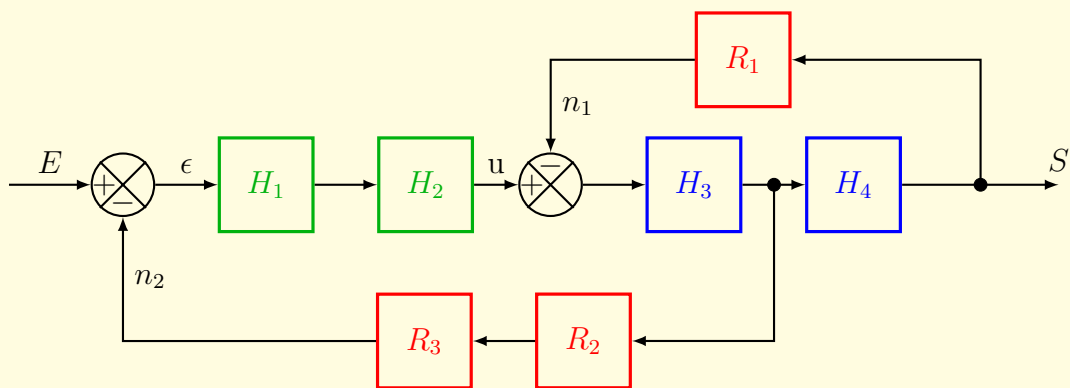


Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé
Automatique*



ANNÉE 2019–2020

Systèmes mécaniques et automatiques

*Notes de cours IngéSpé
Automatique*

Filipe Manuel Vasconcelos

écrit sous L^AT_EX, TikZ

v1.0 janvier 2018.

v2.0 été 2018.

v3.0 février-mai 2019.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence
Creative Commons “Attribution - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : filipe.vasconcelos@esme.fr

Table des matières

Table des matières	5
Avant-propos	9
Chapitre 1 Systèmes linéaires, continus...	11
1. Introduction	12
2. Définition SLCI	13
2.1. Système	13
2.2. Système à temps continu	14
2.3. Système linéaire	14
2.4. Système causal	14
2.5. Système invariant	15
2.6. Système stable	15
2.7. Modélisation d'un système linéaire continu et invariant . . .	15
3. Modélisation d'un signal	17
3.1. Propriétés générales des signaux continus (analogiques) . . .	18
3.2. Signaux usuels rencontrés...	20
4. La transformée de Laplace	27
4.1. Définition	27
4.2. Propriétés	28
4.3. Transformées des signaux usuels	31
4.4. Application de la transformée de Laplace	34
5. Fonction de Transfert	39
5.1. Définition	39
5.2. Fonction de transfert et réponse impulsionnelle	39
5.3. Représentation de la fonction de transfert	40
Chapitre 2 Schéma fonctionnels	45
1. Introduction	46
2. Éléments de base des schémas fonctionnels	46
3. Transformation des schémas fonctionnels	48
3.1. Réduction de schéma-bloc	48
3.2. Manipulation de schéma-bloc	51
4. Cas d'entrées multiples	52
5. Réduction de schéma-bloc de grande taille	54
5.1. Exemple à entrée simple	54

5.2.	Exemple à entrées multiples	56
6.	Graphe de fluence	57
6.1.	Définitions	57
6.2.	Algèbre des graphes de fluences	58
6.3.	Règle de Mason	62
Chapitre 3	Modélisation des SLCI	65
1.	Introduction	66
2.	Système du premier ordre	67
2.1.	Définition d'un système du premier ordre	67
2.2.	Fonction de transfert d'un système du premier ordre	67
2.3.	Pôle de la fonction de transfert du premier ordre	67
2.4.	Réponses temporelles d'un système du premier ordre	68
3.	Système du second ordre	73
3.1.	Définition d'un système du second ordre	73
3.2.	Fonction de transfert d'un système du second ordre	73
3.3.	Pôles de la fonction de transfert du second ordre	73
3.4.	Réponses temporelles d'un système du second ordre	74
3.5.	Cas particulier de l'oscillateur harmonique	89
4.	Autres modèles particuliers	91
4.1.	Gain pur	91
4.2.	Intégrateur pur	91
4.3.	Dérivateur pur	92
4.4.	Retard pur	93
5.	Généralisation des modèles de SLCI	94
5.1.	Systèmes d'ordre supérieur à 2	94
5.2.	Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3	95
5.3.	Notion de pôles dominants	96
6.	Identification d'un modèle de comportement	97
6.1.	Formule de Bureau	97
6.2.	Modèle de Strejc	97
Chapitre 4	Analyse fréquentielle	97
1.	Réponse harmonique	98
1.1.	Exemple de réponse harmonique dans le domaine temporel	100
2.	Représentation graphique de la réponse harmonique	102
2.1.	Diagramme de Bode	102
2.2.	Diagramme de Nyquist	103
2.3.	Diagramme de Black-Nichols	104
3.	Analyse fréquentielle des modèles usuels	105
3.1.	Diagrammes de Bode : méthodologie générale	105
3.2.	Diagrammes de Nyquist : méthodologie générale	124

3.3.	Diagrammes de Black : méthodologie générale	133
4.	Etude du transitoire de la réponse harmonique	133
4.1.	Exemple d'un système du premier ordre	134
4.2.	Exemple d'un système du second ordre	134
Chapitre 5	Asservissements des systèmes linéaires	135
1.	Introduction	136
2.	Organisation d'un asservissement	138
2.1.	Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis	138
2.2.	Fonctions de transferts associées à un système asservi	140
3.	Asservissement des SLCI modèles	141
3.1.	Asservissement d'un intégrateur	141
3.2.	Asservissement d'un système du premier ordre	142
3.3.	Asservissement d'un système du second ordre	143
Chapitre 6	Précision et rapidité des systèmes asservis	145
1.	Introduction	146
2.	Définitions de la précision	146
2.1.	Précision en boucle ouverte	146
2.2.	Précision en boucle fermée	147
2.3.	Effet d'une perturbation	150
Chapitre 7	Stabilité des systèmes asservis	151
1.	Contexte et critère de stabilité fondamentale	152
1.1.	Critère algébrique de Routh	154
1.2.	Critère graphique du revers	159
1.3.	Critère de Nyquist	165
Chapitre 8	Correction des systèmes asservis	171
Chapitre 9	Initiation à la représentation d'état	173
Annexes		177
Annexe A	Alphabet Grec	177
Annexe B	Unités du Système International	179
Annexe C	Pierre-Simon de Laplace	181
Annexe D	Transformation de Laplace	183
1.	Définitions	183
2.	Propriétés	183
3.	Table des transformées de Laplace	186
Annexe E	Rappel sur les nombres complexes	189
Annexe F	Équations différentielles à coefficients constants	195
1.	Résolution équation différentielle du premier ordre	195
1.1.	Sans second membre	196
Annexe G	Décomposition en éléments simples	199
1.	Contexte	199

2.	Fractions rationnelles rencontrées en automatique	199
3.	Décomposition en éléments simples	200
4.	Détermination des coefficients de la DES	201
4.1.	Par identification	201
Annexe H	Systèmes du second ordre	203
1.	Abaques	204
2.	Réponses temporelles	205
3.	Analyse fréquentielle	207
Annexe I	Initiation à Scilab	209
1.	Présentation générale	209
2.	Syntaxe : console	210
3.	Polynômes et fractions rationnelles	211
4.	Vecteurs et matrices	214
5.	Tracer de figures	217
6.	Programmation	218
7.	SLCI avec Scilab	220
7.1.	Définition d'un système linéaire	220
7.2.	Simulation temporelle d'un système linéaire	221
7.3.	Système du premier ordre	222
7.4.	Carte des pôles et zéros	225
7.5.	Asservissement	225
8.	Scilab-Xcos	226
8.1.	Lancer Xcos	226
8.2.	Diagramme simple	226
8.3.	Simulation	227
8.4.	Blocs « To Workspace » ou « From Workspace »	227
Annexe J	Échelle logarithmique et le décibel	229
1.	Rappel sur le logarithme décimal	229
2.	Échelle logarithmique décimale	230
3.	Le décibel	231
4.	Diagramme de Bode	231
5.	Tracé d'un diagramme de Bode avec Scilab	234
Annexe K	Transformée de Laplace inverse	235
1.	Contexte	235
2.	Méthode de Gaver-Stehfest	235
3.	Méthode de Talbot fixe	235
	Références	237
	Index	239
	Liste des Symboles	241

Avant-propos

Programme

Ce cours est une introduction à l'**automatique** pour des étudiants de deuxième année de classe préparatoire scientifique.

L'objectif principal de l'automatique est de permettre le contrôle des **systèmes dynamiques** de toutes natures que ce soient : mécanique, chimique, électronique, optique, thermique, acoustique... Tout en respectant certaines contraintes de performances (rapidité, précision, stabilité...).

Nous limiterons notre étude aux **systèmes linéaires continus et invariants**.

La **modélisation** de ces systèmes passe par la mise en équation du comportement physique des systèmes sous forme d'équations différentielles. Cette étape ne fait pas à proprement parler partie d'un cours d'automatique, en effet chacune des disciplines construisent cette modélisation en se basant sur les principes et les hypothèses les plus adaptés à un problème donné. La modélisation permet une étude systématique des équations différentielles en proposant des modèles généraux et ce quelque soit la nature du procédé.

L'**analyse** nous permettra de caractériser et d'identifier ces modèles à partir des réponses aux sollicitations et de leurs performances.

Le **contrôle** est un concept très générale permettant de regrouper toutes les méthodes et techniques permettant de commander un système dynamique. Dans ce cours nous présenterons que les principes d'asservissement et de régulation. Nous verrons comment il est possible d'élaborer une commande adaptée (corrigée) pour un procédé quelconque, notamment lorsque ceux-ci présenterons des défauts de performance.

Organisation du document

Les chapitres suivent un découpage classique autour des trois piliers discutés précédemment que sont la **modélisation**, l'**analyse** et le **contrôle**. (c.f **Figure A**).

Le lecteur pourra s'appuyer sur un grand nombre d'annexes qui ont pour objectifs de rappeler et de détailler des notions prérequis ou encore approfondir quelques aspects hors programme pour une deuxième lecture.

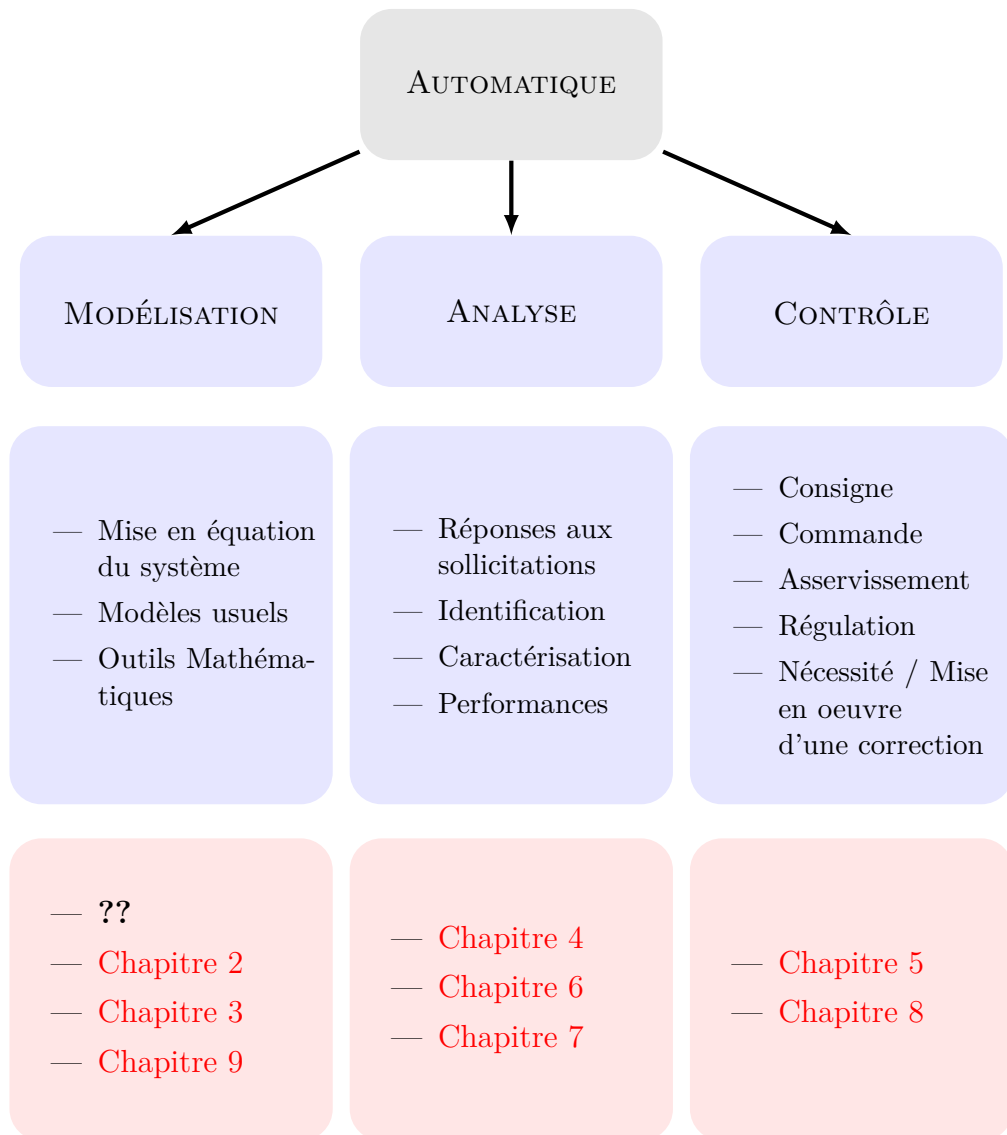


Figure A. – Organisation du document.

3. Modélisation des SLCI et leurs réponses temporelles

Sommaire

1. Introduction	66
2. Système du premier ordre	67
2.1. Définition d'un système du premier ordre	67
2.2. Fonction de transfert d'un système du premier ordre	67
2.3. Pôle de la fonction de transfert du premier ordre	67
2.4. Réponses temporelles d'un système du premier ordre	68
3. Système du second ordre	73
3.1. Définition d'un système du second ordre	73
3.2. Fonction de transfert d'un système du second ordre	73
3.3. Pôles de la fonction de transfert du second ordre	73
3.4. Réponses temporelles d'un système du second ordre	74
3.5. Cas particulier de l'oscillateur harmonique	89
4. Autres modèles particuliers	91
4.1. Gain pur	91
4.2. Intégrateur pur	91
4.3. Dérivateur pur	92
4.4. Retard pur	93
5. Généralisation des modèles de SLCI	94
5.1. Systèmes d'ordre supérieur à 2	94
5.2. Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3	95
5.3. Notion de pôles dominants	96
6. Identification d'un modèle de comportement	97
6.1. Formule de Bureau	97
6.2. Modèle de Strejc	97

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier la réponse temporelle de différents systèmes modèles. Ces modèles sont

- les systèmes du **premier ordre**,
- les systèmes du **second ordre**,
- les systèmes gain, intégrateur, dérivateur et retard purs.

Ces modèles reflètent les différentes équations différentielles et systèmes physiques généralement rencontrés dans la nature. Les deux plus importants sont les systèmes du premier et second ordre qui sont pour cette raison examinés en détail. Nous généraliserons aux systèmes d'ordre supérieur en montrant que toute fonction de transferts peut se factoriser en un produit de ces systèmes modèles.

Nous suivrons la même présentation pour tous les modèles : nous donnerons d'abord l'équation différentielle régissant le système, puis sa fonction de transfert ainsi que ses pôles, avant de déterminer analytiquement les différentes réponses temporelles : i impulsionnelle, indicielle et la réponse à une rampe. Le principal objectif de cette étude est d'établir les caractéristiques de ces modèles à partir de leurs réponses temporelles.

2. Système du premier ordre

2.1. Définition d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre est un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficient constant du premier ordre (i.e $n = 1$ pour l'équation (1.1)), de la forme générale :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (3.1)$$

où K est le gain statique et $\tau > 0$ la constante de temps du système. La condition sur le signe de τ sera discutée au moment de l'établissement des réponses temporelles. L'analyse dimensionnelle de cette équation différentielle, nous permet de confirmer que τ a la dimension d'un temps, mais surtout que la dimension du gain statique est donnée par le rapport des dimensions de la sortie sur l'entrée. Autrement dit, c'est un paramètre sans dimension c'est l'entrée et la sortie sont de même nature.

2.2. Fonction de transfert d'un système du premier ordre

La transformée de Laplace de l'équation (3.1), dans les conditions de Heaviside, nous donne :

$$\tau pS(p) + S(p) = KE(p)$$

La fonction de transfert $H(p)$ d'un système du premier ordre est donc de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\tau p + 1} \quad (3.2)$$

2.3. Pôle de la fonction de transfert du premier ordre

Un système du premier ordre ne possède qu'un seul pôle qui est trivialement déterminé par la résolution de l'équation :

$$\tau p + 1 = 0$$

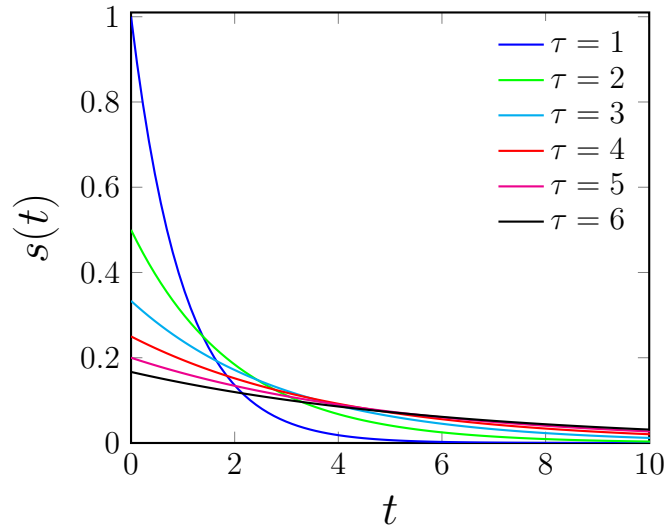


Figure 3.1. – Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre pour différentes valeurs de la constante de temps τ (Équation (3.3)) avec $K = 1$ et $E_0 = 1$.

ce pôle $p_1 = -\frac{1}{\tau}$ est donc réel négatif pour $\tau > 0$. La fonction de transfert d'un système du premier peut alors s'écrire sous la forme factorisée suivante

$$H(p) = \frac{K}{(p - p_1)} = \frac{K}{\tau \left(p + \frac{1}{\tau} \right)}.$$

2.4. Réponses temporelles d'un système du premier ordre

Nous allons maintenant établir les réponses temporelles d'un système du premier ordre aux signaux usuels présentés au chapitre ??.

2.4.1. Réponse impulsionnelle

Nous considérons une excitation impulsionnelle de la forme :

$$e(t) = E_0 \delta(t),$$

où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac et E_0 est une constante.

La réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre est, dans le domaine de

	$t = 0.5\tau$	$t = \tau$	$t = 3\tau$	$t = 7\tau$
$\frac{s(t)}{KE_0}$	0.606	0.368	0.05	~ 0

Tableau 3.1. – Quelques valeurs particulières de la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

Laplace, de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{(\tau p + 1)}.$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 7 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = \frac{KE_0}{\tau}e^{-t/\tau}. \quad (3.3)$$

Cette réponse correspond à une simple exponentielle décroissante pour $\tau > 0$. La [figure 3.1](#) présente la réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre pour différentes valeurs de la constante de temps τ . On observe que pour $t \rightarrow \infty$, la valeur de $s(t)$ tend vers 0, ce qui est caractéristique d'un système stable. Nous pouvons donc considérer que τ est strictement positif pour une question de stabilité.

Il est également possible d'observer que la pente à l'origine dépend de la constante de temps. La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle $s(t)$

$$s'(0) = -\frac{KE_0}{\tau^2}$$

La pente à l'origine est négative et inversement proportionnelle au carré de la constante de temps du système τ .

Le [tableau 3.1](#) donne quelques valeurs particulières de la réponse impulsionnelle. D'après celui-ci, on constate que le temps $t_{5\%}$ de réponse à 5% est de l'ordre de 3τ (i.e $-\log 5\%$). Le transitoire est lui de l'ordre de 7τ (c'est à dire le temps à partir duquel on considère que le signal est nul).

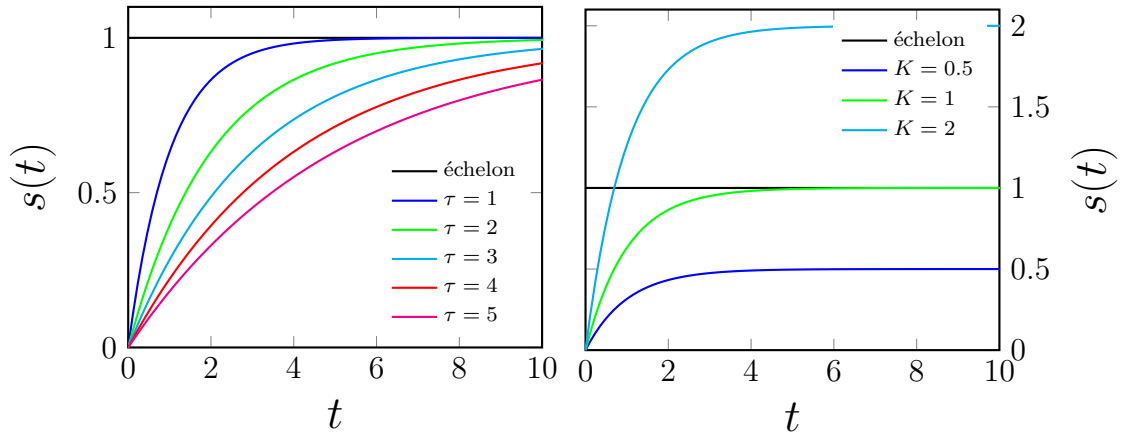


Figure 3.2. – Réponse indicielle d'un système du premier ordre avec $E_0 = 1$. (gauche) Pour différentes valeurs de τ et avec $K = 1$. (droite) Pour différentes valeurs du gain K et avec $\tau = 1$.

2.4.2. Réponse indicielle

Pour déterminer la réponse indicielle, nous considérons une entrée $e(t)$ en échelon telle que :

$$e(t) = E_0 \cdot u(t),$$

où $u(t)$ est l'échelon unitaire et E_0 est une constante.

Dans le domaine de Laplace la sortie est donc de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{p(1 + \tau p)} = \frac{KE_0}{\tau p(p + \frac{1}{\tau})}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 11 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = KE_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.4)$$

La [figure 3.2](#) présente cette réponse indicielle pour différentes valeurs de la constante de temps τ . Pour $t \rightarrow \infty$, la valeur de $s(t)$ tend vers KE_0 . La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle $s(t)$

$$s'(0) = \frac{KE_0}{\tau}$$

La pente à l'origine est positive et inversement proportionnelle à la constante de temps du système.

	$t = 0.5\tau$	$t = \tau$	$t = 3\tau$	$t = 7\tau$
$\frac{s(t)}{KE_0}$	0.393	0.632	0.950	0.999

Tableau 3.2. – Quelques valeurs particulières de la réponse indicielle d'un système du premier ordre.

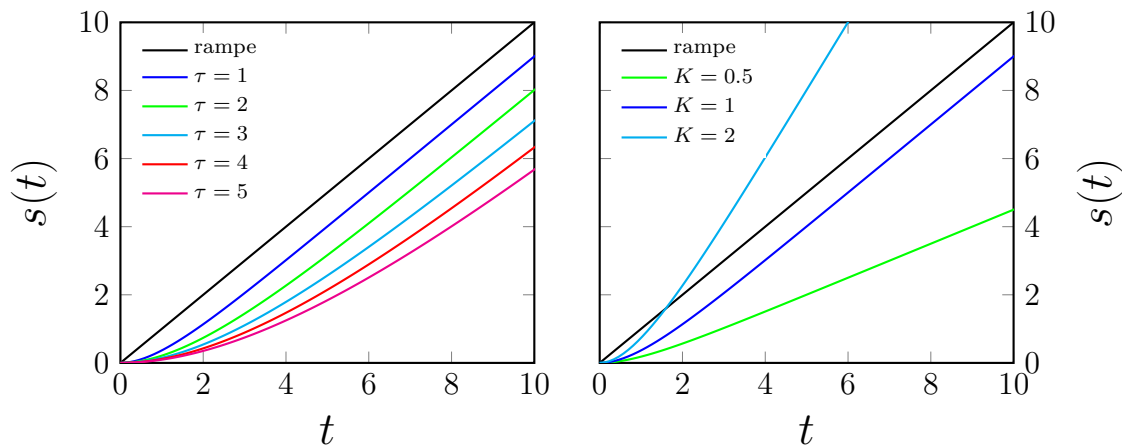


Figure 3.3. – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre avec $E_0 = 1$. (gauche) Pour différentes valeurs de τ et $K = 1$ (droite) Pour différentes valeurs du gain K et $\tau = 1$.

Le [tableau 3.2](#) donne quelques valeurs particulières de la réponse indicielle. D'après celui-ci, on constate que le temps de réponse à 5% $t_{5\%}$ (temps au bout duquel la réponse indicielle atteint 95% du signal final) est donné par :

$$t_{5\%} = -\tau \log 0.05 \sim 3\tau.$$

Le temps de montée t_m (temps au bout duquel la réponse de 10% à 90% du signal final) est donné par :

$$t_m = -\tau \log \frac{0.1}{0.9} \sim 2.2\tau$$

2.4.3. Réponse à une rampe

Nous considérons maintenant une excitation rampe de la forme :

$$e(t) = E_0 \cdot r(t) = E_0 t \cdot u(t)$$

où E_0 est une constante, $r(t)$ est la fonction rampe unitaire et $u(t)$ la fonction La réponse à une rampe d'un système du premier ordre est, dans le domaine de Laplace, de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{p^2(1 + \tau p)}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 12 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse à une rampe d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = KE_0 \left(t - \tau(1 - e^{-t/\tau}) \right) \quad (3.5)$$

La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle $s(t)$. On constate alors que $s'(0) = 0$ quelque soit τ . À la limite $t \rightarrow \infty$ la réponse à une rampe tend vers $t - \tau$.

3. Système du second ordre

3.1. Définition d'un système du second ordre

Un système du second ordre est un système régit par une équation différentielle du second ordre de forme générale :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

où $\xi > 0$ est le coefficient d'amortissement, K le gain statique et $\omega_0 > 0$ la pulsation propre du système. Cette pulsation est celle de l'oscillateur harmonique équivalent sans amortissement ($\xi = 0$).

3.2. Fonction de transfert d'un système du second ordre

La transformée de Laplace de l'équation différentielle est, lorsque les CI sont toutes nulles :

$$S(p) (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2) = K\omega_0^2 E(p).$$

La fonction de transfert $H(p)$ de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (3.6)$$

La forme suivante, pour laquelle on a factorisée par ω_0^2 , est également très courante :

$$H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1}$$

3.3. Pôles de la fonction de transfert du second ordre

Les pôles de la fonction de transfert sont donnés par les racines du polynôme :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$$

Les racines de ce polynôme dépendent donc du signe de Δ et ainsi de la valeur du taux d'amortissement ξ définissant les différents régimes d'un système du second ordre :

- Régime apériodique pour $\xi > 1$
- Régime apériodique critique pour $\xi = 1$
- Régime pseudo-périodique pour $0 < \xi < 1$

à noter que le cas $\xi = 0$ correspond à un régime périodique associé à l'oscillateur harmonique au cas de l'oscillateur harmonique. Le cas $\xi < 0$ correspond à un cas divergent par définition (instable) et ne sera donc pas traité.

Le [tableau 3.3](#) résume les différents types de pôles rencontrés dans les différents régimes du système du second ordre.

Quelque soit le régime du système du second ordre, on peut écrire la fonction de transfert de la façon suivante en utilisant les pôles appropriés :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Nous remarquerons également que le produit $p_1 p_2 = \omega_0^2$ quelque soit le régime du système, cette relation nous sera très utile pour l'établissement des réponses temporelles des différents régimes.

3.4. Réponses temporelles d'un système du second ordre

Nous allons ici, comme dans le cas des systèmes du premier ordre données les formes analytiques des réponses temporelles (impulsionnelle, indicielle et rampe) des systèmes du second ordre. On trouvera les représentations graphiques de ces réponses temporelles à l'[Annexe H](#).

3.4.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

où $E(p) = 1$ dans le cas d'une impulsion de Dirac unitaire¹.

Étudions la forme analytique des réponses impulsionnelles dans les différents régimes du système du second ordre. Nous rappelons que l'étude de la réponse impulsionnelle revient à étudier la fonction de transfert du système.

¹Nous avons ici posé $E_0 = 1$ pour alléger la notation.

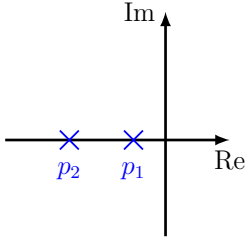
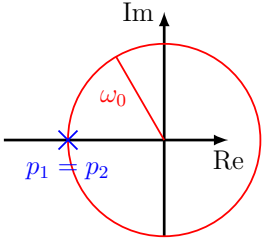
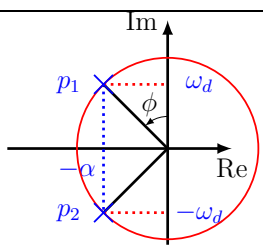
Régime	Pôles	Carte des pôles
Régime apériodique $\xi > 1$	Deux pôles réels $p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$	
Régime apériodique critique $\xi = 1$	Un pôle double réel $p_1 = p_2 = -\omega_0$	
Régime pseudo-périodique $0 < \xi < 1$	Deux pôles complexes conjugués $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ avec $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$	

Tableau 3.3. – Pôles de la fonction de transfert d'un système du second ordre selon le régime associé à l'amortissement.

Dans le cas $\xi > 1$ (régime apériodique),

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

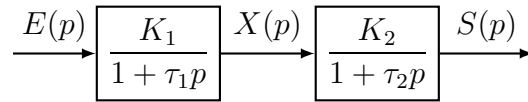
La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 16 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime apériodique :

$$s(t) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (3.7)$$

les exponentielles étant sans unité, les pôles sont d'unité d'inverse d'un temps, posons donc $p_1 = -1/\tau_1$ et $p_2 = -1/\tau_2$, la réponse devient :

$$s(t) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (3.8)$$

les paramètres τ_1 et τ_2 peuvent être considérés comme les constante de temps de deux systèmes du premier ordre fictifs placés en série :



où $K_1 K_2 = K$. Dans le régime apériodique un système du second ordre sera toujours considéré comme la mise en cascade de deux systèmes du premier ordre.

Dans le cas $\xi = 1$ (régime apériodique critique),

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 8 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime apériodique critique :

$$s(t) = K\omega_0^2 t e^{p_1 t} \quad (3.9)$$

posons $p_1 = -1/\tau$, la réponse devient :

$$s(t) = K\omega_0^2 t e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.10)$$

Dans le cas $0 < \xi < 1$ (régime pseudo-périodique),

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{\omega_0^2}{(p+\xi\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-\xi^2})(p+\xi\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-\xi^2})}$$

en posant $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$, la sortie $S(p)$ devient :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p+\alpha-j\omega_d)(p+\alpha+j\omega_d)} = \frac{K\omega_0^2}{(p+\alpha)^2+\omega_d^2} = \frac{K\omega_d}{1-\xi^2} \cdot \frac{\omega_d}{(p+\alpha)^2+\omega_d^2}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 30 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique :

$$s(t) = \frac{K\omega_d}{1-\xi^2} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_d t \quad (3.11)$$

3.4.2. Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

où $E(p) = \frac{E_0}{p}$ est une entrée échelon.

Étudions la forme analytique des réponses indicielles dans les différents régimes du système du second ordre.

Dans le cas $\xi > 1$ (régime apériodique),

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 19 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique :

$$s(t) = KE_0 \left(1 + \frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right) \quad (3.12)$$

posons $p_1 = -1/\tau_1$ et $p_2 = -1/\tau_2$, la réponse devient :

$$s(t) = KE_0 \left(1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \right) \quad (3.13)$$

Nous pouvons à nouveau envisager cette réponse comme la réponse de deux systèmes du premier ordre en série.

Dans le cas $\xi = 1$ (régime apériodique critique),

la sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 14 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique critique :

$$s(t) = \frac{KE_0\omega_0^2}{p_1^2} \left(1 - (1 - p_1 t) e^{p_1 t} \right)$$

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{p_1 t} + p_1 t e^{p_1 t} \right) \quad (3.14)$$

en posant $p_1 = -\frac{1}{\tau}$, on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (3.15)$$

Dans le cas $0 < \xi < 1$ (régime pseudo-périodique),

la sortie $S(p)$ dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

où l'on a posé $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$.

Décomposons $S(p)$ en éléments simples,

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B(p + \alpha) + C}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

procédons par évaluation pour A :

$$A = pS(p) \Big|_{p=0} = \frac{KE_0\omega_0^2}{\alpha^2 + \omega_d^2} = KE_0$$

et identification pour B et C :

$$\begin{aligned} & KE_0((p + \alpha)^2 + \omega_d^2) + Bp^2 + \alpha Bp + Cp = KE_0\omega_0^2 \\ \iff & KE_0p^2 + 2KE_0\alpha p + KE_0(\alpha^2 + \omega_d^2) + Bp^2 + \alpha Bp + Cp = KE_0\omega_0^2 \\ \iff & \begin{cases} B + KE_0 = 0 \\ 2KE_0\alpha + \alpha B + C = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} B = -KE_0 \\ C = -KE_0\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= KE_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} - \frac{\alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right) \\ S(p) &= KE_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_d}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right) \end{aligned}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f lignes 3, 30 et 31 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous permet de déterminer la réponse indicielle :

$$\begin{aligned} s(t) &= KE_0 \left(1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) \right) \\ s(t) &= KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\alpha t} \left(\sqrt{1 - \xi^2} \cos(\omega_d t) + \xi \sin(\omega_d t) \right) \right) \end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \xi \\ \sin \phi &= \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

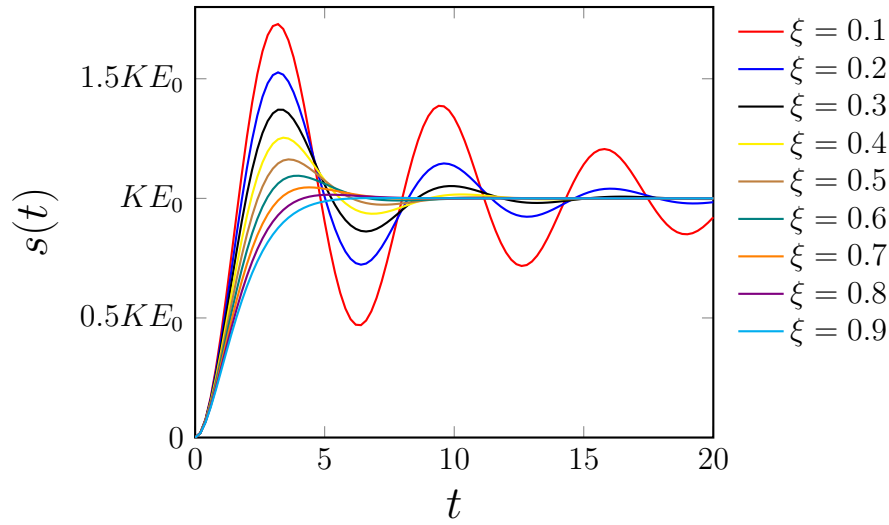


Figure 3.4. – Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique pour différentes valeurs du taux d'amortissement ξ (? ?Équation (3.5)) avec $\omega_0 = 1$.

on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha t} (\sin \phi \cos(\omega_d t) + \cos \phi \sin(\omega_d t)) \right)$$

et enfin la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique s'écrit :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \right) \quad (3.16)$$

Il est maintenant possible d'interpréter les différentes grandeurs introduites. En effet, cette réponse a la forme d'une sinusoïde de pulsation ω_d (dite pseudo-pulsation), de phase ϕ et amortie par une exponentielle décroissante dépendant de ξ . La figure 3.4 présente cette réponse indicielle du régime pseudo-périodique pour différentes valeurs du taux d'amortissement pour une pulsation propre $\omega_0 = 1$. Nous constatons que comme attendu, l'amplitude des oscillations augmente lorsque le taux d'amortissement diminue.

Dépassement et temps de réponse à 5%

Certaines propriétés de la réponse indicielle dans le régime pseudo-périodique sont fortement dépendantes du taux d'amortissement. C'est le cas du dépassement et du temps de réponse. La [figure 3.5](#) présente la réponse à un échelon unitaire pour un amortissement de $\xi = 0.2$, on observe que les dépassements successifs sont de moins en moins importants. Pour déterminer la relation entre le dépassement et le taux d'amortissement, il nous faut d'abord déterminer le temps du premier maximum t_1 .

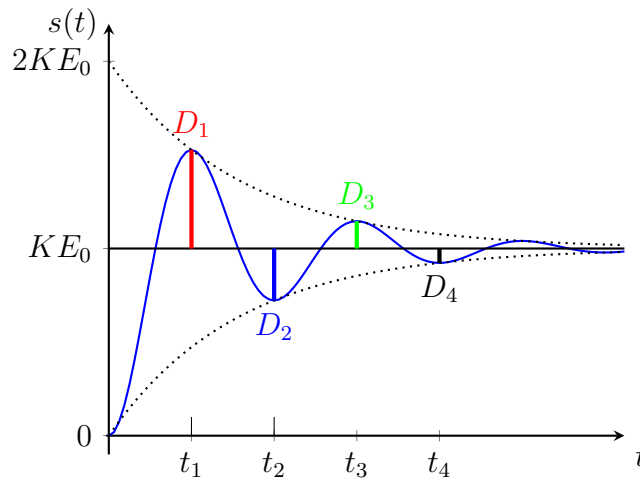


Figure 3.5. – Définition du dépassement observé dans le cas de la réponse indicielle en régime pseudo-périodique d'un système du second ordre. Les deux enveloppes correspondent aux exponentielles décroissantes $1 + e^{-\alpha t}$ et $1 - e^{-\alpha t}$.

Pour cela il suffit de déterminer le temps pour lequel la dérivée du signal $s(t)$ s'annule. On calcul alors un temps t_1 à $T_d/2$ où T_d est la pseudo-période défini à partir de la pseudo-pulsation ω_d . On a alors :

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Formellement, le premier dépassement est défini par :

$$D_1 = \left| \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)} \right|$$

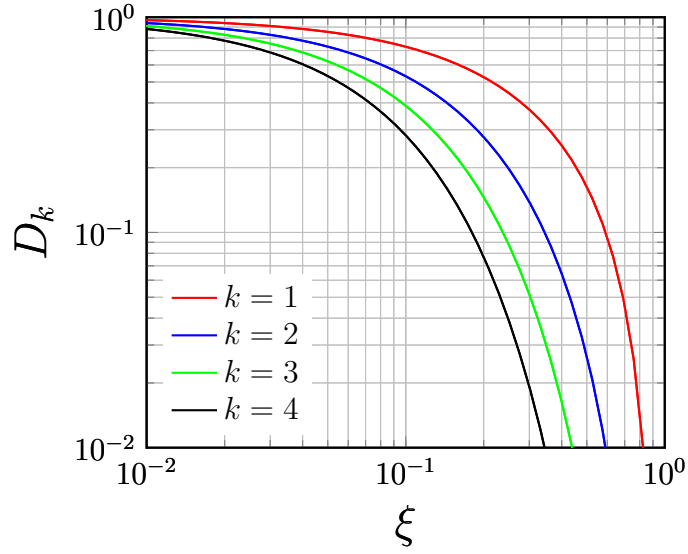


Figure 3.6. – Variation de la valeur D_k du k -ème dépassement en fonction du taux d'amortissement ξ .

où $s(0)$, $s(\infty)$ et $s(t_1)$ sont respectivement la valeur initiale, la valeur finale et la valeur du premier maximum du signal.

La valeur $s(t_1)$ s'obtient en remplaçant la valeur de t_1 dans la forme analytique de la réponse indicielle du régime pseudo-périodique (Équation (3.16)) :

$$\begin{aligned} s(t_1) &= KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha t_1} \sin(\omega_d t_1 + \phi) \right) \\ s(t_1) &= KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha \pi / \omega_d} \sin(\pi + \phi) \right) \\ s(t_1) &= KE_0 (1 + e^{-\alpha \pi / \omega_d}) \end{aligned}$$

Le dépassement est donc donné par l'expression :

$$D = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3.17)$$

et le k -ème dépassement D_k est lui donné par :

$$D_k = e^{-\frac{k \xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3.18)$$

La [figure 3.6](#) présente cette relation entre le dépassement et le taux d'amortissement. Il est possible d'utiliser cette figure comme un abaque² facilitant le calcul du dépassement connaissant le taux d'amortissement et inversement.

Il n'existe pas de relation analytique simple pour déterminer le temps de réponse à 5% (c.f définition donnée par la [figure 3.7](#)) en fonction du taux d'amortissement. Nous avons alors procédé par une méthode numérique, qui pourra constituer un exercice de travaux pratiques sous Scilab ([Annexe I](#)). La [figure 3.8](#) présente la variation du temps de réponse à 5% réduit à la pulsation (i.e $\omega_0 \cdot t_{5\%}$) en fonction du taux d'amortissement ξ . On observe un minimum du temps de réponse pour $\xi \sim 0.7$

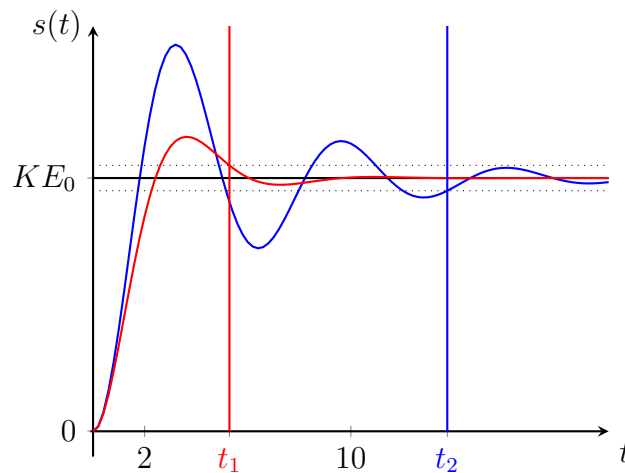


Figure 3.7. – Définition du temps de réponse à 5% dans le cas de la réponse indicielle en régime pseudo-périodique d'un système du second ordre. Le temps de réponse à 5% est défini comme le temps minimal pour que le signal soit compris dans une bande à $\pm 5\%$ autour de la valeur finale. Réponse indicielle pour (bleu) $\xi = 0.2$ et (rouge) $\xi = 0.5$.

²Les abaques sont très répandus en automatique. Ils permettent de s'affranchir de nombreux claculs en lisant des valeurs directement sur un graphique.

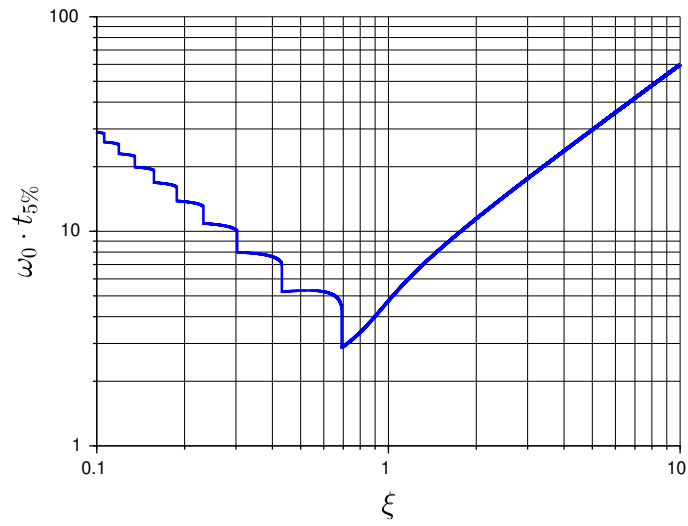
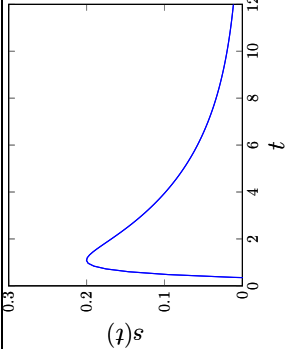
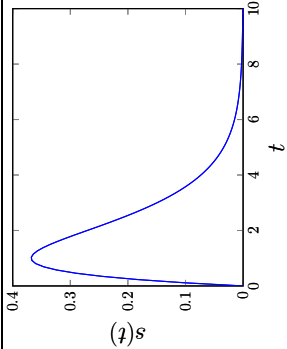
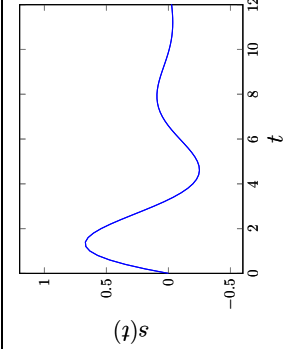
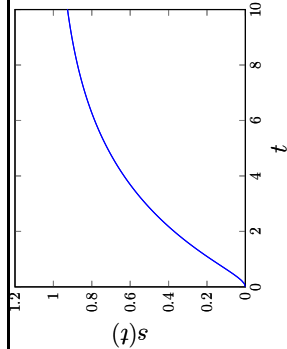
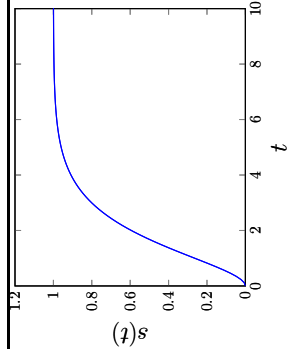
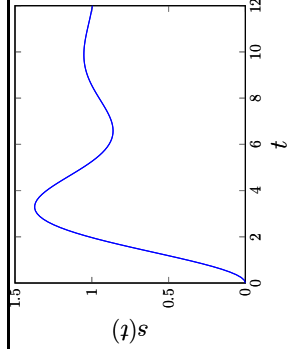


Figure 3.8. – Temps de réponse à 5% réduit en fonction du taux d'amortissement ξ . Le minimum est atteint pour $\xi \sim 0.7$ pour lequel $\omega_0 \cdot t_{5\%} \sim 3$.

Tableau 3.4. – Formes caractéristiques des réponses temporelles d'un système du second ordre pour les différents régimes.

Réponse	Régime apériodique ($\xi > 1$)	Régime critique ($\xi = 1$)	Régime pseudo-périodique ($0 < \xi < 1$)
Réponse impulsionnelle	 $s(t) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$	 $s(t) = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	 $s(t) = \frac{\omega_d}{1 - \xi^2} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_d t$
Réponse indicielle	 $s(t) = 1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$	 $s(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$	 $s(t) = 1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \phi)$
Paramètres : (pour tous) $K = 1$, $E_0 = 1$ (apériodique) $\xi = 2$, $\omega_0 = 1$ (i.e $\tau_1 = 3.73$ et $\tau_2 = 0.26$) (critique) $\xi = 1$, $\omega_0 = 1$ (i.e $\tau = 1$) (pseudo-périodique) $\xi = 0.3$ et $\omega_0 = 1$			

3.4.3. Réponse à une rampe

La réponse à une rampe d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

où $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$ est un signal rampe. Étudions la forme analytique des réponses à une rampe dans les différents régimes du système du second ordre.

Dans le cas $\xi > 1$ (régime apériodique),

écrivons la sortie $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

la décomposition en éléments simples de $S(p)$ s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p - p_1} + \frac{D}{p - p_2}.$$

Procédons par évaluation pour obtenir les coefficients B , C et D :

$$\begin{aligned} B &= p^2 S(p) \Big|_{p=0} = K E_0, \\ C &= (p - p_1) S(p) \Big|_{p=p_1} = \frac{K E_0 \omega_0^2}{p_1^2 (p_1 - p_2)} = \frac{K E_0 p_2^2}{\omega_0^2 (p_1 - p_2)}, \\ D &= (p - p_2) S(p) \Big|_{p=p_2} = \frac{K E_0 \omega_0^2}{p_2^2 (p_2 - p_1)} = \frac{-K E_0 p_1^2}{\omega_0^2 (p_1 - p_2)}, \end{aligned}$$

et par indentation pour A :

$$A = K E_0 \frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2}$$

la sortie $S(p)$ devient alors :

$$S(p) = K E_0 \left(\frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{\omega_0^2 (p_1 - p_2)} \left(\frac{p_2^2}{p - p_1} - \frac{p_1^2}{p - p_2} \right) \right)$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f lignes 4 et 7 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime apériodique :

$$s(t) = KE_0 \left(t + \frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2(p_1 - p_2)} (p_2^2 e^{p_1 t} - p_1^2 e^{p_2 t}) \right) \quad (3.19)$$

posons $p_1 = -1/\tau_1$ et $p_2 = -1/\tau_2$, la réponse devient :

$$s(t) = KE_0 \left(t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)} \left(\tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right) \quad (3.20)$$

Dans le cas $\xi = 1$ (régime apériodique critique),

écrivons la sortie $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2} \cdot \frac{E_0}{p^2}.$$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(p - p_1)} + \frac{D}{(p - p_1)^2}.$$

Procédons par évaluation pour obtenir les coefficients B et D :

$$\begin{aligned} B &= p^2 S(p) \Big|_{p=0} = KE_0, \\ D &= (p - p_1)^2 S(p) \Big|_{p=p_1} = KE_0, \end{aligned}$$

par identification on obtient :

$$A = KE_0 \frac{2}{p_1}$$

et en utilisant la parité de la fonction $C = -A$.

La sortie $S(p)$ devient alors :

$$S(p) = KE_0 \left(\frac{2}{p_1} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p_1} \cdot \frac{1}{(p - p_1)} + \frac{1}{(p - p_1)^2} \right)$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f lignes 3, 4, 7 et 8 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime apériodique critique :

$$s(t) = KE_0 \left(\frac{2}{p_1} + t - \frac{2}{p_1} e^{p_1 t} + t e^{p_1 t} \right) \quad (3.21)$$

posons $p_1 = -1/\tau$, la réponse devient :

$$s(t) = KE_0(t - 2\tau + (t + 2\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.22)$$

Dans le cas $0 < \xi < 1$ (régime pseudo-périodique),

écrivons la sortie $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \cdot \frac{E_0}{p^2},$$

où, rappelons que $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$.

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C(p + \alpha) + D}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2}.$$

Procédons par évaluation pour obtenir le coefficient B :

$$B = p^2 S(p) \Big|_{p=0} = \frac{KE_0\omega_0^2}{\alpha^2 + \omega_d^2} = KE_0,$$

où $\alpha^2 + \omega_d^2 = \omega_0^2$ par définition.

Par identification du numérateur, on obtient les relations suivantes sur les coefficients :

$$\begin{cases} p^3 : & A + C = 0 \\ p^2 : & B + 2A\alpha + C\alpha + D = 0 \\ p^1 : & 2B\alpha + A(\alpha^2 + \omega_d^2) = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_d^2} B = -\frac{2\xi}{\omega_0} KE_0 \\ C &= -A = \frac{2\xi}{\omega_0} KE_0 \\ D &= -B - A\alpha = KE_0 \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \alpha - 1 \right) = KE_0(2\xi^2 - 1) \end{aligned}$$

La sortie $S(p)$ s'écrit donc :

$$S(p) = KE_0 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{p} + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right)$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f lignes 3, 4, 30 et 31 du tableau de l'[Annexe D](#)), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime pseudo-périodique :

$$s(t) = KE_0 \left(t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right)$$

en posant à nouveau :

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \xi \\ \sin \phi &= \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

et en notant que :

$$\begin{aligned} \cos 2\phi &= 1 - 2 \sin^2 \phi = 2\xi^2 - 1 \\ \sin 2\phi &= 2 \sin \phi \cos \phi = 2\xi\sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left(t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{2\xi}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin (\omega_d t + 2\phi) \right) \quad (3.23)$$

3.5. Cas particulier de l'oscillateur harmonique

Dans le cas où l'équation différentielle est de la forme

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = Ke(t)$$

c'est à dire sans amortissement ($\xi = 0$), on se retrouve alors dans le cas classique de l'oscillateur harmonique. Nous allons ici étudier ce modèle limite qui est d'une grande importance en physique. Ceci afin de constater que l'approche utilisée tout le long de ce chapitre permet également de décrire ce modèle important.

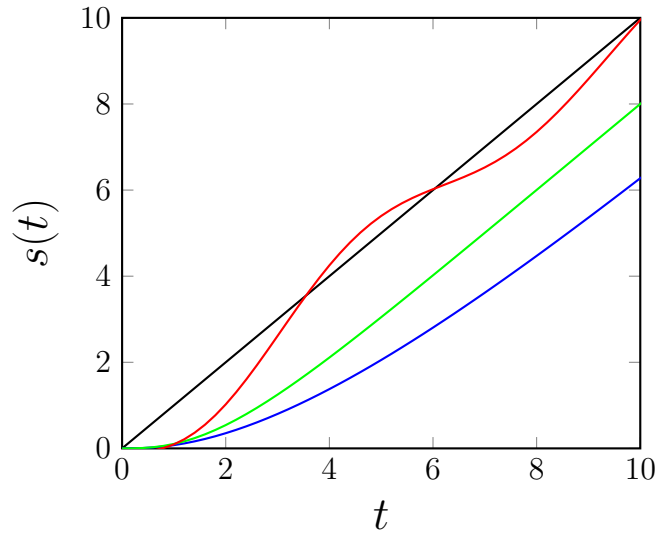


Figure 3.9. – Réponse à une rampe d'un système du second ordre en (bleu) régime apériodique avec $\xi = 2.0$, (vert) régime apériodique critique (i.e $\xi = 1$) et en (rouge) régime pseudo-périodique avec $\xi = 0.1$. Avec $\omega_0 = 1$, $K = 1$ et $E_0 = 1$.

La fonction de transfert de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^2 + \omega_o^2}$$

3.5.1. Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un oscillateur harmonique est, dans le domaine de Laplace, donnée par

$$S(p) = \frac{KE_0}{p^2 + \omega_o^2}$$

La réponse dans le domaine temporelle est donnée par :

$$s(t) = \mathcal{L} \{S(p)\} = \frac{KE_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Ce qui correspond bien à l'oscillation incessante d'un oscillateur que l'on a déplacé de son état d'équilibre.

4. Autres modèles particuliers

Dans cette partie, nous allons présenter des modèles théoriques particuliers qui physiquement ne se retrouveront jamais seuls. Cependant ils compléteront les modèles du premier et second ordre discutés précédemment.

4.1. Gain pur

Dans le cas où l'équation différentielle³ régissant le système est de la forme :

$$s(t) = Ke(t)$$

avec K un gain pur. Autrement dit, la sortie est proportionnelle à l'entrée et de même nature. En effet, la réponse temporelle est trivialement donné par la définition même du modèle, il est cependant possible de définir une fonction de transfert qui s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \quad (3.24)$$

La **réponse impulsionnelle** pour une entrée du type impulsion de Dirac unitaire est elle même une impulsion de Dirac :

$$s(t) = K\delta(t)$$

De même pour la **réponse indicielle** pour une entrée en échelon $e(t) = E_0u(t)$

$$s(t) = KE_0u(t)$$

4.2. Intégrateur pur

Dans le cas où l'équation différentielle régissant le système est de la forme :

$$\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$$

où K est un gain. La sortie correspond à l'intégrale de l'entrée :

$$s(t) = K \int_0^t e(\tau) d\tau$$

³Bien évidemment dans ce cas présent, l'équation différentielle est d'ordre 0. Ce qui est un cas très particulier d'équation différentielle.

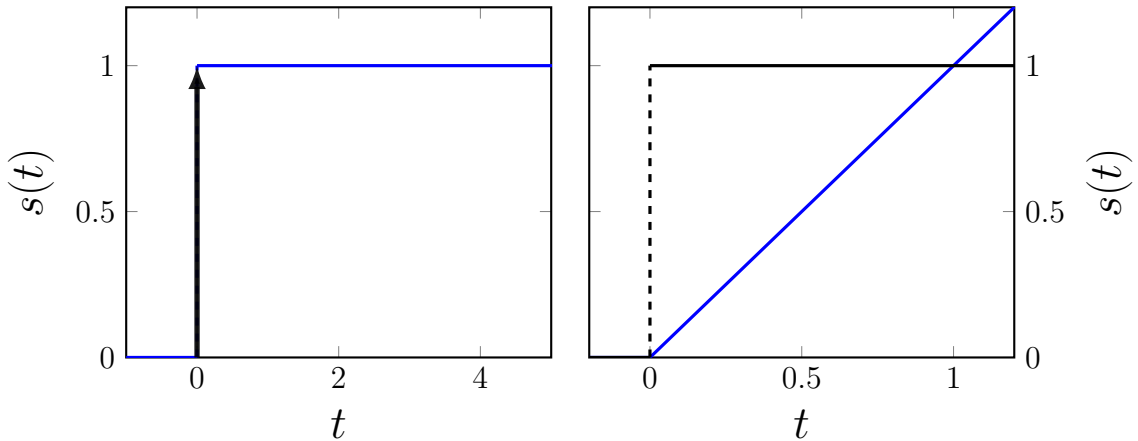


Figure 3.10. – (gauche) Réponse impulsionnelle (droite) Réponse indicielle d'un intégrateur avec $K = 1$ et $E_0 = 1$.

La fonction de transfert est celle d'un intégrateur pur :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}. \quad (3.25)$$

La **réponse impulsionnelle**, pour une entrée unitaire, est la fonction échelon unitaire :

$$s(t) = K \int_0^t \delta(\tau) d\tau = Ku(t)$$

La **réponse indicielle** est une rampe de pente KE_0 :

$$s(t) = KE_0 \int_0^t u(\tau) d\tau = KE_0 [\tau]_0^t = KE_0 t$$

Autrement dit, le système est **instable**.

4.3. Dérivateur pur

Dans le cas où l'équation différentielle régissant le système est de la forme :

$$s(t) = K \frac{de(t)}{dt}$$

où K est un gain. On a à faire à un système dit dérivateur pur. La sortie correspond alors à la dérivée de l'entrée. Sa fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = Kp \quad (3.26)$$

La **réponse impulsionnelle** d'un dérivateur n'est pas définie. La **réponse indicielle** est une impulsion de Dirac, par définition de la dérivée d'un échelon :

$$s(t) = K\delta(t)$$

4.4. Retard pur

Un système retard est régi par l'équation différentielle :

$$s(t) = e(t - \tau)$$

Sa fonction de transfert est donc de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = Ke^{-\tau p} \quad (3.27)$$

Les réponses temporelles sont donc de mêmes natures que leurs sollicitations, elles sont simplement retardées de τ .

5. Généralisation des modèles de SLCI

Nous venons d'analyser un grand nombre de systèmes d'ordre $n < 2$. Nous allons ici généraliser l'approche pour l'étude de systèmes d'ordre supérieur à deux.

5.1. Systèmes d'ordre supérieur à 2

Dans le cas d'un système d'ordre $n > 2$, il suffit de décomposer en éléments simples la fonction de transfert, qui n'est rien d'autre qu'une fraction rationnelle en p et d'utiliser la propriété de linéarité de la sortie.

Rappelons (c.f. [chapitre 1](#)) que toute fonction de transfert peut être mise sous la forme factorisée suivante

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec K le gain statique, α la classe (ou le nombre d'intégrateur) et deux polynômes $N(p)$ et $D(p)$.

Les deux polynômes peuvent se factoriser comme un produit de polynômes irréductibles unitaires, c'est à dire :

$$H(p) = \frac{K \prod_i (1 + \tau_i p) \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j^2 p^2)}{p^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p) \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j^2 p^2)}$$

en toute rigueur il suffit d'exprimer le rapport des produits comme un simple produits en permettant les exposants d'être négatifs, soit alors la forme plus condensée :

$$H(p) = K p^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p)^{n_i} \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j^2 p^2)^{n_j} \quad (3.28)$$

où n_i et n_j peuvent être positifs et négatifs.

Après décomposition en éléments simples, $H(p)$ s'écrit sous la forme d'une somme de systèmes du 1er et second ordre.

$$H(p) = \sum_i H_i(p)$$

La réponse temporelle $s(t)$ d'un tel système sortie est alors la somme des réponses de chacun des sous systèmes $H_i(p)$

$$s(t) = \sum_i s_i(t)$$

5.2. Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3

Soit un système caractérisé par la fonction de transfert $H(p)$ tel que :

$$H(p) = \frac{3p + 1}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15}$$

On détermine, après un peu d'algèbre, les trois pôles $p_1 = -1$, $p_2 = -3$ et $p_3 = -5$ ainsi que la forme factorisée de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{3p + 1}{(p + 1)(p + 3)(p + 5)}$$

La décomposition en éléments simples est donné par :

$$H(p) = \frac{0.25}{p + 1} + \frac{1}{p + 3} - \frac{1.25}{p + 5}$$

et sous forme factorisée :

$$H(p) = \frac{0.25}{p + 1} + \frac{1/3}{\frac{1}{3}p + 1} - \frac{0.25}{0.2p + 1}$$

La réponse temporelle est donc la somme des réponses temporelles de trois systèmes du premier ordre $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$ ayant respectivement pour paramètres $(K_1 = 0.25, \tau_1 = 1)$, $(K_2 = 1/3, \tau_2 = 1/3)$ et $(K_3 = -0.25, \tau_3 = 0.2)$

Pour la réponse indicielle à un échelon d'amplitude E_0 les réponses $s_i(t)$ de chacune de ces fonctions de transferts sont de la forme :

$$s_i(t) = K_i E_0 (1 - e^{-t/\tau_i})$$

La réponse indicielle du système est alors

$$s(t) = \sum_i s_i(t) = \frac{E_0}{4} (1 - e^{-t}) + \frac{E_0}{3} (1 - e^{-3t}) - \frac{E_0}{4} (1 - e^{-5t})$$

La valeur finale est donnée par la somme algébrique des valeurs finales de chacune des fonctions de transfert.

Cependant, les propriétés telle que le temps de réponse, les pseudo-oscillation (dans le cas de système du second ordre) le dépassement ou encore la stabilité sont gouvernées par la fonction de transfert de temps caractéristique le plus grand. On dit que c'est un pôle dominant.

5.3. Notion de pôles dominants

Soient p_1, \dots, p_n les pôles d'un système stable⁴. Le pôle p_i est dit dominant si la valeur absolue de sa partie réelle est largement plus petite que celle de tout autre pôles du système⁵

$$|\operatorname{Re}[p_i]| \ll |\operatorname{Re}[p_j]| \quad \forall j \neq i \quad (3.29)$$

Pour observer l'influence d'un pôle dominant sur la réponse temporelle d'un système linéaire, nous nous allons l'illustrer par l'étude d'une fonction de transfert du second ordre en régime apériodique. Une telle fonction de transfert est équivalente à deux systèmes du premier ordre en série.

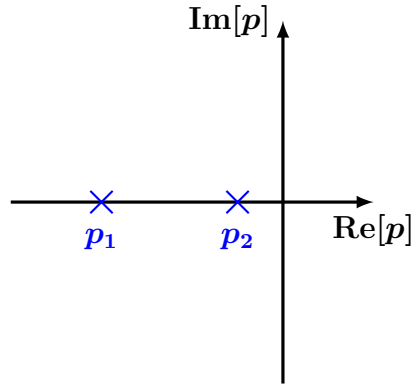
Prenons l'exemple de la fonction de transfert définie par

$$H(p) = \frac{5}{(p+1)(5p+1)}$$

et de décomposition en éléments simples telle que :

$$H(p) = \frac{-1.25}{p+1} + \frac{6.25}{5p+1}$$

Traçons la réponse indicielle de $H(p)$ et de



⁴À partir des résultats obtenus dans ce chapitre il est déjà clair que la stabilité d'un système dépend également des pôles de sa fonction de transfert

⁵Dans la pratique un rapport de 5 est suffisant pour considérer une domination d'un pôle sur les autres

6. Identification d'un modèle de comportement

6.1. Formule de Bureau

à compléter...

6.2. Modèle de Strejc

à compléter...

Annexes

A. Alphabet Grec

Nom	Minuscule	Majuscule	Correspondance latine	Usages courants
alpha	α	A	a	angles
bêta	β	B	b	angles
gamma	γ	Γ	g	angles
delta	δ	Δ	d	variations
epsilon	ϵ, ε	E	e	petite quantité
zêta	ζ	Z	z	-
êta	η	H	é (long)	rendement
thêta	θ, ϑ	Θ	th	angles
iota	ι	I	i	-
kappa	κ, \varkappa	K	k	-
lambda	λ	Λ	l	longueur, densité linéique
mu	μ	M	m	masse réduite
nu	ν	N	n	fréquence
ksi	ξ	Ξ	ks	coefficient sans dimension
omicron	o	O	o	-
pi	π, ϖ	Π	p	Π : plan
rhô	ρ, ϱ	P	r	densité volumique
sigma	σ, ς	Σ	s	σ : densité surfacique, Σ : Système
tau	τ	T	t	temps, durée relative
upsilon	υ	Y	u	-
phi	ϕ, φ	Φ	f, ph	angles
khi	χ	X	kh	coefficients
psi	ψ	Ψ	ps	fonction d'onde
oméga	ω	Ω	ô	vitesse angulaire, angle solide

Tableau A.1. – Lettres de l'alphabet Grec et leurs usages courants en physique (non exhaustifs)

Références

- [1] Régulation automatique (analogique) (REG). <http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/>.
- [2]
- [3] Xcos pour les vrais debutants. <https://scilab.developpez.com/tutoriels/debuter/apprendre-xcos-debutant/>.
- [4] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes lineaires (pc7bis), 2005.
- [5] B. Bayle and J. Gangloff. Systèmes et asservissements à temps continu, 2009.
- [6] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier, and R. Nikoukhah. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. Springer, 2006.
- [7] H. Garnier. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/hugues.garnier/?q=content/teaching>.
- [8] Y. Granjon. *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, événements discrets*. Dunod, Paris, 2015.
- [9] E. Laroche and H. Halalchi. Asservissement des systèmes lineaires à temps continu. <http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>.
- [10] O. Le Gallo. *Automatique des systèmes mécaniques : Cours, travaux pratiques et exercices corrigés*. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009.
- [11] Joe Mabel. Régulateur à boules au Georgetown PowerPlant Museum à Seattle. CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5694146>.
- [12] B. Marx. Outils Mathématiques pour l'ingénieur - Traitement du Signal. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html>.
- [13] B. Marx. Contrôle des systèmes linéaires. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/-benoit.marx/enseignement.html>.
- [14] F. Orioux. *Automatique : Systèmes linéaires et asservissements*. Notes de Cours, Master 2 Outils et systèmes de l'astronomie et de l'Espace, 20017-1018.

- [15] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses Marketing, 2004.
- [16] R. Papanicola. Schéma-blocs avec PGF/TIKZ. <https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/schema-bloc.pdf>.
- [17] R. Papanicola. *Sciences industrielles PCSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2003.
- [18] R. Papanicola. *Sciences industrielles PSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2010.
- [19] Marsyas-Travail personnel. Clepsydre athénienne reconstituée, Musée de l'Agora antique d'Athènes. CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=476174>.
- [20] Consortium Scilab. Introduction to Scilab. www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf.
- [21] S. Steer and Y. Degré. *Scilab : De la théorie à la pratique - II. Modéliser et simuler avec Xcos*. Éditions D-BookeR, 2014.
- [22] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. *Automatique des systèmes continus*. Editions Technip.
- [23] E. Thomas. TP Scilab. http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP_INFO/TP_info_12_ordre/co/module_TP_1_2_ordre_5.html.

Index

Dérivateur pur, 92

Gain pur, 91

Intégrateur pur, 91

Retard pur, 93

Système du premier ordre

définition, 67

fonction de transfert, 67

réponse à une rampe, 72

réponse impulsionnelle, 68

réponse indicielle, 70

Système du second ordre

définition, 73

fonction de transfert, 73

réponse à une rampe, 86

réponse impulsionnelle, 74

réponse indicielle, 77

Liste des Symboles

t	Variable temporelle
p	Indéterminée de polynôme
$s(t)$	Fonction/Signal dans le domaine temporel
$S(p)$	Fonction/Signal dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$
$u(t)$	Fonction échelon unité ou de Heaviside
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
$r(t)$	Fonction rampe unité
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformation de Laplace de la fonction $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	Transformation de Laplace inverse de la fonction $F(p)$
$H(p)$	Fonction de transfert
$N(p)$	Polynôme du numérateur d'une fraction rationnelle
$D(p)$	Polynôme du dénominateur d'une fraction rationnelle
ω	Pulsation
$H(j\omega)$	Nombre complexe associé à la fonction de transfert $H(p)$
E_0	Paramètre dimensionnelle d'amplitude de l'entrée
K	Gain statique
ω_0	Pulsation propre

$\text{Im}[H(j\omega)]$	Partie imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
$\text{Re}[H(j\omega)]$	Partie réelle du nombre complexe $H(j\omega)$
ξ	Coefficient d'amortissement
$G(\omega)$	Gain naturel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$G_{dB}(\omega)$	Gain en decibel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$\phi(\omega)$	Déphasage de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
D_k	k-ème dépassement
$t_{5\%}$	Temps de réponse à 5%

