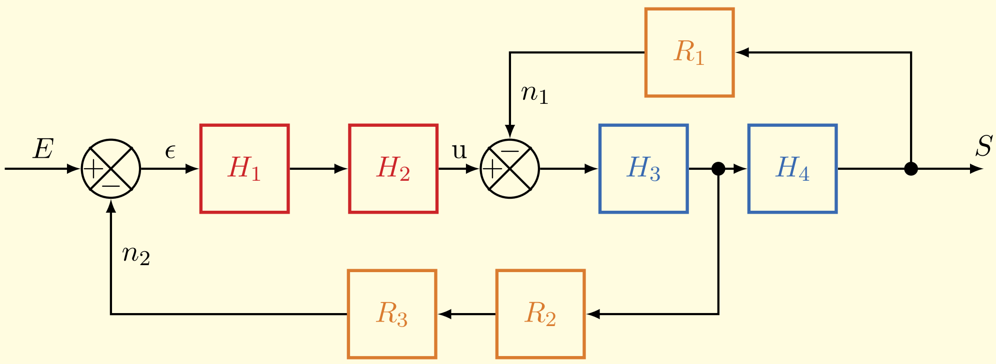
Systèmes mécaniques et automatiques

Notes de cours IngéSpé

Automatique Linéaire



Année 2019–2020

Systèmes mécaniques et automatiques

Notes de cours IngéSpé

Automatique Linéaire

Filipe Manuel Vasconcelos

écrit sous LaTeX, TikZ

version de janvier 2020.

Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : `filipe.vasconcelos@esme.fr`

Table des matières

Avant-propos

Programme

Ce cours est une introduction à l'**automatique** pour des étudiants de deuxième année de classe préparatoire scientifique.
L'objectif principal de l'automatique est de permettre le contrôle des **systèmes dynamiques** de toutes natures que ce soient : mécanique, chimique, électronique, optique, thermique, acoustique.... Tout en respectant certaines contraintes de performances (rapidité, précision, stabilité...).
Nous limiterons notre étude aux **systèmes linéaires continus et invariants.** La **modélisation** de ces systèmes passe par la mise en équation du comportement physique des systèmes sous forme d'équations différentielles. Cette étape ne fait pas à proprement parler partie d'un cours d'automatique, en effet chacunes des disciplines construisent cette modélisation en se basant sur les principes et les hypothèses les plus adaptés à un problème donné. La modélisation permet une étude systématique des équations différentielles en proposant des modèles généraux et ce quelque soit la nature du procédé.
L'**analyse** nous permettra de caractériser et d'identifier ces modèles à partir des réponses aux sollicitations et de leurs performances.
Le **contrôle** est un concept très générale permettant de regrouper toutes les méthodes et techniques permettant de commander un système dynamique. Dans ce cours nous présenterons que les principes d'asservissement et de régulation. Nous verrons comment il est possible d'élaborer une commande adaptée (corrigée) pour un procédé quelconque, notamment lorsque ceux-ci présenterons des défauts de performance.

Organisation du document

Les chapitres suivent un découpage classique autour des trois pilliers discutés précedemment que sont la **modélisation**, l'**analyse** et le **contrôle**. (c.f Figure A).
Le lecteur pourra s'appuyer sur un grand nombre d'annexes qui ont pour objectifs de rappeler et de détailler des notions prérequises ou encore approfondir quelques aspects hors programme pour une deuxième lecture.

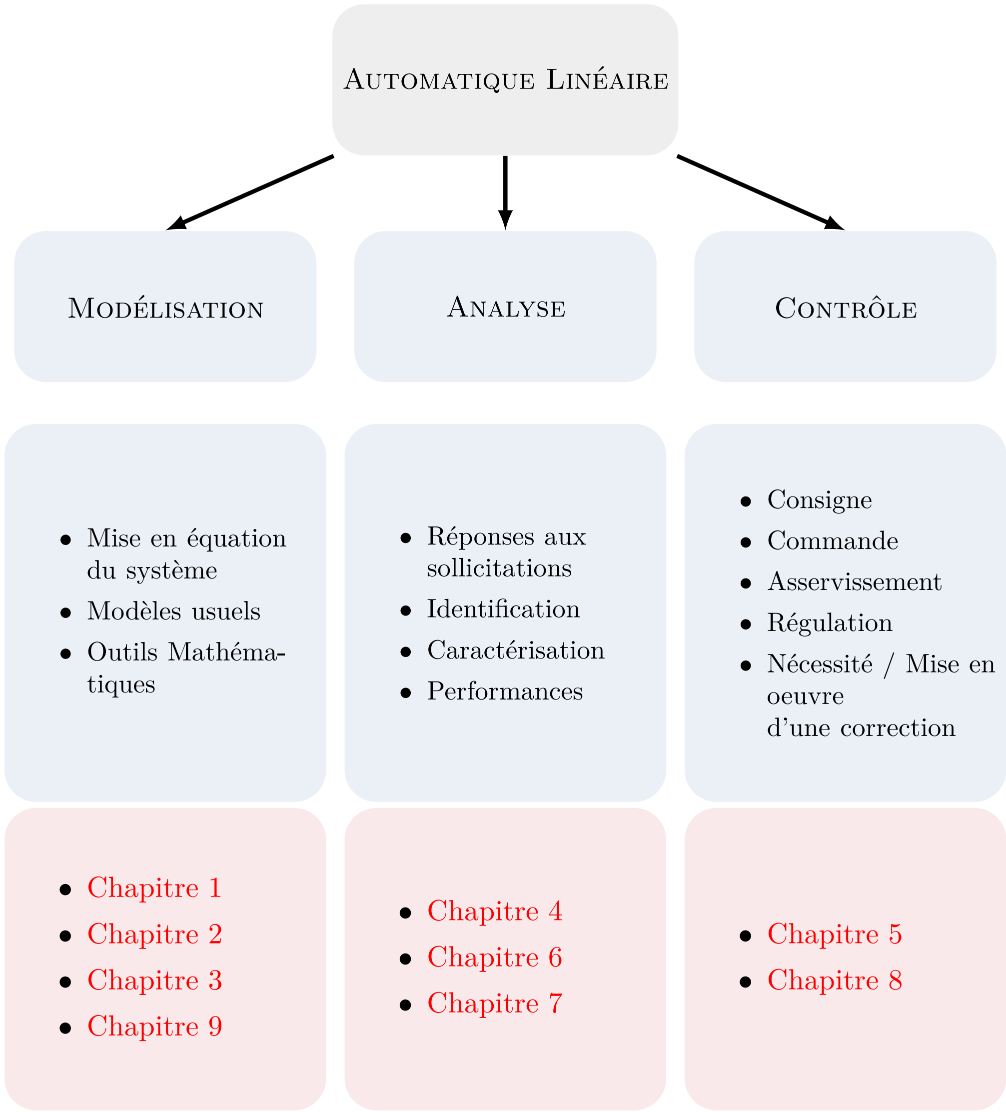


Figure A. – Organisation du document.

6. Performances des systèmes asservis

Sommaire

1. Introduction

Les performances qui vont nous interesser dans ce chapitre sont la **précision** et la **rapidité**. Dans les deux cas, nous allons observer que les performances en boucle fermée dépendent du système en boucle ouverte.

2. Précision

Un système est précis si l'écart que l'on note $\epsilon(t)$ entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ est nul. Dans le domaine de Laplace, cet écart devient :

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p)$$

On distingue deux cas :

- En régime permanent, cet écart ϵ_s est nommée **erreur statique.**
- En régime transitoire, cet écart $\epsilon(t) = e(t) - s(t)$ est nommée **erreur dynamique.**

L'erreur dynamique consiste à suivre l'écart défini précedemment durant le transitoire. Pour étudier l'erreur statique, on sollicite le système à différents types de signaux pour obtenir dans les différents cas :

- l'**erreur indicielle** ou l'erreur de position qui est l'erreur statique de la réponse indicielle.
- l'**erreur de poursuite** ou erreur de vitesse qui est l'erreur statique de la réponse à une rampe.
- l'**erreur en accélération** qui est l'erreur statique de la réponse à une parabole.

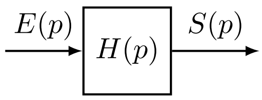
Concrétement pour étudier l'erreur statique on cherche la limite à l'infini de $\epsilon(t)$ ou encore en appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) - s(t) = \lim_{p\to 0} p\big(E(p) - S(p)\big) \tag{6.1}$$

Rappelons que pour pouvoir appliquer ce théorème la valeur finale doit être finie ou en d'autre mot le système doit être stable.

2.1. Précision en boucle ouverte

Soit un système caractérisé par la fonction de transfert $H(p)$ est sollicité par l'entrée $E(p)$. La sortie $S(p)$ est alors donnée par :



L'erreur statique est alors donnée par :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\big(E(p) - H(p)E(p)\big) = \lim_{p\to 0} p\big(1 - H(p)\big)E(p)$$

2.1.1. Exemple d'un premier ordre

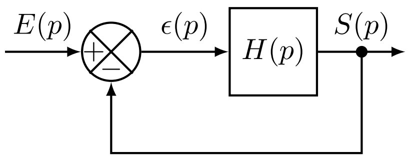
Prenons l'exemple d'un système du 1er ordre de fonction de transfert canonique $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$ que l'on sollicite avec un échelon d'amplitude (consigne) E_0. L'erreur statique est alors donnée par :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \left(1 - \frac{K}{1+\tau p}\right) E_0 = (1-K)E_0$$

Le système est prècis (c.a.d $\epsilon(\infty) = 0$) si $K = 1$.

2.2. Précision en boucle fermée

Considérons le cas d'un système asservi de fonction de transfert $H(p)$ par une boucle de contre-réaction à retour unitaire.



La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est simplement donnée par $H(p)$. Dans le cas le plus générale, il est toujours possible d'écrire une fonction de transfert sous la forme canonique (Chapitre 1) :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec α la classe du système en boucle ouverte, K le gain statique et $N(p)$ et $D(p)$ deux polynômes tels que $N(0) = D(0) = 1$.
Dans le domaine de Laplace l'écart $\epsilon(p)$ s'écrit :

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = \left(1 - \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}\right) E(p)$$

en remplaçant $H_{BO}(p)$ par sa représentation générale :

$$\epsilon(p) = \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} E(p) \tag{6.2}$$

L'erreur statique ϵ_s est alors donnée par la limite (Théorème de la valeur finale) :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \to 0} \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} pE(p)$$

ou encore en utilisant les valeurs des polynômes en 0 :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} pE(p) \tag{6.3}$$

Cette erreur dépend donc de la nature de la sollicitation (c.a.d $E(p)$) et de la classe α de la fonction de transfert en boucle ouverte.
Nous allons maintenant considérer différentes types de sollicitations pour différentes classes de système en boucle ouverte.

2.2.1. Erreur statique indicielle

L'erreur indicielle est l'erreur entre la sortie d'un système et une sollicitation en échelon $e(t) = E_0 u(t)$ de transformée de Laplace $E(p) = \frac{E_0}{p}$. Pour une telle entrée, l'erreur statique (c.f équation (6.3)) devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0$$

Dans le cas d'un système de classe $\alpha = 0$ en boucle ouverte :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^0}{p^0 + K} E_0 = \frac{E_0}{1 + K}.$$

L'erreur est finie mais les réponses indicielles des systèmes de classe $\alpha = 0$ en boucle ouverte ne sont pas précis.
Dans les autres cas $\alpha > 0$, l'erreur statique s'annule :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 = 0$$

Les réponses indicielle des systèmes de classe $\alpha > 0$ sont donc précis.

2.2.2. Erreur statique de poursuite

L'erreur de poursuite est l'erreur statique d'un système soumis à une rampe du type $e(t) = r(t) = E_0 t u(t)$ de transformée de Laplace $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$
Pour une telle entrée, l'erreur statique devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \frac{E_0}{p} = \frac{p^{\alpha - 1}}{p^\alpha + K} E_0$$

Dans le cas d'un système de classe $\alpha = 0$ en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^{-1}}{p^0 + K} E_0 = +\infty$$

Entrée	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$\frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
$\frac{E_0}{p^2}$	$+\infty$	$\frac{E_0}{K}$	0	0
$\frac{2E_0}{p^3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{2E_0}{K}$	0

Tableau 6.1. – Résumé des erreurs statiques pour différentes sollicitations et classe de système en boucle ouverte

Le système est incapable de suivre l'entrée souhaitée.
Dans le cas d'un système de classe $\alpha = 1$ en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^0}{p+K} E_0 = \frac{E_0}{K}$$

Dans le cas d'un système de classe $\alpha > 1$ en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} E_0 = 0$$

Le système est donc prècis.

2.2.3. Erreur statique d'accélération

L'erreur d'accélération est l'erreur statique d'un système soumis à un signal parabolique $e(t) = E_0 t^2 u(t)$ de transformée de Laplace $E(p) = \frac{2E_0}{p^3}$
Pour une telle entrée, l'erreur statique devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \frac{2E_0}{p^2} = \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} 2E_0$$

Dans le cas d'un système de classe $\alpha < 2$ en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = +\infty$$

Pour un système de classe $\alpha = 2$ en boucle ouverte, l'erreur est finie :

$$\epsilon_s = \frac{2E_0}{K}$$

et s'annule pour $\alpha > 2$

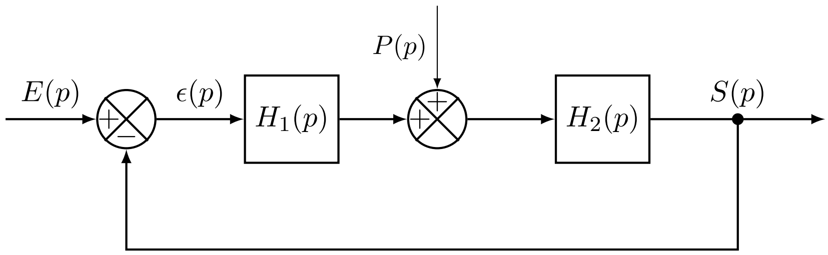
2.3. Effet d'une perturbation

2.3.1. Cas générale

On considère maintenant l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système asservis. Sans perte de généralité, on ne considèrera que le cas d'une perturbation en entrée (c'est à dire en amont d'un système linéaire défini par une fonction de transfert $H_2(p)$), la présence d'un correcteur $H_1(p)$ n'est pas obligatoire mais facilite l'interprétation des résultats.
Considérons le schéma bloc suivant avec les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ de forme canonique :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$
$$H_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

de les gains statiques K_i, de classe α_i, de polynômes $N_i(p)$ et $D_i(p)$ tels que $N_i(0) =$ et $D_i(0) = 0$.



Pour déterminer l'écart à la consigne d'un tel système, il faut déterminer la sortie globale du système asservis à deux entrées (c.f **??** section 4).
On se donne les formes canoniques suivantes pour les deux fonctions de transferts $H_1(p)$ et $H_2(p)$ tels que :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$
$$H_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

avec K_i, α_i, $N_i(p)$ et $D_i(p)$ respectivement les gains statiques, la classe et les polynômes en p tels que $N_i(0) = 1$ et $D_i(0) = 1$.
Pour déterminer l'écart, il nous faut déterminer la sortie globale $S(p)$ pour des entrées multiples (c.f Chapitre 2-**??**). Cette sortie est sous la forme :

$$S(p) = H_{P=0}E(p) + H_{E=0}P(p)$$

c'est à dire que c'est la somme des contributions des deux entrées prises séparemment.

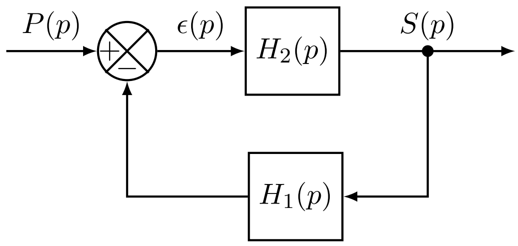
L'écart est alors donné par

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = (1 - H_{P=0})\, E(p) - H_{E=0}P(p)$$

Le premier terme correspond à l'écart de l'asservissement que nous avons déjà étudié précedemment, le second terme, que l'on note $\epsilon_P(p)$, est la contribution à l'écart dû à la perturbation. La fonction de transfert de l'asservissement est donnée par :

$$H_{P=0} = \frac{H_1 H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

Dans le cas de la régulation d'un système asservis, il est nécessaire de rejeter cette contribution.
La fonction de transfert $H_{E=0}$, de la régulation, correspondant à une consigne nulle, s'obtient en considérant le schéma-bloc suivant :



en boucle fermée, on a alors :

$$H_{E=0}(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

en remplaçant par leurs formes canoniques générales :

$$H_{E=0}(p) = \frac{p^{\alpha_1} K_2 N_2(p) D_1(p)}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

Examinons l'erreur en régime permanent pour une perturbation constante. C'est à dire pour perturbation $P(p)$ en échelon telle que $P(p) = \dfrac{P_0}{p}$. L'erreur dû à la perturbation en régime permanent est alors :

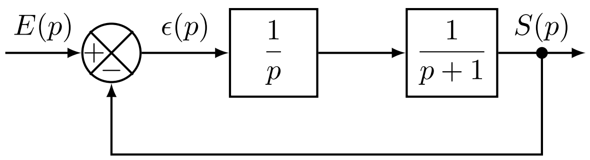
$$\epsilon_P = \lim_{p \to 0} p\epsilon_P$$
$$\epsilon_P = \lim_{p \to 0} -H_{E=0}P_0$$
$$\epsilon_P = \lim_{p \to 0} \frac{p^{\alpha_1} K_2}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} + K_1 K_2} P_0$$

La perturbation est rejétée si $\alpha_1 > 0$, c'est à dire s'il existe au moins un intégrateur en amont de la perturbation. En effet si $\alpha_1 = 0$, l'erreur dû à la perturbation est finie et donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \to 0} \frac{K_2}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} + K_1 K_2} P_0$$

2.3.2. Exemple de rejet de perturbation

Nous allons voir ici le rejet d'une perturbation d'un système du premier ordre. On considère le système du premier ordre, en boucle ouverte, placé dans une boucle de contre réaction unitaire avec un intégrateur comme ci-dessous :



On souhaite réguler ce système pour une consigne en échelon. D'après les résultats précédents, l'erreur statique de position est nulle en asservissement puisque le système présente au moins un intégrateur. Pour observer le rejet de la perturbation, nous allons considérer deux positions possibles pour la perturbation (avant et après l'intégrateur). On considère une perturbation constante telle que $P(p) = e^{-\tau p}\frac{P_0}{p}$ retardée d'un temps $\tau > 0$.

Si l'intégrateur est en aval de la perturbation

Dans un tel cas l'erreur dû à la perturbation est donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \to 0} p\epsilon_P(p) = \lim_{p \to 0} \frac{e^{-\tau p}}{p(p+1)+1} P_0 = P_0$$

L'erreur statique de position totale est donc non nulle. La perturbation n'est pas rejétée comme on peut le voir sur la simulation de la réponse temporelle globale de ce système (c.f figure 6.1).

Si l'intégrateur est en amont de la perturbation

Dans un tel cas l'erreur dû à la perturbation est donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \to 0} \frac{pe^{-\tau p}}{p(p+1)+1} P_0 = 0$$

L'erreur statique de position totale est donc nulle. La perturbation est rejétée, comme on peut le voir sur la simulation de la réponse temporelle globale de ce système (c.f figure 6.2).

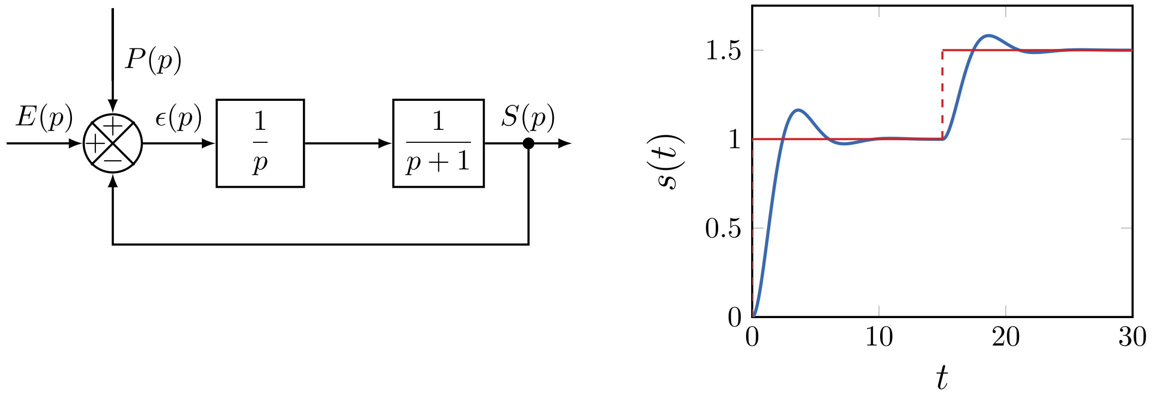


Figure 6.1. – Effet de la perturbation sur la réponse temporelle dans le cas où l'intégrateur est en aval de la perturbation. La simulation de la réponse temporelle est obtenue pour les paramètres suivants : $E_0 = 1$, $\tau = 15$

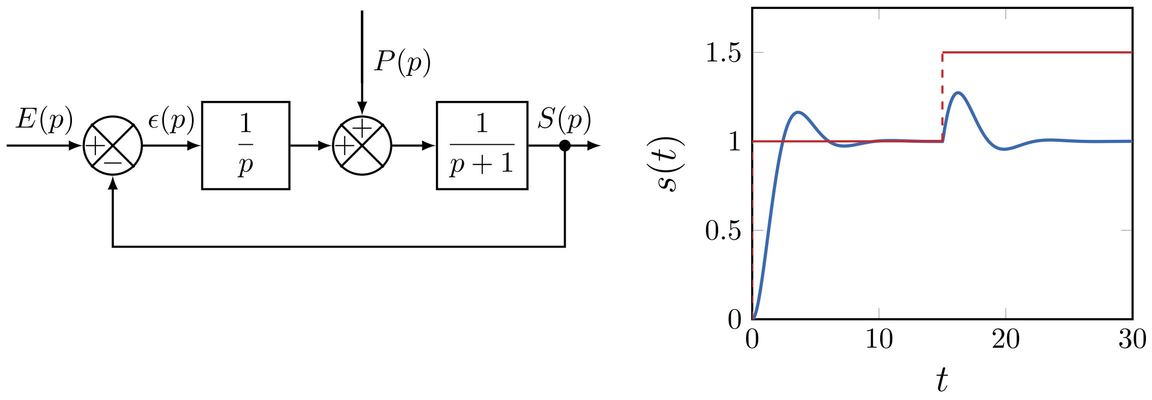


Figure 6.2. – Effet de la perturbation sur la réponse temporelle dans le cas où l'intégrateur est en amont de la perturbation. La simulation de la réponse temporelle est obtenue pour les paramètres suivants : $E_0 = 1$, $\tau = 15$

3. Rapidité

La rapidité est un critère important dans le contexte du contrôle des systèmes dynamiques. Cette rapidité correspond à la durée que met un système pour atteindre le régime permanent. Ce critère de performance dépend donc directement du transitoire de la réponse temporelle. En générale, la valeur finale de la réponse d'un système est atteinte de façon asymptotique. C'est pourquoi, ce critère est généralement évalué relativement à la valeur finale de la réponse indicielle. Dans le cas des systèmes en boucle ouverte, nous ne rappelerons que les résultats obtenues dans les chapitres précédents. L'objectif principale est ici d'évaluer l'effet du bouclage sur ce critère de performance.

3.1. Réponse temporelle

Dans la pratique, on caractérise la rapidité d'une réponse temporelle par l'intermédiaire de deux valeurs : $t_{5\%}$ le **temps de réponse à 5%** et t_m le **temps de montée**. On rappel ici les définitions de ces deux temps ainsi que les résultats obtenues au chapitre 3 pour les systèmes modèles.

3.1.1. Temps de réponse à 5% et temps de montée

Le temps de réponse à 5% d'un système correspond au temps mis par la réponse pour atteindre 5% de sa valeur finale $s(\infty)$. Dans le cas où la réponse tend asymptotiquement en oscillant vers la valeur finale, le temps de réponse à 5% correspond au temps pour lequel le signal de la réponse reste dans une bande à 5% autour de la valeur finale.

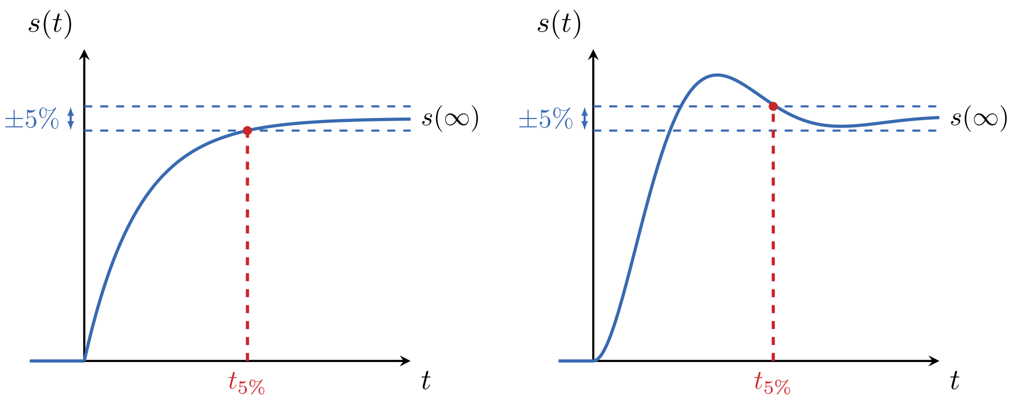


Figure 6.3. – Définition du temps de réponse à 5% : (à gauche) dans le cas d'une résonse temporelle sans pseudo-oscillations et (à droite) dans le cas d'un réponse temporelle avec pseudo-oscillations

Il apparait clair que dans le cas d'une réponse présentant des oscillations, le temps de réponse à 5% va dépendre de l'amplitude et la période des pseudo-oscillations. Dans le cas où l'on souhaite caractériser la rapidité indépendamment de ces oscillations, on utilisera le temps de montée.

Le temps de montée t_m est le temps mis par réponse temporelle d'un système pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Il existe une autre définition du temps de montée. Pour celle-ci le temps de montée (que nous noterons t_M) correspond à la durée au bout de laquelle la réponse passe pour la première fois par la valeur finale. Cependant, il faut remarquer que pour certaine réponse la valeur finale n'est jamais atteinte en un temps fini. Cette dernière définition n'a donc de sens qu'en régime pseudo-périodique.

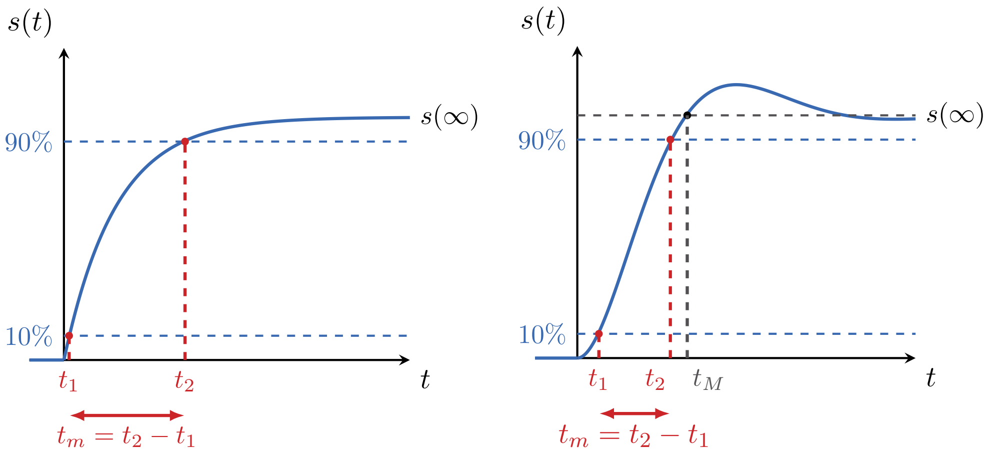


Figure 6.4. – Définition du temps de montée : (à gauche) dans le cas d'une résonse temporelle sans pseudo-oscillations et (à droite) dans le cas d'un réponse temporelle avec pseudo-oscillations

Quelque soit la grandeur utilisée pour caractériser les performances de rapidité d'un système linéaire, on dira que **plus le temps de réponse à 5% et le temps de montée t_m seront faibles plus le système sera rapide.**

3.1.2. Système du premier ordre

La réponse indicielle $s(t)$, à un échelon unitaire, d'un système du premier ordre est donnée par l'équation (3.4) du chapitre 3, à savoir :

$$s(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Le temps de réponse à 5% $t_{5\%}$ est tel que $s(t_{5\%}) = 0.95K$,

$$t_{5\%} = -\tau \log 0.05 \sim 3\tau.$$

Le temps de montée $t_m = t_2 - t_1$ avec t_1 et t_2, les temps tels que :

$$s(t_1) = 0.1K$$
$$s(t_2) = 0.9K$$
$$t_m = -\tau \log \frac{0.1}{0.9} \sim 2.2\tau$$

Le temps de réponse à 5% et le temps de montée t_m dépendent directement de la constante. Ce qui permet de conclure que **plus la constante de temps τ d'un système du premier ordre est faible plus le système est rapide.**

Effet du bouclage sur un système du premier ordre

Nous avons montré au chapitre 5 que les paramètres de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF d'un système du premier ordre (K_{BF}, τ_{BF}) peuvent être obtenues à partir des paramètres de la FTBO. Notamment les relations suivantes :

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K}$$
$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+K}$$

Il est alors possible de modifier la constante de temps en boucle fermée en modifiant la valeur du gain statique en boucle ouverte. Pour augmenter la rapidité d'un système, on augmentera le gain statique de la FTBO pour diminuer les temps de réponse et de montée.

3.1.3. Système du second ordre

Comme nous l'avons dejà souligné au chapitre 3, dans le cas d'un système du second ordre, il n'existe pas de forme analytique simple pour déterminer le temps de réponse à 5%. Celui-ci dépend en effet de la valeur du coefficient d'amortissement ξ et de la pulsation propre du système ω_0.
Pour déterminer le temps de réponse à 5%, on utilise l'abaque de la figure figure 6.5. Sur cette figure nous avons représenté le temps de réponse à 5% et le temps de montée réduits par rapport à la pulsation propre ω_0. **En effet pour un même coefficient d'amortissement, plus la pulsation propre augmente plus le temps de réponse diminue, donc plus le système est rapide.**
Nous pouvons relever sur ces abaques les coefficients d'amortissement donnant lieu au système le plus rapide selon le régime du second ordre accepté. **Dans le cas où les dépassements ne sont pas autorisés (c.a.d régime apériodique ($\xi > 1$)), le système est le plus rapide pour $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim 5$. Dans le cas où un dépassement relatif est autorisé, la temps de réponse minimal est obtenu pour $\xi \sim 0.7$ soit pour $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim 3$.**

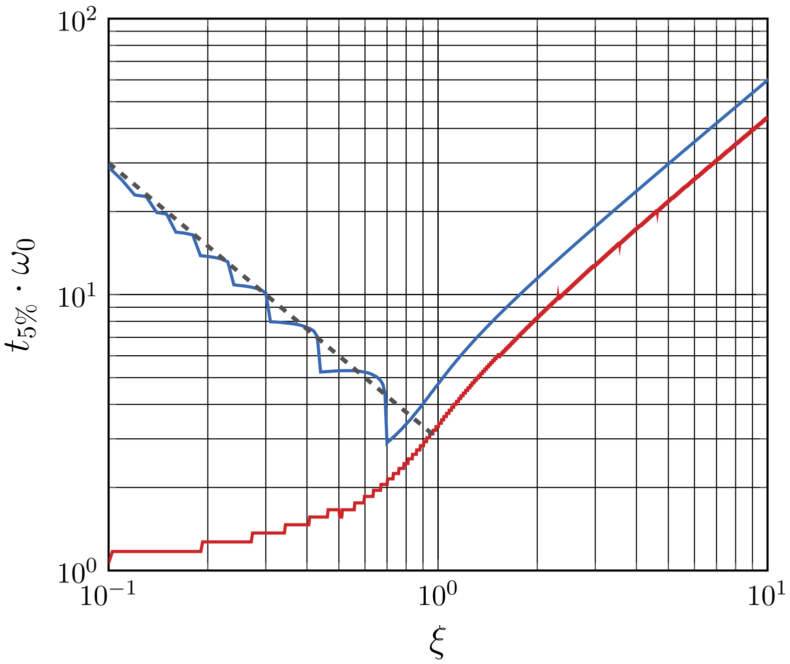


Figure 6.5. – Caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre en fonction du taux d'amortissement ξ : par (bleu) le temps de réponse à 5%, (rouge) le temps de montée t_m. Ces deux temps sont donnés en unité réduite par rapport la pulsation propre ω_0. Le minimum du temps de réponse à 5% est atteint pour $\xi \sim 0.7$ pour lequel $\omega_0 \cdot t_{5\%} \sim 3$. Le droite en pointillé représente l'équation approchée $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim \dfrac{3}{\xi}$ pour les faibles valeurs de ξ.

Il est possible de déterminer une relation analytique pour le temps de montée à la valeur finale t_M. Rappelons quelques résultats obtenus pour la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique (c.f Chapitre 3section 3.4.2) :

- La fonction de transfert d'un système du second ordre est donnée par :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

- La réponse indicielle pour échelon unitaire tend vers le gain statique K
- La réponse indicielle pour une échelon unitaire et en régime pseudo-périodique est donnée par :

$$s(t) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_d t + \phi\right)\right)$$

Le temps de montée à la valeur finale t_M est tel que,

$$s(t_M) = K$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t_M} \sin\left(\omega_d t_M + \phi\right) = 0$$

Cette expression est nulle que si $\sin\left(\omega_d t_M + \phi\right) = 0$. On obtient alors :

$$t_M = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} \tag{6.4}$$

en fonction de ξ uniquement cette relation devient :

$$t_M = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

ou encore sous sa forme réduite en ω_0 :

$$t_M\omega_0 = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{6.5}$$

Remarquons que pour le temps de réponse à 5% minimal, le temps de montée à la valeur finale réduit sont proche. **Autrement dit, pour $\xi \sim 0.7$ on a :**

$$t_M = t_{5\%}.$$

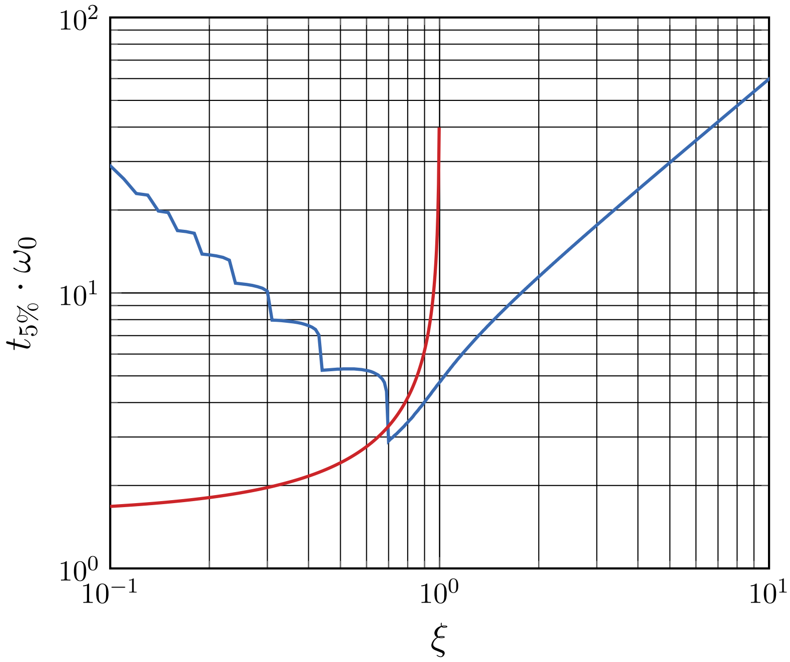


Figure 6.6. – Caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre en fonction du taux d'amortissement ξ : par (bleu) le temps de réponse à 5%, (rouge) le temps de montée t_M à la valeur finale. Ce dernier est donné par la relation analytique établie dans le texte (c.f équation (6.5)).

Effet du bouclage sur un système du second ordre

À l'instar des systèmes du premier ordre, nous avons montré au chapitre 5 que les paramètres de la FTBF d'un système du second ordre ($K_{BF}, \xi_{BF}, \omega_{0,BF}$) peuvent être obtenues à partir des paramètres de la FTBO. Notamment les relations suivantes :

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K}$$
$$\omega_{0,BF} = \omega_0 \sqrt{1+K}$$
$$\xi_{BF} = \frac{\xi}{\sqrt{1+K}}$$

En s'appuyant sur l'abaque discuté precedemment, il est possible de modifier les performances de rapidité de la boucle fermée en modifiant le gain de la boucle ouverte, notamment il est possible de rendre un système plus rapide en boucle fermée,

- **en augmentant la valeur de la pulsation propre du système par l'intermédiaire du gain K de la FTBO.**
- **en diminuant coefficient d'amortissement ξ_{BF} pour $\xi_{BF} > 0.7$, c'est à dire en augmentant le gain en boucle ouverte K.**

Dans le cas où $\xi_{BF} < 0.7$ une conclusion générale est impossible on se reportera sur les abaques du temps de réponse ou du temps de montée en fonction du coefficient d'amortissement pour établir la rapidité du système en boucle fermée.

3.2. Réponse harmonique

3.2.1. Définition de la bande passante à -xdB

3.3. Influence des pôles dominants

Soient $p_1, \ldots, p_n$ les pôles d'un système stable[1]. Le pôle p_i est dit dominant si la valeur absolue de sa partie réelle est largement plus petite que celle de tout autre pôles du système[2]

$$|\mathrm{Re}[p_i]| \ll |\mathrm{Re}[p_j]| \quad \forall j \neq i \tag{6.6}$$

Pour observer l'influence d'un pôle dominant sur la réponse temporelle d'un système linéaire, nous nous allons l'illustrer par l'étude d'une fonction de transfert du second ordre en régime apériodique. Une telle fonction de transfert est équivalente à deux systèmes du premier ordre en série.

[1] À partir des résultats obtenus dans ce chapitre il est déjà clair que la stabilité d'un système dépend également des pôles de sa fonction de transfert

[2] Dans la pratique un rapport de 5 est suffisant pour considérer une domination d'un pôle sur les autres

Prenons l'exemple de la fonction de transfert définie par

$$H(p) = \frac{5}{(p+1)(5p+1)} \tag{6.7}$$

et de décomposition en éléments simples telle que :

$$H(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{5p+1}$$

Par identification on peut écrire $H(p)$ en fonction de deux fonctions de transferts $H_1(p)$ et $H_2(p)$ tel que :

$$\begin{aligned} H(p) &= H_1(p) - H_2(p) \\ H_1(p) &= \frac{6.25}{5p+1} \\ H_2(p) &= \frac{1.25}{p+1} \end{aligned}$$

Par définition, le pôle dominant est donné par $H_1(p)$. Pour observer, l'effet de chacuns des pôles, nous avons tracé les réponses indicielles de ces trois fonctions de transfert (c.f figure 6.7) Nous constatons que la réponse indicielle $s_1(t)$ de la fonction de transfert $H_1(p)$ domine le temps de réponse de la sortie globale $s(t)$.
En conclusion, l'étude des pôles dominants de la fonction de transfert d'un système est, en première approximation, suffisante pour caractériser la rapidité d'un système que se soit en boucle ouverte ou en boucle fermée.

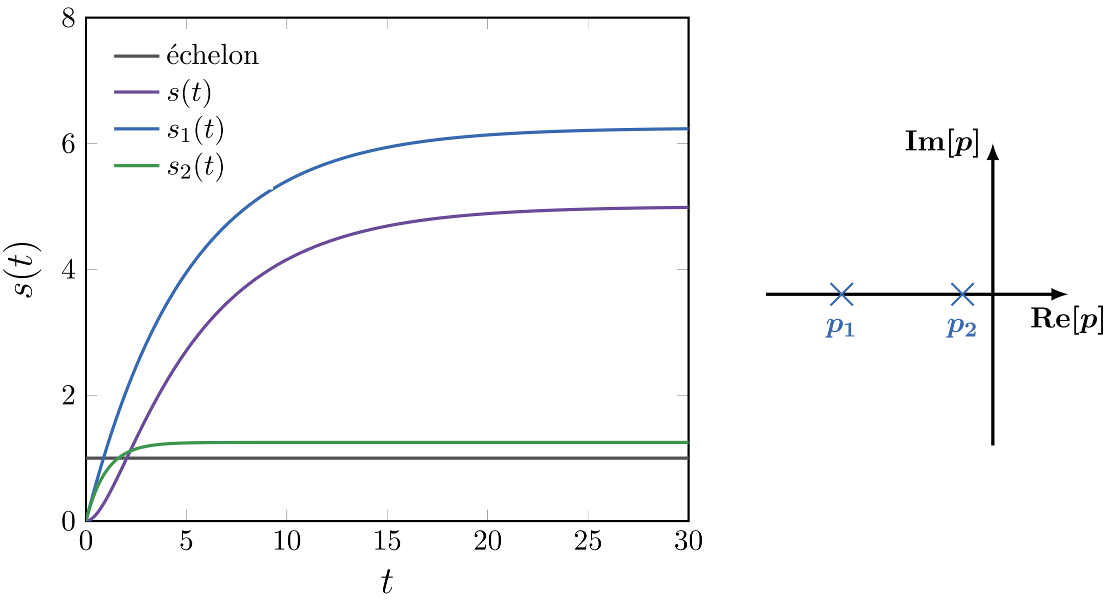


Figure 6.7. – (à gauche) Réponse indicielle $s(t)$ de la fonction de transfert donnée par équation (6.7), ainsi que les réponses indicielles $s_1(t)$ et $s_2(t)$ des fonctions de transferts de sa décomposition en éléments simples. On constate que la réponse du pôle dominant ($s_1(t)$) présente un temps de réponse proche de la réponse globale. (à droite) carte des pôles du système en question

Annexes

A. Alphabet Grec

Nom	Minuscule	Majuscule	Correspondance latine	Usages courants
alpha	α	A	a	angles
bêta	β	B	b	angles
gamma	γ	Γ	g	angles
delta	δ	Δ	d	variations
epsilon	ϵ, ε	E	e	petite quantité
zéta	ζ	Z	z	-
êta	η	H	é (long)	rendement
thêta	θ, ϑ	Θ	th	angles
iota	ι	I	i	-
kappa	κ, $\varkappa$	K	k	-
lambda	λ	Λ	l	longueur, densité linéique
mu	μ	M	m	masse réduite
nu	ν	N	n	fréquence
ksi	ξ	Ξ	ks	coefficient sans dimension
omicron	o	O	o	-
pi	π, ϖ	Π	p	Π :plan
rhô	ρ, ϱ	P	r	densité volumique
sigma	σ, ς	Σ	s	σ : densité surfacique, Σ : Système
tau	τ	T	t	temps, durée relative
upsilon	υ	Y	u	-
phi	ϕ, φ	Φ	f,ph	angles
khi	χ	X	kh	coefficients
psi	ψ	Ψ	ps	fonction d'onde
oméga	ω	Ω	ô	vitesse angulaire, angle solide

Tableau A.1. – Lettres de l'alphabet Grec et leurs usages courants en physique (non exhaustifs)

Références

[1] Régulation automatique (analogique) (REG). http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/.

[2] http://www.demosciences.fr/projets/scilab-xcos/-utilisation/premiers-pas.

[3] Xcos pour les vrais debutants. https://scilab.developpez.com/tutoriels/debuter/apprendre-xcos-debutant/.

[4] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes lineaires (pc7bis), 2005.

[5] B. Bayle and J. Gangloff. Systèmes et asservissements à temps continu, 2009.

[6] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier, and R. Nikoukhah. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. Springer, 2006.

[7] H. Garnier. http://w3.cran.univ-lorraine.fr/hugues.garnier/?q=content/teaching.

[8] Y. Granjon. *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, événements discrets*. Dunod, Paris, 2015.

[9] E. Laroche and H. Halalchi. Asservissement des systèmes lineaires à temps continu. http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student.

[10] O. Le Gallo. *Automatique des systèmes mécaniques : Cours, travaux pratiques et exercices corrigés*. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009.

[11] Joe Mabel. Régulateur à boules au Georgetown PowerPlant Museum à Seattle. CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5694146.

[12] B. Marx. Outils Mathématiques pour l'ingénieur - Traitement du Signal. http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html.

[13] B. Marx. Contrôle des systèmes linéaires. http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/-benoit.marx/enseignement.html.

[14] F. Orieux. *Automatique : Systèmes linéaires et asservissements*. Notes de Cours, Master 2 Outils et systèmes de l'astronomie et de l'Espace, 20017-1018.

[15] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses Marketing, 2004.

[16] R. Papanicola. Schéma-blocs avec PGF/TIKZ. https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/schema-bloc.pdf.

[17] R. Papanicola. *Sciences industrielles PCSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2003.

[18] R. Papanicola. *Sciences industrielles PSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2010.

[19] Marsyas-Travail personnel. Clepsydre athénienne reconstituée, Musée de l'Agora antique d'Athènes. CC BY-SA 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=476174.

[20] Consortium Scilab. Introduction to Scilab. www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf.

[21] S. Steer and Y. Degré. *Scilab : De la théorie à la pratique - II. Modéliser et simuler avec Xcos*. Éditions D-BookeR, 2014.

[22] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. *Automatique des systèmes continus*. Editions Technip.

[23] E. Thomas. TP Scilab. http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP_INFO/TP_info_12_ordre/co/module_TP_1_2_ordre_5.html.

Acronymes

DES Décomposition en Éléments Simples

FTBF Fonction de Transfert en Boucle Fermée

FTBO Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

FTCD Fonction de Transfert de la Chaîne Directe

FTCR Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour

MEI Matière-Énergie-Information

MIMO Multiple Input Multiple Output

SISO Single Input Single Output

SLCI Système Linéaire Continu et Invariant

TL Transformée de Laplace

Glossaire

Asservissement L'asservissment consiste à contrôler un système dynamique pour que sa réponse temporelle suive une consigne variable au cours du temps.

Régulation La régulation est un particulier d'asservissement consistant à garder une consigne constante en présence de perturbation.

Liste des Symboles

t	Variable temporelle
p	Indéterminée de polynôme
$s(t)$	Fonction/Signal dans le domaine temporel
$S(p)$	Fonction/Signal dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$
$u(t)$	Fonction échelon unité ou de Heaviside
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
$r(t)$	Fonction rampe unité
$\mathscr{L}\{f(t)\}$	Transformation de Laplace de la fonction $f(t)$
$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$	Transformation de Laplace inverse de la fonction $F(p)$
$H(p)$	Fonction de transfert
$N(p)$	Polynôme du numérateur d'une fraction rationnelle
$D(p)$	Polynôme du dénominateur d'une fraction rationnelle
ω	Pulsation
$H(j\omega)$	Nombre complexe associé à la fonction de transfert $H(p)$
E_0	Paramètre dimensionnelle d'amplitude de l'entrée
K	Gain statique
ω_0	Pulsation propre
$\mathrm{Im}[H(j\omega)]$	Partie imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
$\mathrm{Re}[H(j\omega)]$	Partie réelle du nombre complexe $H(j\omega)$
ξ	Coefficient d'amortissement

$G(\omega)$	Gain naturel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$G_{dB}(\omega)$	Gain en dB de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$\phi(\omega)$	Déphasage de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
D_k	k-ème dépassement
$t_{5\%}$	Temps de réponse à 5%