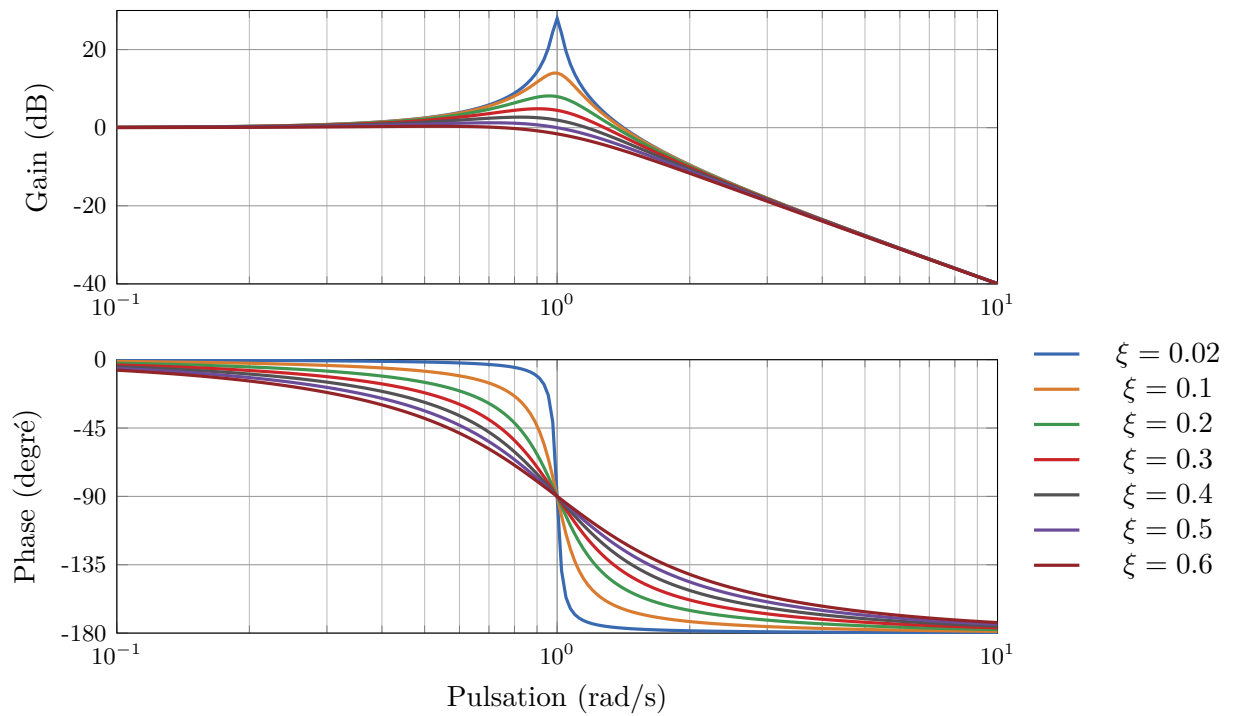
$$G(\omega) = \frac{K\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}$$

on pose  $X = \omega^2$ , et on porte le gain au carré pour éliminer la racine carrée. On obtient alors,

$$(G(\omega))^2 = \frac{K^2\omega_0^4}{(\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X}$$



**Figure 4.13.** – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert second ordre (Équation (4.8)) avec  $K = 1$ ,  $\omega_0 = 1$  et  $\xi = 1$



**Figure 4.14.** – Diagramme de Bode d'une fonction de transfert du second ordre (Équation (4.8)) pour différentes valeurs de  $\xi$  avec  $K = 1$  et  $\omega_0 = 1$



Le numérateur étant constant, le gain présentera un maximum si le dénominateur présente un minimum. Notons  $D(X)$ , ce dénominateur qui s'écrit :

$$D(X) = (\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X$$

Calculons, la dérivée par rapport à  $X$ ,

$$\frac{dD(X)}{dX} = -2(\omega_0^2 - X) + (2\xi\omega_0)^2$$

qui s'annule pour

$$X = X_0 = \omega_0^2(1 - 2\xi^2).$$

La dérivée seconde étant positive, le dénominateur  $D(X)$  présente un minimum en  $X_0$ . Puisque  $X > 0$  et  $\omega_0^2 > 0$  alors la condition sur le taux d'amortissement est

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.9)$$

La **pulsation de résonance** est donc défini par :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (4.10)$$

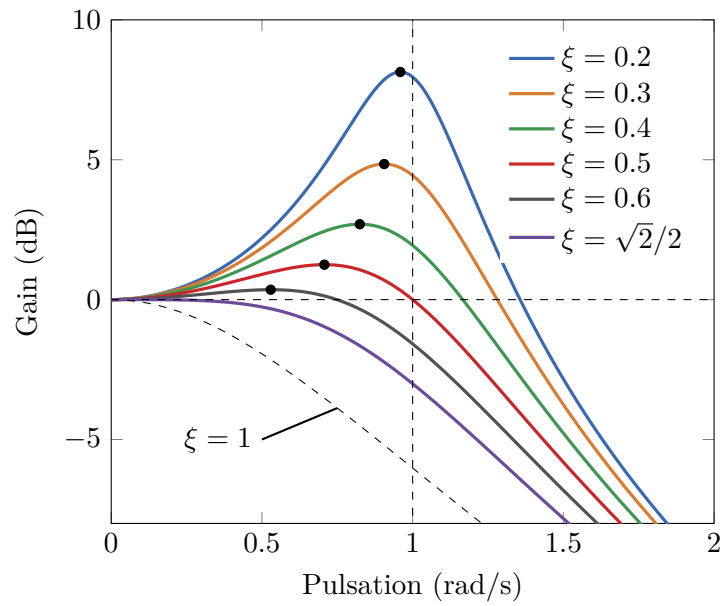
La valeur du gain maximal est obtenue à la pulsation de résonance,

$$G(\omega_r) = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}},$$

ce qui permet de définir le **facteur de surtension**  $Q$  qui est le rapport entre le maximum atteint par le gain et la valeur de l'asymptote à basse fréquence, d'où

$$Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.11)$$

D'après ces dernières expressions, on observe qu'à la limite  $\xi \rightarrow 0$ , la pulsation de résonance  $\omega_r$  tend vers  $\omega_0$ , et le gain maximal tend lui vers l'infini. La pulsation  $\omega_0$  est donc la valeur pour lequel le phénomène de résonance est le plus intense. La [figure 4.15](#) présente la position du gain maximum à la pulsation de résonance pour différentes valeurs du taux d'amortissement.



**Figure 4.15.** – Évolution du gain en décibel en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du taux d'amortissement du régime pseudo-périodique. Le gain maximal à la pulsation de résonance  $\omega_r$  est représenté par une pastille noir sur chacune des courbes pour  $\xi < \sqrt{2}/2$ . On remarquera l'utilisation exceptionnelle d'une échelle linéaire pour les pulsations.

### 3.1.8. Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

Dans le cas d'un système d'ordre supérieur à deux, nous allons utiliser les propriétés d'additivité des diagrammes de Bode, en décomposant la fonction de transfert en différents modèles simples.

Il est notamment toujours possible d'écrire une fonction de transfert ( [chapitre 3](#) ) sous la forme d'un produit de gains purs, d'intégrateurs, de dérivateurs, de systèmes du premier et du second ordre :

$$H(p) = K_0 p^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p)^{n_i} \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)^{n_j} \quad (4.12)$$

où les exposants  $\alpha$ ,  $n_i$  et  $n_j$  peuvent être positifs et négatifs.

Nous listons ci-dessous l'effet sur le gain et la phase d'un diagramme de Bode pour chacun de ces éléments selon le signe des exposants  $\alpha$ ,  $n_i$ , et  $n_j$ .

- le terme  $K_0$  (i.e gain pur) provoque :
  - gain :  $+20 \log K_0$
  - phase : rien
- le terme  $K_0 p^\alpha$  (i.e intégrateur si  $\alpha < 0$  ou dérivateur si  $\alpha > 0$ ) provoque :
  - gain : pente de  $20\alpha$  dB/décade
  - phase :  $90\alpha^\circ$
- un terme  $\frac{1}{(1 + \tau_i p)}$  (i.e premier ordre au dénominateur si  $n_i = -1$ ) provoque, en  $\omega = \frac{1}{\tau_i}$ 
  - gain : une rupture de pente de  $-20$  dB/décade
  - phase : un saut de  $-90^\circ$
- un terme  $(1 + \tau_i p)$  (i.e premier ordre au numérateur si  $n_i = 1$ ) provoque, en  $\omega = \frac{1}{\tau_i}$ 
  - gain : une rupture de pente de  $+20$  dB/décade
  - phase : un saut de  $+90^\circ$
- un terme  $\frac{1}{(1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)}$  (i.e second ordre au dénominateur si  $n_j = -1$ ) provoque, en  $\omega = \frac{1}{\tau_j}$ 
  - gain : une rupture de pente de  $-40$  dB/décade
  - phase : un saut de  $-180^\circ$
- un terme  $(1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)$  (i.e second ordre au numérateur si  $n_j = 1$ ) provoque, en  $\omega = \frac{1}{\tau_j}$ 
  - gain : une rupture de pente de  $+40$  dB/décade
  - phase : un saut de  $+180^\circ$

**Exemple**

Soit la fonction de transfert  $H(p)$  telle que

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)} \quad (4.13)$$

La première étape consiste à ordonner les temps caractéristiques par ordre décroissant cela nous permettra d'obtenir les pulsations propres par ordre croissant. Ensuite, il faut identifier les différents modèles. Pour cet exemple, nous identifions :

- un gain pur  $K_0 = 100$
- un second ordre double au numérateur de temps caractéristique  $\tau = 1$
- trois premier ordre au dénominateur de temps caractéristique  $\tau = \{0.01, 10, 100\}$

Enfin, nous regroupons dans un tableau l'effet sur le gain et la phase pour chaque domaines en pulsations compris entre les différentes pulsations caractéristiques. On adopte la notation suivante :  $\tau_1 = 100$ ,  $\tau_2 = 10$ ,  $\tau_3 = 1$  et  $\tau_4 = 0.01$ , avec  $\omega_i = 1/\tau_i$ , on obtient alors :  $\omega_1 = 0.01$ ,  $\omega_2 = 0.1$ ,  $\omega_3 = 1$  et  $\omega_4 = 100$ .

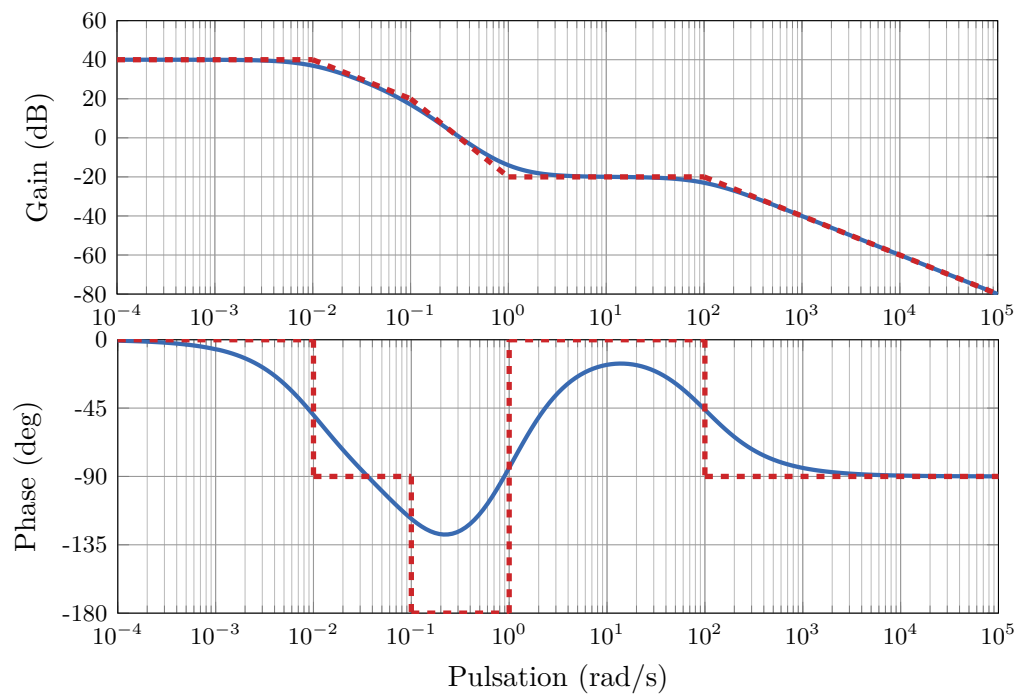
	$\omega \ll \omega_1$	$\omega_1 < \omega < \omega_2$	$\omega_2 < \omega < \omega_3$	$\omega_3 < \omega < \omega_4$	$\omega \gg \omega_4$
$G_{dB}(\omega)$ (pente)	0(40dB)	-20dB/décade	-20dB/décade	+40dB/décade	-20dB/décade
$\phi(\omega)$	0°	-90°	-90°	+180°	-90°
$G_{dB}(\omega)$ total	0(40dB)	-20dB/décade	-40dB/décade	0(-20dB)	-20dB/décade
$\phi(\omega)$ total	0°	-90°	-180°	0	-90°

Il est également possible de déterminer la forme analytique du gain et de la phase.

$$G_{dB}(\omega) = 40 + 20 \log(1 + \tau_3^2 \omega^2) - 10 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_2^2 \omega^2)(1 + \tau_4^2 \omega^2) \quad (4.14)$$

et

$$\phi(\omega) = 2 \arctan \tau_3 \omega - \arctan \tau_1 \omega - \arctan \tau_2 \omega - \arctan \tau_4 \omega \quad (4.15)$$



**Figure 4.16.** – Diagramme de Bode du système d'ordre quelconque de l'équation (4.13) (bleu) diagramme de Bode réel et (rouge) diagramme de Bode asymptotique.

### 3.2. Diagrammes de Nyquist : méthodologie générale

Pour chacun des modèles usuels, nous appliquerons la procédure suivante :

- Définir la fonction de transfert  $H(p)$  du modèle pour  $p = j\omega$
- Établir la partie réelle et imaginaire du nombre complexe  $H(j\omega)$
- Tracer le lieu de Nyquist point par point, pour différentes valeurs de  $\omega$  de 0 à  $+\infty$ , c'est à dire  $\text{Re}[H(j\omega)]$  et  $\text{Im}[H(j\omega)]$  dans le plan complexe.

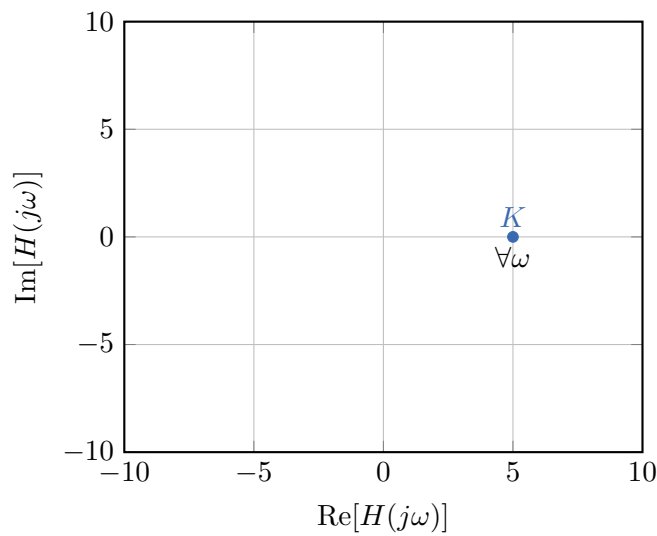
Dans chacun des exemples suivants nous reproduisons le lieu de Nyquist complet le domaine des pulsations négatives étant représenté en pointillé. Dans la pratique, il suffit de tracer le symétrique par rapport à l'axe des réels et d'inverser le sens de la flèche pour obtenir le sens de la pulsation de  $-\infty \rightarrow 0$ .

### 3.2.1. Diagramme de Nyquist d'un gain pur

Le diagramme de Nyquist d'un gain pur est trivial. En effet le nombre complexe  $H(j\omega)$  étant égal à une constante réel  $K$ , le diagramme de Nyquist se limite à un point sur l'axe des réels quelque soit la valeur de  $\omega$ . Ce qui est en accord avec le fait qu'un gain pur présente un déphasage nul.

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = K$$

$$\operatorname{Im}[H(j\omega)] = 0$$



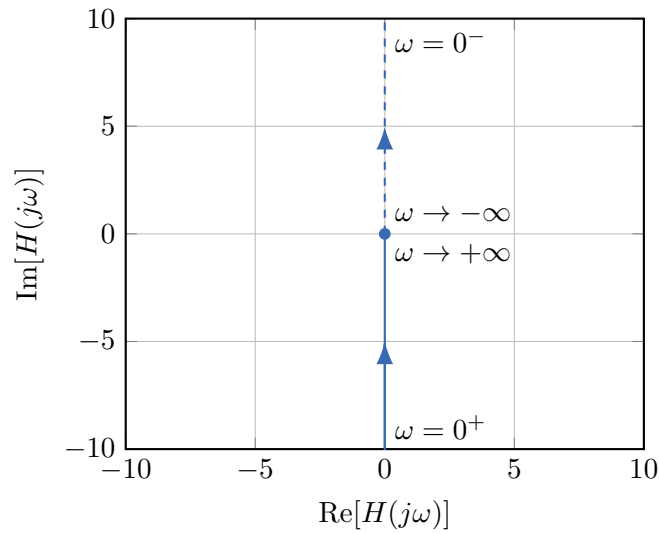
**Figure 4.17.** – Diagramme de Nyquist d'un gain pur. Le nombre complexe  $H(j\omega)$  est représenté par un point sur l'axe des réels à la valeur  $K$  (ici  $K = 5$ ).

### 3.2.2. Diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur

Le diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur est également trivial, puisque le nombre complexe  $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$  est un nombre imaginaire pur. Cependant il dépend de la pulsation  $\omega$ .

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[H(j\omega)] = \frac{-K}{\omega}$$



**Figure 4.18.** – Diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur. Le lieu de Nyquist est représenté par une demi droite sur l'axe des nombres imaginaires purs négatifs.

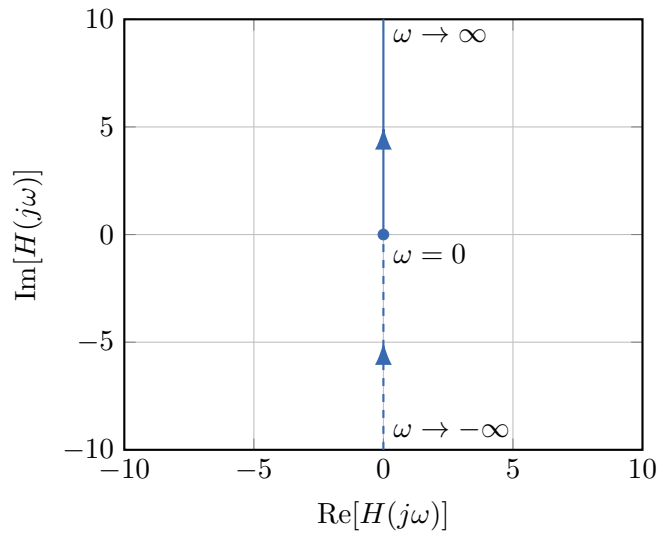


### 3.2.3. Diagramme de Nyquist d'un dérivateur pur

Le diagramme de Nyquist d'un dérivateur pur est également représentatif d'un nombre complexe  $H(j\omega) = Kj\omega$  imaginaire pur. Les parties réelles et imaginaire de ce nombre complexe sont :

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[H(j\omega)] = K\omega$$



**Figure 4.19.** – Diagramme de Nyquist d'un dérivateur pur. Le lieu de Nyquist est représenté par une demi droite sur l'axe des nombres imaginaires purs positifs.

### 3.2.4. Diagramme de Nyquist d'un retard pur

La fonction de transfert d'un retard pur s'écrit :

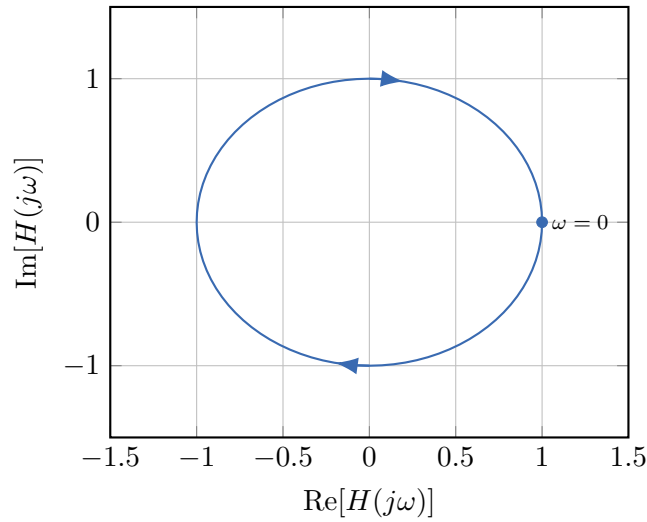
$$H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

Les parties réelles et imaginaires sont simplement donnés par :

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = \cos \tau\omega$$

$$\operatorname{Im}[H(j\omega)] = -\sin \tau\omega$$

Ces coordonnées dans le plan complexe sont celles du cercle unité centré sur l'origine. Le lieu de transfert (c.a.d  $\omega \rightarrow \infty$ ) est la rotation infinie sur ce cercle. La « vitesse angulaire » dépend de  $\tau$ .



**Figure 4.20.** – Diagramme de Nyquist d'un retard pur. Le lieu de Nyquist est représenté par le cercle unité dans le plan complexe.

On remarquera cependant que ce modèle est fondamentalement **instable** puisque le module  $|H(j\omega)|$  ne s'annule pas lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , de ce fait nous le trouverons jamais seul.

**3.2.5. Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre**

La fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

Les parties réelle et imaginaire de cette fonction de transfert sont données par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}\end{aligned}$$

Nous avons regroupé dans le [tableau 4.2](#) quelques valeurs particulières de  $\operatorname{Re}[H(j\omega)]$  et  $\operatorname{Im}[H(j\omega)]$  pour quelques valeurs de  $\omega$ .

Le lieu complet de Nyquist d'un système du premier ordre à la forme d'un cercle, nous allons établir ses caractéristiques[18].

Posons tout d'abord,

$$X = \operatorname{Re}[H(j\omega)] = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2}$$

on peut écrire,

$$\tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} - 1$$

En posant maintenant,

$$Y = \operatorname{Im}[H(j\omega)] = \frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} = -\tau\omega X$$

on obtient une relation entre  $Y$  et  $X$  :

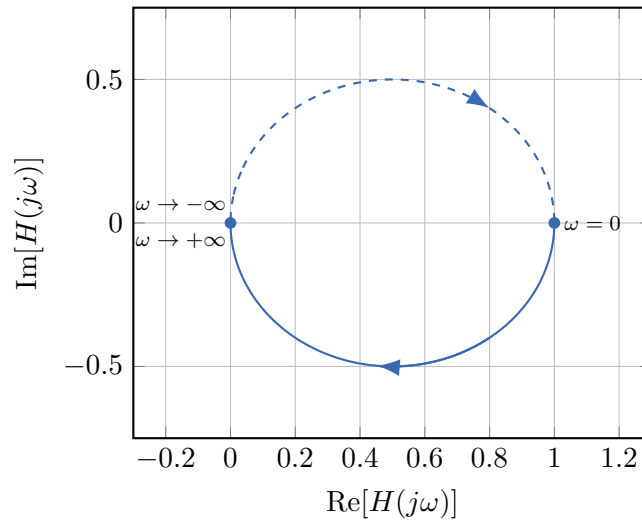
$$Y^2 = \left(\frac{K}{X} - 1\right) X^2$$

on reconnaît alors l'équation d'un cercle de centre  $(K/2, 0)$  et de rayon  $K/2$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

	$\omega = 0$	$\omega \rightarrow \infty$	$\omega = \frac{1}{\tau}$
$\text{Re}[H(j\omega)]$	$K$	$0$	$K/2$
$\text{Im}[H(j\omega)]$	$0$	$0$	$-K/2$

**Tableau 4.2.** – Quelques valeurs particulières de  $\text{Re}[H(j\omega)]$  et  $\text{Im}[H(j\omega)]$  selon  $\omega$  pour un système du premier ordre.



**Figure 4.21.** – Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre. Avec  $K = 1$  et  $\tau = 1$ . Le lieu de Nyquist est représenté par un demi-cercle dans le plan des nombres imaginaires négatifs. Le lieu de Nyquist complet correspond à un cercle de rayon  $K/2$  et de centre  $(K/2, 0)$

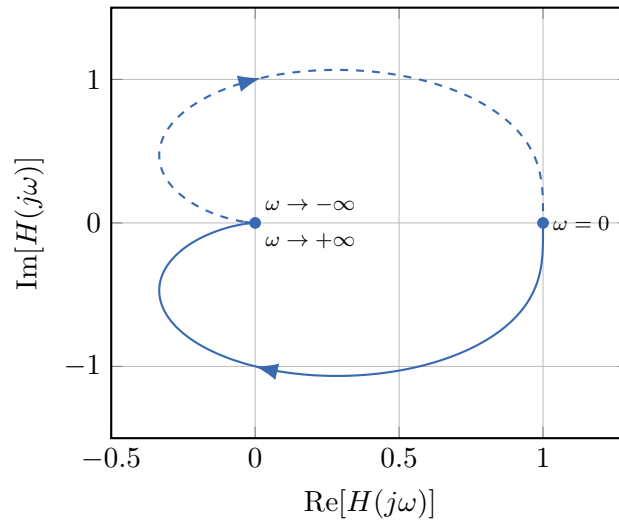
### 3.2.6. Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre

La fonction de transfert d'un système du second ordre s'écrit :

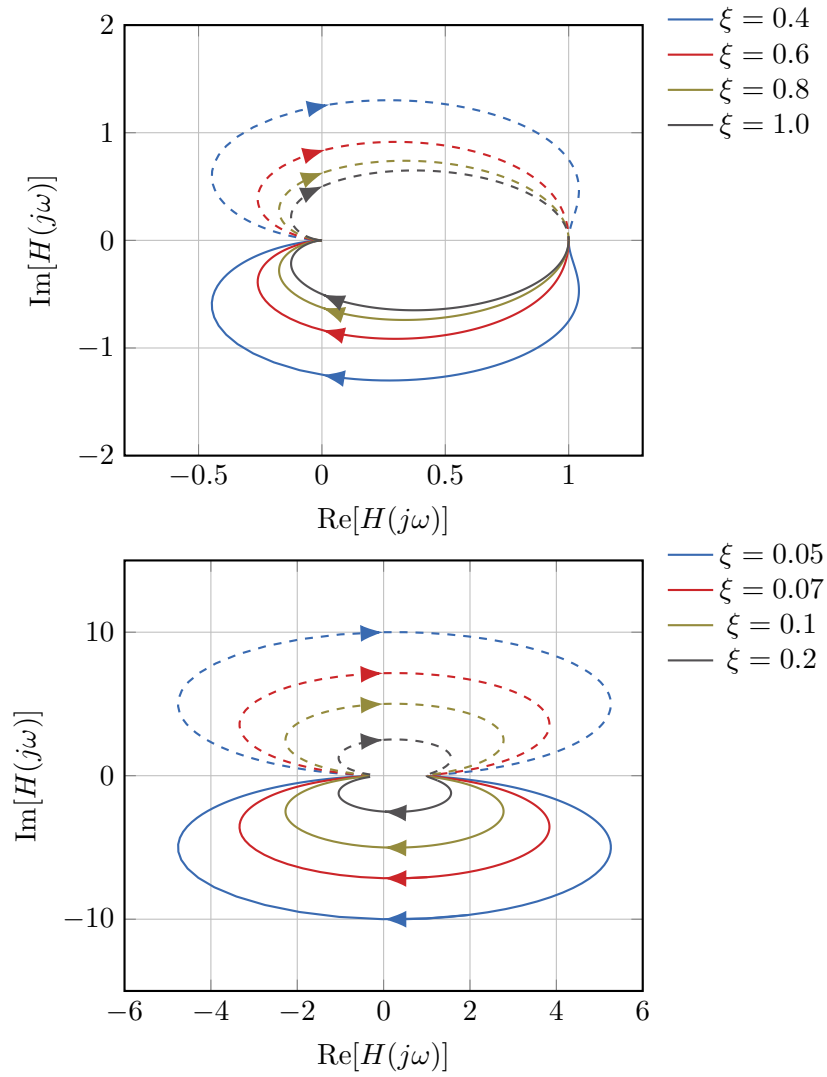
$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega}$$

Les parties réel et imaginaire de cette fonction de transfert sont données par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= \frac{-2\xi\omega_0^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}\end{aligned}$$



**Figure 4.22.** – Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre. Avec  $K = 1$  et  $\tau = 1$ . Le lieu de Nyquist est représenté par une demi cardioïde dans le plan des nombres imaginaires négatifs.



**Figure 4.23.** – Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre pour différentes valeurs du taux d'amortissement  $\xi$ . Avec  $K = 1$  et  $\tau = 1$ . Le lieu de Nyquist est représenté par une demi cardioïde dans le plan des imaginaires négatifs.

### 3.2.7. Effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist

La fonction de transfert  $H_R(j\omega)$  d'un retard est donnée par la relation :

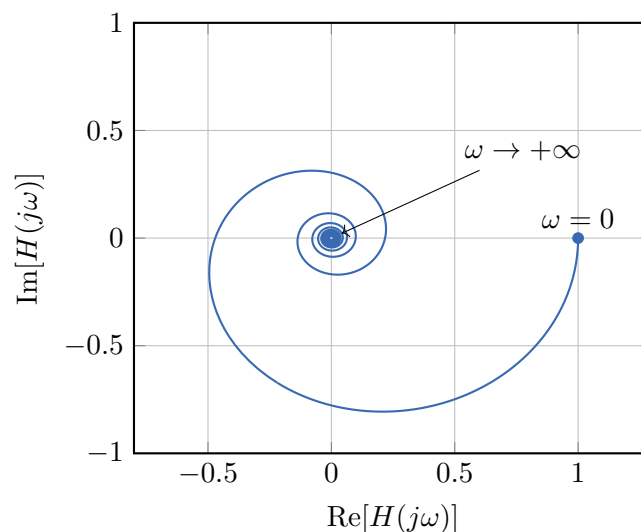
$$H_R(j\omega) = e^{-j\tau_1\omega} = \cos \tau_1\omega - j \sin \tau_1\omega$$

avec  $\tau_1$  le retard. Étudions l'effet de ce retard sur le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre  $H(j\omega)$ . La fonction de transfert modifiée est :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} H_R(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} (\cos \tau_1\omega - j \sin \tau_1\omega)$$

Les parties réels et imaginaire de la fonction de transfert sont :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K (\cos \tau_1\omega - \tau\omega \sin \tau_1\omega)}{1 + \tau^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= \frac{-K (\tau\omega \cos \tau_1\omega + \sin \tau_1\omega)}{1 + \tau^2\omega^2} \end{aligned}$$



**Figure 4.24.** – Effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre. Avec  $K = 1$ ,  $\tau = 1$  et  $\tau_1 = 2$ . Le lieu de Nyquist est représenté par une spirale.

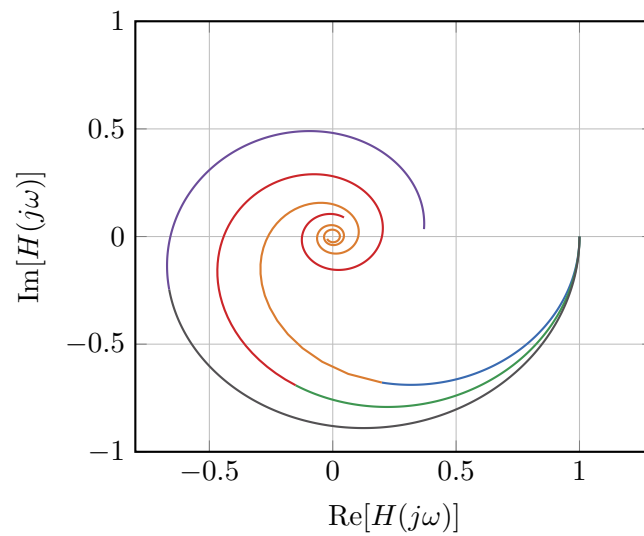
### 3.3. Diagrammes de Black : méthodologie générale

## 4. Etude du transitoire de la réponse harmonique

*à compléter (hors programme)...*

### 4.1. Exemple d'un système du premier ordre

*à compléter (hors programme)...*



**Figure 4.25.** – Effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre pour différentes valeurs de retard. (bleu)  $\tau_1 = 0.5$ , (rouge)  $\tau_1 = 1.0$  et (noir)  $\tau_1 = 2.0$ . Avec  $K = 1$ ,  $\tau = 1$  et  $\tau_1 = 2$ . Le lieu de Nyquist est représenté par une spirale. Par souci de clarté, nous n'avons ici représenté que l'intervalle  $\omega \in [0, \frac{10}{\tau_1}]$

## 4.2. Exemple d'un système du second ordre

à compléter (hors programme)...



## 5. Asservissements des systèmes linéaires

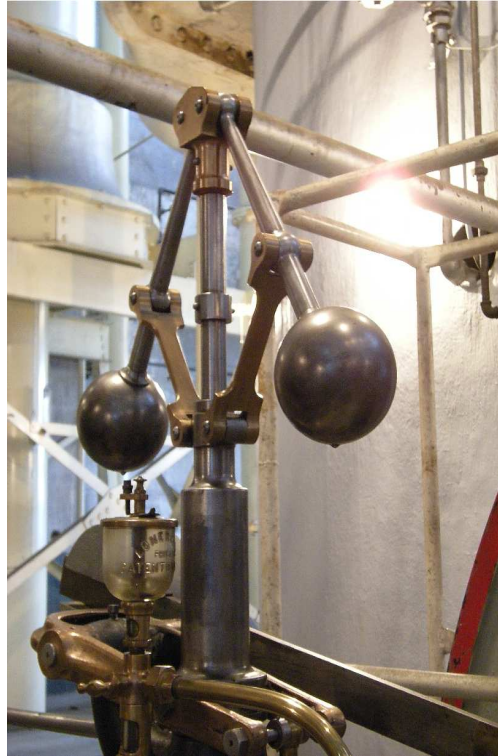
### Sommaire

---

<b>1. Introduction</b>	<b>130</b>
<b>2. Organisation d'un asservissement</b>	<b>132</b>
2.1. Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis	132
2.2. Présence d'une perturbation : la régulation	133
2.3. Schéma fonctionnel complet	133
2.4. Fonctions de transferts associées à un système asservi	136
<b>3. Asservissement des SLCI modèles</b>	<b>137</b>
3.1. Asservissement d'un intégrateur	137
3.2. Asservissement d'un système du premier ordre	138
3.3. Asservissement d'un système du second ordre	138

---

## 1. Introduction



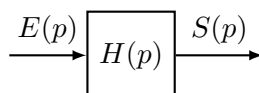
**Figure 5.1.** – Exemple historique de régulateur : Régulateur de vitesse de Watt (d'après [11])

Les chapitres précédents nous ont permis de caractériser, modéliser et analyser la réponse temporelle des systèmes linéaires. Nous allons maintenant aborder la possibilité du **contrôle** de ces systèmes par l'intermédiaire de l'**asservissement** et de **régulation**. L'idée sous-jacente est de permettre le contrôle automatique d'un système sans l'intervention d'un opérateur humain dans l'établissement d'une commande d'un système.

La figure 5.1 montre un exemple historique de régulateur de vitesse (également connu comme le régulateur à boules de Watt). La particularité de ce régulateur est d'avoir été utilisé dans l'industrie du 18<sup>ème</sup> siècle bien avant les premières avancées théoriques dans le domaine de l'automatique. Dans le contexte des premières machines à vapeur, il était important de contrôler la vitesse angulaire des turbines à vapeur. Le mécanisme de Watt permet avec un dispositif de retroaction d'agir sur la valve d'arrivée de la vapeur en fonction de la vitesse de l'axe de la turbine.

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés à l'étude de système linéaire « isolé » (de fonction de transfert  $H(p)$ ) qui pour une entrée  $E(p)$ , élaborait une sortie  $S(p)$ <sup>1</sup>. Dans le contexte du contrôle de ces systèmes l'entrée est appelée **consigne** et la sortie est la **réponse**. Le problème de **l'asservissement** consiste à faire en sorte que la réponse suive la consigne au cours du temps.

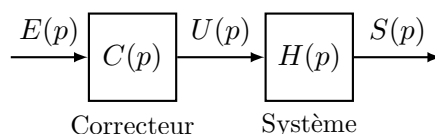
La **régulation** est un cas particulier d'asservissement, consistant à contrôler la sortie d'un système pour une consigne fixe quelque soit les perturbations auxquelles serait soumis le système.



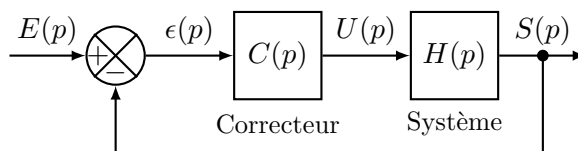
Nous avons pu caractériser la sortie en fonction de différents critères de performances : rapidité, précision, stabilité et dépassement... pour différents systèmes linéaires modèles (c.f **chapitre 3**). La question est de savoir comment agir sur le signal  $E(p)$  pour contrôler la sortie  $S(p)$  en fonction de ces exigences de performances choisis initialement.

Il existe deux approches pour élaborer la **commande** d'un système linéaire :

- En **boucle ouverte** : on place un correcteur  $C(p)$  en amont du système pour élaborer sa commande (notée  $U(p)$ ). Remarquons que la consigne est maintenant l'entrée du correcteur.



- En **boucle fermée** : le principe consiste à récupérer le signal de sortie pour ajuster le signal de commande. Pour cela, on place le système (corrigée ou non) dans une boucle de contre-réaction (négative). Les relations entre la sortie et la consigne dans une telle boucle ont été largement étudiées au **chapitre 2**.



Le signal correspondant à la différence entre la consigne et la réponse globale du système en boucle fermée est appelée l'**écart**  $\epsilon(p)$ .

La **rétroaction**<sup>2</sup> est devenu incontournable dans les applications industrielles et technologiques. Par abus de langage c'est le système en boucle fermée que l'on nomme asservissement. Cependant, la définition précédente de l'asservissement s'applique très bien dans le cas de la boucle ouverte.

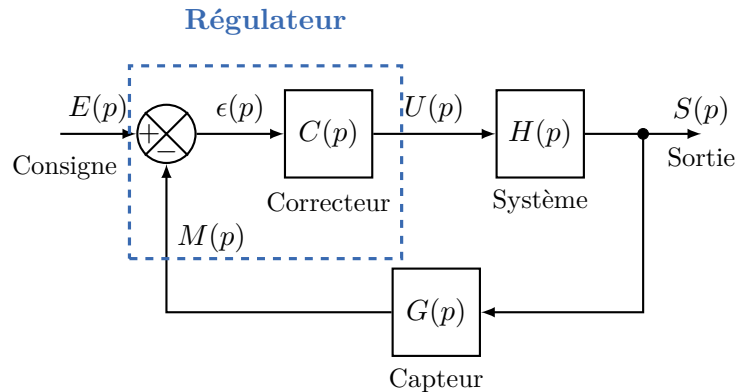
<sup>1</sup>Nous continuerons, dans ce chapitre et les suivants, de représenter les signaux et systèmes linéaires dans le domaine de Laplace. Une approche temporelle sera introduite au **chapitre 9**

<sup>2</sup>*feedback* (en anglais)

## 2. Organisation d'un asservissement

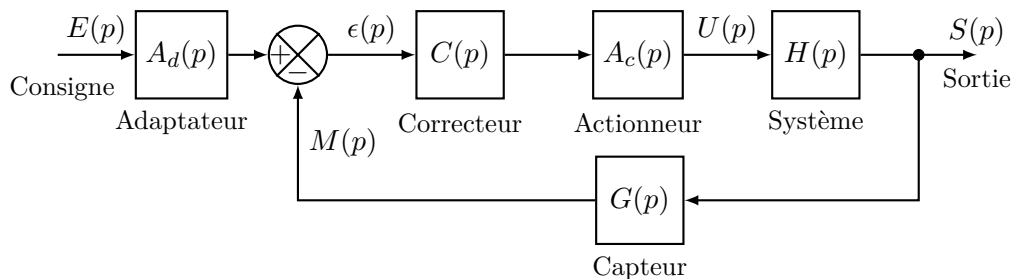
### 2.1. Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis

Classiquement, un asservissement se représente par le schéma fonctionnel de la figure (figure 5.2). Celui-ci comporte en générale un **régulateur** permettant de comparer l'image de la sortie obtenue par un capteur à la consigne. Ce régulateur est en générale accompagné d'un **correcteur** permettant de corriger la boucle ouverte du système linéaire.



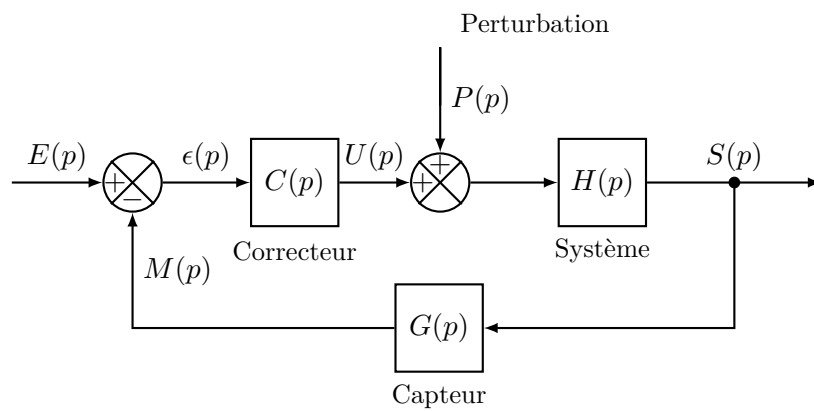
**Figure 5.2.** – Schéma fonctionnel classique de l'asservissement d'un système présentant un correcteur et un capteur. (c.f tableau 5.1)

La **mesure**  $M(p)$  est l'image de la sortie par l'intermédiaire du capteur. Il est alors en générale nécessaire d'adapter la consigne pour que l'écart  $\epsilon(p)$  soit représentatif de l'écart entre la consigne et la sortie et non de son image. Ainsi, on retrouvera très souvent un **adaptateur** permettant d'obtenir l'image de la consigne. Le procédé/système peut nécessiter d'un **actionneur** qui agit en transmettant/convertissant l'énergie nécessaire à son action. La figure 5.3 présente une forme augmentée de schéma fonctionnel présentant ces nouveaux constituants.

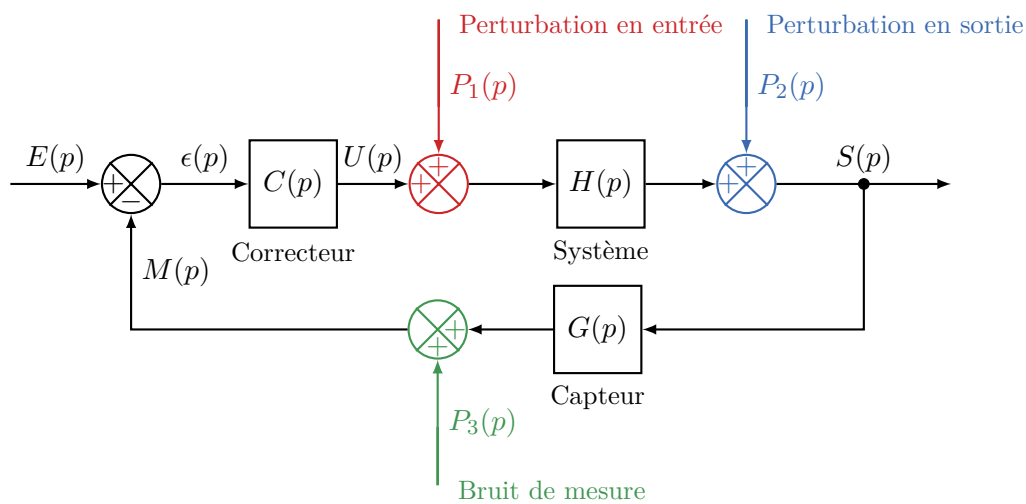


**Figure 5.3.** – Schéma fonctionnel de l'asservissement d'un système présentant un adaptateur et actionneur. (c.f tableau 5.1)

## 2.2. Présence d'une perturbation : la régulation



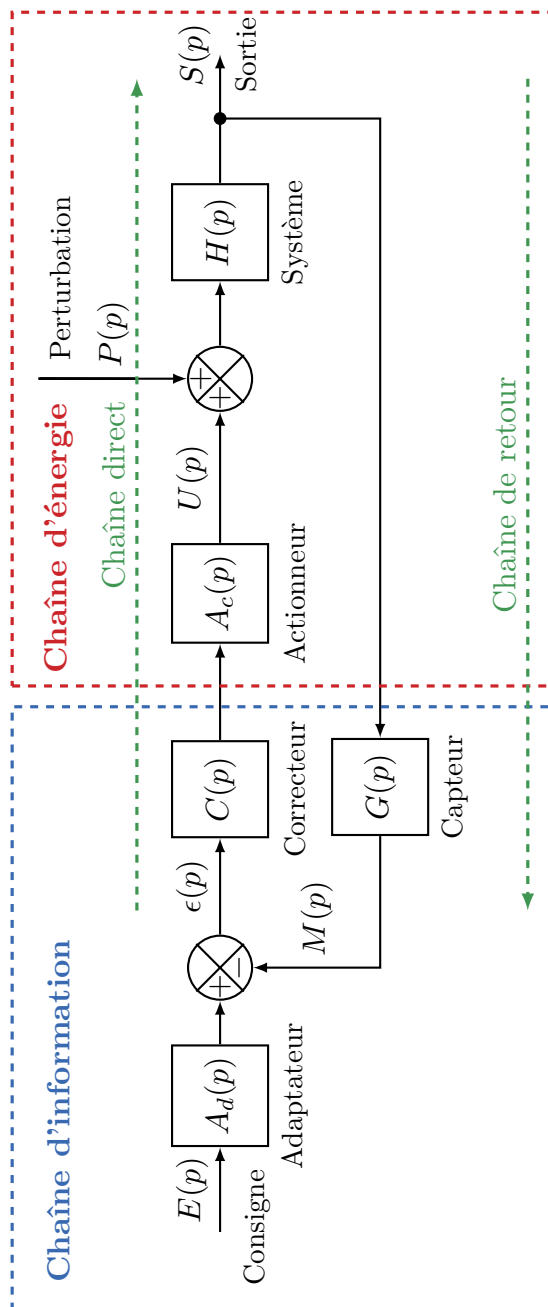
**Figure 5.4.** – Schéma fonctionnel de l'asservissement d'un système présentant une perturbation.



**Figure 5.5.** – Schéma fonctionnel de l'asservissement d'un système présentant différents types de perturbations.

## 2.3. Schéma fonctionnel complet

En regroupant les différents constituants d'un asservissement nous pouvons réaliser le découpage du schéma fonctionnel en chaîne d'énergie et en chaîne d'information comme présenté par la [figure 5.6](#)



**Figure 5.6.** – Décomposition en chaîne d'information et chaîne d'énergie d'un schéma bloc d'asservissement complet (c.f. [tableau 5.1](#)).

Composants	Description	Fonction de transfert ou signal associés
Consigne/Entrée	La valeur que l'on souhaite atteindre en sortie du système asservi. Cette consigne peut être constante ou dépendante du temps.	$E(p)$
Adaptateur	Adapte le signal de consigne à l'image de la sortie.	$A_d(p)$
Correcteur	Élabore à partir du signal d'écart $\epsilon(p)$ la commande $U(p)$ ou la grandeur réglante du système.	$C(p)$
Actionneur	L'organe d'action qui apporte l'énergie au système.	$A_c(p)$
Commande	Le signal de commande du système élaboré par l'actionneur ou le correcteur.	$U(p)$
Système	Le système que l'on souhaite contrôler et/ou asservir	$H(p)$
Régulateur	Le régulateur se compose d'un comparateur qui élabore le signal d'écart $\epsilon(p)$ à partir de la consigne et de la mesure, formellement le régulateur incorpore également le correcteur.	$\epsilon(p)$
Perturbation	Phénomène physique intervenant sur le système qui en modifie la sortie	$P(p)$
Capteur	Le capteur prélève la sortie pour en donner une image (la mesure) utile au régulateur. Intervenant dans la boucle ouverte, son étude est indispensable pour la caractérisation des performances du système asservi.	$G(p)$
Mesure	Le signal de la mesure de la sortie ou image de la sortie élaboré par le capteur.	$M(p)$
Sortie	Le signal de sortie du système que l'on souhaite régulé et/ou asservir.	$S(p)$

**Tableau 5.1.** – Terminologie et définition associés à l'asservissement des systèmes.

## 2.4. Fonctions de transferts associées à un système asservi

Chacuns des blocs du schéma fonctionnel d'un asservissement [figure 5.6](#) permet de définir une fonction de transfert reliant localement une entrée et une sortie. Nous allons définir quelques fonctions de transferts fondamentales à l'étude d'un système asservi.

### Fonction de transfert de la chaîne directe

La **fonction de transfert de la chaîne directe (FTCD)**, que nous noterons  $H_{CD}(p)$  est liée à la chaîne d'action de l'asservissement. Elle lie la sortie  $S(p)$  à l'écart  $\epsilon(p)$ . Formellement,

$$H_{CD}(p) = \frac{S(p)}{\epsilon(p)} \quad (5.1)$$

### Fonction de transfert de la chaîne de retour

La **fonction de transfert de la chaîne de retour (FTCR)**, que nous noterons  $H_{CR}(p)$  est liée à la chaîne de mesure de l'asservissement. Elle lie l'image de la sortie  $M(p)$  à la sortie  $S(p)$ . Elle correspond essentiellement au capteur. Formellement,

$$H_{CR}(p) = \frac{M(p)}{S(p)} \quad (5.2)$$

Dans le cas d'un retour unitaire  $H_{CR}(p) = 1$ , c'est à dire que la sortie est la consigne sont de même nature.

### Fonction de transfert en boucle ouverte

La **fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)**, que nous noterons  $H_{BO}(p)$  correspond à la fonction de transfert du système non asservi. Elle lie l'image de la sortie  $M(p)$  à l'écart  $\epsilon(p)$ . Formellement,

$$H_{BO}(p) = \frac{M(p)}{\epsilon(p)} = \frac{M(p)}{S(p)} \frac{S(p)}{\epsilon(p)} = H_{CR}(p)H_{CD}(p) \quad (5.3)$$

Dans le cas d'un retour unitaire on obtient  $H_{BO}(p) = H_{CD}(p)$

### Fonction de transfert en boucle fermée

La **fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)**, que nous noterons  $H_{BF}(p)$  correspond explicitement à la fonction de transfert du système asservi. Elle lie la sortie du système  $S(p)$  à la consigne  $E(p)$ . Formellement et en appliquant la réduction des schémas blocs (c.f [section 3.1](#)),



$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_{CD}(p)}{1 + H_{CR}(p)H_{CD}(p)} = \frac{H_{CD}(p)}{1 + H_{BO}(p)} \quad (5.4)$$

Remarquons que dans le cas d'une boucle de contre réaction unitaire (c.a.d  $H_{CR}(p) = 1$ ), la **FTBF** se réduit à :

$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

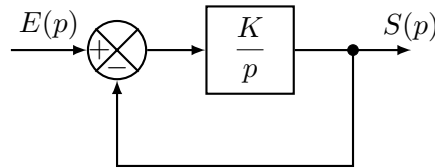
Dans le cas d'une contre réaction unitaire, la **FTBF** ne dépend que de la **FTBO**.

### 3. Asservissement des SLCI modèles

Dans cette partie, nous présentons les asservissements par boucle de contre-réaction unitaire par de systèmes modèles déjà introduits au **chapitre 3**. Nous pourrions dégager la règle générale suivante : **l'ordre  $n$  d'une fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$  est conservé en boucle fermée par l'asservissement.**

#### 3.1. Asservissement d'un intégrateur

Considérons un système intégrateur asservi et régi par le schéma-bloc suivant :



La fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$  est telle que :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p}$$

avec  $K$  le gain statique. La **FTBF** est alors donnée :

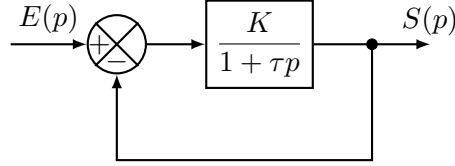
$$H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{K}{p + K} = \frac{1}{\tau_{BF}p + 1}$$

Remarquons qu'un intégrateur asservi devient un système du premier ordre de gain statique unité et de constante de temps  $\tau_{BF} = \frac{1}{K}$  où  $K$  est le gain statique de la **FTBO**<sup>3</sup>. Au **chapitre 3**, nous avons pu conclure que les systèmes du premier ordre sont fondamentalement stable (du moins pour  $\tau > 0$ ) et que les intégrateurs sont instables. Ainsi, nous observons que **l'asservissement permet de stabiliser un système intrinsèquement instable.**

<sup>3</sup>Un intégrateur étant un système du premier ordre particulier, nous avons bien l'ordre de  $H_{BO}(p)$  qui est égal à l'ordre de  $H_{BF}(p)$ .

### 3.2. Asservissement d'un système du premier ordre

Considérons un système du premier ordre asservi et régi par le schéma-bloc suivant :



La fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$  du procédé est alors tel que :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

où  $K$  est le gain statique et  $\tau$  la constante de temps du système en boucle ouverte. La **FTBF** est alors donnée :

$$H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{K}{(1 + K) + \tau p}$$

Remarquons que comme attendu la **FTBF** reste du premier ordre. Sous sa forme canonique cette fonction de transfert devient :

$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K}p} = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}p}$$

où  $K_{BF}$  est le gain statique et  $\tau_{BF}$  la constante de temps du système boucle fermée. Par identification, on a alors les relations suivantes entre les paramètres du premier ordre de la **FTBO** et les paramètres du premier ordre de la **FTBF** :

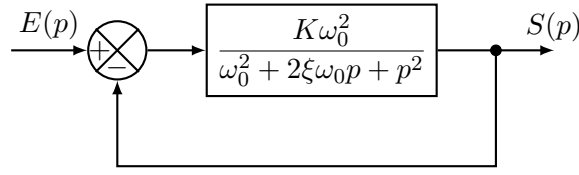
$$K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$$

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + K}$$

Constatons que le gain statique en boucle ouverte  $K$  intervient dans la définition du gain statique  $K_{BF}$  et de la constante de temps  $\tau_{BF}$  en boucle fermée. Ainsi en modifiant le paramètre  $K$ , il est possible de jouer sur les deux paramètres régissant la boucle fermée. Pour  $K > 0$ , le domaine de définition des paramètres du système en boucle fermée sont  $K_{BF} \in [0, 1[$  et  $\tau_{BF} \in ]0, \tau]$

### 3.3. Asservissement d'un système du second ordre

Considérons un système du second ordre asservi et régi par le schéma-bloc suivant :



La fonction de transfert en boucle ouverte du procédé  $H_{BO}(p)$  est tel que :

$$H_{BO}(p) = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2}$$

où  $K$  est le gain statique,  $\omega_0$  la pulsation propre et  $\xi$  le coefficient d'amortissement du système en boucle ouverte. La **FTBF** est donnée par :

$$H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2(1 + K) + 2\xi\omega_0 p + p^2}$$

Une nouvelle fois, nous constatons que la fonction de transfert en boucle fermée est du même ordre que celle en boucle ouverte. Sous une forme canonique la **FTBF** devient :

$$H_{BF}(p) = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2(1 + K) + 2\xi\omega_0 p + p^2} = \frac{K_{BF}\omega_{0,BF}^2}{\omega_{0,BF}^2(1 + K_{BF}) + 2\xi_{BF}\omega_{0,BF} p + p^2}$$

Par identification, on alors les relations suivantes entre les paramètres du second ordre de la **FTBO** et les paramètres du second ordre de la **FTBF** :

$$\begin{aligned} K_{BF} &= \frac{K}{1 + K} \\ \omega_{0,BF} &= \omega_0 \sqrt{1 + K} \\ \xi_{BF} &= \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}} \end{aligned}$$

On remarque que influencer le gain de la boucle ouverte permet de modifier tous les paramètres du second ordre de la boucle fermée.



## 6. Performances des systèmes asservis

### Sommaire

---

<b>1. Introduction</b>	<b>142</b>
<b>2. Précision</b>	<b>142</b>
2.1. Précision en boucle ouverte	142
2.2. Précision en boucle fermée	143
2.3. Effet d'une perturbation	146
<b>3. Rapidité</b>	<b>150</b>
3.1. Réponse temporelle	150
3.2. Réponse harmonique	156
3.3. Influence des pôles dominants	156

---

## 1. Introduction

Les performances qui vont nous intéresser dans ce chapitre sont la **précision** et la **rapidité**. Dans les deux cas, nous allons observer que les performances en boucle fermée dépendent du système en boucle ouverte.

## 2. Précision

Un système est précis si l'écart que l'on note  $\epsilon(t)$  entre l'entrée  $e(t)$  et la sortie  $s(t)$  est nul. Dans le domaine de Laplace, cet écart devient :

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p)$$

On distingue deux cas :

- En régime permanent, cet écart  $\epsilon_s$  est nommée **erreur statique**.
- En régime transitoire, cet écart  $\epsilon(t) = e(t) - s(t)$  est nommée **erreur dynamique**.

L'erreur dynamique consiste à suivre l'écart défini précédemment durant le transitoire. Pour étudier l'erreur statique, on sollicite le système à différents types de signaux pour obtenir dans les différents cas :

- l'**erreur indicielle** ou l'erreur de position qui est l'erreur statique de la réponse indicielle.
- l'**erreur de poursuite** ou erreur de vitesse qui est l'erreur statique de la réponse à une rampe.
- l'**erreur en accélération** qui est l'erreur statique de la réponse à une parabole.

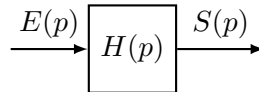
Concrètement pour étudier l'erreur statique on cherche la limite à l'infini de  $\epsilon(t)$  ou encore en appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - S(p)) \quad (6.1)$$

Rappelons que pour pouvoir appliquer ce théorème la valeur finale doit être finie ou en d'autre mot le système doit être stable.

### 2.1. Précision en boucle ouverte

Soit un système caractérisé par la fonction de transfert  $H(p)$  est sollicité par l'entrée  $E(p)$ . La sortie  $S(p)$  est alors donnée par :



L'erreur statique est alors donnée par :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - H(p)E(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(1 - H(p))E(p)$$

### 2.1.1. Exemple d'un premier ordre

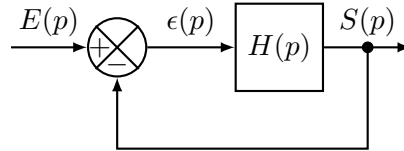
Prenons l'exemple d'un système du 1er ordre de fonction de transfert canonique  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$  que l'on sollicite avec un échelon d'amplitude (consigne)  $E_0$ . L'erreur statique est alors donnée par :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{K}{1 + \tau p} \right) E_0 = (1 - K)E_0$$

Le système est précis (c.a.d  $\epsilon(\infty) = 0$ ) si  $K = 1$ .

### 2.2. Précision en boucle fermée

Considérons le cas d'un système asservi de fonction de transfert  $H(p)$  par une boucle de contre-réaction à retour unitaire.



La **FTBO** est simplement donnée par  $H(p)$ . Dans le cas le plus générale, il est toujours possible d'écrire une fonction de transfert sous la forme canonique (**Chapitre 1**) :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec  $\alpha$  la classe du système en boucle ouverte,  $K$  le gain statique et  $N(p)$  et  $D(p)$  deux polynômes tels que  $N(0) = D(0) = 1$ .

Dans le domaine de Laplace l'écart  $\epsilon(p)$  s'écrit :

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = \left( 1 - \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} \right) E(p)$$

en remplaçant  $H_{BO}(p)$  par sa représentation générale :

$$\epsilon(p) = \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} E(p) \quad (6.2)$$

L'erreur statique  $\epsilon_s$  est alors donnée par la limite (Théorème de la valeur finale) :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} pE(p)$$

ou encore en utilisant les valeurs des polynômes en 0 :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} p E(p) \quad (6.3)$$

Cette erreur dépend donc de la nature de la sollicitation (c.a.d  $E(p)$ ) et de la classe  $\alpha$  de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Nous allons maintenant considérer différents types de sollicitations pour différentes classes de système en boucle ouverte.

### 2.2.1. Erreur statique indicielle

L'erreur indicielle est l'erreur entre la sortie d'un système et une sollicitation en échelon  $e(t) = E_0 u(t)$  de transformée de Laplace  $E(p) = \frac{E_0}{p}$ . Pour une telle entrée, l'erreur statique (c.f [équation \(6.3\)](#)) devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0$$

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha = 0$  en boucle ouverte :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p^0 + K} E_0 = \frac{E_0}{1 + K}.$$

L'erreur est finie mais les réponses indicielles des systèmes de classe  $\alpha = 0$  en boucle ouverte ne sont pas précis.

Dans les autres cas  $\alpha > 0$ , l'erreur statique s'annule :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 = 0$$

Les réponses indicielle des systèmes de classe  $\alpha > 0$  sont donc précis.

### 2.2.2. Erreur statique de poursuite

L'erreur de poursuite est l'erreur statique d'un système soumis à une rampe du type  $e(t) = r(t) = E_0 t u(t)$  de transformée de Laplace  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

Pour une telle entrée, l'erreur statique devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \frac{E_0}{p} = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} E_0$$

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha = 0$  en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{-1}}{p^0 + K} E_0 = +\infty$$



Entrée	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$\frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
$\frac{E_0}{p^2}$	$+\infty$	$\frac{E_0}{K}$	0	0
$\frac{2E_0}{p^3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{2E_0}{K}$	0

**Tableau 6.1.** – Résumé des erreurs statiques pour différentes sollicitations et classe de système en boucle ouverte

Le système est incapable de suivre l'entrée souhaitée.

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha = 1$  en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p+K} E_0 = \frac{E_0}{K}$$

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha > 1$  en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} E_0 = 0$$

Le système est donc précis.

### 2.2.3. Erreur statique d'accélération

L'erreur d'accélération est l'erreur statique d'un système soumis à un signal parabolique

$$e(t) = E_0 t^2 u(t) \text{ de transformée de Laplace } E(p) = \frac{2E_0}{p^3}$$

Pour une telle entrée, l'erreur statique devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \frac{2E_0}{p^2} = \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} 2E_0$$

Dans le cas d'un système de classe  $\alpha < 2$  en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = +\infty$$

Pour un système de classe  $\alpha = 2$  en boucle ouverte, l'erreur est finie :

$$\epsilon_s = \frac{2E_0}{K}$$

et s'annule pour  $\alpha > 2$

## 2.3. Effet d'une perturbation

### 2.3.1. Cas générale

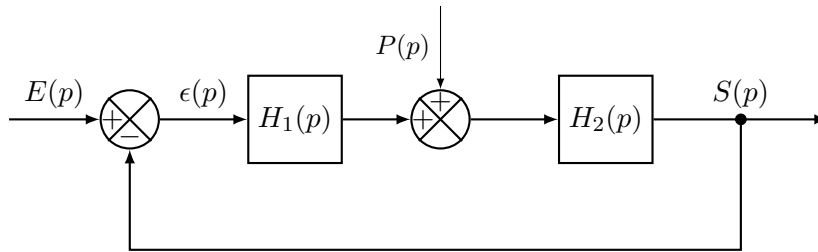
On considère maintenant l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système asservis. Sans perte de généralité, on ne considèrera que le cas d'une perturbation en entrée (c'est à dire en amont d'un système linéaire défini par une fonction de transfert  $H_2(p)$ , la présence d'un correcteur  $H_1(p)$  n'est pas obligatoire mais facilite l'interprétation des résultats.

Considérons le schéma bloc suivant avec les fonctions de transfert  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  de forme canonique :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

$$H_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

de les gains statiques  $K_i$ , de classe  $\alpha_i$ , de polynômes  $N_i(p)$  et  $D_i(p)$  tels que  $N_i(0) =$  et  $D_i(0) = 0$ .



Pour déterminer l'écart à la consigne d'un tel système, il faut déterminer la sortie globale du système asservi à deux entrées (c.f ?? [section 4](#)).

On se donne les formes canoniques suivantes pour les deux fonctions de transferts  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  tels que :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

$$H_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

avec  $K_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $N_i(p)$  et  $D_i(p)$  respectivement les gains statiques, la classe et les polynômes en  $p$  tels que  $N_i(0) = 1$  et  $D_i(0) = 1$ .

Pour déterminer l'écart, il nous faut déterminer la sortie globale  $S(p)$  pour des entrées multiples (c.f [Chapitre 2-??](#)). Cette sortie est sous la forme :

$$S(p) = H_{P=0}E(p) + H_{E=0}P(p)$$

c'est à dire que c'est la somme des contributions des deux entrées prises séparément.

L'écart est alors donné par

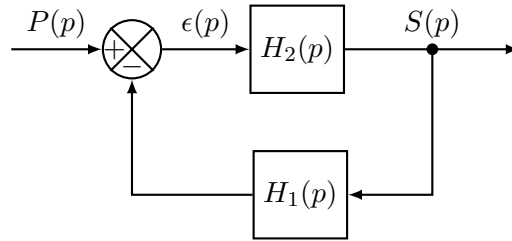
$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = (1 - H_{P=0}) E(p) - H_{E=0} P(p)$$

Le premier terme correspond à l'écart de l'asservissement que nous avons déjà étudié précédemment, le second terme, que l'on note  $\epsilon_P(p)$ , est la contribution à l'écart dû à la perturbation. La fonction de transfert de l'asservissement est donnée par :

$$H_{P=0} = \frac{H_1 H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p)}$$

Dans le cas de la régulation d'un système asservis, il est nécessaire de rejeter cette contribution.

La fonction de transfert  $H_{E=0}$ , de la régulation, correspondant à une consigne nulle, s'obtient en considérant le schéma-bloc suivant :



en boucle fermée, on a alors :

$$H_{E=0}(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p)}$$

en remplaçant par leurs formes canoniques générales :

$$H_{E=0}(p) = \frac{p^{\alpha_1} K_2 N_2(p) D_1(p)}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

Examinons l'erreur en régime permanent pour une perturbation constante. C'est à dire pour perturbation  $P(p)$  en échelon telle que  $P(p) = \frac{P_0}{p}$ . L'erreur dû à la perturbation en régime permanent est alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon_P \\ \epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} -H_{E=0} P_0 \\ \epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha_1} K_2}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} + K_1 K_2} P_0 \end{aligned}$$

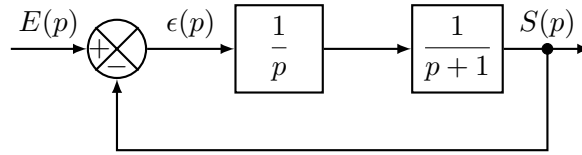
**La perturbation est rejetée si  $\alpha_1 > 0$ , c'est à dire s'il existe au moins un intégrateur en amont de la perturbation.** En effet si  $\alpha_1 = 0$ , l'erreur dû à la

perturbation est finie et donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} + K_1 K_2} P_0$$

### 2.3.2. Exemple de rejet de perturbation

Nous allons voir ici le rejet d'une perturbation d'un système du premier ordre. On considère le système du premier ordre, en boucle ouverte, placé dans une boucle de contre réaction unitaire avec un intégrateur comme ci-dessous :



On souhaite réguler ce système pour une consigne en échelon. D'après les résultats précédents, l'erreur statique de position est nulle en asservissement puisque le système présente au moins un intégrateur. Pour observer le rejet de la perturbation, nous allons considérer deux positions possibles pour la perturbation (avant et après l'intégrateur).

On considère une perturbation constante telle que  $P(p) = e^{-\tau p} \frac{P_0}{p}$  retardée d'un temps  $\tau > 0$ .

#### Si l'intégrateur est en aval de la perturbation

Dans un tel cas l'erreur dû à la perturbation est donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon_P(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{-\tau p}}{p(p+1) + 1} P_0 = P_0$$

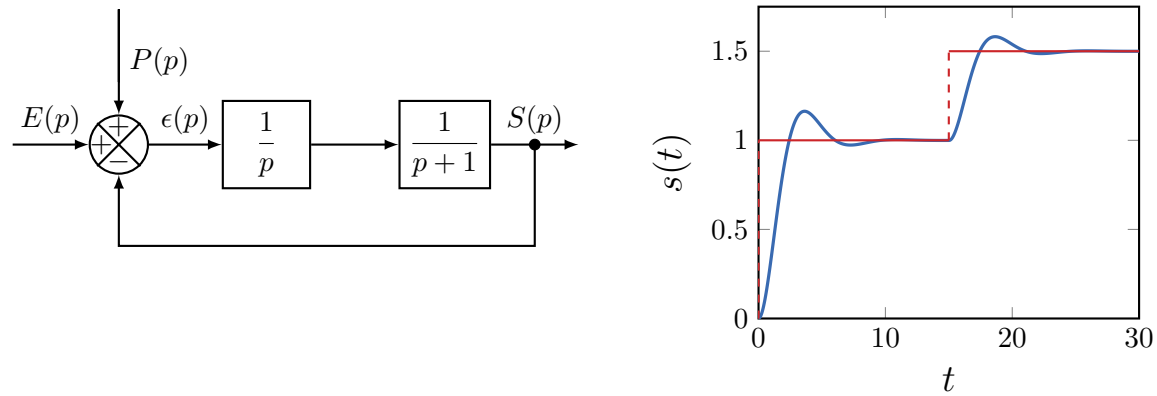
L'erreur statique de position totale est donc non nulle. La perturbation n'est pas rejetée comme on peut le voir sur la simulation de la réponse temporelle globale de ce système (c.f [figure 6.1](#)).

#### Si l'intégrateur est en amont de la perturbation

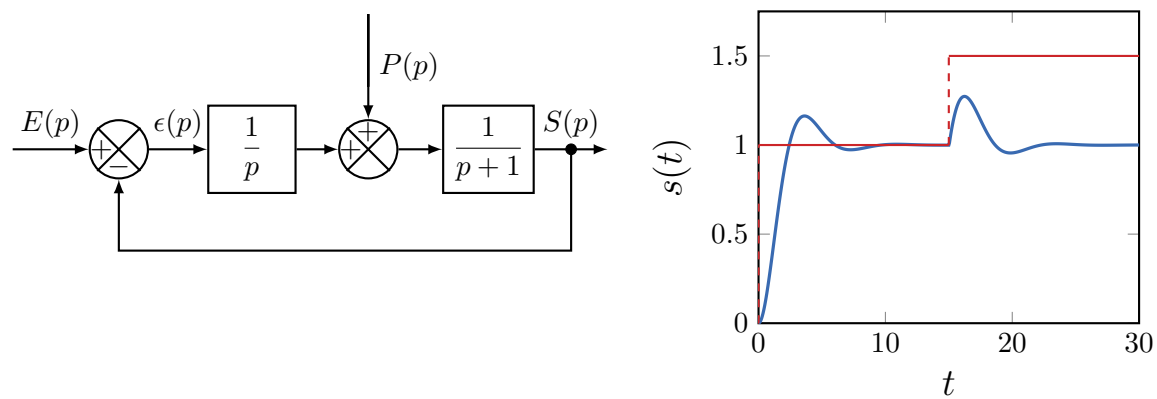
Dans un tel cas l'erreur dû à la perturbation est donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p e^{-\tau p}}{p(p+1) + 1} P_0 = 0$$

L'erreur statique de position totale est donc nulle. La perturbation est rejetée, comme on peut le voir sur la simulation de la réponse temporelle globale de ce système (c.f [figure 6.2](#)).



**Figure 6.1.** – Effet de la perturbation sur la réponse temporelle dans le cas où l'intégrateur est en aval de la perturbation. La simulation de la réponse temporelle est obtenue pour les paramètres suivants :  $E_0 = 1$ ,  $\tau = 15$



**Figure 6.2.** – Effet de la perturbation sur la réponse temporelle dans le cas où l'intégrateur est en amont de la perturbation. La simulation de la réponse temporelle est obtenue pour les paramètres suivants :  $E_0 = 1$ ,  $\tau = 15$

### 3. Rapidité

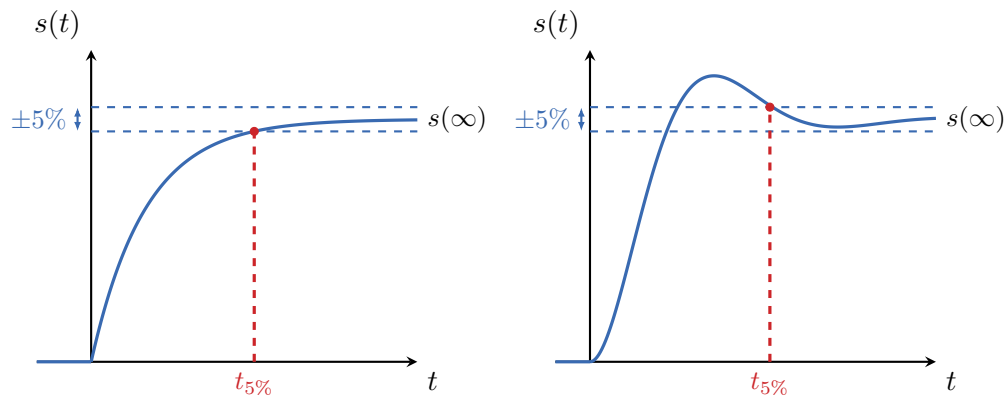
La rapidité est un critère important dans le contexte du contrôle des systèmes dynamiques. Cette rapidité correspond à la durée que met un système pour atteindre le régime permanent. Ce critère de performance dépend donc directement du transitoire de la réponse temporelle. En générale, la valeur finale de la réponse d'un système est atteinte de façon asymptotique. C'est pourquoi, ce critère est généralement évalué relativement à la valeur finale de la réponse indicielle. Dans le cas des systèmes en boucle ouverte, nous ne rappellerons que les résultats obtenues dans les chapitres précédents. L'objectif principale est ici d'évaluer l'effet du bouclage sur ce critère de performance.

#### 3.1. Réponse temporelle

Dans la pratique, on caractérise la rapidité d'une réponse temporelle par l'intermédiaire de deux valeurs :  $t_{5\%}$  le **temps de réponse à 5%** et  $t_m$  le **temps de montée**. On rappelle ici les définitions de ces deux temps ainsi que les résultats obtenues au [chapitre 3](#) pour les systèmes modèles.

##### 3.1.1. Temps de réponse à 5% et temps de montée

Le temps de réponse à 5% d'un système correspond au temps mis par la réponse pour atteindre 5% de sa valeur finale  $s(\infty)$ . Dans le cas où la réponse tend asymptotiquement en oscillant vers la valeur finale, le temps de réponse à 5% correspond au temps pour lequel le signal de la réponse reste dans une bande à 5% autour de la valeur finale.

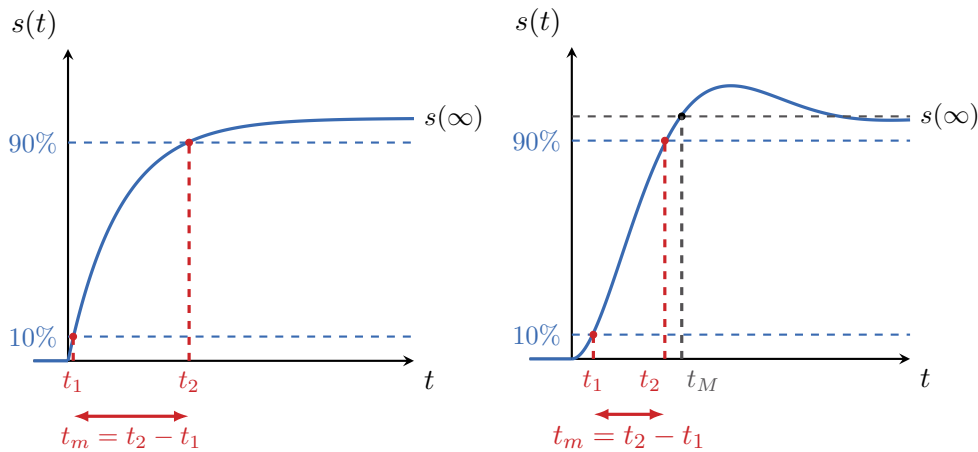


**Figure 6.3.** – Définition du temps de réponse à 5% : (à gauche) dans le cas d'une réponse temporelle sans pseudo-oscillations et (à droite) dans le cas d'une réponse temporelle avec pseudo-oscillations

Il apparaît clair que dans le cas d'une réponse présentant des oscillations, le temps de réponse à 5% va dépendre de l'amplitude et la période des pseudo-oscillations. Dans

le cas où l'on souhaite caractériser la rapidité indépendamment de ces oscillations, on utilisera le temps de montée.

Le temps de montée  $t_m$  est le temps mis par réponse temporelle d'un système pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Il existe une autre définition du temps de montée. Pour celle-ci le temps de montée (que nous noterons  $t_M$ ) correspond à la durée au bout de laquelle la réponse passe pour la première fois par la valeur finale. Cependant, il faut remarquer que pour certaine réponse la valeur finale n'est jamais atteinte en un temps fini. Cette dernière définition n'a donc de sens qu'en régime pseudo-périodique.



**Figure 6.4.** – Définition du temps de montée : (à gauche) dans le cas d'une réponse temporelle sans pseudo-oscillations et (à droite) dans le cas d'une réponse temporelle avec pseudo-oscillations

Quelque soit la grandeur utilisée pour caractériser les performances de rapidité d'un système linéaire, on dira que **plus le temps de réponse à 5% et le temps de montée  $t_m$  seront faibles plus le système sera rapide.**

### 3.1.2. Système du premier ordre

La réponse indicielle  $s(t)$ , à un échelon unitaire, d'un système du premier ordre est donnée par l'équation (3.4) du chapitre 3, à savoir :

$$s(t) = K \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

Le temps de réponse à 5%  $t_{5\%}$  est tel que  $s(t_{5\%}) = 0.95K$ ,

$$t_{5\%} = -\tau \log 0.05 \sim 3\tau.$$

Le temps de montée  $t_m = t_2 - t_1$  avec  $t_1$  et  $t_2$ , les temps tels que :

$$\begin{aligned}s(t_1) &= 0.1K \\ s(t_2) &= 0.9K \\ t_m &= -\tau \log \frac{0.1}{0.9} \sim 2.2\tau\end{aligned}$$

Le temps de réponse à 5% et le temps de montée  $t_m$  dépendent directement de la constante. Ce qui permet de conclure que **plus la constante de temps  $\tau$  d'un système du premier ordre est faible plus le système est rapide.**

### Effet du bouclage sur un système du premier ordre

Nous avons montré au chapitre 5 que les paramètres de la FTBF d'un système du premier ordre ( $K_{BF}, \tau_{BF}$ ) peuvent être obtenues à partir des paramètres de la FTBO. Notamment les relations suivantes :

$$\begin{aligned}K_{BF} &= \frac{K}{1+K} \\ \tau_{BF} &= \frac{\tau}{1+K}\end{aligned}$$

Il est alors possible de modifier la constante de temps en boucle fermée en modifiant la valeur du gain statique en boucle ouverte. Pour augmenter la rapidité d'un système, on augmentera le gain statique de la FTBO pour diminuer les temps de réponse et de montée.

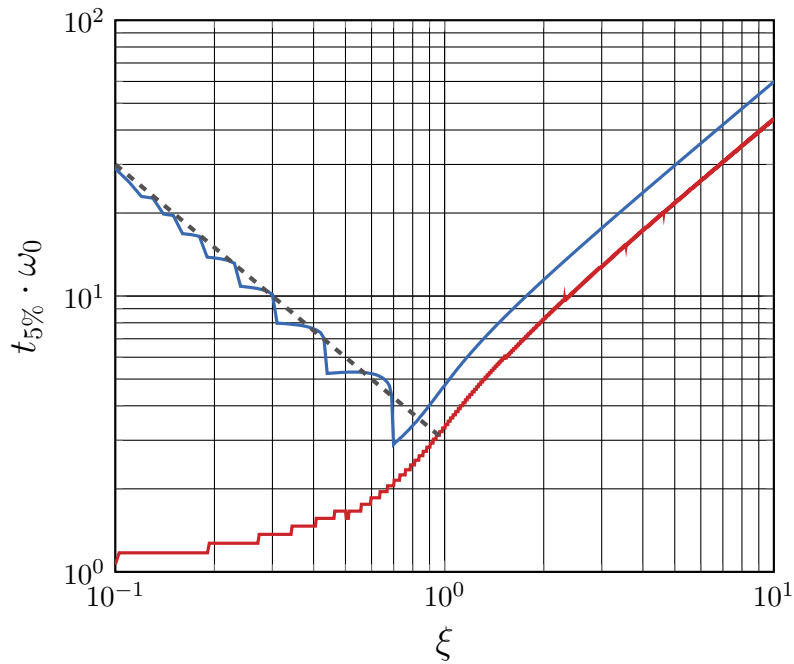
### 3.1.3. Système du second ordre

Comme nous l'avons déjà souligné au chapitre 3, dans le cas d'un système du second ordre, il n'existe pas de forme analytique simple pour déterminer le temps de réponse à 5%. Celui-ci dépend en effet de la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  et de la pulsation propre du système  $\omega_0$ . Il est cependant possible de tracer les relations entre les temps de réponse à 5%, le temps de montée (les deux définitions

Pour déterminer le temps de réponse à 5%, on utilise l'abaque de la figure figure 6.5. Sur cette figure nous avons représenté le temps de réponse à 5% et le temps de montée réduits par rapport à la pulsation propre  $\omega_0$ . **En effet pour un même coefficient d'amortissement, plus la pulsation propre augmente plus le temps de réponse diminue, donc plus le système est rapide.**

Nous pouvons relever sur ces abaques les coefficients d'amortissement donnant lieu au système le plus rapide selon le régime du second ordre accepté. **Dans le cas où les dépassements ne sont pas autorisés (c.a.d régime apériodique ( $\xi > 1$ )), le système est le plus rapide pour  $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim 5$ . Dans le cas où un dépassement relatif est autorisé, la temps de réponse minimal est obtenu pour  $\xi \sim 0.7$  soit pour  $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim 3$ .**





**Figure 6.5.** – Caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre en fonction du taux d'amortissement  $\xi$  : par (bleu) le temps de réponse à 5%, (rouge) le temps de montée  $t_m$ . Ces deux temps sont donnés en unité réduite par rapport la pulsation propre  $\omega_0$ . Le minimum du temps de réponse à 5% est atteint pour  $\xi \sim 0.7$  pour lequel  $\omega_0 \cdot t_{5\%} \sim 3$ . Le droite en pointillé représente l'équation approchée  $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim \frac{3}{\xi}$  pour les faibles valeurs de  $\xi$ .

Il est possible de déterminer une relation analytique pour le temps de montée à la valeur finale  $t_M$ . Rappelons quelques résultats obtenus pour la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique (c.f [Chapitre 3 section 3.4.2](#)) :

- La fonction de transfert d'un système du second ordre est donnée par :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

- La réponse indicielle pour échelon unitaire tend vers le gain statique  $K$
- La réponse indicielle pour une échelon unitaire et en régime pseudo-périodique est donnée par :

$$s(t) = K \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \right)$$

Le temps de montée à la valeur finale  $t_M$  est tel que,

$$s(t_M) = K$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t_M} \sin(\omega_d t_M + \phi) = 0$$

Cette expression est nulle que si  $\sin(\omega_d t_M + \phi) = 0$ . On obtient alors :

$$t_M = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} \quad (6.4)$$

en fonction de  $\xi$  uniquement cette relation devient :

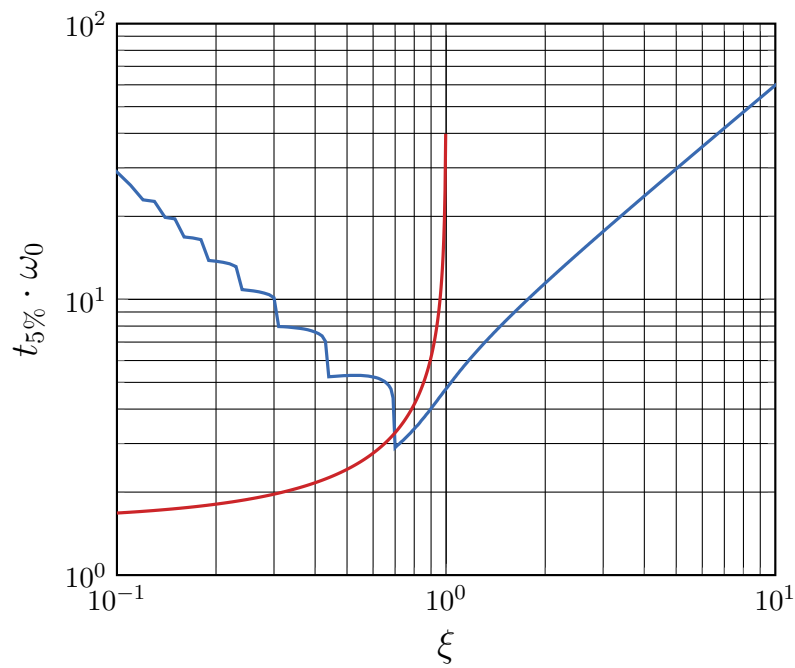
$$t_M = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

ou encore sous sa forme réduite en  $\omega_0$  :

$$t_M \omega_0 = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (6.5)$$

Remarquons que pour le temps de réponse à 5% minimal, le temps de montée à la valeur finale réduit sont proche. **Autrement dit, pour  $\xi \sim 0.7$  on a :**

$$t_M = t_{5\%}.$$



**Figure 6.6.** — Caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre en fonction du taux d'amortissement  $\xi$  : par (bleu) le temps de réponse à 5%, (rouge) le temps de montée  $t_M$  à la valeur finale. Ce dernier est donné par la relation analytique établie dans le texte (c.f [équation \(6.5\)](#)).

### Effet du bouclage sur un système du second ordre

À l'instar des systèmes du premier ordre, nous avons montré au chapitre 5 que les paramètres de la FTBF d'un système du second ordre  $(K_{BF}, \xi_{BF}, \omega_{0,BF})$  peuvent être obtenues à partir des paramètres de la FTBO. Notamment les relations suivantes :

$$\begin{aligned} K_{BF} &= \frac{K}{1+K} \\ \omega_{0,BF} &= \omega_0 \sqrt{1+K} \\ \xi_{BF} &= \frac{\xi}{\sqrt{1+K}} \end{aligned}$$

En s'appuyant sur l'abaque discuté précédemment, il est possible de modifier les performances de rapidité de la boucle fermée en modifiant le gain de la boucle ouverte, notamment il est possible de rendre un système plus rapide en boucle fermée,

- en augmentant la valeur de la pulsation propre du système par l'intermédiaire du gain  $K$  de la FTBO.
- en diminuant coefficient d'amortissement  $\xi_{BF}$  pour  $\xi_{BF} > 0.7$ , c'est à dire en augmentant le gain en boucle ouverte  $K$ .

Dans le cas où  $\xi_{BF} < 0.7$  une conclusion générale est impossible on se reportera sur les abaques du temps de réponse ou du temps de montée en fonction du coefficient d'amortissement pour établir la rapidité du système en boucle fermée.

## 3.2. Réponse harmonique

### 3.2.1. Définition de la bande passante à -x dB

## 3.3. Influence des pôles dominants

Soient  $p_1, \dots, p_n$  les pôles d'un système stable<sup>1</sup>. Le pôle  $p_i$  est dit dominant si la valeur absolue de sa partie réelle est largement plus petite que celle de tout autre pôles du système<sup>2</sup>

$$|\operatorname{Re}[p_i]| \ll |\operatorname{Re}[p_j]| \quad \forall j \neq i \quad (6.6)$$

Pour observer l'influence d'un pôle dominant sur la réponse temporelle d'un système linéaire, nous nous allons l'illustrer par l'étude d'une fonction de transfert du second ordre en régime apériodique. Une telle fonction de transfert est équivalente à deux systèmes du premier ordre en série.

<sup>1</sup>À partir des résultats obtenus dans ce chapitre il est déjà clair que la stabilité d'un système dépend également des pôles de sa fonction de transfert

<sup>2</sup>Dans la pratique un rapport de 5 est suffisant pour considérer une domination d'un pôle sur les autres

Prenons l'exemple de la fonction de transfert définie par

$$H(p) = \frac{5}{(p+1)(5p+1)} \quad (6.7)$$

et de décomposition en éléments simples telle que :

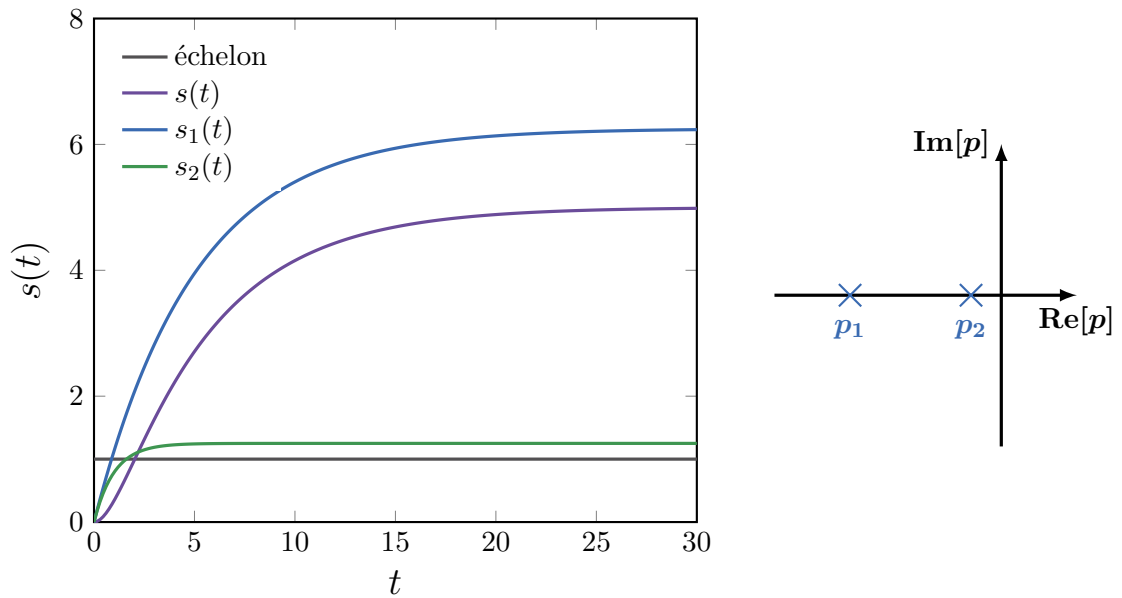
$$H(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{5p+1}$$

Par identification on peut écrire  $H(p)$  en fonction de deux fonctions de transferts  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  tel que :

$$\begin{aligned} H(p) &= H_1(p) - H_2(p) \\ H_1(p) &= \frac{6.25}{5p+1} \\ H_2(p) &= \frac{1.25}{p+1} \end{aligned}$$

Par définition, le pôle dominant est donné par  $H_1(p)$ . Pour observer, l'effet de chacun des pôles, nous avons tracé les réponses indicielles de ces trois fonctions de transfert (c.f [figure 6.7](#)) Nous constatons que la réponse indicielle  $s_1(t)$  de la fonction de transfert  $H_1(p)$  domine le temps de réponse de la sortie globale  $s(t)$ .

En conclusion, l'étude des pôles dominants de la fonction de transfert d'un système est, en première approximation, suffisante pour caractériser la rapidité d'un système que se soit en boucle ouverte ou en boucle fermée.



**Figure 6.7.** – (à gauche) Réponse indicielle  $s(t)$  de la fonction de transfert donnée par **équation (6.7)**, ainsi que les réponses indicielles  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  des fonctions de transferts de sa décomposition en éléments simples. On constate que la réponse du pôle dominant ( $s_1(t)$ ) présente un temps de réponse proche de la réponse globale. (à droite) carte des pôles du système en question

## 7. Stabilité des systèmes asservis

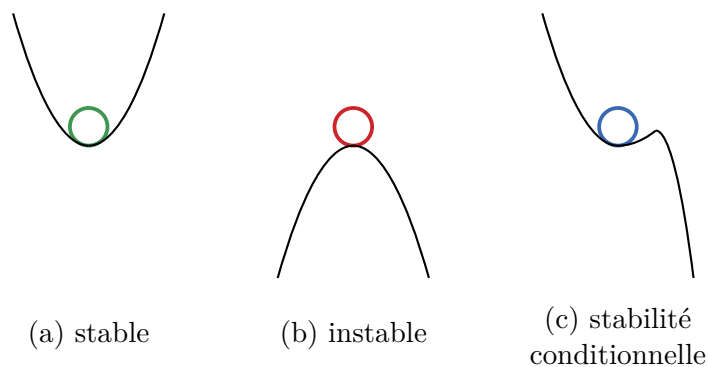
### Sommaire

---

<b>1.</b>	<b>Contexte et critère de stabilité fondamentale</b>	<b>160</b>
<b>2.</b>	<b>Critère algébrique de Routh</b>	<b>162</b>
2.1.	Tableau de Routh	163
2.2.	Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz	165
<b>3.</b>	<b>Critère graphique du revers</b>	<b>167</b>
3.1.	Critère du revers dans le plan de Nyquist	170
3.2.	Critère du revers dans le plan de Black	171
3.3.	Critère du revers dans le plan de Bode	172
<b>4.</b>	<b>Marge de stabilité</b>	<b>173</b>
4.1.	Marge de gain	173
4.2.	Marge de phase	173
<b>5.</b>	<b>Critère de Nyquist</b>	<b>173</b>

---

## 1. Contexte et critère de stabilité fondamentale



**Figure 7.1.** – Représentation schématique de la stabilité

Un système est dit stable si à une entrée bornée le système produit une sortie bornée<sup>1</sup>

Un système est dit stable lorsque écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir

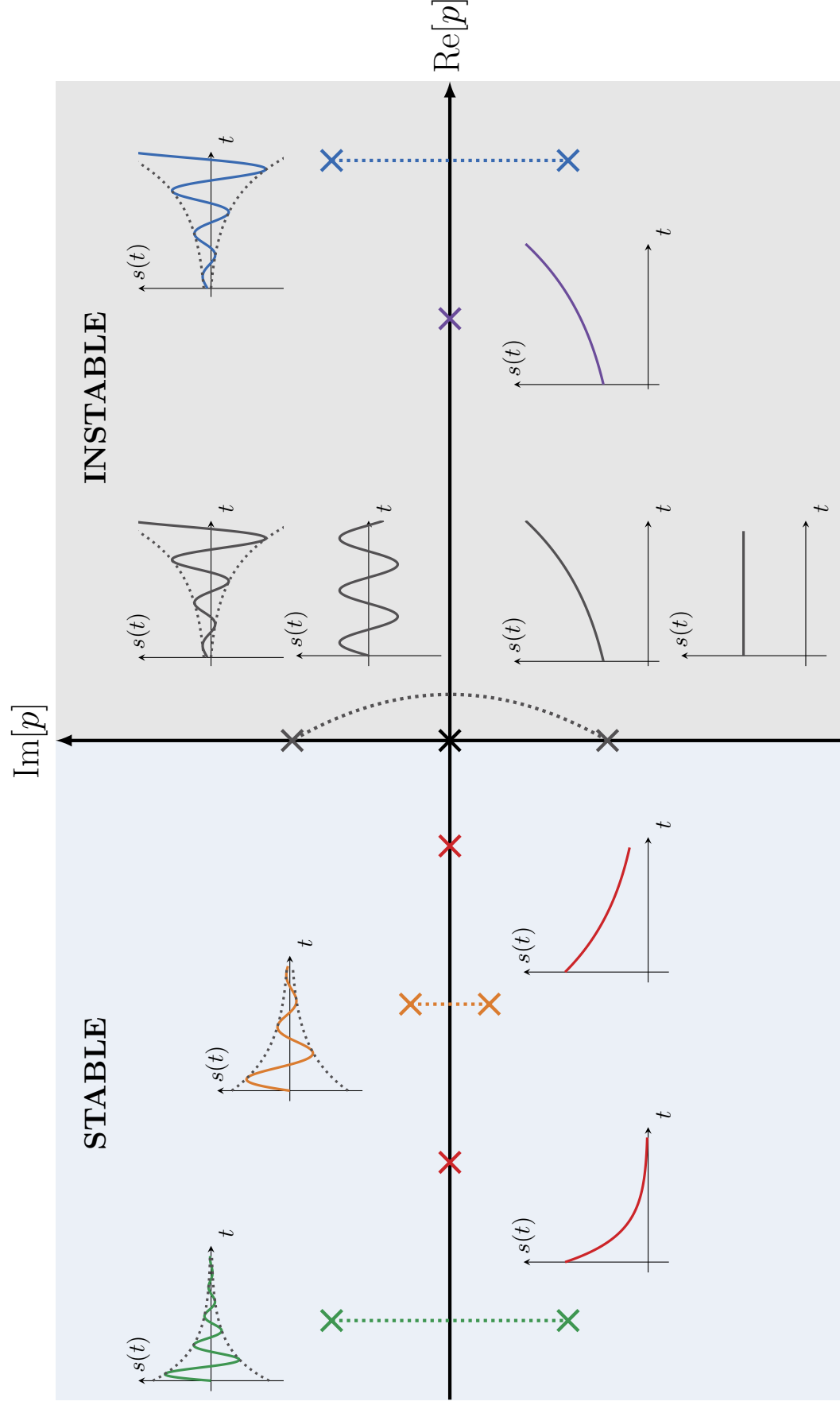
Rappel sur les réponses temporelles du premier ordre et du second ordre ... à compléter...

### Condition fondamentale de stabilité

Un système est stable si sa fonction de transfert ne possède aucun pôles à partie réelle positive.

<sup>1</sup>Chez nos collègues anglo-saxons, on rencontre le concept de BIBO (« bounded input bounded output »)

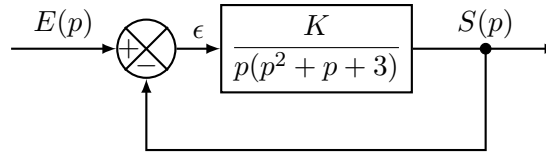




**Figure 7.2.** – Stabilité d'un SLCI d'après la carte des pôles de sa fonction de transfert et de leurs réponses impulsionnelles. (Vert) Deux pôles complexes conjugués. (Rouge) Pôle à partie réel négative. (Gris) Deux pôles complexes conjugués à partie réelle nulle. (Noir) Pôle nul. (Bleu) Deux pôles complexes conjugués à partie réelle positive. (Orange) Pôle à partie réel positive.

### Notion de pôles dominants

#### Système asservi



$$H_{BF}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

#### Condition de stabilité d'un système asservi (1)

Un système asservi est stable si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôles à partie réelle positive.

#### Inconvénients de la condition fondamentale

## 2. Critère algébrique de Routh

Le critère de Routh<sup>2</sup> est dit algébrique car il s'établit directement sur la fonction de transfert en boucle fermée du système asservi.

Pour appliquer le critère fondamentale de stabilité à cette fonction de transfert, il nous faut étudier le **polynôme caractéristique** :

$$D(p) = 0$$

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0 \quad (7.1)$$

pour déterminer si ce polynôme possède des racines toutes à partie réelle strictement négative. Les polynômes de ce type sont dits en mathématiques de Hurwitz<sup>3,4</sup>. C'est pourquoi le critère suivant est également connu sous le nom de **critère de Routh-Hurwitz**.

Il est possible de conclure sur la nature des racines d'un polynôme en étudiant ses coefficients. Le critère de Routh-Hurwitz se base sur cette propriété en posant deux conditions pour établir qu'un polynôme est un polynôme de Hurwitz. Dans le cas de l'application de la stabilité des systèmes linéaires asservis, la première condition s'énonce de la façon suivante :

<sup>2</sup>Edward John Routh (1831-1907), mathématicien anglais.

<sup>3</sup>Adolf Hurwitz (1859-1919), mathématicien allemand.

<sup>4</sup>Un polynôme de Hurwitz est un polynôme à coefficients réels dont les racines sont toutes à partie réelle strictement négative.

**Condition nécessaire de Routh-Hurwitz**

Un système asservi d'ordre  $n$  est stable en boucle fermée si tous les coefficients ( $b_i \forall i \neq n$ ) de son équation caractéristique sont de même signe que  $b_n$ .

Cette condition nécessaire s'avère suffisante si le système est du premier ou du second ordre. Pour un ordre supérieur il faut construire le tableau de Routh à partir des coefficients de  $D(p)$ , pour appliquer une condition supplémentaire.

**2.1. Tableau de Routh**

Dans le cas où la condition nécessaire est respectée et  $n > 2$ , il faut construire le **tableau de Routh** à partir des coefficients de l'équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée.

Le tableau de Routh est constitué de  $n$  lignes et de  $k$  colonnes où  $k = n/2 + 1$ <sup>5</sup>. L'élément  $A_{ij}$  correspond à l'élément de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne.

$$\begin{array}{c|cccccc} p^n & A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1(k-1)} & A_{1k} \\ p^{n-1} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2(k-1)} & A_{2k} \\ p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3(k-1)} & A_{3k} \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & A_{4(k-1)} & A_{4k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_{ij} & \vdots & \vdots \\ p^1 & A_{(n-1)1} & A_{(n-1)2} & A_{(n-1)3} & \cdots & A_{(n-1)(k-1)} & A_{(n-1)k} \\ p^0 & A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{n(k-1)} & A_{nk} \end{array}$$

Les deux premières lignes du tableau sont directement construites à partir des coefficients de  $D(p)$ .

$$\text{paire} \quad \begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_2 & b_0 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_1 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

si  $n$  est impaire la dernière colonne de la seconde ligne est non-nulle :

$$\text{impaire} \quad \begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Les éléments de la troisième ligne sont construits à partir du déterminant<sup>6</sup> des éléments

<sup>5</sup>On réalise ici une division entière. Par exemple si  $n = 5$ ,  $k = 2 + 1 = 3$  et si  $n = 6$ ,  $k = 3 + 1 = 4$

<sup>6</sup>Le déterminant d'une matrice  $2 \times 2$  est tel que  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

des deux premières lignes.

$$\begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{31} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{32} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

On construit de la même manière la quatrième ligne :

$$\begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{41} = -\frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{42} = -\frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Et ainsi de suite jusque la dernière ligne du tableau.

La formule générale pour obtenir l'élément  $A_{ij}$  est alors :

$$A_{ij} = -\frac{1}{A_{(i-1)1}} \begin{vmatrix} A_{(i-2)1} & A_{(i-2)(j+1)} \\ A_{(i-1)1} & A_{(i-1)(j+1)} \end{vmatrix} \quad (7.2)$$

Le critère s'applique sur la première colonne ainsi construit dite **colonne des pivots** du tableau de Routh.

$$\begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_2 & b_0 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_1 & 0 \\ p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3(n-1)} & 0 \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ p^1 & A_{(n-1)1} & A_{(n-1)2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p^0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}$$

**Critère de Routh-Hurwitz**

Un système asservi est stable en boucle fermée si tous les termes de la colonne des pivots du tableau de Routh du polynôme caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée sont de même signes.

**Remarques :**

Le nombre de changement de signe, nous donne le nombre de pôles à partie réelle positives (instables) de la fonction de transfert en boucle fermée.

**Propriétés du tableau de Routh**

Nous énonçons ici quelques propriétés du tableau de Routh pour faciliter ou permettre l'application du critère dans des cas particuliers [15].

- Pour simplifier les calculs, il est possible de factoriser par un entier une ligne du tableau.
- Dans le cas où le tableau présente un zéro dans la première colonne, il est possible de remplacer par une variable  $\epsilon$ , et de prendre la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  ou  $\epsilon \rightarrow 0^-$  selon le signe de la colonne des pivots qui respecterait le critère.
- Une ligne de zéros pour les coefficients de l'avant-dernière ligne du tableau de Routh indique que le polynôme du dénominateur de la fonction de transfert possède une paire de pôles, qui sont racines de l'équation auxiliaire :

$$Ap^2 + B = 0$$

où  $A$  et  $B$  sont les coefficients de la ligne précédente du tableau. On peut alors continuer le tableau en remplaçant la ligne de coefficients nuls par les coefficients de la dérivée de l'équation auxiliaire.

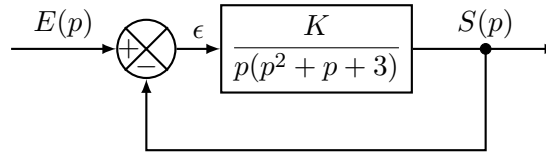
Une ligne de zéro implique la présence d'une paire de racines imaginaires pures donnant lieu à une forme sinusoïdale dans la réponse transitoire. Le système diverge en oscillant s'il y a au moins une racine à partie réelle positive, ou il converge vers des oscillations entretenues si les autres racines ont toutes une partie réelle négative.

**2.2. Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz**

La particularité du critère de Routh-Hurwitz est de permettre d'étudier les conditions de stabilité d'un système en fonction des paramètres de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans l'exemple ci-dessous, nous allons considérer un système asservi caractérisé par fonction de transfert en boucle ouverte défini par un gain  $K$  dont l'on souhaite déterminer la valeur pour assurer la stabilité du système en boucle fermée.

Soit un système asservi défini par le schéma-bloc suivant :



La fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  s'écrit :

$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{K}{p^3 + p^2 + 3p + K}.$$

L'équation caractéristique  $D(p)$  de  $H_{BF}$  est donc

$$D(p) = p^3 + p^2 + 3p + K,$$

Nous constatons que le système est d'ordre 3 de coefficients :

$$b_3 = 1$$

$$b_2 = 1$$

$$b_1 = 3$$

$$b_0 = K$$

Le critère nécessaire de Routh est donc respecté pour  $K > 0$ . L'équation caractéristique étant d'ordre 3, il nous faut construire le tableau de Routh, afin de vérifier le critère supplémentaire :

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 3 \\ p^2 & 1 & K \\ \hline p^1 & A_{31} & 0 \\ p^0 & A_{41} & 0 \end{array}$$

$$A_{31} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & K \end{vmatrix} = 3 - K$$

$$A_{41} = - \frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} 1 & K \\ A_{31} & 0 \end{vmatrix} = K$$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 3 \\ p^2 & 1 & K \\ p^1 & 3 - K & 0 \\ p^0 & K & 0 \end{array}$$

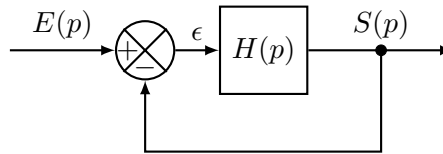
La colonne des pivots sont tous de même signe si  $3 - K > 0$  et  $K > 0$  (déjà établie par la condition nécessaire de Routh). La condition sur  $K$  pour que le système soit stable en boucle fermée est donc :

$$0 < K < 3$$

### 3. Critère graphique du revers

Routh s'applique sur la fonction de transfert en boucle fermée. Les critères graphiques que nous allons maintenant établir permettent d'étudier la stabilité du système en boucle fermée en considérant le système en boucle ouverte.

Pour cela considérons la boucle de contre réaction unitaire pour l'asservissement d'un système de fonction de transfert  $H(p)$ , telle que :



la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$  est simplement donné par  $H(p)$ , et comme nous l'avons déjà rencontré à plusieurs occasions, la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  est égale à

$$H_{BF}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)},$$

Étudier les pôles de l'équation caractéristique  $D(p) = 0$  est équivalent à étudier l'équation  $1 + H_{BO}(p) = 0$ , ou encore

$$D(p) = 0 \Leftrightarrow 1 + H_{BO}(p) = 0 \Leftrightarrow H_{BO}(p) = -1$$

Il est alors possible d'étudier la fonction de transfert en boucle ouverte par rapport au **point critique** du plan complexe  $(-1, 0)$  de  $H_{BO}(p)$ . Remarquons que les zéros de  $1 + H_{BO}(p)$  sont les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  et que les pôles de  $1 + H_{BO}(p)$  coïncident avec les pôles de  $H_{BO}(p)$ . Il est donc possible de réinterpréter la condition stabilité d'un système asservi :

#### Condition de stabilité d'un système asservi (2)

**Un système asservi est stable en boucle fermée si sa fonction de transfert en boucle ouverte ne possède aucun zéros à partie réelle positive.**

Nous allons établir un critère que nous pourrons appliquer sur la réponse harmonique et ses différentes représentations graphiques.

Supposons le système asservi précédent décrit par la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$ . Par définition cette fonction de transfert est le rapport de la sortie  $S(p)$  sur l'écart  $\epsilon(p)$  que l'on souhaite minimiser.

$$S(p) = H_{BO}(p)\epsilon(p)$$

Considérons une entrée  $e(t)$  sinusoïdale de la forme :

$$e(t) = E_0 \sin \omega t$$

au premier instant, on a alors

$$\epsilon(t) = E_0 \sin \omega t$$

en régime permanent la sortie est alors de la forme (c.f [chapitre 4](#)) :

$$s(t) = E_0 |H_{BO}(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

l'écart  $\epsilon(t) = e(t) - s(t)$  est maximum pour une sortie en opposition de phase. Il existe donc une pulsation  $\omega_p$  pour laquelle :

$$\begin{aligned} \phi &= \arg H_{BO}(j\omega_p) = -\pi \\ |H_{BO}(j\omega_p)| &= K \end{aligned}$$

Pour cette pulsation et ce déphasage :

$$S(p) = -K\epsilon(p)$$

on a alors :

$$H_{BO}(p) = -K$$

L'écart dans le domaine de Laplace devient :

$$\begin{aligned} \epsilon(p) &= E(p) - S(p) \\ \epsilon(p) &= E(p) + K\epsilon(p) \end{aligned}$$

Remplaçons à nouveau  $\epsilon(p)$  par sa définition (pour simuler une deuxième boucle) :

$$\epsilon(p) = E(p) + K(E(p) - S(p)) = E(p)(1 + K) + K^2\epsilon(p)$$

et ainsi de suite :

$$\epsilon(p) = E(p)(1 + K) + K^2(E(p) - S(p)) = E(p)(1 + K + K^2) + K^3\epsilon(p)$$

on obtient après  $n$  substitutions :

$$\epsilon(p) = E(p) \sum_{i=0}^n K^i + K^n \epsilon(p)$$

La somme diverge si  $K \leq 1$  et converge si  $K < 1$ . Autrement dit le système est stable en boucle fermée pour  $|H_{BO}(j\omega)| < 1$ .

Nous pouvons donc énoncer le critère de stabilité dit du revers :



**Critère de stabilité du revers**

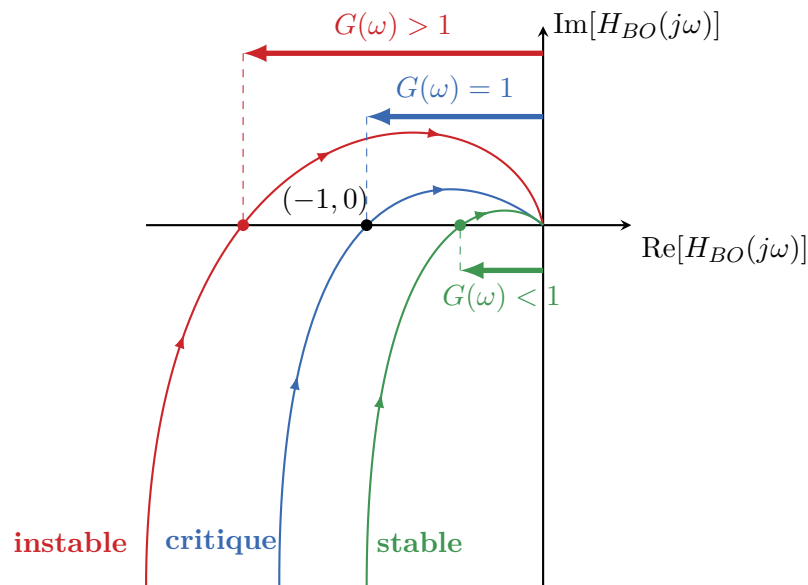
**Un système est stable en boucle fermée si lorsque le déphasage en boucle ouverte est de  $-180^\circ$  le module  $|H_{BO}(j\omega)|$  est strictement inférieur à 1.** Pour  $\omega_p$  telle que  $\phi = \arg(H_{BO}(j\omega_p)) = -\pi$  stable si  $|H_{BO}(j\omega_p)| < 1$  ou  $20 \log |H_{BO}(j\omega_p)| < 0$

Dans le plan complexe, un déphasage de  $-180^\circ$  et un module de 1 correspond au point critique de coordonnées  $(1, 0)$ .

Nous allons maintenant voir comment appliquer ce critère aux différentes représentations graphiques de la réponse harmonique.

### 3.1. Critère du revers dans le plan de Nyquist

Pour énoncer le critère du revers dans le plan de Nyquist. Il nous faut tracer le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte et observer comment il se comporte par rapport au point critique de coordonnées  $(-1,0)$  dans le plan complexe de  $H_{BO}(j\omega)$ . La figure 7.3 présente les lieux de Nyquist de trois systèmes : stable, instable et critique. Observons que dans le cas stable, le lieu de déphasage  $\phi = -\pi$  (c.a.d lorsque le lieu coupe l'axe des réels négatifs), le module ou le gain naturel  $G(\omega)$  (ou encore la distance à l'origine) est inférieur à 1. Dans le cas instable ce gain est supérieur à 1. Nous appellerons critique le système dont le lieu de Nyquist passe par le point critique de coordonnées  $(-1,0)$ .



**Figure 7.3.** – Représentation schématique de lieux de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

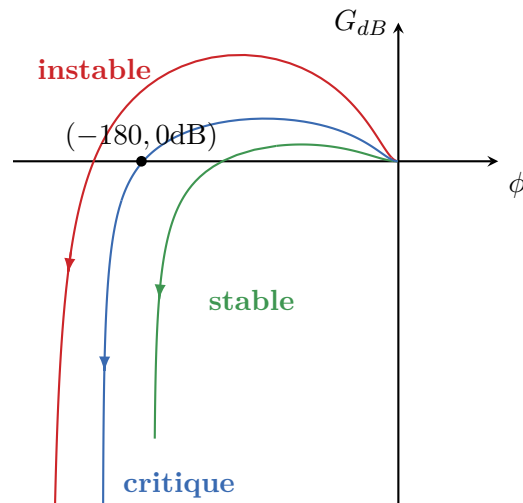
Nous pouvons maintenant formuler le critère du revers de Nyquist :

#### Critère du revers de Nyquist

Un système est stable en boucle fermée si lorsque parcourant le lieu de Nyquist de la boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique sur la *gauche*.

## 3.2. Critère du revers dans le plan de Black

à compléter...



**Figure 7.4.** – Représentation schématisée de lieux de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

**Critère du revers de Black**

Un système est stable en boucle fermée si lorsque parcourant le lieu de Black de la boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique sur la *droite*.

### 3.3. Critère du revers dans le plan de Bode

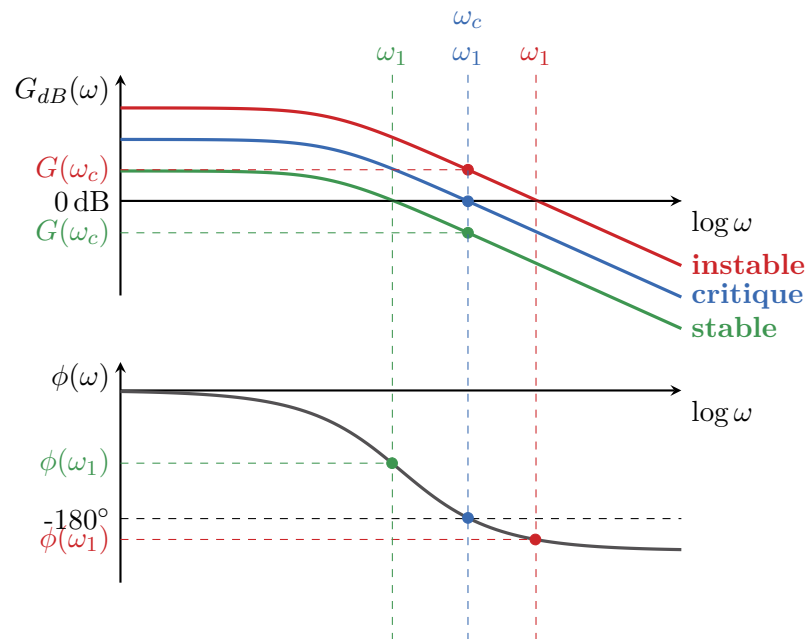
Il est possible d'appliquer le critère du revers au lieu de transfert de Bode en boucle ouverte. Le point critique dans le plan de Bode est représenté par deux verticales coupant les deux graphes en gain et en déphasage. De ce fait il faut vérifier deux conditions pour respecter le critère du revers dans le plan de Bode

#### Critère du revers de Bode (1)

Un système est stable en boucle fermée si, pour la pulsation  $\omega_1$  telle que le module de la fonction de transfert en boucle ouverte est égal à 1 (c.a.d  $H_{BO}(\omega_1) = 1$  ou 0 dB), le déphasage  $\phi(\omega_1)$  est supérieur à  $-180^\circ$

#### Critère du revers de Bode (2)

Un système est stable en boucle fermée si, pour la pulsation  $\omega_c$  (pulsation critique) telle que l'argument de la fonction de transfert en boucle ouverte (déphasage) est égale à  $-180^\circ$  (c.a.d  $\phi(\omega_c) = -180^\circ$ ), le gain  $G_{dB}(\omega_c)$  est négatif.



**Figure 7.5.** – Représentation schématique de lieux de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

## 4. Marge de stabilité

### 4.1. Marge de gain

### 4.2. Marge de phase

## 5. Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist généralise le critère du revers. Il s'appuie sur le principe de l'argument de Cauchy <sup>7</sup> <sup>8</sup>. Nous suivrons la présentation « graphique » de ce théorème et du critère de Nyquist donné par [1].

### 5.0.1. Principe de l'argument de Cauchy

Soit un contour  $\mathcal{C}$  parcourant le plan complexe de la variable  $p$  dans le sens des aiguilles d'une montre et  $F(p)$  une fonction rationnelle ne possédant ni pôle ni zéro sur  $\mathcal{C}$ . Le théorème du principe de l'argument de Cauchy permet de relier, le nombre de pôles  $P$  et de zéros  $Z$  entourés par le contour  $\mathcal{C}$  au comportement de la courbe  $F(\mathcal{C})$  image  $F(p)$  de  $\mathcal{C}$ .

#### Énoncé du principe de l'argument de Cauchy

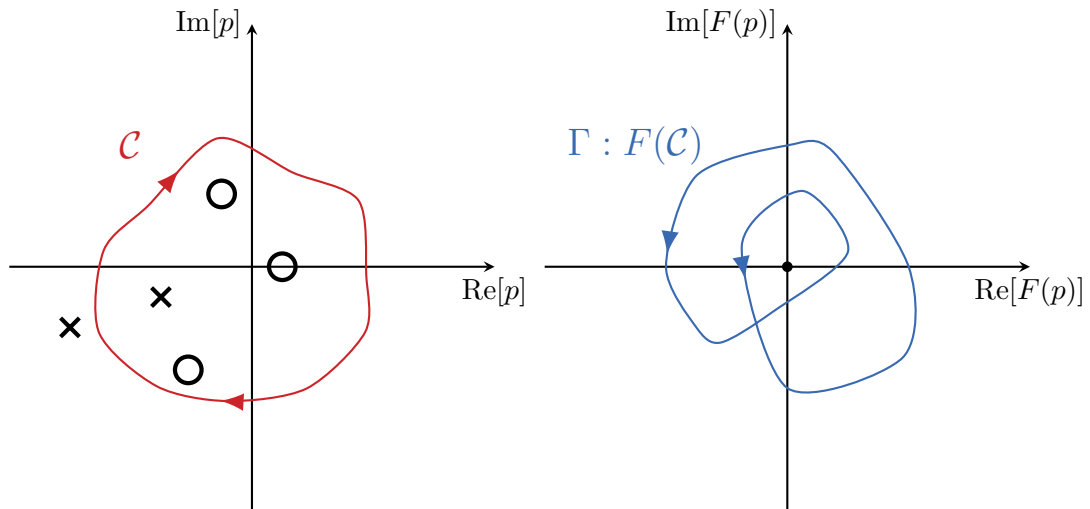
Si un contour  $\mathcal{C}$  contient  $Z$  zéros et  $P$  pôles d'une fonction analytique  $F(p)$  sans en traverser aucun, alors quand on le parcourt dans le sens anti-trigonométrique, le contour  $\Gamma = F(\mathcal{C})$  fait un nombre de tours  $N$  autour de l'origine dans le sens trigonométrique égal à,

$$N = Z - P$$

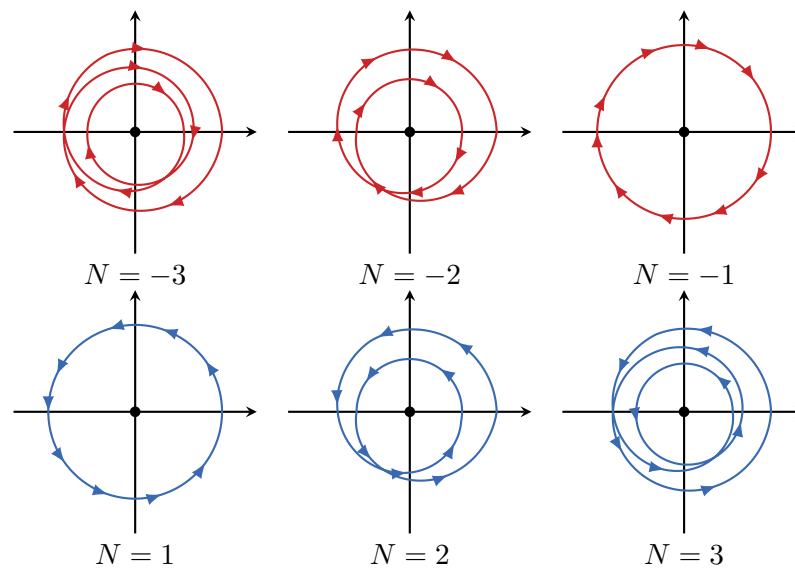
On se rapportera à la [figure 7.6](#) pour un exemple d'application de ce principe. Dans cet exemple la fonction analytique  $F(p)$  possède 2 pôles et 3 zéros. Le contour entoure  $Z = 3$  zéros et  $P = 1$  pôle. Le contour  $\Gamma = F(\mathcal{C})$  fait alors  $N = Z - P = 2$  tours autour de l'origine dans le sens trigonométrique ( $N > 0$ ). Remarquons que les tours sont comptés positivement dans le sens trigonométrique (c.f [figure 7.7](#)).

<sup>7</sup>Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français (X1807)

<sup>8</sup>Nous ne donnerons qu'une présentation élémentaire et sans démonstration de ce théorème. Un cours d'analyse complexe permettra de compléter cette présentation. On trouvera dans [4, 1], une introduction plus détaillée ainsi qu'une bibliographie très fournie sur le sujet.



**Figure 7.6.** – Représentation de la transformation d'un contour  $\mathcal{C}$  en son image par une fonction analytique  $F(p)$ . Dans cet exemple, on observe (droite) que  $\mathcal{C}$  entoure  $Z = 3$  zéros et  $P = 1$  pôle (gauche) l'image fait alors  $N = 3 - 1 = 2$  tours autour de l'origine.



**Figure 7.7.** – Représentation schématique du nombre de tours autour de l'origine de l'image d'une fraction rationnelle d'un contour fermé. Le sens positif est celui du sens trigonométrique.

### 5.0.2. Contours de Nyquist et de Bromwich

Pour pouvoir appliquer le critère de Nyquist par l'intermédiaire du principe de l'argument de Cauchy, il nous faut définir le contour orienté dans le plan  $p$  qui entoure la zone instable (c.a.d le demi-plan à partie réelle positive). Nous présentons deux types de contours le contour de Nyquist et ceux de Bromwich<sup>9</sup>

La figure 7.8 présente les contours classiques pour l'application du critère de Nyquist. Ces contours sont composés de tout l'axe des imaginaires, d'un demi cercle de rayon infini centré sur l'origine et dans le cas où  $p = 0$  est un pôle ou un zéro de la fonction de transfert en boucle ouverte, le contour est également composé d'un cercle de rayon  $r \rightarrow 0$  centré sur les pôles nuls.

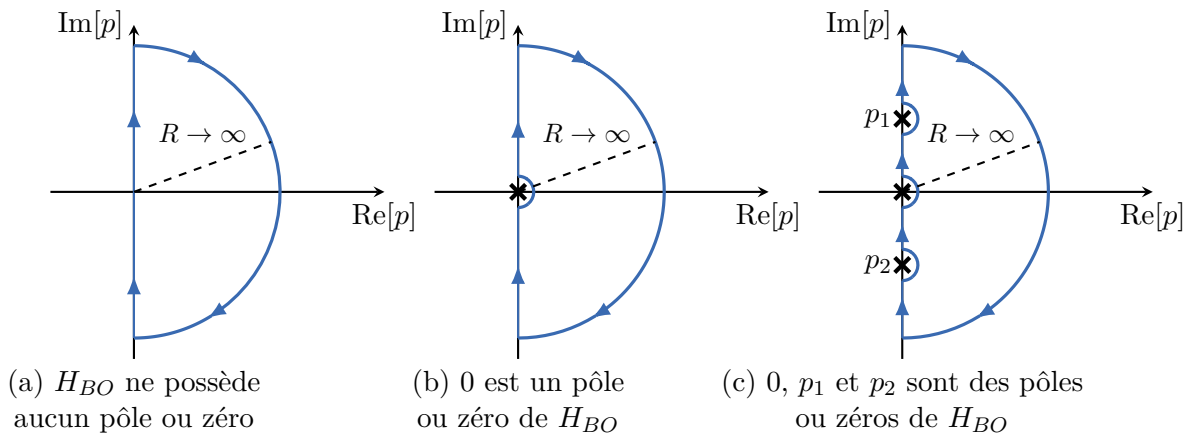


Figure 7.8. – (a) Contour de Nyquist et (b,c) contours de Bromwich.

#### Contour de Nyquist

La figure 7.8 (a) présente le contour de Nyquist. Celui-ci est composé de 3 portions :

- **I** : l'axe des imaginaires positifs pour laquelle  $p = j\omega$  avec  $\omega \in [0, \infty[$ ,
- **II** : un demi-cercle de rayon  $R$  entourant tout le demi-plan complexe de partie réelle positive et pour lequel  $p = Re^{j\theta}$  avec  $R \rightarrow \infty$  et  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,
- **III** : l'axe des imaginaires négatifs pour laquelle  $p = -j\omega$  avec  $\omega \in ]-\infty, 0]$ , symétrique de **I**

L'image de la portion **I** est donné par  $H_{BO}(\mathbf{I}) = H_{BO}(j\omega)$ , ce qui correspond au lieu de Nyquist pour  $\omega \in [0, \infty[$ . L'image de la portion **II** est l'origine du plan en 0. L'image de la portion **III** peut être déterminé à partir de l'image de la portion **I** par symétrie par rapport à l'axe des réels<sup>10</sup>.

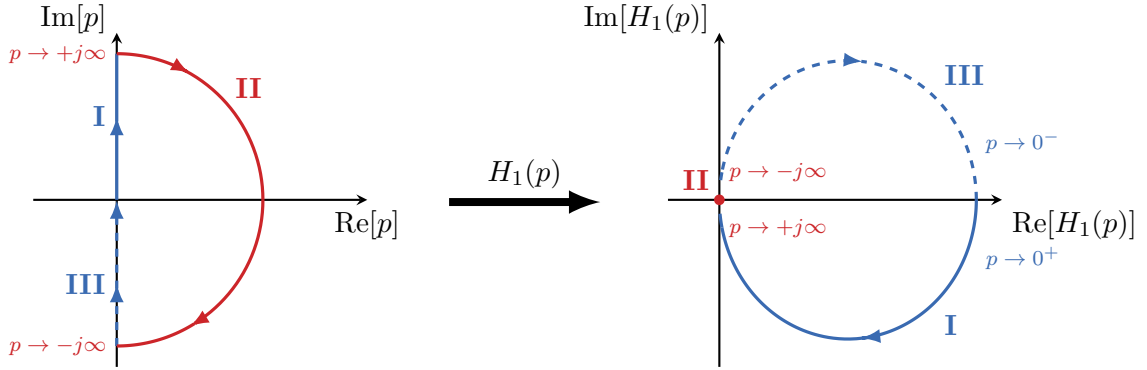
<sup>9</sup>Thomas John l'Anson Bromwich (1875-1929), mathématicien anglais.

<sup>10</sup>On notera en effet que  $H_{BO}(-j\omega) = \text{Re}[H_{BO}(j\omega)] - \text{Im}[H_{BO}(j\omega)]$

**Exemple**

Déterminons l'image par le contour de Bromwich de la fonction de transfert suivante :

$$H_1(p) = \frac{1}{1+p}$$



**Figure 7.9.** – Exemple de représentation d'un lieu complet de Nyquist d'une fonction de transfert  $H_1(p)$  par l'image du contour de Nyquist.

**Contour de Bromwich**

La **figure 7.8** (b) présente un contour de Bromwich dans le cas  $p = 0$  est pôle de la fonction de transfert. Celui-ci est composé de 4 portions :

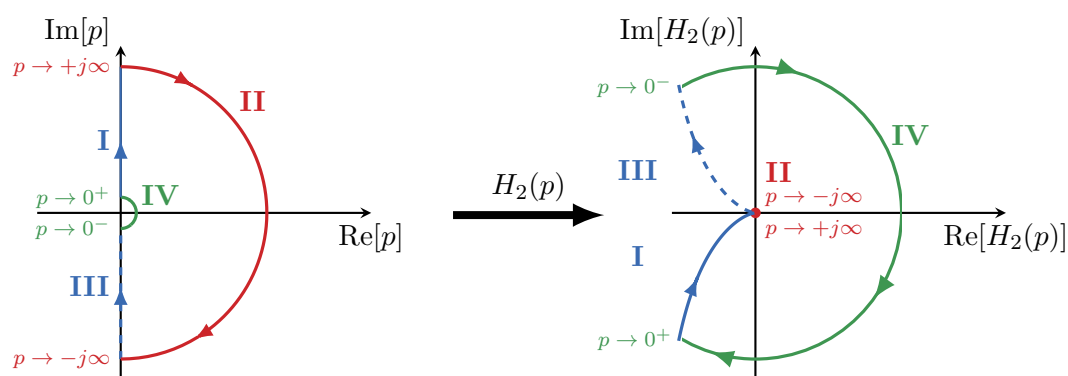
- **I** : l'axe des imaginaires positifs pour laquelle  $p = j\omega$  avec  $\omega \in [0, \infty[$ ,
- **II** : un demi cercle de rayon  $R$  entourant tout le demi-plan complexe de partie réelle positive et pour lequel  $p = Re^{j\theta}$  avec  $R \rightarrow \infty$  et  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,
- **III** : l'axe des imaginaires négatifs pour laquelle  $p = -j\omega$  avec  $\omega \in ]-\infty, 0]$ , symétrique de **I**
- **IV** : un demi cercle de rayon  $r$  contournant l'origine pour lequel  $p = re^{j\theta}$  avec  $r \rightarrow 0$  et  $\omega \in ]-\infty, 0]$ .

**Exemple**

Déterminons l'image par le contour de Bromwich de la fonction de transfert suivante :

$$H_2(p) = \frac{1}{p(1+p)}$$





**Figure 7.10.** – Exemple de représentation d'un lieu complet de Nyquist d'une fonction de transfert  $H_2(p)$  possédant un pôle nul par l'image du contour de Bromwich.



## 8. Correction des systèmes asservis

### Sommaire

---

1.	Nécessité de la correction . . . . .	180
2.	Correcteur P, I et D . . . . .	180
3.	Correcteur PI et PD . . . . .	180
4.	Correcteur PID . . . . .	180

---

1. **Nécessité de la correction**
2. **Correcteur P, I et D**
3. **Correcteur PI et PD**
4. **Correcteur PID**

## **9. Initiation à la représentation d'état**



# Annexes





## **A. Alphabet Grec**

Nom	Minuscule	Majuscule	Correspondance latine	Usages courants
alpha	$\alpha$	A	a	angles
bêta	$\beta$	B	b	angles
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	g	angles
delta	$\delta$	$\Delta$	d	variations
epsilon	$\epsilon, \varepsilon$	E	e	petite quantité
zéta	$\zeta$	Z	z	-
êta	$\eta$	H	é (long)	rendement
thêta	$\theta, \vartheta$	$\Theta$	th	angles
iota	$\iota$	I	i	-
kappa	$\kappa, \varkappa$	K	k	-
lambda	$\lambda$	$\Lambda$	l	longueur, densité linéique
mu	$\mu$	M	m	masse réduite
nu	$\nu$	N	n	fréquence
ksi	$\xi$	$\Xi$	ks	coefficient sans dimension
omicron	o	O	o	-
pi	$\pi, \varpi$	$\Pi$	p	$\Pi$ : plan
rhô	$\rho, \varrho$	P	r	densité volumique
sigma	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	s	$\sigma$ : densité surfacique, $\Sigma$ : Système
tau	$\tau$	T	t	temps, durée relative
upsilon	$\upsilon$	Y	u	-
phi	$\phi, \varphi$	$\Phi$	f,ph	angles
khi	$\chi$	X	kh	coefficients
psi	$\psi$	$\Psi$	ps	fonction d'onde
oméga	$\omega$	$\Omega$	ô	vitesse angulaire, angle solide

**Tableau A.1.** – Lettres de l'alphabet Grec et leurs usages courants en physique (non exhaustifs)

## B. Unités du Système International

La Conférence générale des poids et mesures (CGPM) qui se réunit tous les quatre ans depuis 1889, est un organe décisionnel chargé de prendre les décisions en matière de métrologie et en particulier en ce qui concerne le Système international d'unités (SI)<sup>1</sup>. Ces conférences ont établi les différentes unités fondamentales à partir desquelles un grand nombre de grandeurs peuvent être dérivées. Dans cette annexe, nous présentons ces unités fondamentales ainsi que les grandeurs dérivées utiles à la mécanique.

### Les unités fondamentales du Système International

Le Système International compte sept unités de base quantifiant des grandeurs physiques indépendantes.

Grandeur	Nom	Symbole	Dimension
Longueur	mètre	m	[L]
Masse	kilogramme	kg	[M]
Temps	seconde	s	[T]
Intensité du courant électrique	ampère	A	[I]
Température thermodynamique	kelvin	K	[ $\Theta$ ]
Quantité de matière	mole	mol	[N]
Intensité lumineuse	candela	cd	[J]

**Tableau B.1.** – Les unités de base du Système International

---

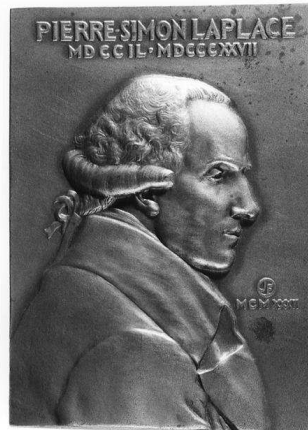
<sup>1</sup>La conférence se réunit dans les locaux du Bureau international des poids et mesures (BIPM), au Pavillon de Breteuil, à Sèvres (France).

### Grandeurs dérivées du système international

Grandeur	Nom	Symbole	Dimension
Vitesse	mètre par seconde	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$[\text{LT}^{-1}]$
Accélération	mètre par seconde carré	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	$[\text{LT}^{-2}]$
Force	newton	N	$[\text{MLT}^{-2}]$
Moment de force	newton-mètre	$\text{N} \cdot \text{m}$	$[\text{ML}^2\text{T}^{-2}]$
Travail Énergie	joule	J	$[\text{ML}^2\text{T}^{-2}]$
Puissance	watt	W	$[\text{ML}^2\text{T}^{-3}]$
Pression	pascal	Pa	$[\text{ML}^{-1} \text{T}^{-2}]$
Moment d'inertie	kilogramme-mètre carré	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$[\text{ML}^2]$
Quantité de mouvement	newton-seconde	$\text{N} \cdot \text{s}$	$[\text{MLT}^{-1}]$

**Tableau B.2.** – Grandeurs dérivées du système international.

## C. Pierre-Simon de Laplace



**Figure C.1.** – Pierre-Simon, marquis de Laplace, mathématicien et astronome (1745-1827) Flanagan John (1898-1942) Paris, musée d'Orsay

Pierre-Simon de Laplace, né Pierre-Simon Laplace, comte Laplace, puis 1er marquis de Laplace, né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge et mort le 5 mars 1827 à Paris, est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.

Laplace est l'un des principaux scientifiques de la période napoléonienne. En effet, il a apporté des contributions fondamentales dans différents champs des mathématiques, de l'astronomie et de la théorie des probabilités. Il a été l'un des scientifiques les plus influents de son temps, notamment par son affirmation du déterminisme. Il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique, reprenant et étendant le travail de ses prédécesseurs dans son *Traité de Mécanique céleste* (1799-1825). Cet ouvrage majeur, en cinq volumes, a transformé l'approche géométrique de la mécanique développée par Newton en une approche fondée sur l'analyse mathématique.



# D. Transformation de Laplace

## 1. Définitions

Soit  $f$  une fonction de la variable réelle  $t$  définie sur  $\mathbb{R}$  et supposée nulle pour  $t < 0$ , on appelle transformée de Laplace de  $f$ , la fonction  $F$  définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

avec  $p \in \mathbb{C}$ .

En automatique, on n'utilise que la transformée de Laplace restreinte qui ne s'applique qu'aux fonctions causales. Pour transformer une fonction quelconque en fonction causale, on la combine avec la fonction de Heaviside  $u(t)$  qui est telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

On note  $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , la transformée de Laplace de  $f(t)$  et on dit de  $F(p)$  qu'elle est l'image de  $f(t)$  dans le domaine de Laplace<sup>1</sup> et on notera  $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$  la transformée de Laplace inverse.

## 2. Propriétés

- *linéarité* :

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(p) + bG(p)$$

- *dilatation du temps* :

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

- *produit de convolution* :

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(p)G(p)$$

---

<sup>1</sup>Plusieurs termes sont utilisés dans la littérature. On parle de domaine complexe, domaine fréquentielle ou de domaine symbolique. On choisit dans ce document de ne parler que du domaine de Laplace

- *dérivation* :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= pF(p) - f(0^+) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} &= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} &= p^nF(p)\end{aligned}$$

si toutes les conditions initiales sont nulles.

- *intégration* :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

avec :  $g(t) = \int_0^t f(u)du$

- *théorème du retard en (t)* :

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau p}F(p)$$

- *théorème du retard en (p)* :

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p + a)\} = e^{-at}f(t)$$

- *théorème de la valeur initiale* :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

- *théorème de la valeur finale* :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

- *transformée de Laplace d'une fonction périodique et f(t) de période T* :

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-Tp}}$$

où  $F_0(p)$  est la transformée de Laplace du motif  $f_0(t)$  égal à  $f(t)$  sur le segment  $[0, T]$  et nul partout ailleurs.



## 3. Table des transformées de Laplace

	$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$
1	1	$\delta(t)$
2	$e^{-\tau p}$	$\delta(t - \tau)$
3	$\frac{1}{p}$	1
4	$\frac{1}{p^2}$	t
5	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2}t^2$
6	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
7	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
8	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$
9	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$
10	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
11	$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$
12	$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a}[at - (1 - e^{-at})]$
13	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$
14	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$1 - (1 + at)e^{-at}$
15	$\frac{a^2(p+z)}{p(p+a)^2}$	$z - (z + a(z-a)t)e^{-at}$
16	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$

Tableau D.1. – Table de transformées de Laplace d'après[15]

	$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$
17	$\frac{(b-a)p}{(p+a)(p+b)}$	$-ae^{-at} + be^{-bt}$
18	$\frac{(b-a)(p+z)}{(p+a)(p+b)}$	$(z-a)e^{-at} - (z-b)e^{-bt}$
19	$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$	$1 + \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{a-b}$
20	$\frac{ab(p+z)}{p(p+a)(p+b)}$	$z + \frac{b(z-a)e^{-at} - a(z-b)e^{-bt}}{a-b}$
21	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
22	$\frac{p+z}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{(z-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{(z-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{(z-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
23	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
24	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
25	$\frac{p+z}{p^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\frac{z^2 + \omega^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$ avec $\phi = \arctan \frac{\omega}{z}$
26	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
27	$\frac{\omega^2(p+z)}{p(p^2 + \omega^2)}$	$z - \sqrt{\frac{z^2 + \omega^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \phi)$ avec $\phi = \arctan \frac{\omega}{z}$
28	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
29	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
30	$\frac{p+z}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\frac{(z-a)^2 + \omega^2}{\omega^2}} e^{-at} \sin(\omega t + \phi)$ avec $\phi = \arctan \frac{\omega}{z-a}$
31	$\frac{\omega^2}{p^2 + 2\xi\omega p + \omega^2}$ avec $\xi < 1$	$\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega t} \sin \omega \sqrt{1-\xi^2} t$
32	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + 2\xi\omega p + \omega^2)}$ avec $\xi < 1$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega t} \sin \omega \sqrt{1-\xi^2} t + \phi$ avec $\phi = \arccos \xi$

Tableau D.2. – (suite) Table de transformées de Laplace d'après [15]

## E. Rappel sur les nombres complexes

### Représentation géométrique d'un nombre complexe

Un nombre complexe  $z$  est défini par un couple de nombre réel  $(x, y)$ , tel que

$$z = x + jy,$$

où  $j$  est le nombre imaginaire pur tel que  $j^2 = -1$ <sup>1</sup>.

Un nombre complexe est donc composé d'une partie réel  $\text{Re}[z] = x$  et d'une partie imaginaire  $\text{Im}[z] = y$ .

Un nombre complexe peut être représenté géométriquement dans un plan (dit complexe), pour lequel l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan correspondent respectivement à la partie réelle et imaginaire (Figure E.1).

### Définition du conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué de  $z$  est le nombre noté  $\bar{z}$  tel que :

$$\bar{z} = \text{Re}[z] - j\text{Im}[z] = x - jy$$

Dans la représentation géométrique le conjugué  $\bar{z}$  est le symétrique de  $z$  par rapport à l'axe des réels (Figure E.1).

### Définition du module d'un nombre complexe

Le module d'un nombre complexe noté  $|z|$  est la racine carrée de la somme des carrés de  $\text{Re}[z]$  et de  $\text{Im}[z]$ , autrement dit,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

où  $x = \text{Re}[z]$  et  $y = \text{Im}[z]$  comme définit précédemment.

Dans le plan complexe, le module  $|z|$  correspond à la distance à l'origine du point correspondant à  $z$  dans le plan complexe.

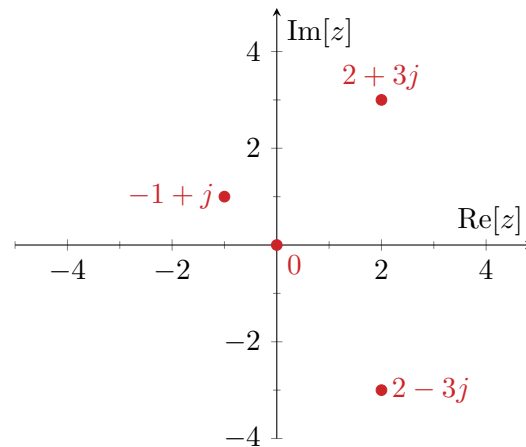
### Propriétés du module

Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes.

- $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$

---

<sup>1</sup>En mathématiques et en physique, le nombre imaginaire pur est généralement noté  $i$ . Ici nous utilisons la convention des automaticiens et des électroniciens pour ne pas confondre  $i$  avec l'intensité du courant.

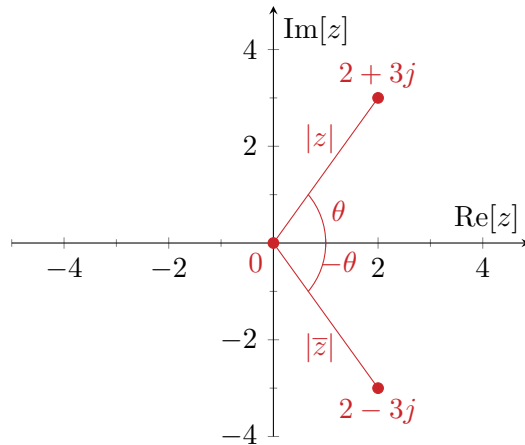


**Figure E.1.** – Exemple de représentation géométrique en coordonnées cartésiennes de différents nombres complexes. Les nombres complexes  $2 + 3j$  et  $2 - 3j$  sont conjugués l'un de l'autre. Ces points sont symétriques par rapport à l'axe des réel.

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $|z^n| = |z|^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  pour  $z_2 \neq 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|-z| = |z| ; |\bar{z}| = |z|$

### Définition de l'argument d'un nombre complexe

L'argument  $\arg(z)$  d'un nombre complexe  $z$  est l'angle qui, dans la représentation géométrique, sépare l'axe des réels du vecteur représentatif de  $z$  (Figure E.2). Le couple  $(|z|, \theta = \arg(z))$  sont donc les coordonnées polaires de la représentation géométrique d'un nombre complexe. L'argument est défini à  $2\pi$  près. On appelle argument principal celui qui est compris entre  $[-\pi, \pi]$



**Figure E.2.** – Exemple de représentation géométrique en coordonnées polaires d'un nombre complexe. Le nombre complexe  $z = 2 + 3j$  s'écrit sous la forme polaire  $z = |z|e^{i\theta}$  avec  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13}$  et  $\theta = \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ .

### Propriétés de l'argument

Soient  $z$ ,  $z_1$  et  $z_2$  des nombres complexes.

- $\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}[z]}{|z|}$  ;  $\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}[z]}{|z|}$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$  ;  $\arg(\bar{z}) = \arg(z)$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)[2\pi]$  ;  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$  pour  $z_2 \neq 0$
- $\arg(z\bar{z}) = \arg(z) + \arg(\bar{z}) = \arg(z) - \arg(z) = 0[2\pi]$

### Calcul de l'argument principal d'un nombre complexe

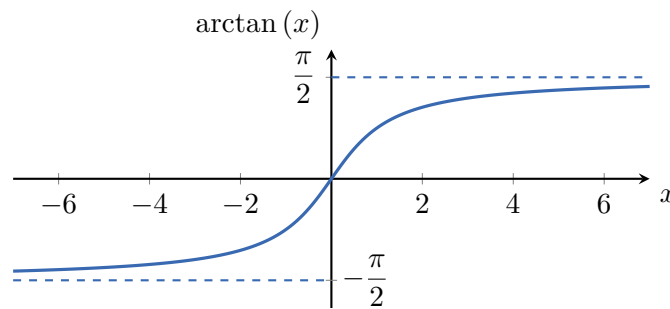
L'argument étant défini à  $2\pi$  près, il est recommandé de donner l'argument principale pour des questions d'unicité (i.e  $\arg z \in [-\pi, \pi]$ ). Soit  $\phi$  l'argument principale d'un

nombre complexe  $z = a + ib$ , alors  $\phi$  est défini par :

$$\phi = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{si } a > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b \geq 0 \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

La formule précédente nécessite de distinguer plusieurs cas. Cependant, de nombreux langages de programmation fournissent une variante de la fonction arc tangente, qui est souvent appelée `atan2(b,a)`, et qui traite ces différents cas.

Rappelons la représentation graphique de la fonction arctan :



**Figure E.3.** – Représentation graphique de la fonction arc tangente.

### Forme exponentielle ou polaire d'un nombre complexe

La formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

permet d'écrire tout nombre complexe sous sa forme exponentielle :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Une conséquence spectaculaire de la formule d'Euler est que

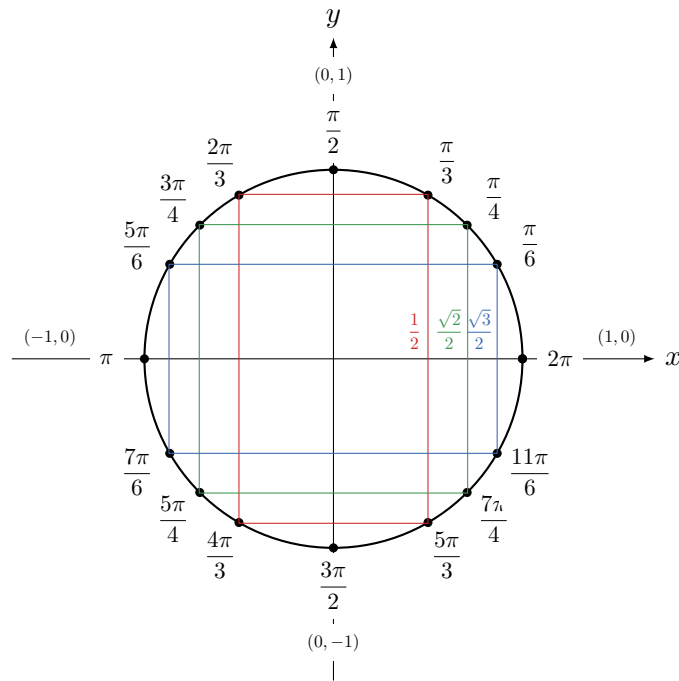
$$e^{i\pi} = -1.$$

On notera que  $e^{i\theta}$  est un nombre complexe de module 1 admettant  $\theta$  pour argument. Lorsque  $\theta$  varie de 0 à  $2\pi$ , l'image du nombre complexe  $e^{i\theta}$  décrit le cercle unité. Une autre conséquence est que les fonctions trigonométriques peuvent s'exprimer sous forme

d'exponentielle complexe :

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$



**Figure E.4.** – Quelques points particuliers du cercle trigonométrique ou cercle unité.





## F. Équations différentielles à coefficients constants

La forme générale d'une équation différentielle à coefficients constants est donnée par :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad (\text{F.1})$$

avec  $a_i$  et  $b_i$  des coefficients réels et  $m$  et  $n$  des entiers naturels tels que  $m \leq n$ . L'ordre de l'équation est donnée par  $n$ .

Nous allons dans cette annexe, présenter la résolution direct des formes canoniques du premier et du second ordre. La méthodologie consiste à déterminer la solution générale de l'équation homogène (c.a.d sans second membre) puis de chercher une solution particulière pour l'équation avec second membre. Nous nous limiterons à l'étude des solutions pour des seconds membres correspondant aux signaux usuels présentés dans ce document au [Chapitre 1](#) (c.a.d Impulsion de Dirac, échelon-unité et rampe).

### 1. Résolution équation différentielle du premier ordre

La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est donnée par :

$$a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

Il est toujours possible de simplifier une telle équation sous la forme :

$$\frac{ds(t)}{dt} + \frac{a_0}{a_1} s(t) = \frac{b_0}{a_1} e(t)$$

La forme canonique d'une équation différentielle du premier ordre est alors :

$$\frac{ds(t)}{dt} + as(t) = be(t) \quad (\text{F.2})$$

#### 1.1. Sans second membre

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme :

$$s(t) = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}t} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

On considère l'équation différentielle suivante régissant l'entrée et la sortie d'un SLCI<sup>1</sup> :

$$\frac{ds(t)}{dt} + as(t) = be(t)$$

avec pour condition initiale  $s(0) = s_0$ . On cherche à déterminer la réponse indicielle de ce système. La réponse libre du système  $s_1(t)$  satisfait l'équation différentielle

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = -as_1(t)$$

Cette réponse ne dépend que des conditions initiales, ici  $s(0) = s_0$ . Cette solution est donc de la forme :

$$s_1(t) = Ce^{-at}$$

avec  $C$  une constante réel. La réponse doit satisfaire la condition initiale  $s(0) = s_0$ . Ce qui impose :

$$s_1(t) = s_0e^{-at}$$

La réponse indicielle est donnée pour  $e(t) = u(t)$ . Pour  $t > 0$ , l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$\frac{ds(t)}{dt} + as(t) = b$$

Déterminons une solution particulière  $s_2(t)$  de cette équation différentielle de la forme :

$$s_2(t) = \lambda(t)e^{-at}.$$

En introduisant, celle-ci dans l'équation différentielle on a alors :

$$\lambda'(t)e^{-at} - a\lambda(t)e^{-at} + a\lambda(t)e^{-at} = b$$

On cherche une primitive de la dérivée de  $\lambda$  à partir de :

$$\lambda'(t) = be^{at}$$

soit alors :

$$\lambda(t) = \frac{b}{a}e^{at} + C$$

avec  $C$  une constante d'intégration.

$$s_2(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$$

---

<sup>1</sup>Système Linéaire Continu et Invariant

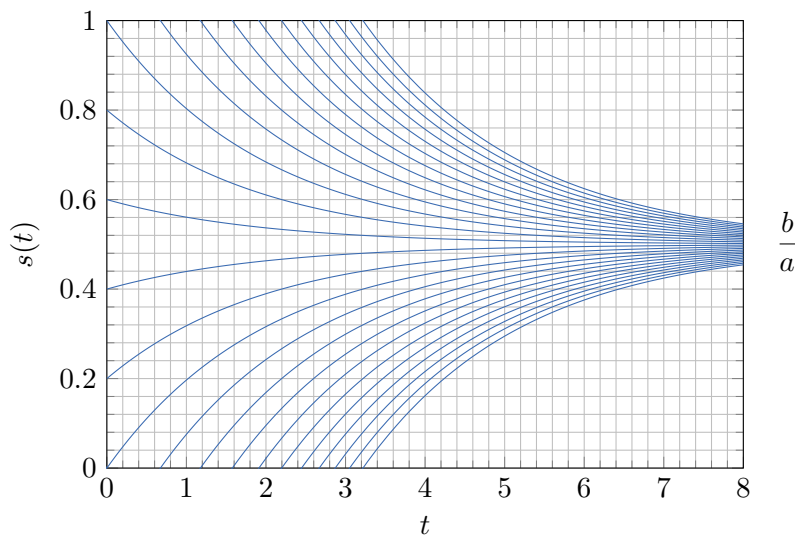
La solution générale est donnée par la somme des deux réponses précédentes :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$s(t) = s_0 e^{-at} + \frac{b}{a} + C e^{-at}$$

La constante  $C$  se détermine à partir de la condition initiale :

$$s(t) = s_0 e^{-at} + \frac{b}{a} (1 - e^{-at})$$



Sur les trois termes de la solution générale, un seul est non nul pour  $t \rightarrow \infty$ . Il correspond au régime permanent de la réponse. Les deux autres correspondent au régime transitoire.

$$s(t) = \underbrace{s_0 e^{-at}}_{\text{transitoire}} - \underbrace{\frac{b}{a} e^{-at}}_{\text{transitoire}} + \underbrace{\frac{b}{a}}_{\text{permanent}}$$



# G. Décomposition en éléments simples

## 1. Contexte

En automatique, la détermination d'une réponse temporelle  $s(t)$  correspond à déterminer la transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle  $S(p)$  définie dans le domaine de Laplace. Autrement dit,

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(p)\}$$

Cette inversion passe généralement par l'utilisation des tables de transformées de Laplace (c.f. **Annexe D**). Cependant, ces tables peuvent ne pas être complètes. La **décomposition en éléments simples** (DE) de  $S(p)$ , nous permet alors de réécrire cette fraction rationnelle sous une forme comportant des fractions rationnelles usuellement présente dans les tables.

Dans cette annexe, nous présenterons les techniques de **DES** les plus couramment rencontrées dans l'étude des **SLCI**. Cette présentation n'est pas exhaustive, et ne remplacera donc pas la lecture du chapitre du cours de mathématiques qui lui est consacré.

## 2. Fractions rationnelles rencontrées en automatique

Dans le cas qui nous intéresse la fraction rationnelle est la réponse  $S(p)$  défini dans le domaine de Laplace. Cette grandeur est de la forme,

$$S(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où  $N(p)$  et  $D(p)$  sont deux polynômes de degrés  $m$  et  $n$  respectivement. En générale, nous aurons à faire à des systèmes pour lesquels  $m \leq n$ . Une des conséquences est que **la décomposition en éléments simples ne comportera pas de partie entière.**

### 3. Décomposition en éléments simples

Soit  $S(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  une fraction rationnelle. On considère la décomposition de  $D(p)$  en produit de polynômes irréductibles<sup>1</sup> unitaire<sup>2</sup> de la forme :

$$D(p) = a \prod_{k=1}^r (p - \alpha_k)^{m_k} \prod_{l=1}^s (p^2 + \beta_l p + \gamma_l)^{n_l}$$

où  $a$  est une constante qui est le coefficient du terme de plus haut degré de  $D(p)$ , les  $\alpha_k$  sont les pôles de multiplicités  $m_k$ , les polynômes de degré 2 sont sans pôles réels (i.e  $\beta_l^2 - 4\gamma_l < 0$ ).

Alors il existe une famille unique de réels  $A_{k,i}$ ,  $B_{l,j}$  et  $C_{l,j}$  telles que :

$$S(p) = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}}{(p - \alpha_k)^i} + \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^{n_l} \frac{B_{l,j}p + C_{l,j}}{(p^2 + \beta_l p + \gamma_l)^j} \quad (\text{G.1})$$

On appelle cette écriture la **décomposition en éléments simples** de  $S(p)$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exemple 1

Soit  $S(p)$  tel que :

$$S(p) = \frac{1}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)^2}$$

où  $D(p)$  se factorise sous la forme :

$$D(p) = (p^2 - 1)(p^2 + 1)^2 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)^2$$

On obtient une décomposition en éléments simples de  $S(p)$  de la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p - 1} + \frac{B}{p + 1} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1} + \frac{Ep + F}{p^2 + 1}$$

#### Exemple 2

Soit  $S(p)$  tel que :

$$S(p) = \frac{4p^3}{(p^2 - 1)^2}$$

où  $D(p)$  se factorise sous la forme :

$$D(p) = (p^2 - 1)^2 = ((p - 1)(p + 1))^2$$

---

<sup>1</sup>Nous rappelons que dans  $\mathbb{R}[p]$ , les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant négatif.

<sup>2</sup>Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient de degré le plus grand est 1.

On obtient une décomposition en éléments simples de  $S(p)$  de la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{(p+1)^2}$$

#### 4. Détermination des coefficients de la décomposition en éléments simples

Après avoir obtenue la **DES**, il faut alors en déterminer les coefficients. Il existe plusieurs méthodes permettant cette détermination, toutes donnant évidemment le même résultat. Le choix de la méthode dépend de la décomposition. On considèrera alors la méthode la plus efficace et rapide.

##### 4.1. Par identification

Cette méthode est toujours applicable, mais pourra s'avérer être la fastidieuse à mettre en oeuvre dans certains cas. Celle-ci consiste à réduire la décomposition au même dénominateur et à établir un système d'équations sur les coefficients à déterminer.

##### Exemple 1

Soit  $S(p)$  tel que :

$$S(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

sa décomposition en éléments simples est donnée par :

$$S(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

au même dénominateur on obtient

$$S(p) = \frac{A(p+2) + B(p+1)}{(p+1)(p+2)} = \frac{(A+B)p + (2A+B)}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

Le système d'équations sur les coefficients de la décomposition sont :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases}$$

Sa résolution nous donne,  $A = 1$  et  $B = -1$ . La décomposition en éléments simples de  $S(p)$  est donc finalement donnée par :

$$S(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$



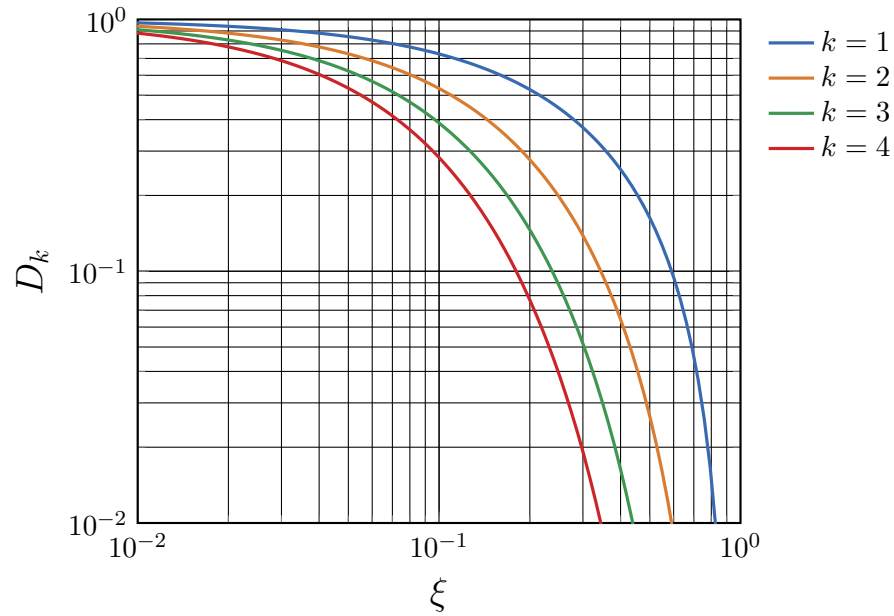


## H. Systèmes du second ordre

Nous regroupons dans cette annexe les différents résultats obtenus lors de l'étude des système linéaires du second ordre. Ces ré

## 1. Abaques de la réponse temporelle

Dépassement



Temps de réponse à x%

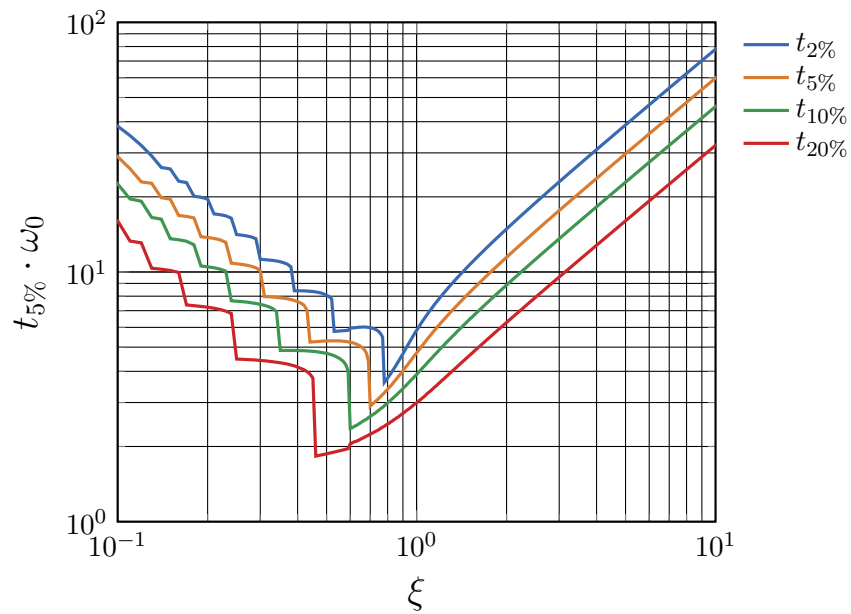
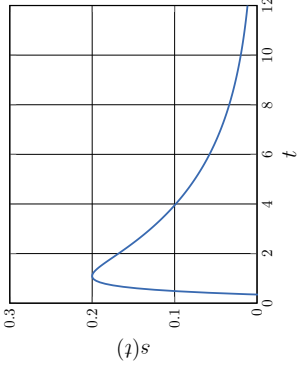
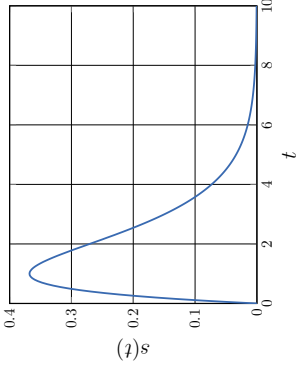
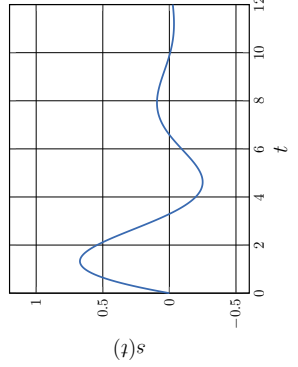
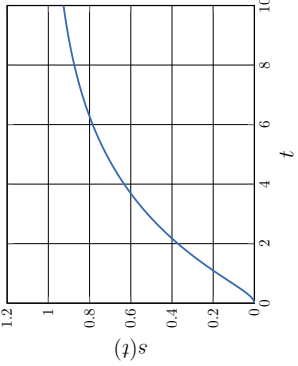
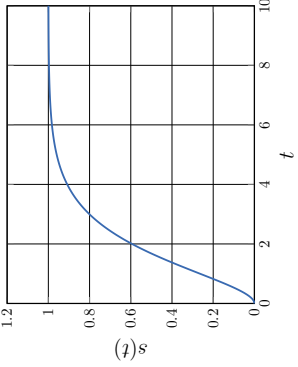
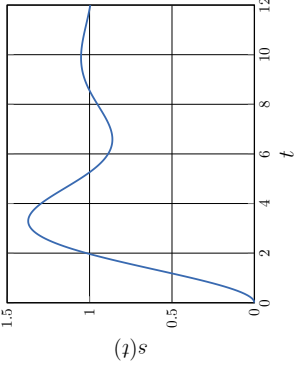
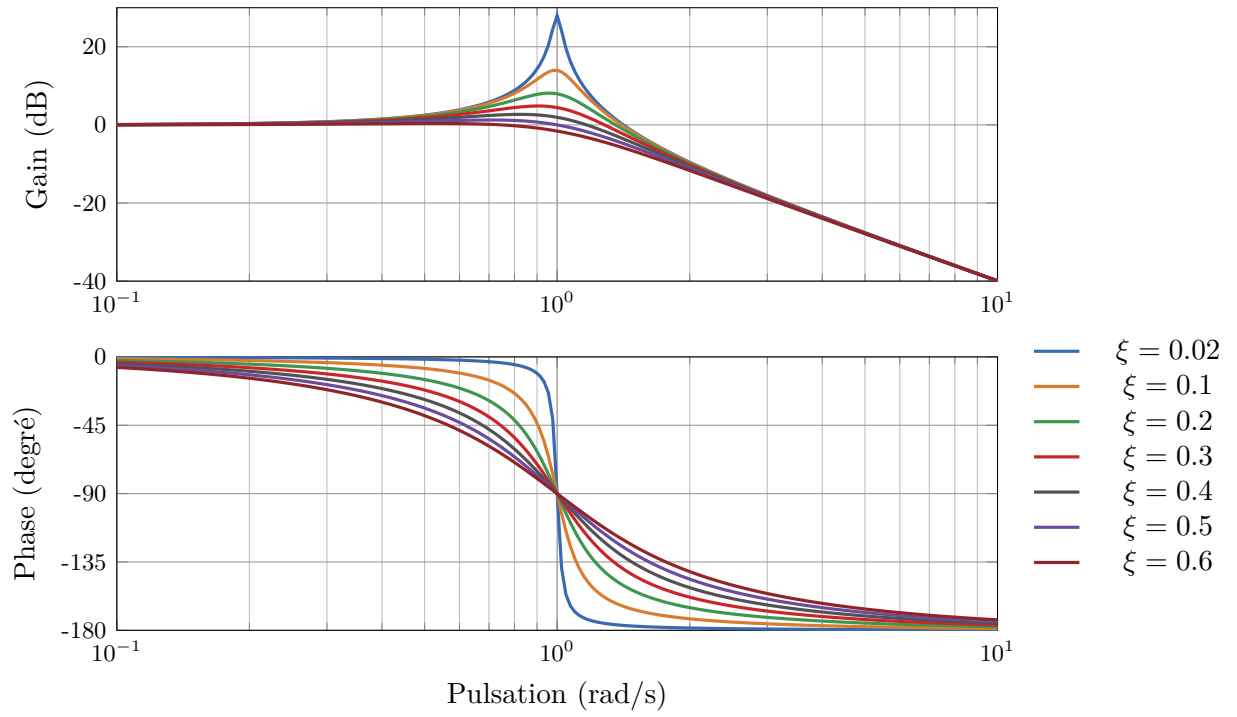


Tableau H.1.1. – Réponses temporelles d'un système du 2nd ordre pour les différents régimes.

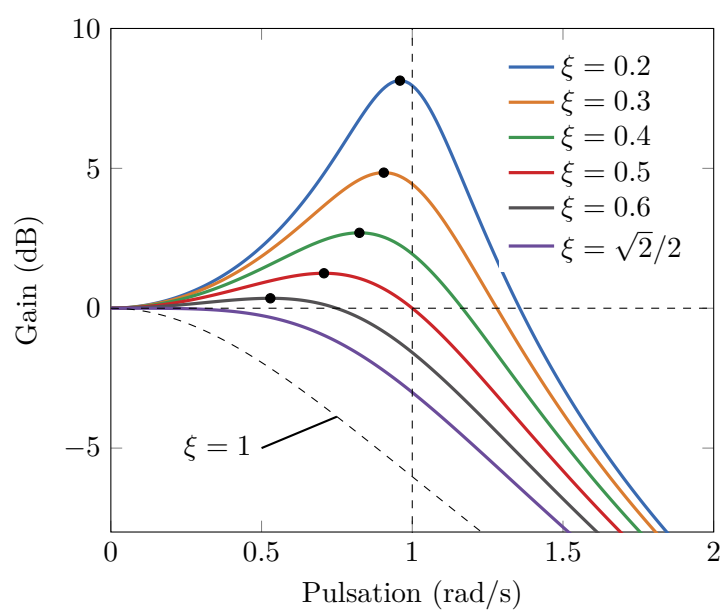
Réponse	Régime apériodique ( $\xi > 1$ )	Régime critique ( $\xi = 1$ )	Régime pseudo-périodique ( $0 < \xi < 1$ )
Réponse impulsionnelle	 $s(t) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$	 $s(t) = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	 $s(t) = \frac{\omega_d}{1 - \xi^2} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_d t$
Réponse indicielle	 $s(t) = 1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$	 $s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$	 $s(t) = 1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \phi)$
Paramètres : (pour tous) $K = 1$ , $E_0 = 1$ (apériodique) $\xi = 2$ , $\omega_0 = 1$ (i.e. $\tau_1 = 3.73$ et $\tau_2 = 0.26$ ) (critique) $\xi = 1$ , $\omega_0 = 1$ (i.e. $\tau = 1$ ) (pseudo-périodique) $\xi = 0.3$ et $\omega_0 = 1$			

## 2. Analyse fréquentielle

### Diagramme de Bode



### Phénomène de résonance





# I. Échelle logarithmique et le décibel

En automatique, l'échelle logarithmique est très fréquemment utilisée pour permettre la représentation graphique de variables dont les valeurs s'étalent sur plusieurs ordres de grandeur. Pour les diagrammes de Bode, il est courant de représenter le gain d'un **SLCI** en décibel **dB** qui est également une unité liée au logarithme décimale. La maîtrise du calcul logarithmique est donc indispensable pour l'établissement d'un diagramme de Bode.

## 1. Rappel sur le logarithme décimal

Le logarithme décimal (noté  $\log$  ou  $\log_{10}$ ) est le logarithme en base 10. La propriété principale du logarithme est de transformer un produit en somme<sup>1</sup>.

Formellement, la fonction logarithme décimal  $\log(x)$  est défini analytiquement par

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

où la fonction  $\ln x$  est la fonction logarithme népérien (i.e en base naturelle  $e$ )

### Propriétés

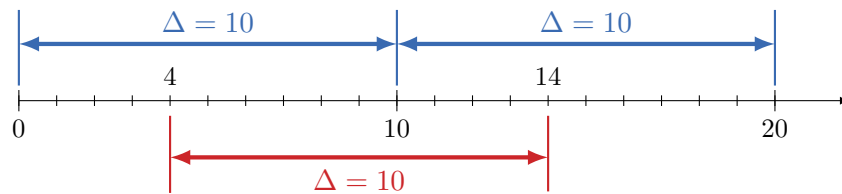
- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log(b)$
- $\log(a^n) = n \log(a)$
- $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log(a)$
- $\log(x) = a \Leftrightarrow x = 10^a$  ;  $\log(1) = 0$  ;  $\log(10) = 1$  ;  $\log(0.1) = -1$

## 2. Échelle logarithmique décimale

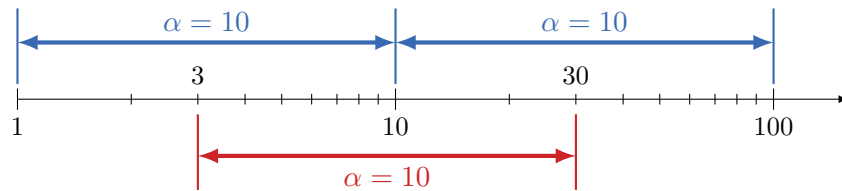
Sur une **échelle linéaire** décimale classique, des couples de graduations dont la **différence** ( $\Delta$  ci-dessous) vaut 10 sont à égales distances.

---

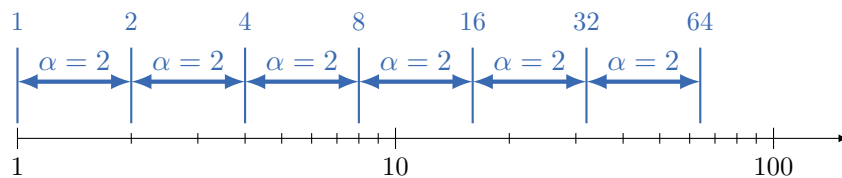
<sup>1</sup>C'est pour cette propriété qu'il fut introduit par John Napier en 1614 pour faciliter les calculs de produit quelconque en établissant une correspondance avec la somme de logarithme à l'aide de tables de logarithme, ceci avant le développement de calculateur numérique performant.



Sur une **échelle logarithmique** décimale, des couples de graduations dont le **rapport** ( $\alpha$  ci-dessous) vaut 10 sont à égales distances.



On généralise cette égalité entre le rapport et n'importe quelle distance constante sur l'axe à échelle logarithmique.



On remarquera que dans le cas ci-dessus, les valeurs 16, 32 et 64 n'ont pas de graduation qui leurs sont propres mais ces valeurs sont bien déterminées par la distance constante entre deux graduation de rapport  $\alpha = 2$ .

Il existe une terminologie pour se référer à des rapport  $\alpha$  particuliers, on parle d'**octave**<sup>2</sup> lorsque  $\alpha = 2$  et de **décade** lorsque  $\alpha = 10$

Avec cette terminologie, une atténuation du gain d'une réponse harmonique de  $-20$  dB lorsque la pulsation augmente d'un facteur 10, se dira  $-20 \text{ dB} \cdot \text{décade}^{-1}$  ou  $-6 \text{ dB} \cdot \text{octave}^{-1}$ .

<sup>2</sup>Pour le lecteur mélomane, cela correspond à la définition de l'octave musicale. Par exemple, l'octave supérieur du La (noté La4) de fréquence 440 Hz est de fréquence égale à 880 Hz (noté La3).



$G$	0.01	0.1	0.5	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
$G_{dB}$	-40	-20	$\sim -6$	$\sim -3$	0	$\sim 3$	$\sim 6$	20	40

**Tableau I.1.** – Équivalence entre gain naturel  $G$  et gain décibel  $G_{dB}$ .  
D'après [9]

### 3. Le décibel

Le bel (B) est une unité de grandeur sans dimension exprimant la valeur relative entre deux quantités (de puissances en particuliers) par le logarithme décimal de leur rapport. Le décibel (dB), plus couramment utilisé, est définie comme un dixième de bel, et donc correspond à dix fois le logarithme décimal du rapport.

$$X_{dB} = 10 \log \frac{P_s}{P_e}$$

Le gain en décibel reporté sur un diagramme de Bode correspond à la valeur relative à 1 du carré du gain  $G$  (le carré de l'amplitude d'un signal pouvant être défini comme une puissance). Ainsi,

$$G_{dB} = 10 \log G^2 = 20 \log G$$

Nous rappelons que le gain  $G(\omega)$ , dit naturel, est le module de la fonction de transfert  $G(\omega) = |H(j\omega)|$ . Le **tableau I.1** donne l'équivalence entre le gain naturel  $G$  et gain décibel  $G_{dB}$  pour différentes valeurs particulières fréquemment rencontrées dans ce cours.

### 4. Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode d'une fonction complexe  $H(j\omega)$  est composé de deux courbes (i.e gain et phase) en représentation semi-logarithmique.

Soit la fonction complexe du premier ordre telle que

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \quad (\text{I.1})$$

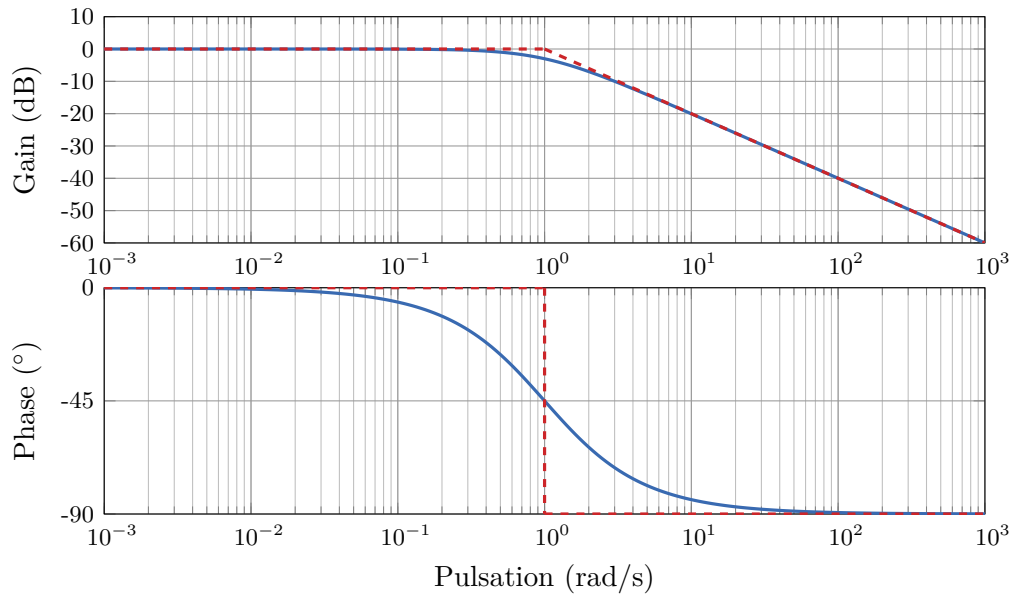
#### Tracé du gain

Le gain de cette fonction de transfert  $G(\omega) = |H(j\omega)|$  s'écrit :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

le gain en décibel est donc :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2}$$



**Figure I.1.** – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre.

C'est cette fonction qu'il faut tracer point par point sur le diagramme de Bode, cependant il est généralement recommandé d'étudier les asymptotes de cette fonction avant de tracer la courbe. Pour les basses fréquences, le gain en décibel se comporte comme

$$G_{dB}(\omega) \sim -20 \log 1 \sim 0 \text{ dB}$$

et pour les hautes fréquences, comme

$$G_{dB}(\omega) \sim -20 \log \omega.$$

Dans le cas des hautes fréquences, lorsque la pulsation est multipliée par 10 (i.e une décade) le gain diminue de  $-20 \text{ dB}$ , on dit également qu'à haute fréquence le gain possède une pente de  **$-20 \text{ dB par décade}$** . La pulsation de coupure est ici de  $\omega_c = 1$ , c'est cette pulsation qui marque la « séparation » entre basses et hautes fréquences.

### Tracé de la phase

La phase  $\phi(\omega)$  correspond à l'argument principale ([Annexe E](#)) de la fonction complexe  $H(j\omega)$ .

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\arg(1 + j\omega) = -\arctan \omega$$

C'est cette fonction  $\phi(\omega)$  qu'il faut tracer point par point sur le diagramme de Bode, mais comme précédemment il est conseillé de déterminer les asymptotes à basse et haute fréquence. À basse fréquence, la phase se comporte comme,

$$\phi(\omega) \sim 0$$

et à haute fréquence, comme,

$$\phi(\omega) \sim -\frac{\pi}{2}.$$

Les asymptotes sont une approximation bien plus grossière dans le cas de la phase. En générale, il est recommandé de calculer la phase pour des valeurs particulières de la pulsation. Par exemple, à la pulsation de coupure, lorsque  $\omega = 1$ , la phase est de  $-45^\circ$ , en effet,

$$\phi(1) = -\arg(1 + j\omega) = -\frac{\pi}{4}$$

La [figure I.1](#) présente le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert de l'équation (I.1).

## 5. Tracé d'un diagramme de Bode avec Scilab

Deux fonctions permettent de tracer un diagramme de Bode avec Scilab.

- `bode(syslin,fMin,fMax)` trace le diagramme de Bode réel. Cette fonction prend pour argument `sys` un système linéaire comme défini à l' ??, `fMin` et `fMax` une fréquence minimal et maximal (en Hz sauf si un 4ème argument est donné).
- `bode_asymp(syslin,fMin,fMax)` trace le diagramme asymptotique.

```
// =====  
//                               Analyse Fréquentielle  
// =====  
scf(grf);clf(grf);grf=grf+1;  
fMin =0.01,fMax=100;  
p=poly(0,'p')  
PremierOrdre=syslin('c',[1],[1+p])  
//-----  
// diagramme de Bode  
//-----  
bode(PremierOrdre,fMin,fMax,"rad");  
// -----  
// diagramme de Bode asymptotique  
//-----  
bode_asymp(PremierOrdre,fMin,fMax);
```

# J. Transformée de Laplace inverse

## 1. Contexte

Il existe une forme analytique de la transformée inverse basée sur la formule de Mellin-Fourier<sup>[15]</sup> :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(p)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} S(p) dp$$

Cette inversion se fait donc par le biais d'une intégrale dans le plan complexe.

## 2. Méthode de Gaver-Stehfest

## 3. Méthode de Talbot fixe



# Références

- [1] Régulation automatique (analogique) (REG). <http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/>.
- [2] <http://www.demosciences.fr/projets/scilab-xcos/-utilisation/premiers-pas>.
- [3] Xcos pour les vrais debutants. <https://scilab.developpez.com/tutoriels/debuter/apprendre-xcos-debutant/>.
- [4] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes lineaires (pc7bis), 2005.
- [5] B. Bayle and J. Gangloff. Systèmes et asservissements à temps continu, 2009.
- [6] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier, and R. Nikoukhah. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. Springer, 2006.
- [7] H. Garnier. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/hugues.garnier/?q=content/teaching>.
- [8] Y. Granjon. *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, événements discrets*. Dunod, Paris, 2015.
- [9] E. Laroche and H. Halalchi. Asservissement des systèmes lineaires à temps continu. <http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>.
- [10] O. Le Gallo. *Automatique des systèmes mécaniques : Cours, travaux pratiques et exercices corrigés*. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009.
- [11] Joe Mabel. Régulateur à boules au Georgetown PowerPlant Museum à Seattle. CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5694146>.
- [12] B. Marx. Outils Mathématiques pour l'ingénieur - Traitement du Signal. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html>.
- [13] B. Marx. Contrôle des systèmes linéaires. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/-benoit.marx/enseignement.html>.
- [14] F. Orioux. *Automatique : Systèmes linéaires et asservissements*. Notes de Cours, Master 2 Outils et systèmes de l'astronomie et de l'Espace, 20017-1018.
- [15] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses Marketing, 2004.
- [16] R. Papanicola. Schéma-blocs avec PGF/TIKZ. <https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/schema-bloc.pdf>.
- [17] R. Papanicola. *Sciences industrielles PCSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2003.

- [18] R. Papanicola. *Sciences industrielles PSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2010.
- [19] Marsyas-Travail personnel. Clepsydre athénienne reconstituée, Musée de l'Agora antique d'Athènes. CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=476174>.
- [20] Consortium Scilab. Introduction to Scilab. [www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf](http://www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf).
- [21] S. Steer and Y. Degré. *Scilab : De la théorie à la pratique - II. Modéliser et simuler avec Xcos*. Éditions D-BookeR, 2014.
- [22] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. *Automatique des systèmes continus*. Editions Technip.
- [23] E. Thomas. TP Scilab. [http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP\\_INFO/TP\\_info\\_12\\_ordre/co/module\\_TP\\_1\\_2\\_ordre\\_5.html](http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP_INFO/TP_info_12_ordre/co/module_TP_1_2_ordre_5.html).



# Index

- Black, Harold, 48
- Bode, Hendrik, 98
- Critère de stabilité
  - Critère de Nyquist, 173
- Dérivateur pur, 89
- Dirac, Paul, 20
- Gain pur, 88
- Heaviside, Oliver, 33
- Hurwitz, Adolf, 162
- Intégrateur pur, 88
- Laplace, Pierre-Simon, 26
- Mason, Samuel, 60
- McCulloch, Warren, 13
- Minsky, Marvin, 13
- Nichols, Nathaniel, 97
- Nyquist, Harry, 99
- Point critique, 167
- Principe de l'argument de Cauchy, 173
- Retard pur, 89
  - diagramme de Bode, 104
  - diagramme de Nyquist, 122
  - effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist, 126
- Routh, Edward, 162
- Shannon, Claude, 13
- Signaux usuels
  - échelon unité, 21
  - exponentielle décroissante, 25
  - Impulsion de Dirac, 20
  - rampe unité, 22
  - sinusoïde, 23
  - sinusoïde amortie, 25
- Système du premier ordre
  - définition, 65
  - diagramme de Bode, 105
  - diagramme de Nyquist, 123
  - fonction de transfert, 65
  - réponse à une rampe, 68
  - réponse harmonique dans le domaine temporel, 96
  - réponse impulsionnelle, 66
  - réponse indicielle, 67
- Système du second ordre
  - définition, 70
  - diagramme de Nyquist, 124
  - fonction de transfert, 70
  - réponse à une rampe, 83
  - réponse impulsionnelle, 72
  - réponse indicielle, 74
- Théorème
  - de la valeur finale, 29
  - de la valeur initiale, 29
- Transformée de Laplace, 26
- Wiener, Norbert, 13



# Acronymes

**DES** Décomposition en Éléments Simples

**FTBF** Fonction de Transfert en Boucle Fermée

**FTBO** Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

**FTCD** Fonction de Transfert de la Chaîne Directe

**FTCR** Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour

**MEI** Matière-Énergie-Information

**MIMO** Multiple Input Multiple Output

**SISO** Single Input Single Output

**SLCI** Système Linéaire Continu et Invariant

**TL** Transformée de Laplace



# Glossaire

<b>Asservissement</b>	L'asservissement consiste à contrôler un système dynamique pour que sa réponse temporelle suive une consigne variable au cours du temps.
<b>Régulation</b>	La régulation est un particulier d'asservissement consistant à garder une consigne constante en présence de perturbation.



# Liste des Symboles

$t$	Variable temporelle
$p$	Indéterminée de polynôme
$s(t)$	Fonction/Signal dans le domaine temporel
$S(p)$	Fonction/Signal dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$
$u(t)$	Fonction échelon unité ou de Heaviside
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
$r(t)$	Fonction rampe unité
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformation de Laplace de la fonction $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	Transformation de Laplace inverse de la fonction $F(p)$
$H(p)$	Fonction de transfert
$N(p)$	Polynôme du numérateur d'une fraction rationnelle
$D(p)$	Polynôme du dénominateur d'une fraction rationnelle
$\omega$	Pulsation
$H(j\omega)$	Nombre complexe associé à la fonction de transfert $H(p)$
$E_0$	Paramètre dimensionnelle d'amplitude de l'entrée
$K$	Gain statique
$\omega_0$	Pulsation propre
$\text{Im}[H(j\omega)]$	Partie imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
$\text{Re}[H(j\omega)]$	Partie réelle du nombre complexe $H(j\omega)$
$\xi$	Coefficient d'amortissement

$G(\omega)$	Gain naturel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$G_{dB}(\omega)$	Gain en dB de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$\phi(\omega)$	Déphasage de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$D_k$	k-ème dépassement
$t_{5\%}$	Temps de réponse à 5%





