



Semestre 6

Signaux et Systèmes

Commande des systèmes

Des principes à la commande proportionnelle

Cybernétique et Automatique

- •Platon utilisait kubernêtikê (Κυβερνητική) pour désigner le pilotage d'un navire (mot à l'origine de gouvernail, gouvernement, etc.). Transformé en Cybernétique par André-Marie Ampère en 1834, puis par Norbert Wiener 1947.
- •Automatique vient du mot Automata : mécanisme automatique permettant de réaliser des opérations susceptibles d'être exécutées par l'homme.
- •Actuellement (*Nouveau Petit Robert*) : « ensemble des disciplines scientifiques et des techniques utilisées pour la conception de la commande et du contrôle des processus »
- •L'automatique a donc notamment pour objet le développement "intelligent" de systèmes de commande automatiques, c'est-à-dire ne nécessitant plus d'intervention humaine une fois conçues.



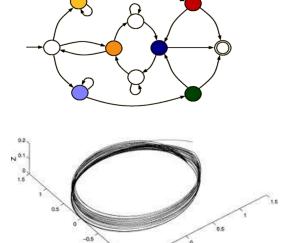


Al-Jaziri Automata, 1315

Automatique/Automatismes

2 types de systèmes sont définis :

- les Systèmes à Evénements Discrets (SED) caractérisés par une évolution saccadée et rythmée par l'apparition d'événements subis
- les systèmes à temps continus (dits systèmes continus).



Même si la discipline mère est l'Automatique, on parle généralement :

- d'Automatismes pour la commande des SED
- d'Automatique (ou contrôle-commande) pour celle des systèmes continus.

Système à temps continu (ou discret)

Un système est un transformateur de signal qui :

- •est sollicité par des entrées exogènes (extérieures au système)
- •génère des sorties
- •possède un comportement dynamique.



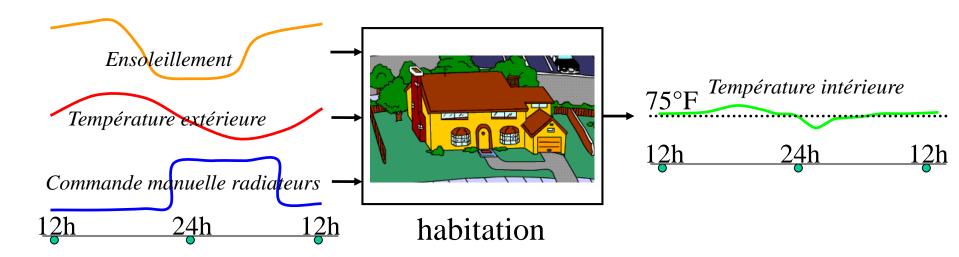
Les entrées peuvent êtres imposées (objectifs, commande) ou subies (entrées de perturbation).

Un système peut transformer

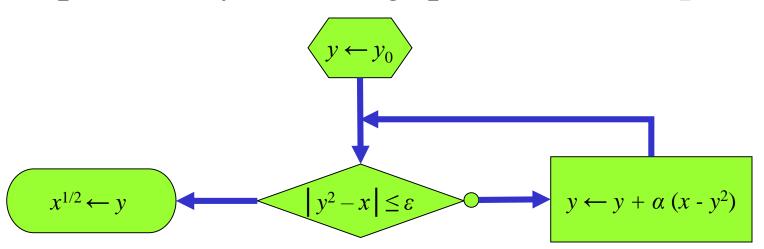
- •des informations et opérer sur la base d'un algorithme logique
- •des énergies quand il est physique.

Les systèmes sont causaux : l'effet ne peut précéder la cause.

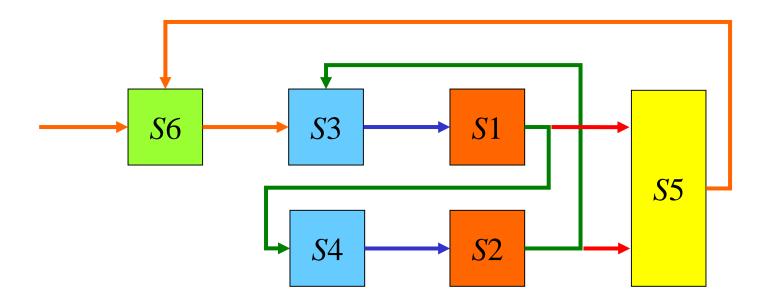
Exemple d'un système physique (thermique)



Exemple d'un système logique (fonction *sqrt*)



Association de systèmes



S1 et S2 sont commandés par S3 et S4 en fonction de leurs états réciproques. Ils contribuent à l'évolution du système S5 qui à travers S6 permet de rétroagir sur S3.

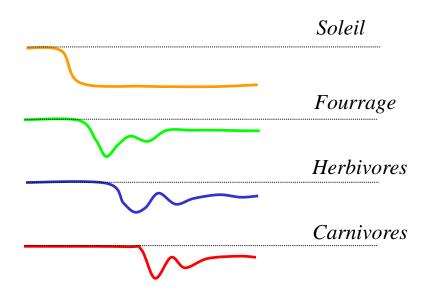
Tout processus de transformation de signaux/informations/énergies peut être modélisé en utilisant une approche dite "système".

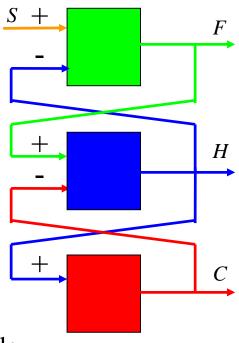
Système naturellement en contre-réaction

Prenons le cas d'une population animale herbivore H qui exploite une zone fourragère F (d'ensoleillement S) et proie d'une population carnivore C.

Imaginons que par une baisse de *S*, *F* diminue avec une certaine dynamique (inertie). De même, par manque de nourriture, *H* va diminuer, puis *C* va diminuer.

F va alors se reconstituer (partiellement, S ayant tout de même diminué), puis H (d'autant plus que C a diminuée) et enfin C.

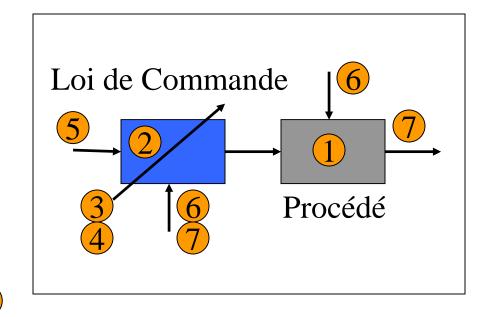




Le fourrage régule les herbivores et réciproquement.

Loi de commande

- génère un signal de commande qui permet de maîtriser l'évolution des sorties d'un système physique (ou pas) appelé aussi *procédé* (1)
- processus d'origine logique (2)
- tient compte de la connaissance du procédé
- établie à partir de spécifications de performance 3
- établie à partir de contraintes 4



tient compte des objectifs (consignes ou signaux de référence) et éventuellement du contexte (milieu ambiant et évolution du procédé)

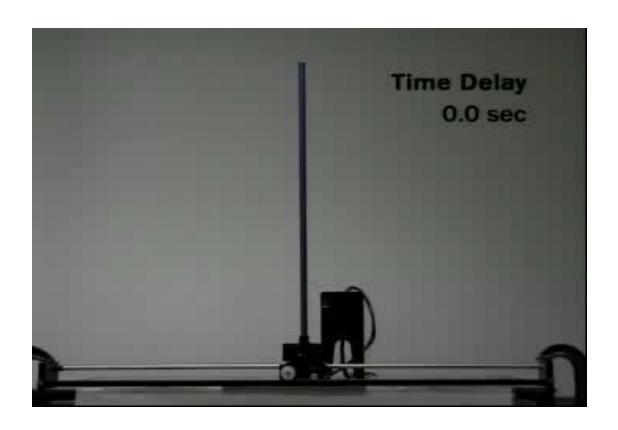
Du système à commander au système de commande en 3 étapes

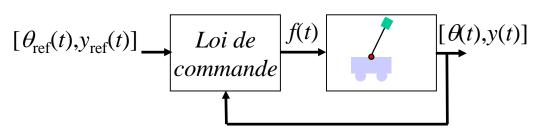
- 1 Identification (modèle de comportement mesures, données)
 ou Modélisation (modèle de connaissance principes physiques, etc.)
 du comportement dynamique du procédé → modèle(s)
- 2 Synthèse (ou design) d'une loi de commande en fonction du modèle(s) et du cahier des charges

 loi de commande mathématique
- 3 *Implantation* physique de la loi de commande sous forme mécanique, hydraulique, pneumatique, electronique analogique ou/et numérique, algorithmique dans un calculateur.

Objectifs d'une loi de commande

- Stabiliser l'état du procédé s'il est naturellement instable
- Asservir l'évolution de la (ou des) sortie(s) du procédé aux variations de la (ou des) consigne(s)
- Générer des performances conformes au cahier des charges
- Atténuer l'influence du milieu ambiant (*perturbations*)
- Assurer des performances indépendantes de l'état réel du procédé (variations, incertitude)



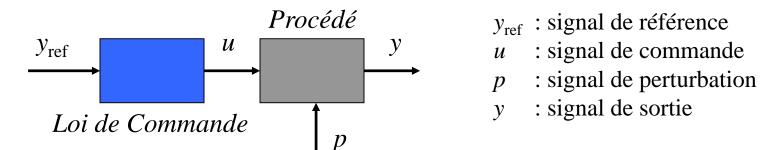


Agir sur un système ... quand on est confiant : la commande dite "en boucle ouverte" 🗇

En fonction de son comportement et de son environnement connu, appliquer à un système le signal de commande (l'entrée) nécessaire pour que sa sortie atteigne une valeur désirée.

On parle aussi de

- •commande en chaîne directe ©
- •commande par précompensation ©
- •commande de type *feed-forward* (alimenter par l'avant)



On considère ici que le système va réagir comme on l'imagine, c'est-à-dire obéir à un comportement nominal.

Ouverture des portes du temple d'Olympie (Héron d'Alexandrie - env. 50 av. JC)

Automatisme très ancien dont l'objectif était de créer une ambiance surnaturelle

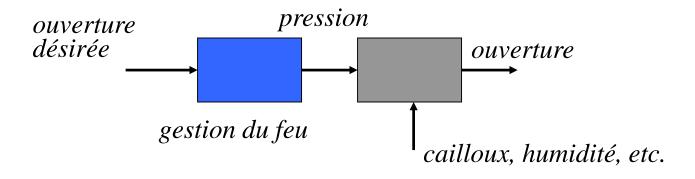
La chaleur du feu augmente le volume de l'air présent dans le socle du foyer qui communique avec la boule préalablement remplie à moitié d'eau.

L'augmentation de pression pousse cette eau vers le bac qui va descendre.

Grâce aux poulies, les portes s'ouvrent.

Le contrepoids remonte.

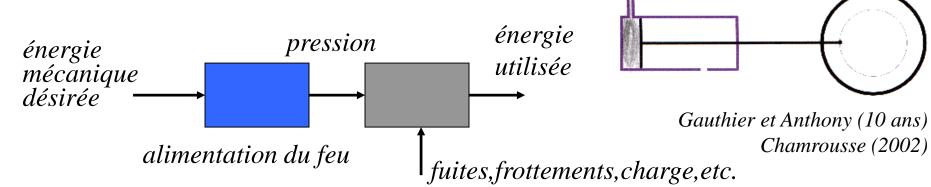
A l'extinction du feu, l'air du socle se refroidit. La pression diminuant, le contrepoids descend. Les portes se referment et l'eau retourne dans la sphère.



Les premières machines à vapeurs (de Héron au XVIII^e siècle)

De nombreuses machines à vapeur ont été imaginées :

- Héron et son éolipile (boule d'Eole)
- Reprise au début du XVIII^e par les anglais (industrie) puis les français (systèmes d'élévation d'eau pour les jardins du roi ...)
- Papin (invention de la soupape de sécurité)
- Cugnot et ... (pour le transport)
- Fin XVIII^e, généralisation en Europe des centrales de production d'énergie



assesses entre

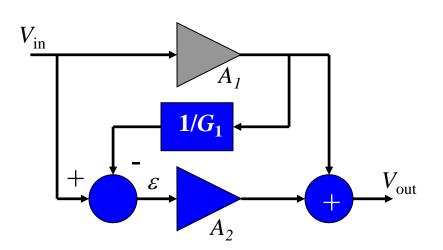
On note généralement une grosse influence du milieu ambiant sur la vitesse obtenue

Linéarisation d'amplificateur (Harold S. Black – 1923, feedforward en sortie)



Résultat obtenu dans le cadre de l'amélioration des premiers systèmes de télécommunication proposé par les laboratoires Bell. Un des principaux problèmes était la présence de phénomènes de distorsion générés par les amplificateurs audio.

L'idée de Black a été de construire un signal correspondant au niveau de distorsion afin de le soustraire au signal amplifié.



$$V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = A_1 + A_2 \left(1 - \frac{A_1}{G_1}\right)$$

 G_1 : gain linéaire désiré

$$V_{\text{out}}/V_{\text{in}} = G_1 \text{ quand } A_2 = G_1$$

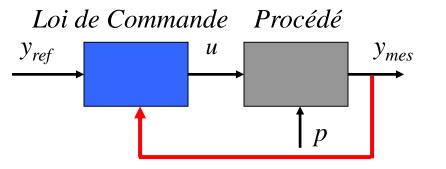
Rq: Tous les éléments de compensation doivent être parfaitement définis

(Ré)Agir sur un système : la commande en boucle fermée

Permet de vérifier l'effet du signal de commande appliquée au procédé pour éventuellement en modifier la valeur.

Consiste à appliquer à l'entrée d'un système une commande dont la valeur dépend de la comparaison des valeurs désirée et mesurée de la sortie à asservir.

On parle aussi de commande par *rétroaction* (*feedback* en anglais) ou de commande par contre-réaction.



y_{ref}: signal de référence
 u: signal de commande
 p: signal de perturbation

y_{mes}: signal de sortie mesurée

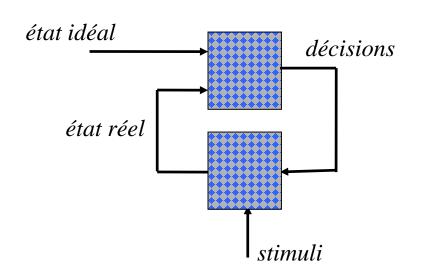
- + Rejet de l'effet des perturbations
- + Atténuation de l'effet d'une connaissance imparfaite du procédé
- + Stabilise la sortie d'un système instable
- Nécessité d'un organe de mesure (capteur)

Remarque : c'est par opposition que la commande en chaîne directe est souvent appelée *commande en boucle ouverte*.

La commande en boucle fermée : une copie de la nature

Tout système naturel qui « fonctionne », c'est à dire qui est maintenu en équilibre est souvent un système en boucle fermée. Le corps humain est un système contre-réactionné extrêmement sophistiqué.

Il est si complexe que sa modélisation complète n'a jamais été réalisée.



Toutes les fonctionnalités sont ici couplées :

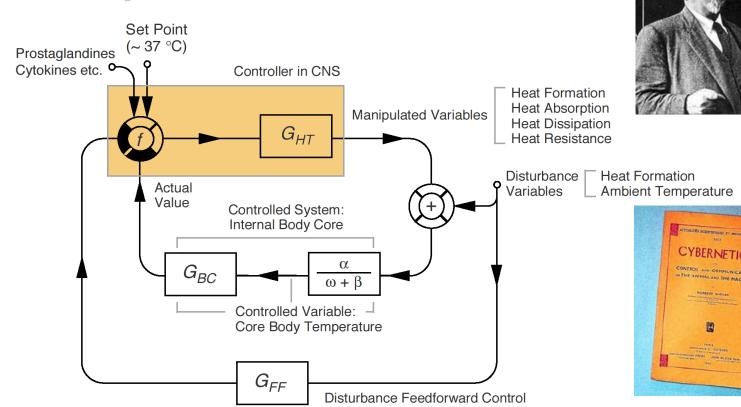
> système hautement mulitvariable

état	stimulus	décision	
température	chaleur	transpiration	
imp. de satiété	horloge	alimentation	
taux de sucre	alimentation	insuline	
deg. de fatigue	mouvement	repos	
équilibre	effort	mouvement	
rempl. estomac	alimentation	digestion	
énergie dispo.	effort	alimentation	
•••	•••	•••	

La cybernétique

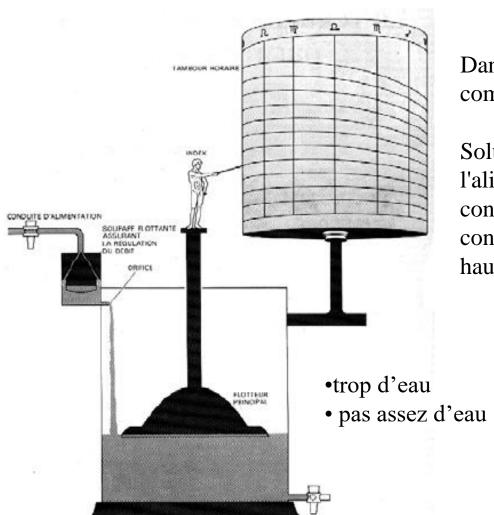
Unis par leur intérêt commun pour les mécanismes de causalité circulaire, entre 1942 et 1953 un groupe interdisciplinaire de mathématiciens, logiciens, anthropologues, psychologues et économistes se donnent pour objectif d'édifier une science générale du fonctionnement de l'esprit. En 1948, Norbert Wiener définit la cybernétique comme une science qui étudie exclusivement les communications et leurs régulations dans les systèmes naturels et artificiels.

Bien que très générale, la cybernétique va alors se focaliser sur l'humain, la copie du vivant (robotique) et la société.



17

Régulateur de niveau d'eau Clepsydre de Ctésibios (III^e av. J. C.)

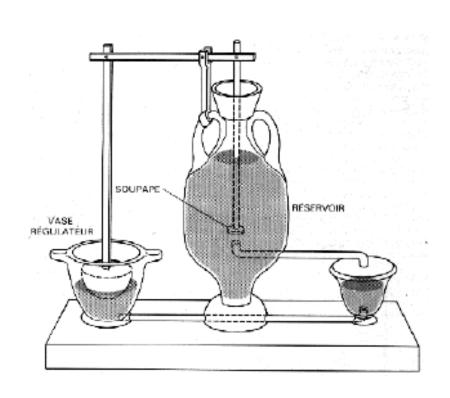


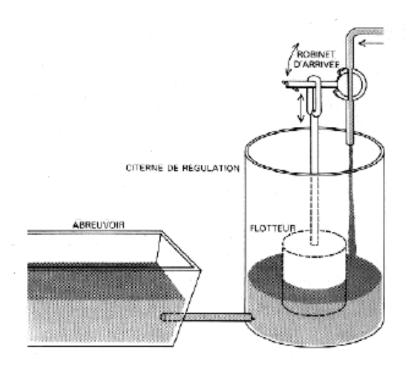
Dans un clepsydre (ancêtre de la montre), comment assurer une alimentation constante ?

Solution : utiliser un réservoir secondaire pour l'alimentation. La hauteur d'eau est maintenue constante afin d'assurer débit de la fuite constant (fonction de la racine carré de la hauteur).

- → le flotteur vient obstruer l'alimentation
- → le flotteur libère l'orifice d'alimentation

Régulateurs de niveau d'eau - améliorations -





Fontaine à vin – Héron d'Alexandrie (Ie av. JC)

Mesure de la hauteur et action d'ouverture/fermeture déportées

Abreuvoir – frères Banu Musa (Bagdad IX^e ap. JC)

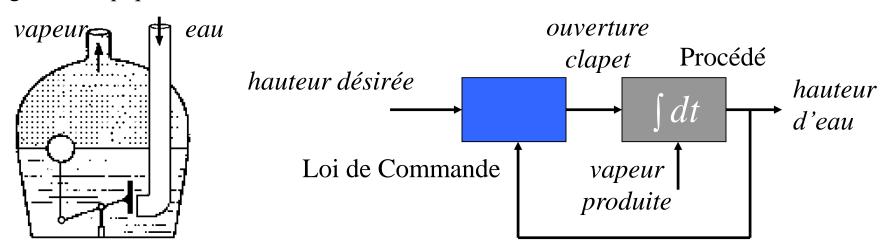
Création d'un actionneur plus précis

Régulateur de niveau d'eau pour chaudière de machine à vapeur (Polzunov - 1765)

- •Dans une chaudière de générateur de vapeur :
 - trop d'eau

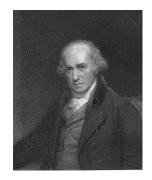
- chauffe insuffisante et pas de vapeur
- pas assez d'eau
- trop de vapeur et risque de surchauffe

Pour l'alimentation en air des fours sidérurgiques, Polzunov propose donc un système de régulation équipé d'un flotteur.



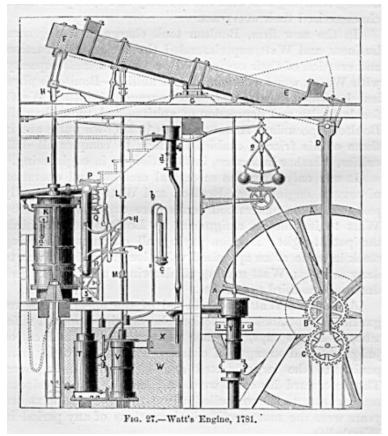
Rq. : Machine à vapeur introduite en Russie par John Desaguliers, inventeur du planétarium et fils d'un protestant rochelais exilé à la suite de la révocation de l'édit de Nantes ...

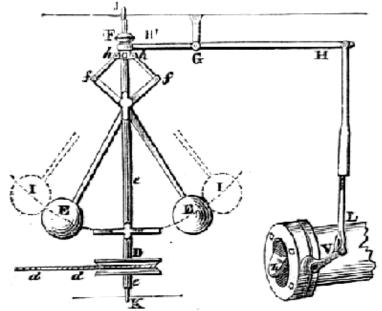
Régulateur à boule de Watt (fly-ball governor : Watt&Boulton - 1780)



Après 10 ans de collaboration et de développement de machines à vapeur, James Watt (le créateur) et Boulton (l'industriel) proposent une machine équipée d'un système générant

une vitesse de rotation régulée.

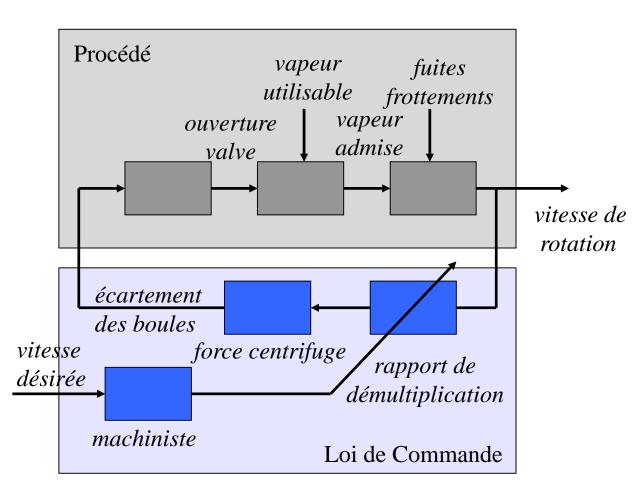


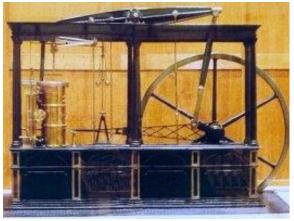


Plus l'axe tourne vite, plus les boules s'écartent et abaissent la bague *hh*'.

La tringlerie permet de réduire l'ouverture de la valve d'alimentation en vapeur.

Régulateur à boule de Watt (2)



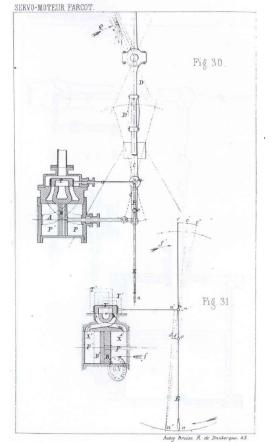


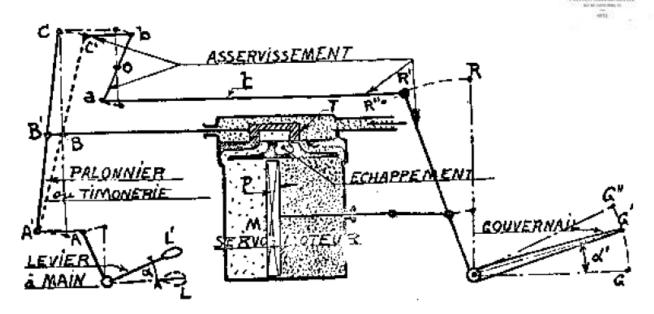
Pour de nombreuses applications, ce régulateur sera utilisé jusqu'au milieu du XX^e siècle.



Servo-moteur – Asservissement de gouvernail (Joseph Farcot - 1873)

Considéré comme l'inventeur moderne des systèmes d'asservissement (avant on faisait essentiellement de la régulation), Farcot cherche à assister un pilote pour manœuvrer un gouvernail (retour à Platon!), les navires étant de taille de plus en plus importante. Travail similaire fait par J. McFarlane en Angleterre.



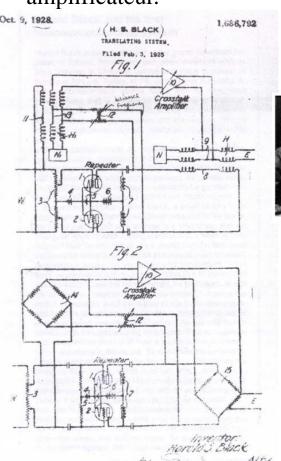


- Le passage de L à L' déplace le tiroir T vers la gauche, puis la vapeur envoie le piston P vers la gauche qui fait passer G en G'.
- Si le gouvernail va trop loin (G''), la tringlerie ramène le tiroir vers la droite et donc permet à G'' de converger vers G'.

Bell Telephone Laboratories – 1927-1945

Harold Black (1927) redécouvre la rétroaction négative et l'utilise pour un amplificateur.

A partir de 1932 Black et ses collègues formalisent le principe des systèmes bouclés.



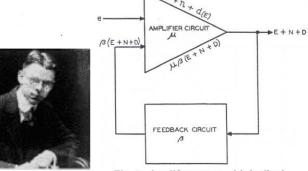


Fig. 1-Amplifier system with feedback.

e—Signal input voltage.
 μ—Propagation of amplifier circuit.

ne—Signal output voltage without feedback.

n—Noise output voltage without feedback.
 d(E)—Distortion output voltage without feedback.

β—Propagation of feedback circuit.

E—Signal output voltage with feedback.

N—Noise output voltage with feedback.

D—Distortion output voltage with feedback.

The output voltage with feedback is E+N+D and is the sum of $\mu e+n+d(E)$, the value without feedback plus $\mu \beta [E+N+D]$ due to feedback.

$$E + N + D = \mu e + n + d(E) + \mu \beta [E + N + D]$$

$$[E + N + D](1 - \mu\beta) = \mu e + n + d(E)$$

$$E + N + D = \frac{\mu e}{1 - \mu \beta} + \frac{n}{1 - \mu \beta} + \frac{d(E)}{1 - \mu \beta}$$

If $|\mu\beta|\gg 1$, $E\doteq -\frac{e}{\beta}$. Under this condition the amplification is independent of μ but does depend upon β . Consequently the over-all characteristic will be controlled by the feedback circuit which may include equalizers or other corrective networks.

En 1934, Harry Nyquist propose l'analyse en stabilité par une approche fréquentielle.

En 1945, Hendrik Bode vulgarise et étend les travaux de Nyquist.

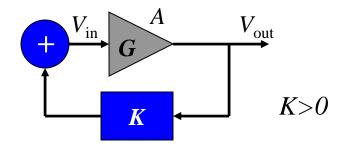




Oscillateur – Feedback positif



Alors que la plupart des lois de commande sont de type feedback négatif, le feedback positif est utilisé pour synthétiser des oscillateurs.



Le fait de réinjecter sur l'entrée d'un amplificateur un signal en phase avec son signal d'entrée, peut engendrer des oscillations divergentes (notamment pour des valeurs de *K* élevées).

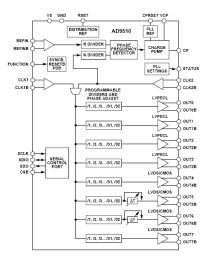
L'effet de la saturation de l'amplificateur génère alors une oscillation bien définie.

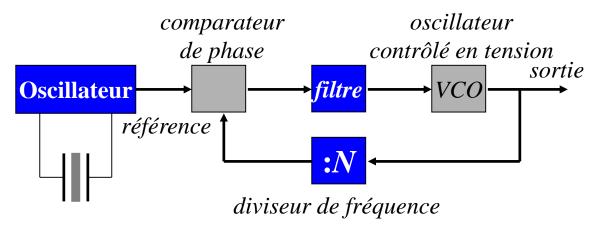
Ce système est volontairement mis en régime instable.

Boucle à verrouillage de phase (PLL : Phase-Locked Loop)



Permet notamment de générer un signal dont la phase est un multiple de celle d'un signal de référence.



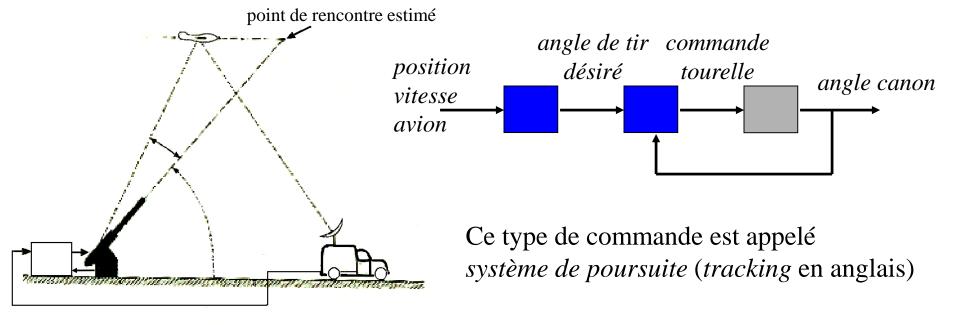


L'objectif étant d'annuler l'écart de phase, la fréquence du signal de sortie converge vers *N* fois celle du signal d'entrée

Système de défense anti-aérien

On dispose d'un radar et d'un canon anti-aérien. Le radar détecte la position et la vitesse de l'avion. L'angle de tir calculé tient compte d'un angle d'avance fonction de la vitesse de l'avion, de sa distance au canon.





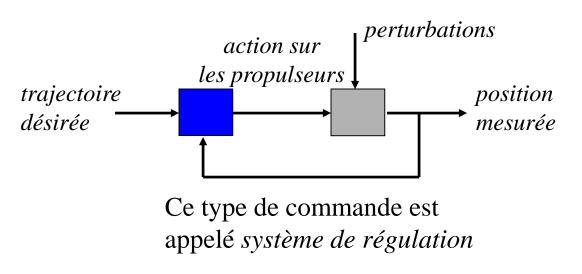
Stabilisation de satellites de communication

On souhaite qu'un satellite reste stabilisé sur une trajectoire naturelle (X, Y, Z).

- Le satellite est soumis à des perturbations telles que vents solaires, pluie de micro-particules, ...
- Ce type de procédé est instable : une modification de l'altitude du satellite rompt l'égalité entre les forces d'attraction terrestre et centrifuge, le satellite a alors tendance à davantage s'écarter indéfiniment de sa trajectoire désirée.



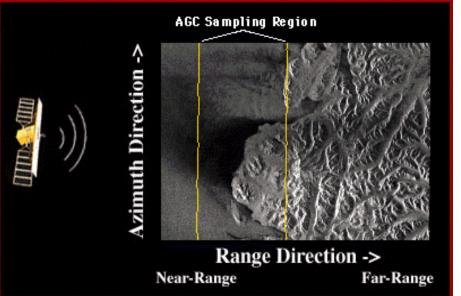
Le bilan des forces appliquées au satellite est modifiée grâce à des mini-propulseurs.

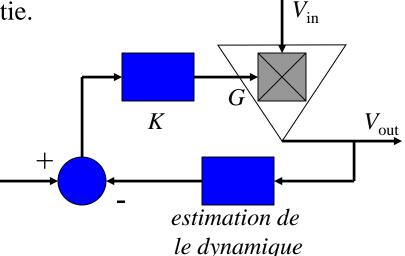


Commande Automatique de Gain (AGC Automatic Gain Control)

Permet d'augmenter le gain d'un amplificateur pour maintenir constante la dynamique de son signal de sortie.

On peut considérer ici que $V_{\rm in}$ joue le rôle du gain (variable) du procédé et G du signal de commande. dynamique admissible



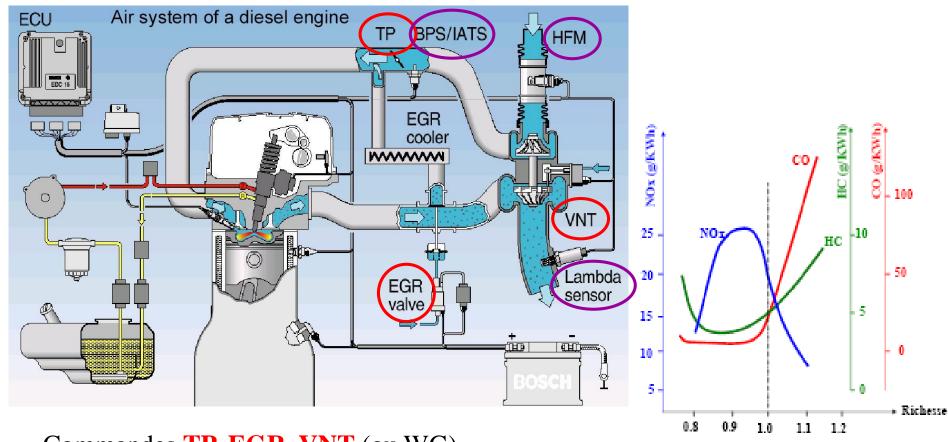


Utilisation en observation par satellite

Suivant le type de sol observé, on ajuste le gain de l'ampli d'observation pour toujours utiliser la plus grande dynamique possible :

eaux calmes \rightarrow gain élevée glaces \rightarrow gain faible

Contrôle moteur (Diesel turbo-compressé)



Commandes **TP**, **EGR**, **VNT** (ou WG) Sorties à réguler : **HFM et BPS** (**pour couple et puissance**), **Lambda** (**pour pollution minimale**)

 $Richesse = 14,7 \frac{m_{Fuel}}{m_{Air}}$

g/km	Euro I ³ (1993)	Euro II ³ (1996)	Euro III (2000)	Euro IV (2005)
CO	2,72	2,2	2,3	1
HC	0,97	0,5	0,2	0,1
NOx	0,91		0,15	0,08

Contrôle Global Châssis: ESP-ABS-TCS



TCS: Acceleration without wheel slip

ESP®: Counteracts skidding



de l'acce le patina trajecto

TCS (ou ASR) - Modulation de l'accélération pour éviter le patinage et maintenir la trajectoire



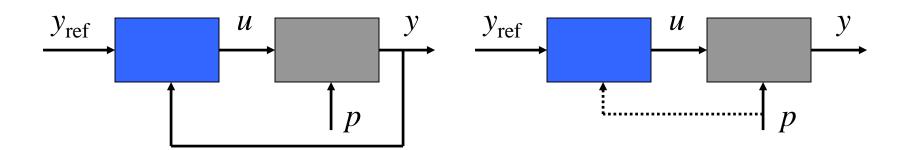
ABS - Modulation du freinage pour éviter le blocage des roues et maintenir la directivité



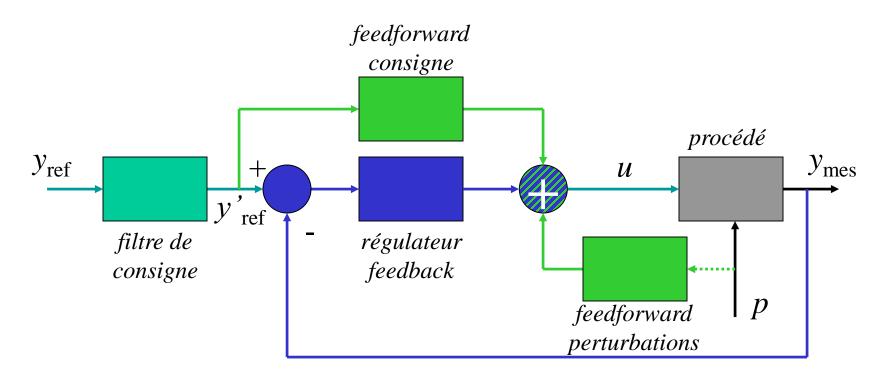
ESP - Micro freinage pour maintien dans la trajectoire demandée ... et corriger un véhicule mal conçu.

Comparaison FeedBack/FeedForward

FeedBack	FeedForward
+ stabilise un système instable	+ ne nécessite pas de capteur
+ rejette des perturbations mal connues	+ commande calculable hors-ligne
+ rejette l'effet des incertitudes	- le système et les perturbations doivent
- nécessite un capteur	être parfaitement connues
- peut déstabiliser un système stable	- ne peut pas stabiliser un système
- nécessite une commande temps réel	instable



Commande par FeedBack & FeedForward



Structure de commande qui possède tous les avantages d'une commande feedback, plus la possibilité d'anticiper sur la réponse à la commande et sur l'effet des perturbations (quand elles sont mesurables).

Modélisation des systèmes

Un procédé ne peut se commander correctement que s'il a fait au préalable l'objet d'une modélisation.

Le niveau de modélisation doit être en adéquation avec le niveau des performances désirées.

Un modèle, qui permet de relier l'évolutions de toutes les sorties à celles de toutes les entrées, peut être obtenu :

- •par modélisation mathématique (modèle de connaissance)
 - > système d'équations différentielles
- •par identification des comportements statiques et dynamiques (modèle de comportement)
 - réponses temporelles paramètres d'un modèle prédéfini
 - réponses fréquentielles

Toutes ces possibilités aboutissent souvent à la définition de fonctions de transfert.

Fonction de transfert (définition)

Une fonction de transfert (ou *transfert*) est la caractérisation de la fonction entrée/sortie (aux variations) d'un système par un modèle linéaire.

Chaque fonction de transfert n'est relative qu'à une entrée et une sortie ; toutes les autres entrées doivent être considérées nulle.

$$\underbrace{e(t)}_{syst\`eme} \underbrace{s(t)}_{syst\`eme}$$

Appelons h(t) la réponse impulsionelle du système.

Toute sortie s(t) du modèle qui est la conséquence d'une entrée e(t) est donnée par le produit de convolution de e(t) par h(t):

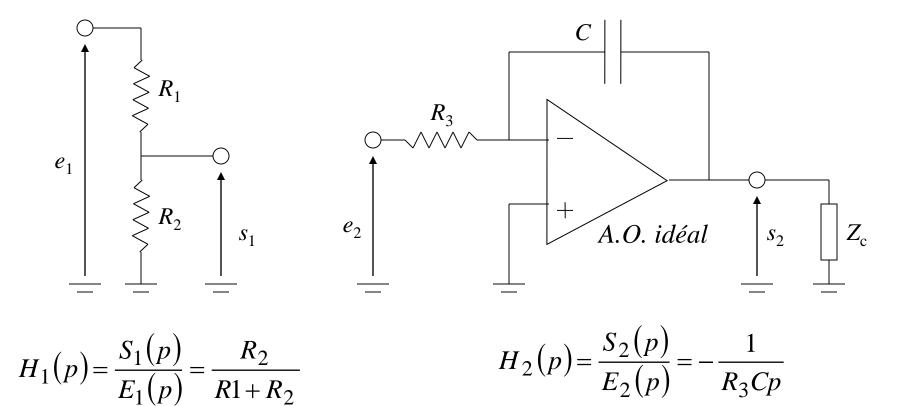
$$s(t) = h(t) * e(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

L'utilisation de la transformée de Laplace permet d'écrire que :

$$S(p) = H(p)E(p)$$

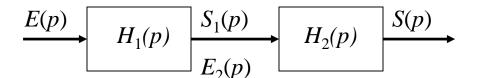
Attention : Cette écriture n'est possible que si e(t) peut être indépendante du système et si s(t) est indépendante du système suivant.

Fonction de transfert (exemples)



Opération sur les transferts

•Transferts en cascade



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

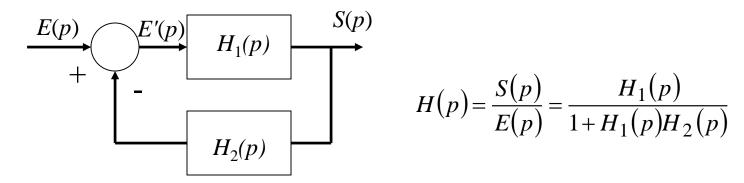
•Transferts en parallèle

$$E(p) \longrightarrow H_{1}(p) \longrightarrow S_{1}(p) \\ + \longrightarrow S(p) \\ H_{2}(p) \longrightarrow S_{2}(p)$$

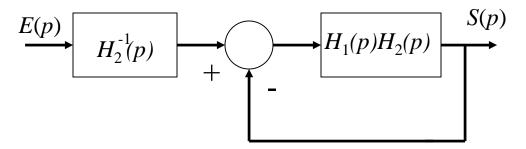
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = H_{1}(p) + H_{2}(p)$$

Opération sur les transferts (suite)

•Transferts en réaction



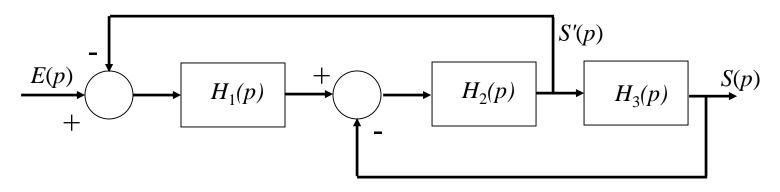
D'un point de vue entrée sortie, équivalent à



Le signal E' a disparu.

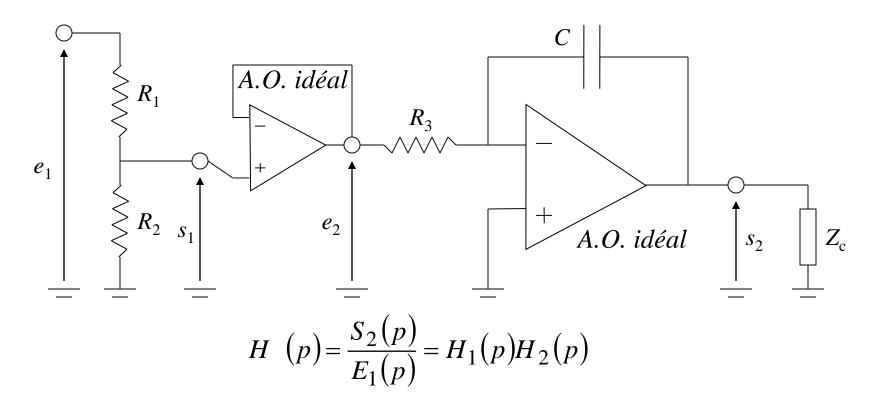
Opération sur les transferts (exercice)

•Systèmes multi-boucles



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} =$$

Opération sur les transferts (exemple)



Remarque : Le produit des fonctions de transfert n'est rendu possible que par la présence du montage suiveur qui a pour objet de découpler les 2 parties du système.

Sans ce montage suiveur (d'impédance d'entrée élevée et d'impédance de sortie faible), les fonctions de transfert H_1 et H_2 n'auraient plus de sens.

Transformation de Laplace (Pierre-Simon de Laplace 1750-1820)

Utilisée pour simplifier la détermination de régime transitoires de systèmes modélisés aux variations par des équations différentielles. S'est avérée le fondement théorique de la méthodologie proposée par Oliver Heaviside (1850-1925).

Utilisation de la variable opérationnelle p (en France, s ailleurs).

Définition

$$L\{f(t)\} = F(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \text{ avec } p = \sigma + j\omega$$

• Application à la fonction échelon (de Heaviside)

Transformation de Laplace (propriétés)

$$L\left\{af\left(t\right)\right\} = aF(p)$$

$$L\{f_1(t)+f_2(t)\}=F_1(p)+F_2(p)$$

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-ap}F(p)$$

$$L \stackrel{f}{e}^{at} f(t) = F(p-a)$$

$$\mathsf{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = pF(p) - f(0^+)$$

$$\mathsf{L}\left\{tf(t)\right\} = -\frac{d}{dp}\,F(p)$$

$$L\{tf(t)\} = -\frac{d}{dp}F(p)$$

$$L\{\int f(t)dt\} = \frac{F(p)}{p} + \frac{\int f(0^{+})dt}{p}$$

$$\mathsf{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{p}^{\infty} F(p)dp$$

Transformation de Laplace (exemples)

• Impulsion de Dirac

• Fonction sinus

$$\mathsf{L}\left\{\sin(\omega_0 t)\right\} =$$

Transformation de Laplace (application)

$$\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=u(t) \text{ avec } y(0)=3$$

Transformation de Laplace inverse

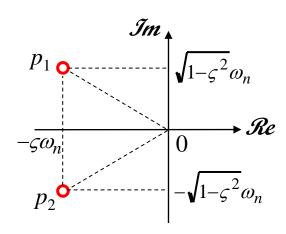
$$Y(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\varsigma\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \text{ avec } p_i = -\varsigma\omega_n \pm j\sqrt{1 - \varsigma^2}\omega_n \text{ pour } \varsigma < 1$$

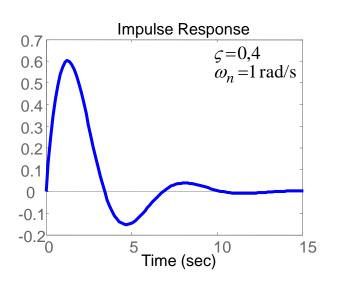
$$Y(p) = \frac{\alpha}{(p-p_1)} + \frac{\beta}{(p-p_2)} \text{ avec } \alpha = -\beta = \frac{-j\varsigma\omega_n}{2\sqrt{1-\varsigma^2}}$$

$$y(t) = \frac{-\mathrm{j}\varsigma\omega_n}{2\sqrt{1-\varsigma^2}} \left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \right) u(t)$$

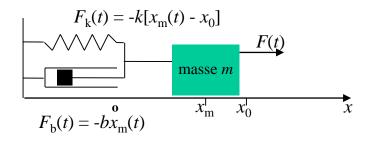
$$y(t) = \frac{-j\varsigma\omega_n}{2\sqrt{1-\varsigma^2}}e^{-\varsigma\omega_n t} \left(e^{j\sqrt{1-\varsigma^2}\omega_n t} - e^{-j\sqrt{1-\varsigma^2}\omega_n t}\right)u(t)$$

$$y(t) = \frac{\varsigma \omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}} e^{-\varsigma \omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\varsigma^2} \omega_n t\right) u(t)$$





Mise en équation et fonction de transfert



- 1. Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour établir l'équation différentielle régissant $x_m(t)$
- 2. En considérant la variation $x(t) = x_m(t) x_0$, donner la fonction de transfert X(p)/F(p)

Théorèmes des valeurs initiale et finale

• Valeur initiale d'un signal

$$s(0^+) = \lim_{p \to \infty} pS(p)$$

• Valeur finale d'un signal

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pS(p)$$

Remarque : ces théorèmes ne s'appliquent que si les limites existent ...

$$Y(p) = \frac{1+3p}{p(p+1)} \quad \Rightarrow \quad y(0^+) =$$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=$$

Réponse fréquentielle

Traduit le comportement harmonique (en régime sinusoïdal établi) d'un système.

Peut être obtenue en remplaçant la variable opérationnelle p de H(p) par j ω où ω est la pulsation

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T.$$
(rad/s) (Hz) (s)

La réponse fréquentielle $H(j\omega)$ est caractérisée par un module et un argument

$$H(j\omega) = \rho(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$$

ou par une partie réelle et une partie imaginaire

$$H(j\omega) = \text{Re}\{H(j\omega)\} + j \text{Im}\{H(j\omega)\}$$

Représentations de la réponse fréquentielle

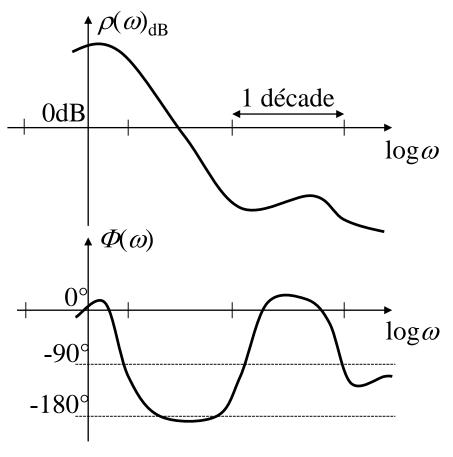


Diagramme de Bode

Echelle des pulsations souvent logarithmique Module souvent en décibel $(20\log_{10}\rho(\omega))$ Argument souvent en degré

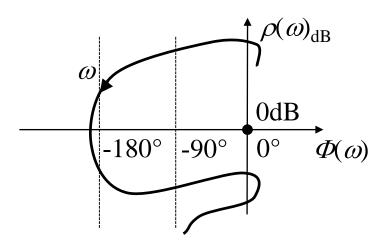
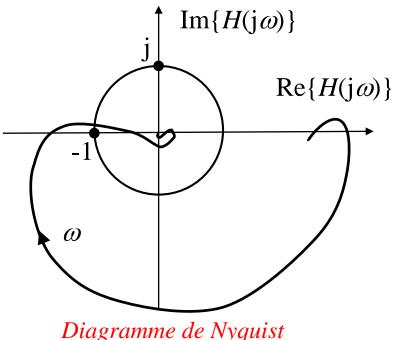
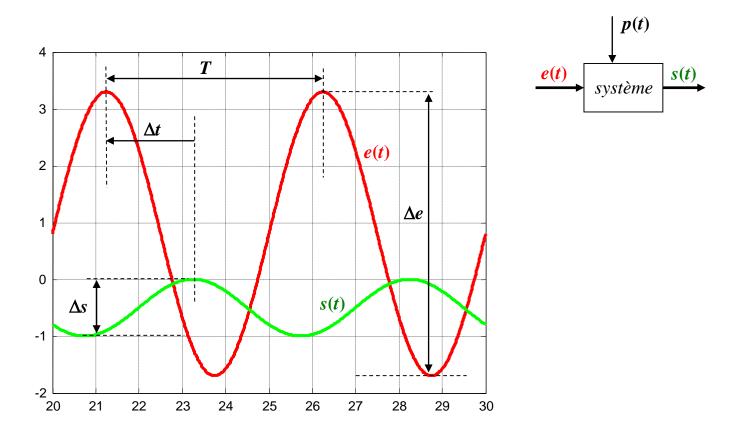


Diagramme de Nichols



Mesure de la réponse fréquentielle



En $\omega = 2\pi/T$ (régime sinusoïdal établi), $H(j\omega)$ caractérisée par

$$\rho(\omega) = \Delta s/\Delta e$$
 et $\phi(\omega) = 2\pi \Delta t/T$

remarque : Δt souvent négatif ... mais pas toujours

Relation fréquentiel - temporel

Compte tenu des théorèmes des valeurs initiale et finale, la réponse fréquentielle $H(j\omega)$ nous informe sur l'effet du système H aux temps courts et aux temps longs.

Le "gain" de
$$H$$
 aux temps courts est donné par $\lim_{\omega \to \infty} H(j\omega)$

Le "gain" de
$$H$$
 aux temps longs est donné par $\lim_{\omega \to 0} H(j\omega)$

Le niveau de $\rho(\omega)$ en haute fréquence indique ainsi la valeur de l'amplification instantanée de H.

Le niveau de $\rho(\omega)$ en basse fréquence indique la valeur de l'amplification de H en régime permanent : gain statique.

Relation fréquentiel – temporel (application)

Indiquer l'effet aux temps courts et aux temps longs des systèmes définis par :

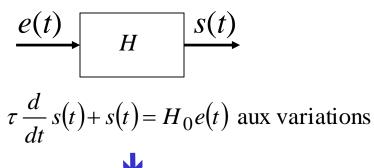
$$H_1(p) = \frac{25}{5+p}$$

$$H_2(p) = \frac{10p}{1+2p}$$

$$H_3(p) = \frac{3(5+p)}{p(1+2p)}$$

$$H_4(p) = \frac{10(5+p)(1+p)}{(1+2p)}$$

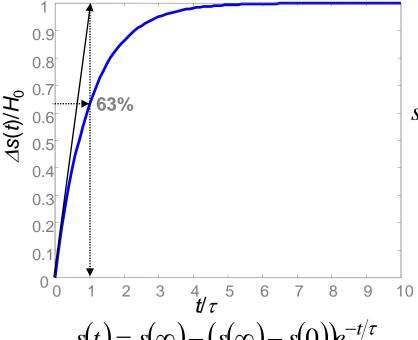
Système du premier ordre (rep. indicielle)



réponse indicielle

détermination de H_0 (gain statique)

$$H_0 = \frac{s(\infty) - s(0)}{e(\infty) - e(0)}$$



détermination de τ (constante de temps)

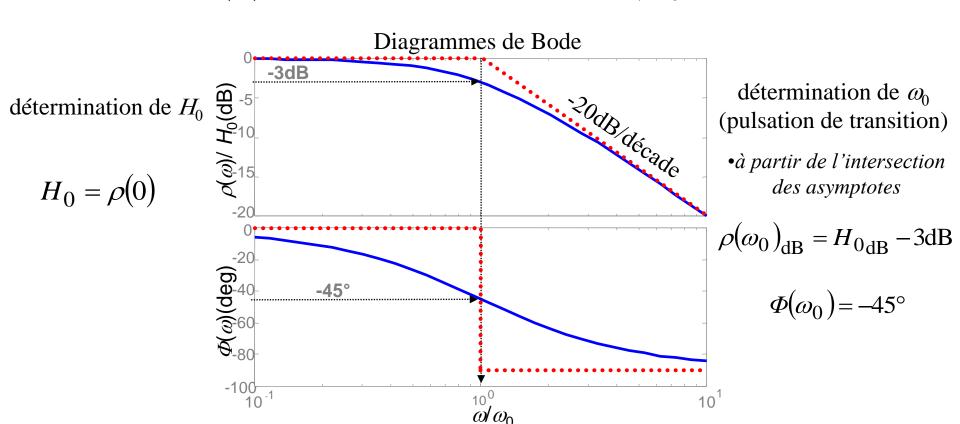
$$s(\tau) = s(0) + 0.63(s(\infty) - s(0))$$

$$\frac{d}{dt}s(0) = \frac{s(\infty) - s(0)}{\tau}$$

Système du premier ordre (rep. fréquentielle)

$$\frac{E(p)}{H(p)} \xrightarrow{S(p)} \frac{S(p)}{H(p)}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_0}{1 + \tau p} \rightarrow H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_0} \text{ avec } \omega_0 = 1/\tau$$



Système du second ordre (rep. indicielle)

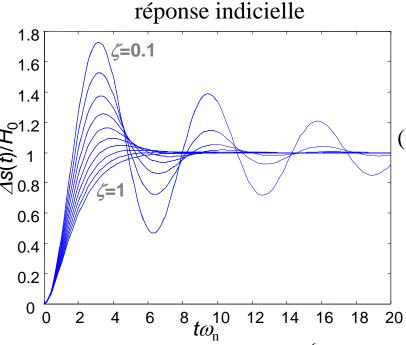
$$\underbrace{\frac{e(t)}{H}}_{2} S(t) + 2\varsigma \omega_{\rm n} \frac{d}{dt} s(t) + \omega_{\rm n}^{2} s(t) = H_{0} \omega_{\rm n}^{2} e(t) \text{ aux variations}$$

détermination de H_0

$$H_0 = \frac{s(\infty) - s(0)}{e(\infty) - e(0)}$$

détermination de ζ

- •à partir du taux de décroissance des oscillations
- •à partir du premier dépassement réduit

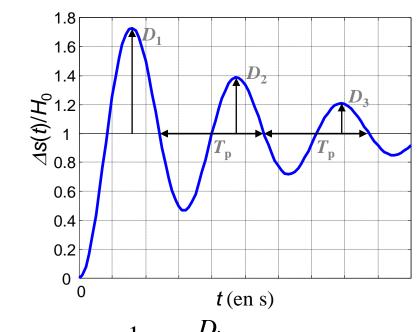


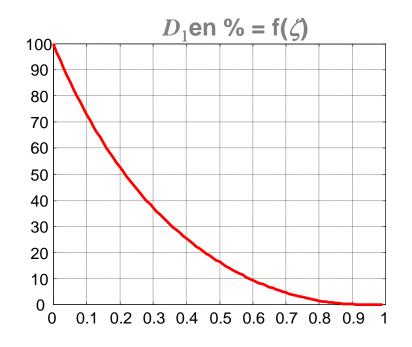
détermination de ω_n (fréquence propre non amortie)

•à partir de la période propre amortie T_p des oscillations

$$s(t) = s(\infty) - (s(\infty) - s(0)) \frac{1}{\sqrt{1 - \varsigma^2}} e^{-\varsigma \omega_n t} \sin \left(\sqrt{1 - \varsigma^2} \omega_n t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \varsigma^2}}{\varsigma} \right)$$

Système du second ordre (rep. indicielle)





$$\varsigma = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{D_i}{D_{i+1}}$$

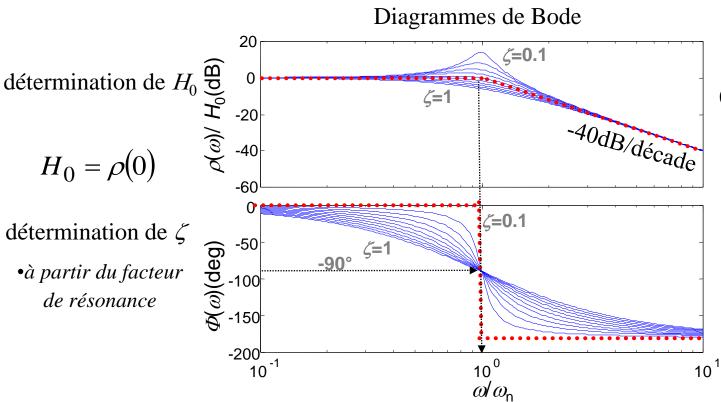
$$\omega_{p} = \frac{2\pi}{T_{p}} = \sqrt{1 - \varsigma^{2}} \omega_{n}$$

$$D_{lréduit} = \frac{D_{l}}{s(\infty) - s(0)} = e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^{2}}}}$$

Remarque : pour ζ <0, les oscillations ont tendance à croître (D_{i+1} est supérieur à D_i), le système est donc instable.

Système du second ordre (rep. fréquentielle)

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_0}{1 + \frac{2\varsigma p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \rightarrow H(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j\frac{2\varsigma\omega}{\omega_n}}$$

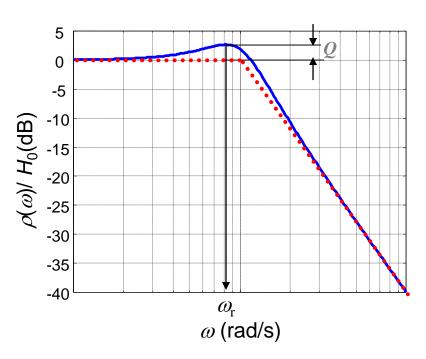


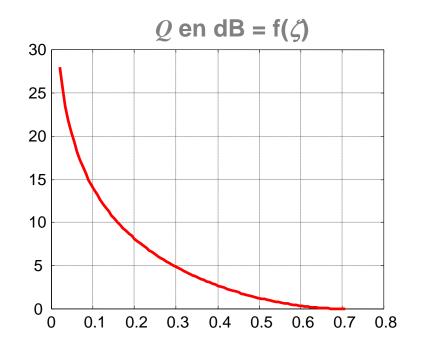
détermination de ω_n (pulsation de transition)

•à partir de la pulsation de résonance ω_r ou de l'intersection des asymptotes

$$\Phi(\omega_{\rm n}) = -90^{\circ}$$

Système du second ordre (rep. fréquentielle)





$$\omega_{\rm r} = \sqrt{1 - 2\varsigma^2} \omega_{\rm n}$$

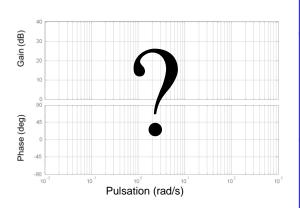
$$\omega_{\rm r} = \sqrt{1 - 2\varsigma^2} \omega_{\rm n}$$

$$Q = \frac{\max_{\omega} \rho(\omega)}{\rho(0)} = \frac{1}{2\varsigma\sqrt{1 - \varsigma^2}}$$

Remarque : le phénomène de résonance n'existe que pour $\zeta < \sqrt{2/2}$.

Réponse fréquentielle (application n°1)

$$H(p) = \frac{1000(1+p)}{(10+p)^2}$$

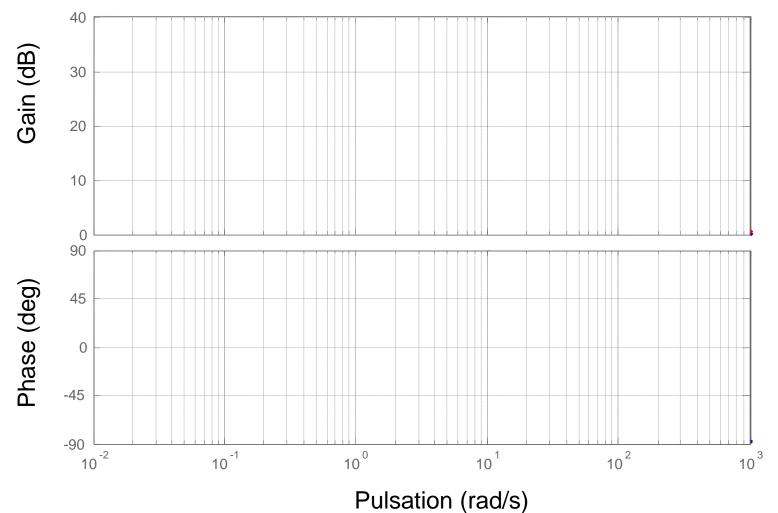


$$H(j\omega) = \frac{10\left(1 + j\frac{\omega}{1}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

	<i>ω</i> <<1	1<< ω<<10	$10 << \omega$
10	$\begin{vmatrix} . & _{dB} = 20 dB \\ \angle . & = 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} . & _{dB} = 20dB \\ \angle . & = 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} . & _{dB} = 20 dB \\ \angle . & = 0 \end{vmatrix}$
$1+j\frac{\omega}{1}$	$\begin{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \end{vmatrix}_{dB} = 0 dB$ $\angle \cdot \cdot = 0$	$\begin{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \\ dB \end{vmatrix} = 20 \log \omega$ $\rightarrow +20 dB/dec$ $\angle \cdot \cdot = +\pi/2$	$\begin{vmatrix} . & _{dB} = 20 \log \omega \end{vmatrix}$ $\rightarrow +20 \frac{dB}{dec}$ $\angle . = +\pi/2$
$\frac{1}{\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{10}\right)^2}$	$\begin{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \end{vmatrix}_{dB} = 0 dB$ $\angle \cdot \cdot = 0$	$\begin{vmatrix} . & _{dB} = 0 dB \\ \angle . & = 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cdot \cdot \cdot \end{vmatrix}_{dB} = 40 - 40 \log \omega$ $\rightarrow -40 dB/dec$ $\angle \cdot \cdot = -\pi$
$H(\mathrm{j}\omega)$	$\begin{vmatrix} . & _{dB} = 20dB \\ \angle . & = 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} . & _{dB} : +20 dB/dec \\ \angle . & = +\pi/2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} . & \\ dB \end{vmatrix} : -20 dB/dec$ $\angle . = -\pi/2$

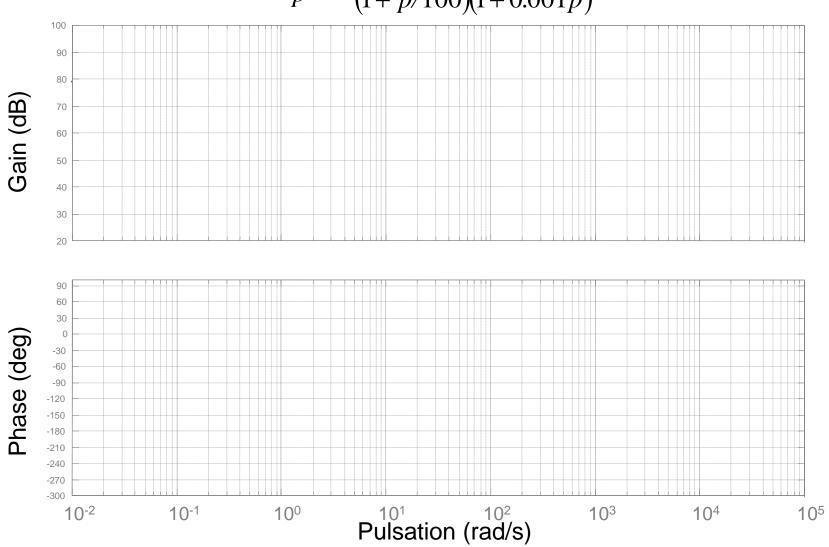
Réponse fréquentielle (application n°1)

$$H(p) = \frac{1000(1+p)}{(10+p)^2}$$

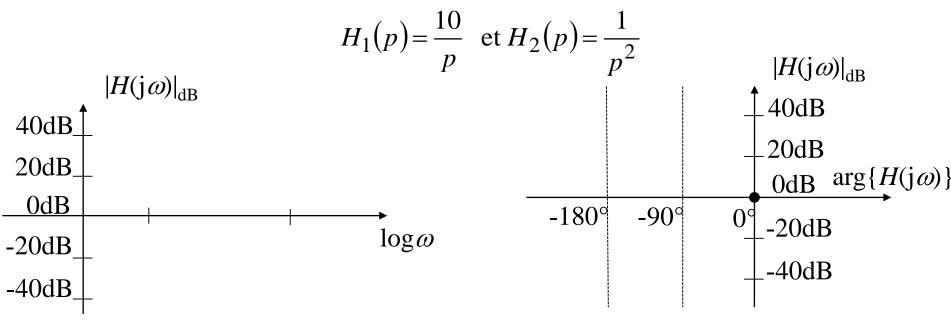


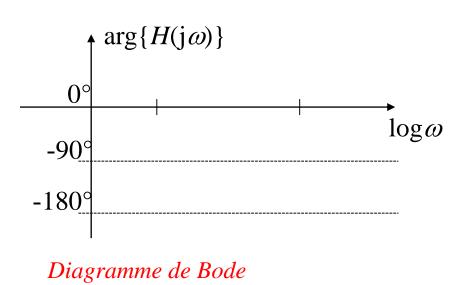
Réponse fréquentielle (application n°2)

$$H(p) = \frac{100}{p} \frac{(1+0.1p)(1+p/2)(1-0.005p)}{(1+p/100)(1+0.001p)^2}$$

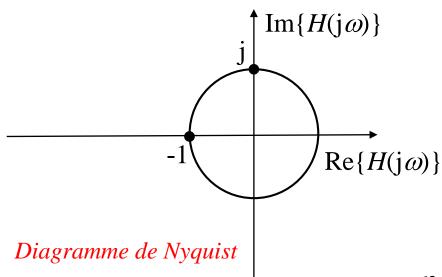


Réponse fréquentielle (application n°3)









Stabilité des systèmes

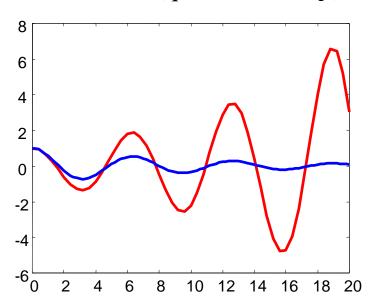
$$E(p) \longrightarrow H(p) \longrightarrow H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

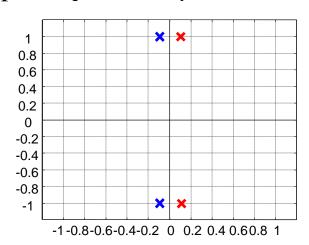
Condition de stabilité

Un système est stable si son régime libre (e(t) = 0) est amorti.

La condition nécessaire est suffisante de stabilité est que les racines de l'équation caractéristique D(p) = 0 soient à partie réelle négative.

Ces racines (qui rendent H(p) infini) sont appelées $p\hat{o}les\ du\ système$.





$$p_{1,2} = -0.1 \pm j$$
 $p_{1,2} = 0.1 \pm j$



Critère algébrique de stabilité Critère de Routh-Hurwitz



$$E(p) \longrightarrow H(p) \longrightarrow H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Permet de vérifier si tous les pôles d'un système sont à partie réelle négative.

Ecrivons
$$D(p)$$
 sous la forme $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n$

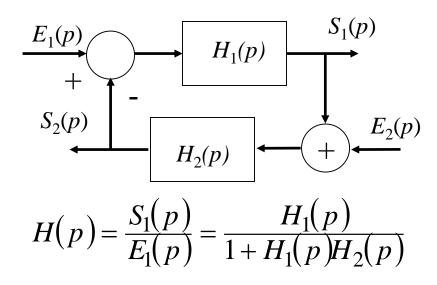
- •si un des coefficients a_i est nul, le système est instable
- •si tous les coefficients a_i ne sont pas de même signe, le système est instable
- •construisons le tableau a_0 , a_2 , ..., a_{2i} , ...

$$a_1, a_3, ..., a_{2i+1}, ...$$

 $b_1, b_3, ..., b_{2i+1}, ...$ avec $b_1 = (a_1 a_2 - a_0 a_3)/a_1, b_3 = (a_1 a_4 - a_0 a_5)/a_1, ...$
 $c_1, c_3, ..., c_{2i+1}, ...$ avec $c_1 = (b_1 a_3 - a_1 b_3)/b_1, c_3 = (b_1 a_5 - a_1 b_5)/b_1, ...$
... etc

le système comporte autant de pôles à partie réelle positive que la première colonne comporte de changements de signe.

Stabilité des systèmes bouclés



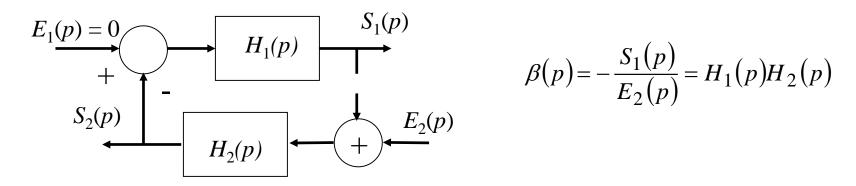
Les pôles de H(p) sont les solutions de l'équation caractéristique $1+H_1(p)H_2(p)=0$, ou de $H_1(p)H_2(p)=-1$.

Les pôles de H(p) résultent donc de la comparaison du transfert $H_1(p)H_2(p)$ à -1.

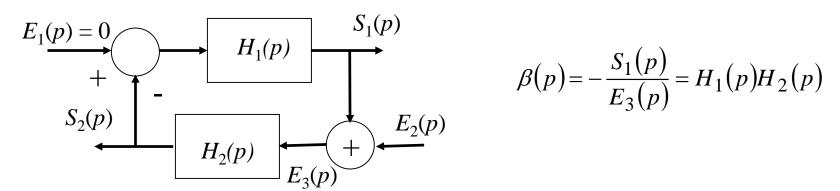
A travers le terme $1+H_1(p)H_2(p)$, le transfert $H_1(p)H_2(p)$ apparaît dans toutes les fonctions de transfert relative à ce système bouclé. Il est appelé *transfert en boucle ouverte*.

Transfert en boucle ouverte

Après avoir ouvert la boucle en un point et y avoir injecté un signal, le transfert en boucle ouverte $\beta(p)$ est obtenu grâce à l'observation du signal qui y revient.



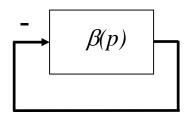
Si le système bouclé ne peut être ouvert, il suffit de comparer le signal en aval du point d'injection au signal qui revient.



lanusse@ipb.fr 66

Critère graphique

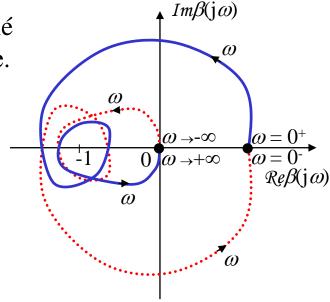
Critère de Nyquist (application du théorème de Cauchy)



Permet de conclure sur la stabilité du système bouclé à partir de l'étude de son transfert en boucle ouverte.

Enoncé: Un système est stable en boucle fermée si sa réponse fréquentielle en boucle ouverte, parcourue de $\omega \to -\infty$ à $\omega \to +\infty$, effectue autour du point -1 dans le sens trigonométrique, un nombre de tour égal au nombre de pôles à partie réelle strictement positive que possède la boucle ouverte.

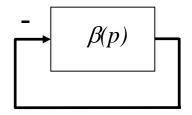
Signalons que $\beta(-j\omega)$ est le symétrique de $\beta(j\omega)$ avec $\omega \in [0, -\infty[$.



-1 entouré 4 fois \rightarrow boucle fermée stable si boucle ouverte avec 4 pôles à partie réelle strictement positive

67

Critère de Nyquist - Exemple



Prenons $\beta(p) = -\frac{K}{1-\tau p}$ avec K et τ positifs.

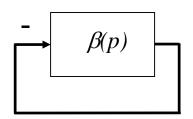
Le pôle $p_0 = \frac{1}{\tau}$ de $\beta(p)$ est à partie réelle strictement positive.

Traçons le lieu de Nyquist de $\beta(j\omega)$ pour différentes valeurs de K.

lanusse@ipb.fr 68

Critère graphique

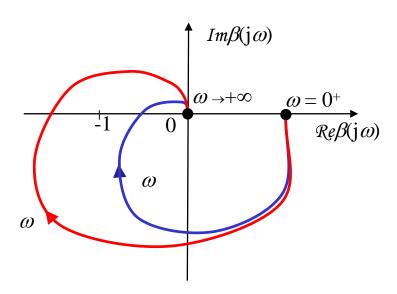
Critère du revers



Version simplifiée du critère de Nyquist

Enoncé: Un système, dont la boucle ouverte ne comporte pas de pôles à partie réelle strictement positive, est stable en boucle fermée si son lieu de Nyquist en boucle ouverte, parcouru de $\omega = 0$ à $\omega \to +\infty$, laisse le point -1 sur sa gauche.

Remarque : un lieu de Nyquist passant exactement sur le point -1 génère un système oscillant. Le point -1 est appelé *point critique*.

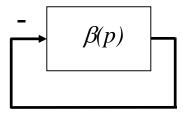


Seule la boucle ouverte qui génère la plus petit des deux lieux correspond à un système stable en boucle fermée

Critère du revers et diagramme de Nichols

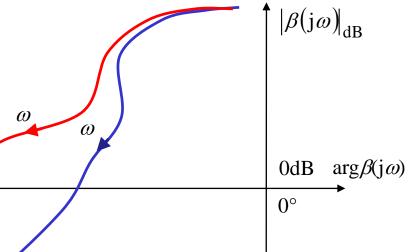
(Nathaniel B. Nichols - MIT - 1947)



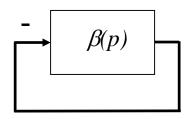


-180°

Le lieux de Nichols en boucle ouverte, parcouru de $\omega = 0$ à $\omega \to +\infty$, doit laisser le point (-180°,0dB) sur sa droite pour que le système soit stable en boucle fermée.



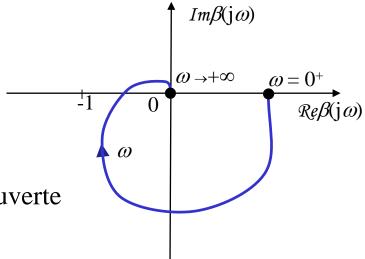
Marges de stabilité



La stabilité en boucle fermée se jugeant sur la distance entre le lieu de Nyquist en boucle ouverte et le point -1, on est amené à mesurer des marges de stabilité :

- •marge de phase
- •marge de gain
- •marge de retard
- •marge de module

Elles correspondent aux plus petites quantités dont il serait nécessaire de modifier la boucle ouverte pour déstabiliser le système en boucle fermée.

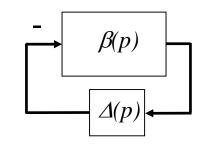


Grandes marges de stabilité

grand degré de stabilité du système bouclé.

Marge de phase

La marge de phase M_{ϕ} est la valeur minimale du déphasage caractérisant Δ (déphaseur pur) qui déstabiliserait le système bouclé de boucle ouverte β :



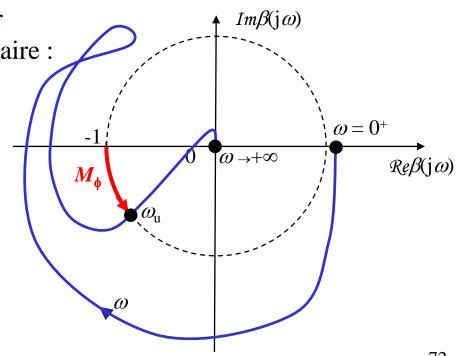
$$\Delta(j\omega)\beta(j\omega) = -1$$
 avec $\arg\Delta(j\omega) = -M_{\Phi}$

Elle se mesure donc à une pulsation ω_u pour laquelle le gain de la boucle ouverte est unitaire :

$$|\beta(j\omega_{\rm u})| = 1$$

et est ici définie par :

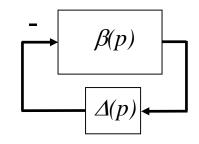
$$M_{\Phi} = 180^{\circ} + \arg \beta (j\omega_{\rm u})$$



Marge de gain

La marge de gain M_G est la valeur minimale du gain caractérisant △ (gain pur) qui déstabiliserait le système bouclé de boucle ouverte β :

$$\Delta(j\omega)\beta(j\omega) = -1$$
 avec $|\Delta(j\omega)| = M_G$

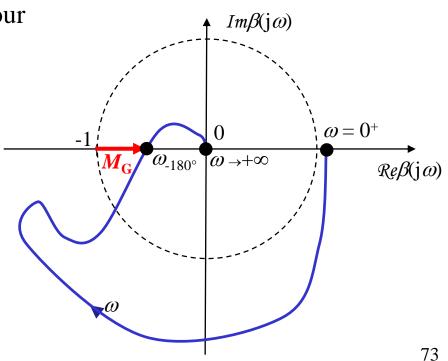


Elle se mesure donc à une pulsation $\omega_{-180^{\circ}}$ pour laquelle pour laquelle la phase de la boucle ouverte est de -180° :

$$\arg \beta (j\omega_{-180^{\circ}}) = -180^{\circ}$$

et est ici définie (en dB) par :

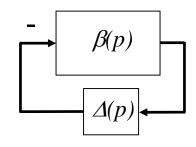
$$M_{\rm G} = -20\log|\beta(j\omega_{-180^\circ})|$$



Marge de retard

La marge de retard M_r est la valeur minimale du retard caractérisant △ (retard pur) qui déstabiliserait le système bouclé de boucle ouverte β :

$$\Delta(j\omega)\beta(j\omega) = -1$$
 avec $\Delta(j\omega) = e^{-jM_r\omega}$



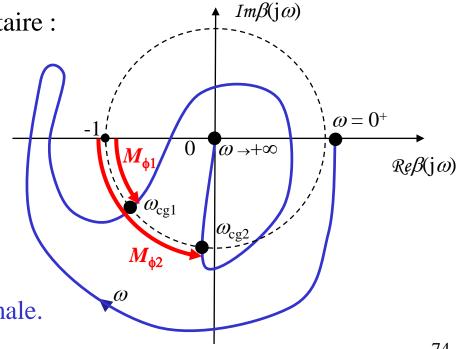
Elle se mesure donc aux pulsations ω_{\parallel} pour laquelle le gain de la boucle ouverte est unitaire :

$$|\beta(j\omega_{\rm u})| = 1$$

et est ici définie par :

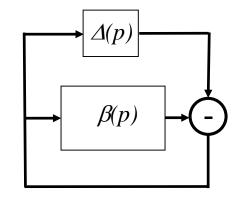
$$M_{\rm r} = \min_{\omega_{\rm u}} \left[\frac{180^{\circ} + \arg \beta(j\omega_{\rm u})}{\omega_{\rm u}} \right]$$

La marge de retard M_r ne correspond pas obligatoirement à la marge de phase minimale.



Marge de module

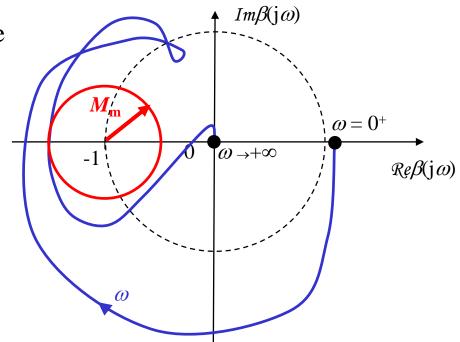
La marge de module $M_{\rm m}$ est la valeur minimale du module caractérisant Δ qui déstabiliserait le système bouclé de boucle ouverte β :



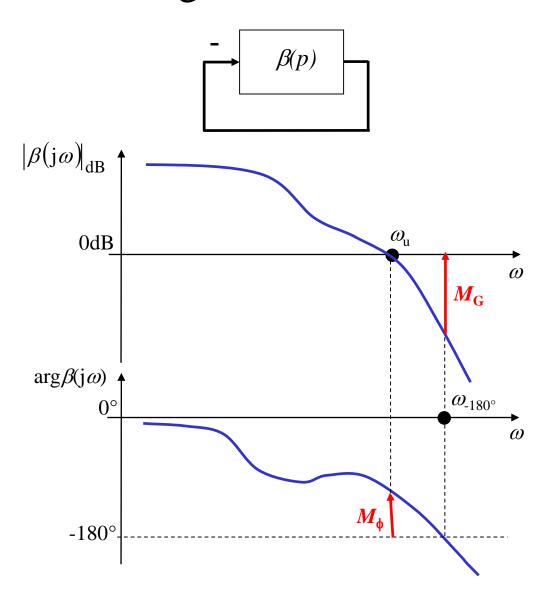
$$\Delta(j\omega) + \beta(j\omega) = -1$$
 avec $\Delta(j\omega) = M_{\rm m}e^{j\theta}$ et $-\pi \le \theta \le \pi$

La marge de module $M_{\rm m}$ mesure la distance minimale que sépare le lieu de Nyquist en boucle ouverte, $\beta(j\omega)$, du point -1 :

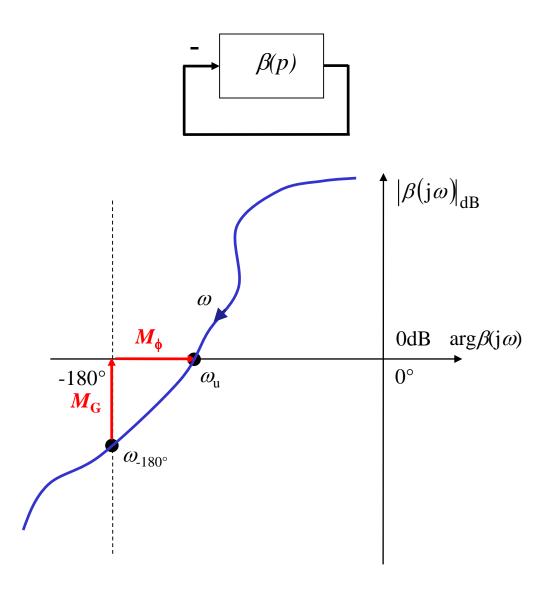
$$M_{\rm m} = \min_{\omega} |1 + \beta(j\omega)|$$



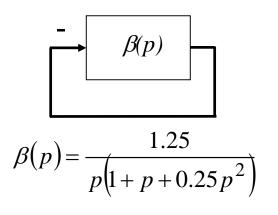
Marges de phase et de gain et diagrammes de Bode



Marges de phase et de gain et diagrammes de Nichols



Mesure des marges de stabilité Application

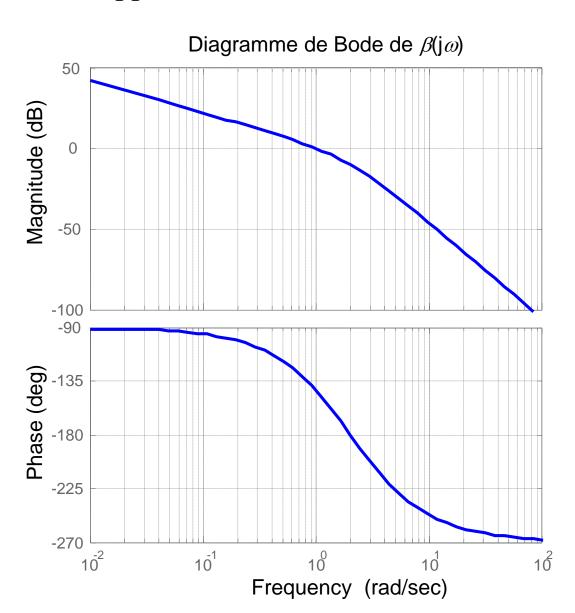


$$\omega_{\rm u} = {\rm rad/s}$$

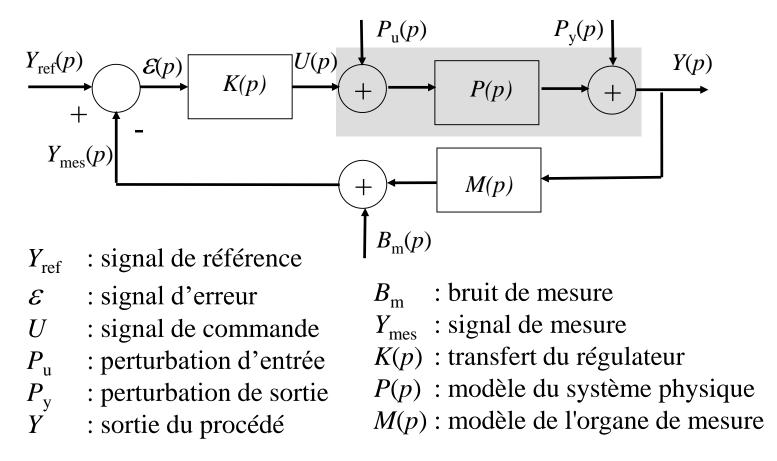
$$M_{\phi}$$
 =

$$M_{\rm G} = {
m dB}$$

$$M_{\rm r} =$$
 s

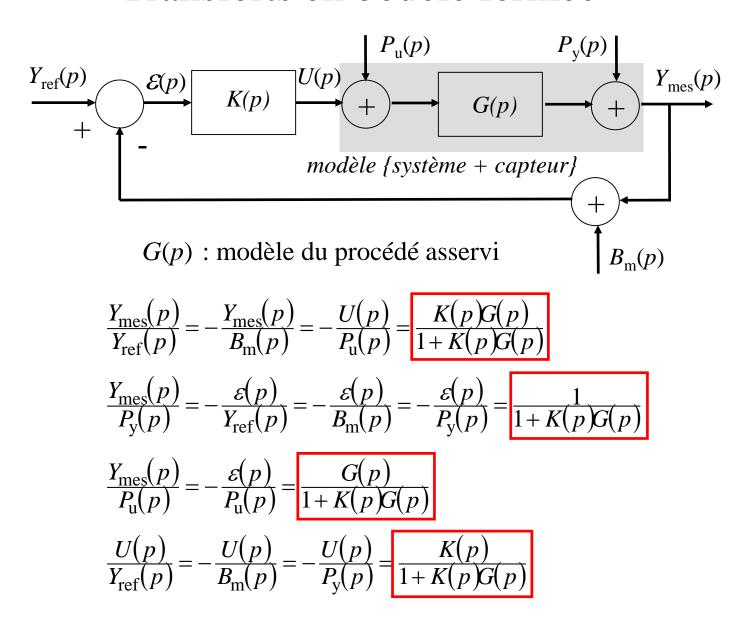


La boucle de commande



Le régulateur K(p) doit permettre d'asservir avec précision et rapidité le signal de sortie Y (en fait sa mesure $Y_{\rm mes}$) sur sa valeur de référence $Y_{\rm ref}$, en rejetant l'effet des perturbations $P_{\rm u}$ et $P_{\rm v}$.

Transferts en boucle fermée



Atténuation de la sensibilité aux incertitudes

Comparons de l'incertitude relative des transferts Y/Y_{ref} obtenus avec des commandes par pré-compensation et en boucle fermée.

Par pré-compensation :
$$\frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)} = F(p)G(p)$$

 $\frac{\partial \{F(p)G(p)\}}{F(p)G(p)} = \frac{\partial G(p)}{G(p)}$ puisque le transfert F(p) est parfaitement connu (imposé par le concepteur)

En boucle fermée :
$$\frac{Y_{\text{mes}}(p)}{Y_{\text{ref}}(p)} = T(p) = \frac{K(p)G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

Calculons la fonction de sensibilité S(p) définie par le rapport : $\frac{\partial T(p)}{T(p)} / \frac{\partial G(p)}{G(p)}$

$$S(p) = \frac{\partial T(p)}{\partial G(p)} / \frac{T(p)}{G(p)} = \frac{\partial \frac{K(p)G(p)}{1 + G(p)K(p)}}{\partial G(p)} / \frac{K(p)}{1 + K(p)G(p)} = \frac{K(p)}{(1 + K(p)G(p))^2} \frac{1 + K(p)G(p)}{K(p)} = \frac{1}{1 + K(p)G(p)} = \frac{1}{1 + K(p)G(p)$$

Plus le produit K(p)G(p) est grand et plus la sensibilité de $Y_{\text{mes}}(p)/Y_{\text{ref}}(p)$ à l'incertitude portant sur G(p) est atténuée par une commande en boucle fermée.

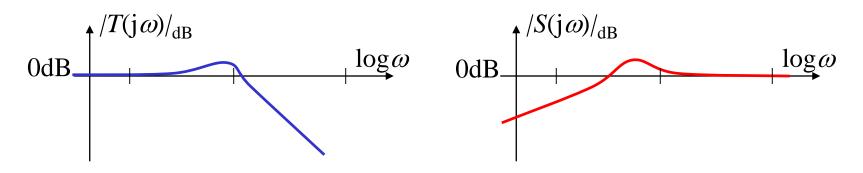
Etude qualitative de la fonction sensibilité S(p)

On peut remarquer que la sensibilité S(p) est liée à la fonction de transfert T(p)

$$S(p)+T(p) = \frac{1}{1+K(p)G(p)} + \frac{K(p)G(p)}{1+K(p)G(p)} = 1$$

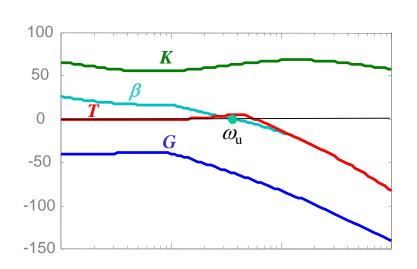
La fonction de transfert T(p) est souvent appelée fonction sensibilité complémentaire.

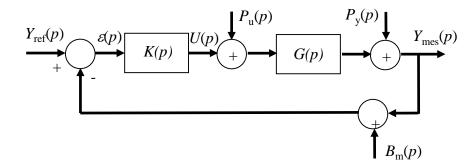
Dans le cadre de l'asservissement de Y_{mes} sur Y_{ref} , la réponse fréquentielle $T(j\omega)$ est généralement de type passe-bas.



La diminution de la sensibilité *S* à donc lieu en basse fréquence quand *T* est de l'ordre de 1, c'est-à-dire quand le produit *KG* est grand devant 1.

Allure de la fonction de sensibilité T





$$T(p) = \frac{Y_{\text{mes}}(p)}{Y_{\text{ref}}(p)} = -\frac{Y_{\text{mes}}(p)}{B_{\text{m}}(p)} = -\frac{U(p)}{P_{\text{u}}(p)} = \frac{K(p)G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

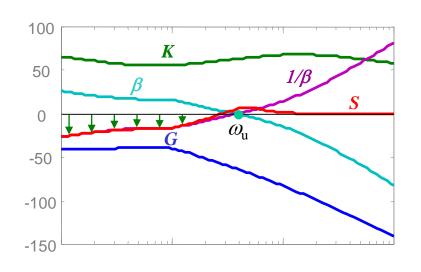
•
$$\omega << \omega_{\text{\tiny II}} \rightarrow KG = \beta >> 1 \rightarrow T \approx 1$$

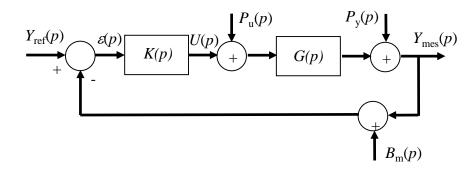
•
$$\omega >> \omega_{\rm n} \rightarrow KG = \beta << 1 \rightarrow T \approx \beta$$

Les variations du signal de référence et du bruit de mesure sont transmises en basse fréquence, et atténuées en haute fréquence par le facteur β .

Le signal de commande s'oppose à la perturbation d'entrée en basse fréquence.

Allure de la fonction de sensibilité S





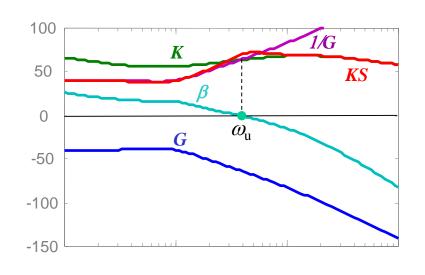
$$S(p) = \frac{Y_{\text{mes}}(p)}{P_{y}(p)} = \frac{1}{1 + K(p)G(p)}$$

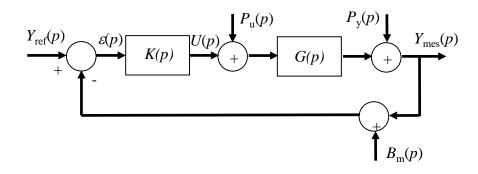
•
$$\omega << \omega_{\text{u}} \rightarrow KG = \beta >> 1 \rightarrow S \approx 1/\beta$$

•
$$\omega >> \omega_{\rm u} \rightarrow KG = \beta << 1 \rightarrow S \approx 1$$

La boucle fermée permet de réduire l'effet en basse fréquence des variations d'une perturbation de sortie d'un facteur $1/\beta$ (gain de 1 en boucle ouverte).

Allure de la fonction de sensibilité KS



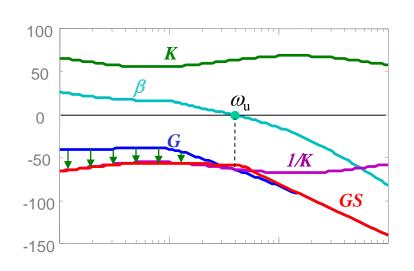


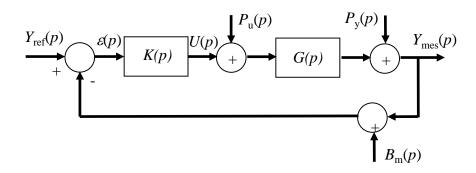
$$KS(p) = \frac{U(p)}{Y_{\text{ref}}(p)} = -\frac{U(p)}{B_{\text{m}}(p)} = -\frac{U(p)}{P_{\text{y}}(p)} = \frac{K(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

- $\omega << \omega_{\text{u}} \rightarrow KG = \beta >> 1 \rightarrow KS \approx 1/G$
- $\omega >> \omega_{\text{u}} \rightarrow KG = \beta << 1 \rightarrow KS \approx K$
- $\omega = \omega_{\text{u}} \rightarrow KG = 1 \rightarrow 1/G = K$

Les variation du signal de référence, du bruit de mesure et de la perturbation de sortie sont amplifiées en haute fréquence au niveau du signal de commande d'un le facteur *K*.

Allure de la fonction de sensibilité GS





$$GS(p) = \frac{Y_{\text{mes}}(p)}{P_{\text{u}}(p)} = \frac{G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

- $\omega << \omega_{\text{u}} \rightarrow KG = \beta >> 1 \rightarrow GS \approx 1/K$
- $\omega >> \omega_{\text{u}} \rightarrow KG = \beta << 1 \rightarrow GS \approx G$
- $\omega = \omega_{11} \rightarrow KG = 1 \rightarrow G = 1/K$

Compte tenu d'une perturbation d'entrée, la boucle fermée permet en basse fréquence de passer d'un gain G (commande en chaîne directe) à un gain 1/K.

Performances d'une loi de commande

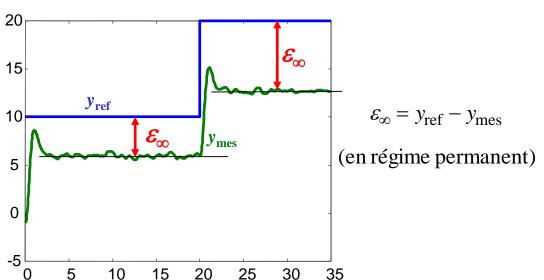
Une loi de commande doit notamment permettre d'asservir la sortie mesurée du procédé avec :

- précision (écart faible entre valeur désirée et valeur obtenue)
- rapidité (phénomènes transitoires aussi courts que possible)
- un bon degré de stabilité (phénomènes transitoires relativement bien amortis).

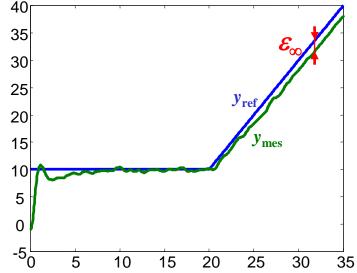
Précision

Quand le procédé est en régime établi (ou permanent), la précision de la loi de commande est estimée à travers l'écart (ou erreur) absolu ε_{∞} entre le signal de référence et la sortie mesurée.

Plus l'écart est faible, plus la loi de commande est précise.



L'écart absolu est ici une erreur statique. Il peut être différent suivant le niveau des signaux exogènes

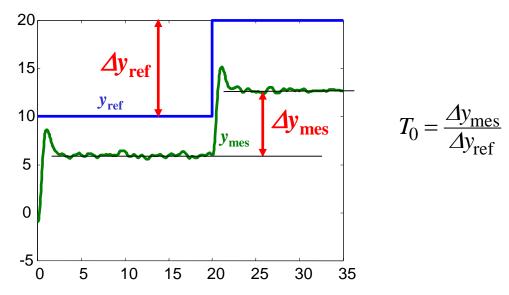


Le signal de référence est ici une rampe. L'écart absolu est appelé erreur de traînage

Gain statique/erreur statique

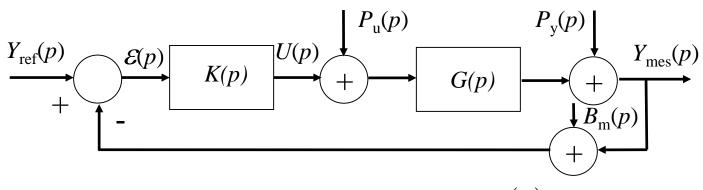
Lors de variations de type échelon du signal de référence, la précision peut aussi être analysée à travers le gain statique T_0 défini par le rapport des variations de la sortie mesurée sur les variations du signal de référence.

Plus le gain statique est proche de 1, plus la loi de commande est précise.



Un gain statique de 1 ne garanti généralement pas une erreur statique nulle. Lors d'essai indiciel, les mesures du gain statique et de l'erreur statique sont donc nécessaires pour estimer la précision de la loi de commande.

Relation entre précision et gain de boucle



$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+\beta(p)} \left(Y_{\text{ref}}(p) - B_{\text{m}}(p) - P_{\text{y}}(p) \right) - \frac{G(p)}{1+\beta(p)} P_{\text{u}}(p)$$

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{p \to 0} \frac{p}{1+\beta(p)} \left(Y_{\text{ref}}(p) - B_{\text{m}}(p) - P_{\text{y}}(p) - G(p) P_{\text{u}}(p) \right)$$

Si
$$b_{\rm m}(t) = p_{\rm u}(t) = p_{\rm y}(t) = 0$$

•
$$y_{\text{ref}}(t) = y_{\text{ref0}} u(t)$$
 alors $\varepsilon_{\infty} = \frac{y_{\text{ref0}}}{1 + \lim_{p \to 0} \beta(p)}$

$$T_0 = \frac{\Delta y_{\text{mes}}}{\Delta y_{\text{ref}}} = \lim_{p \to 0} \frac{\beta(p)}{1 + \beta(p)} = \lim_{p \to 0} T(p)$$

•
$$y_{\text{ref}}(t) = \alpha t^n u(t)$$
 alors $\varepsilon_{\infty} = \lim_{p \to 0} \frac{n! \alpha p^{-n}}{1 + \beta(p)}$

Rapidité

La rapidité de la loi de commande peut se mesurer dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel.

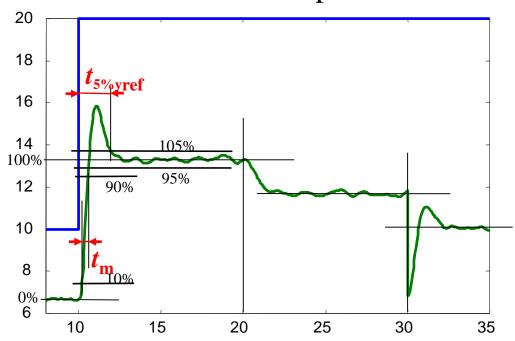
Dans le domaine temporel, la rapidité se mesure notamment par :

- le temps de montée et de réponse lors de la réponse à la consigne
- les temps de réponses nécessaires au rejet des perturbations.

Dans le domaine fréquentiel, la rapidité se mesure notamment par :

- la bande passante vis-à-vis de la réponse à la consigne
- les bandes de rejet vis-à-vis des perturbations.

Rapidité Domaine temporel



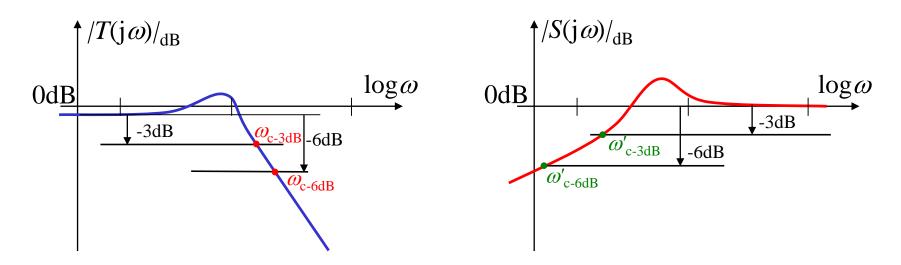
Lors de la réponse à la consigne, le temps de montée, $t_{\rm m}$, est défini comme le temps nécessaire pour que la sortie passe de 10% à 90% de sa variation permanente.

Le temps de réponse à 5%, $t_{5\%yref}$, est défini comme le temps nécessaire pour que la sortie demeure comprise entre 95% et 105% de sa variation permanente.

Le temps de rejet des perturbations n'est mesurable que quand le rejet est parfait.

Rapidité

Domaine fréquentiel



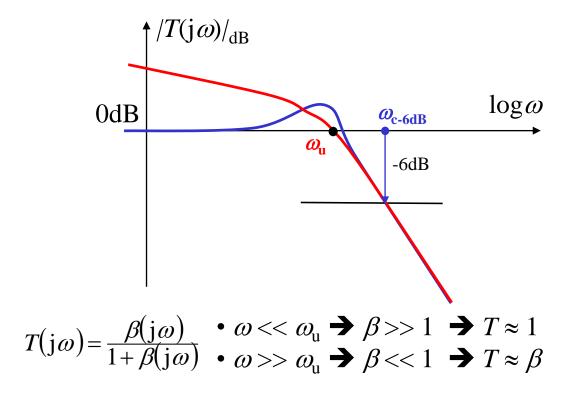
La bande passante ou de rejet, à -6dB par exemple, est définie comme la plage fréquentielle [0, *pulsation de coupure*] telle que :

$$|T(j\omega)|_{dB} \ge |T(0)|_{dB} - 6dB$$
 pour $\omega \le \omega_{c-6dB}$

$$|S(j\omega)|_{dB} \le |S(\infty)|_{dB} - 6dB$$
 pour $\omega \le \omega'_{c-6dB}$

 $\omega_{\text{c-6dB}}$ est appelée pulsation de coupure à -6dB (division d'un facteur 2)

Relation entre fréquences au gain unité en boucle ouverte et de coupure en boucle fermée

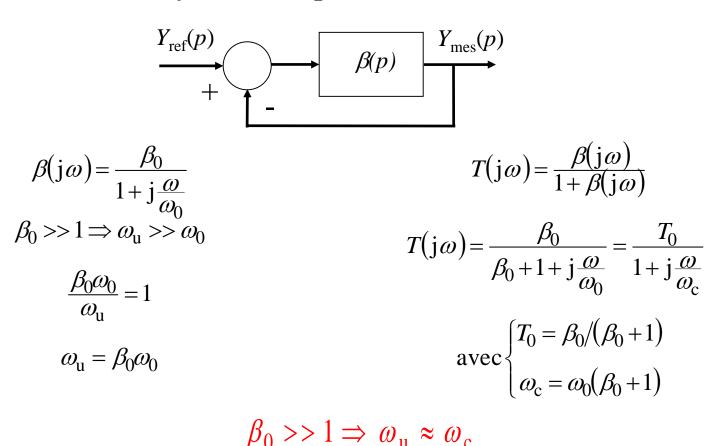


C'est à partir de $\omega_{\rm u}$ que le transfert de boucle fermée T change de comportement.

La fréquence de coupure en boucle fermée ω_c est donc du même ordre de grandeur que la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_n .

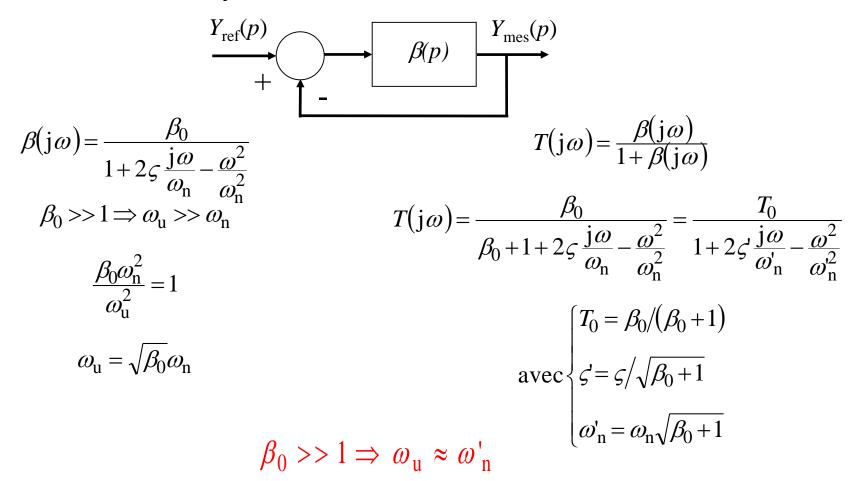
Relation entre fréquences au gain unité en boucle ouverte et de coupure en boucle fermée

Système du premier ordre



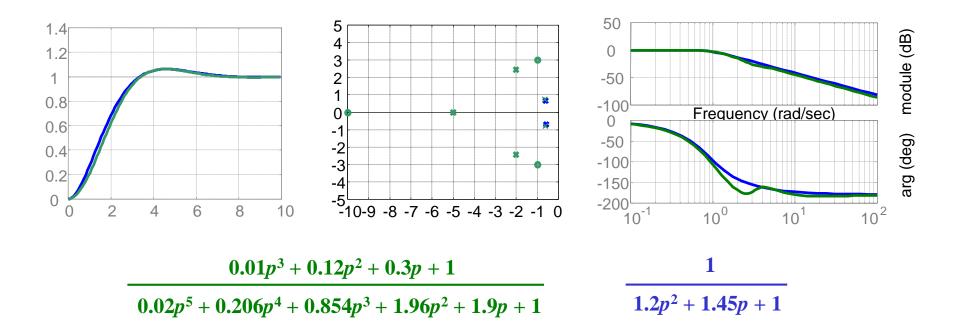
Relation entre fréquences au gain unité en boucle ouverte et de coupure en boucle fermée

Système du deuxième ordre



Notion de mode dominant

Quand une de ses paires de pôles complexes s'avèrent être de module plus faible que tous les autres pôles et zéros, il est fréquent qu'un système en boucle fermé puisse être approximé par un système du second ordre. Ces pôles définissent le mode dominant du système.



Les pôles du système du second ordre sont proches de ces pôles dominants.

Temps de réponse minimum

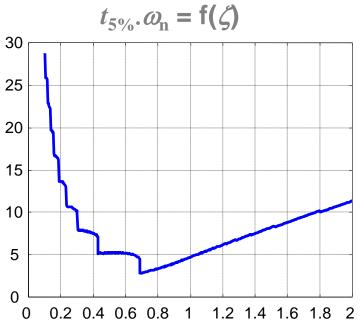
Amortissement optimal

Considérons un système en boucle fermée approximé par son mode

dominant du second ordre :

$$T(p) = \frac{Y_{\text{mes}}(p)}{Y_{\text{ref}}(p)} \approx \frac{T_0}{1 + \frac{2\varsigma p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

$$t_{5\%}.\omega_n = f(\zeta)$$



Du point de vue du temps de réponse, l'amortissement optimal est de 0,69.

Degré de stabilité

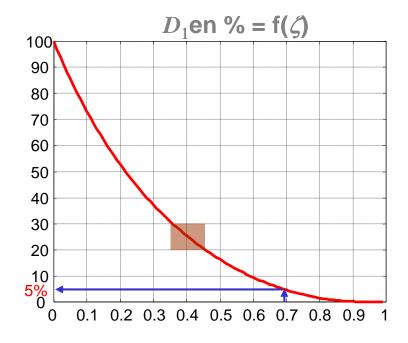
Premier dépassement réduit

Si on considère un système en boucle fermée approximable par son mode dominant du second ordre, l'amortissement est lié au premier dépassement réduit. Le premier dépassement réduit est donc souvent utiliser pour quantifier le degré de stabilité de la commande.

$$D_{\text{lréduit}} = \frac{D_1}{s(\infty) - s(0)} = e^{-\frac{\varsigma \pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}$$

Du point de vue du temps de réponse, le premier dépassement optimal est de 5%.

 $D_1 = 20$ à 30% est souvent toléré.



Degré de stabilité

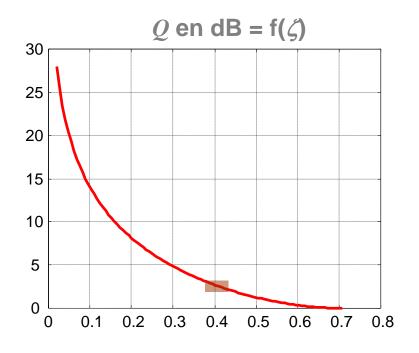
Facteur de résonance

Si on considère un système en boucle fermée approximable par son mode dominant du second ordre, l'amortissement est lié au facteur de résonance. facteur de résonance est donc souvent utiliser pour quantifier le degré de stabilité de la commande.

$$Q = \frac{\max_{\omega} \rho(\omega)}{\rho(0)} = \frac{1}{2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}}$$

Du point de vue du temps de réponse, le facteur de résonance optimal est de 0,01dB.

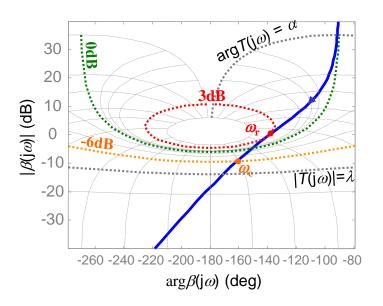
Un amortissement d'environ 0,4 correspond lui à Q = 2 à 3dB.

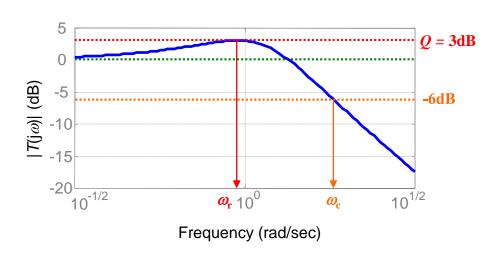


Abaque de Nichols

Abaque composé de courbes d'iso-amplitude et d'iso-argument. A partir de la réponse fréquentielle en boucle ouverte $\beta(j\omega)$, permet de déterminer la réponse fréquentielle en boucle fermée $T(j\omega)$, avec :

$$T(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{1 + \beta(j\omega)}$$





Le facteur de résonance correspond à la plus petite courbe d'iso-amplitude tangentée par $\beta(j\omega)$

Degré de stabilité Marge de phase

La fonction de transfert en boucle fermée du second ordre

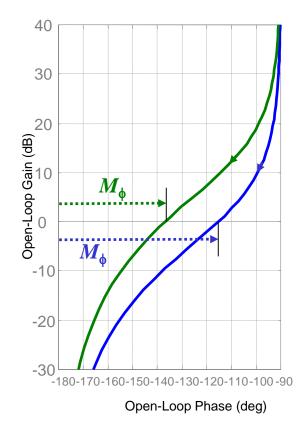
$$T(p) = \frac{Y_{\text{mes}}(p)}{Y_{\text{ref}}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2\varsigma p}{\omega_{\text{n}}} + \frac{p^2}{\omega_{\text{n}}^2}}$$

correspond notamment à la fonction de transfert en boucle ouverte

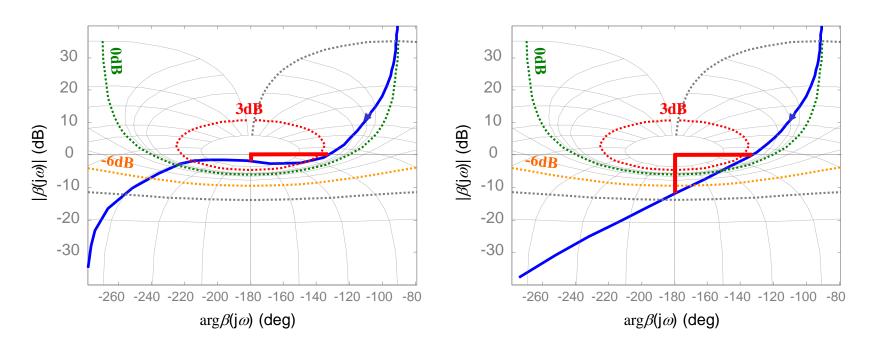
$$\beta(p) = \frac{1}{\frac{p}{\omega_{\rm n}} \left(2\varsigma + \frac{p}{\omega_{\rm n}}\right)} \text{ avec } T(p) = \frac{\beta(p)}{1 + \beta(p)}$$

 ζ = 0,69 correspond à une marge de phase M_{ϕ} = 65°.

Un amortissement d'environ 0,4 correspond à une marge de phase de l'ordre de 43°. Une marge de phase comprise entre 40 et 60° et généralement acceptée.



Degré de stabilité Marge de gain

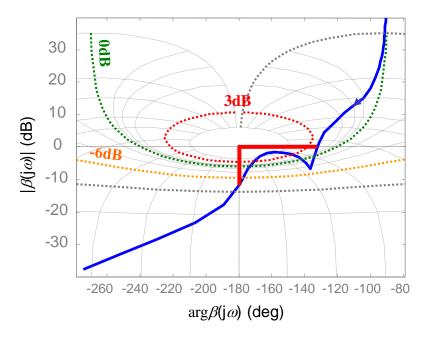


Une marge de phase M_{ϕ} correcte ne correspond pas toujours à un facteur de résonance Q suffisant. La vérification de la marge de gain M_{G} permet généralement de vérifier le degré de stabilité.

Une marge de gain de 6 à 10 dB est généralement suffisante.

Danger des marges de phase et de gain

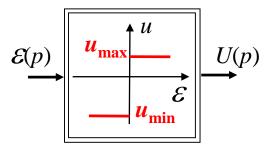
Des marges de phase et de gain satisfaisantes ne sont pas toujours suffisantes : cas de procédé comportant des modes peu amortis, des zéros à partie réelle positive, un retard, etc.



Dans le domaine fréquentiel, l'estimation la plus sûre du degré de stabilité d'un système bouclé stable se fera à travers son facteur de résonance.

Commande en tout-ou-rien (T.O.R)

Intuitivement, la loi de commande la plus simple consiste à appliquer le maximum de commande quand la sortie mesurée est plus petite que la consigne et le minimum sinon.



Avantages:

- temps de réponse minimums et bonne précision si amortissement suffisant
- simplicité de mise en œuvre

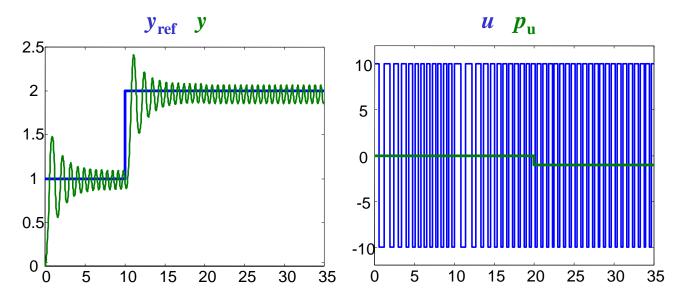
Inconvénients:

- observation fréquente d'oscillations non amorties
- dépense énergétique importante
- variations brusques du signal de commande

Commande T.O.R Application

Le procédé commandé modélisé par $G(p) = \frac{0.75}{(1+p+p^2)(0.01p+1)}$ subit une perturbation sur son entrée.

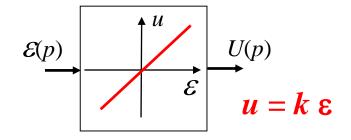
La commande TOR est définie par $u_{\text{max}} = 10$ et $u_{\text{min}} = -10$.



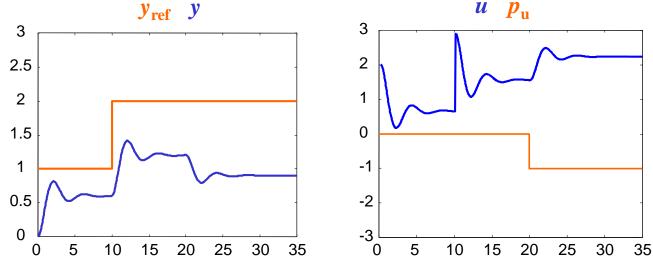
Le phénomène d'oscillation observé est appelé "pompage".

Commande proportionnelle

Une loi de commande plus évoluée consiste à générer une commande proportionnelle à la différence entre le signal de référence et la sortie mesurée.



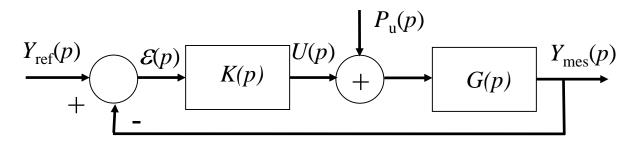
Le procédé précédent est commandé avec un gain k = 2



On observe ici un suivi de consigne et un rejet de perturbation imparfaits.

Commande proportionnelle

Modification des performances

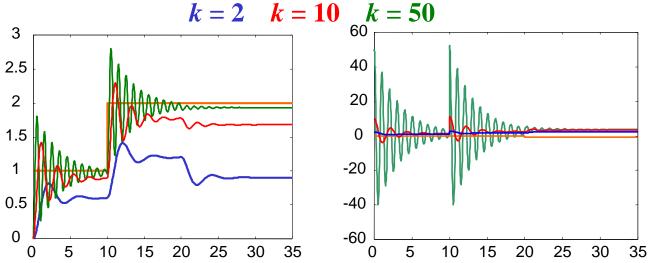


$$\varepsilon_{\infty} = \frac{y_{\text{ref0}} - G(0)p_{\text{u0}}}{1 + kG(0)}, y_{\text{ref}}(t) \text{ et ant en régime constant}$$

$$T_0 = \frac{\Delta y_{\text{mes}}}{\Delta y_{\text{ref}}} = \frac{kG(0)}{1 + kG(0)}$$

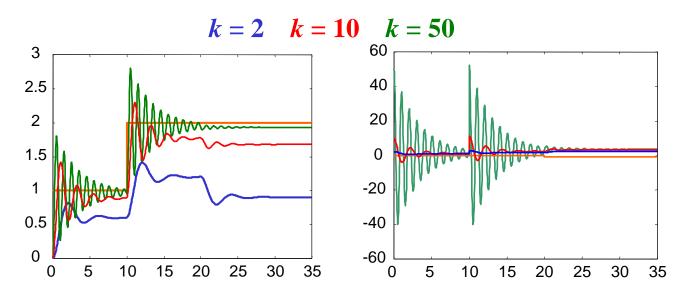
Augmentons k pour faire tendre l'erreur statique ε_{∞} vers 0 et le gain statique T_0

vers 1.



Commande proportionnelle

Dilemme stabilité/précision



Quand *k* augmente :

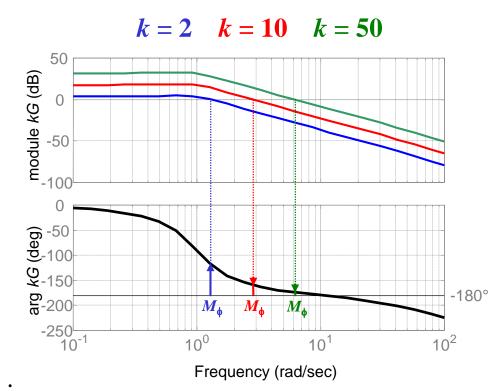
- + l'erreur statique ε_{∞} tend vers 0
- + le gain statique T_0 tend vers 1
- + le temps de montée $t_{\rm m}$ diminue
- le premier dépassement D_1 augmente
- l'amortissement ζ diminue
- le temps de réponse $t_{5\%}$ augmente
- le niveau de commande augmente

Précision/

Degré de stabilité

Commande proportionnelle

Augmentation du gain, diminution du degré de stabilité

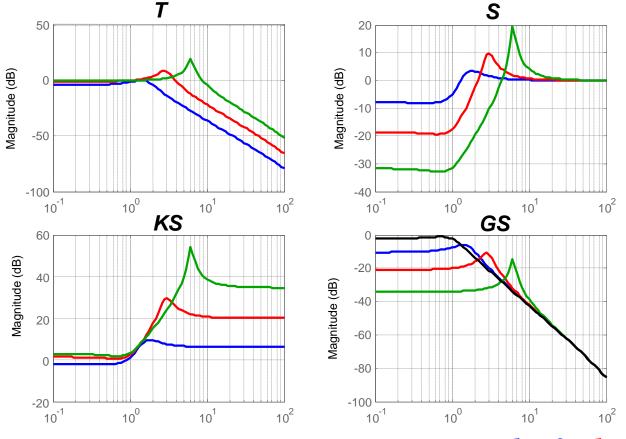


Quand *k* augmente :

- + augmentation du gain statique de boucle ouverte $\beta(0) = kG(0)$
- + augmentation de la fréquence au gain unité ω_{n}
- diminution de la marge de phase M_{ϕ}

Commande proportionnelle

Analyse des fonctions de sensibilité



Quand *k* augmente :

k = 2 k = 10 k = 50

- bande passante augmente mais facteur de résonance augmente
- désensibilisation augmente mais marge de module diminue
- sensibilité de l'entrée augmente
- rejection plus importante et rapide

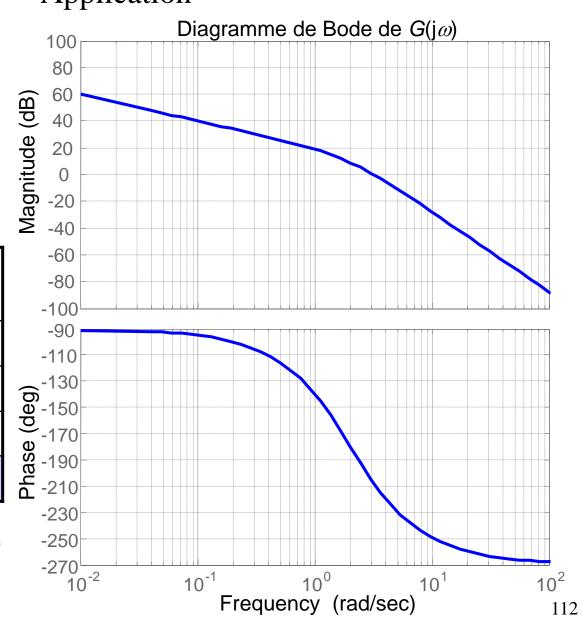
Réglage d'une commande proportionnelle Application

Modèle du procédé à asservir

$$G(p) = \frac{10}{p\left(1 + \frac{1.8p}{2} + \frac{p^2}{4}\right)}$$

k	$\omega_{\rm u}$ (rad/s)	<i>M</i> _∳ (°)	$M_{ m G}$ (dB)	<i>M</i> _r (s)	$\mathcal{E}_{_{\mathrm{S}}}$
	0.1				
		50			
			20		
					1

 $(\varepsilon_{\rm s} \text{ vis-à-vis d'un \'echelon sur } p_{\rm u})$



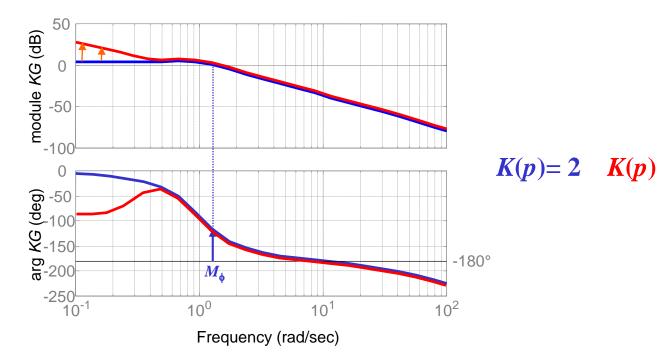
Dilemme stabilité/précision

Amélioration de la précision sans dégradation du degré de stabilité

L'amélioration de la précision résulte de l'augmentation du gain de boucle ouverte en basse fréquence.

La dégradation du degré de stabilité provient de l'augmentation du gain de boucle au voisinage de la fréquence au gain unité.

Augmentons donc le gain en basse fréquence sans toucher aux fréquences moyennes.

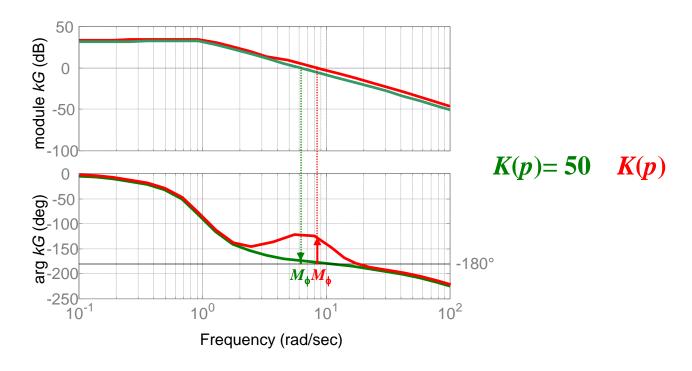


Dilemme stabilité/précision

Amélioration du degré de stabilité sans dégradation de la précision

L'amélioration du degré de stabilité peut être obtenu en augmentant localement la phase de la boucle ouverte au voisinage de la fréquence au gain unité.

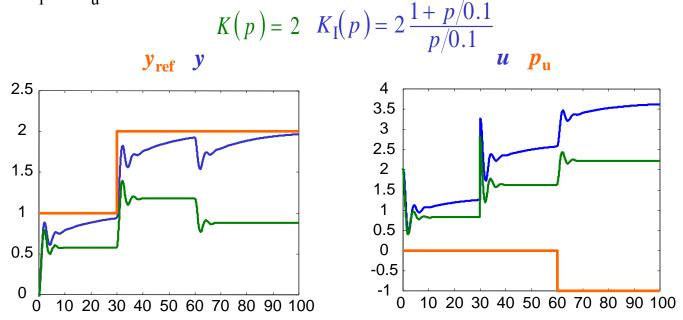
La précision ne sera pas dégradée si le gain en basse fréquence n'est pas modifié.



Commande à action intégrale

L'augmentation du gain de boucle ouverte en basse fréquence peut être obtenu avec un filtre du type : $\frac{1+p/\omega_{\rm i}}{p/\omega_{\rm i}}$

Son gain tend vers l'infini en basse fréquence, et tend vers 1 au delà de ω_i . Le filtre est donc transparent au voisinage de la pulsation au gain unité en boucle ouverte ω_u si $\omega_i < \omega_u$.

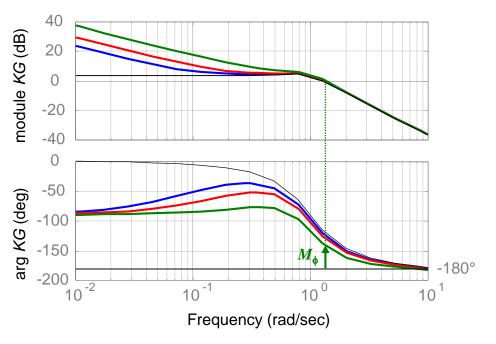


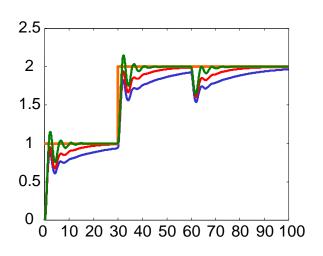
La précision parfaite n'est ici obtenue qu'après un temps relativement long.

Commande à action intégrale

Diminution de la constante de temps, diminution du degré de stabilité

$$K(p) = 2$$
 $\omega_i = 0.1 \text{rad/s}$ $\omega_i = 0.2 \text{rad/s}$ $\omega_i = 0.5 \text{rad/s}$



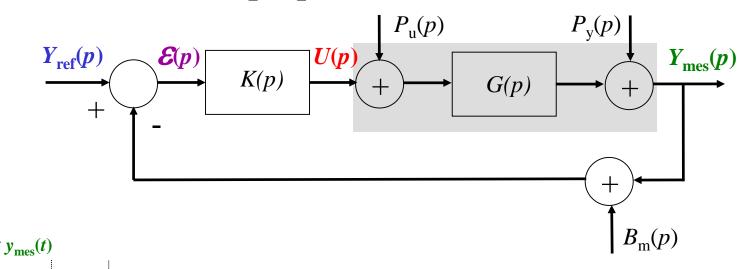


Quand ω_i augmente :

- + augmentation du gain de boucle ouverte en basse fréquence
- diminution de la marge de phase M_{ϕ}

Commande à action intégrale

"expliquée avec les mains"





Phase 2 : passage en commande à action intégrale

Phase 3 : déblocage de y_{mes} et stabilisation

Le régulateur force de plus en plus tant que nécessaire

$$u_{kT} = u_{(k-1)T} + \alpha_{\mathbf{I}} \mathcal{E}_{kT}$$

Si $\alpha_{\rm I}$ est trop grand, u_{kT} risque être trop grand et générer des oscillations.

Commande à action dérivée

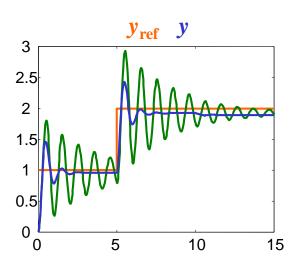
L'augmentation de la marge de phase peut être obtenue avec un filtre du type :

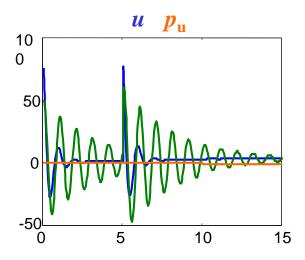
$$\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \, \frac{1 + p/\omega_1}{1 + p/\omega_2}$$

Ce filtre génère une avance de phase maximale à $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

Le gain $\sqrt{\omega_1/\omega_2}$ inférieur à 1 dégrade légèrement la précision mais rend le filtre transparent en gain à $\sqrt{\omega_1\omega_2}$.

$$K(p) = 50$$
 $K_D(p) = 50/1.5 \frac{1+p/4}{1+p/9}$

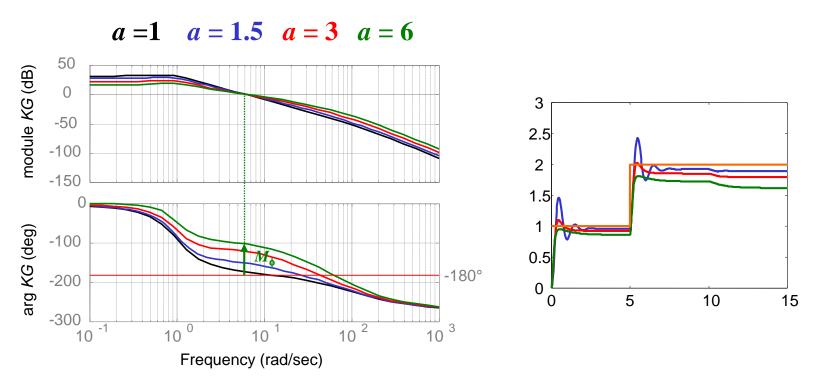




Le premier dépassement a été diminué mais reste important.

Commande à action dérivée

augmentation de l'avance de phase, diminution des performances



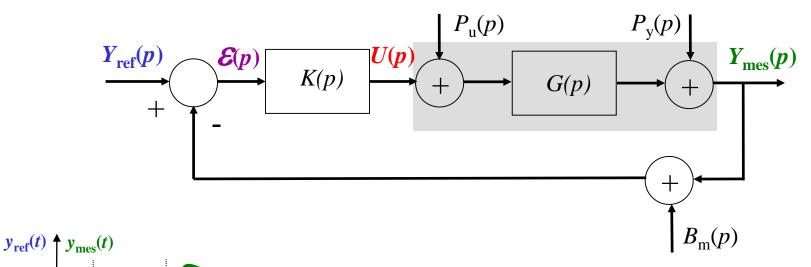
Quand a augmente:

- + augmentation de la marge de phase M_{ϕ}
- diminution du gain de boucle ouverte en basse fréquence
- augmentation du gain de boucle ouverte en haute fréquence

Il ne faut donc apporter que le minimum de phase nécessaire.

Commande à action dérivée

"expliquée avec les mains"





Phase 2 : ajout d'une action dérivée

anticipation de u pour contrer l'inertie de G

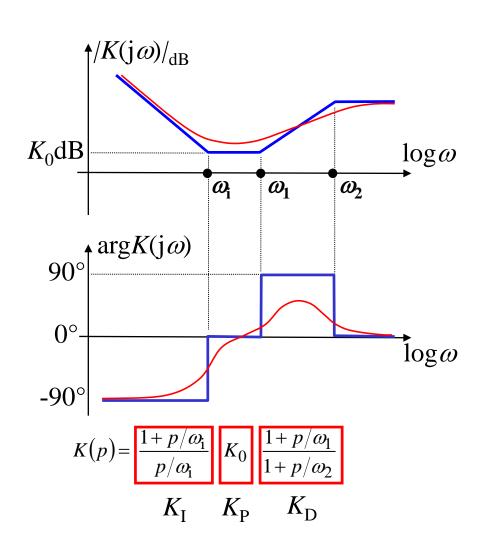
Le régulateur tient compte de la dérivée de \mathcal{E}

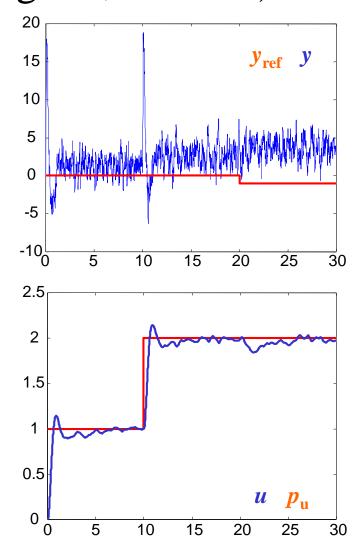
$$u_{kT} = \alpha_{P} \mathcal{E}_{kT} + \alpha_{D} (\mathcal{E}_{kT} - \mathcal{E}_{(k-1)T})$$

Si α_D est trop grand, u_{kT} risque d'être trop sensible

u(t) $\mathcal{E}(t)$

Réponse au « Dilemme Stabilité/Précision » : la commande de type PID (Proportionnelle, Intégrale, Dérivée)







SEMESTRE 6 – UE CO6SISY0 : SIGNAUX ET SYSTEMES

COMMANDE DES SYSTEMES

PATRICK LANUSSE

Exercice n°0 – Présentation et utilisation de Matlab (si nécessaire)

Notion de variables (affectation, calcul, vecteurs, matrices, définition par *rand*, *linspace* ou *logspace*), de scripts, de fonctions, variable locale/globale, fonctionnalité de tracer, boucle *for*, etc.

Définir une fonction calculant
$$f(t) = 3\sin(\omega t)$$
 avec $\omega = \frac{2\pi}{10 - 0.045t}$

Ecrire un script calculant un vecteur s pour t allant de 0 à 20s par pas de 0.01s (utilisation d'une boucle for) puis traçant s = f(t).

Montrer que l'utilisation de la fonction *linspace* (pour définir le vecteur des valeurs de t) et du calcul simultané sur les éléments d'un vecteur (utilisation de l'opérateur /.) permettent d'obtenir beaucoup plus rapidement (et en 2 lignes) le vecteur des valeurs de s.

Exercice n°1 – Fonction de transfert et réponse temporelle

En utilisant ses numérateur et dénominateur (notion de polynôme), définir la fonction de transfert $H_1(p)$ définie par :

$$H_1(p) = \frac{10}{0.1 + p}$$

Déterminer mathématiquement les valeurs initiales et finales des réponses impulsionnelle et indicielle de $H_1(p)$. Simuler ces réponses, notamment en imposant une durée de simulation de 1s et en représentant les 2 réponses sur la même figure (*subplot*).

Exercice n°2 – Système comportant un intégrateur

Effectuer le même travail avec $H_2(p)$ définie par

$$H_2(p) = \frac{10}{p(0.1+p)}$$

Exercice n°3 – Réponses fréquentielles

Calculer mathématiquement les gains et phases des réponses fréquentielles $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$. Déterminer les limites de ces gains et phases en basse et haute fréquences.

Tracer les gains (en dB) et phases en fonction de la pulsation (semilogx) allant de 0.001 à 10rad/s.

Exercice n°4 – Système d'ordre élevé

Définir la fonction de transfert $H_3(p)$ définie par :

$$H_3(p) = \frac{1 + 2p + 10p^3}{0.1 + 2p + p^2 + 4p^3}$$

Déterminer les valeurs initiale et finale de la réponse indicielle de $H_3(p)$ puis en faire la simulation. Utiliser la fonction zpkdata(H3, 'v') pour en extraire les zéros et pôles permettant de construire l'allure du diagramme asymptotique de Bode de sa réponse fréquentielle. Comparer avec la vraie réponse fréquentielle.

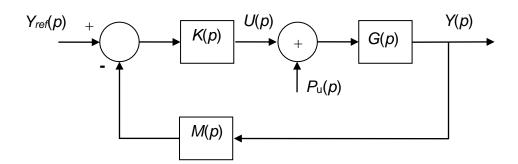
Exercice n°5 – Définition simplifiée d'un système

Définir la variable p(tf(s')) puis la fonction de transfert $H_4(p)$ définie par :

$$H_4(p) = \frac{(1+0.5p)(3p^2+4p+1)}{p(2p+1)+(3+p)^3}$$

Déterminer les valeurs initiale et finale de la réponse impulsionnelle de $H_4(p)$ puis simuler cette réponse. Tracer les diagrammes de Bode et de Nyquist de $H_4(j\omega)$.

Exercice n°6 – Etude d'un système en boucle fermée

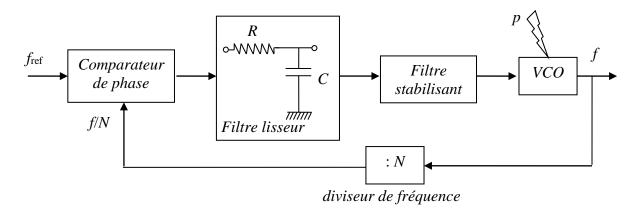


$$K(p) = \frac{5+p}{p(1+0.02p)}$$
 $G(p) = \frac{10}{p+1}$ $M(p) = \frac{1}{0.01p+1}$

- 6.1 Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte B(p). Tracer en les diagrammes de Bode, Nyquist et Nichols. Déterminer la pulsation au gain unité en boucle ouverte. Visualiser et mesurer les marges de phase et gain. Ensuite, les vérifier en utilisant la fonction margin. Estimer le facteur de résonnance à partir du lieu de Nichols de $B(j\omega)$ (ngrid). Calculer la marge de retard.
- 6.2 Déterminer les fonctions de transfert $Y(p)/P_u(p)$ et $Y(p)/Y_{ref}(p)$. En simuler les réponses indicielles. Comparer les valeurs finales aux valeurs prévisibles.
- 6.3 Déterminer les fonctions de transfert $U(p)/P_u(p)$ et $U(p)/Y_{ref}(p)$. En simuler les réponses indicielles. Comparer les valeurs initiales et finales aux valeurs prévisibles.
- 6.4 Calculer la fonction de sensibilité S(p) = 1/(1+B(p)). En Tracer le module (fonction *bodemag*) puis en déduire la marge de module. Vérifier cette valeur en traçant le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte.
- 6.5 Utiliser Simulink en complément de Matlab pour effectuer une simulation enchainant réponse à la consigne et à la perturbation.

Exercice n°7 – Etude d'une boucle à verrouillage de phase (PLL)

Une boucle à verrouillage de phase est généralement constituée d'un comparateur de phase, de filtres assurant le lissage et/ou la stabilité de la boucle et d'un oscillateur contrôlé en tension (VCO) générant le signal sinusoïdal. Utilisée en multiplicateur de fréquence, cette PLL comporte aussi un diviseur de fréquence dans la boucle de retour. Sachant que nous ne nous intéresserons qu'aux comportements linéaires présents dans un tel système, la figure 2 donne le schéma de principe de la PLL considérée.



Le comportement dynamique du VCO est modélisé par une fonction de transfert définie par

$$V(p) = \frac{V_0}{1 + \tau p},$$

avec $V_0 = 10^3$ et $\tau = 5.10^{-5}$ s.

La valeur moyenne de la sortie du comparateur de phase est définie par

$$\frac{U_M}{p} \left(F_{\text{ref}}(p) - F(p) / N \right),\,$$

avec $U_{\rm M} = 10 \text{V/rad}$.

Sachant que les fréquences de référence seront de l'ordre de 40 KHz, on prend $RC = 2.10^{-4}$ s.

Souhaitant multiplier la fréquence par 10 on prend N = 10.

7.1 - Modélisation

- 7.1.1 Ecrire un script Matlab définissant les paramètres connus de ce système.
- 7.1.2 Construire le schéma Simulink permettant de modéliser le système en boucle fermée. Définir le filtre stabilisant par une fonction de transfert K

7.2 – Analyse du « procédé »

- 7.2.1 Extraire le modèle linéaire G(p) du système vu par le filtre stabilisant K.(introduction de ports d'entrée et de sortie et utilisation de la fonction Matlab *linmod*).
- 7.2.2 Tracer les diagrammes de Bode de G.

7.3 – Synthèse du filtre stabilisant

- 7.3.1 On souhaite des temps de réponse de l'asservissement de l'ordre de 0.5ms. Pour cela on décide de fixer la fréquence au gain unité en boucle ouverte à 10^4 rad/s (ce qui assure aussi une fréquence de coupure en boucle fermée de l'ordre de 10^4 rad/s). Après avoir déterminé le gain et la phase de G à la pulsation 10^4 rad/s, indiquer le gain et la phase que doit y assurer le filtre stabilisant K pour que la marge de phase soit de 40° .
- 7.3.2 On décide d'utiliser un filtre à action Proportionnelle et Dérivée (PD) de la forme

$$K(p) = K_0 \frac{1 + p/\omega_1}{1 + p/\omega_2}$$

$$\text{pour lequel: } \arg K \left(j \sqrt{\omega_1 \omega_2} \right) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \right) - \frac{\pi}{2} \quad \text{ et } \quad \left| K \left(j \sqrt{\omega_1 \omega_2} \right) \right| = K_0 \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \ .$$

Déterminer les paramètres ω_1 , ω_2 et K_0 .

7.3.3 – Vérifier la marge de phase obtenue (fonction Matlab *margin*). Tracer le diagramme de Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte. Estimer le facteur de résonance.

7.4 – Analyse du système bouclé

- 7.4.1 Extraire le modèle linaire du transfert liant la fréquence synthétisée à la fréquence de référence. Tracer le module de ce transfert traduisant le mode poursuite (suivi de consigne).
- 7.4.2 Extraire le modèle linaire du transfert liant la fréquence synthétisée à une perturbation agissant sur l'entrée du VCO. Tracer le module de ce transfert traduisant un mode régulation (rejet de l'effet d'une perturbation).

7.5 – Simulation

- 7.5.1 Simuler le système lors d'une variation de la fréquence de référence de 10KHz.
- 7.5.2 Simuler le système lors d'une perturbation en entrée du VCO de 0.5V.
- 7.5.3 Tester les performances précédentes lorsque le gain G_0 du VCO varie de $\pm 20\%$.