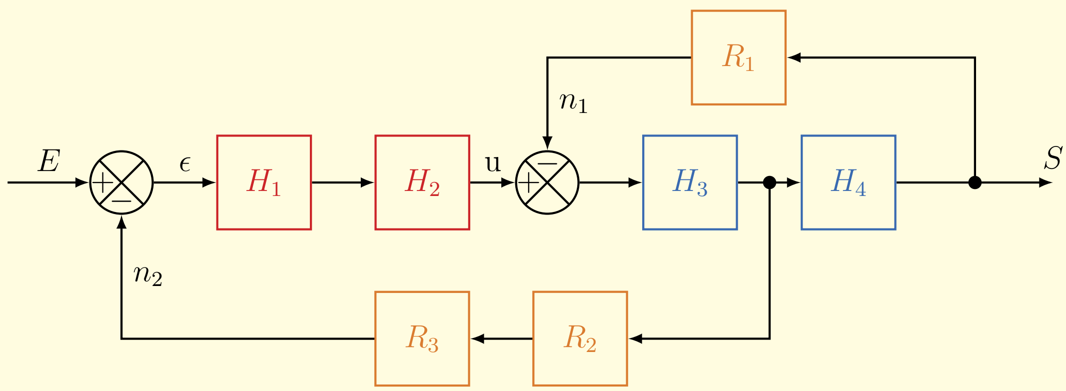
ESME sudria
BORDEAUX | LILLE | LYON | PARIS

Systèmes mécaniques et automatiques

Notes de cours IngéSpé

Automatique Linéaire



Année 2019–2020

Systèmes mécaniques et automatiques

Notes de cours IngéSpé
Automatique Linéaire

Filipe Manuel Vasconcelos

écrit sous LaTeX, TikZ
version de Mai 2020.

Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : `filipe.vasconcelos@esme.fr`

Table des matières

Avant-propos

Programme

Ce cours est une introduction à l'**automatique** pour des étudiants de deuxième année de classe préparatoire scientifique.
L'objectif principal de l'automatique est de permettre le contrôle des **systèmes dynamiques** de toutes natures que ce soient : mécanique, chimique, électronique, optique, thermique, acoustique.... Tout en respectant certaines contraintes de performances (rapidité, précision, stabilité...).
Nous limiterons notre étude aux **systèmes linéaires continus et invariants.**
La **modélisation** de ces systèmes passe par la mise en équation du comportement physique des systèmes sous forme d'équations différentielles. Cette étape ne fait pas à proprement parler partie d'un cours d'automatique, en effet chacunes des disciplines construisent cette modélisation en se basant sur les principes et les hypothèses les plus adaptés à un problème donné. La modélisation permet une étude systématique des équations différentielles en proposant des modèles généraux et ce quelque soit la nature du procédé.
L'**analyse** nous permettra de caractériser et d'identifier ces modèles à partir des réponses aux sollicitations et de leurs performances.
Le **contrôle** est un concept très générale permettant de regrouper toutes les méthodes et techniques permettant de commander un système dynamique. Dans ce cours nous présenterons que les principes d'asservissement et de régulation. Nous verrons comment il est possible d'élaborer une commande adaptée (corrigée) pour un procédé quelconque, notamment lorsque ceux-ci présenterons des défauts de performance.

Organisation du document

Les chapitres suivent un découpage classique autour des trois pilliers discutés précedemment que sont la **modélisation**, l'**analyse** et le **contrôle**. (c.f Figure A). Le lecteur pourra s'appuyer sur un grand nombre d'annexes qui ont pour objectifs de rappeler et de détailler des notions prérequises ou encore approfondir quelques aspects hors programme pour une deuxième lecture.

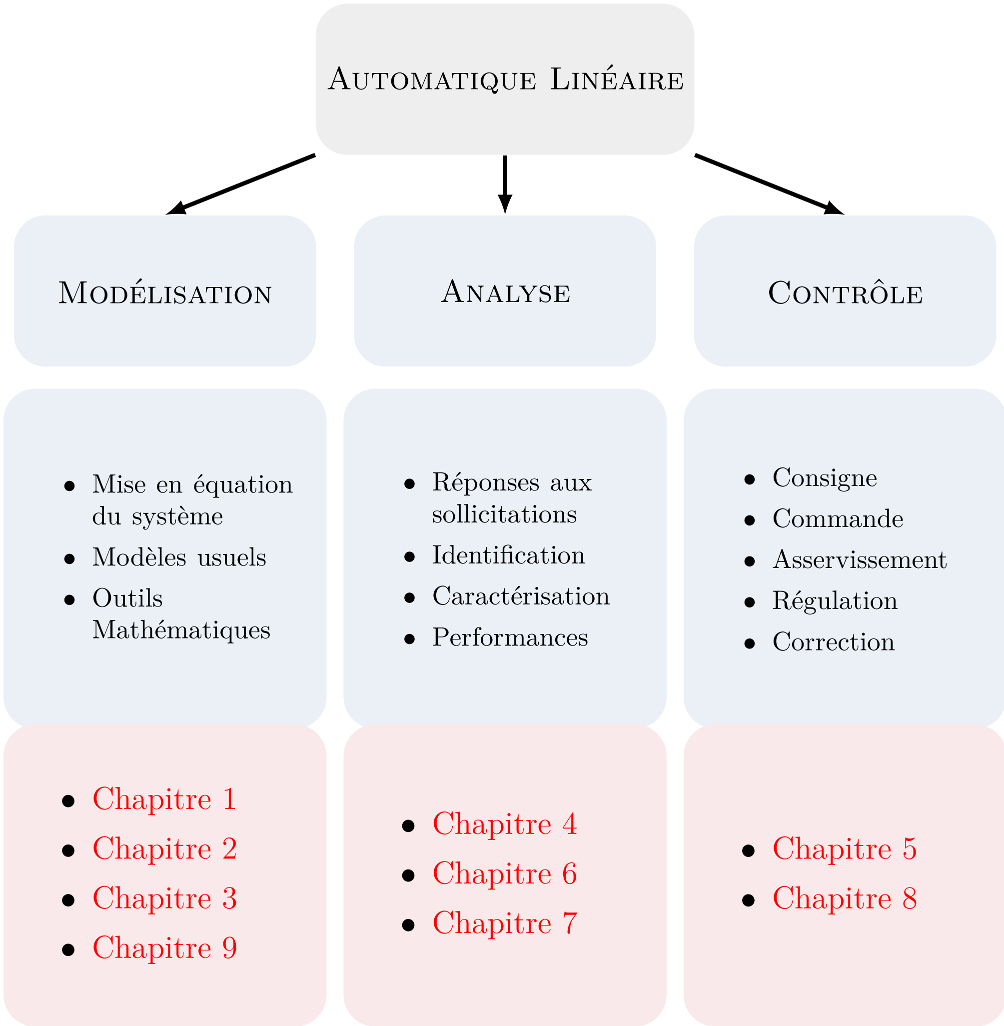
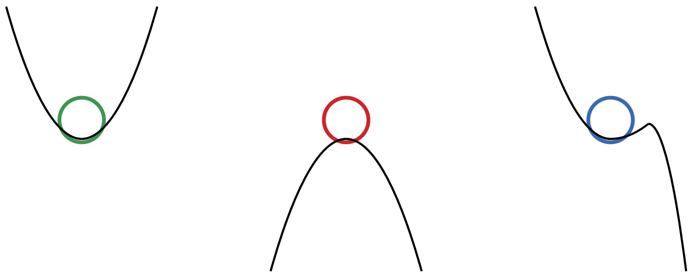


Figure A. – Organisation du document.

7. Stabilité des systèmes asservis

Sommaire

1. Contexte et critère de stabilité fondamentale



(a) stable (b) instable (c) stabilité conditionnelle

Figure 7.1. – Représentation schématique de la stabilité

Un système est dit stable si à une entrée bornée le système produit une sortie bornée[1]
Un système est dit stable lorsque écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir
Rappel sur les réponses temporelles du premier ordre et du second ordre . . . *à compléter*. . .

Condition fondamentale de stabilité

Un système est stable si sa fonction de transfert ne possède aucun pôles à partie réelle positive.

[1] Chez nos collègues anglo-saxons, on rencontre le concept de BIBO (« bounded input bounded output »)

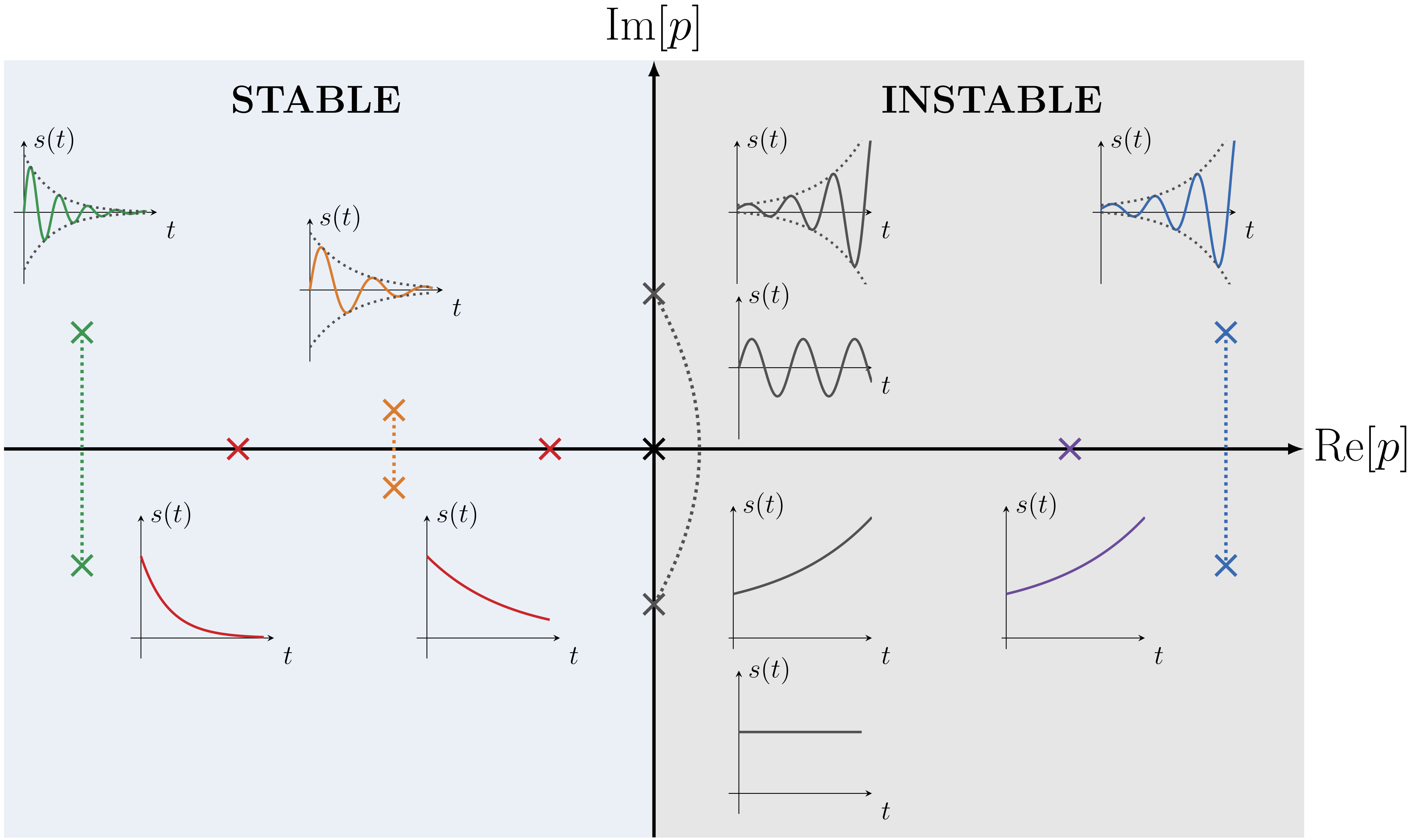
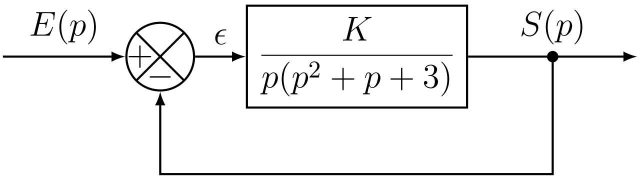


Figure 7.2. – Stabilité d'un SLCI d'après la carte des pôles de sa fonction de transfert et de leurs réponses impulsionnelles. (Vert) Deux pôles complexes conjugués. (Rouge) Pôle à partie réel négative. (Gris) Deux pôles complexes conjugués à partie réelle nulle. (Noir) Pôle nul. (Bleu) Deux pôles complexes conjugués à partie réelle positive. (Orange) Pôle à partie réel positive.

Notion de pôles dominants

Système asservi



$$H_{BF}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0}$$

Condition de stabilité d'un système asservi (1)

Un système asservi est stable si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôles à partie réelle positive.

Inconvénients de la condition fondamentale

2. Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh[2] est dit algébrique car il s'établit dirctement sur la fonction de transfert en boucle fermée du système asservi.
Pour appliquer le critère fondamentale de stabilité à cette fonction de transfert, il nous faut étudier **le polynôme caractéristique** :

$$\begin{aligned} D(p) &= 0 \\ b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0 &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

pour déterminer si ce polynôme possède des racines toutes à partie réelle strictement négative. Les polynômes de ce type sont dits en mathématiques de Hurwitz[3,4]. C'est pourquoi le critère suivant est également connu sous le nom de **critère de Routh-Hurwitz**.
Il est possible de conclure sur la nature des racines d'un polynôme en étudiant ses coefficients. Le critère de Routh-Hurwitz se base sur cette propriété en posant deux conditions pour établir qu'un polynôme est un polynôme de Hurwitz. Dans

[2] Edward John Routh (1831-1907), mathématicien anglais.
[3] Adolf Hurwitz (1859-1919), mathématicien allemand.
[4] Un polynôme de Hurwitz est un polynôme à coefficients réels dont les racines sont toutes à partie réelle strictement négative.

le cas de l'application de la stabilité des systèmes linéaires asservis, la première condition s'énonce de la façon suivante :

Condition nécessaire de Routh-Hurwitz

Un système asservi d'ordre n est stable en boucle fermée si tous les coefficients ($b_i \forall i \neq n$) de son équation caractéristique sont de même signe que b_n.

Cette condition nécessaire s'avère suffisante si le système est du premier ou du second ordre. Pour un ordre supérieur il faut construire le tableau de Routh à partir des coefficients de $D(p)$, pour appliquer une condition supplémentaire.

2.1. Tableau de Routh

Dans le cas où la condition nécessaire est respectée et $n > 2$, il faut constuire le **tableau de Routh** à partir des coefficients de l'équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée.

Le tableau de Routh est constitué de n lignes et de k colonnes où $k = n/2 + 1$[5]. L'élément A_{ij} correspond à l'élément de la i-ème ligne et j-ème colonne.

$$\begin{array}{c|cccccc|}
p^n & A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1(k-1)} & A_{1k} \\
p^{n-1} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2(k-1)} & A_{2k} \\
p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3(k-1)} & A_{3k} \\
p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & A_{4(k-1)} & A_{4k} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & A_{ij} & \vdots & \vdots \\
p^1 & A_{(n-1)1} & A_{(n-1)2} & A_{(n-1)3} & \cdots & A_{(n-1)(k-1)} & A_{(n-1)k} \\
p^0 & A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{n(k-1)} & A_{nk}
\end{array}$$

Les deux premières lignes du tableau sont directement construites à partir des coefficients de $D(p)$.

paire

$$\begin{array}{c|cccccc|}
p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_2 & b_0 \\
p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_1 & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

[5] On réalise ici une division entière. Par exemple si $n = 5$, $k = 2+1 = 3$ et si $n = 6$, $k = 3+1 = 4$

si n est impaire la dernière colonne de la seconde ligne est non-nulle :

$$\textbf{impaire} \qquad \begin{array}{c|cccccc|} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Les éléments de la troisième ligne sont construits à partir du déterminant[6] des élements des deux premières lignes.

$$\begin{array}{c|cccccc|} p^n & \color{red}{b_n} & \color{red}{b_{n-2}} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & \color{red}{b_{n-1}} & \color{red}{b_{n-3}} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{31} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|} p^n & \color{blue}{b_n} & b_{n-2} & \color{blue}{b_{n-4}} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & \color{blue}{b_{n-1}} & b_{n-3} & \color{blue}{b_{n-5}} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{32} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

On construit de la même manière la quatrième ligne :

$$\begin{array}{c|cccccc|} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & \color{red}{b_{n-1}} & \color{red}{b_{n-3}} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & \color{red}{A_{31}} & \color{red}{A_{32}} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{41} = -\frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & \color{blue}{b_{n-1}} & b_{n-3} & \color{blue}{b_{n-5}} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & \color{blue}{A_{31}} & A_{32} & \color{blue}{A_{33}} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{42} = -\frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Et ainsi de suite jusque la dernière ligne du tableau.
La formule générale pour obtenir l'élément A_{ij} est alors :

$$A_{ij} = -\frac{1}{A_{(i-1)1}} \begin{vmatrix} A_{(i-2)1} & A_{(i-2)(j+1)} \\ A_{(i-1)1} & A_{(i-1)(j+1)} \end{vmatrix} \tag{7.2}$$

[6]Le déterminant d'une matrice 2×2 est tel que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Le critère s'applique sur la première colonne ainsi construit dite **colonne des pivots** du tableau de Routh.

$$\begin{array}{c|cccccc|}
p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_2 & b_0 \\
p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_1 & 0 \\
p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3(k-1)} & 0 \\
p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
p^1 & A_{(n-1)1} & A_{(n-1)2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
p^0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}$$

Critère de Routh-Hurtwitz

Un système asservi est stable en boucle fermée si tous les termes de la colonne des pivots du tableau de Routh du polynôme caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée sont de même signes.

Remarques :

Le nombre de changement de signe, nous donne le nombre de pôles à partie réelle positives (instables) de la fonction de transfert en boucle fermée.

Propriétés du tableau de Routh

Nous énonçons ici quelques propriétés du tableau de Routh pour faciliter ou permettre l'application du critère dans des cas particuliers [15].

- Pour simplifier les calculs, il est possible de factorisée par un entier une ligne du tableau.
- Dans le cas où le tableau présente un zéro dans la première colonne, il est possible de remplacer par une variable ϵ, et de prendre la limite lorsque $\epsilon \to 0^+$ ou $\epsilon \to 0^-$ selon le signe de la colonne des pivots qui respecterait le critère.
- Une ligne de zéros pour les coefficients de l'avant-dernière ligne du tableau de Routh indique que le polynôme du dénominateur de la fonction de transfert possède une paire de pôles, qui sont racines de l'équation auxiliaire :

$$Ap^2 + B = 0$$

où A et B sont les coefficients de la ligne précédente du tableau. On peut alors continuer le tableau en remplaçant la ligne de coefficients nuls par les coefficients de la dérivée de l'équation auxiliaire.

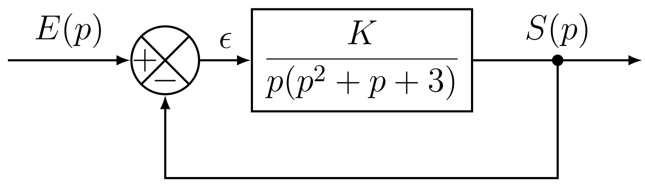
Une ligne de zéro implique la présence d'une paire de racines imaginaires pures donnant lieu à une forme sinusoïdale dans la réponse transitoire. Le système diverge en oscillant s'il y a au moins une racine à partie réelle positive, ou il converge vers des oscillations entretenues si les autres racines ont toutes une partie réelle négative.

2.2. Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz

La particularité du critère de Routh-Hurwitz est de permettre d'étudier les conditions de stabilité d'un système en fonction des paramètres de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans l'exemple ci-dessous, nous allons considérer un système asservi caractérisé par fonction de transfert en boucle ouverte défini par un gain K dont l'on souhaite déterminer la valeur pour assurer la stabilité du système en boucle fermée.

Soit un système asservi défini par le schéma-bloc suivant :



La fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ s'écrit :

$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{K}{p^3 + p^2 + 3p + K}.$$

L'équation caractéristique $D(p)$ de H_{BF} est donc

$$D(p) = p^3 + p^2 + 3p + K,$$

Nous constatons que le système est d'ordre 3 de coefficients :

$$\begin{aligned} b_3 &= 1 \\ b_2 &= 1 \\ b_1 &= 3 \\ b_0 &= K \end{aligned}$$

Le critère nécessaire de Routh est donc respecté pour $K > 0$. L'équation caractéristique étant d'ordre 3, il nous faut construire le tableau de Routh, afin de vérifier le critère supplémentaire :

$$\begin{array}{c|cc|}
p^3 & 1 & 3 \\
p^2 & 1 & K \\
\hline
p^1 & A_{31} & 0 \\
p^0 & A_{41} & 0
\end{array}$$

$$A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & K \end{vmatrix} = 3 - K$$

$$A_{41} = -\frac{1}{A_{31}}\begin{vmatrix} 1 & K \\ A_{31} & 0 \end{vmatrix} = K$$

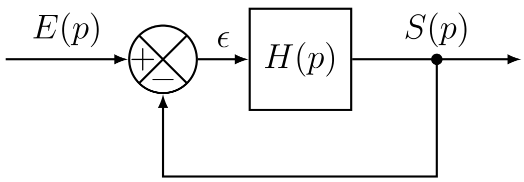
$$\begin{array}{c|cc|}
p^3 & 1 & 3 \\
p^2 & 1 & K \\
p^1 & 3-K & 0 \\
p^0 & K & 0
\end{array}$$

La colonne des pivots sont tous de même signe si $3-K > 0$ et $K > 0$ (déjà établie par la condition nécessaire de Routh). La condition sur K pour que le système soit stable en boucle fermée est donc :

$$0 < K < 3$$

3. Critère graphique du revers

Routh s'applique sur la fonction de transfert en boucle fermée. Les critères graphiques que nous allons maintenant établir permettent d'étudier la stabilité du système en boucle fermée en considérant le système en boucle ouverte.
Pour celà considèrons la boucle de contre réaction unitaire pour l'asservissement d'un système de fonction de transfert $H(p)$, telle que :



la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ est simplement donné par $H(p)$, et comme nous l'avons déjà rencontré à plusieurs occasions, la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ est égale à

$$H_{BF}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)},$$

Étudier les pôles de l'équation caractéristique $D(p) = 0$ est équivalent à étudier l'équation $1 + H_{BO}(p) = 0$, ou encore

$$D(p) = 0 \Leftrightarrow 1 + H_{BO}(p) = 0 \Leftrightarrow H_{BO}(p) = -1$$

Il est alors possible d'étudier la fonction de transfert en boucle ouverte par rapport à -1 plutôt que par rapport à l'origine.

Pour montrer quelques propriétés de $1+H_{BO}(p)$, nous allons réecrire ces fonctions de transferts en fonction des polynomes du numérateur et du dénominateur de la boucle ouverte. En effet, la fonction de transfert en boucle ouverte est en générale une fraction rationnelle de la forme :

$$H_{BO}(p) = \frac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p)}$$
$$1 + H_{BO}(p) = \frac{N_{BO}(p) + D_{BO}(p)}{D_{BO}(p)}$$

on a alors pour la fonction de transfert en boucle fermée,

$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p)}}{1 + \frac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p)}} = \frac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p) + N_{BO}(p)}$$

Nous remarquons alors que les zéros de $1 + H_{BO}(p)$ sont les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ et que les pôles de $1 + H_{BO}(p)$ coïncident avec les pôles de $H_{BO}(p)$. Il est donc possible de réinterpréter la condition stabilité d'un système asservi :

Condition de stabilité d'un système asservi (2)

Un système asservi est stable en boucle fermée si sa fonction de transfert en boucle ouverte ne possède aucun *zéros* à partie réelle positive.

Nous allons établir un critère que nous pourrons appliquer sur la réponse harmonique et ses différentes représentations graphiques.

Supposons le système asservi précédent décrit par la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$. Par définition cette fonction de transfert est le rapport de la sortie $S(p)$ sur l'écart $\epsilon(p)$ que l'on souhaite minimiser.

$$S(p) = H_{BO}(p)\epsilon(p)$$

Considérons une entrée $e(t)$ sinusoïdale de la forme :

$$e(t) = E_0 \sin \omega t$$

au premier instant, on a alors

$$\epsilon(t) = E_0 \sin \omega t$$

en régime permanent la sortie est alors de la forme (c.f chapitre 4) :

$$s(t) = E_0 |H_{BO}(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

l'écart $\epsilon(t) = e(t) - s(t)$ est maximum pour une sortie en opposition de phase. Il existe donc une pulsation ω_π pour laquelle :

$$\phi = \arg H_{BO}(j\omega_\pi) = -\pi$$

En Pour cette pulsation et ce déphasage :

$$S(p) = -\Big|H_{BO}(j\omega_\pi)\Big|\epsilon(p)$$

en posant $K = |H_{BO}(j\omega_\pi)|$, on identifie la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) a :

$$H_{BO}(p) = -K$$

L'écart dans le domaine de Laplace devient :

$$\begin{aligned} \epsilon(p) &= E(p) - S(p) \\ \epsilon(p) &= E(p) + K\epsilon(p) \end{aligned}$$

Remplaçons à nouveau $\epsilon(p)$ par sa définition (pour simuler une deuxième boucle) :

$$\epsilon(p) = E(p) + K(E(p) - S(p)) = E(p)(1 + K) + K^2\epsilon(p)$$

et ainsi de suite :

$$\epsilon(p) = E(p)(1 + K) + K^2 (E(p) - S(p)) = E(p)(1 + K + K^2) + K^3\epsilon(p)$$

on obtient après n substitutions :

$$\epsilon(p) = E(p) \sum_{i=0}^{n} K^i + K^n\epsilon(p)$$

La stabilité du système est alors liée à la convergence de cette somme. La somme diverge si $K \geq 1$ et converge si $K < 1$. **Autrement dit le système est stable en boucle fermée pour** $\left|H_{BO}(j\omega)\right| < 1$**.**
Nous pouvons donc énoncer le critère de stabilité dit du revers :

Critère de stabilité du revers

Un système est stable en boucle fermée si lorque le déphasage en boucle ouverte est de -180° le module $|H_{BO}(j\omega)|$ est strictement inférieur à 1. Formellement, pour une pulsation ω_π telle que $\phi = \arg\left(H_{BO}(j\omega_\pi)\right) = -\pi$, le système est stable en boucle fermée si $|H_{BO}(j\omega_\pi)| < 1$ ou $20\log|H_{BO}(j\omega_\pi)| < 0\,\text{dB}$.

Dans le plan complexe, un déphasage de -π et un gain naturel de 1 correspond au point de coordonnées $(-1, 0)$ ce que nous avons défini comme le point critique à partir de l'équation caractéristique $1 + H_{BO} = 0$. Ce critère revient donc à étudier graphiquement le comportement de la réponse harmonique de $H_{BO}(j\omega)$ par rapport au point critique.
Nous avons vu que la réponse harmonique peut avoir plusieurs représentations graphiques (c.f Chapitre 4). Nous allons maintenant appliquer le critère à ces différentes représentations graphiques.

3.1. Critère du revers dans le plan de Nyquist

Pour énoncer le critère du revers dans le plan de Nyquist. Il nous faut tracer le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte et observer comment il se comporte par rapport au point critique de coordonnées (-1,0) dans le plan complexe de $H_{BO}(j\omega)$. La figure 7.6 présente les lieux de Nyquist de trois systèmes : stable, instable et critique. Observons que dans le cas stable, le lieu de déphasage $\phi = -\pi$ (c.a.d lorsque le lieu coupe l'axe des réels négatifs), le module ou le gain naturel $G(\omega)$ (ou encore la distance à l'origine) est inférieur à 1. Dans le cas instable ce gain est supérieur à 1. Nous appelerons critique le système dont le lieu de Nyquist passe par le point critique de coordonnées (-1,0).

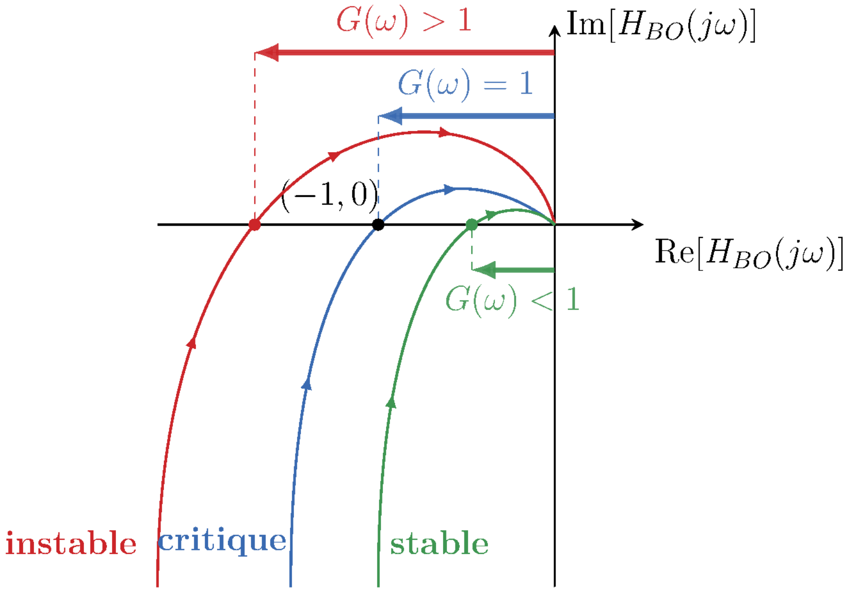


Figure 7.3. – Représentation schématique de lieux de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

Nous pouvons maintenant formuler le critère du revers de Nyquist :

Critère du revers de Nyquist

Un système est stable en boucle fermée si lorsque parcourant le lieu de Nyquist de la boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique sur la *gauche*.

3.2. Critère du revers dans le plan de Black

à compléter…

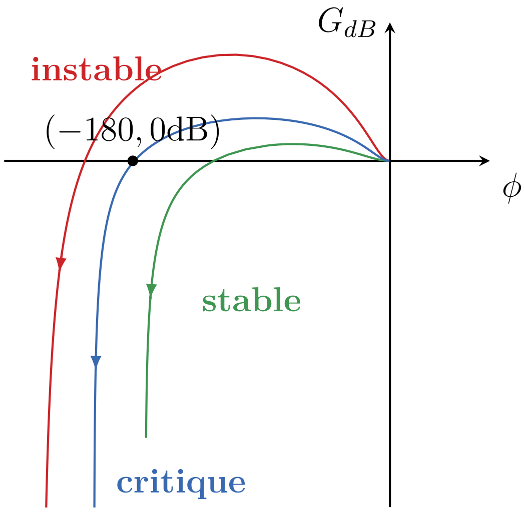


Figure 7.4. – Représentation schématique de lieux de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

Critère du revers de Black

Un système est stable en boucle fermée si lorsque parcourant le lieu de Black de la boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique sur la *droite*.

3.3. Critère du revers dans le plan de Bode

Il est possible d'appliquer le critère du revers au lieu de transfert de Bode en boucle ouverte. Le point critique dans le plan de Bode est représenté par deux verticales coupant les deux graphes en gain et en déphasage. De ce fait il faut vérifier deux conditions pour respecter le critère du revers dans le plan de Bode

Critère du revers de Bode (1)

Un système est stable en boucle fermée si, pour la pulsation ω_1 telle que le module de la fonction de transfert en boucle ouverte est égal à 1 (c.a.d $H_{BO}(\omega_1) = 1$ ou $0\,\mathrm{dB}$), le déphasage $\phi(\omega_1)$ est supérieur à -180°

Critère du revers de Bode (2)

Un système est stable en boucle fermée si, pour la pulsation ω_c (pulsation critique) telle que l'argument de la fonction de transfert en boucle ouverte (déphasage) est égale à -180°(c.a.d $\phi(\omega_c) = -180°$), le gain $G_{dB}(\omega_c)$ est négatif.

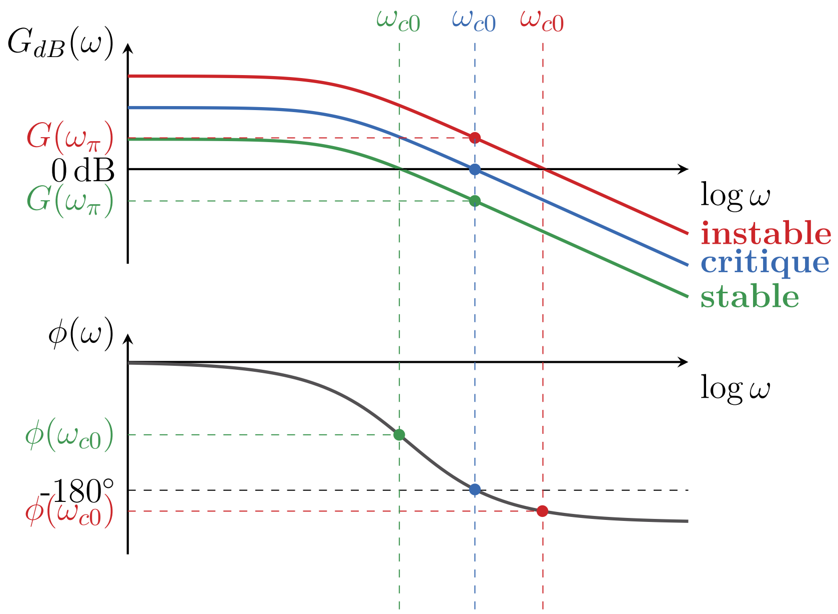


Figure 7.5. – Représentation schématique de lieux de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

4. Marge de stabilité et robustesse de la stabilité

Les critères de stabilité graphiques permettent de s'assurer qu'un système est stable ou instable (ou à la limite de la stabilité) en étudiant la réponse harmonique. Pour estimer la proximité de la réponse harmonique au point critique, nous définissons les marges de stabilité.

Marge de phase

La marge de phase M_ϕ est définie par : $M_\phi = \pi + \arg H_{BO}(j\omega_{c0})$ où ω_{c0} est la pulsation de coupure pour laquelle le gain naturel $G(\omega_{c0}) = |H_{BO}(j\omega_{c0})| = 1$ (ou encore 0 dB)

Marge de gain

La marge de gain M_G est définir par $M_G = -20 \log |H(j\omega_\pi)|$ où ω_π est la pulsation pour laquelle le déphasage vaut $-180°$ $\phi(\omega_\pi) = \arg\left(H_{BO}(j\omega_{c0})\right) = -\pi$ ou autrement l'argument du point critique dans le plan complexe.

Ces marges de stabilités sont en générales imposées par le cahier des charges. En générales es valeurs pour M_ϕ de 45 à 60°et pour M_G de 6 à 15 dB sont considérées comme satisfaisantes.

5. Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist généralise le critère du revers. Il s'appuie sur le principe de l'argument de Cauchy [7] [8]. Nous suivrons la présentation « graphique » de ce théorème et du critère de Nyquist donné par [1].

5.0.1. Principe de l'argument de Cauchy

Soit un contour $\mathcal{C}$ parcourant le plan complexe de la variable p dans le sens des aiguilles d'une montre et $F(p)$ une fonction rationnelle ne possédant ni pôle ni zéro sur $\mathcal{C}$. Le théorème du principe de l'argument de Cauchy permet de relier, le nombre de pôles P et de zéros Z entourées par le contour $\mathcal{C}$ au comportement de la courbe $F(\mathcal{C})$ image $F(p)$ de $\mathcal{C}$.

[7] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français (X1807)

[8] Nous ne donnerons qu'une présentation élémentaire et sans démonstration de ce théorème. Un cours d'analyse complexe permettra de compléter cette présentation. On trouvera dans [4, 1], une introduction plus détaillée ainsi qu'une bibliographie très fournie sur le sujet.

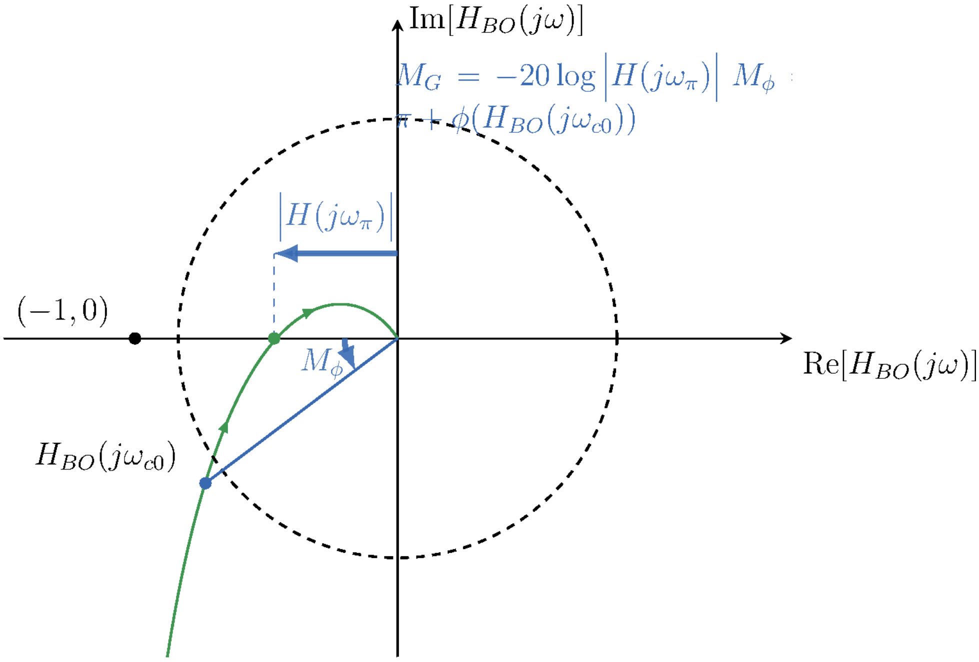


Figure 7.6. – Représentation schématique de lieux de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

Énoncé du principe de l'argument de Cauchy

Si un contour $\mathcal{C}$ contient Z zéros et P pôles d'une fonction analytique $F(p)$ sans en traverser aucun, alors quand on le parcourt dans le sens anti-trigonométrique, le contour $\Gamma = F(\mathcal{C})$ fait un nombre de tours N autour de l'origine dans le sens trigonométrique égal à,

$$N = Z - P$$

On se rapportera à la figure 7.7 pour un exemple d'application de ce principe. Dans cet exemple la fonction analytique $F(p)$ possède 2 pôles et 3 zéros. Le contour entoure $Z = 3$ zéros et $P = 1$ pôle. Le contour $\Gamma = F(\mathcal{C})$ fait alors $N = Z - P = 2$ tours autour de l'origine dans le sens trigonométrique ($N > 0$). Remarquons que les tours sont comptés positivement dans le sens trigonométrique (c.f figure 7.8).

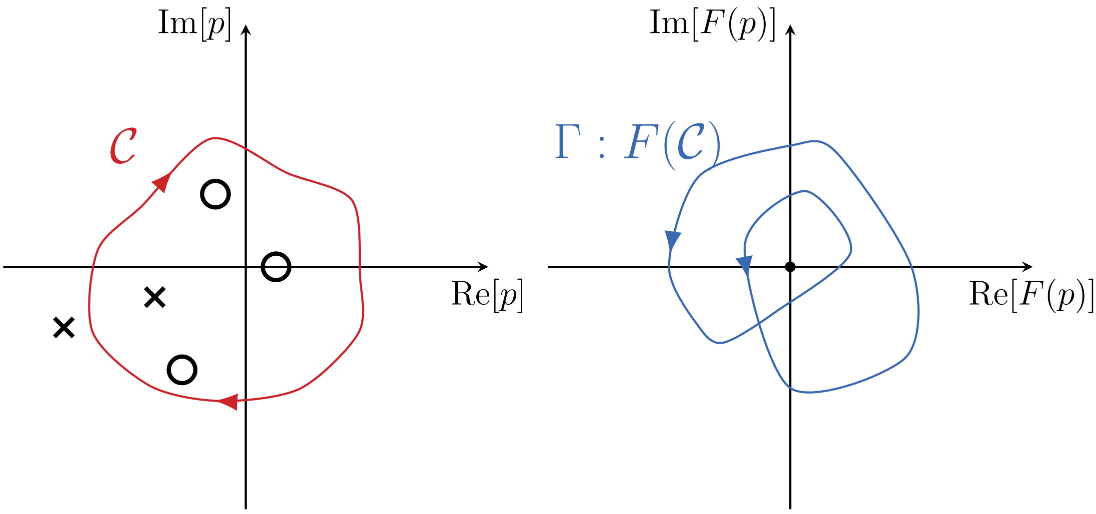


Figure 7.7. – Représentation de la transformation d'un contour $\mathcal{C}$ en son image par une fonction analytique $F(p)$. Dans cet exemple, on observe (droite) que $\mathcal{C}$ entoure $Z = 3$ zéros et $P = 1$ pôle (gauche) l'image fait alors $N = 3 - 1 = 2$ tours autour de l'origine.

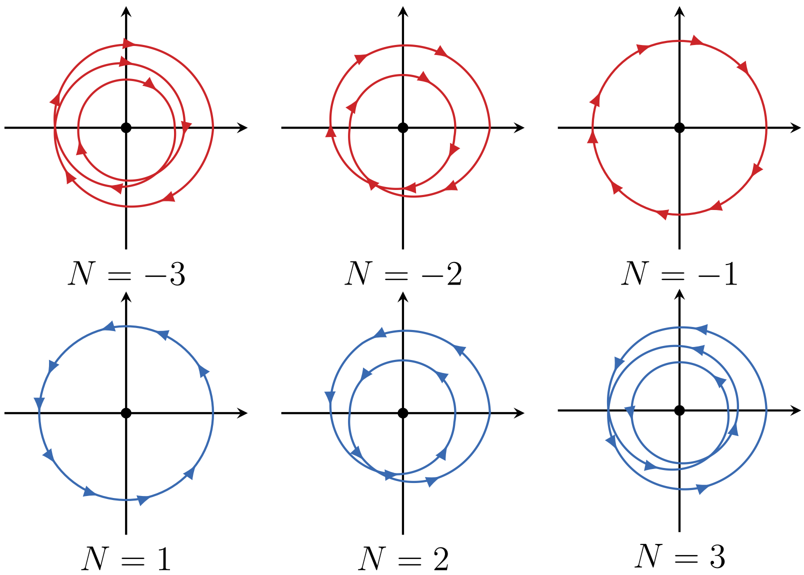
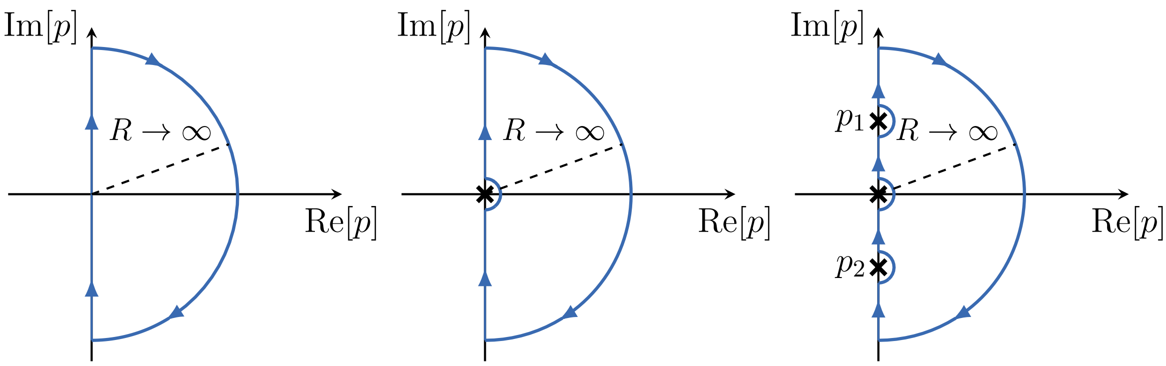


Figure 7.8. – Représentation schématique du nombre de tours autour de l'origine de l'image d'une fraction rationnelle d'un contour fermé. Le sens positif est celui du sens trigonométrique.

5.0.2. Contours de Nyquist et de Bromwich

Pour pouvoir appliquer le critère de Nyquist par l'intermédiaire du principe de l'argument de Cauchy, il nous faut définir le contour orienté dans le plan p qui entoure la zone instable (c.a.d le demi-plan à partie réelle positive). Nous présentons deux types de contours le contour de Nyquist et ceux de Bromwich[9]
La figure 7.9 présente les contours classiques pour l'application du critère de Nyquist. Ces contours sont composés de tout l'axe des imaginaires, d'un demi cercle de rayon infini centré sur l'origine et dans le cas où $p = 0$ est un pôle ou un zéro de la fonction de transfert en boucle ouverte, le contour est également composé d'un cercle de rayon $r \to 0$ centré sur les pôles nuls.



(a) H_{BO} ne possède aucun pôle ou zéro

(b) 0 est un pôle ou zéro de H_{BO}

(c) 0, p_1 et p_2 sont des pôles ou zéros de H_{BO}

Figure 7.9. – (a) Contour de Nyquist et (b,c) contours de Bromwich.

Contour de Nyquist

La figure 7.9 (a) présente le contour de Nyquist. Celui-ci est composé de 3 portions :

- **I** : l'axe des imaginaires positifs pour laquelle $p = j\omega$ avec $\omega \in [0, \infty[$,
- **II** : un demi-cercle de rayon R entourant tout le demi-plan complexe de partie réelle positive et pour lequel $p = Re^{j\theta}$ avec $R \to \infty$ et $\theta \in [0, \pi/2]$,
- **III** : l'axe des imaginaires négatifs pour laquelle $p = -j\omega$ avec $\omega \in]-\infty, 0]$, symétrique de **I**

L'image de la portion **I** est donné par $H_{BO}(\mathbf{I}) = H_{BO}(j\omega)$, ce qui correspond au lieu de Nyquist pour $\omega \in [0, \infty[$. L'image de la portion **II** est l'origine du plan en

[9] Thomas John I'Anson Bromwich (1875-1929), mathématicien anglais.

0. L'image de la portion **III** peut être déterminé à partir de l'image de la portion **I** par symétrie par rapport à l'axe des réels[10].

Exemple

Déterminons l'image par le contour de Bromwich de la fonction de transfert suivante : $H_1(p) = \dfrac{1}{1+p}$

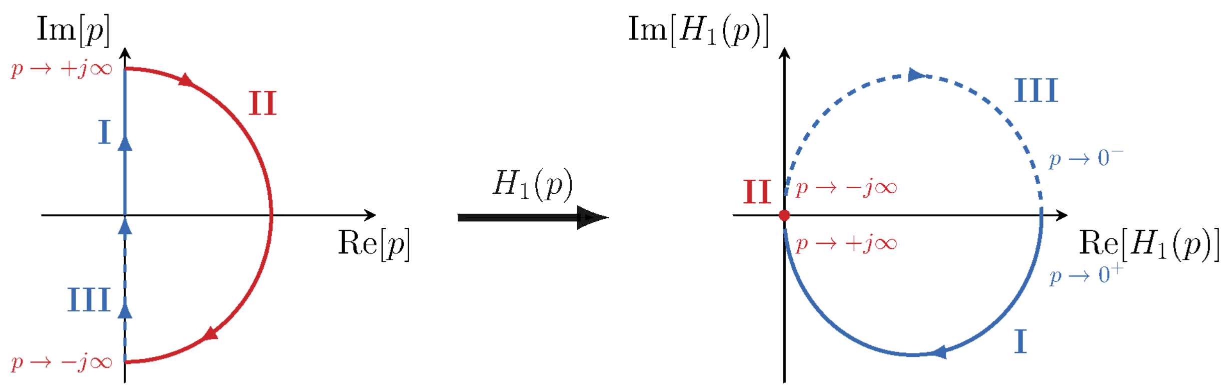


Figure 7.10. – Exemple de représentation d'un lieu complet de Nyquist d'une fonction de transfert $H_1(p)$ par l'image du contour de Nyquist.

Contour de Bromwich

La figure 7.9 (b) présente un contour de Bromwich dans le cas $p = 0$ est pôle de la fonction de transfert. Celui-ci est composé de 4 portions :

- **I** : l'axe des imaginaires positifs pour laquelle $p = j\omega$ avec $\omega \in [0, \infty[$,
- **II** : un demi cercle de rayon R entourant tout le demi-plan complexe de partie réelle positive et pour lequel $p = Re^{j\theta}$ avec $R \to \infty$ et $\theta \in [0, \pi/2]$,
- **III** : l'axe des imaginaires négatifs pour laquelle $p = -j\omega$ avec $\omega \in]-\infty, 0]$, symétrique de **I**
- **IV** : un demi cercle de rayon r contournant l'origine pour lequel $p = re^{j\theta}$ avec $r \to 0$ et $\omega \in]-\infty, 0]$.

[10] On notera en effet que $H_{BO}(-j\omega) = \mathrm{Re}[H_{BO}(j\omega)] - \mathrm{Im}[H_{BO}(j\omega)]$

Exemple

Déterminons l'image par le contour de Bromwich de la fonction de transfert suivante : $H_2(p) = \dfrac{1}{p(1+p)}$

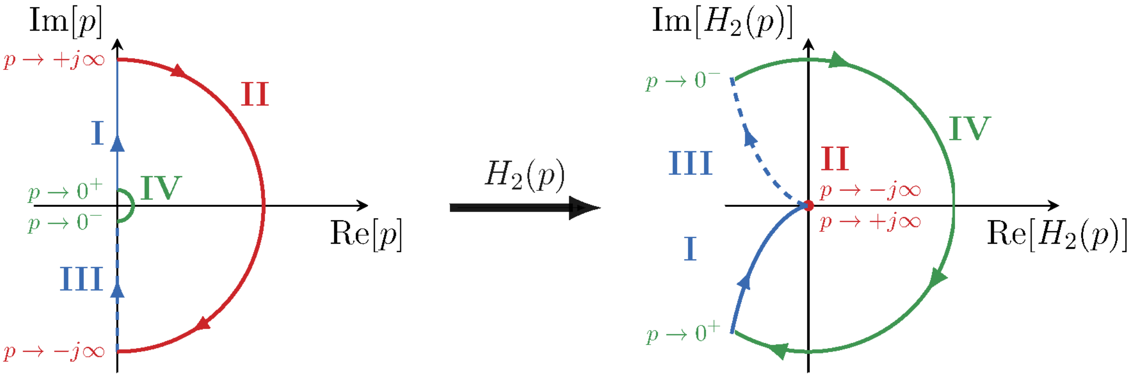


Figure 7.11. – Exemple de représentation d'un lieu complet de Nyquist d'une fonction de transfert $H_2(p)$ possédant un pôle nul par l'image du contour de Bromwich.

Annexes

A. Alphabet Grec

Nom	Minuscule	Majuscule	Correspondance latine	Usages courants
alpha	α	A	a	angles
bêta	β	B	b	angles
gamma	γ	Γ	g	angles
delta	δ	Δ	d	variations
epsilon	ϵ, ε	E	e	petite quantité
zéta	ζ	Z	z	-
êta	η	H	é (long)	rendement
thêta	θ, ϑ	Θ	th	angles
iota	ι	I	i	-
kappa	κ, $\varkappa$	K	k	-
lambda	λ	Λ	l	longueur, densité linéique
mu	μ	M	m	masse réduite
nu	ν	N	n	fréquence
ksi	ξ	Ξ	ks	coefficient sans dimension
omicron	o	O	o	-
pi	π, ϖ	Π	p	Π :plan
rhô	ρ, ϱ	P	r	densité volumique
sigma	σ, ς	Σ	s	σ : densité surfacique, Σ : Système
tau	τ	T	t	temps, durée relative
upsilon	υ	Υ	u	-
phi	ϕ, φ	Φ	f,ph	angles
khi	χ	X	kh	coefficients
psi	ψ	Ψ	ps	fonction d'onde
oméga	ω	Ω	ô	vitesse angulaire, angle solide

Tableau A.1. – Lettres de l'alphabet Grec et leurs usages courants en physique (non exhaustifs)

Références

[1] Régulation automatique (analogique) (REG). http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/.

[2] http://www.demosciences.fr/projets/scilab-xcos/-utilisation/premiers-pas.

[3] Xcos pour les vrais debutants. https://scilab.developpez.com/tutoriels/debuter/apprendre-xcos-debutant/.

[4] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes lineaires (pc7bis), 2005.

[5] B. Bayle and J. Gangloff. Systèmes et asservissements à temps continu, 2009.

[6] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier, and R. Nikoukhah. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. Springer, 2006.

[7] H. Garnier. http://w3.cran.univ-lorraine.fr/hugues.garnier/?q=content/teaching.

[8] Y. Granjon. *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, événements discrets*. Dunod, Paris, 2015.

[9] E. Laroche and H. Halalchi. Asservissement des systèmes lineaires à temps continu. http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student.

[10] O. Le Gallo. *Automatique des systèmes mécaniques : Cours, travaux pratiques et exercices corrigés*. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009.

[11] Joe Mabel. Régulateur à boules au Georgetown PowerPlant Museum à Seattle. CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5694146.

[12] B. Marx. Outils Mathématiques pour l'ingénieur - Traitement du Signal. http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html.

[13] B. Marx. Contrôle des systèmes linéaires. http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/-benoit.marx/enseignement.html.

[14] F. Orieux. *Automatique : Systèmes linéaires et asservissements*. Notes de Cours, Master 2 Outils et systèmes de l'astronomie et de l'Espace, 20017-1018.

[15] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses Marketing, 2004.

[16] R. Papanicola. Schéma-blocs avec PGF/TIKZ. https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/schema-bloc.pdf.

[17] R. Papanicola. *Sciences industrielles PCSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2003.

[18] R. Papanicola. *Sciences industrielles PSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2010.

[19] Marsyas-Travail personnel. Clepsydre athénienne reconstituée, Musée de l'Agora antique d'Athènes. CC BY-SA 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=476174.

[20] Consortium Scilab. Introduction to Scilab. www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf.

[21] S. Steer and Y. Degré. *Scilab : De la théorie à la pratique - II. Modéliser et simuler avec Xcos*. Éditions D-BookeR, 2014.

[22] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. *Automatique des systèmes continus*. Editions Technip.

[23] E. Thomas. TP Scilab. http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP_INFO/TP_info_12_ordre/co/module_TP_1_2_ordre_5.html.

Index

Acronymes

DES Décomposition en Éléments Simples

FTBF Fonction de Transfert en Boucle Fermée

FTBO Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

FTCD Fonction de Transfert de la Chaîne Directe

FTCR Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour

MEI Matière-Énergie-Information

MIMO Multiple Input Multiple Output

SISO Single Input Single Output

SLCI Système Linéaire Continu et Invariant

TL Transformée de Laplace

Glossaire

Asservissement	L'asservissment consiste à contrôler un système dynamique pour que sa réponse temporelle suive une consigne variable au cours du temps.
Régulation	La régulation est un particulier d'asservissement consistant à garder une consigne constante en présence de perturbation.

Liste des Symboles

t	Variable temporelle
p	Indéterminée de polynôme
$s(t)$	Fonction/Signal dans le domaine temporel
$S(p)$	Fonction/Signal dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$
$u(t)$	Fonction échelon unité ou de Heaviside
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
$r(t)$	Fonction rampe unité
$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$	Transformation de Laplace de la fonction $f(t)$
$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}$	Transformation de Laplace inverse de la fonction $F(p)$
$H(p)$	Fonction de transfert
$N(p)$	Polynôme du numérateur d'une fraction rationnelle
$D(p)$	Polynôme du dénominateur d'une fraction rationnelle
ω	Pulsation
$H(j\omega)$	Nombre complexe associé à la fonction de transfert $H(p)$
E_0	Paramètre dimensionnelle d'amplitude de l'entrée
K	Gain statique
ω_0	Pulsation propre

$\mathrm{Im}[H(j\omega)]$	Partie imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
$\mathrm{Re}[H(j\omega)]$	Partie réelle du nombre complexe $H(j\omega)$
ξ	Coefficient d'amortissement
$G(\omega)$	Gain naturel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$G_{dB}(\omega)$	Gain en dB de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$\phi(\omega)$	Déphasage de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
D_k	k-ème dépassement
$t_{5\%}$	Temps de réponse à 5%