

$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 + \frac{C_r(p)}{\omega^2}}\right)$$

Filipe VASCONCELOS

$$A(\omega) = \frac{E_{out}(p)/2}{E(p)} = \frac{(U(p) - E(p))}{\sqrt{\left(\frac{4(p\omega^2)}{104}\right)^2 + \left(\frac{C_r(p)}{2}\right)^2}} \quad \Omega(p) = \left[\frac{k_m}{R}\right]^{1/2}$$

Systèmes et Automatique Linéaires

$$a) \frac{E(p)H_1(p)}{1 + \frac{J_e R p}{k_m k_e} + \frac{k_m}{k_m k_e} \left(\frac{J_e R}{k_m k_e} \right) \frac{\phi_{B_0}(\omega)}{p + \frac{1}{k_m k_e}}} = \frac{k_m}{k_m k_e} \frac{\frac{k_m}{k_m k_e} \left(\frac{J_e R}{k_m k_e} \right) \frac{\phi_{B_0}(\omega)}{p + \frac{1}{k_m k_e}}}{1 + \frac{J_e R}{k_m k_e} + \frac{1}{k_m k_e}}$$

$$b) H_{BF}(p) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 H_3} = \frac{H_1 H_2}{1 + H_2 H_3} \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{J_e R}{k_m k_e}$$

$$b) H_2(p) = \frac{H_1 H_2 H_3}{J_e p + \frac{k_m R M g}{R}} = \frac{B_{0,1}}{k_m R D \left(\frac{\log R H_3}{k_m k_e} \right) \frac{H_3(p)}{R}}$$

$$\Rightarrow \omega_{-\pi} = 0 \Rightarrow |H_1| = 1 \quad D \leq 2$$

Filipe VASCONCELOS

Systèmes et Automatique Linéaires

écrit sous L^AT_EX, TikZ version de Septembre 2023.

Pages de couverture par Lorraine Bayard.

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution - Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



Ce document est destiné aux étudiants du cycle prépa de l'ESME SUDRIA. En constante évolution, il ne pourra que s'améliorer avec votre concours. N'hésitez pas à me communiquer vos remarques et/ou corrections par mail : filipe.vasconcelos@esme.fr

Table des matières

Table des matières	5
Avant-propos	11
Chapitre 1 Systèmes linéaires, continus...	13
1 Introduction	14
2 Définition SLCI	15
2.1 La notion de Système	15
2.2 Propriétés des SLCI	16
3 Modélisation d'un SLCI	17
3.1 Équation différentielle à coefficients constants	17
3.2 Exemples de mises en équation	18
4 Modélisation d'un signal	19
4.1 Propriétés des signaux continus	19
4.2 Signaux usuels rencontrés...	22
4.3 Décomposition d'un signal en signaux usuels	26
5 La transformée de Laplace	27
5.1 Définition	27
5.2 Propriétés	28
5.3 Transformées des signaux usuels	30
5.4 Application de la transformée de Laplace	33
6 Fonction de Transfert	37
6.1 Définition	37
6.2 Lien entre fonction de transfert et réponse impulsionnelle	37
6.3 Représentation de la fonction de transfert	38
7 Exercices du chapitre	42
8 Corrigé des exercices	46
Chapitre 2 Schémas fonctionnels	55
1 Introduction	56
2 Éléments de base des schémas fonctionnels	56
3 Transformation des schémas fonctionnels	58
3.1 Réduction de schéma-bloc	58
3.2 Manipulation de schéma-bloc	60
4 Cas d'entrées multiples	62
5 Réduction de schéma-bloc de grande taille	63
5.1 Exemple à entrée simple	63
5.2 Exemple à entrées multiples	65
6 Graphe de fluence	66
6.1 Définitions	66
6.2 Algèbre des graphes de fluences	67
6.3 Règle de Mason	70
7 Schéma-bloc dans le domaine temporel	73
7.1 Opérateur intégral	73

7.2	Produit d'un signal temporel par un scalaire	74
7.3	Représentation d'une équation différentielle	74
7.4	Application au système masse-ressort	75
8	Exercices du chapitre	78
9	Corrigé des exercices	82
Chapitre 3 Modélisation des SLCI		91
1	Introduction	92
2	Système du premier ordre	92
2.1	Définition d'un système du premier ordre	92
2.2	Fonction de transfert d'un système du premier ordre	93
2.3	Pôle de la fonction de transfert du premier ordre	93
2.4	Réponses temporelles d'un système du premier ordre	93
3	Système du second ordre	97
3.1	Définition d'un système du second ordre	97
3.2	Fonction de transfert d'un système du second ordre	97
3.3	Pôles de la fonction de transfert du second ordre	97
3.4	Réponses temporelles d'un système du second ordre	98
3.5	Cas particulier de l'oscillateur harmonique	111
4	Autres modèles particuliers	112
4.1	Gain pur	112
4.2	Intégrateur pur	112
4.3	Dérivateur pur	113
4.4	Retard pur	113
5	Généralisation des modèles de SLCI	114
5.1	Systèmes d'ordre supérieur à 2	114
5.2	Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3	115
6	Identification d'un modèle de comportement	115
6.1	Formule de Bureau	115
6.2	Modèle de Strejc	116
6.3	Modèle de Broïda	116
7	Exercices du chapitre	117
8	Corrigé des exercices	120
Chapitre 4 Analyse fréquentielle		127
1	Introduction	128
2	Réponse harmonique	128
2.1	Réponse harmonique dans le domaine temporel	130
3	Représentation graphique	131
3.1	Diagramme de Bode	131
3.2	Diagramme de Nyquist	132
3.3	Diagramme de Black-Nichols	133
4	Analyse fréquentielle des modèles usuels	134
4.1	Diagrammes de Bode	134
4.2	Diagrammes de Nyquist	151
4.3	Diagrammes de Black-Nichols	156
5	Etude du transitoire de la réponse harmonique	157
5.1	Exemple d'un système du premier ordre	158
6	Exercices du chapitre	160
7	Corrigé des exercices	162

Chapitre 5 Asservissement Linéaire	171
1 Asservissement et régulation	172
2 Organisation d'un asservissement	173
2.1 Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis	173
Chapitre 6 Performances des systèmes	175
1 Introduction	176
2 Précision	176
2.1 Précision en boucle ouverte	176
2.2 Précision en boucle fermée	177
2.3 Effet d'une perturbation	179
3 Rapidité	184
3.1 Réponse temporelle	184
3.2 Étude de la rapidité à partir de la réponse harmonique	189
3.3 Influence des pôles dominants	190
4 Exercices du chapitre	192
5 Corrigé des exercices	193
Chapitre 7 Stabilité des systèmes asservis	199
1 Contexte et définition de la stabilité	200
2 Instabilité de l'asservissement	202
3 Condition fondamentale de stabilité	203
4 Critère algébrique de Routh-Hurwitz	206
4.1 Tableau de Routh	206
4.2 Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz	209
5 Critère de stabilité du revers	210
5.1 Critère de stabilité à partir de la boucle ouverte	210
5.2 Mise en évidence de l'instabilité en boucle fermée	211
5.3 Critère du revers dans le plan de Nyquist	213
5.4 Critère du revers dans le plan de Black	214
5.5 Critère du revers dans le plan de Bode	214
6 Marge de stabilité et robustesse de la stabilité	215
6.1 Marges de stabilité à partir du diagramme de Nyquist	216
6.2 Marges de stabilité à partir du diagramme de Bode	216
6.3 Marges de stabilité à partir du diagramme de Black	216
7 Critère de Nyquist	218
7.1 Image d'un contour par une fonction de transfert	218
7.2 Principe de l'argument de Cauchy	219
7.3 Contours de Nyquist et de Bromwich	219
7.4 Énoncé et application du critère de Nyquist	222
8 Exercices du chapitre	224
9 Corrigé des exercices	226
Chapitre 8 Correction des systèmes asservis	233
1 Nécessité de la correction	234
2 Structure de la correction	235
3 Correcteurs élémentaires P, I et D	237
3.1 Correcteur P	237
3.2 Correcteur I	237
3.3 Correcteur D	237
4 Correcteurs composés	237
4.1 Correcteur PI	237

4.2	Correcteur PD	239
5	Correcteurs à avance et retard de phase	240
5.1	Correcteur à avance de phase	240
5.2	Correcteur à retard de phase	243
6	Correcteur PID	245
6.1	PID idéal	245
6.2	PID amélioré	247
7	Exercices du chapitre	249
8	Corrigé des exercices	252
Chapitre 9	Représentation d'état	269
1	Contexte	270
1.1	Système multivariable	270
2	État d'un système dynamique	272
2.1	Équation d'état et équation de sortie	272
2.2	Intégration de l'équation d'état	273
2.3	Représentation en schéma bloc	273
2.4	Lien entre la fonction de transfert et la représentation d'état	273
3	Application de la représentation d'état	275
3.1	Représentation d'état du système	275
3.2	Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert	276
4	Exercices du chapitre	278
5	Corrigé des exercices	279
Annexes		283
Annexe A	Alphabet Grec	283
Annexe B	Unités du Système International	285
Annexe C	Transformation de Laplace	287
1	Définition	287
2	Propriétés	287
3	Table des transformées de Laplace	289
Annexe D	Les nombres complexes	291
Annexe E	Équations différentielles à coefficients constants	295
1	Premier ordre	295
1.1	Forme canonique	295
1.2	Sans second membre	295
1.3	Avec second membre	296
2	Second ordre	297
Annexe F	Décomposition en éléments simples	299
1	Contexte	299
2	Fractions rationnelles rencontrées en automatique	299
3	Décomposition en éléments simples	299
4	Détermination des coefficients de la DES	300
4.1	Par identification	300
Annexe G	Systèmes du second ordre	303
1	Abaques de la réponse temporelle	304
2	Analyse fréquentielle	306
Annexe H	Transformée de Laplace inverse	307
1	Contexte	307
2	Méthode de Gaver-Stehfest	307
3	Méthode de Talbot fixe	307

Annexe I Abaque de Black-Nichols	309
1 Contexte	309
2 Dans le plan complexe (<i>Hall circles</i>)	309
2.1 M-cercles	309
2.2 N-cercles	309
3 Abaque de Black-Nichols	311
4 Exemples d'application	312
Annexe J Principe de l'argument de Cauchy	315
1 Notebook et class Ftransfert	315
2 Contour dans le plan complexe	317
3 Image d'un contour par une fonction de transfert	318
3.1 Fonction de transfert avec un seul zéro	318
3.2 Fonction de transfert possédant un pôle	320
4 Enoncé du principe de l'argument de Cauchy	322
Annexe K Lieu d'Evans (lieu des racines)	325
1 Règles de construction	325
Références	327
Index	329
Acronymes	333
Glossaire	335
Liste des Symboles	339

Avant-propos

Programme

Ce cours est une introduction à l'**automatique** pour des étudiants de classe préparatoire scientifique ou de première année de cycle ingénieur.

L'objectif principal de l'automatique est de permettre le contrôle des **systèmes dynamiques** de toutes natures que ce soient : mécanique, chimique, électronique, optique, thermique, acoustique.... Tout en respectant certaines contraintes de performances (rapidité, précision, stabilité...).

Nous limiterons notre étude aux **systèmes linéaires continus et invariants**. La **modélisation** de ces systèmes passe par la mise en équation du comportement physique des systèmes sous forme d'équations différentielles. Cette étape ne fait pas à proprement parler partie d'un cours d'automatique, en effet chacune des disciplines construisent cette modélisation en se basant sur les principes et les hypothèses les plus adaptés à un problème donné. La modélisation permet une étude systématique des équations différentielles en proposant des modèles généraux et ce quelque soit la nature du procédé.

L'**analyse** nous permettra de caractériser et d'identifier ces modèles à partir des réponses aux sollicitations et de leurs performances.

Le **contrôle** est un concept très générale permettant de regrouper toutes les méthodes et techniques permettant de commander un système dynamique. Dans ce cours nous présenterons que les principes d'asservissement et de régulation. Nous verrons comment il est possible d'élaborer une commande adaptée (dite **corrigée**) pour un procédé quelconque, notamment lorsque ceux-ci présenterons des défauts de performance.

Organisation du document

Les chapitres suivent un découpage classique autour des trois piliers discutés précédemment que sont la **modélisation**, l'**analyse** et le **contrôle** des systèmes automatiques linéaires. (c.f [Figure A](#)).

Chacun de ces chapitres s'achève par des énoncés et des corrections d'exercices d'application des notions rencontrées dans le chapitre en question. Nous classerons les exercices selon trois niveaux de difficulté (facile : ★☆☆, moyen : ★★☆ et difficile : ★★★).

Enfin, le lecteur pourra s'appuyer sur un grand nombre d'annexes qui ont pour objectif de rappeler et de détailler des notions préreques ou encore approfondir quelques aspects hors programme pour une deuxième lecture.

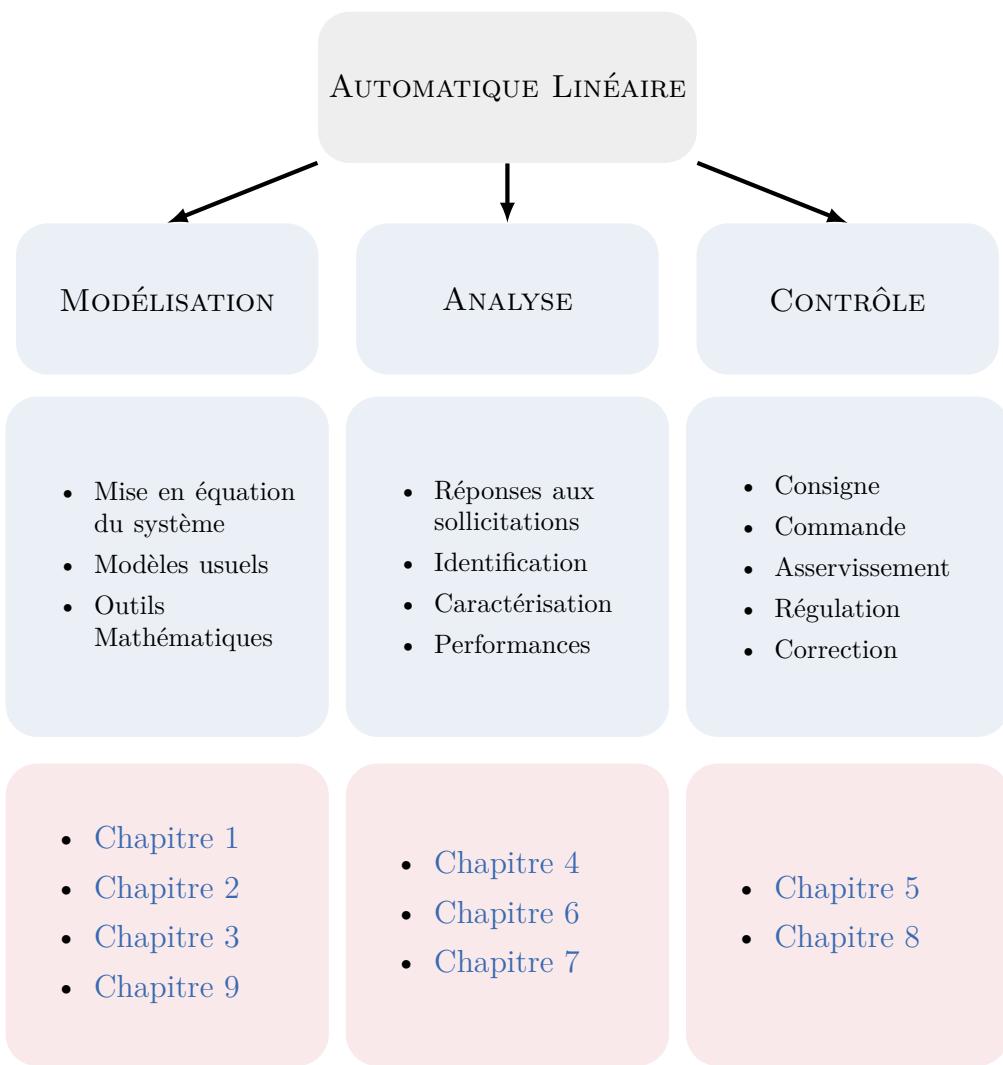


Figure A – Organisation du document.

1 Systèmes linéaires, continus et invariants

Sommaire

1	Introduction	14
2	Définition SLCI	15
2.1	La notion de Système	15
2.2	Propriétés des SLCI	16
3	Modélisation d'un SLCI	17
3.1	Équation différentielle à coefficients constants	17
3.2	Exemples de mises en équation	18
4	Modélisation d'un signal	19
4.1	Propriétés des signaux continus	19
4.2	Signaux usuels rencontrés...	22
4.3	Décomposition d'un signal en signaux usuels	26
5	La transformée de Laplace	27
5.1	Définition	27
5.2	Propriétés	28
5.3	Transformées des signaux usuels	30
5.4	Application de la transformée de Laplace	33
6	Fonction de Transfert	37
6.1	Définition	37
6.2	Lien entre fonction de transfert et réponse impulsionnelle	37
6.3	Représentation de la fonction de transfert	38
7	Exercices du chapitre	42
8	Corrigé des exercices	46

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les outils mathématiques et notions fondamentales pour la **modélisation** de l'automatique. Dans un premier temps, nous donnerons une définition de chacun des termes qui compose la notion centrale de **système linéaire continu et invariant** ainsi que quelques exemples classiques de système électronique et mécanique. Nous aborderons les différents signaux usuels rencontrés en automatique¹. Ce chapitre nous permettra d'introduire la transformée de Laplace qui est l'outil mathématique indispensable de l'ingénieur. Celle-ci nous conduira naturellement à la définition de la **fonction de transfert** qui caractérisera de façon univoque les systèmes dynamiques linéaires.

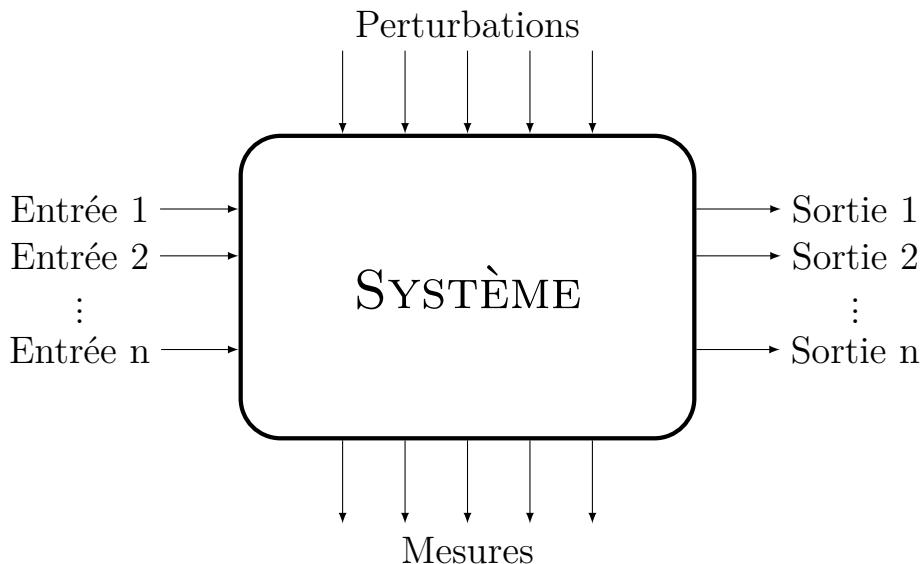


Figure 1.1 – Représentation d'un système en interaction avec son environnement.

Par définition, un système possède une ou plusieurs entrée/sortie bien définis de flux de **matière-énergie-information (MEI)**. Généralement, des perturbations de l'environnement et des mesures de son état peuvent également être considérés.

¹et en traitement du signal de façon générale.

2 Définition des systèmes linéaires continus et invariants

2.1 La notion de Système

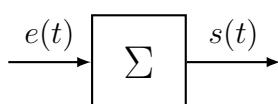
La notion de **système** est centrale dans le monde de l'ingénierie. Il existe de nombreuses définitions selon le domaine d'application auquel il est associé. Dans le cadre de ce cours, nous nous reposerons sur la systémique² qui nous donne une définition à la fois **structurelle** et **fonctionnelle** de la notion de système.

Au niveau structurel, **un système est un ensemble d'éléments constitutifs ayant des relations entre eux et présentant une frontière avec son environnement**. Cette définition est parfaitement représenté par le schéma de la figure 1.1. Au niveau fonctionnel, **un système modifie des flux dynamiques de matière, d'énergie et d'informations provenant de son environnement**. C'est essentiellement cette dernière définition qui nous sera la plus utile.

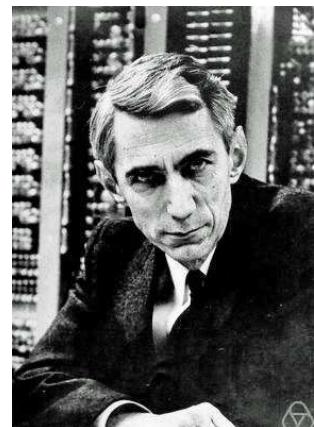
Un système sera alors considéré comme une « boîte » traitant une ou plusieurs entrées et élaborant une ou plusieurs sorties (c.f Figure 1.1). On distinguera les systèmes à une entrée et une sortie, dit **monovariable**³ des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties, dit **multivariable**⁴.

L'objectif de ce cours est de permettre la modélisation, l'identification et la caractérisation des systèmes monovariables. À noter que cet objectif atteint, il nous sera possible de représenter les systèmes comme des « boîtes noires » pour lesquelles la structure interne est inaccessible⁵. Une approche basée sur la représentation des états internes au système sera introduite au dernier chapitre de ce travail chapitre 9.

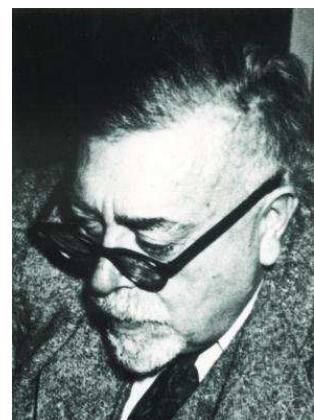
Pour résumer, nous traiterons dans ce document des systèmes monovariables que nous représenterons simplement de la façon suivante :



où $e(t)$ et $s(t)$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie dépendants du temps et Σ est le système traitant l'entrée $e(t)$ et élaborant la sortie $s(t)$ délimité par un bloc. Cette représentation, dite en **bloc** ou **schema-bloc**, sera généralisée au chapitre 2.



Claude Shannon (1916-2001), ingénieur et mathématicien américain. Père fondateur de la théorie de l'information.



Norbert Wiener (1894-1964), mathématicien américain. Père fondateur de la cybernétique.



Marvin Minsky (1916-2001), mathématicien américain. Auteur de l'expression « intelligence artificielle »

²Avec la cybernétique, la systémique est un courant de pensée pluridisciplinaire apparue progressivement au milieu du xx^e siècle, sous l'impulsion des travaux précurseurs de Claude Shannon, Warren McCulloch, Norbert Wiener ou encore Marvin Minsky.

³ou “Single Input Single Output” (SISO) en anglais

⁴ou “Multiple Input Multiple Output” (MIMO) en anglais

⁵« Ce qui - en dernière analyse - justifie l'attitude ludique, c'est que le seul moyen concevable de dévoiler une boîte noire, c'est de jouer avec. » (René Thom)

2.2 Propriétés des SLCI

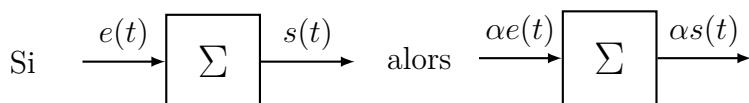
Les systèmes qui vont nous intéresser dans ce document sont les systèmes **linéaires**, **continus** et **invariants**. Nous allons ici donner une définition de chacune de ces propriétés ainsi que des propriétés secondaires que nous renconterons au cours de notre étude.

Système linéaire

Un système est dit linéaire si il respecte les deux principes suivants :

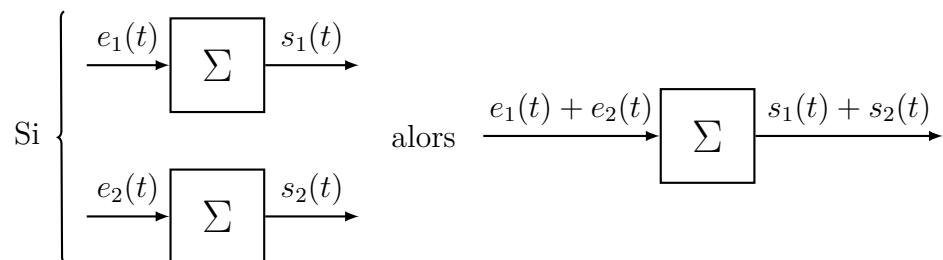
- *Principe de proportionnalité* : Si $s(t)$ est la réponse à une entrée $e(t)$, alors pour une entrée $\alpha e(t)$ la réponse est $\alpha s(t)$.

On exprime, schématiquement, ce principe de la façon suivante pour un système linéaire Σ :

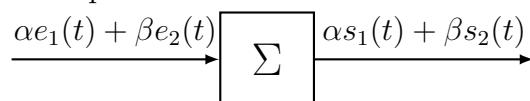


- *Principe de superposition* : Si l'entrée du système se décompose en une somme de plusieurs entrées alors la sortie du système sera la somme des sorties correspondant à chaque entrée séparée.

Une nouvelle fois, il est possible d'exprimer ce principe de la façon suivante pour un système linéaire Σ :



Notons que ceci reste vrai pour une combinaison linéaire des entrées :



avec α et $\beta \in \mathbb{R}$, ou un nombre quelconques d'entrées.

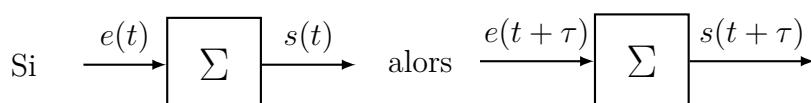
Système à temps continu

Un système à temps continu met en oeuvre des signaux à temps continu. Comme nous le verrons, ces signaux seront modélisés par des fonctions d'une variable continue t de temps.

Système invariant

Un système est dit invariant si la sortie ne dépend pas explicitement du temps autrement que par l'intermédiaire de l'entrée.

On représente, schématiquement, un système invariant Σ , à l'aide d'un schéma-bloc ci-dessous (avec τ un temps quelconque.) :



Système causal

- *Principe de causalité* : C'est un principe fort de la physique : « **L'effet ne précède pas sa cause** » alors « **La réponse du système ne précède pas son excitation** ». Formellement, un système est dit causal si

$$e(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0 \Rightarrow s(t) = 0 \quad \forall t \leq t_0$$

Système stable

Il existe deux définitions équivalentes de la stabilité pour un système linéaire :

- **Un système est dit stable si à une entrée bornée le système produit une sortie bornée** on parle de stabilité du type “[Entrée Bornée/Sortie Bornée](#)” ([EBSB](#)).⁶
- **Un système est dit stable lorsque écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir**

Nous aurons l'occasion de préciser cette définition par des exemples plus concrets lorsque les outils de modélisation des systèmes et des signaux auront été introduits. Le [chapitre 7](#) est d'ailleurs totalement dédié à l'étude de cette propriété fondamentale.

3 Modélisation d'un SLCI

3.1 Équation différentielle à coefficients constants

Les systèmes possédant les propriétés précédentes sont dit **linéaires continus et invariants** ou [système linéaire continu et invariant \(SLCI\)](#). Ceux-ci seront modélisés et régis par une équation différentielle à coefficients constants qui s'écrit dans le cas générale :

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad (1.1)$$

avec $n, m, c \in \mathbb{N}$, $s(t)$ le signal de sortie, $e(t)$ le signal d'entrée et $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sont des coefficients constants.

Le degré de dérivation de la sortie n le plus grand est appelé **ordre**. On parlera alors de **l'ordre du système** n . Le paramètre c qui correspond au degré de dérivation le plus petit de la sortie est appelé la **classe du système**.

Exemples

Pour un système d'ordre $n = 2$, de classe 0 et avec $m = 0$, son équation différentielle sera alors de la forme :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

⁶Chez nos collègues anglo-saxons, on rencontre la notion de BIBO (« bounded input bounded output »)

3.2 Exemples de mises en équation

Pour un problème donné, ces équations différentielles proviennent directement de la modélisation de la physique (qu'il soit mécanique, électronique, thermique ...). Par exemple, dans le cas d'un problème de mécanique, c'est la relation fondamentale de la dynamique qui est la source importante d'équations différentielles (appelées équations du mouvement). En électronique, ce sont, par exemple, les lois des noeuds et mailles (ou lois de Kirchhoff) qui permettront d'écrire ces équations différentielles.

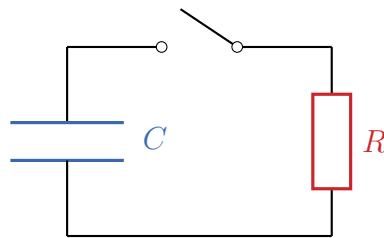


FIGURE 1.2 : Circuit RC ouvert.

Décharge d'un condensateur

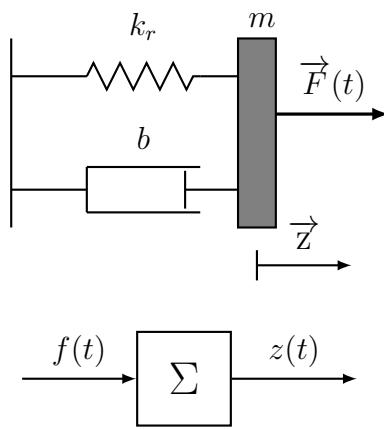
Considérons le circuit ouvert ci-contre, initialement chargé, constitué d'un condensateur de capacité électrique C et d'une résistance de valeur R . À la fermeture de l'interrupteur, à $t = 0$, un courant $i(t)$ parcourt le circuit. On observe alors la décharge du condensateur à travers une résistance R .

On souhaite suivre la quantité de charge $q(t)$ aux bornes du condensateur au cours du temps. La somme des tensions aux bornes du condensateur et de la résistance étant nulle, on a :

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0$$

Comme précédemment, on identifie formellement cette équation différentielle à la forme générale de l'[équation \(1.1\)](#) avec $s(t) = q(t)$, $e(t) = 0$, $n = 1$, $m = 0$, $a_1 = R$, $a_0 = \frac{1}{C}$.

Nous laissons au lecteur la résolution de cette équation différentielle par une approche directe classique. Sa résolution utilisant la transformée de Laplace, est présenté en exercice à la fin de ce chapitre.



Système masse-ressort

On considère un système mécanique constitué d'une masse m en translation couplée avec un ressort de constante de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux b (c.a.d que la force est proportionnelle à la vitesse). La masse est soumise à une force $\vec{f} = f(t) \vec{z}$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique en projection sur le vecteur \vec{z} , on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + b \frac{dz(t)}{dt} + kz(t) = f(t)$$

FIGURE 1.3 : (gauche) Système masse-ressort. (droite) Schéma-bloc de ce même système.

La résolution de cette équation du mouvement permet de connaître la position de la masse à chaque instant connaissant la force extérieure appliquée $f(t)$. Le système masse-ressort peut être assimilé à un **SLCI** dont l'entrée $e(t)$ est la force $f(t)$ et la sortie $s(t)$ est la position $z(t)$ de la masse (c.f le schéma-bloc de la [figure 1.3](#))

On identifie simplement, cette équation différentielle à la forme générale de l'[équation \(1.1\)](#) pour $s(t) = z(t)$, $e(t) = f(t)$, $n = 2$, $m = 0$, $a_2 = m$, $a_1 = b$, $a_0 = k_r$ et $b_0 = 1$. La résolution complète sera donnée en exercice à la fin de ce chapitre.

4 Modélisation d'un signal

Un signal est une variation d'une grandeur qui porte l'information de la sollicitation ou de la réponse d'un système.

Les signaux continus sont modélisés mathématiquement par des fonctions continues du temps. Formellement, par une fonction s telle que :

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow s(t) \end{aligned}$$

Il existe cependant d'autres types de signaux qui sont très souvent confondus à tort :

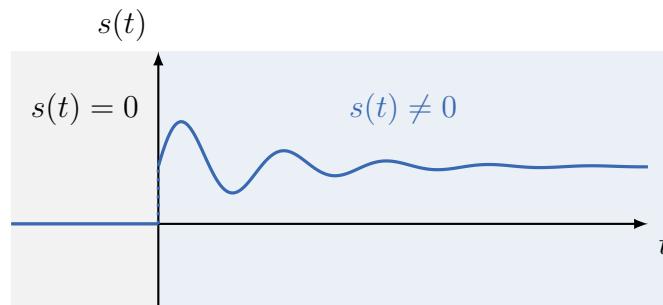
- un signal *quantifié* est un signal continu dont la valeur ne peut prendre que des valeurs discrètes.
- un signal *discret* est un signal à temps discret.
- un signal *numérique* est un signal discret et quantifié.

Dans le reste de ce document, nous ne traiterons que du cas de signaux en temps continu. Les signaux en temps discret sont généralement abordées lors d'un cours avancé d'automatique en cycle ingénieur.

4.1 Propriétés des signaux continus

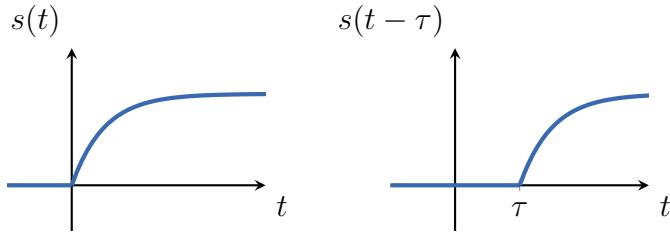
Causal

Un signal modélisé par la fonction $s(t)$ est dit **causal** si ce signal est nul pour tout $t < 0$. Pour un signal en entrée, le temps $t = 0$ permet de définir une origine des temps.



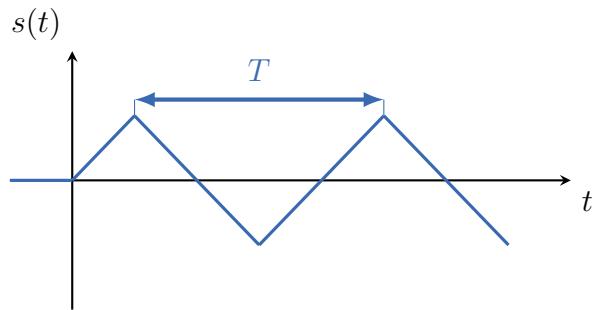
Retardé

Un signal $s(t - \tau)$ est dit **retardé** d'un temps τ par rapport à $s(t)$, si on lui a fait subir un changement d'origine des temps par rapport au signal $s(t)$.



Périodique

Un signal est dit **périodique** s'il se reproduit identique à lui même au bout d'un même intervalle de temps ou période T . On définit alors sa fréquence $f = 1/T$ qui est l'inverse de la période T ou la pulsation ω définie par rapport au cercle unité $\omega = 2\pi f$. Le signal



complet peut être totalement d'écrit en considérant un motif de base $s_0(t)$ telle que

$$s_0(t) = \begin{cases} s(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{pour } t > T \end{cases}$$

Le signal $s(t)$ est alors la somme (série) du motif retardé de nT avec $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$s(t) = \sum_0^{\infty} s_0(t - nT)$$

L'analyse de Fourier est un outil fondamental pour l'étude de ces signaux périodiques. Elle sort cependant légèrement du cadre de ce cours (c.f ??).

Stable

En se basant sur la définition donnée d'un système stable. Nous ne limiterons à dire qu'un signal stable est un signal borné. Il va sans dire que les signaux usuels en entrée de nos systèmes sont bornés et donc stables.

La [figure 1.4](#) présente un exemple qualitatif de réponses stables et instables pour deux sollicitations bornées (respectivement une sollicitation constante et une sollicitation oscillante).

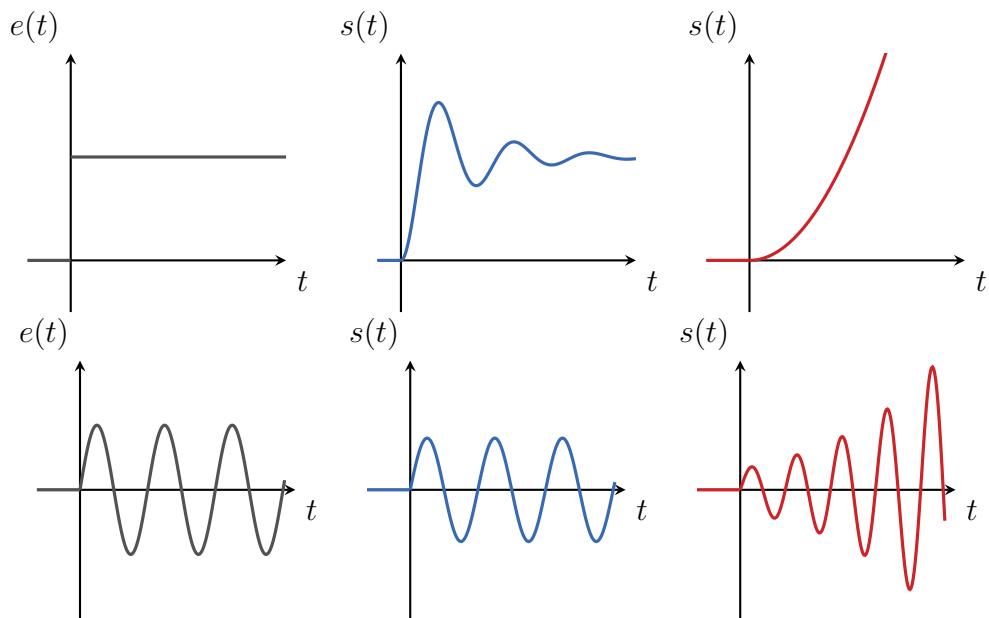


Figure 1.4 – Trois exemples de réponses d'un SLCI à des sollicitations bornées : (en bleu) réponses stables (en rouge) réponses instables.

4.2 Signaux usuels rencontrés...

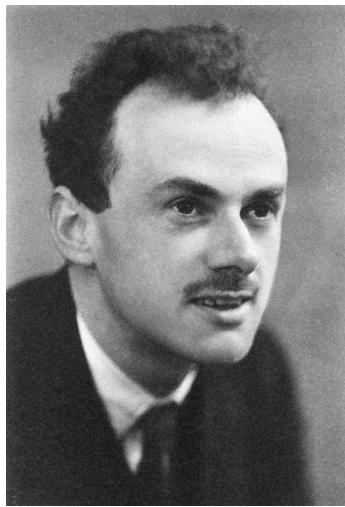


FIGURE 1.5 : **Paul Dirac**, (1902-1984) mathématicien et physicien britannique. Auteur de contributions majeures en mécanique quantique. [Lien Youtube](#)

Certains signaux sont des briques de base pour la construction de signaux plus complexes. Il est alors essentiel de bien les caractériser. Ici, nous distinguons les signaux généralement utilisés en entrée des signaux généralement rencontrés en sortie des **SLCI**.

4.2.1 ...en entrée

Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est une « fonction »⁷ telle que

$$\delta(t) : \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t) dt &= f(0) \end{cases}$$

Cette fonction est donc nulle partout sauf en $t = 0$ où elle prend une valeur infinie. C'est pourquoi l'intégrale sur tous les nombres réels d'une impulsion de Dirac est normalisée à 1. Graphiquement une impulsion de Dirac $\delta(t)$ est représentée par une flèche en $t = 0$. La figure ci-dessous présente une impulsion de Dirac ainsi qu'une impulsion retardée de τ noté $\delta(t - \tau)$. L'impulsion de Dirac peut être expériment-

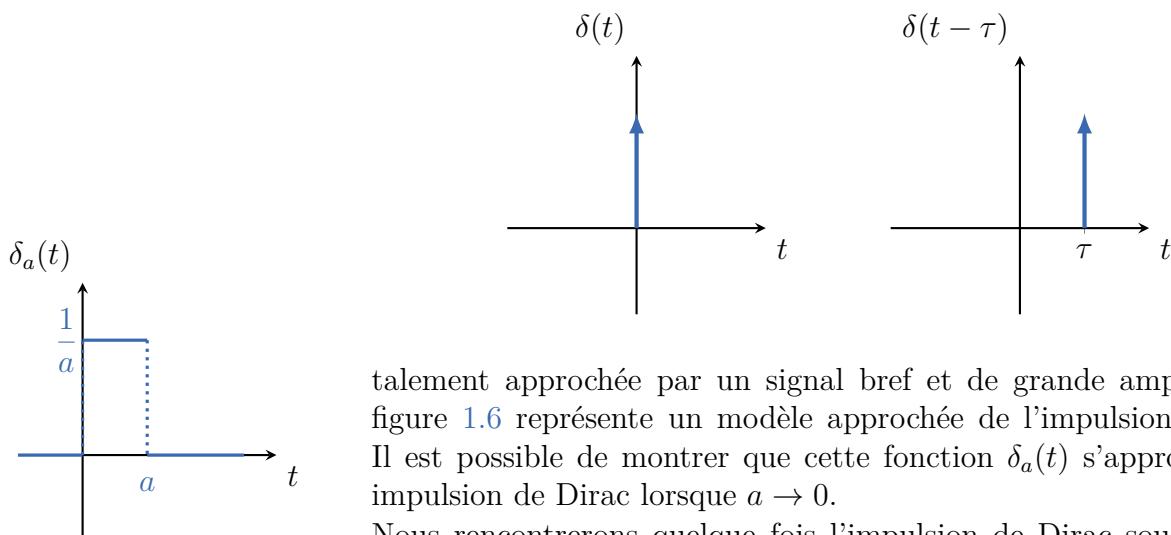


FIGURE 1.6 : Représentation de l'impulsion de Dirac approchée. Celle-ci tend vers l'impulsion de Dirac pour $a \rightarrow 0$. On remarquera que l'aire du rectangle est toujours égale à 1.

talement approchée par un signal bref et de grande amplitude. La figure 1.6 représente un modèle approché de l'impulsion de Dirac. Il est possible de montrer que cette fonction $\delta_a(t)$ s'approche d'une impulsion de Dirac lorsque $a \rightarrow 0$.

Nous rencontrerons quelque fois l'impulsion de Dirac sous sa forme généralisée,

$$e(t) = E_0\delta(t)$$

où $e(t)$ est le signal d'entrée du système et E_0 la valeur de l'amplitude de l'impulsion de Dirac dont la dimension dépendra de la nature du problème considéré. La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée **réponse impulsionale**. Nous verrons par la suite

⁷Les guillemets sont essentiels pour ne pas se fâcher avec nos collègues mathématiciens. En effet, ce signal est un exemple classique de la théorie des distributions qui étend la notion de fonction.

qu'une telle sollicitation brève et de grande amplitude permet de parfaitement caractériser le système. La réponse impulsionnelle, qui en résulte, contient toute l'information sur le système linéaire qui l'a élaboré.

Échelon-unité

L'échelon-unité est défini par la fonction, noté $u(t)$, telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction présente une marche⁸ à $t = 0$. Ci contre, nous la représentons avec la fonction retardée $u(t - \tau)$. En général, l'échelon-unité est utilisé en entrée de nos systèmes pour modéliser des états fermé/ouvert (« on/off ») ou encore en régulation. Nous la rencontrerons souvent sous sa forme généralisée,

$$e(t) = E_0 u(t)$$

où $e(t)$ est le signal d'entrée du système et E_0 la valeur seuil de l'échelon dont la dimension dépend de la nature du problème considéré.

D'après les propriétés du signal échelon-unité et de la causalité, il est possible de rendre causale une fonction quelconque en la multipliant par un échelon-unité (c.f 4.3).

La réponse d'un système à un échelon est appelée **réponse indicelle**. Remarquons que la fonction échelon-unité est l'intégrale de la distribution de Dirac,

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \, d\tau \quad (1.2)$$

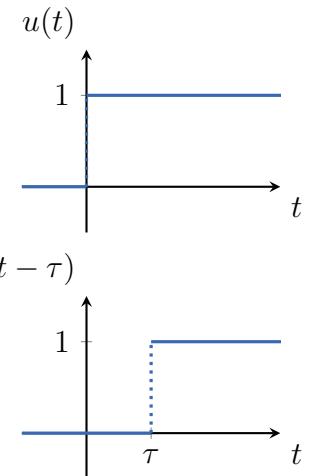


FIGURE 1.7 : Représentation graphique de (haut) la fonction échelon-unité et (bas) la fonction échelon-unité retardée de τ

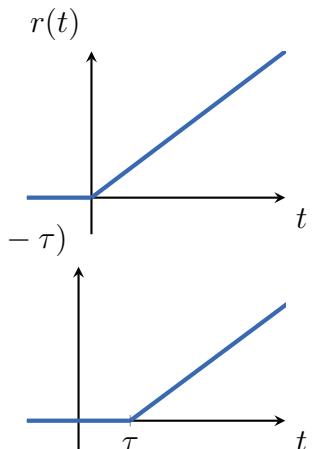


FIGURE 1.8 : Représentation graphique de (haut) la fonction rampe-unité et (bas) la fonction rampe-unité retardée de τ

Rampe-unité

Le signal rampe-unité⁹ est modélisé par la fonction $r(t)$ telle que :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

ou autrement dit, en utilisant la propriété de causalité de l'échelon :

$$r(t) = t \cdot u(t)$$

Remarquons que la fonction rampe est l'intégrale de l'échelon-unité, notamment

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) \, d\tau \quad (1.3)$$

⁸Nos collègues anglo-saxons l'appelle la « *step function* »

⁹On retrouve parfois [27] le terme d'échelon vitesse pour désigner la fonction rampe

La réponse d'un système à une rampe ne possède pas de nom spécifique pour la distinguer des autres réponses. Nous parlerons donc simplement de **réponse à une rampe**.

Sinusoïde

Le signal périodique sinusoïdal $s(t)$ est la fonction telle que :

$$s(t) = A \sin(\omega t + \phi) \cdot u(t)$$

avec A son amplitude, ω sa pulsation (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et ϕ sa phase (rad). Il est possible de voir le signal sinusoïdal comme la combinaison linéaire de la fonction cosinus et sinus. En effet, en utilisant une des relations trigonométriques simples¹⁰, $s(t)$ s'écrit :

$$s(t) = A(\sin(\phi) \cos \omega t + \cos(\phi) \sin \omega t)$$

La réponse d'un système à une sinusoïde est appelée la **réponse harmonique** et son analyse fera l'objet de tout un chapitre ([Chapitre 4](#)). Le [tableau 1.1](#) rappel la terminologie associé au déphasage entre deux signaux sinusoïdaux.

4.2.2 ... en sortie

Exponentielle décroissante

La fonction exponentielle décroissante $s(t)$ est telle que :

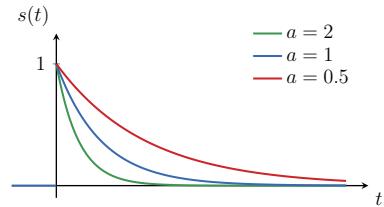


FIGURE 1.10 : Représentation graphique d'une exponentielle décroissante pour différentes valeurs du paramètre a .

$$s(t) = e^{-at} \cdot u(t)$$

avec a , l'inverse d'un temps, est caractéristique d'un amortissement. Cette fonction tend vers 0 pour tout $a > 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et diverge pour $a < 0$.

Sinusoïde amortie

La fonction sinusoïdale amortie $s(t)$ est la fonction telle que :

$$s(t) = Ae^{-at} \sin(\omega t + \phi) \cdot u(t)$$

où $a > 0$ est l'inverse d'un temps caractéristique de l'amortissement. Cette fonction est donc le produit d'une exponentielle décroissante et d'une sinusoïde.

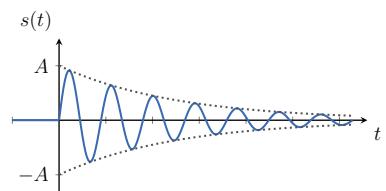


FIGURE 1.11 : Représentation d'un sinusoïde amortie. L'enveloppe en pointillé correspond aux fonctions Ae^{-at} et $-Ae^{-at}$.

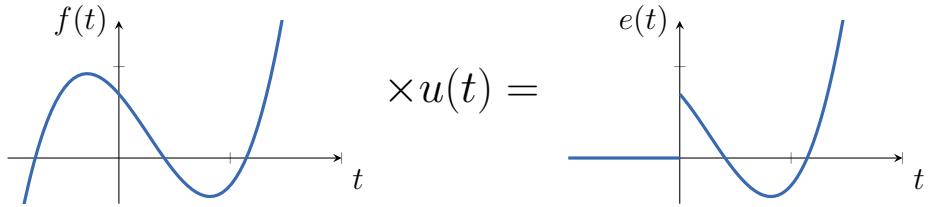
¹⁰à savoir la comptine des lycéens $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Déphasage	Terminologie	Graphe
$\Delta\phi = 0$	« en phase »	
$\Delta\phi = \pm\pi$	« en opposition de phase »	
$\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$	« en quadrature de phase » (retard de phase)	
$\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$	« en quadrature de phase » (avance de phase)	

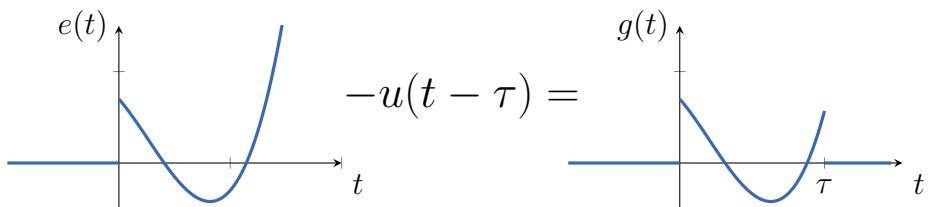
Tableau 1.1 – Différents types de déphasage d'un (rouge) signal sinusoïdal $s_2(t)$ par rapport à (bleu) un signal de référence $s_1(t)$ de phase nulle.

4.3 Décomposition d'un signal en signaux usuels

La fonction obtenue par le produit d'une fonction quelconque par la fonction échelon unitaire $u(t)$ est une fonction causale.



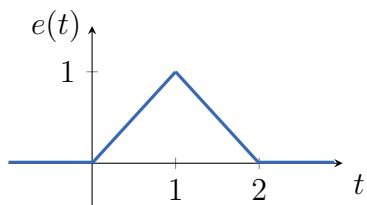
Si on retranche la fonction $e(t) = f(t)u(t)$ à partir d'un certain temps τ à l'aide de la fonction échelon unité retardé $u(t - \tau)$ il est possible de sélectionner une portion de la fonction initiale.



À l'aide de ces propriétés il est possible de décomposer un signal quelconque en une somme de signaux usuels.

Exemple

Soit le signal d'entrée défini par le graphe ci-dessous



C'est donc un signal qui est nul pour $t < 0$ (causal) et $t > 2$, et défini par t ($e_1(t)$) pour $t \in [0, 1]$ et la fonction $2 - t$ ($e_2(t)$) pour $t \in [1, 2]$.

Il suffit alors d'annuler les fonctions $e_1(t)$ pour $t > 1$ et $e_2(t)$ pour $t > 2$. En utilisant la propriété des fonctions échelon unitaire retardé, la fonction $e(t)$ peut être décomposé en une simple somme de fonctions usuels :

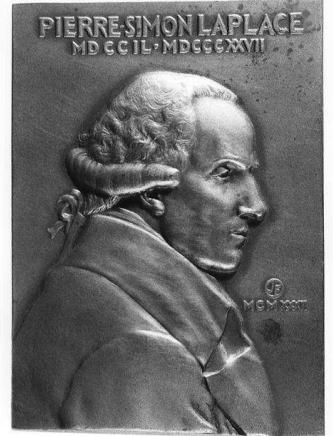
$$e(t) = e_1(t) (u(t) - u(t - 1)) + e_2(t) (u(t - 1) - u(t - 2))$$

en regroupant les termes on obtient alors :

$$e(t) = tu(t) + 2(1 - t)u(t - 1) - (2 - t)u(t - 2)$$

5 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est l'outil mathématique indispensable pour l'étude des [SLCI](#). Celle-ci est utile pour la résolution des équations différentielles et elle est essentiel pour la définition de la fonction de transfert qui relie l'entrée et la sortie d'un système linéaire.



5.1 Définition

La transformée de Laplace ([TL](#)), notée \mathcal{L} , d'un signal causal s fonction d'une variable réelle t , est la fonction S de la variable complexe p , définie par :

$$S(p) = \mathcal{L}\{s(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t) dt. \quad (1.4)$$

On dit également que $S(p)$ est l'image dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$ définie dans le domaine temporel. Remarquons, dès à présent l'utilisation d'une convention utile : les fonctions du temps seront toujours désignées par une minuscule, et les fonctions complexes par la majuscule respective. Notons que la transformée de Laplace n'est valide que lorsque la partie réelle de p est plus grande qu'une certaine valeur réelle α , que l'on nomme l'abscisse de convergence avec $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$.

La transformée $S(p)$ de $s(t)$ étant unique, connaissant $S(p)$ on en déduit $s(t)$ par la transformation inverse

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\}$$

Il existe une forme analytique de la transformée inverse basée sur la formule de Mellin-Fourier^[20] :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} S(p) dp$$

L'intégration de celle-ci est difficile à mettre en oeuvre^[11], on préférera l'utilisation des tables de transformations de Laplace pour réaliser la correspondance inverse ([Annexe C](#)). Lorsque la transformation n'existe pas dans les tables, il est possible de réaliser une décomposition en éléments simples de la réponse $S(p)$ pour se placer dans un cas usuel ([Annexe F](#)).

Pierre-Simon, marquis de Laplace, (1745-1827) mathématicien, astronome, physicien et homme politique français. (Paris, musée d'Orsay)

^[11]Il existe différentes méthodes numériques de transformée de Laplace inverse ([Annexe H](#)). Ces méthodes, hors programme, peuvent cependant faire l'objet d'un projet numérique intéressant.

5.2 Propriétés

Nous allons ici uniquement présenter les principales propriétés de la TL, on se rapportera à nouveau à l'[Annexe C](#) pour une liste exhaustive de ces propriétés.

Linéarité

La propriété fondamentale de la transformée de Laplace est d'être linéaire. Soit deux signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ continus et $S_1(p)$, $S_2(p)$ leurs transformées de Laplace respectives. La transformée de Laplace d'une d'une combinaison linéaire quelconque de $s_1(t)$, $s_2(t)$ est la même combinaison linéaire de $S_1(p)$ et $S_2(p)$. Autrement dit,

$$\mathcal{L}\{as_1(t) + bs_2(t)\} = aS_1(p) + bS_2(p) \quad (1.5)$$

Retard en t (temporel)

Soit $s(t - \tau)$, un signal $s(t)$ présentant un retard τ .

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t - \tau) dt$$

en appliquant le changement de variable $t' = t - \tau$, on obtient $t = t' + \tau$ et $dt = dt'$

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-p(t'+\tau)} s(t') dt' = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} e^{-pt'} s(t') dt'$$

on reconnaît dans cette dernière expression la définition de la transformée de Laplace, on écrit alors :

$$\mathcal{L}\{s(t - \tau)\} = e^{-p\tau} S(p) \quad (1.6)$$

Retard en p (Théorème de l'amortissement)

Soit $s(t)$ un signal de transformée de Laplace $S(p)$. La transformée de Laplace du signal modifié $e^{-at}s(t)$ s'écrit :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}s(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} s(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} s(t) dt$$

on reconnaît dans cette dernière expression la définition de la transformée de Laplace pour $p + a$, on obtient donc la transformée,

$$\mathcal{L}\{e^{-at}s(t)\} = S(p + a) \quad (1.7)$$

ou encore,

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p + a)\} = e^{-at}s(t). \quad (1.8)$$

Dérivation

Soit un signal $s(t)$ continu et dérivable pour $t \geq 0$ et $S(p)$ sa transformée de Laplace. Par définition de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{ds(t)}{dt} dt$$

par intégration par parties

$$\begin{aligned} v &= e^{-pt} & du &= \frac{ds(t)}{dt} dt \\ dv &= -pe^{-pt} dt & u &= s(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} &= [s(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} - p \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t) dt \\ &= -s(0) + pS(p) \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right\} = pS(p) - s(0) \quad (1.9)$$

On généralise à tous les ordres de dérivation dans le cas de conditions initiales nulles.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n s(t)}{dt^n} \right\} = p^n S(p)$$

Remarquons alors que **dériver dans le domaine temporel consiste à multiplier par p dans le domaine de Laplace.**

Intégration

Soient des signaux $v(t)$ et $s(t)$ tel que $v(t) = \int_0^t s(\tau) d\tau$. Par définition,

$$\mathcal{L} \{v(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} v(t) dt$$

par intégration par parties,

$$\begin{aligned} v &= v(t) & du &= e^{-pt} dt \\ dv &= s(t) dt & u &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{v(t)\} &= \left[-\frac{1}{p} v(t) e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} s(t) dt \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} s(t) dt + \frac{s(0)}{p} \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t s(\tau) d\tau \right\} = \frac{S(p)}{p} + \frac{s(0)}{p} \quad (1.10)$$

Remarquons alors que intégrer dans le domaine temporel consiste à diviser par p dans le domaine de Laplace.

Théorème de la valeur initiale

$$s(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pS(p) \quad \forall S(p) \quad (1.11)$$

où $s(0)$ est la valeur d'un signal $s(t)$ pour $t = 0$. Ce théorème est utilisé pour déterminer la valeur initiale dans le domaine temporelle d'un signal dont on connaît uniquement la transformée de Laplace.

Théorème de la valeur finale

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) \quad (1.12)$$

où $s(\infty)$ est la valeur d'un signal $s(t)$ pour $t \rightarrow \infty$. Ce théorème n'est valable que si $s(\infty)$ est définie. Ou comme on le dira plus tard si le signal est stable.

Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Le produit de convolution de deux signaux $h(t)$ et $e(t)$ que l'on note $(h * e)(t)$ est défini par :

$$(h * e)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e(\tau) d\tau$$

La transformée de Laplace transforme le produit de convolution en un simple produit des signaux dans le domaine de Laplace. Formellement,

$$\mathcal{L} \{(h * e)(t)\} = H(p)E(p) \quad (1.13)$$

Si cette propriété est fondamentale, nous ne l'utiliserons que très exceptionnellement. Nous la rencontrerons à nouveau, dans ce chapitre, lorsque nous introduirons la fonction de transfert d'un système linéaire.

5.3 Transformées des signaux usuels

Nous présentons les transformées de Laplace des signaux usuels introduits au paragraphe 4.2

Transformée d'une impulsion de Dirac

Par simple application des définitions de la **TL** et de l'impulsion de Dirac, la transformée d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ s'écrit :

$$\mathcal{L} \{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = 1$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (1.14)$$

Transformée d'un échelon-unité

La transformée de Laplace d'un signal échelon-unité s'écrit :

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{-e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p} \quad (1.15)$$

Dans le cas de la forme généralisée, il suffit de multiplier par une constante.

Transformée d'une rampe

La transformée de Laplace d'un signal rampe s'écrit :

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} r(t) dt = \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{p} e^{-pt} & du &= dt \\ dv &= e^{-pt} dt & u &= t \\ \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt &= \left[-t \frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{p} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot u(t)\} = \frac{1}{p^2}. \quad (1.16)$$

On généralise aux ordres supérieurs (« parabolique », « cubique » ...) :

$$\mathcal{L}\left\{ \frac{1}{n!} t^n \cdot u(t) \right\} = \frac{1}{p^{n+1}}. \quad (1.17)$$

Transformée d'une exponentielle décroissante

La transformée de Laplace d'une exponentielle décroissante s'écrit :

$$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt = \frac{1}{p+a}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \{ e^{-at} u(t) \} = \frac{1}{p+a} \quad (1.18)$$

Nous aurions pu utiliser la propriété du retard en p (Théorème de l'amortissement) pour déterminer cette transformée de Laplace.

Transformée d'un sinus

La transformée de Laplace de la fonction sinus s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \sin \omega t \cdot u(t) \} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \{ \sin \omega t \cdot u(t) \} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (1.19)$$

Transformée d'un cosinus

La transformée de Laplace de la fonction cosinus s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \cos \omega t \cdot u(t) \} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt + \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) \\ &= \frac{p}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{L} \{ \cos \omega t \cdot u(t) \} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (1.20)$$

5.4 Application de la TL à la résolution d'équation différentielle

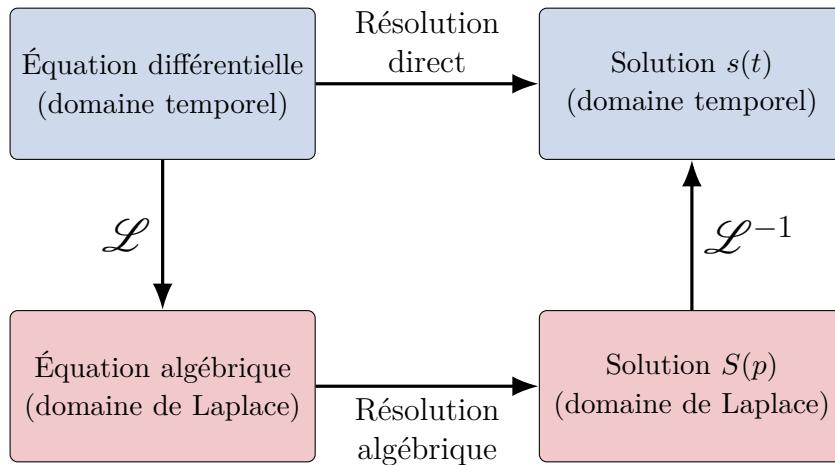


Figure 1.12 – Représentation schématique de la méthode employée pour la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

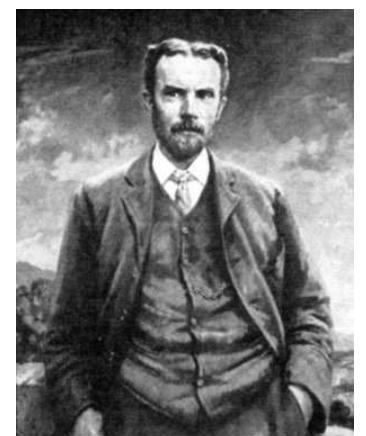
5.4.1 Méthodologie

Lorsqu'une équation différentielle à coefficients constants a pu être établie pour définir la relation entre l'entrée et la sortie d'un **SLCI**, il nous faut en trouver une solution. Les méthodes classiques de résolution d'équations différentielles peuvent être difficiles et fastidieuses à mettre en oeuvre, notamment dans le cas d'équation différentielle d'ordre élevé ou encore pour des systèmes composés de sous-systèmes. La transformée de Laplace permet de mettre en oeuvre une méthode plus simple et systématique pour la la résolution de ces équations différentielles à coefficients constants.

Comme nous l'avons déjà discuté, la forme générale de ces équations est donnée par :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad (1.21)$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$, $s(t)$ le signal de sortie, $e(t)$ le signal d'entrée et $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. L'équation est dite d'ordre n . Sous cette forme, cette équation différentielle constitue ce que l'on nomme **la loi temporelle** du système. Sans perte de généralité, on ne considérera dans un premier temps que les systèmes pour lesquels toutes les **conditions initiales sont nulles**, appelées également les conditions d'Heaviside



Oliver Heaviside (1850-1925), physicien britannique. Il développa le calcul opérationnel pour résoudre les équations différentielles

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.21), on obtient ce que l'on nomme **la loi fréquentielle** du système :

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i S(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i E(p) \quad (1.22)$$

La résolution algébrique de cette équation est simplement donnée par :

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} E(p) \quad (1.23)$$

La solution dans le domaine temporelle $s(t)$ de l'équation différentielle est alors simplement obtenue par transformée de Laplace inverse de $S(p)$.

Cette méthode, résumée par l'organigramme de la figure 1.12, est appliquée à un exemple complet au paragraphe suivant.

5.4.2 Exemple complet

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (1.24)$$

où $e(t)$ et $s(t)$ sont respectivement les fonctions temporelles de l'entrée et de la sortie du système régi par cette équation différentielle. Nous considérons la réponse à un échelon-unité (c.-à-d. $e(t) = u(t)$) avec pour conditions initiales :

$$\begin{aligned} s(0) &= -1 \\ s'(0) &= 2. \end{aligned}$$

Nous allons résoudre cette équation par deux méthodes différentes : **la méthode directe de résolution d'équations différentielles avec second membre**, et par **l'application de la transformée de Laplace**. Nous pourrons observer que l'application de la TL pour la résolution des équations différentielles est une méthode plus systématique qui s'affranchit de la forme particulière de l'équation différentielle auquelle on a à faire. Nous verrons que la transformée de Laplace devient totalement indispensable pour la caractérisation d'un **SLCI**.

Résolution par la méthode direct

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est donnée par

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

cette équation possède une solution double $r_{1,2} = -1$. La solution générale de l'équation homogène $s_0(t)$ (c.a.d sans second membre) est donc de la forme :

$$s_0(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t}.$$

Une solution particulière $s_1(t) = 1$ nous est trivialement donnée par l'entrée en échelon qui correspond au régime permanent. La solution générale est donc donnée par :

$$s(t) = (\alpha t + \beta)e^{-t} + 1$$

Dérivons cette solution générale pour pouvoir déterminer les coefficients α, β en utilisant les conditions initiales,

$$\begin{aligned} s'(t) &= \alpha e^{-t} - (\alpha t + \beta)e^{-t} \\ s(0) &= -1 \Rightarrow \beta + 1 = -1 \Rightarrow \beta = -2 \\ s'(0) &= -2 \Rightarrow \alpha + 2 = -2 \Rightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation différentielle (1.24) est donc donnée par

$$s(t) = 1 - 2e^{-t}. \quad (1.25)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette fonction est solution de l'équation 1.24, et qu'elle respecte notamment les conditions initiales. Le graphe de la solution est également présenté (Figure 1.13).

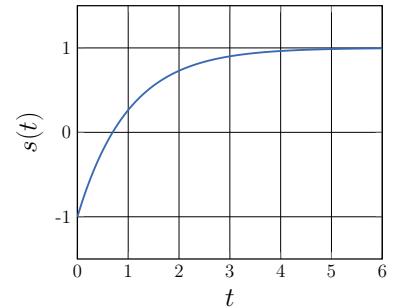


FIGURE 1.13 : Représentation de la solution générale de l'équation différentielle (1.24) pour $e(t) = u(t)$. On vérifie lors du tracé que l'on observe bien les principales propriétés du signal (c.-à-d. conditions initiales, valeur finale).

Résolution par application de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est linéaire. Il nous est alors possible de l'appliquer aux différents termes de l'équation différentielle (1.24) séparément. On obtient pour chacun des termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{s(t)\} &= S(p), \\ \mathcal{L}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} &= pS(p) - s(0) = pS(p) + 1, \\ \mathcal{L}\left\{\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right\} &= p^2S(p) - ps(0) - s'(0) = p^2S(p) + p - 2, \\ \mathcal{L}\{u(t)\} &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle (1.24) devient dans le domaine de Laplace :

$$p^2 S(p) + p - 2 + 2pS(p) + 2 + S(p) = \frac{1}{p}$$

En réarrangeant cette expression, il est possible de déterminer la forme de la réponse $S(p)$ dans le domaine de Laplace.

$$\begin{aligned} S(p) (p^2 + 2p + 1) + p &= \frac{1}{p} \\ S(p) &= \frac{1 - p^2}{p(p+1)^2} \end{aligned}$$

de Laplace usuels, nous allons décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples ([Annexe F](#)).

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}$$

Par identification,

$$S(p) = \frac{A(p+1)^2 + Bp(p+1) + Cp}{p(p+1)^2} = \frac{1 - p^2}{p(p+1)^2}$$

$$\begin{cases} A + B &= -1 \\ 2A + B + C &= 0 \\ A &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B &= -2 \\ C &= 0 \end{cases}$$

La réponse $S(p)$ se décompose donc de la façon suivante en éléments simples :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p+1}$$

Il est maintenant plus aisés d'appliquer la transformation de Laplace inverse, en utilisant le tableau des transformées de Laplace usuels (c.f lignes 3 et 7 du tableau de l'[Annexe C](#)) pour obtenir la réponse temporelle $s(t)$. Notamment,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1$$

et

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p+1} \right\} = 2e^{-t}$$

soit

$$\mathcal{L}^{-1} \{S(p)\} = s(t) = 1 - 2e^{-t} \quad (1.26)$$

Comme attendu, les deux méthodes donnent le même résultat, cependant la transformée de Laplace permet de définir dans le domaine de Laplace, une relation direct entre l'entrée et la sortie d'un système. C'est la fonction de transfert qui réalise ce lien.

6 Fonction de Transfert

6.1 Définition

La fonction de transfert $H(p)$ d'un système est donnée par le rapport de la sortie $S(p)$ et l'entrée $E(p)$ dans le domaine de Laplace.

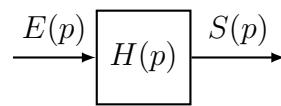
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (1.27)$$

ou encore,

$$S(p) = H(p)E(p) \quad (1.28)$$

Cette fonction $H(p)$, également appelé **transmittance**, caractérise le système de façon univoque. Pour une entrée donnée il est possible de prévoir la sortie d'un système caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$.

Nous représenterons très souvent cette relation dans le domaine de Laplace par le schéma-bloc suivant :



6.2 Lien entre fonction de transfert et réponse impulsionnelle

À partir de l'équation 1.28, le lien entre la fonction de transfert et la réponse impulsionnelle paraît évident. En effet, pour une impulsion de Dirac en entrée, la réponse impulsionnelle est simplement donnée par la fonction de transfert puisque $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = E(p) = 1$. Autrement dit, la fonction de transfert d'un système est la réponse impulsionnelle dans le domaine de Laplace. Ou encore, si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un système alors,

$$H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

D'après la propriété du produit de convolution, nous savons que le produit de deux fonctions dans le domaine de Laplace correspond au produit de convolution de ces deux fonctions dans le domaine temporelle, dans le cas de l'équation 1.28,

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)E(p)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e(\tau)d\tau$$

ou encore,

$$s(t) = (h * e)(t) \quad (1.29)$$

Cette dernière exprime que la réponse, dans le domaine temporel, d'un système est donnée par le produit de convolution de l'entrée $e(t)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$.

6.3 Représentations algébrique et graphique de la fonction de transfert

D'après la loi fréquentielle (Équation (1.22)), la fonction de transfert d'un SLCI peut s'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle,

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}. \quad (1.30)$$

Il existe différentes façons équivalentes d'écrire cette fonction de transfert. Nous allons en introduire deux : **la forme canonique** et **la forme factorisée**. La forme canonique permet de faire apparaître les intégrateurs purs du système. La forme factorisée utilise les racines de la fraction rationnelle définissant la fonction de transfert. Pour montrer l'équivalence de ces représentations nous allons les construire à partir de la forme générale de l'équation (1.30).

Une fonction de transfert peut être vue comme le fraction de deux polynômes (formellement une fraction rationnelle) : un polynôme au numérateur $N(p)$ et un polynôme au dénominateur $D(p)$.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Ces polynômes possèdent des racines dans \mathbb{C} . Les **racines de $N(p)$** sont dits **les zéros de $H(p)$** et les **racines de $D(p)$** sont dits **les pôles de $H(p)$** . Il en vient qu'une fonction de transfert possède m zéros et n pôles.

Exemple

Reprenons l'équation différentielle de la section précédente, dans les conditions de Heaviside, afin de construire la fonction de transfert qui lui est associée.

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad (1.31)$$

La transformée de Laplace de cette équation nous donne,

$$\begin{aligned} p^2S(p) + 2pS(p) + S(p) &= E(p) \\ S(p)(p^2 + 2p + 1) &= E(p) \\ S(p) &= \frac{1}{p^2 + 2p + 1}E(p) \end{aligned}$$

La fonction de transfert associée à cette équation différentielle est donc

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}$$

Il est aisément de constater que la fonction de transfert est d'ordre deux et ne possède pas de zéro.

6.3.1 Forme canonique de la fonction de transfert

Développons les sommes de l'équation (1.30),

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}.$$

La forme canonique dépend du nombre d'intégrateur du système. Par exemple, si a_0 est non nul, l'expression précédente se factorise sous la forme,

$$H(p) = K_0 \cdot \frac{1 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + b'_m p^m}{1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_n p^n}.$$

avec $K_0 = \frac{b_0}{a_0}$, $a'_i = \frac{a_i}{a_0}$ et $b'_i = \frac{b_i}{b_0}$. Dans ce cas, le système est dit de classe 0 et ne possède aucun intégrateur.

Si maintenant a_0 est nul et a_1 non nul, la fonction de transfert peut s'écrire,

$$H(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{1 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + b'_m p^m}{1 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_{n-1} p^{n-1}}.$$

avec $K_1 = \frac{b_0}{a_1}$, $a'_i = \frac{a_{i+1}}{a_1}$ et $b'_i = \frac{b_i}{b_0}$. Dans ce cas, le système est dit de classe 1 et possède un intégrateur.

On généralise donc la forme canonique de la fonction de transfert d'un système de classe $\alpha \geq 0$ sous la forme,

$$H(p) = \frac{K_\alpha}{p^\alpha} \cdot \frac{\sum_{i=0}^m b'_i p^i}{\sum_{i=0}^{n-\alpha} a'_i p^i} \quad (1.32)$$

où $K_\alpha = \frac{b_0}{a_\alpha}$ est le **gain statique**, α est la **classe du système** et les coefficients de la forme canonique a'_i et b'_i sont déterminés à partir des coefficients de l'équation différentielle régissant le système¹².

En posant respectivement $N(p)$ et $D(p)$ les polynômes du numérateur et du dénominateur. La forme canonique de la fonction de transfert s'écrira également très souvent :

$$H(p) = \frac{K_\alpha N(p)}{p^\alpha D(p)}$$

On constate que sous cette forme les polynômes $N(p)$ et $D(p)$ sont de la forme

$$1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha}$$

et donc $N(0) = 1$ et $D(0) = 1$.

¹²Pour simplifier la notation, les primes des coefficients de la forme canonique peuvent être omis, cependant ceux-ci restent toujours différents des coefficients de l'équation différentielle.

Exemple de forme canonique

Soit un système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2p + 5}{p^3 + 2p^2 + 4p}$$

Le coefficient d'ordre 0 étant nul au dénominateur, le système est de classe 1, la forme canonique de cette fonction de transfert est donc¹³ donnée par

$$H(p) = \frac{K(0.4p + 1)}{p(0.25p^2 + 0.5p + 1)},$$

où le gain statique $K = 1.25$.

6.3.2 Forme factorisée de la fonction de transfert

Soient les pôles p_i avec $i \in [1, n]$ et les zéros z_j avec $j \in [1, m]$ de la fonction de transfert $H(p)$. Il est alors possible de factoriser par les pôles et les zéros pour écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = k \cdot \frac{\prod_{j=0}^m (p - z_j)}{\prod_{i=0}^n (p - p_i)}, \quad (1.33)$$

avec $k = \frac{b_m}{a_n}$. On remarquera que cette constante k n'est pas le gain statique de la forme canonique.

Cette forme factorisée est très utile pour la représentation graphique de la réponse harmonique (c.f chapitre 4).

Exemple de fonction de transfert factorisée

Soit la fonction de transfert $H(p)$ tel que

$$H(p) = \frac{6p + 12}{2p^2 + 4p + 1.5}$$

En factorisant par les coefficients d'ordre maximum au numérateur et au dénominateur, et en observant que la fonction de transfert possède un zéro ($z_1 = -2$) et deux pôles ($p_1 = -1.5$ et $p_2 = -0.5$), on peut réécrire $H(p)$ sous sa forme factorisée :

$$H(p) = \frac{6}{2} \cdot \frac{p + 2}{p^2 + 2p + 0.75}$$

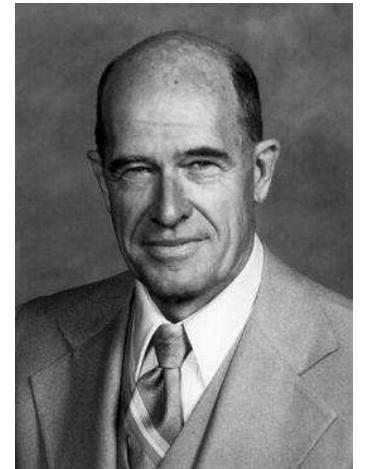
¹³Il est d'usage en automatique d'écrire les nombres rationnels par leurs valeurs numériques plutôt que par leurs fractions.

La fonction de transfert possède un zéro ($z_1 = -2$) et deux pôles ($p_1 = -1.5$ et $p_2 = -0.5$). Elle peut alors s'écrire (avec $k = 3$) :

$$H(p) = \frac{k(p+2)}{(p+1.5)(p+0.5)}$$

6.3.3 Carte des pôles et zéros d'une fonction de transfert

Il est également possible de représenter une fonction de transfert graphiquement à l'aide d'une carte des pôles et des zéros dans le plan complexe (les racines d'un polynôme pouvant être complexes). Dans ce type de représentation, les pôles sont représentés par des (\times) et les zéros par des (\circ). La carte des pôles et des zéros d'une fonction de transfert est essentielle pour la construction du lieu d'Evans pour l'étude des systèmes asservis.



Exemple de carte de pôles et zéros d'une fonction de transfert

Soit $H(p)$ une fonction de transfert telle que,

$$H(p) = \frac{p-1}{p^2+2p+2} \quad (1.34)$$

Cette fonction de transfert possède un zéro réel ($z_1 = 1$) et deux pôles complexes conjugués ($p_{1,2} = -1 \pm j$). La forme factorisée de $H(p)$ est donc

$$H(p) = \frac{p-1}{(p+1+j)(p+1-j)} \quad (1.35)$$

La figure 1.14 présente la carte des pôles de cette fonction de transfert.

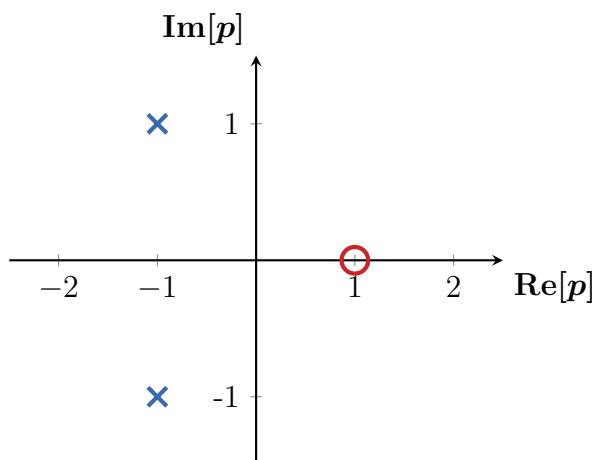


Figure 1.14 – Exemple d'une carte des pôles et zéros associés à la fonction de transfert Équation (1.34)

Walter Richard Evans, (1920-1999), ingénieur, automaticien américain. Il développa la méthode graphique, qui porte son nom, permettant d'étudier les pôles des systèmes asservis.

7 Exercices du chapitre

Signaux

Exercice 1 : Décomposition d'un signal ★★★

Soit le signal d'entrée $e_1(t)$ défini par le graphe ci-contre.

Q1. Décomposer $e_1(t)$ à l'aide de fonctions échelons.

Q2. Donner la transformée de Laplace $E_1(p)$ de ce signal.

Exercice 2 : Décomposition d'un signal parabolique ★★☆

Soit le signal d'entrée $e_2(t)$ défini par le graphe ci-contre.

Q1. Décomposer $e_2(t)$ à l'aide de fonctions échelons.

Q2. Donner la transformée de Laplace $E_2(p)$ de ce signal.

Exercice 3 : Décompositon d'un signal et transformée de Laplace ★★★

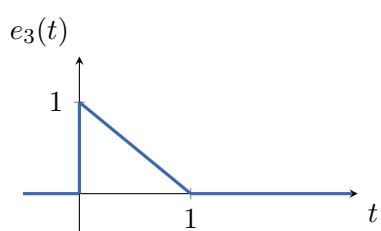
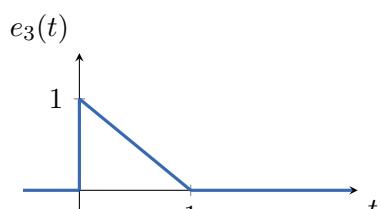
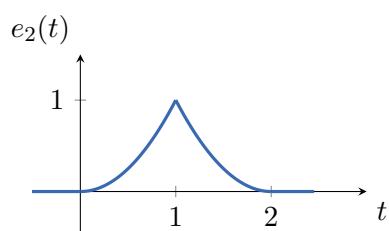
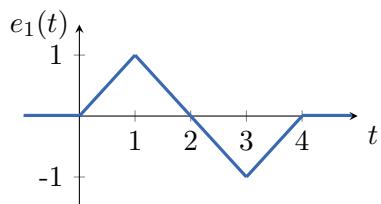
On sollicite un système linéaire continu et invariant par deux signaux $e_3(t)$ et $e_4(t)$ (d'amplitude maximale et de durée unité) définis par les graphes ci-contre.

Q1. Décomposer $e_3(t)$ et $e_4(t)$ à l'aide de la fonction échelon unitaire (c.-à-d. $u(t)$).

Q2. Déterminer les fonctions $E_3(p)$ et $E_4(p)$ les transformées de Laplace respectives de $e_3(t)$ et $e_4(t)$.

On sollicite maintenant le système par la fonction $e(t)$ constituée de la somme des signaux $e_3(t)$ et $e_4(t - 1)$.

Q3. Déterminer à partir des résultats précédents la transformée de Laplace $E(p)$ correspondant à la somme des signaux $e_3(t)$ et $e_4(t - 1)$.



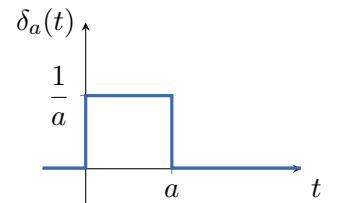
Exercice 4 : L'impulsion de Dirac approchée ★★

L'impulsion de Dirac peut être approchée par la fonction porte $\delta_a(t)$ définie par le graphe ci-contre.

Q1. Décomposer $\delta_a(t)$ à l'aide de fonctions échelons.

Q2. Donner sa transformée de Laplace en fonction du paramètre a .

Q3. En considérant la limite $a \rightarrow 0$, montrer que la transformée de Laplace de $\delta_a(t)$ tend bien vers 1.



Équations différentielles

Exercice 5 : Décharge d'un condensateur ★☆☆

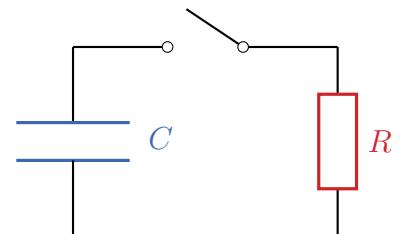
On reprend la mise en équation de la décharge d'un condensateur dans un circuit RC comme présentée dans ce chapitre (c.f [section 3.2](#)). L'équation différentielle de la charge $q(t)$ au borne du condensateur est donnée par :

$$RC \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = 0$$

Le condensateur est initialement chargé $q(0) = q_0$. On remarquera que le produit RC est de dimension d'un temps. On notera cette constante $\tau = RC$.

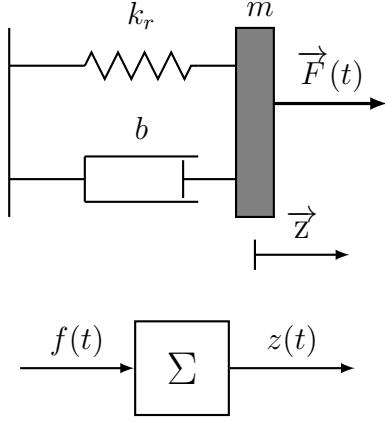
Q1. Déterminer la transformée de Laplace $Q(p)$ de la charge au borne du condensateur $q(t)$.

Q2. Déterminer alors la fonction $q(t)$ solution de l'équation différentielle de la décharge d'un condensateur.



Exercice 6 : Système masse-ressort ★★

On reprend ici, la mise en équation du système mécanique masse-ressort présentée dans ce chapitre (c.f [section 3.2](#)). L'équation différentielle reliant la position de la masse $z(t)$ et la force appliquée $f(t)$ est donnée par



$$m \frac{d^2z(t)}{dt^2} + b \frac{dz(t)}{dt} + kz(t) = f(t)$$

où m est la masse, b le coefficient d'amortissement visqueux et k la constante de raideur du ressort. Ce système peut être considéré comme un système dont l'entrée est la force $f(t)$ et la sortie est la position $x(t)$ de la masse.

On se place dans le cas de conditions initiales nulles.

Q1. Déterminer la transformée de Laplace $Z(p)$ solution algébrique de la transformée de Laplace de l'équation différentielle de ce système.

Q2. Identifier la fonction de transfert $H(p)$ du système et donner sa forme canonique

Q3. Identifier la solution algébrique $Z(p)$ pour une cette sollicitation.

Q4. En comparant, la solution algébrique précédente à la forme

$$\frac{K}{\frac{1}{\omega^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega}p + 1},$$

identifier les paramètres K , ξ et ω en fonction des paramètres du problème.

Q5. En utilisant, la transformée de Laplace inverse suivante :

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{\omega^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega}p + 1} \right\} = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega t} \sin \omega \sqrt{1 - \xi^2} t \quad \text{pour } \xi < 1,$$

déterminer $z(t)$ la solution temporelle de l'équation différentielle pour une telle sollicitation.

On réalise une expérience avec une masse $m = 0.5 \text{ kg}$, un ressort de constante de raideur $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et un amortissement visqueux $b = 0.894 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q6. Déterminer les valeurs numériques des paramètres ξ et ω

Q7. Tracer la réponse $z(t)$ et déterminer le temps pour que la masse retourne à son position d'équilibre (à 5% de son déplacement maximal)

Fonction de transfert

Exercice 7 : Forme canonique d'une fonction de transfert du premier ordre ★☆☆

Soit un système régi par l'équation différentielle suivante

$$a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

Q1. Déterminer la forme canonique de fonction de transfert $H(p)$ associée à cette équation différentielle

Q2. Déterminer les paramètres K et τ en fonction des coefficients a_i et b_i de tels sorte que $H(p)$ s'écrivent sous la forme

Q3. Déterminer les dimensions de ces paramètres quelques soient celles des signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$

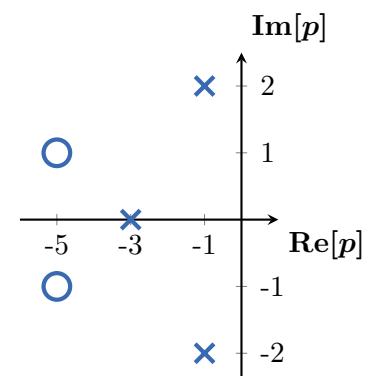
Exercice 8 : Carte des pôles d'une fonction de transfert ★★☆

Soit la carte des pôles et zéros ci-contre

Q1. Donner les zéros et les pôles de la fonction de transfert.

Q2. Écrire la fonction de transfert $H(p)$ sachant que le gain de sa forme factorisée vaut 3.

Q3. Déterminer la forme canonique de $H(p)$ et déduire le gain statique, la classe et l'ordre de ce système.



8 Corrigé des exercices

Exercice 1 : Décomposition d'un signal

Q1. Décomposer $e_1(t)$ à l'aide de fonctions échelons.

Le signal $e(t)$ est défini par :

$$e_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in [0, 1] \\ 2 - t & t \in [1, 3] \\ t - 4 & t \in [3, 4] \\ 0 & t > 4 \end{cases}$$

On peut alors décomposer $e_1(t)$ en somme d'échelon :

$$e_1(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-3)) + (t-4)(u(t-3) - u(t-4))$$

En regroupant les termes, on obtient alors :

$$e_1(t) = tu(t) + 2(1-t)u(t-1) + 2(t-3)u(t-3) - (t-4)u(t-4)$$

Q2. Donner la transformée de Laplace $E_1(p)$ de ce signal.

La transformée de Laplace $E_1(p)$ est simplement donnée par la transformée de chacun des termes.

$$E_1(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{2e^{-p}}{p^2}(p-1) + \frac{2e^{-3p}}{p^2}(1-3p) - \frac{e^{-4p}}{p^2}(1-4p)$$

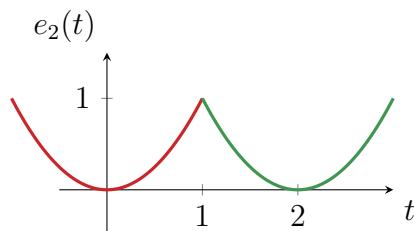
ou encore

$$E_1(p) = \frac{1}{p^2} \left(1 + 2e^{-p}(p-1) + 2e^{-3p}(1-3p) - e^{-4p}(1-4p) \right)$$

Exercice 2 : Décomposition d'un signal parabolique

Q1. Décomposer $e_2(t)$ à l'aide de fonctions échelons.

Le signal est composé de deux paraboles.



$$e_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & t \in [0, 1] \\ (t-2)^2 & t \in [1, 2] \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

À l'aide des fonctions échelons le signal s'écrit alors

$$e_2(t) = t^2(u(t) - u(t-1)) + (t-2)^2(u(t-1) - u(t-2)).$$

En regroupant les termes on peut réécrire cette expression sous la forme :

$$e_2(t) = t^2u(t) - 4(t-1)u(t-1) - t^2u(t-2) + 4(t-1)u(t-2)$$

Q2. Donner la transformée de Laplace $E_2(p)$ de ce signal.

On rappelle que la transformé de Laplace de la fonction $f(t) = t^2$ est $F(p) = \frac{2}{p^3}$. On obtient alors pour la transformée $E_2(p)$ de $e_2(t)$:

$$E_2(p) = \frac{2}{p^3} - 4e^{-p} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) - e^{-2p} \frac{2}{p^3} + 4e^{-2p} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right)$$

$$E_2(p) = \frac{2}{p^3} \left(1 - e^{-2p} \right) - 4 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) \left(e^{-p} - e^{-2p} \right)$$

Exercice 3 : Décompositon d'un signal et transformée de Laplace

Q1. Décomposer $e_3(t)$ et $e_4(t)$ à l'aide de la fonction échelon unitaire (c.-à-d. $u(t)$).

Décomposons $e_3(t)$ et $e_4(t)$ par morceaux. On a alors :

$$e_3(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-t & t \in [0, 1] \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

et

$$e_4(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in [0, 1] \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

On peut alors écrire ces signaux comme la somme des signaux usuels comme :

$$e_3(t) = (1-t)(u(t) - u(t-1)) = u(t) - r(t) - u(t-1) + r(t-1)$$

et

$$e_4(t) = t(u(t) - u(t-1)) = r(t) - r(t-1)$$

où $u(t)$ est la fonction échelon et $r(t)$ la fonction rampe.

Q2. Déterminer les fonctions $E_3(p)$ et $E_4(p)$ les transformées de Laplace respectives de $e_3(t)$ et $e_4(t)$.

Les transformées sont simplement données par la propriété des fonctions retardés et des signaux rampes. On a notamment,

$$E_3(p) = \frac{(p-1)}{p^2} (1 - e^{-p})$$

et

$$E_4(p) = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p})$$

Q3. Déterminer à partir des résultats précédents la transformée de Laplace $E(p)$ correspondant à la somme des signaux $e_3(t)$ et $e_4(t - 1)$.

On sollicite le système par le signal $e(t)$ défini par :

$$e(t) = e_3(t) + e_4(t - 1)$$

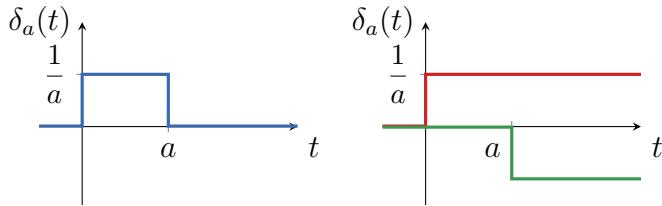
La transformée de Laplace $E(p)$ est simplement donnée par la somme,

$$E(p) = E_3(p) + e^{-p}E_4(p) = \frac{(p - 1)}{p^2}(1 - e^{-p}) + \frac{e^{-p}}{p^2}(1 - e^{-p}) = \frac{1 - e^{-p}}{p^2}(e^{-p} + p - 1)$$

Exercice 4 : L'impulsion de Dirac approchée

Q1. Décomposer $\delta_a(t)$ à l'aide de fonctions échelons.

La fonction $\delta_a(t)$ est simplement donnée par



$$p_a(t) = \frac{1}{a}u(t) - \frac{1}{a}u(t - a) = \frac{1}{a}(u(t) - u(t - a))$$

où $u(t)$ est la fonction échelon unité.

Q2. Donner sa transformée de Laplace en fonction du paramètre a .

On rappelle la transformée de Laplace d'une fonction retardée :

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau p}F(p)$$

La transformée de Laplace de $\delta_a(t)$ est donc donnée par :

$$\Delta_a(p) = \mathcal{L}\{\delta_a(t)\} = \frac{1}{a}(\mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t - a)\}) = \frac{1}{ap}(1 - e^{-ap})$$

Q3. En considérant la limite $a \rightarrow 0$, montrer que la transformée de Laplace de $\delta_a(t)$ tend bien vers 1.

Le développement limité d'ordre 1 de $e^x = 1 + x + o(x)$ permet de déterminer la limite pour $a \rightarrow 0$ de la transformée de Laplace de $\delta_a(t)$. En effet,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Delta_a(p) = \frac{1}{ap}(1 - 1 + ap) = 1.$$

Puisque la transformée de Laplace d'une impulsion de Dirac est égale à 1, on a bien vérifié que $\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(p) = \delta(t)$ où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac.

Exercice 5 : Décharge d'un condensateur

Dans cet exercice nous allons appliquer la méthode » classique« pour la résolution d'une équation différentielle à coefficients constants.

Q1. Déterminer la transformée de Laplace $Q(p)$ de la charge au borne du condensateur $q(t)$.

La transformée de Laplace de l'équation différentielle de la décharge d'un condensateur est donnée par :

$$\tau(pQ(p) - q_0) + Q(p) = 0$$

où q_0 est la condition initiale de $q(t)$. La résolution algébrique de cette équation nous donne

$$Q(p)(\tau p + 1) = q_0 \tau$$

ou encore :

$$Q(p) = q_0 \frac{\tau}{\tau p + 1}$$

Remarquons que cette solution ne dépend que des conditions initiales, il n'est pas possible de définir une fonction de transfert dans ce cas particulier.

Q2. Déterminer alors la fonction $q(t)$ solution de l'équation différentielle de la décharge d'un condensateur.

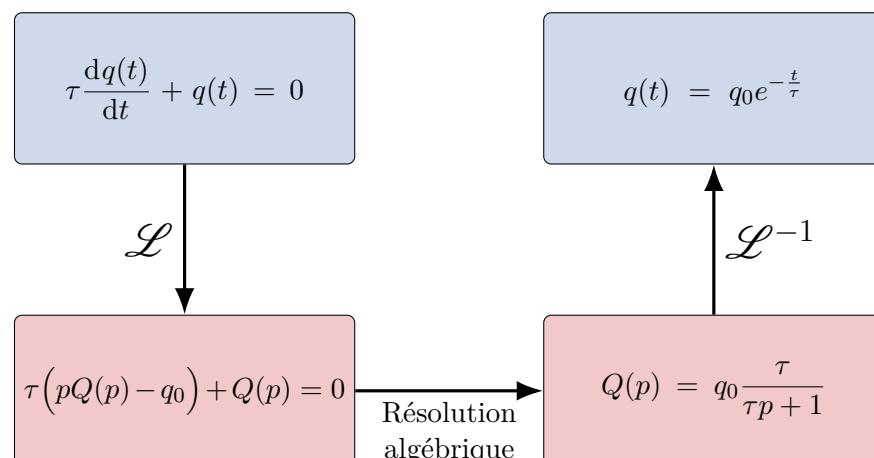
Pour déterminer la solution $q(t)$ de l'équation différentielle, il suffit de déterminer la transformée inverse de $Q(p)$.

La transformée inverse de la fonction $F(p) = \frac{1}{p+a}$ est $f(t) = e^{-at}$. Donc sous la forme,

$$Q(p) = q_0 \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}},$$

la transformée inverse de $Q(p)$ est simplement donnée par

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



La figure 1.15 suivante présente la représentation graphique de cette solution pour $\tau = 1$ s.

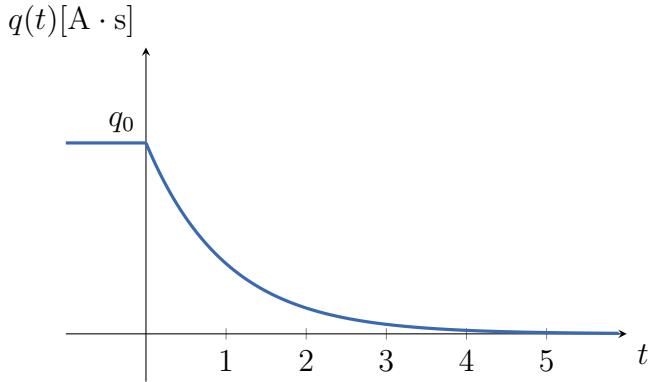


Figure 1.15 – Charge aux bornes du condensateur en fonction du temps.

Exercice 6 : Système masse-ressort

Q1. Déterminer la transformée de Laplace $Z(p)$ solution algébrique de la transformée de Laplace de l'équation différentielle de ce système.

La transformée de Laplace de l'équation différentielle nous donne :

$$Z(p)(mp^2 + bp + k) = F(p)$$

ainsi on peut écrire $X(p)$ sous la forme :

$$Z(p) = \frac{1}{mp^2 + bp + k} F(p)$$

Q2. Identifier la fonction de transfert $H(p)$ du système et donner sa forme canonique

On identifie simplement la fonction de transfert du système comme la fraction rationnelle définie par le rapport $\frac{Z(p)}{F(p)}$

$$H(p) = \frac{1}{mp^2 + bp + k}$$

Sous forme canonique, cette fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{1}{k \left(\frac{m}{k} p^2 + \frac{b}{k} p + 1 \right)}$$

On sollicite le système par une impulsion de Dirac. Dans les faits, on peut voir cette sollicitation comme l'application d'une force $f(t)$ constante d'intensité $\frac{1}{a}$ intense pendant un temps a très court (c.-à-d. $a \rightarrow 0$).

Q3. Identifier la solution algébrique $Z(p)$ pour une cette sollicitation.

La transformée de Laplace de cette sollicitation $F(p)$ est égale à 1 à la limite $a \rightarrow 0$. On obtient alors pour la transformée de Laplace de la position :

$$Z(p) = \frac{1}{mp^2 + bp + k}$$

ou encore en utilisant la forme canonique de la fonction de transfert :

$$Z(p) = \frac{1}{k \left(\frac{m}{k} p^2 + \frac{b}{k} p + 1 \right)}$$

Q4. Identifier les paramètres K , ξ et ω en fonction des paramètres du problème.

$$\begin{cases} K = \frac{1}{k} \\ \omega = \left(\frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \xi = \frac{b}{2k} \omega \end{cases}$$

Q5. Déterminer $z(t)$ la solution temporelle de l'équation différentielle pour une telle sollicitation.

Dans les conditions pour lesquels les paramètres m, b, k donne $\xi < 1$ La solution est donc de la forme :

$$z(t) = K \frac{\omega}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega t} \sin \omega \sqrt{1 - \xi^2} t$$

ou encore

$$z(t) = \frac{1}{m \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-b}{2m} t} \sin \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} \right)^{\frac{1}{2}} t$$

On réalise une expérience avec une masse $m = 0.5 \text{ kg}$, un ressort de constante de raideur $k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et un amortissement visqueux $b = 0.894 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

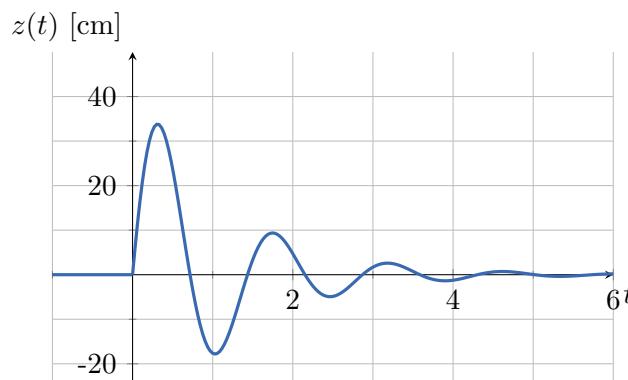
Q6. Déterminer les valeurs numériques des paramètres ξ et ω

$$\omega = 4.47 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\xi = 0.2$$

Q7. Tracer la réponse $z(t)$ et déterminer le temps pour que la masse retourne à son position d'équilibre (à 5% de son déplacement maximal)

Le déplacement maximal est d'environ 35 cm. On constate sur la figure ci-dessous que la masse retourne à sa position d'équilibre (à 1.75 cm près) après approximativement 4 s.



Exercice 7 : Forme canonique d'une fonction de transfert du premier ordre

Q1. Déterminer la forme canonique de fonction de transfert $H(p)$ associée à cette équation différentielle

La transformée de Laplace de l'équation différentielle nous amène à définir la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0}{a_1 p + a_0}$$

sous forme canonique elle s'écrit :

$$H(p) = \frac{b_0}{a_0 \left(\frac{a_1}{a_0} p + 1 \right)}$$

Q2. Déterminer les paramètres K et τ en fonction des coefficients a_i et b_i de tels sorte que $H(p)$ s'écrivent sous la forme

Par identification, les paramètres K et τ sont données par

$$\begin{cases} K &= \frac{b_0}{a_0} \\ \tau &= \frac{a_1}{a_0} \end{cases}$$

Q3. Déterminer les dimensions de ces paramètres quelques soient celles des signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$

L'étude dimensionnelle de l'équation différentielle nous permet d'identifier les relations suivantes :

$$[a_1][s(t)]T^{-1} = [a_0][s(t)] = [b_0][e(t)].$$

Ainsi τ a toujours la dimension d'un temps quelque soit la dimension des signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$.

$$[\tau] = \frac{[a_1]}{[a_0]} = T.$$

La dimension du paramètre K dépend elle du rapport des dimensions de ces signaux. En effet,

$$[K] = \frac{[b_0]}{[a_0]} = \frac{[s(t)]}{[e(t)]}$$

On peut dire que la dimension de la fonction de transfert est donnée par le paramètre K .

Exercice 8 : Carte des pôles d'une fonction de transfert

Q1. Donner les zéros et les pôles de la fonction de transfert.

D'après la carte des pôles et zéros, le système est composé de trois zéros $p_1 = -3$, $p_2 = -1+2j$ et $p_3 = -1-2j$ et de deux zéros $z_1 = -5+j$ et $z_2 = -5-j$.

Q2. Écrire la fonction de transfert $H(p)$ sachant que le gain de sa forme factorisée vaut 3.

La forme factorisée de la fonction de transfert est alors donnée par

$$H(p) = 3 \frac{(p - z_1)(p - z_2)}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)}$$

ou encore en développant les différents termes,

$$H(p) = 3 \frac{(p + 5 + j)(p + 5 - j)}{(p + 3)(p + 1 + 2j)(p + 1 - 2j)} = 3 \frac{p^2 + 10p + 26}{p^3 + 5p^2 + 11p + 15}$$

Q3. Déterminer la forme canonique de $H(p)$ et déduire le gain statique, la classe et l'ordre de ce système.

La forme canonique de $H(p)$ est donnée par

$$H(p) = \frac{26}{5} \frac{\frac{1}{26}p^2 + \frac{10}{26}p + 1}{\frac{1}{15}p^3 + \frac{1}{3}p^2 + \frac{11}{15}p + 1}$$

On alors à faire à un système d'ordre 3 de classe 0 et de gain statique de valeur 5.2. Notons que dans le domaine de l'automatique les fractions sont communément données sous forme décimales. On écrira donc plus facilement cette fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = 5.2 \frac{0.0385p^2 + 0.385p + 1}{0.066p^3 + 0.33p^2 + 0.733p + 1}$$

Aussi sous cette forme, la question de la précision des valeurs décimales peut se poser.

2 Schémas fonctionnels et graphes de fluence

Sommaire

1	Introduction	56
2	Éléments de base des schémas fonctionnels	56
3	Transformation des schémas fonctionnels	58
3.1	Réduction de schéma-bloc	58
3.2	Manipulation de schéma-bloc	60
4	Cas d'entrées multiples	62
5	Réduction de schéma-bloc de grande taille	63
5.1	Exemple à entrée simple	63
5.2	Exemple à entrées multiples	65
6	Graphe de fluence	66
6.1	Définitions	66
6.2	Algèbre des graphes de fluences	67
6.3	Règle de Mason	70
7	Schéma-bloc dans le domaine temporel	73
7.1	Opérateur intégral	73
7.2	Produit d'un signal temporel par un scalaire	74
7.3	Représentation d'une équation différentielle	74
7.4	Application au système masse-ressort	75
8	Exercices du chapitre	78
9	Corrigé des exercices	82

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire des outils graphiques pour faciliter la représentation des relations mathématiques entre les différents éléments constituants un **SLCI**. Cet outil est le **schéma fonctionnel** ou également appelé **schéma-bloc**. Les schémas fonctionnels, dans le domaine de Laplace, nous seront très utiles pour l'étude des systèmes asservis. Nous introduirons une algèbre de blocs permettant de réduire les schémas-blocs et de s'affranchir de la manipulation d'expression mathématique de grande taille. Nous aborderons également le cas des entrées multiples.

Nous introduirons également les graphes de fluence, comme présenté dans [20]. Ces derniers sont moins utilisés pour l'étude des **SLCI**, et peuvent donc être négligés dans une première lecture, l'algèbre qui lui est associée s'avère cependant bien plus efficace et pourra être utilisée dans d'autres applications (ex : électronique, réseaux de neurones). Enfin nous présenterons, la représentation des équations différentielles à l'aide de schémas-bloc dans le domaine temporel. Cette approche également hors programme peut être utile pour mieux appréhender les résultats obtenus dans le domaine de Laplace.

2 Éléments de base des schémas fonctionnels

Les schémas fonctionnels sont composés de quatre éléments de base : **les flèches, les blocs, les comparateurs et sommateurs et les points de prélèvement**

Flèche

Les flèches donnent la direction de l'information (c.-à-d. du signal) au sein du schéma-bloc. Elles peuvent être ornées de la grandeur mathématique qui leurs sont associées. Celles-ci peuvent être des grandeurs temporelles ou dans le domaine de Laplace.

$$\xrightarrow{e(t)} \quad \xrightarrow{E(p)}$$

Cependant, nous nous limiterons à l'usage de ces schémas fonctionnelles pour la représentation de grandeur dans le domaine de Laplace.

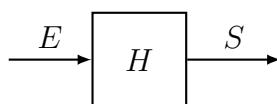
Pour alléger la notation dans ce chapitre, nous omettrons très souvent la variable p des grandeurs dans le domaine de Laplace désignées par une majuscule.

Bloc

Le bloc est la représentation d'une fonction de transfert entre deux grandeurs dans le domaine de Laplace. Par exemple, la relation entre l'entrée E et la sortie S définie par la fonction de transfert H qui s'écrit formellement,

$$S = HE, \tag{2.1}$$

est équivalente au schéma fonctionnel¹ suivant :



¹Les schémas-blocs de ce document ont tous étaient réalisés avec les macros TikZ (**schemabloc**) écrit par R. Papanicola[21]. À noter que des macros TikZ (**gfluence**) pour représenter les graphes de fluence de ce même chapitre, ont était fortement inspiré par ce même auteur.

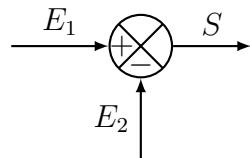
Comparateur/Sommateur :

Les comparateurs ou sommateurs permettent de représenter des opérations simples entre différentes grandeurs. Nous parlerons respectivement de comparateur ou de sommateur dans le cas d'une différence ou d'une somme entre deux grandeurs.

Par exemple, la relation

$$S = E_1 - E_2$$

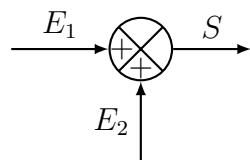
est équivalente au comparateur suivant :



De même la somme de deux grandeurs,

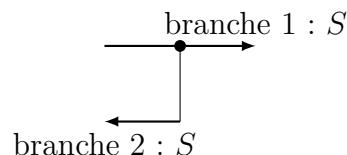
$$S = E_1 + E_2$$

est équivalente au sommateur suivant :



Point de prélèvement

Un point de prélèvement (ou point de dérivation ou encore jonction) est un point d'une flèche où une information est prélevée ne modifiant pas sa valeur. Par exemple, la jonction suivante (représentée par un point) donne lieu à deux branches auxquelles sont associées la même grandeur S .



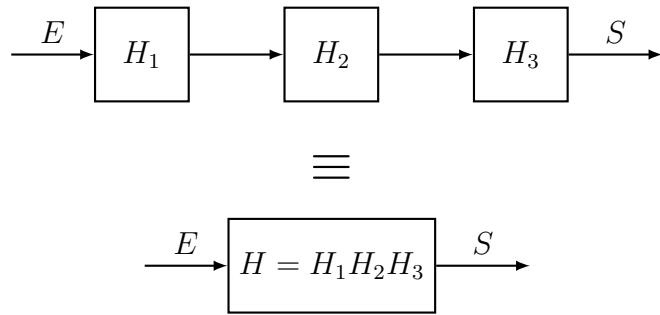
Dans cette configuration, la branche 1 est dite « direct » et la branche 2 est dite de « retour ».

3 Transformation des schémas fonctionnels

3.1 Réduction de schéma-bloc

Blocs en série / produit

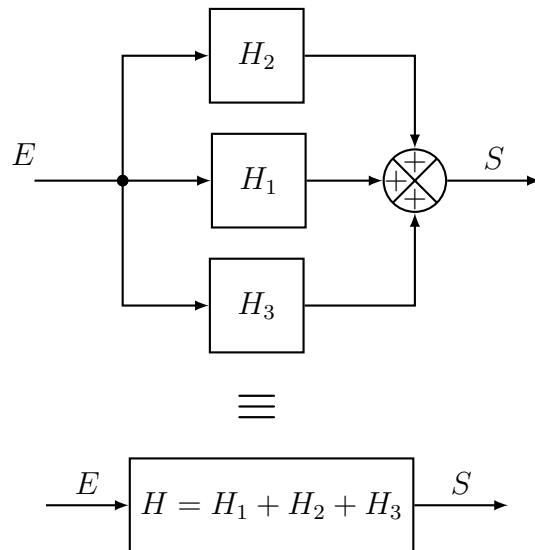
Lorsque les blocs sont placés en série, la fonction de transfert entre la sortie et l'entrée globale est le produit des fonctions de transfert mis en jeu. Par exemple, les deux schémas fonctionnels suivants sont équivalents.



Nous laissons au lecteur la démonstration triviale à partir des relations mathématiques.

Blocs en parallèle

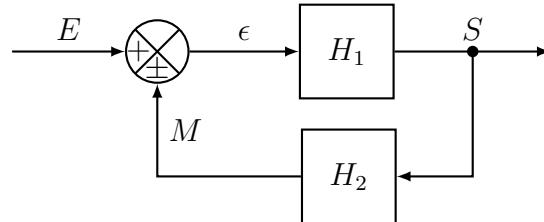
Lorsque les blocs sont placés en parallèle, la fonction de transfert entre la sortie et l'entrée globale est la somme des fonctions de transfert mis en jeu. Par exemple, les deux schémas fonctionnels suivants sont équivalents.



La démonstration est également triviale.

La boucle de contre-réaction (positive ou négative)

La boucle de contre-réaction² peut être réduite à une simple fonction de transfert. Considérons un système défini par le schéma-bloc ci-dessous, composé des différents éléments de bases.



Notons l'utilisation du symbole \pm pour envisager à la fois les comparateurs et sommateurs. Déterminons la relation entre l'entrée E et la sortie S de ce système. Pour cela réécrivons les relations linéaires simples issus de ce schéma-bloc. On sait que :

$$\epsilon = E \pm M \quad (2.2)$$

$$M = H_2 S \quad (2.3)$$

$$S = H_1 \epsilon \quad (2.4)$$

Introduisons l'équation (2.3) dans (2.2) et le résultat ainsi obtenu dans (2.4) :

$$\begin{aligned} \epsilon &= E \pm H_2 S \\ S &= H_1(E \pm H_2 S) \\ S &= H_1 E \pm H_1 H_2 S \end{aligned}$$

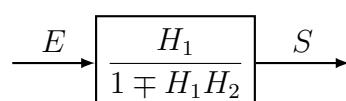
Regroupons les termes dépendant de la sortie ensemble pour déterminer la relation entre l'entrée et la sortie.

$$S(1 \mp H_1 H_2) = H_1 E$$

On obtient alors la formule de Black reliant la sortie est l'entrée d'une boucle de contre-réaction :

$$S = \frac{H_1}{1 \mp H_1 H_2} E \quad (2.5)$$

Notons l'inversion du signe du dénominateur de la formule selon que la boucle est positive ou négative. La boucle de contre-réaction est donc équivalente au schéma-bloc simplifié suivant :

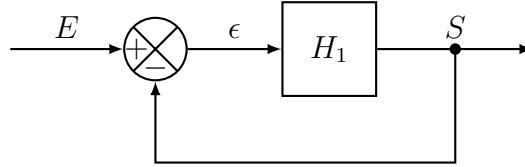


Harold Stephen Black (1898-1983) ingénieur, électronicien américain. Découvreur de la boucle de contre-réaction négative

²« Positive or negative feedback », chez nos collègues anglophones.

Boucle de contre-réaction unitaire

Une boucle de contre-réaction unitaire est une boucle de contre-réaction sans fonction de transfert de retour (ex : dans le cas présenté précédemment $H_2 = 1$).



La formule de Black se simplifie alors de la façon suivante :

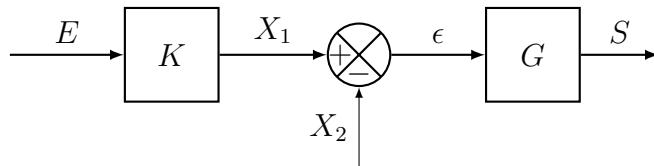
$$S = \frac{H_1}{1 + H_1} E \quad (2.6)$$

3.2 Manipulation de schéma-bloc

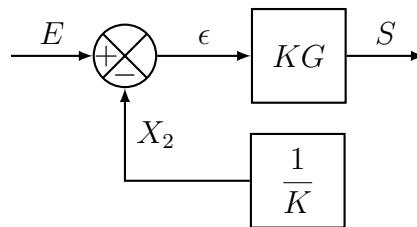
Nous allons ici présenter différentes manipulations que nous pourront appliquer au schéma-bloc. Ces manipulations peuvent être vues comme des opérations d'une **algèbre de blocs**.

Déplacement d'un comparateur vers la gauche

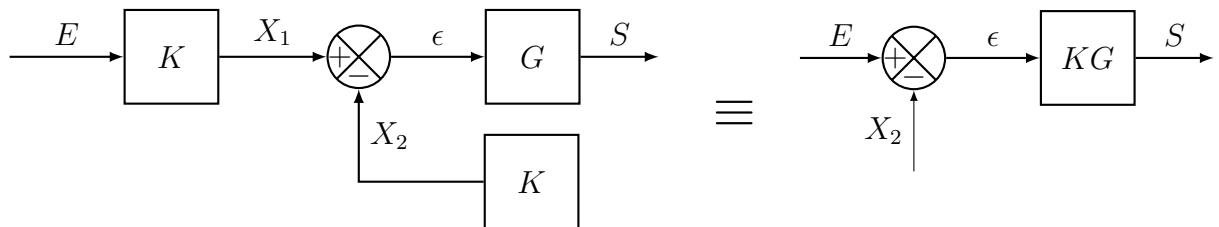
Considérons le schéma-bloc suivant :



Pour pouvoir déplacer le comparateur vers la gauche, il faut introduire le bloc K dans la chaîne direct. En conséquence, la chaîne de retour doit être modifiée pour ne pas affecter la sortie globale S . Le schéma fonctionnel précédent est donc équivalent au schéma ci-dessous :

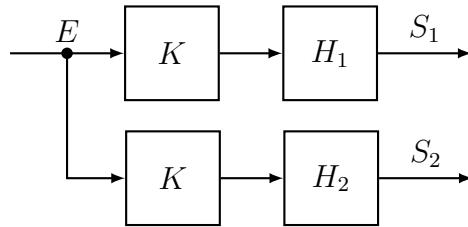


Dans le cas particulier où les deux branches du comparateur sont toutes les deux affectées par la même fonction de transfert, il suffit de déplacer la fonction de transfert après le comparateur. Par exemple, les deux schémas-blocs suivants sont équivalents :

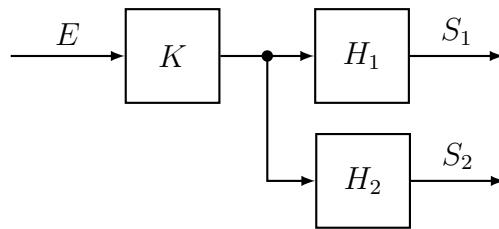


Déplacement d'un point de prélèvement vers la droite

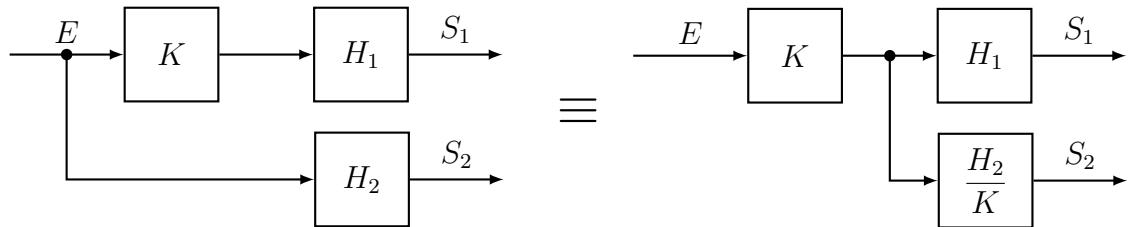
Considérons le schéma-bloc suivant :



Il est aisé de déplacer le bloc K devant le point de prélèvement :



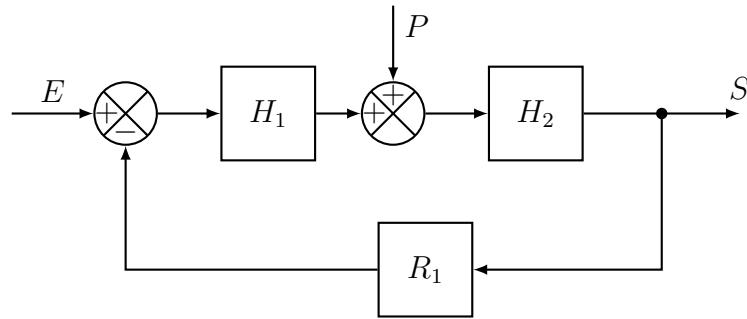
Dans le cas particulier où seul une branche est affectée par le bloc, il faut réduire la branche non affectée après avoir déplacer le point de prélèvement. Ansi les deux schémas-blocs ci-dessous sont équivalents :



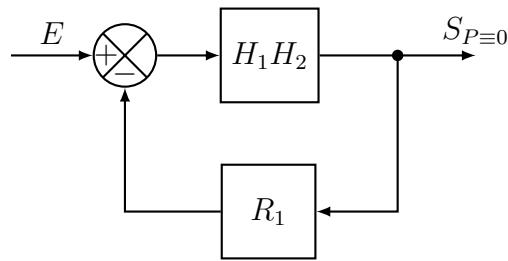
4 Cas d'entrées multiples

Dans le cas d'un système possédant plusieurs entrées, il est possible de simplifier le problème en appliquant le principe de superposition. La réponse totale devient alors la somme des réponses individuelles de chaque entrée lorsque toutes les autres sont considérées comme nulles.

Considérons le schéma-bloc suivant :



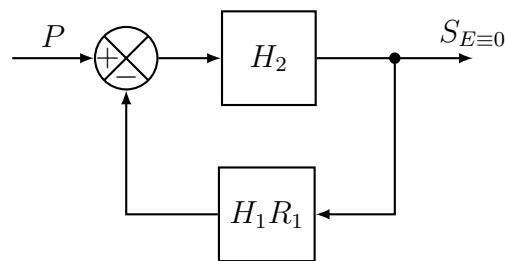
Dans un premier temps, on considère l'entrée P nulle, le schéma-bloc devient :



La sortie $S_{P \equiv 0}$ (c.-à-d. lorsque $P \equiv 0$) est donc donnée par la formule de Black pour la boucle de contre-réaction ainsi obtenue.

$$S_{P \equiv 0} = \frac{H_1 H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} E$$

Dans le cas où l'on considère maintenant l'entrée E comme nulle, le schéma-bloc se réduit de la façon suivante :



La sortie $S_{E \equiv 0}$ est donc donnée par,

$$S_{E \equiv 0} = \frac{H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} P$$

La sortie totale S du système à deux entrées est la somme de ses sorties indépendantes,

$$S = S_{P \equiv 0} + S_{E \equiv 0} \quad (2.7)$$

$$S = \frac{H_1 H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} E + \frac{H_2}{1 + R_1 H_1 H_2} P \quad (2.8)$$

$$S = H_E E + H_P P \quad (2.9)$$

Si E est une entrée de consigne et P une perturbation, H_E et H_P sont respectivement appelées **fonction de transfert d'asservissement** et **fonction de transfert de régulation**. Remarquons que le dénominateur de ces fonctions de transferts sont identiques.

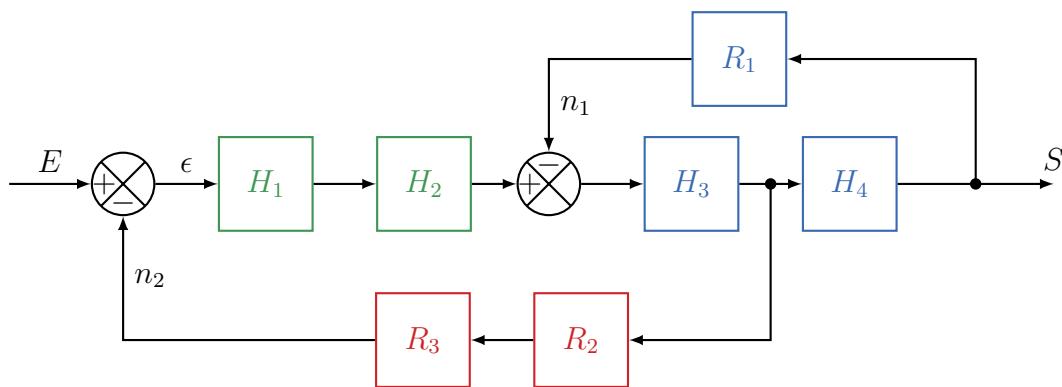
5 Méthodologie générale pour la réduction de schéma-bloc de grande taille

Nous venons de présenter les principales transformations et manipulations qui peuvent être appliquées aux schémas fonctionnels. Nous donnons ici une approche simple pour la réduction de schéma-bloc de grande taille [20] :

1. Regrouper les blocs en parallèle et en série.
2. Éliminer les boucles de contre-réaction locales.
3. Déplacer les sommateurs/comparateurs vers la gauche et déplacer les jonctions vers la droite.
4. Répéter pour obtenir une forme canonique pour une entrée particulière.
5. Dans le cas d'entrée multiple, répéter (1-4) pour chaque entrée.

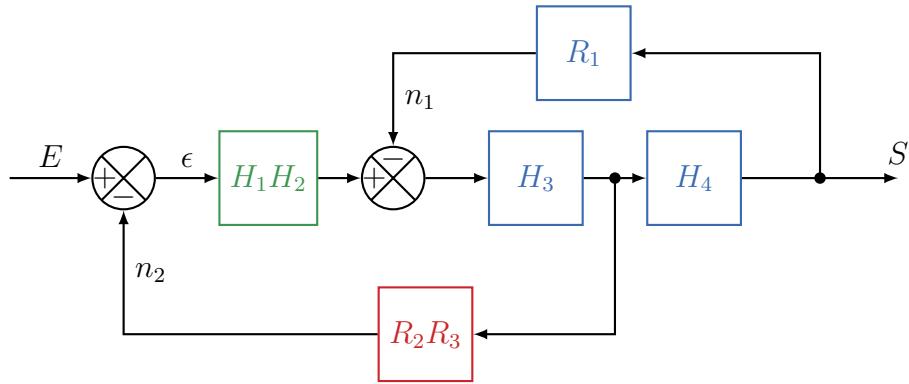
5.1 Exemple à entrée simple

Nous allons appliquer étape par étape cette méthodologie à la réduction du schéma-bloc, à une seule entrée, suivant :



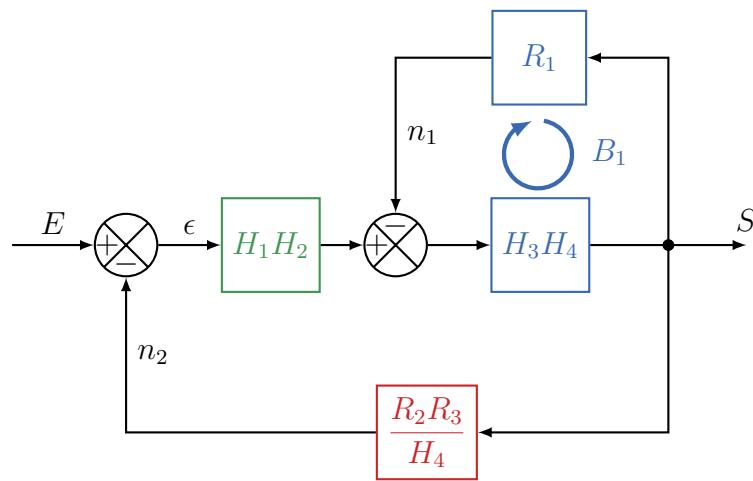
Étape 1

Regroupons d'abord les blocs en cascades :

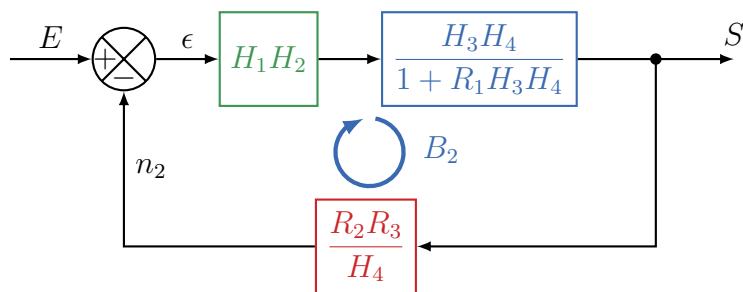


Étape 2

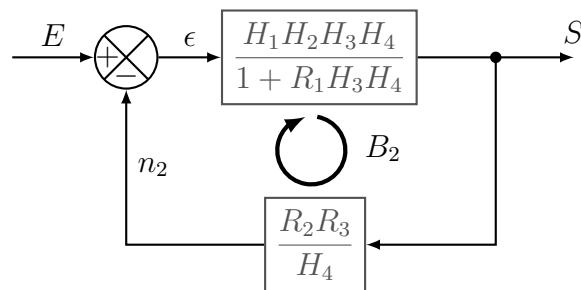
Déplaçons le point de prélèvement de la boucle de retour inférieur vers la droite :



L'étape précédente nous permet d'identifier une boucle de contre-réaction locale (B_1). Après réduction de cette boucle, le schéma-bloc dévient :



À nouveau il est possible d'identifier une boucle de contre-réaction B_2 :



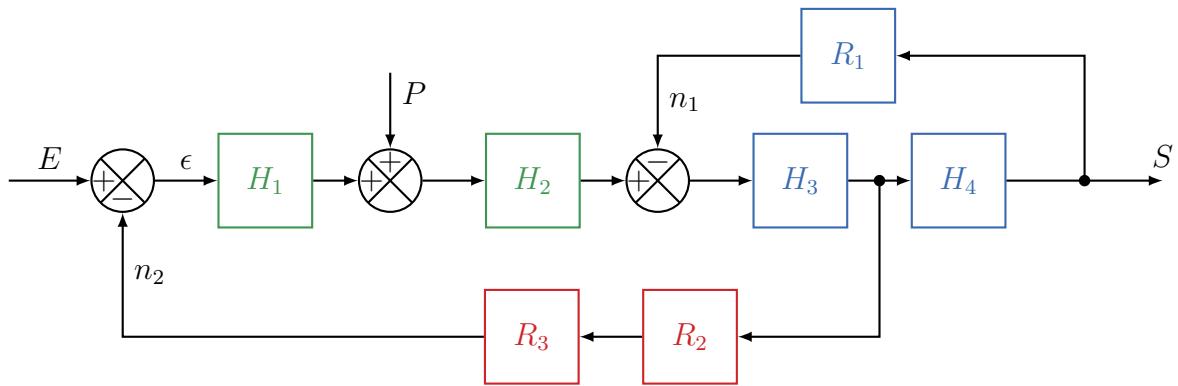
Étape 3

Enfin, il nous suffit de réduire la boucle de contre-réaction B_2 par la formule de Black :

$$\frac{E}{\frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3}} \rightarrow S$$

5.2 Exemple à entrées multiples

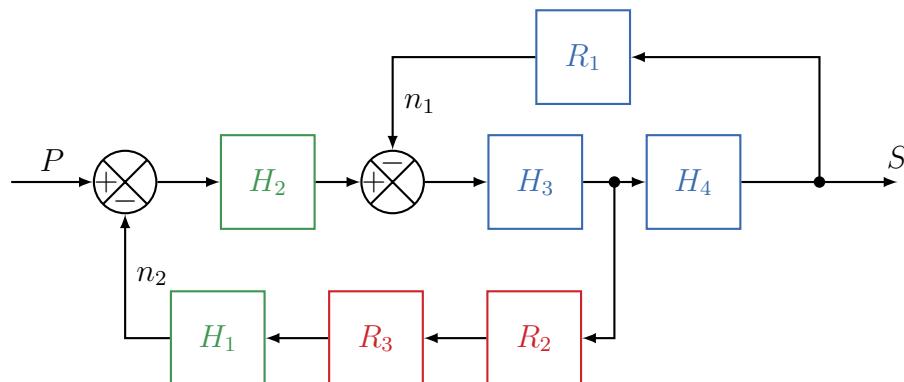
On considère le schéma fonctionnel suivant qui est exactement celui traité précédemment mais en ayant incorporer une nouvelle entrée P .



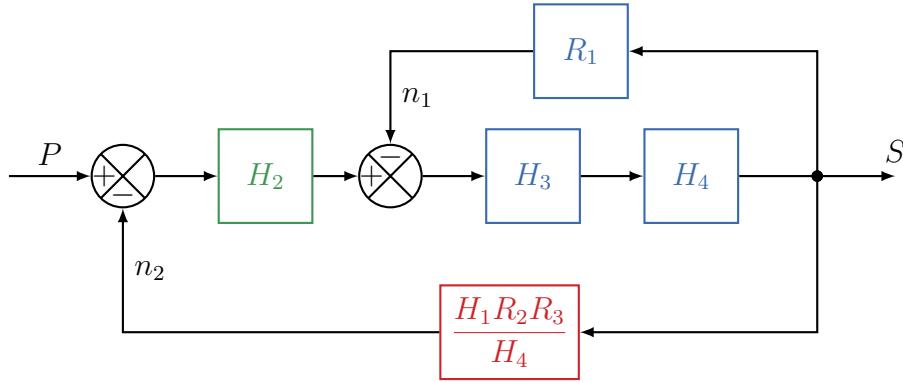
La première étape consiste à déterminer la fonction de transfert globale entre la sortie S et E pour $P \equiv 0$. Celle-ci correspond à la fonction de transfert déterminée précédemment, soit :

$$S_{P \equiv 0} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} E$$

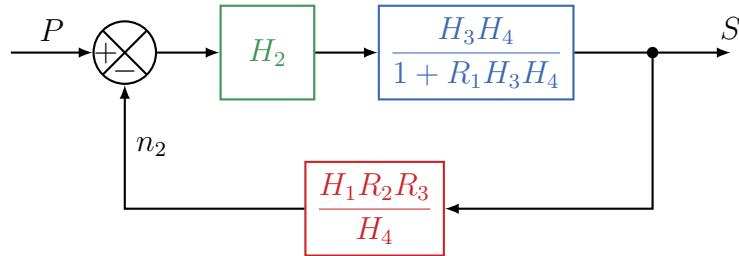
Le schéma fonctionnel réduit pour $E \equiv 0$ est maintenant :



Déplaçons le point de jonction situé entre les blocs H_3 et H_4 vers la droite et réduisons les blocs en série :



La réduction de la boucle de contre réaction interne nous donne :



La réduction de cette dernière boucle de contre réaction nous donne alors la fonction de transfert globale pour $E \equiv 0$. En utilisant le principe de superposition, on montre alors que la fonction de transfert globale pour les deux entrées est :

$$S = S_{P \equiv 0} + S_{E \equiv 0}$$

$$S = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} E + \frac{H_2 H_3 H_4}{1 + R_1 H_3 H_4 + R_2 R_3 H_1 H_2 H_3} P$$

6 Graphe de fluence

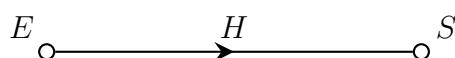
Nous discutons ici d'une approche sensiblement différente pour la représentation graphique des relations mathématiques intervenants dans les **SLCI**. Cette partie est largement inspirée de [20]. Elle peut être omise au cours d'une première lecture. L'algèbre de ces graphes de fluence est cependant très efficace et trouve de nombreuses applications en dehors de l'automatique.

6.1 Définitions

Branche et noeud

Dans l'application qui nous intéresse, un graphe de fluence peut être vu comme un schéma fonctionnel allégé. En effet, le graphe de fluence ne comporte que deux éléments de base : le **noeud** et la **branche orientée**. Les noeuds portent les variables du système (entrée, sortie, perturbation, commande...). Une branche reliant deux noeuds peut être ornée du facteur multiplicatif ou de la fonction de transfert.

L'équation (2.1) reliant une entrée et sortie par l'intermédiaire d'une fonction de transfert se représente par le graphe de fluence suivant :



$$S = HE$$

Source, puits et parcours

Nous allons considérer le graphe de fluence suivant, pour illustrer différentes définitions :

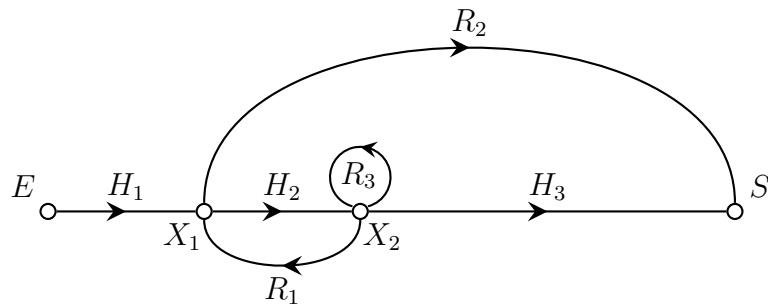


Figure 2.1 – Graphe de fluence présentant les différents éléments de bases, types de noeuds et de branches.

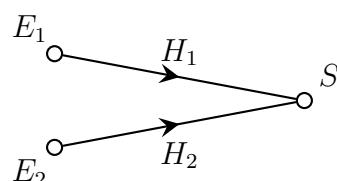
- Une **source** ou noeud d'entrée est un noeud dont toutes les branches sont divergentes. Exemple : le noeud E est une source.
- Un **puits** ou noeud de sortie est un noeud dont toutes les branches sont convergentes. Exemple : le noeud S est un puits.
- Un **parcours** est une succession continue, unidirectionnelle de branches. Exemples : $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$, $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$, $\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$, $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$
- Un **parcours ouvert** est un parcours le long duquel chaque noeud n'est franchi qu'une fois. Exemples : $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow S\}$, $\{E \rightarrow X_1 \rightarrow S\}$
- Un **parcours fermé ou boucle** est un parcours qui aboutit au noeud dont il est parti, chaque autre noeud n'étant franchi qu'une seule fois. Exemples : $\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1\}$, $\{X_2 \rightarrow X_2\}$ (cette dernière est appelée boucle élémentaire)

6.2 Algèbre des graphes de fluences

Nous présentons ici 7 opérations de bases liées à l'algèbre des graphes de fluence.

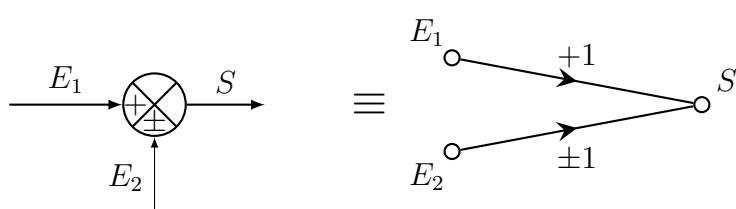
1. Addition en un noeud

La valeur d'un noeud est égale à la somme de tous les signaux convergeant vers ce noeud.



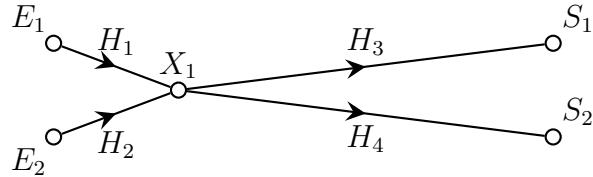
$$S = H_1 E_1 + H_2 E_2$$

Le comparateur/sommateur présenté précédemment est équivalent au graphe de fluence suivant :



2. Distribution par un noeud

La valeur d'un noeud est transmise par chaque branche quittant ce noeud.

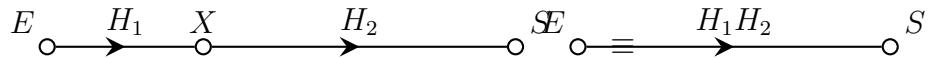


Ce graphe représente les équations suivantes :

$$\begin{aligned}X_1 &= H_1E_1 + H_2E_2 \\S_1 &= H_3X_1 = H_1H_3E_1 + H_2H_3E_2 \\S_2 &= H_4X_1 = H_1H_4E_1 + H_2H_4E_2\end{aligned}$$

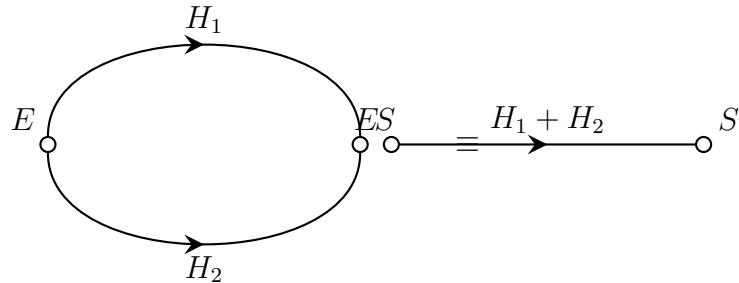
3. Branches en série

Un suite de branches en série peut être réduite à une unique branche, dont la fonction de transfert est égale au produit des fonctions de transfert des diverses branches.



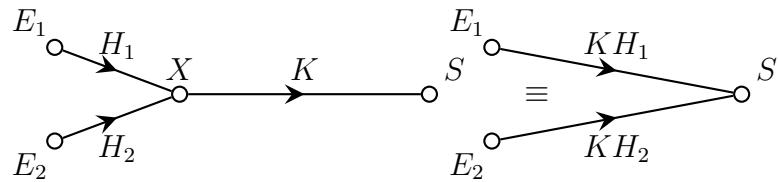
4. Branche en parallèle

Deux ou plusieurs branches connectées en parallèle, reliant le même noeud d'origine au même noeud extrémité, peuvent être réduites par une branche unique, dont la fonction de transfert est égale à la somme des fonctions de transfert des diverses branches.



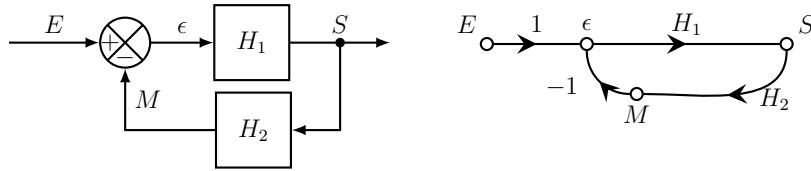
5. Absorption d'un noeud

Un noeud qui n'est ni une source ni un puits peut être supprimé de la manière suivante :

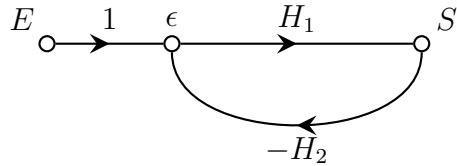


6. Boucles de contre-réaction

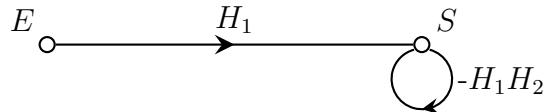
Considérons la boucle de contre-réaction définie par le schéma fonctionnel et le graphe de fluence équivalent :



La variable M du graphe de fluence peut être réduit, ce qui donne :



Il est possible d'éliminer le noeud porté par la variable ϵ :



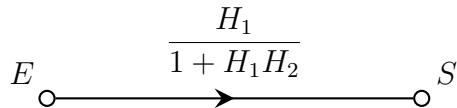
Ce dernier graphe exprime la relation suivante :

$$S = H_1 E - H_1 H_2 S$$

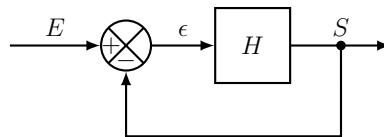
d'où l'expression déjà établie :

$$S = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} E,$$

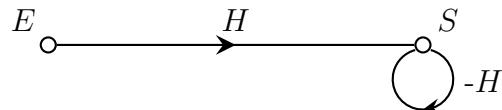
qui se représente simplement par le graphe de fluence :



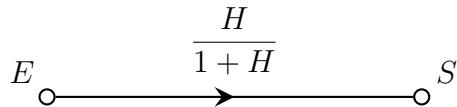
Comme nous l'avons déjà discuté, dans le cas d'une boucle de contre-réaction unitaire, la branche de retour est égale à 1



De la même manière que précédemment, le graphe de fluence se limite à deux noeuds et deux branches (dont une boucle élémentaire).



La fonction de transfert est simplement représentée par le graphe suivant³



³Remarquons que le graphe précédent exprime la relation $S = H(E - S)$ qui nous donne bien la fonction de transfert $\frac{H}{1+H}$. Cependant, cette expression exprime une grandeur que l'on cherche en

7. Le gain d'un parcours

Le gain d'un parcours est le produit des toutes les fonctions de transfert des branches parcourues.

6.3 Règle de Mason

Ces opérations de bases vont nous permettre d'introduire la règle de Mason⁴. Cette règle permet de réduire le graphe de fluence et déterminer la fonction de transfert entre l'entrée et la sortie d'un graphe de fluence.

La fonction de transfert globale H entre la source E et le puits S d'un graphe de fluence est égale à

$$H = \frac{S}{E} = \frac{1}{\Delta} \sum_k G_k \Delta_k \quad (2.10)$$

où

- k dénombre les parcours ouverts entre E et S ,
- G_k est le gain du k -ème parcours ouverts
- Δ est le **déterminant du graphe**, donné par :

$$\Delta = 1 - \sum_i B_i - \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k \dots \quad (2.11)$$

où les B_i sont les gains des boucles du graphe de fluence, d'abord pris séparément ($\sum_i B_i$) puis deux à deux ($\sum_{i,j} B_i B_j$), puis par trois ($\sum_{i,j,k} B_i B_j B_k$) et ainsi de suite. On ne prend en compte que les produits de boucles disjoints, c'est à dire n'ayant aucun noeud en commun.

- Δ_i est le déterminant du graphe obtenu en supprimant le parcours ouvert de gain G_i .

fonction d'elle même. En remplaçant, S par sa définition $H(E - S)$, on obtient

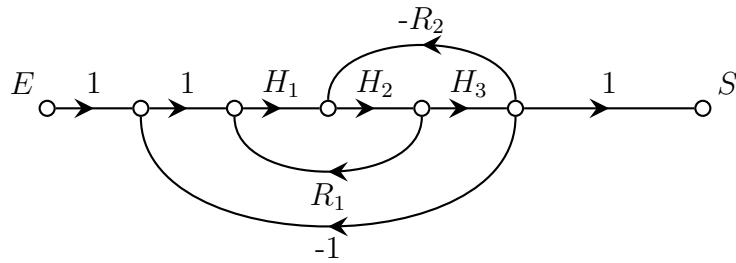
$$S = HE - H(H(E - S)) = HE - H^2E + H^2S = H(1 - H)E + H^2S.$$

En procédant de même avec cette nouvelle expression, on obtient une relation de récurrence.

$$S = EH \sum_k^n (-1)^k H^k + (-1)^{(n+1)} H^{n+1} S$$

Pour $n \rightarrow \infty$, on reconnaît la série géométrique $\sum_k^n (-1)^k H^k = \frac{1}{1+H}$ et $H^{n+1} \rightarrow 0$ pour $|H| < 1$. La sortie S tend donc bien vers la fonction de transfert attendue, seulement si $|H| < 1$. Cette dernière condition pourra être interprétée comme une limite de stabilité du gain de la fonction de transfert dans le cas d'un système dans une boucle de contre réaction (c.f [Chapitre 7](#)).

⁴Samuel Jefferson Mason (1921-1974), électronicien américain.

Exemple 1

Ce graphe de fluence possède trois boucles de gain :

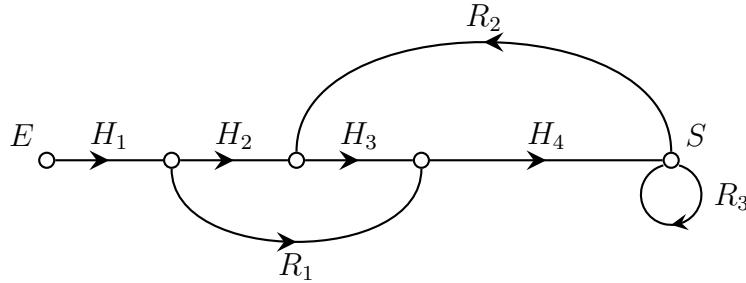
- $-H_1H_2H_3$
- $R_1H_1H_2$
- $-R_2H_2H_3$

et un parcours ouvert $H_1H_2H_3$ de déterminant $\Delta_k = 1$. Les boucles étant toutes disjointes, le déterminant du graphe est donc simplement donné par :

$$\Delta = 1 - R_1H_1H_2 + H_1H_2H_3 + R_2H_2H_3$$

La fonction de transfert de ce graphe de fluence est donc :

$$H = \frac{H_1H_2H_3}{1 - R_1H_1H_2 + H_1H_2H_3 + R_2H_2H_3}$$

Exemple 2

Ce graphe de fluence présente 2 boucles non disjointes de gain R_3 et $R_2H_3H_4$ et 2 parcours ouverts de gain $H_1H_2H_3H_4$ et $R_1H_1H_4$. Le déterminant du graphe est donc donné par

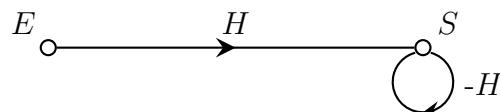
$$\Delta = 1 - R_3 - R_2H_3H_4$$

La fonction de transfert associé à ce graphe de fluence est donc :

$$H = \frac{H_1H_2H_3H_4 + R_1H_1H_4}{1 - R_3 - R_2H_3H_4}$$

Remarque

La règle de Mason s'applique également dans les cas les plus simples et permet par exemple de retrouver la relation de Black d'une boucle de contre-réaction.



Le cas ci-dessous d'une boucle de contre-réaction unitaire ne présente qu'une seule boucle $B_1 = -H$, le déterminant du graphe est donc donné par $\Delta = 1 + H$. Le parcours ouvert $G_1 = H$ de déterminant $\Delta_1 = 1$ nous donne donc la transmittance globale :

$$\frac{S}{E} = \frac{G_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{H}{1 + H}$$

7 Schéma-bloc dans le domaine temporel

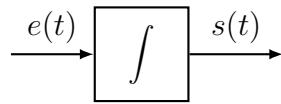
Dans cette partie, nous allons introduire une dernière façon de représenter les équations différentielles linéaires à l'aide de schémas-fonctionnel. À la différence des représentations déjà rencontrées, celle-ci se fera dans le domaine temporel. Pour celà, nous suivrons et adapterons à nos notations l'approche présentée par D. M. Freeman du MIT [10].

7.1 Opérateur intégral

L'opérateur intégral \mathcal{I} appliqué à un signal continu $e(t)$ permet de générer un signal $s(t)$ correspondant à l'intégral en tous points de $s(t)$, ou encore

$$s(t) = \mathcal{I}e(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau)d\tau.$$

Nous représenterons cette relation par le schéma-bloc suivant :

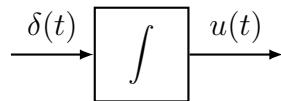


Pour une question de commodité, nous écrirons également la relation entre ces deux signaux dans le domaine temporel par :

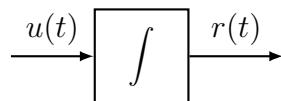
$$S = \mathcal{I}E$$

Cependant, S et E restent des grandeurs temporelles, elles ne doivent pas être confondues avec les grandeurs dans le domaine de Laplace.

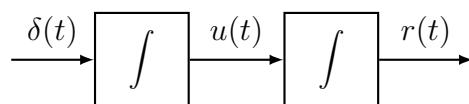
Nous avons déjà rencontré cette relation entre deux signaux usuels. En effet, nous avons défini que l'échelon unitaire était l'intégral de l'impulsion de Dirac [équation \(1.2\)](#). Cette relation peut être représentée par le schéma-bloc suivant :



De même, le signal rampe est l'intégrale du signal échelon [équation \(1.3\)](#).



L'application successive de cet opérateur sur l'impulsion de Dirac donne donc un signal rampe.



Sous forme d'opérateur, on écrira

$$\mathcal{I}^2\delta(t) = tu(t)$$

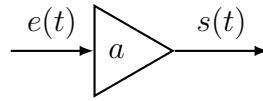
où le signal rampe $r(t)$ prend sa forme usuelle $tu(t)$.

On généralise à un nombre n d'application de l'opérateur intégral à une impulsion de Dirac :

$$\mathcal{I}^n \delta(t) = \frac{t^n}{n!} u(t)$$

7.2 Produit d'un signal temporel par un scalaire

Nous représentons le produit d'un signal $e(t)$ par un simple scalaire a (c.-à-d. un gain) par un triangle de la façon suivante :



Ainsi, ce schéma-bloc représente la relation :

$$s(t) = ae(t).$$

ou encore

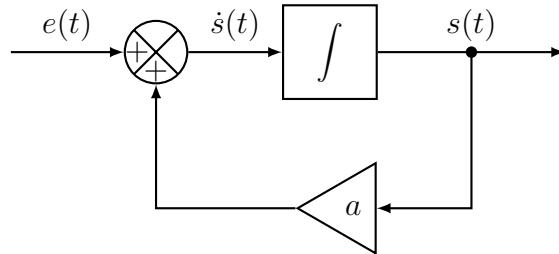
$$S = aE$$

7.3 Représentation d'une équation différentielle

Avec les deux blocs précédents, il est maintenant possible de représenter toutes les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Par exemple l'équation différentielle suivante :

$$\dot{s}(t) = e(t) + as(t)$$

pourra se représenter par le schéma suivant :



Sous forme d'opérateur, ce schéma-bloc se réduit

$$S = \mathcal{I}(E + aS)$$

Le rapport de la sortie sur l'entrée est alors donnée par

$$\frac{S}{E} = \frac{\mathcal{I}}{1 - a\mathcal{I}}$$

Il est possible de développer $\frac{1}{1 - a\mathcal{I}}$ sous forme de série entière :

$$\frac{1}{1 - a\mathcal{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\mathcal{I})^n = (1 + a\mathcal{I} + a^2\mathcal{I}^2 + a^3\mathcal{I}^3 + \dots)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'application de l'opérateur \mathcal{I}^n revient à appliquer \mathcal{I} n fois. Ainsi l'expression $\frac{S}{E}$ devient :

$$\begin{aligned}\frac{S}{E} &= \mathcal{I} \left(1 + a\mathcal{I} + a^2\mathcal{I}^2 + a^3\mathcal{I}^3 + \dots \right) \\ \frac{S}{E} &= \mathcal{I} + a\mathcal{I}^2 + a^2\mathcal{I}^3 + a^3\mathcal{I}^4 + \dots\end{aligned}$$

Pour une entrée $e(t) = \delta(t)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}s(t) &= (\mathcal{I} + a\mathcal{I}^2 + a^2\mathcal{I}^3 + a^3\mathcal{I}^4 + \dots) \delta(t) \\ s(t) &= (1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{6} + \dots) u(t)\end{aligned}$$

où l'on retrouve le développement en série entière de la fonction exponentielle. La réponse temporelle $s(t)$ ⁵ est donc donnée par

$$s(t) = e^{at}u(t).$$

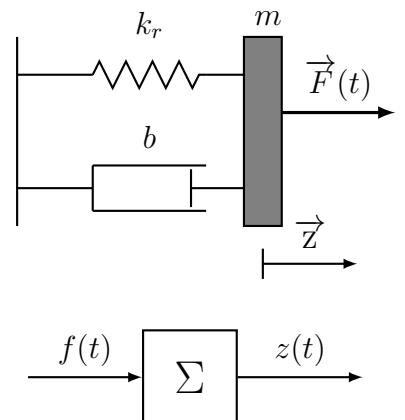
Chaque terme du développement peut être vu comme les différents cycles pris par le signal dans la boucle de contre-réaction (feedback) (c.f. figure 2.2). Notons au passage que a joue ici le rôle du pôle de la fonction de transfert.

7.4 Application au système masse-ressort

On reprend ici, la mise en équation du système mécanique masse-ressort présentée au chapitre précédent (c.f. section 3.2 et figure ci-contre). L'équation différentielle reliant la position de la masse $z(t)$ et la force appliquée $f(t)$ est donnée par

$$m \frac{d^2z(t)}{dt^2} + b \frac{dz(t)}{dt} + kz(t) = f(t)$$

où m est la masse, b le coefficient d'amortissement visqueux et k la constante de raideur du ressort.

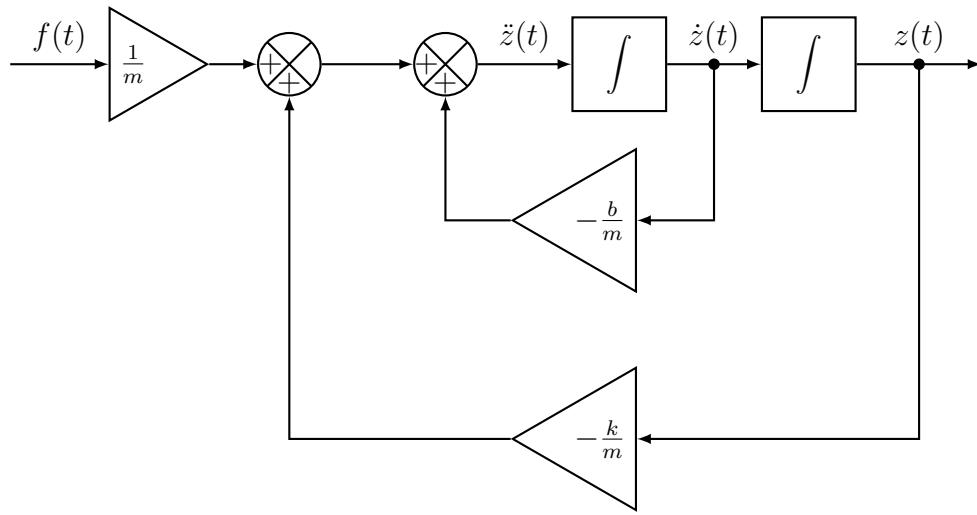


⁵Cette équation différentielle devient dans le domaine de Laplace

$$S(p) = \frac{1}{p - a} E(p)$$

La transformée de Laplace inverse de la réponse impulsionnelle ($E(p) = 1$) est effectivement $s(t) = e^{at}u(t)$.

Cette équation différentielle peut être représenté par le schéma-bloc suivant dans le domaine temporel.



Nous laissons au lecteur la vérification de l'équivalence entre l'équation différentielle précédente et ce schéma fonctionnel. Cette représentation peut être plus facile à utiliser par des outils graphiques permettant de reproduire des schémas fonctionnels directement dans le domaine temporelle comme Xcos ou MATLAB/Simulink.

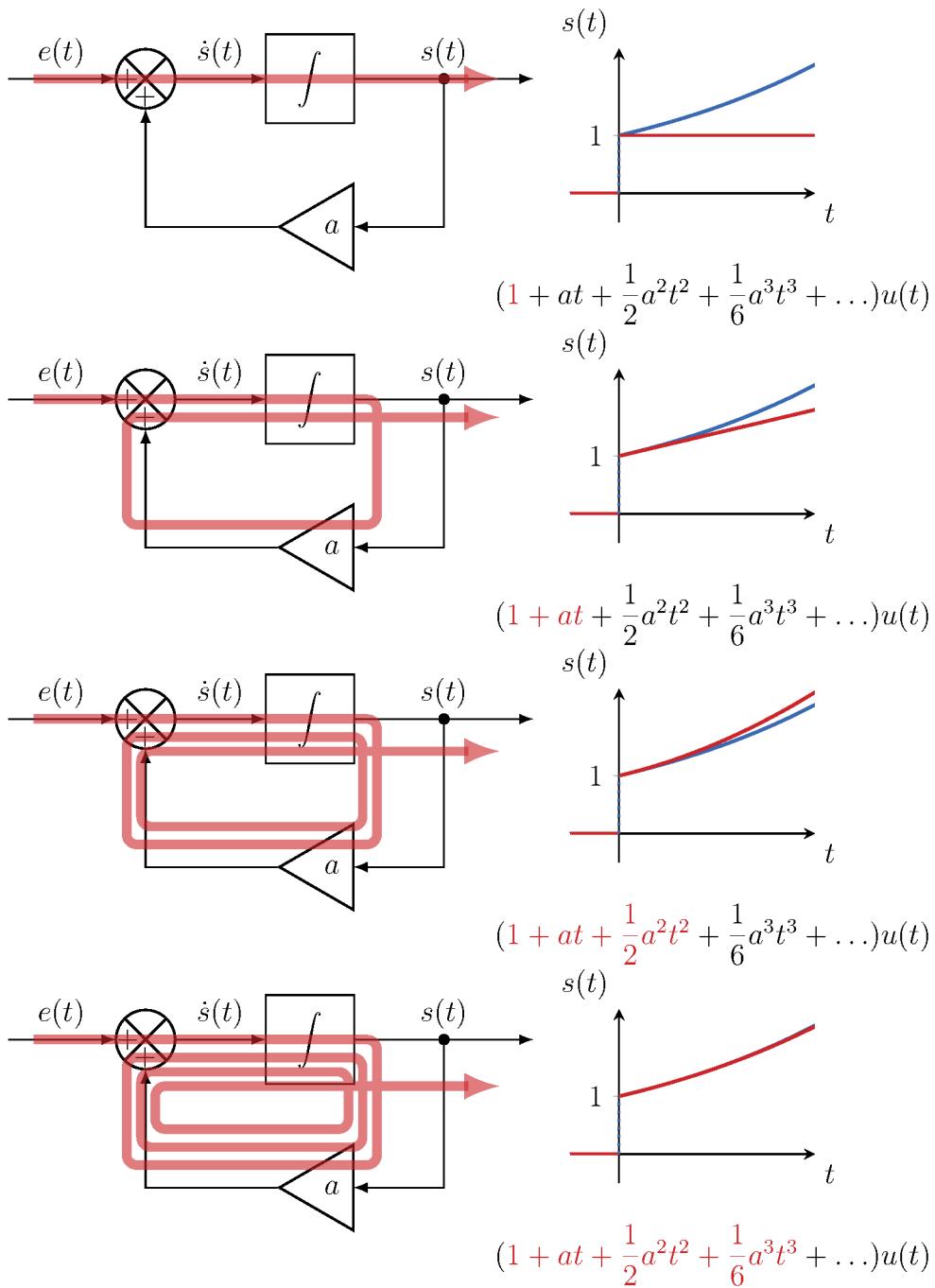
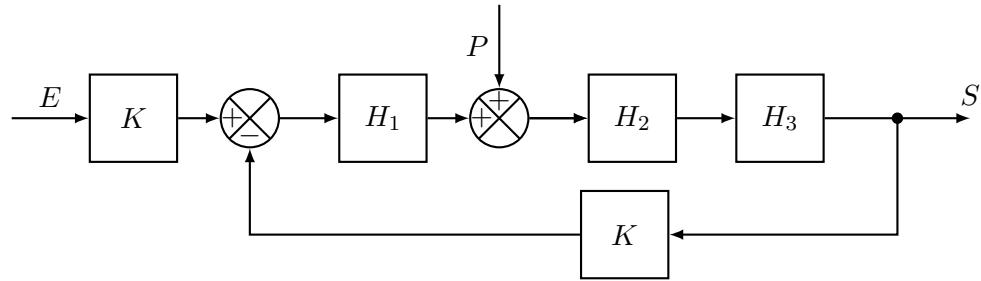


Figure 2.2 – Représentation des quatre premiers termes du développement de la réponse temporelle .

8 Exercices du chapitre

Exercice 1 : Réduction de schéma-bloc ★★☆

On cherche à déterminer la relation entre la sortie S et les deux entrées E et P du schéma-bloc suivants :



Pour cela nous allons appliquer la propriété de linéarité des SLCI. C'est à dire que nous allons déterminer les fonctions de transfert en prenant en compte respectivement chaque entrée en considérant l'autre nulle. La sortie globale du système sera alors la somme des sorties indépendantes.

Q1. Tracer le schéma-bloc dans le cas où l'entrée P est nulle. On notera $S_E(p)$ la sortie de ce schéma-bloc.

Q2. Déterminer la fonction de transfert $H_E(p)$ du schéma-bloc précédent.

Q3. Tracer le schéma-bloc dans le cas où l'entrée E est nulle. On notera $S_P(p)$ la sortie de ce schéma-bloc.

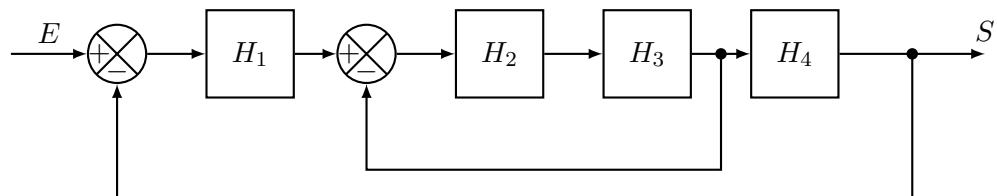
Q4. Déterminer la fonction de transfert $H_P(p)$ du schéma-bloc précédent.

Q5. Déterminer la sortie globale $S(p) = S_E(p) + S_P(p)$ en fonction des entrées E , P et des blocs du système.

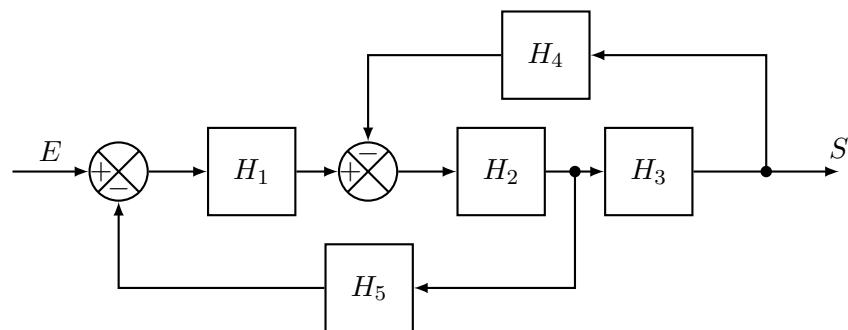
Exercice 2 : Réduction de schémas fonctionnels ★★

Q1. Donner la fonction de transfert globale des schémas-blocs suivants :

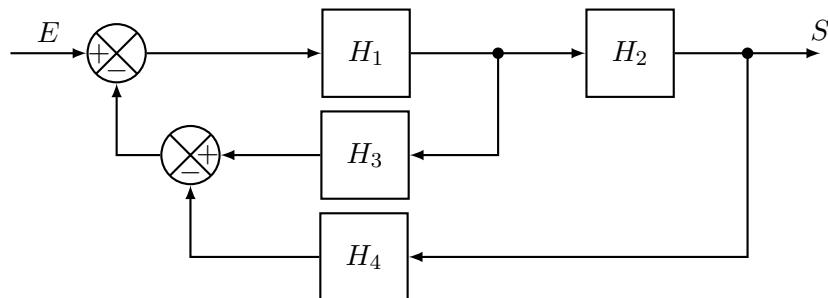
(a)



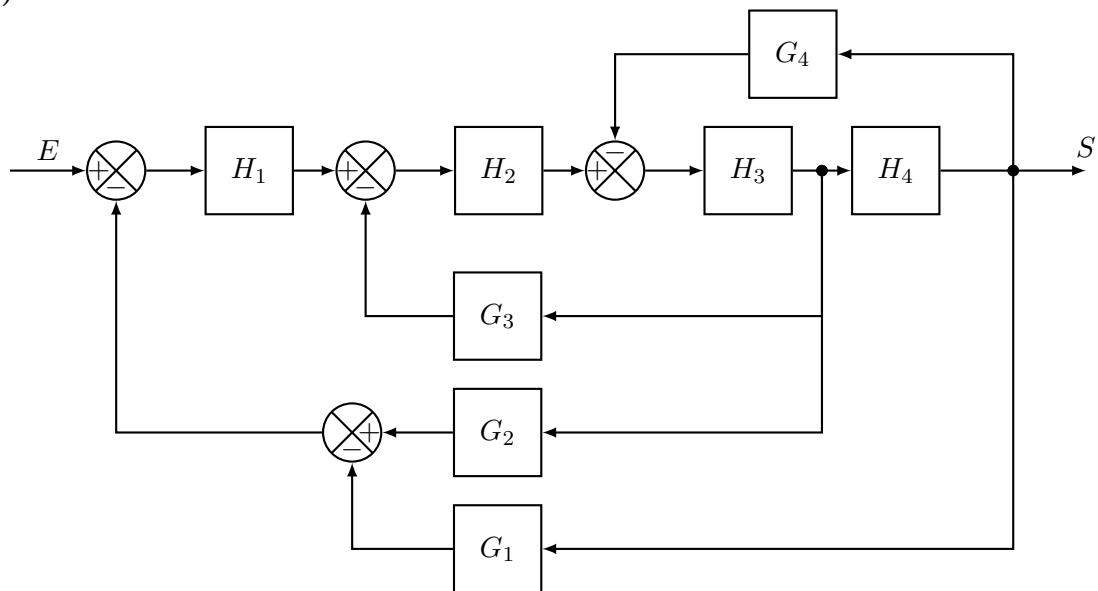
(b)



(c)

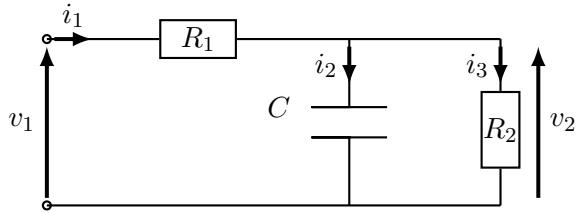


(d)



Exercice 3 : Graphe de fluence ★★

Soit le circuit électrique suivant :



La tension $v_1(t)$ est imposée en entrée et on mesure la tension de sortie $v_2(t)$ aux bornes de la résistance R_2 . En appliquant les lois de Kirchoff, on obtient les relations suivantes entre les tensions et les courants :

$$\begin{aligned} v_{R_1}(t) + v_2(t) - v_1(t) &= 0 \\ i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

où $v_{R_1}(t)$ est la tension aux bornes de la résistance R_1 .

Aux bornes des dipôles, nous avons également :

$$\begin{aligned} v_{R_1}(t) &= R_1 i_1(t) \\ v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau = v_2(t) \\ v_2(t) &= R_2 i_3(t) \end{aligned}$$

En remplaçant celles-ci dans les relations de Kirchoff, on obtient les équations régissant ce modèle électrique :

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{1}{R_1} (v_1(t) - v_2(t)) \\ i_2(t) &= i_1(t) - \frac{1}{R_2} v_2(t) \\ v_2(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Q1. Donner les relations du modèle dans le domaine de Laplace

Q2. Tracer le graphe de fluence de ce modèle.

Q3. À partir de ce graphe et appliquant la règle de Mason, déterminer la fonction de transfert global de ce système.

Exercice 4 : Schéma-blocs dans le domaine temporel ★★☆

Q1. Tracer le schéma-bloc dans le domaine temporel de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{s}(t) = a(e(t) + s(t))$$

Q2. Réduire le schéma-bloc sous une forme faisant apparaître l'opérateur intégral

Q3. Donner le rapport de l'entrée sur la sortie

Exercice 5 : Schéma-blocs dans le domaine temporel ★★☆

Q1. Tracer le schéma-bloc dans le domaine temporel de l'équation différentielle suivante

$$\dot{s}(t) = \dot{e}(t) + as(t)$$

Q2. Réduire le schéma-bloc sous une forme faisant apparaître l'opérateur intégral

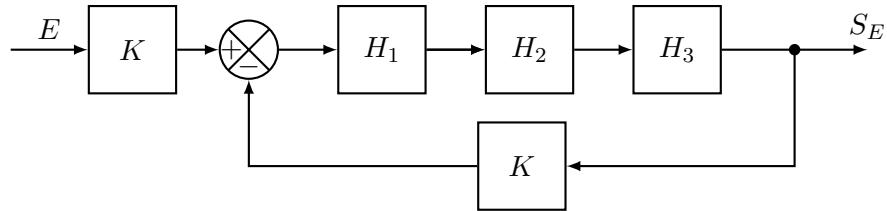
Q3. Donner le rapport de l'entrée sur la sortie

9 Corrigé des exercices

Exercice 1 : Réduction de schéma-bloc ★★☆

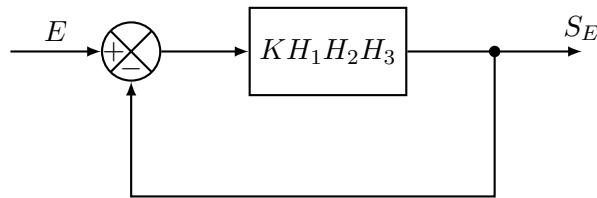
Q1. Tracer le schéma-bloc dans le cas où l'entrée P est nulle. On notera $S_E(p)$ la sortie de ce schéma-bloc.

Le schéma-bloc dans le cas pour lequel l'entrée P est nulle est donné ci-dessous



Q2. Déterminer la fonction de transfert $H_E(p)$ du schéma-bloc précédent.

Pour déterminer la fonction de transfert $H_E(p)$, il nous faut réduire le schéma-bloc précédent.

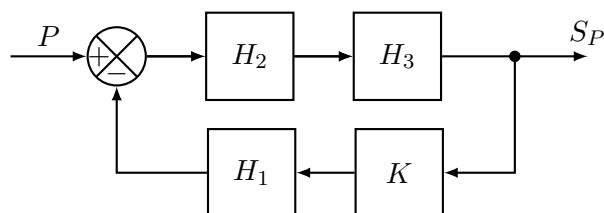


On se retrouve avec un boucle de contre réaction unitaire dont la fonction de transfert est donnée par

$$H_E(p) = \frac{KH_1H_2H_3}{1 + KH_1H_2H_3}$$

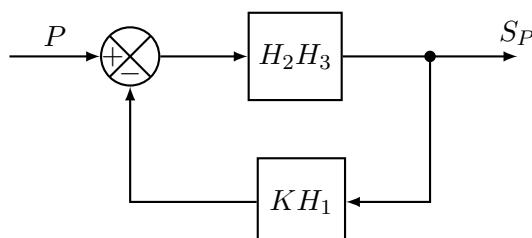
Q3. Tracer le schéma-bloc dans le cas où l'entrée E est nulle. On notera $S_P(p)$ la sortie de ce schéma-bloc.

Le schéma-bloc dans le cas pour lequel l'entrée E est nulle est donné ci-dessous



Q4. Déterminer la fonction de transfert $H_P(p)$ du schéma-bloc précédent.

Pour déterminer la fonction de transfert $H_E(p)$, il nous faut réduire le schéma-bloc précédent.



On se retrouve avec un boucle de contre réaction dont la fonction de transfert est donnée par

$$H_P(p) = \frac{H_2 H_3}{1 + K H_1 H_2 H_3}$$

Q5. Déterminer la sortie globale $S(p) = S_E(p) + S_P(p)$ en fonction des entrées E , P et des blocs du système.

La sortie globale $S(p)$ est alors donnée par la combinaison des deux réponses :

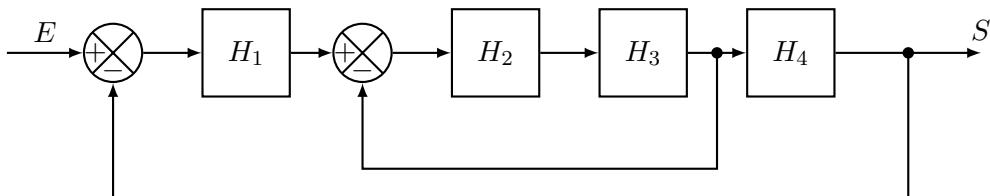
$$S(p) = S_E(p) + S_P(p) = H_E(p)E(p) + H_P(p)P(p)$$

ou encore

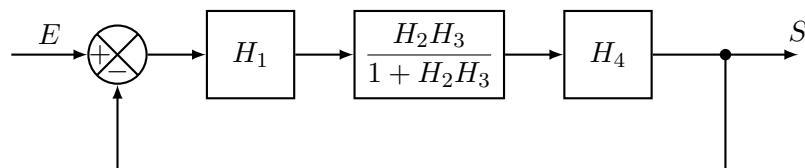
$$S(p) = \frac{K H_1 H_2 H_3}{1 + K H_1 H_2 H_3} E(p) + \frac{H_2 H_3}{1 + K H_1 H_2 H_3} P(p)$$

Exercice 2 : Réduction de schémas fonctionnels ★★

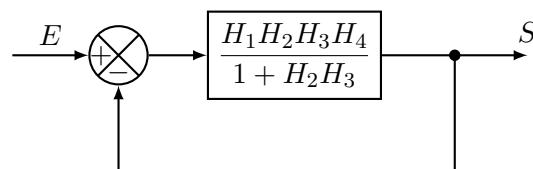
Q1. Donner la fonction de transfert globale des schémas-blocs suivants : (a)



Réduisons d'abord la boucle de contre réaction interne :



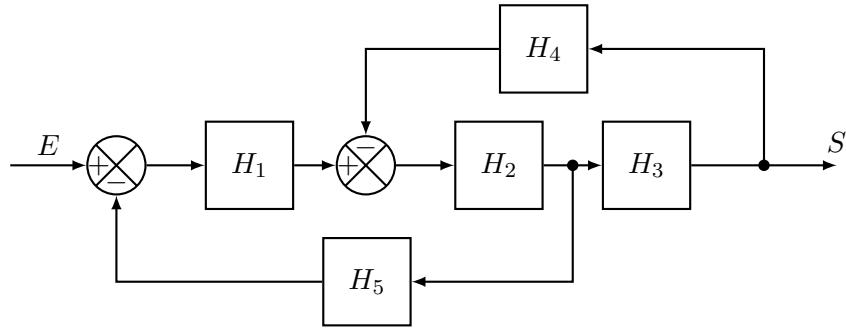
Réduisons maintenant les blocs en série :



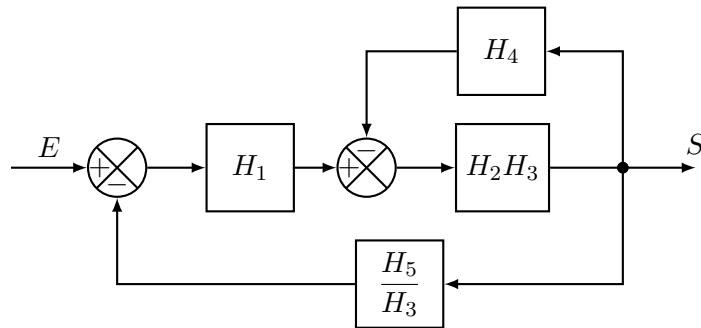
On obtient après réduction de cette dernière boucle de contre réaction.

$$\frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + H_2 H_3 + H_1 H_2 H_3 H_4} \rightarrow S$$

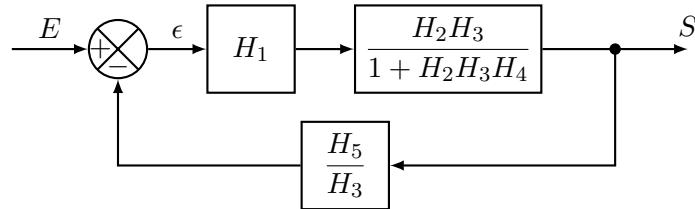
(b)



Déplaçons le point de prélèvement de la boucle de retour inférieur vers la droite :



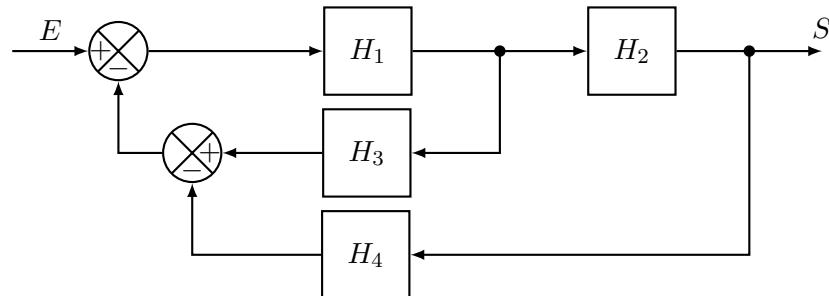
L'étape précédente nous permet d'identifier une boucle de contre-réaction locale. Après réduction de cette boucle, le schéma-blocs dévient :



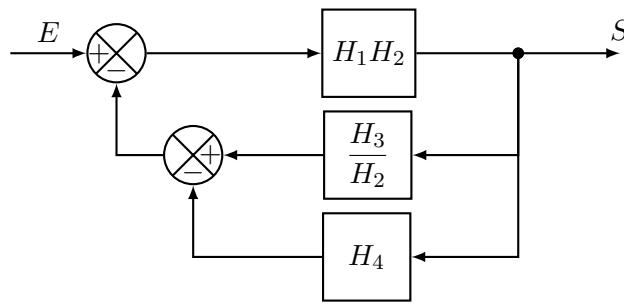
La réduction de cette dernière boucle de contre-réaction permet d'identifier la fonction de transfert globale :

$$\frac{H_1 H_2 H_3}{1 + H_2 H_3 H_4 + H_1 H_2 H_5} \rightarrow S$$

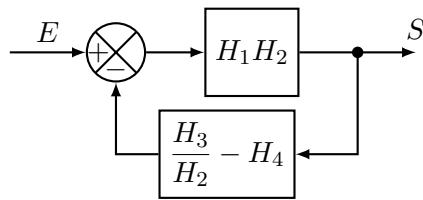
(c)



Déplaçons le point de prélèvement entre les H_1 et H_2 vers la droite :



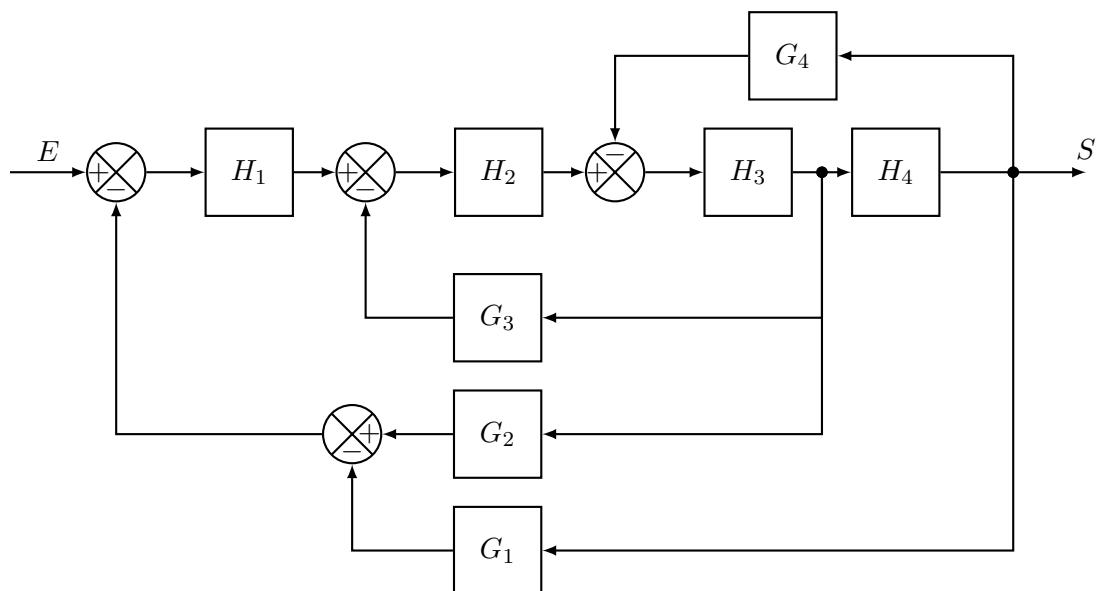
On reconnaît deux branches en parallèle :



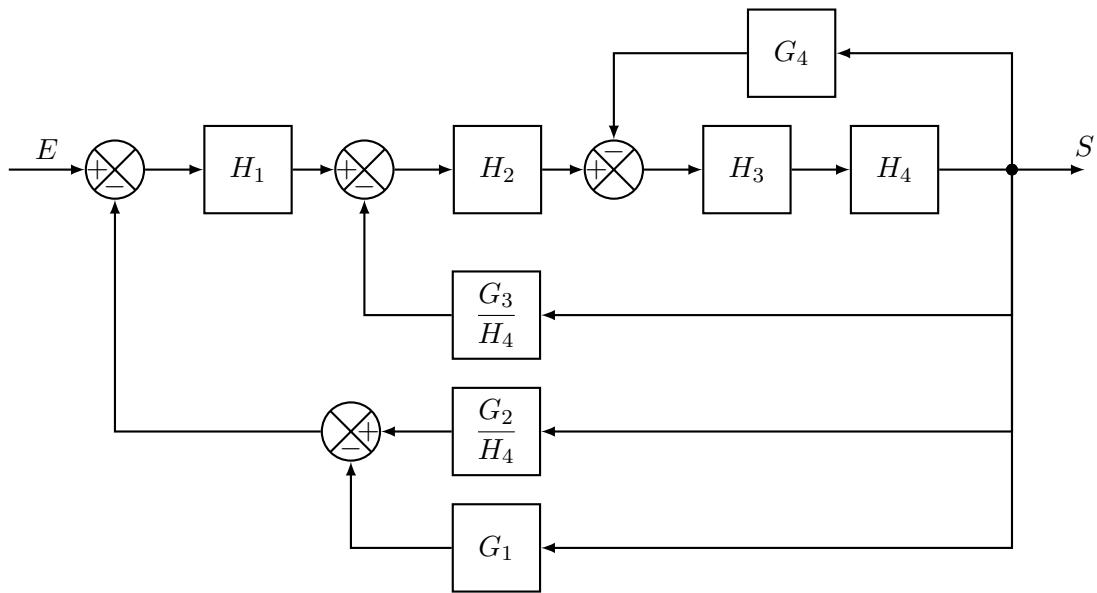
La fonction de transfert globale est donc donné par la réduction de cette dernière boucle de contre réaction.

$$\frac{H_1H_2}{1 + H_1H_3H_4 - H_1H_2H_4} \rightarrow S$$

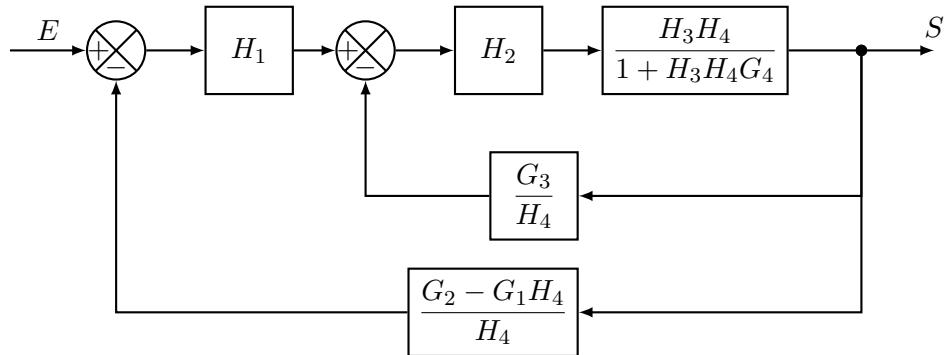
(d)



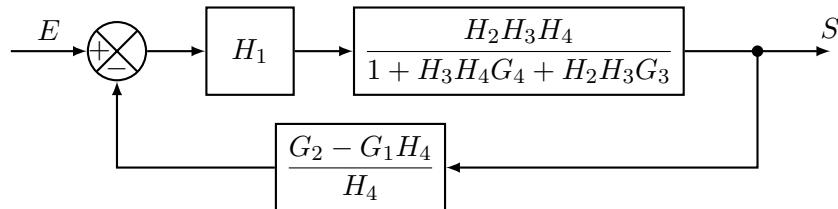
Déplaçons vers la droite le point de prélèvement situé entre les blocs H_3 et H_4 :



Réduisons la boucle de contre-réaction et les blocs en parallèle.



Réduisons la nouvelle boucle de contre-réaction interne :



Cette dernière boucle peut être réduite pour obtenir la fonction de transfert globale :

$$\frac{E}{\boxed{\frac{H_1H_2H_3H_4}{1 + H_3H_4G_4 + H_2H_3G_3 + H_1H_2H_3G_2 - H_1H_2H_3G_1}}} \rightarrow S$$

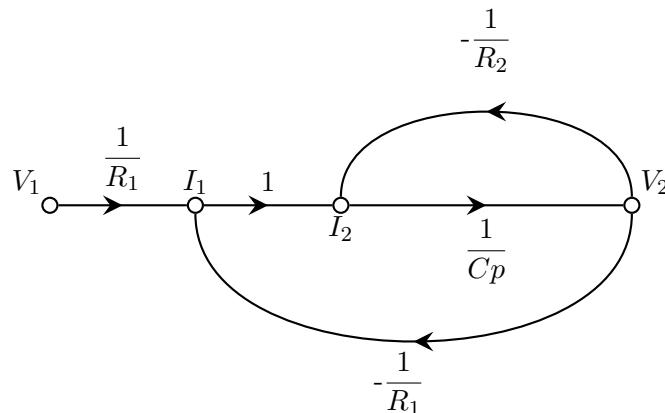
Exercice 3 : Graphe de fluence ★★**Q1.** Donner les relations du modèle dans le domaine de Laplace

Dans le domaine de Laplace, ces dernières deviennent :

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \frac{1}{R_1}(V_1(p) - V_2(p)) \\ I_2(p) &= I_1(p) - \frac{1}{R_2}V_2(p) \end{aligned}$$

Notons que la tension $V_2(p)$ est donnée par :

$$V_2(p) = \frac{1}{Cp}I_2(p)$$

Q2. Tracer le graphe de fluence de ce modèle.**Q3.** À partir de ce graphe et appliquant la règle de Mason, déterminer la fonction de transfert global de ce système.

Le graphe de fluence présente deux boucles disjointes :

- $\{I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow V_2 \rightarrow I_1\}$ de gain $B_1 = -\frac{1}{R_1 C p}$
- $\{I_2 \rightarrow V_2\}$ de gain $B_2 = -\frac{1}{R_2 C p}$

Le déterminant du graphe est donc donné par :

$$\Delta = 1 - B_1 - B_2 = \frac{R_1 R_2 C^2 p^2 + R_2 C p + R_1 C p}{R_1 R_2 C^2 p^2}$$

Le graphe ne présente qu'un parcours ouvert :

$$\{V_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow V_2\}$$

de gain $G_1 = \frac{1}{R_1 C p}$ et de déterminant $\Delta_1 = 1$

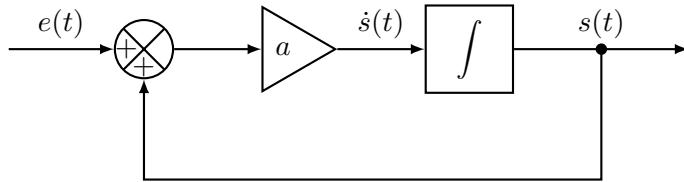
D'après la règle de Mason, la transmitance est alors donnée par :

$$H(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{R_2}{R_1 R_2 C p + R_1 + R_2}$$

Exercice 4 : Schéma-blocs dans le domaine temporel ★★☆

Q1. Tracer le schéma-bloc dans le domaine temporel de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{s}(t) = a(e(t) + s(t))$$



Q2. Réduire le schéma-bloc sous une forme faisant apparaître l'opérateur intégral

Sous forme d'opérateur, on réduira ce schéma-bloc par la relation suivante :

$$S = a\mathcal{I}(E + S)$$

Q3. Donner le rapport de l'entrée sur la sortie

Le rapport de la sortie sur l'entrée est donnée par

$$\frac{S}{E} = \frac{a\mathcal{I}}{1 - a\mathcal{I}}.$$

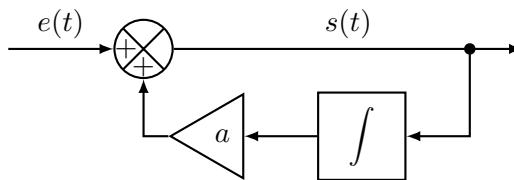
Exercice 5 : Schéma-blocs dans le domaine temporel (2) ★★☆

Q1. Tracer le schéma-bloc dans le domaine temporel de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{s}(t) = \dot{e}(t) + as(t)$$

Il est plus d'intégrer l'équation différentielle avant de la représenter graphiquement. Ainsi, elle devient :

$$s(t) = e(t) + a \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$$



Q2. Réduire le schéma-bloc sous une forme faisant apparaître l'opérateur intégral

Sous forme d'opérateur, on réduira ce schéma-bloc par la relation suivante :

$$S = E + a\mathcal{I}S$$

Q3. Donner le rapport de l'entrée sur la sortie

Le rapport de la sortie sur l'entrée est donnée par :

$$\frac{S}{E} = \frac{1}{1 - a\mathcal{I}}$$

3 Modélisation des SLCI et leurs réponses temporelles

Sommaire

1	Introduction	92
2	Système du premier ordre	92
2.1	Définition d'un système du premier ordre	92
2.2	Fonction de transfert d'un système du premier ordre	93
2.3	Pôle de la fonction de transfert du premier ordre	93
2.4	Réponses temporelles d'un système du premier ordre	93
3	Système du second ordre	97
3.1	Définition d'un système du second ordre	97
3.2	Fonction de transfert d'un système du second ordre	97
3.3	Pôles de la fonction de transfert du second ordre	97
3.4	Réponses temporelles d'un système du second ordre	98
3.5	Cas particulier de l'oscillateur harmonique	111
4	Autres modèles particuliers	112
4.1	Gain pur	112
4.2	Intégrateur pur	112
4.3	Dérivateur pur	113
4.4	Retard pur	113
5	Généralisation des modèles de SLCI	114
5.1	Systèmes d'ordre supérieur à 2	114
5.2	Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3	115
6	Identification d'un modèle de comportement	115
6.1	Formule de Bureau	115
6.2	Modèle de Strejc	116
6.3	Modèle de Broïda	116
7	Exercices du chapitre	117
8	Corrigé des exercices	120

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier la réponse temporelle de différents **SLCI** modèles usuels de l'automatique. Ces modèles sont

- les systèmes du **premier ordre**,
- les systèmes du **second ordre**,
- les systèmes **gain, intégrateur, déivateur et retard** purs.

Ces modèles reflètent les différentes équations différentielles et systèmes physiques généralement rencontrés dans la nature. Les deux plus importants sont les systèmes du premier et second ordre qui seront pour cette raison examiner en détail. Les autres systèmes (c.-à-d. gain, intégrateur, déivateur et retard) sont des systèmes modèles théoriques qui ne présentent en générale qu'en présence des systèmes du premier ou du second ordre. Nous voulons ici simplement établir l'effet de ces modèles théoriques sur la réponse temporelles. Nous généraliserons aux systèmes d'ordre supérieur en montrant que toute fonction de transferts peut se factoriser en un produit de ces systèmes modèles.

Nous suivrons la même présentation pour tous les modèles : nous donnerons d'abord l'équation différentielle régissant le système, puis sa fonction de transfert ainsi que ses pôles, avant de déterminer analytiquement les différentes réponses temporelles : **impulsionnelle, indicelle et la réponse à une rampe**. Le principal objectif de cette étude est d'établir les caractéristiques de ces modèles à partir de leurs réponses temporelles.

Finalement, nous résumerons nos observations en présentant la méthodologie d'identification des comportements des modèles usuels à partir de la mesure de leurs réponses temporelles.

2 Système du premier ordre

2.1 Définition d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre est un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre (c.-à-d. $n = 1$ pour l'[équation \(1.1\)](#)), de la forme générale :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (3.1)$$

où **K est le gain statique** et $\tau > 0$ la **constante de temps du système**. La condition sur le signe de τ sera discutée au moment de l'établissement des réponses temporelles. L'analyse dimensionnelle de cette équation différentielle, nous permet de confirmer que τ à la dimension d'un temps, mais surtout que la dimension du gain statique est donnée par le rapport des dimensions de la sortie sur l'entrée. Autrement dit, c'est un paramètre sans dimension si l'entrée et la sortie sont de même nature.

2.2 Fonction de transfert d'un système du premier ordre

La transformée de Laplace de l'équation (3.1), dans les conditions de Heaviside, nous donne :

$$\tau p S(p) + S(p) = K E(p)$$

La fonction de transfert $H(p)$ d'un système du premier ordre est donc de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\tau p + 1} \quad (3.2)$$

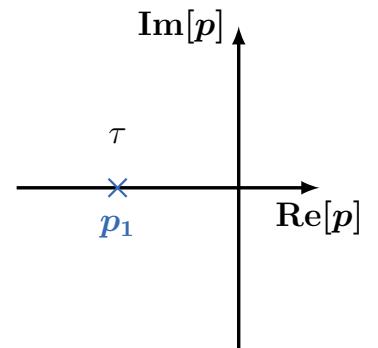
2.3 Pôle de la fonction de transfert du premier ordre

Un système du premier ordre ne possède qu'un seul pôle qui est trivialement déterminé par la résolution de l'équation :

$$\tau p + 1 = 0$$

ce pôle $p_1 = -\frac{1}{\tau}$ est donc réel négatif pour $\tau > 0$. La fonction de transfert d'un système du premier peut alors s'écrire sous la forme factorisée suivante

$$H(p) = \frac{K}{(p - p_1)} = \frac{K}{\tau \left(p + \frac{1}{\tau}\right)}.$$



Carte des pôles et zéros d'un système du premier ordre

2.4 Réponses temporelles d'un système du premier ordre

Nous allons maintenant établir les réponses temporelles d'un système du premier ordre aux signaux usuels présentés au chapitre 1.

2.4.1 Réponse impulsionnelle

Nous considérons une excitation impulsionnelle de la forme :

$$e(t) = E_0 \delta(t),$$

où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac et E_0 est une constante.

La réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre est, dans le domaine de Laplace, de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{(\tau p + 1)}.$$

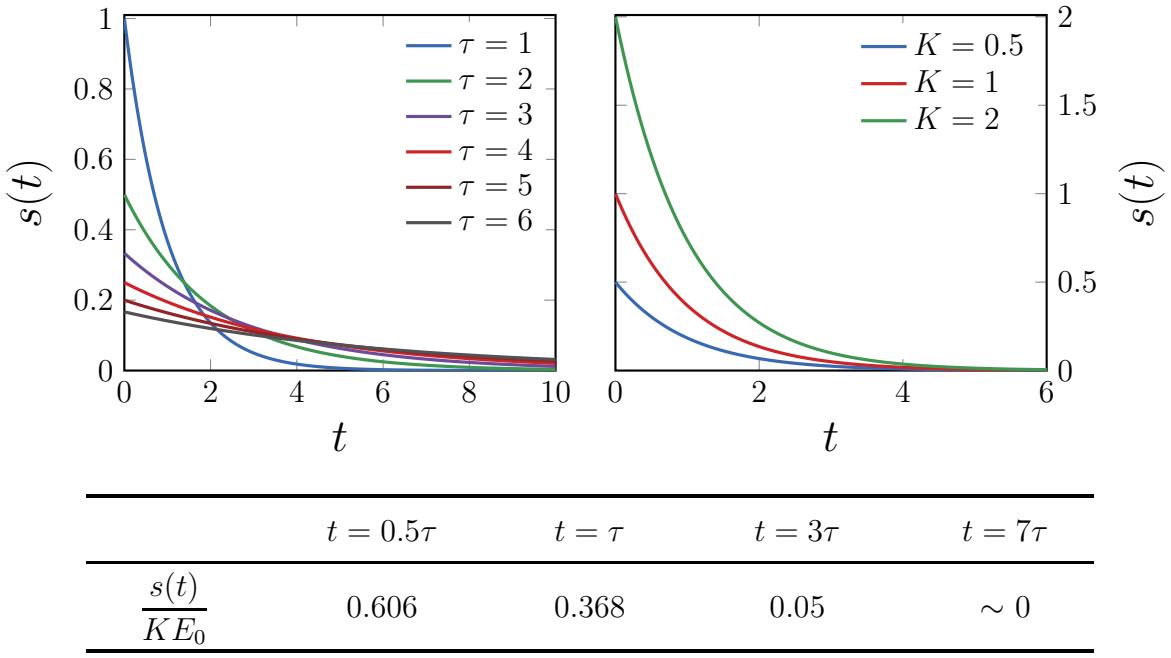


Figure 3.1 – Réponse impulsionale d'un système du premier ordre avec : $E_0 = 1$ et (gauche) différentes valeurs de la constante de temps τ pour $K = 1$; (droite) différentes valeurs du gain K pour $\tau = 1$ (Équation (3.3)). (Tableau) Quelques valeurs particulières de la réponse impulsionale d'un système du premier ordre

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 7 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsionale d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = \frac{KE_0}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (3.3)$$

Cette réponse correspond à une simple exponentielle décroissante pour $\tau > 0$. La [figure 3.1](#) présente la réponse impulsionale d'un système du premier ordre pour différentes valeurs de la constante de temps τ . On observe que pour $t \rightarrow \infty$, la valeur de $s(t)$ tend vers 0, ce qui est caractéristique d'un système stable. Nous pouvons donc considérer que τ est strictement positif pour une question de stabilité.

Il est également possible d'observer que la pente à l'origine dépend de la constante de temps. La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle $s(t)$

$$s'(0) = -\frac{KE_0}{\tau^2}$$

La pente à l'origine est négative et inversement proportionnelle au carré de la constante de temps du système τ .

Le ?? donne quelques valeurs particulières de la réponse impulsionale. D'après celui-ci, on constate que le temps $t_{5\%}$ de réponse à 5% est de l'ordre de 3τ (c.-à-d. – log 5%). Le transitoire est lui de l'ordre de 7τ (c'est à dire le temps à partir duquel on considère que le signal est nul).

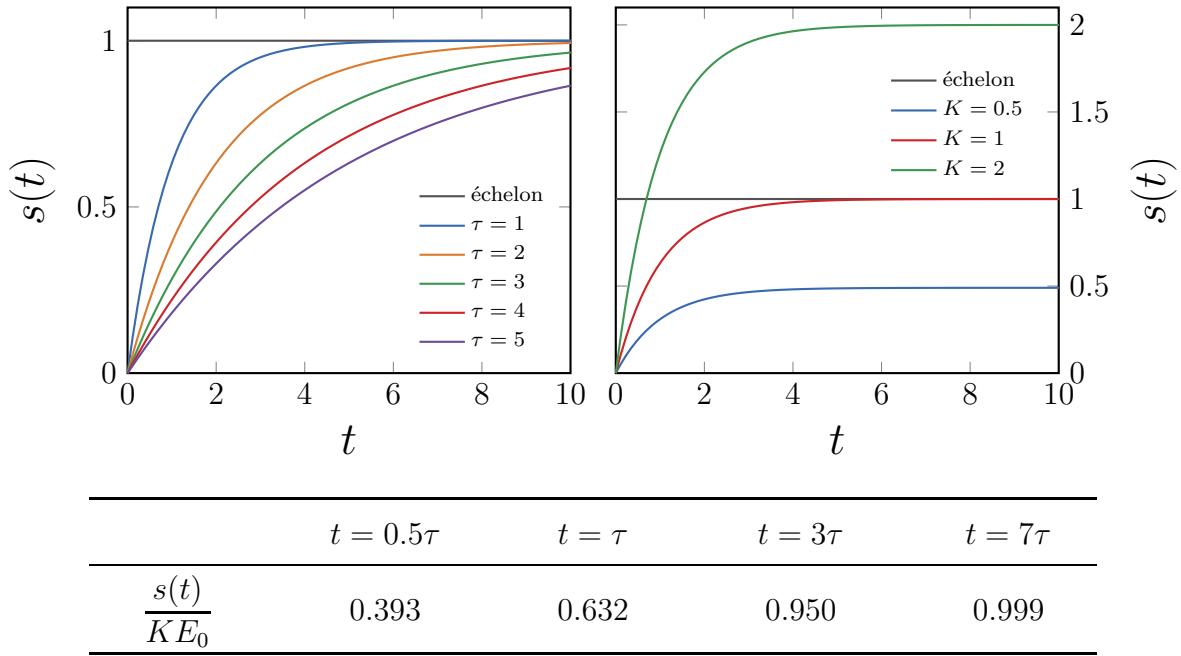


Figure 3.2 – Réponse indicielle d'un système du premier ordre avec : $E_0 = 1$ et (gauche) pour différentes valeurs de τ et avec $K = 1$; (droite) pour différentes valeurs du gain K et avec $\tau = 1$. (Tableau) Quelques valeurs particulières de la réponse indicielle d'un système du premier ordre

2.4.2 Réponse indicielle

Pour déterminer la réponse indicielle, nous considérons une entrée $e(t)$ en échelon telle que :

$$e(t) = E_0 \cdot u(t),$$

où $u(t)$ est l'échelon unitaire et E_0 est une constante.

Dans le domaine de Laplace la sortie est donc de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{p(1 + \tau p)} = \frac{KE_0}{\tau p(p + \frac{1}{\tau})}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 11 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (3.4)$$

La [figure 3.2](#) présente cette réponse indicielle pour différentes valeurs de la constante de temps τ . Pour $t \rightarrow \infty$, la valeur de $s(t)$ tend vers KE_0 . La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle $s(t)$

$$s'(0) = \frac{KE_0}{\tau}$$

La pente à l'origine est positive et inversemement proportionnelle à la constante de temps du système.

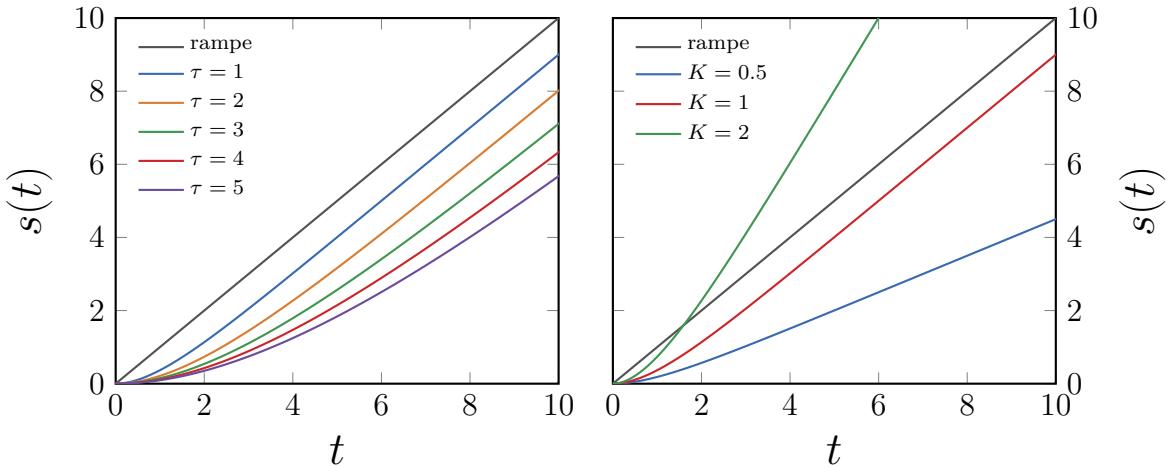


Figure 3.3 – Réponse à une rampe d'un système du premier ordre avec $E_0 = 1$. (gauche) Pour différentes valeurs de τ et $K = 1$ (droite) Pour différentes valeurs du gain K et $\tau = 1$.

Le ?? donne quelques valeurs particulières de la réponse indicielle. D'après celui-ci, on constate que le temps de réponse à 5% $t_{5\%}$ (temps au bout duquel la réponse indicielle atteint 95% du signal final) est donné par :

$$t_{5\%} = -\tau \log 0.05 \sim 3\tau.$$

Le temps de montée t_m (temps au bout duquel la réponse de 10% à 90% du signal final) est donné par :

$$t_m = -\tau \log \frac{0.1}{0.9} \sim 2.2\tau$$

2.4.3 Réponse à une rampe

Nous considérons maintenant une excitation rampe de la forme :

$$e(t) = E_0 \cdot r(t) = E_0 t \cdot u(t)$$

où E_0 est une constante, $r(t)$ est la fonction rampe unitaire et $u(t)$ la fonction échelon. La réponse à une rampe d'un système du premier ordre est, dans le domaine de Laplace, de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{p^2(1 + \tau p)}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 12 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous donne la forme générale de la réponse à une rampe d'un système du premier ordre :

$$\mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = s(t) = KE_0 \left(t - \tau(1 - e^{-t/\tau}) \right) \quad (3.5)$$

La pente à l'origine peut être obtenue directement en dérivant la réponse temporelle $s(t)$. On constate alors que $s'(0) = 0$ quelque soit τ . À la limite $t \rightarrow \infty$ la réponse à une rampe tend vers $t - \tau$.

3 Système du second ordre

3.1 Définition d'un système du second ordre

Un système du second ordre est un système régi par une équation différentielle du second ordre de forme générale :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

où $\xi > 0$ est le coefficient d'amortissement, K le gain statique et $\omega_0 > 0$ la pulsation propre du système. Cette pulsation est celle de l'oscillateur harmonique équivalent sans amortissement ($\xi = 0$).

3.2 Fonction de transfert d'un système du second ordre

La transformée de Laplace de l'équation différentielle est, lorsque les CI sont toutes nulles :

$$S(p) (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2) = K\omega_0^2 E(p).$$

La fonction de transfert $H(p)$ de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (3.6)$$

La forme suivante, pour laquelle on a factorisée par ω_0^2 , est également très courante :

$$H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1}$$

3.3 Pôles de la fonction de transfert du second ordre

Les pôles de la fonction de transfert sont donnés par les racines du polynôme :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$$

Les racines de ce polynôme dépendent donc du signe de Δ et ainsi de la valeur du taux d'amortissement ξ définissant les différents régimes d'un système du second ordre :

- Régime apériodique pour $\xi > 1$
- Régime apériodique critique pour $\xi = 1$
- Régime pseudo-périodique pour $0 < \xi < 1$

à noter que le cas $\xi = 0$ correspond à un régime périodique associé à l'oscillateur harmonique au cas de l'oscillateur harmonique. Le cas $\xi < 0$ correspond à un cas divergent par définition (instable) et ne sera donc pas traité. Le tableau 3.1 résume les différents types de pôles rencontrées dans les différents régimes du système du second

ordre. Quelque soit le régime du système du second ordre, on peut écrire la fonction de transfert de la façon suivante en utilisant les pôles appropriés :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Nous remarquerons également que le produit $p_1 p_2 = \omega_0^2$ quelque soit le régime du système, cette relation nous sera très utile pour l'établissement des réponses temporelles des différents régimes.

3.4 Réponses temporelles d'un système du second ordre

Nous allons ici, comme dans le cas des systèmes du premier ordre données les formes analytiques des réponses temporelles (impulsionnelle, indicelle et rampe) des systèmes du second ordre. On trouvera les représentations graphiques de ces réponses temporelles à l'[Annexe G](#).

Régime	Pôles	Carte des pôles
Régime apériodique $\xi > 1$	Deux pôles réels $p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$	
Régime apériodique critique $\xi = 1$	Un pôle double réel $p_1 = p_2 = -\omega_0$	
Régime pseudo-périodique $0 < \xi < 1$	Deux pôles complexes conjugués $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ avec $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$	

Tableau 3.1 – Pôles de la fonction de transfert d'un système du second ordre selon le régime associé à l'amortissement.

3.4.1 Réponse impulsionale

La réponse impulsionale d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

où $E(p) = 1$ dans le cas d'une impulsion de Dirac unitaire¹.

Étudions la forme analytique des réponses impulsionales pour les différents régimes du système du second ordre. Nous rappelons que l'étude de la réponse impulsionale revient à étudier la fonction de transfert du système. À l'aide du théorème de la valeur finale, il est dès lors et déjà possible de déterminer la valeur finale de la réponse impulsionale quelque soit le régime.

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = 0$$

Un système du second ordre est intrinsèquement stable au vu de la définition de la stabilité.

Dans le cas $\xi > 1$ (régime apériodique)

La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

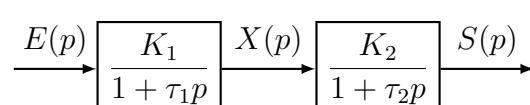
La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 16 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsuelle d'un système du second ordre en régime apériodique :

$$s(t) = \frac{K\omega_0^2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (3.7)$$

les exponentielles étant sans unité, les pôles sont d'unité d'inverse d'un temps, posons donc $p_1 = -1/\tau_1$ et $p_2 = -1/\tau_2$, la réponse devient :

$$s(t) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (3.8)$$

les paramètres τ_1 et τ_2 peuvent être considérés comme les constantes de temps de deux systèmes du premier ordre fictifs placés en série :



où $K_1 K_2 = K$. Dans le régime apériodique un système du second ordre sera toujours considéré comme la mise en cascade de deux systèmes du premier ordre.

¹Nous avons ici posé $E_0 = 1$ pour alléger la notation.

Dans le cas $\xi = 1$ (régime apériodique critique)

La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 8 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime apériodique critique :

$$s(t) = K\omega_0^2 t e^{p_1 t} \quad (3.9)$$

posons $p_1 = -1/\tau$, la réponse devient :

$$s(t) = K\omega_0^2 t e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.10)$$

Dans le cas $0 < \xi < 1$ (régime pseudo-périodique)

La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{\omega_0^2}{(p + \xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})(p + \xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2})}$$

en posant $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$, la sortie $S(p)$ devient :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha - j\omega_d)(p + \alpha + j\omega_d)} = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} = \frac{K\omega_d}{1 - \xi^2} \cdot \frac{\omega_d}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 30 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous donne la forme générale de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique :

$$s(t) = \frac{K\omega_d}{1 - \xi^2} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_d t \quad (3.11)$$

3.4.2 Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

où $E(p) = \frac{E_0}{p}$ est une entrée échelon.

Étudions la forme analytique des réponses indicielles pour les différents régimes du système du second ordre. À l'aide du théorème de la valeur finale, il est dès lors et déjà possible de déterminer la valeur finale de la réponse indicielle quelque soit le régime.

$$s(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = KE_0$$

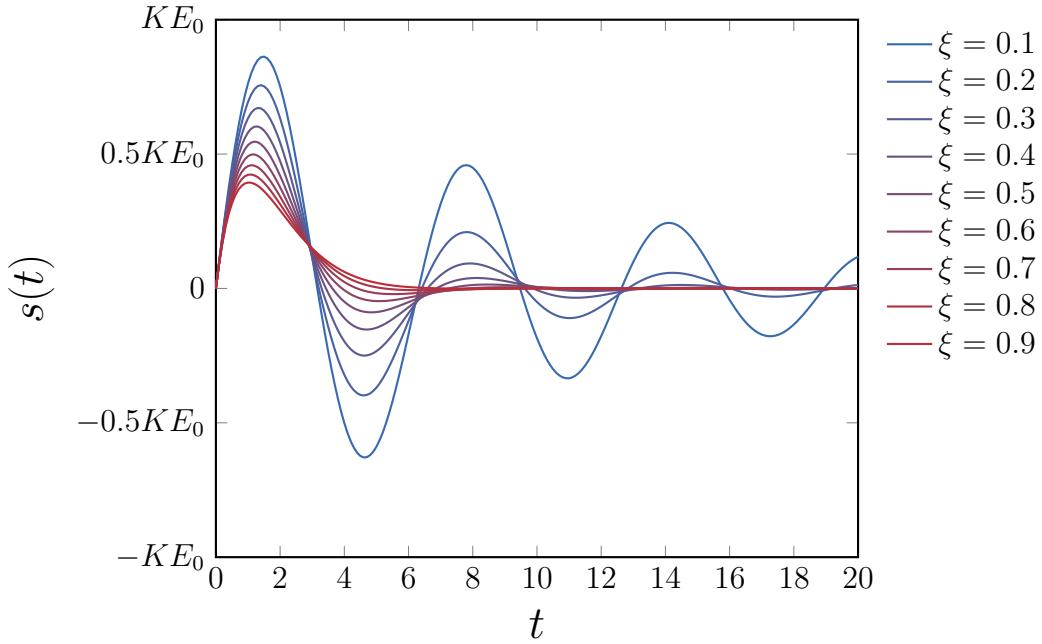


Figure 3.4 – Réponse impulsionale d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique pour différentes valeurs du taux d'amortissement ξ (Équation (3.11)) avec $\omega_0 = 1$.

Dans le cas $\xi > 1$ (régime apériodique)

La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 19 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique :

$$s(t) = KE_0 \left(1 + \frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right) \quad (3.12)$$

posons $p_1 = -1/\tau_1$ et $p_2 = -1/\tau_2$, la réponse devient :

$$s(t) = KE_0 \left(1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \right) \quad (3.13)$$

Nous pouvons à nouveau envisager cette réponse comme la réponse de deux systèmes du premier ordre en série.

Dans le cas $\xi = 1$ (régime apériodique critique)

La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f ligne 14 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous donne la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime apériodique critique :

$$s(t) = \frac{KE_0\omega_0^2}{p_1^2} \left(1 - (1 - p_1 t)e^{p_1 t} \right)$$

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{p_1 t} + p_1 t e^{p_1 t} \right) \quad (3.14)$$

en posant $p_1 = -\frac{1}{\tau}$, on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (3.15)$$

Dans le cas $0 < \xi < 1$ (régime pseudo-périodique)

La sortie $S(p)$ dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

où l'on a posé $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$.

Décomposons $S(p)$ en éléments simples,

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B(p + \alpha) + C}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

procédons par évaluation pour A :

$$A = pS(p) \Big|_{p=0} = \frac{KE_0\omega_0^2}{\alpha^2 + \omega_d^2} = KE_0$$

et identification pour B et C :

$$\begin{aligned} & KE_0((p + \alpha)^2 + \omega_d^2) + Bp^2 + \alpha Bp + Cp = KE_0\omega_0^2 \\ \iff & KE_0p^2 + 2KE_0\alpha p + KE_0(\alpha^2 + \omega_d^2) + Bp^2 + \alpha Bp + Cp = KE_0\omega_0^2 \\ \iff & \begin{cases} B + KE_0 = 0 \\ 2KE_0\alpha + \alpha B + C = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} B = -KE_0 \\ C = -KE_0\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= KE_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} - \frac{\alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right) \\ S(p) &= KE_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_d}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right) \end{aligned}$$

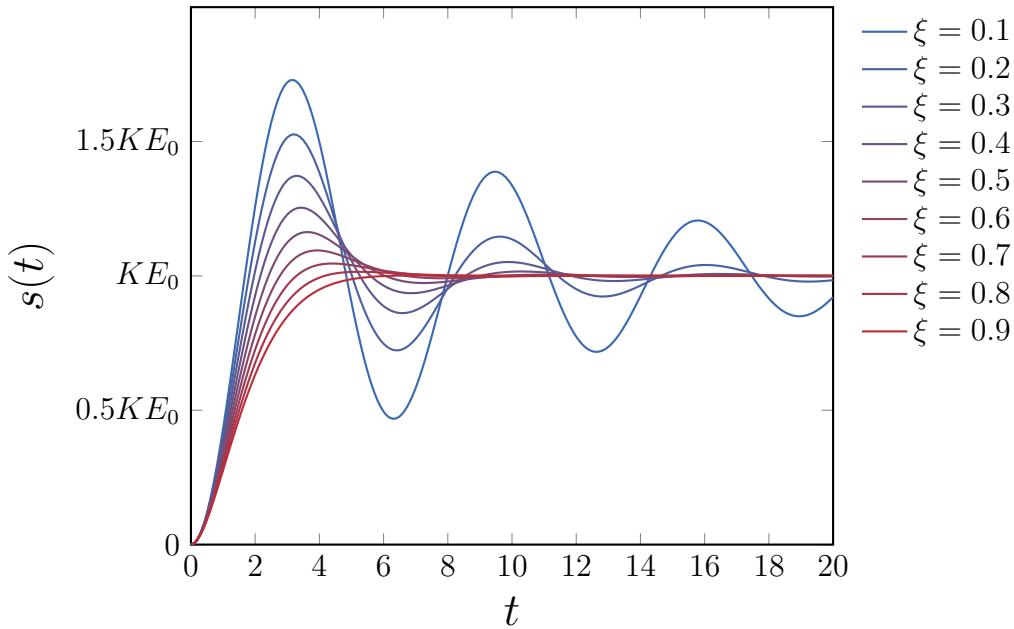


Figure 3.5 – Réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique pour différentes valeurs du taux d'amortissement ξ (Équation (3.5)) avec $\omega_0 = 1$.

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f lignes 3, 30 et 31 du tableau de l'Annexe C), nous permet de déterminer la réponse indicielle :

$$\begin{aligned} s(t) &= KE_0 \left(1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) \right) \\ s(t) &= KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha t} \left(\sqrt{1-\xi^2} \cos(\omega_d t) + \xi \sin(\omega_d t) \right) \right) \end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \xi \\ \sin \phi &= \sqrt{1-\xi^2} \end{aligned}$$

on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha t} (\sin \phi \cos(\omega_d t) + \cos \phi \sin(\omega_d t)) \right)$$

et enfin la forme générale de la réponse indicielle d'un système du second ordre en régime pseudo-périodique s'écrit :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \right) \quad (3.16)$$

Il est maintenant possible d'interpréter les différentes grandeurs introduites. En effet, cette réponse a la forme d'une sinusoïde de pulsation ω_d (dite pseudo-pulsation), de

phase ϕ et amortie par une exponentielle décroissante dépendant de ξ . La figure 3.5 présente cette réponse indicielle du régime pseudo-périodique pour différentes valeurs du taux d'amortissement pour une pulsation propre $\omega_0 = 1$. Nous constatons que comme attendu, l'amplitude des oscillations augmente lorsque le taux d'amortissement diminue.

Dépassement et temps de réponse à 5%

Certaines propriétés de la réponse indicielle dans le régime pseudo-périodique sont fortement dépendantes du taux d'amortissement. C'est le cas du dépassement et du temps de réponse. La figure 3.6 présente la réponse à un échelon unitaire pour un amortissement de $\xi = 0.2$, on observe que les dépassements successifs sont de moins en moins important. Pour déterminer la relation entre le dépassement et le taux d'amortissement, il nous faut d'abord déterminer le temps du premier maximum t_1 . Pour cela il suffit

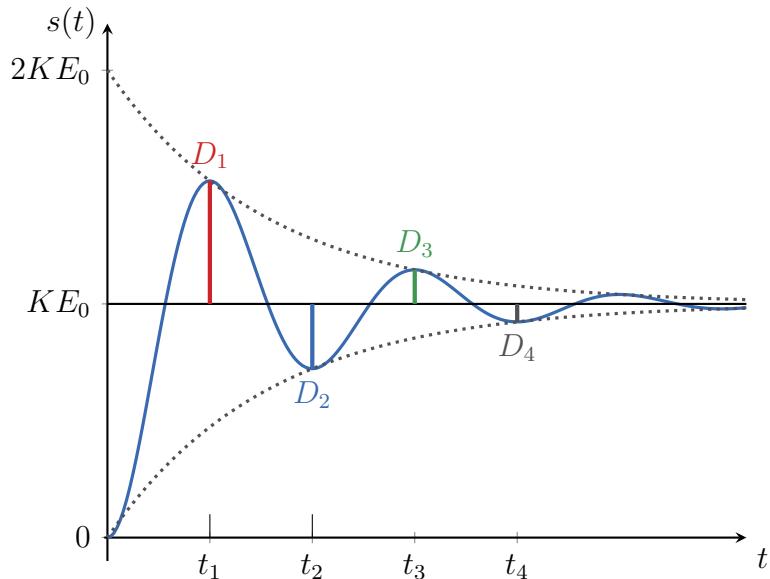


Figure 3.6 – Définition du dépassement observé dans le cas de la réponse indicielle en régime pseudo-périodique d'un système du second ordre. Les deux enveloppes correspondent aux exponentielles décroissantes $1 + e^{-\alpha t}$ et $1 - e^{-\alpha t}$.

de déterminer le temps pour lequel la dérivée du signal $s(t)$ s'annule. On calcul alors un temps t_1 à $T_d/2$ où T_d est la pseudo-période défini à partir de la pseudo-pulsation ω_d . On a alors :

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Formellement, le premier dépassement est défini par :

$$D_1 = \left| \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)} \right|$$

où $s(0)$, $s(\infty)$ et $s(t_1)$ sont respectivement la valeur initiale, la valeur finale et la valeur du premier maximum du signal.

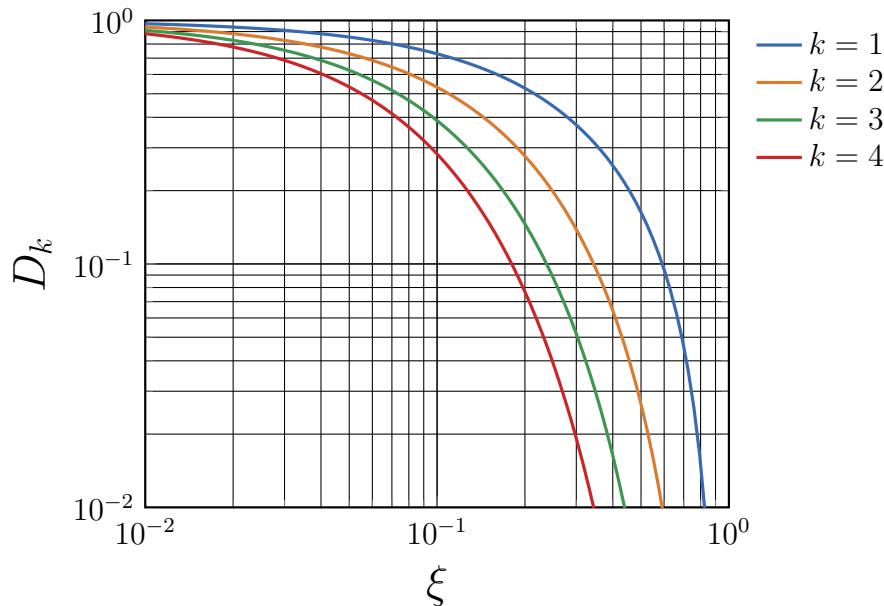


Figure 3.7 – Variation de la valeur D_k du k -ème dépassement en fonction du taux d'amortissement ξ .

La valeur $s(t_1)$ s'obtient en remplaçant la valeur de t_1 dans la forme analytique de la réponse indicielle du régime pseudo-périodique (Section 3.1.3) :

$$\begin{aligned} s(t_1) &= KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha t_1} \sin(\omega_d t_1 + \phi) \right) \\ s(t_1) &= KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\alpha \pi/\omega_d} \sin(\pi + \phi) \right) \\ s(t_1) &= KE_0 \left(1 + e^{-\alpha \pi/\omega_d} \right) \end{aligned}$$

Le dépassement est donc donné par l'expression :

$$D = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3.17)$$

et le k -ème dépassement D_k est lui donné par :

$$D_k = e^{-\frac{k\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3.18)$$

La figure 3.7 présente cette relation entre le dépassement et le taux d'amortissement. Il est possible d'utiliser cette figure comme un abaque² facilitant le calcul du dépassement connaissant le taux d'amortissement et inversement.

Il n'existe pas de relation analytique simple pour déterminer le temps de réponse à 5% (c.f définition donnée par la figure 3.8) en fonction du taux d'amortissement. Nous avons alors procéder par une méthode numérique, qui pourra constituer un exercice

²Les abaques sont très répandus en automatique. Ils permettent de s'affranchir de nombreux calculs en lisant des valeurs directement sur un graphique.

de travaux pratiques sous Scilab (??). La figure 3.9 présente la variation du temps de réponse à 5% réduit à la pulsation (c.-à-d. $\omega_0 \cdot t_{5\%}$) en fonction du taux d'amortissement ξ . On observe un minimum du temps de réponse pour $\xi \sim 0.7$

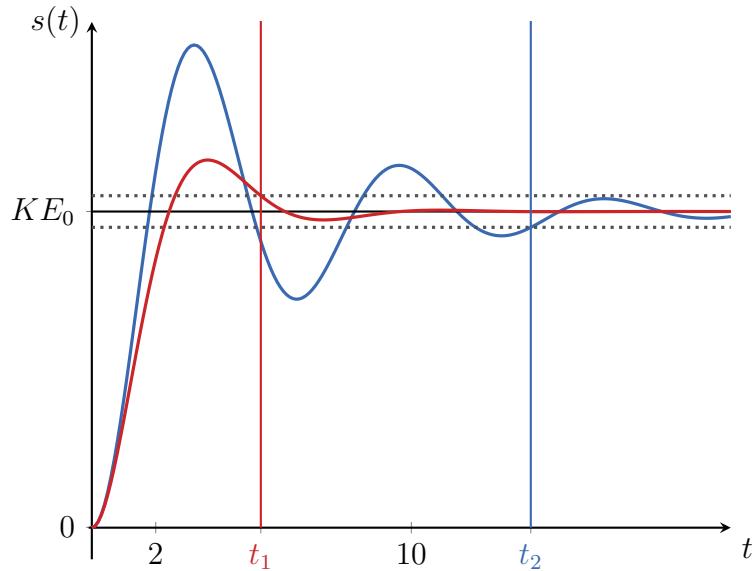


Figure 3.8 – Définition du temps de réponse à 5% dans le cas de la réponse indicielle en régime pseudo-périodique d'un système du second ordre. Le temps de réponse à 5% est défini comme le temps minimal pour que le signal soit compris dans une bande à $\pm 5\%$ autour de la valeur finale. Réponse indicielle pour (bleu) $\xi = 0.2$ et (rouge) $\xi = 0.5$.

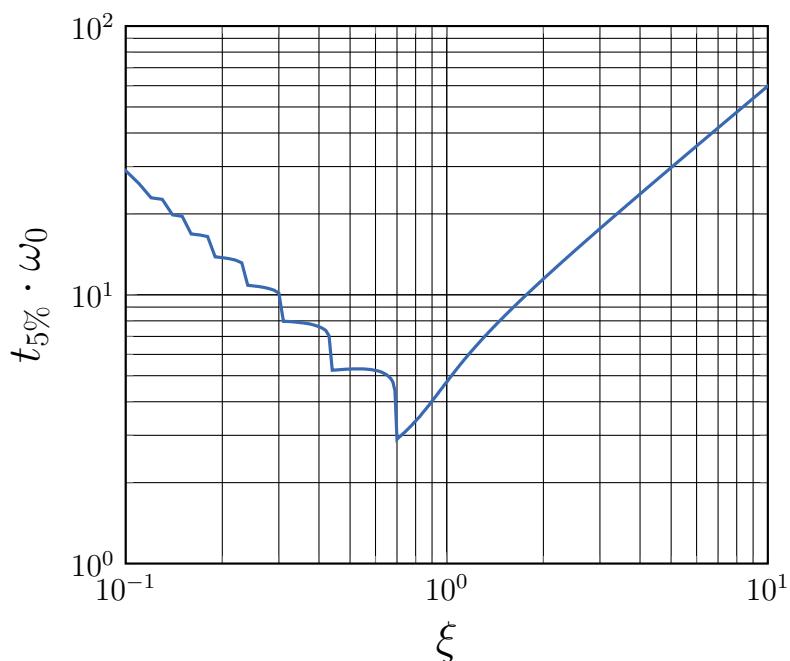
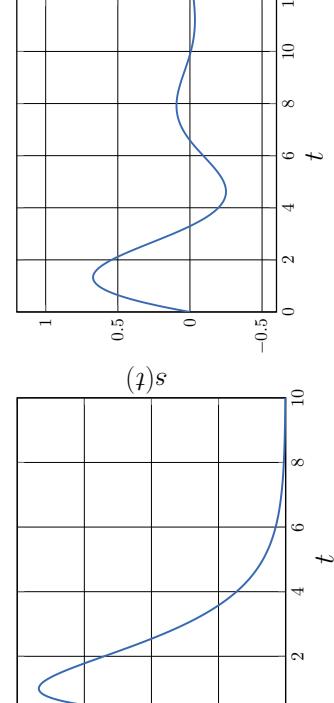
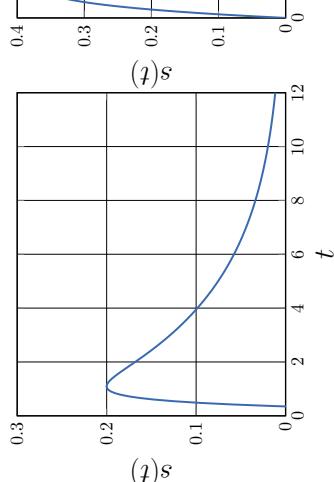
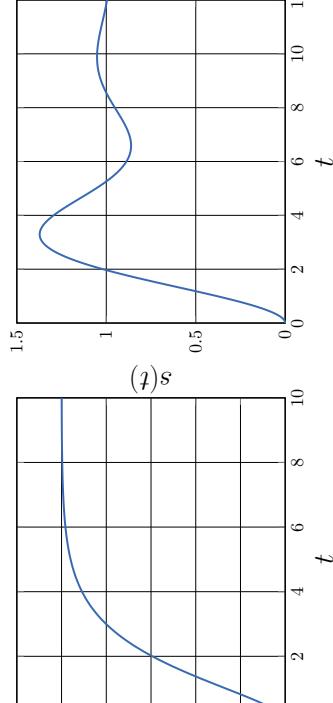


Figure 3.9 – Temps de réponse à 5% réduit en fonction du taux d'amortissement ξ . Le minimum est atteint pour $\xi \sim 0.7$ pour lequel $\omega_0 \cdot t_{5\%} \sim 3$.

Tableau 3.2 – Réponses temporales d'un système du 2nd ordre pour les différents régimes.

Réponse	Régime apériodique ($\xi > 1$)	Régime critique ($\xi = 1$)	Régime pseudo-périodique ($0 < \xi < 1$)
Réponse impulsionale			
Réponse indicielle	$s(t) = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$	$s(t) = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$s(t) = \frac{\omega_d}{1 - \xi^2} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_d t$

Paramètres : (pour tous) $K = 1$, $E_0 = 1$ (apériodique) $\xi = 2$, $\omega_0 = 1$ (c.-à-d. $\tau_1 = 3/3$ et $\tau_2 = 0.26$) (critique) $\xi = 1$, $\omega_0 = 1$ (c.-à-d. $\tau = 1$) (pseudo-périodique) $\xi = 0.3$ et $\omega_0 = 1$

3.4.3 Réponse à une rampe

La réponse à une rampe d'un système du second ordre est, dans le domaine de Laplace, donnée par

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

où $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$ est un signal rampe. Étudions la forme analytique des réponses à une rampe dans les différents régimes du système du second ordre.

Dans le cas $\xi > 1$ (régime apériodique)

Écrivons la sortie $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \cdot \frac{E_0}{p^2}$$

la décomposition en éléments simples de $S(p)$ s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p - p_1} + \frac{D}{p - p_2}.$$

Procérons par évaluation pour obtenir les coefficients B , C et D :

$$\begin{aligned} B &= p^2 S(p) \Big|_{p=0} = KE_0, \\ C &= (p - p_1)S(p) \Big|_{p=p_1} = \frac{KE_0\omega_0^2}{p_1^2(p_1 - p_2)} = \frac{KE_0p_2^2}{\omega_0^2(p_1 - p_2)}, \\ D &= (p - p_2)S(p) \Big|_{p=p_2} = \frac{KE_0\omega_0^2}{p_2^2(p_2 - p_1)} = \frac{-KE_0p_1^2}{\omega_0^2(p_1 - p_2)}, \end{aligned}$$

et par identification pour A :

$$A = KE_0 \frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2}$$

la sortie $S(p)$ devient alors :

$$S(p) = KE_0 \left(\frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{\omega_0^2(p_1 - p_2)} \left(\frac{p_2^2}{p - p_1} - \frac{p_1^2}{p - p_2} \right) \right)$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f lignes 4 et 7 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime apériodique :

$$s(t) = KE_0 \left(t + \frac{p_1 + p_2}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2(p_1 - p_2)} (p_2^2 e^{p_1 t} - p_1^2 e^{p_2 t}) \right) \quad (3.19)$$

posons $p_1 = -1/\tau_1$ et $p_2 = -1/\tau_2$, la réponse devient :

$$s(t) = KE_0 \left(t - \tau_1 - \tau_2 + \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)} \left(\tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right) \quad (3.20)$$

Dans le cas $\xi = 1$ (régime apériodique critique)

Écrivons la sortie $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p - p_1)^2} \cdot \frac{E_0}{p^2}.$$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(p - p_1)} + \frac{D}{(p - p_1)^2}.$$

Procédons par évaluation pour obtenir les coefficients B et D :

$$\begin{aligned} B &= p^2 S(p) \Big|_{p=0} = KE_0, \\ D &= (p - p_1)^2 S(p) \Big|_{p=p_1} = KE_0, \end{aligned}$$

par identification on obtient :

$$A = KE_0 \frac{2}{p_1}$$

et en utilisant la parité de la fonction $C = -A$.

La sortie $S(p)$ devient alors :

$$S(p) = KE_0 \left(\frac{2}{p_1} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p_1} \cdot \frac{1}{(p - p_1)} + \frac{1}{(p - p_1)^2} \right)$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f lignes 3, 4, 7 et 8 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime apériodique critique :

$$s(t) = KE_0 \left(\frac{2}{p_1} + t - \frac{2}{p_1} e^{p_1 t} + t e^{p_1 t} \right) \quad (3.21)$$

posons $p_1 = -1/\tau$, la réponse devient :

$$s(t) = KE_0(t - 2\tau + (t + 2\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.22)$$

Dans le cas $0 < \xi < 1$ (régime pseudo-périodique)

Écrivons la sortie $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \cdot \frac{E_0}{p^2},$$

où, rappelons que $\alpha = \xi\omega_0$ et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$.

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C(p + \alpha) + D}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2}.$$

Procémons par évaluation pour obtenir le coefficient B :

$$B = p^2 S(p) \Big|_{p=0} = \frac{KE_0\omega_0^2}{\alpha^2 + \omega_d^2} = KE_0,$$

où $\alpha^2 + \omega_d^2 = \omega_0^2$ par définition.

Par identification du numérateur, on obtient les relations suivantes sur les coefficients :

$$\begin{cases} p^3 : & A + C = 0 \\ p^2 : & B + 2A\alpha + C\alpha + D = 0 \\ p^1 : & 2B\alpha + A(\alpha^2 + \omega_d^2) = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega_d^2} \\ B &= -\frac{2\xi}{\omega_0} KE_0 \\ C &= -A = \frac{2\xi}{\omega_0} KE_0 \\ D &= -B - A\alpha = KE_0 \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \alpha - 1 \right) = KE_0(2\xi^2 - 1) \end{aligned}$$

La sortie $S(p)$ s'écrit donc :

$$S(p) = KE_0 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{1}{p} + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(p + \alpha)^2 + \omega_d^2} \right)$$

La transformée de Laplace inverse de $S(p)$ (c.f lignes 3, 4, 30 et 31 du tableau de l'[Annexe C](#)), nous permet de déterminer la réponse à une rampe du régime pseudo-périodique :

$$s(t) = KE_0 \left(t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + \frac{2\xi^2 - 1}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right)$$

en posant à nouveau :

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \xi \\ \sin \phi &= \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

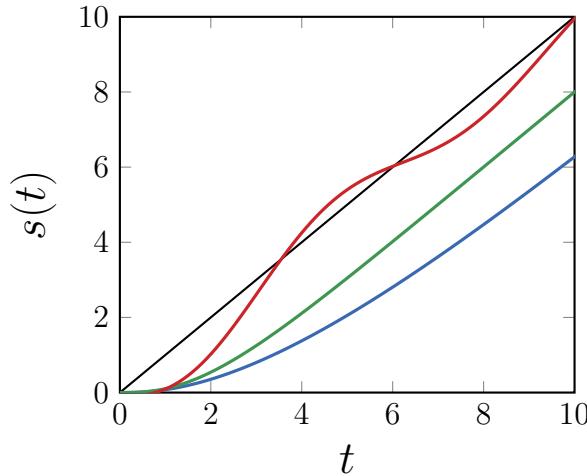


Figure 3.10 – Réponse à une rampe d'un système du second ordre en (bleu) régime apériodique avec $\xi = 2$, (vert) régime apériodique critique (c.-à-d. $\xi = 1$) et en (rouge) régime pseudo-périodique avec $\xi = 0.1$. Avec $\omega_0 = 1$, $K = 1$ et $E_0 = 1$.

et en notant que :

$$\begin{aligned}\cos 2\phi &= 1 - 2 \sin^2 \phi = 2\xi^2 - 1 \\ \sin 2\phi &= 2 \sin \phi \cos \phi = 2\xi \sqrt{1 - \xi^2}\end{aligned}$$

on obtient :

$$s(t) = KE_0 \left(t - \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{2\xi}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + 2\phi) \right) \quad (3.23)$$

3.5 Cas particulier de l'oscillateur harmonique

Dans le cas où l'équation différentielle est de la forme

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = K e(t)$$

c'est à dire sans amortissement ($\xi = 0$), on se retrouve alors dans le cas classique de l'oscillateur harmonique. Nous allons ici étudier ce modèle limite qui est d'une grande importance en physique. Ceci afin de constater que l'approche utilisée tout le long de ce chapitre permet également de décrire ce modèle important.

La fonction de transfert de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^2 + \omega_0^2}$$

3.5.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un oscillateur harmonique est, dans le domaine de Laplace, donnée par

$$S(p) = \frac{KE_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

La réponse dans le domaine temporel est donnée par :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = \frac{KE_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Ce qui correspond bien à l'oscillation incessante d'un oscillateur non amortie que l'on a déplacé de son état d'équilibre.

4 Autres modèles particuliers

4.1 Gain pur

Dans le cas où l'équation différentielle³ régissant le système est de la forme :

$$s(t) = Ke(t)$$

où K est une constante. On a affaire à un système dit à gain pur. Autrement dit, la sortie est proportionnelle à l'entrée et de même nature. La fonction de transfert d'un tel système s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \quad (3.24)$$

La **réponse impulsionnelle** pour une entrée du type impulsion de Dirac unitaire est elle-même une impulsion de Dirac :

$$s(t) = K\delta(t)$$

De même pour la **réponse indicelle** pour une entrée en échelon $e(t) = E_0 u(t)$

$$s(t) = KE_0 u(t)$$

4.2 Intégrateur pur

Dans le cas où l'équation différentielle régissant le système est de la forme :

$$\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$$

³Bien évidemment dans ce cas présent, l'équation différentielle est d'ordre 0. Ce qui est un cas très particulier d'équation différentielle.

où K est un gain. La sortie correspond à l'intégrale de l'entrée :

$$s(t) = K \int_0^t e(\tau) d\tau$$

La fonction de transfert est celle d'un intégrateur pur :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}. \quad (3.25)$$

La **réponse impulsionale**, pour une entrée unitaire, est la fonction échelon unitaire :

$$s(t) = K \int_0^t \delta(\tau) d\tau = Ku(t)$$

La **réponse indicelle** est une rampe de pente KE_0 :

$$s(t) = KE_0 \int_0^t u(\tau) d\tau = KE_0 [\tau]_0^t = KE_0 t$$

Autrement dit, le système est **instable**.

4.3 Dérivateur pur

Dans le cas où l'équation différentielle régissant le système est de la forme :

$$s(t) = K \frac{de(t)}{dt}$$

où K est un gain. On a à faire à un système dit déivateur pur. La sortie correspond alors à la dérivée de l'entrée. Sa fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = Kp \quad (3.26)$$

La **réponse impulsionale** d'un déivateur n'est pas définie. La **réponse indicelle** est une impulsion de Dirac, par définition de la dérivée d'un échelon :

$$s(t) = K\delta(t)$$

4.4 Retard pur

Un système régi par l'équation différentielle :

$$s(t) = e(t - \tau)$$

est dit à retard pur et sa fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K e^{-\tau p} \quad (3.27)$$

Les réponses temporelles sont donc de mêmes natures que leurs sollicitations, elles sont simplement retardées de τ .

5 Généralisation des modèles de SLCI

Nous venons d'analyser un grand nombre de systèmes modèles d'ordre $n < 2$. Nous allons ici généraliser l'approche pour l'étude de systèmes d'ordre supérieur à deux.

5.1 Systèmes d'ordre supérieur à 2

Dans le cas d'un système d'ordre $n > 2$, il suffit de décomposée en éléments simples la fonction de transfert, qui n'est rien d'autre qu'une fraction rationnelle en p et d'utiliser la propriété de linéarité de la sortie.

Rappelons (c.f chapitre 1) que toute fonction de transfert peut être mise sous la forme factorisé suivante

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec K le gain statique, α la classe (ou le nombre d'intégrateur) et deux polynômes $N(p)$ et $D(p)$.

Les deux polynômes peuvent se factoriser comme un produit de polynômes irréductibles unitaires, c'est à dire :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod_i (1 + \tau_i p) \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)}{\prod_i (1 + \tau_i p) \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)}$$

en toute rigueur il suffit d'exprimer le rapport des produits comme un simple produits en permettant les exposants d'être négatifs, soit alors la forme plus condensée :

$$H(p) = K p^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p)^{n_i} \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j p^2)^{n_j} \quad (3.28)$$

où n_i et n_j peuvent être positifs et négatifs.

Après décomposition en éléments simples, $H(p)$ s'écrit sous la forme d'une somme de systèmes du 1er et second ordre.

$$H(p) = \sum_i H_i(p)$$

La réponse temporelle $s(t)$ d'un tel système sortie est alors la somme des réponses de chacun des sous systèmes $H_i(p)$

$$s(t) = \sum_i s_i(t)$$

5.2 Exemple d'une fonction de transfert d'ordre 3

Soit un système caractérisé par la fonction de transfert $H(p)$ tel que :

$$H(p) = \frac{3p + 1}{p^3 + 9p^2 + 23p + 15}$$

On détermine, après un peu d'algèbre, les trois pôles $p_1 = -1$, $p_2 = -3$ et $p_3 = -5$ ainsi que la forme factorisée de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{3p + 1}{(p + 1)(p + 3)(p + 5)}$$

La décomposition en éléments simples est donné par :

$$H(p) = \frac{0.25}{p + 1} + \frac{1}{p + 3} - \frac{1.25}{p + 5}$$

et sous forme factorisée :

$$H(p) = \frac{0.25}{p + 1} + \frac{1/3}{\frac{1}{3}p + 1} - \frac{0.25}{0.2p + 1}$$

La réponse temporelles est donc la somme des réponses temporelles de trois systèmes du premier ordre $H_1(p)$, $H_2(p)$ et $H_3(p)$ ayant respectivement pour paramètres ($K_1 = 0.25, \tau_1 = 1$), ($K_2 = 1/3, \tau_2 = 1/3$) et ($K_3 = -0.25, \tau_3 = 0.2$)

Pour la réponse indicielle à un échelon d'amplitude E_0 les réponses $s_i(t)$ de chacune de ces fonctions de transferts sont de la forme :

$$s_i(t) = K_i E_0 \left(1 - e^{-t/\tau_i}\right)$$

La réponse indicielle du système est alors

$$s(t) = \sum_i s_i(t) = \frac{E_0}{4} \left(1 - e^{-t}\right) + \frac{E_0}{3} \left(1 - e^{-3t}\right) - \frac{E_0}{4} \left(1 - e^{-5t}\right)$$

La valeur finale est donnée par la somme algébrique des valeurs finales de chacune des fonctions de transfert.

Cependant, les propriétés telle que le temps de réponse, les pseudo-oscillation (dans le cas de système du second ordre) le dépassement ou encore la stabilité sont gouvernées par la fonction de transfert de temps caractéristique le plus grand. L'influence des pôles dominants seront traités lors de l'étude de chacune des performances attendues par non système asservis.

6 Identification d'un modèle de comportement

6.1 Formule de Bureau

à compléter (hors programme)...

6.2 Modèle de Strejc

à compléter (hors programme)...

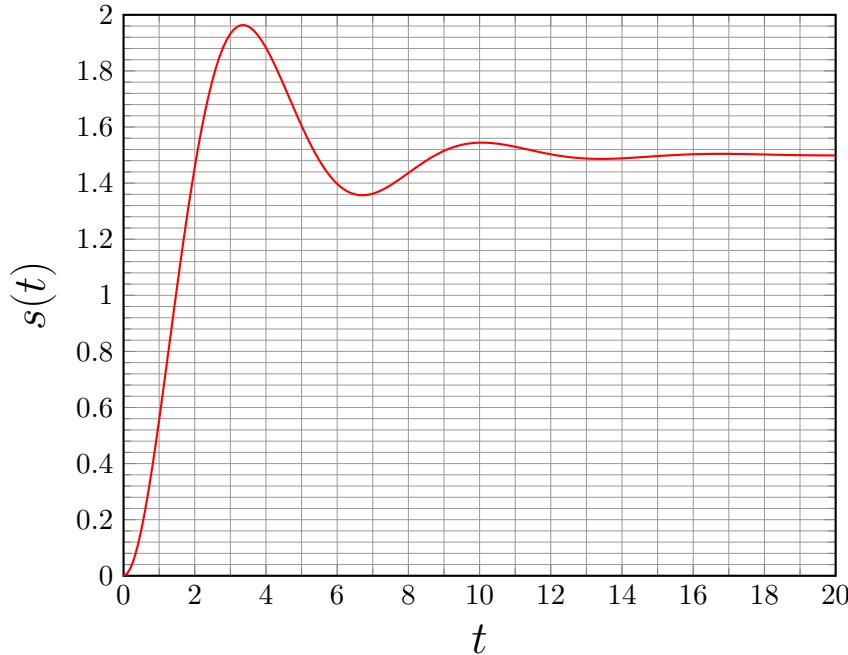
6.3 Modèle de Broïda

à compléter (hors programme)... c.f <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/hugues.garnier/Enseignement/Auto/C-Auto-Analyse.pdf>

7 Exercices du chapitre

Exercice 1 : Analyse de la réponse temporelle d'un SLCI ★★☆

Nous avons relevé la réponse à un échelon unitaire, déclenchée à $t = 0$, d'un système linéaire. Cette réponse est donnée par la figure ci-dessous. L'objectif de cet exercice est de caractériser le système à partir de cette réponse temporelle.



Q1. Déterminer :

- l'ordre du système,
- le gain statique K ,
- le temps de réponse à 5%,
- et le dépassement relatif en %.

Q2. En déduire l'amortissement ξ , la pulsation propre ω_0 et écrire la fonction de transfert.

Nous rappelons que le temps du premier maximum est donné par $t_1 = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$ et

le dépassement par $D = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$. On pourra s'aider des abaques 1 et 2 présentés en annexe.

Q3. Calculer les pôles du système et les placer les sur une cartes des pôles (plan complexe).

Exercice 2 : Réponse temporelle d'un système du second ordre ★★☆

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 3\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = e(t)$$

Q1. Déterminer les paramètres du second ordre (K, ω_0, ξ) de cette équation différentielle.

Q2. Déterminer la fonction de transfert de ce système.

Q3. Déterminer la réponse indicielle de ce système pour une entrée $e(t) = 1$ et tracer son allure.

Exercice 3 : Modélisation de la chute libre ★★☆

On cherche à déterminer l'expression de la vitesse d'un corps en chute libre dans l'air. Lorsqu'on lâche, sans vitesse initiale, ce corps M (hypothèse du corps ponctuel) de masse m dans cet environnement, il est soumis à deux forces :

- son poids $m\vec{g}$
- $-k\vec{v}$ qui s'oppose au mouvement et qui est proportionnelle à la vitesse, k dépend généralement de la forme du corps et de la composition de l'atmosphère

Q1. Tracer un schéma représentant le bilan des forces mis en jeu. On orientera l'axe de déplacement du haut vers le bas.

Q2. Déterminer quel système SLCI pourrait être envisagé. Quel serait l'entrée et la sortie ?

Q3. Déterminer l'équation différentielle régissant le système. Quels sont son ordre et sa classe ? Quels sont les paramètres de sa forme canonique ?

Q4. Déterminer la forme de la sortie à partir de la réponse temporelle de la forme canonique de ce système. Tracer sa solution.

Exercice 4 : Étude des systèmes du 1er ordre ★★☆

On considère quatres systèmes du 1er ordre ayant les caractéristiques suivantes :

- Système 1 (S_1) : de gain K et de contante de temps T
- Système 2 (S_2) : de gain K et de contante de temps $2T$
- Système 3 (S_3) : de gain $2K$ et de contante de temps T
- Système 4 (S_4) : de gain K et de contante de temps $T/2$

Q1. Pour chacun des systèmes :

- placer son pôle sur la carte des pôles et zéros.
- donner l'allure de la réponse indicielle et estimer le temps de réponse à 5%.

Q2. Comparer les quatres systèmes en termes de rapidité

Exercice 5 : Caractéristiques de la réponse temporelle d'un système du second ordre ★★☆

Q1. Déterminer la fonction de transfert du second ordre donnant lieu à une réponse indicielle aux caractéristiques suivantes :

- Dépassement de 10%
- Temps de réponse à 5% de 8 ms
- Une sortie égale à l'entrée en régime permanent

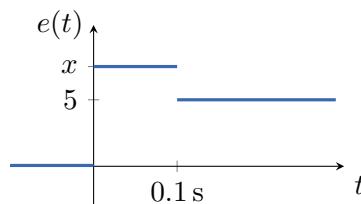
Exercice 6 : Réponse temporelle d'un système du premier ordre ★★☆

Un système linéaire est caractérisé par l'équation :

$$0.5 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 15e(t)$$

Q1. Donner l'expression de la fonction de transfert du système, la classe, l'ordre, le gain et la constante de temps de ce système.

On applique l'entrée suivante :

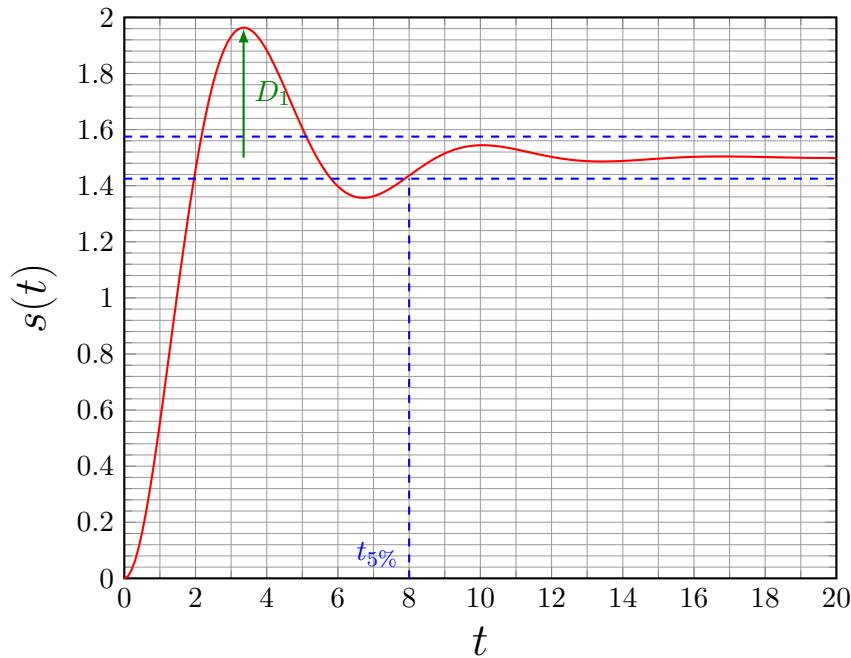


Q2. Donner l'expression de $s(t)$ en fonction de x

Q3. Trouver x pour qu'à $t = 0.1$ s la réponse atteigne sa valeur finale et ne la quitte pas

8 Corrigé des exercices

Exercice 1 : Analyse de la réponse temporelle d'un SLCI ★★☆



Q1. Déterminer :

- Ordre du système : 2nd ordre
- Gain statique K : $K = 1.5$
- Temps de réponse à 5% : $t_{5\%} \sim 8$ s
- Dépassement relatif en % : $D_1 \sim \frac{1.96 - 1.5}{1.5} \sim 30\%$

Q2. En déduire l'amortissement ξ , la pulsation propre ω_0 et écrire la fonction de transfert.

À partir du dépassement :

$$\xi = \frac{\ln D}{\sqrt{\pi^2 + (\ln D)^2}} \sim 0.35$$

À partir du temps du premier dépassement : $t_1 \sim 3.35$ s

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \sqrt{1 - \xi^2}} \sim 1 \text{ rad/sec}$$

Q3. Calculer les pôles du système et les placer sur une carte des pôles (plan complexe).

Les pôles sont complexes conjugués et sont donnés par :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$p_1 = -0.35 + 0.93j \text{ et } p_2 = -0.35 - 0.93j$$

Exercice 2 : Réponse temporelle d'un système du second ordre ★★☆

Q1. Déterminer les paramètres du second ordre (K, ω_0, ξ) de cette équation différentielle.

La forme canonique d'un système du second ordre est donnée par :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

On détermine alors que :

$$\begin{cases} K\omega_0^2 = 1 \\ 2\xi\omega_0 = 3 \\ \omega_0^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{1}{2} \\ \xi = \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \omega_0 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puisque $\xi > 1$, le système est en régime apériodique.

Q2. Déterminer la fonction de transfert de ce système.

La transformée de Laplace de l'équation différentielle nous donne pour des conditions d'Heaviside :

$$p^2 S(p) + 3pS(p) + 2S(p) = E(p)$$

La fonction de transfert que l'on note $H(p)$ est alors donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$$

Les pôles de la fonction de transfert sont -2 et -1. On peut alors écrire $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

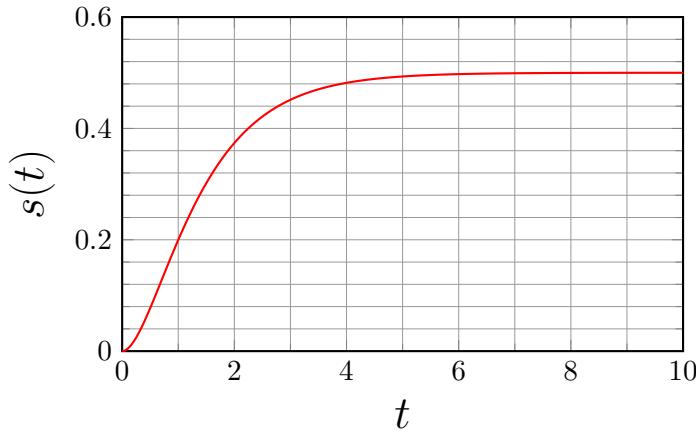
Q3. Déterminer la réponse indicielle de ce système pour une entrée $e(t) = 1$ et tracer son allure.

La réponse indicielle dans le domaine de Laplace est donnée par une entrée $E(p) = \frac{1}{p}$, soit :

$$S(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$

La transformée inverse (c.f ligne 14 de la table) donne :

$$s(t) = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})$$

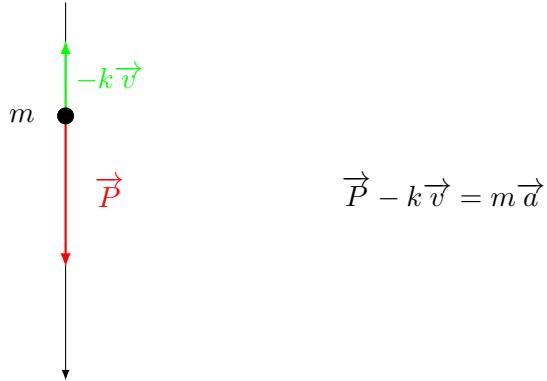


On utilisera les caractéristiques des réponses indicielles du second ordre :

- pente à l'origine nulle
- valeur finale donnée par le théorème de la valeur finale.

Exercice 3 : Modélisation de la chute libre ★★☆

Q1. Tracer un schéma représentant le bilan des forces mis en jeu. On orientera l'axe de déplacement du haut vers le bas.



Q2. Déterminer quel système SLCI pourrait être envisagé. Quel serait l'entrée et la sortie ?

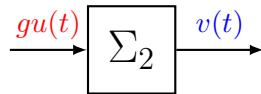
Projetons sur x le bilan des forces. Nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt}$$

ou encore

$$\frac{m}{k} \frac{dv}{dt} + v = \frac{m}{k} g$$

Il est possible de voir ce problème comme un système représenté par le bloc suivant :



C'est à dire que l'entrée correspond à la constante gravitationnelle auquel on multiplie la fonction échelon. L'expérience commence quand « on prend en compte la gravité ». La sortie est la vitesse que l'on cherche à déterminer.

Q3. Déterminer l'équation différentielle régissant le système. Quels sont son ordre et sa classe ? Quels sont les paramètres de sa forme canonique ?

$$\frac{m}{k} \frac{dv}{dt} + v = \frac{m}{k} g$$

Le système est d'ordre 1 et de classe 0. Les paramètres de la forme canonique sont $K = \frac{m}{k}$ et $\tau = \frac{m}{k}$. Notons qu'il n'y a pas toujours égalité de ces deux paramètres.

Q4. Déterminer la forme de la sortie à partir de la réponse temporelle de la forme canonique de ce système. Tracer sa solution.

La solution est simplement donnée par la réponse indicielle d'un système du premier ordre que nous avons déterminé dans ce chapitre (c.f [équation \(3.4\)](#)), pour laquelle, $K = \frac{m}{k}$, $\tau = \frac{m}{k}$ et $E_0 = g$.

Soit alors, en prenant $v(0) = 0$:

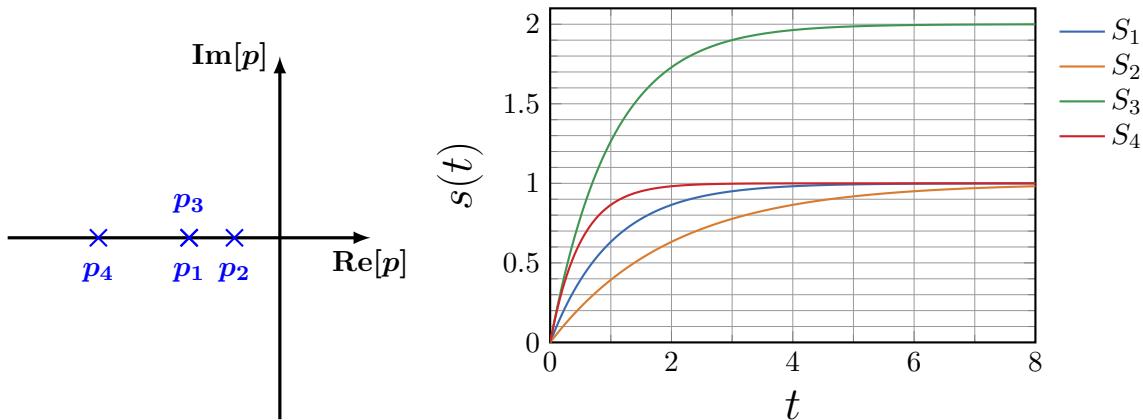
$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right).$$

La vitesse maximale (c'est à dire la valeur finale de la réponse du SLCI) est donc $\frac{mg}{k}$ (KE_0).

Exercice 4 : Étude des systèmes du 1er ordre ★☆☆

Q1. Carte des pôles et zéros. Réponse indicielle.

- (a) placer son pôle dans la carte des pôles.
- (b) donner l'allure de la réponse indicielle et estimer le temps de réponse à 5%.



On trace la réponse indicielle pour des valeurs de $K = 1$ et $T = 1$. Le temps de réponse à 5% de chacun des systèmes est :

- $S_1 : t_{5\%} = 3T$
- $S_2 : t_{5\%} = 6T$
- $S_3 : t_{5\%} = 3T$

- $S_4 : t_{5\%} = \frac{3}{2}T$

Q2. Comparer les quatres systèmes en termes de rapidité

Le système 4 est bien le plus rapide.

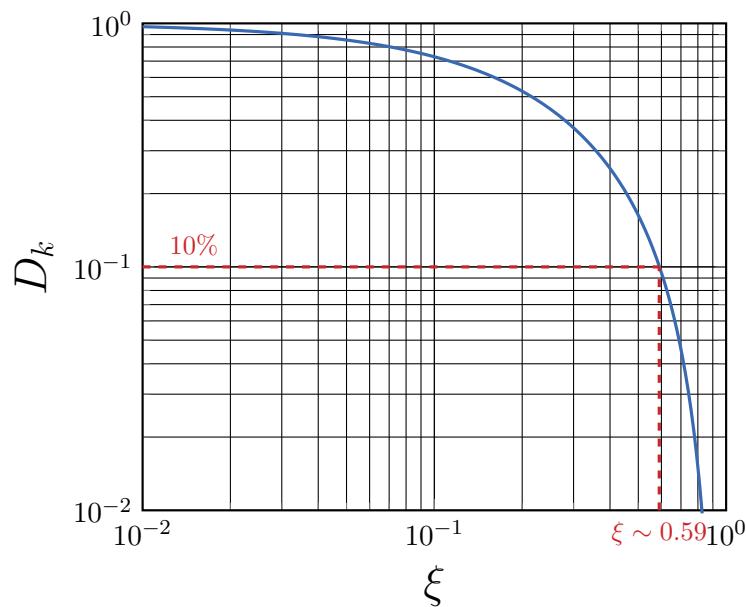
Exercice 5 : Caractéristiques de la réponse temporelle d'un système du second ordre ★★☆

Q1. Déterminer la fonction de transfert du second ordre donnant lieu à une réponse indicielle aux caractéristiques suivantes :

- Dépassement de 10%
- Temps de réponse à 5% de 8 ms
- Une sortie égale à l'entrée en régime permanent

Il est possible de déterminer le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 à l'aide des abaques correspondant aux figures 3.7 et 3.9 vus précédemment.

Notamment, à partir du dépassement, on cherche l'intersection avec la courbe pour déterminer ξ . Ci-dessous, on détermine une valeur de $\xi = 0.59$

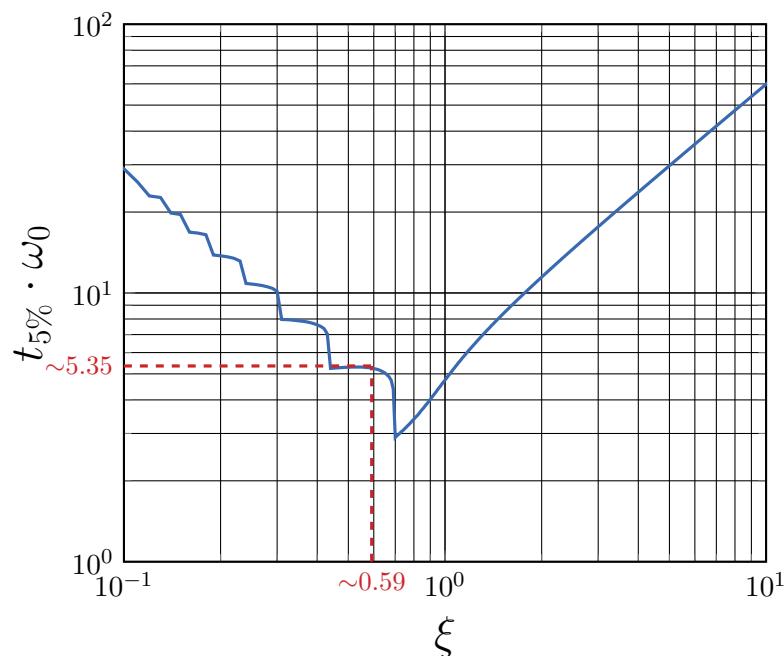


Par le calcul, il est possible d'établir ξ en inversant la relation Équation (3.17) qui devient :

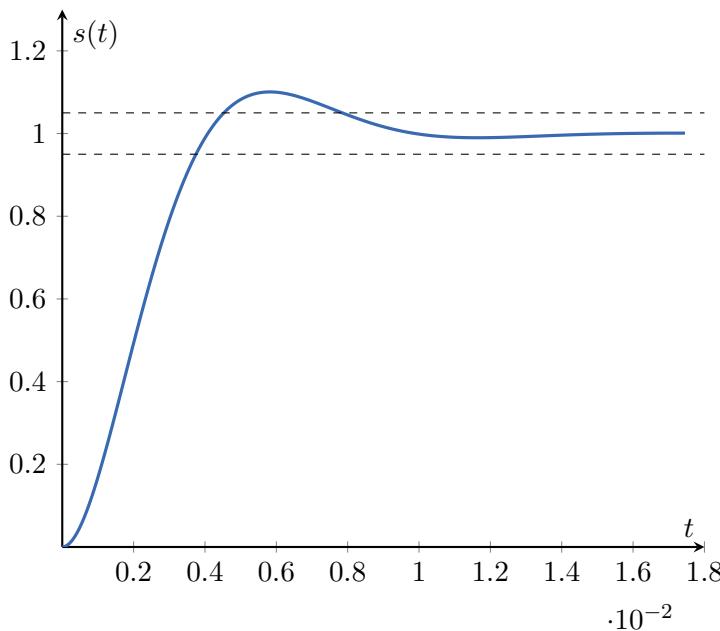
$$\xi = \sqrt{\frac{(\ln D)^2}{(\ln D)^2 + \pi^2}}$$

Ce qui nous donne une valeur théorique de 0.59115 comparable à la valeur obtenue graphiquement.

À partir de cette valeur ξ , nous pouvons lire une valeur du temps de réponse à 5% réduit de 5.35.



Ce qui nous donne une pulsation propre de $\omega_0 = \frac{5.35}{0.008} = 668.75 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$



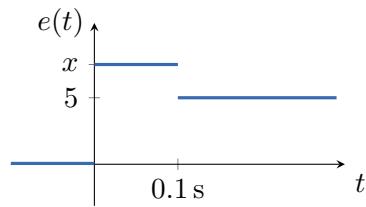
Exercice 6 : Réponse temporelle d'un système du premier ordre ★★☆

Un système linéaire est caractérisé par l'équation :

$$0.5 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 15e(t)$$

- Q1.** Donner l'expression de la fonction de transfert du système, la classe, l'ordre, le gain et la constante de temps de ce système.

On applique l'entrée suivante :



Q2. Donner l'expression de $s(t)$ en fonction de x

Q3. Trouver x pour qu'à $t = 0.1 \text{ s}$ la réponse atteigne sa valeur finale et ne la quitte pas

4 Analyse fréquentielle et représentation graphique

Sommaire

1	Introduction	128
2	Réponse harmonique	128
2.1	Réponse harmonique dans le domaine temporel	130
3	Représentation graphique	131
3.1	Diagramme de Bode	131
3.2	Diagramme de Nyquist	132
3.3	Diagramme de Black-Nichols	133
4	Analyse fréquentielle des modèles usuels	134
4.1	Diagrammes de Bode	134
4.2	Diagrammes de Nyquist	151
4.3	Diagrammes de Black-Nichols	156
5	Etude du transitoire de la réponse harmonique	157
5.1	Exemple d'un système du premier ordre	158
6	Exercices du chapitre	160
7	Corrigé des exercices	162

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons établir la forme de la réponse d'un **SLCI** à une entrée sinusoïdale, dite **réponse harmonique** en régime permanent. Nous présenterons ensuite en détail les différentes représentations graphiques qui constitueront l'**analyse fréquentielle** de cette réponse harmonique. Nous verrons en fin de chapitre une étude analytique du transitoire dans un cas usuel.

2 Réponse harmonique

Soit un **SLCI** défini par une fonction de transfert $H(p)$ auquel on applique une entrée sinusoïdale $e(t)$ tel que :

$$e(t) = E_0 \sin \omega t$$

d'amplitude E_0 et de pulsation ω^1 . Dans le domaine de Laplace, la sortie $S(p)$ est de la forme :

$$S(p) = H(p)E(p)$$

où $E(p)$ est la transformée de Laplace d'un sinus (c.f ligne 23 du tableau de l'[Annexe C](#)), on obtient alors :

$$S(p) = H(p) \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Les pôles de la fonction de transfert $H(p)$ donnent lieu au régime transitoire alors que les pôles de l'excitation donnent lieu au régime permanent. Les deux pôles de l'excitation sont $p_{1,2} = \pm j\omega$. La forme factorisée s'écrit alors :

$$S(p) = H(p) \frac{E_0 \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)}$$

En régime permanent, la décomposition de $S(p)$ en éléments simples s'écrit :

$$S(p) = \frac{A}{p - j\omega} + \frac{B}{p + j\omega}$$

où les coefficients s'obtiennent par évaluation :

$$\begin{aligned} A &= (p - j\omega)S(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{E_0 \omega}{p + j\omega} H(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{E_0}{2j} H(j\omega) \\ B &= (p + j\omega)S(p) \Big|_{p=-j\omega} = \frac{E_0 \omega}{p - j\omega} H(p) \Big|_{p=-j\omega} = -\frac{E_0}{2j} H(-j\omega) \end{aligned}$$

nous obtenons donc :

$$S(p) = \frac{E_0}{2j} \left(\frac{H(j\omega)}{p - j\omega} - \frac{H(-j\omega)}{p + j\omega} \right)$$

¹ Strictement, ω est une pulsation en unité $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, la fréquence associée étant $f = \omega/2\pi$, en s^{-1} ou Hz . Cependant, par abus de langage, il est courant de se référer en terme de fréquence en parlant de la pulsation ω . Nous prendrons cependant soin d'utiliser la bonne forme dans nos applications numériques.

La transformée de Laplace inverse de la sortie $S(p)$ permet d'obtenir la réponse temporelle

$$s(t) = \frac{E_0}{2j} (H(j\omega)e^{j\omega t} - H(-j\omega)e^{-j\omega t})$$

En écrivant le nombre complexe $H(j\omega)$ sous sa forme exponentielle (Annexe D) :

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= |H(j\omega)| e^{j\phi} \\ H(-j\omega) &= |H(j\omega)| e^{-j\phi} \end{aligned}$$

où $|H(j\omega)|$ et ϕ sont respectivement le module et l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$ et où l'on montre de plus que $H(-j\omega)$ est égale à son conjugué (c.-à-d. $H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)}$). La réponse temporelle peut alors s'écrire sous la forme

$$s(t) = E_0|H(j\omega)| \left(\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \right)$$

où l'on reconnaît la forme exponentielle de la fonction sinus qui nous permet d'écrire :

$$s(t) = E_0|H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad (4.1)$$

Cette relation exprime que **l'excitation d'un SLCI par une entrée sinusoïdale donne lieu, en régime permanent, à une réponse harmonique dépendant de la fréquence d'excitation dont le gain en amplitude et la phase sont respectivement donné par le module et l'argument de la fonction de transfert du système.**

À noter que $H(j\omega)$ correspond au rapport de la sortie sur l'entrée, ainsi le gain $|H(j\omega)|$ et la phase peuvent être définis à partir de la sortie et de l'entrée du signal,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \\ |H(j\omega)| &= \frac{|S(j\omega)|}{|E(j\omega)|} \\ \arg H(j\omega) &= \arg S(j\omega) - \arg E(j\omega) \end{aligned}$$

Le gain $|H(j\omega)|$ est une fonction réelle de ω de ce fait nous utiliserons par la suite $G(\omega)$ pour noter plus explicitement cette dépendance. La phase est également une fonction de la pulsation d'excitation, nous la noterons donc $\phi(\omega)$ par la suite.

ω [rad/s]	$\omega = 0.1$	$\omega = 1$	$\omega = 10$
$G(\omega)$	0.99	0.70	0.1
$\phi(\omega)$	-5.7°	-45°	-84.3°

Tableau 4.1 – Quelques valeurs particulières du gain et de la phase de la fonction de transfert du premier ordre, pour $K = 1$ et $\tau = 1$ s.

2.1 Réponse harmonique dans le domaine temporel

Considérons un SLCI défini par une fonction de transfert $H(p)$ du premier ordre (Équation (3.2)) de forme canonique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + p}$$

avec $K = 1$, $\tau = 1$ s.

Comme nous venons de le montrer la réponse harmonique est complètement déterminée par la connaissance du module et de l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$. Le module donnant accès au rapport du gain en amplitude de la sortie sur l'entrée et l'argument à la différence de phase entre la sortie et l'entrée.

Calculons donc ces deux quantités pour notre fonction de transfert du premier ordre :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\tau\omega} \right|$$

$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arctan(\omega\tau)$$

Le tableau 4.1 présente le module et l'argument pour quelques valeurs particulières de ω ($\omega = 0.1, 1$ et 10 rad · s⁻¹). D'après ces valeurs, nous constatons que le rapport des amplitudes décroît et que le déphasage augmente lorsque la pulsation de l'excitation augmente.

La figure 4.1 présente la forme des réponses temporelles de ce système pour les données calculées du gain et de la phase de la fonction de transfert considérée. Cette représentation graphique montre ses limites, en effet quand est-il de toutes les autres valeurs de la pulsation ? Nous allons maintenant généraliser cette analyse sans pour autant avoir à tracer la réponse temporelle pour toutes les pulsations que l'on souhaite étudier.

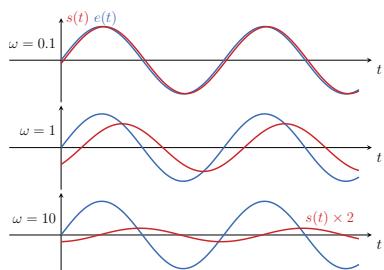


FIGURE 4.1 : Réponse harmonique (en régime permanent) (Section 6) d'un système du premier ordre pour différentes pulsations d'excitation de la forme $e(t) = \sin \omega t$, (données du tableau 4.1). Cette figure permet d'observer l'augmentation du déphasage et la diminution de l'amplitude lorsque la fréquence d'excitations augmente. (bleu) excitation $e(t)$ (rouge) sortie $s(t)$.

3 Représentation graphique de la réponse harmonique

Comme nous venons de le voir, il est possible d'étudier la réponse harmonique (en régime permanent) d'un **SLCI** dans le domaine temporel et observer la variation d'amplitude et du déphasage qui dépend de la pulsation d'excitation. Ces variations d'amplitude et de phase sont totalement déterminées par la connaissance du module et de l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$, c'est ce qui constitue l'analyse fréquentielle des **SLCI**.

Dans cette partie, nous présenterons trois types de représentations graphiques, notamment :

- le diagramme de Bode,
- le diagramme de Nyquist,
- et le diagramme de Black

Nous étudierons en détail les diagrammes des modèles usuels que nous avons déjà rencontrés au chapitre précédent ([Chapitre 3](#))

Le terme **lieu de transfert** est communément utilisé pour parler du points de coordonnées $(\omega, \phi(\omega), G(\omega))$.

3.1 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode permet de représenter le comportement fréquentiel d'un système quelconque en fonction de la fréquence d'excitation en entrée. Il se compose de deux graphiques :

- i) le tracé du gain en décibel en fonction de la pulsation ω :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| \quad (4.2)$$

- ii) le tracé de la phase en fonction de la pulsation ω :

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) \quad (4.3)$$

L'axe des pulsations étant généralement représenté par une échelle logarithmique pour permettre la représentation de la réponse harmonique sur une large plage de valeurs en pulsation (??). Le calcul de la phase passe lui par la détermination de l'argument principale ([Annexe D](#)).

La principale propriété du diagramme de Bode est de permettre de simplifier un grand nombre calcul. En effet, dans le cas par exemple où deux systèmes H_1 et H_2 sont mis en série,

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega),$$

Le diagramme de Bode de $H(j\omega)$ est la somme de deux diagrammes



Hendrik Wade Bode (1905-1982), ingénieur, chercheur et inventeur américain.

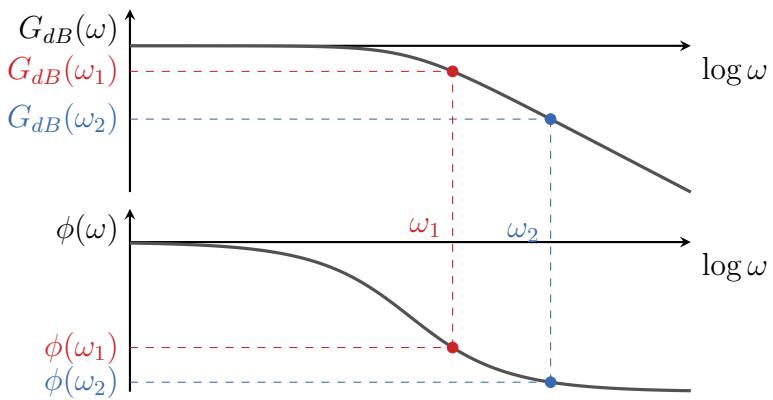


Figure 4.2 – Représentation schématique d'un diagramme de Bode. Le gain en décibel et la phase associé à une fonction de transfert sont représentés en fonction de la pulsation (à l'échelle log) sur deux repères distincts.

indépendants :

$$\text{Bode}(total) = \text{Bode}(1) + \text{Bode}(2)$$

3.2 Diagramme de Nyquist

Un diagramme de Nyquist présente la partie imaginaire et la partie réelle de $H(j\omega)$ pour différentes valeurs paramétrées de ω . Il a l'avantage de combiner les deux graphiques du diagramme de Bode en un seul. En effet, la phase et l'amplitude d'un point dans le plan complexe peut être déterminé graphiquement par respectivement l'angle avec l'axe des réels et la distance à l'origine (Annexe D). Cette représentation graphique est communément appelée **le lieu de Nyquist**.



Harry Nyquist (1889-1976), électronicien et ingénieur américain. Il réalisa d'importantes contributions à la théorie de l'information.

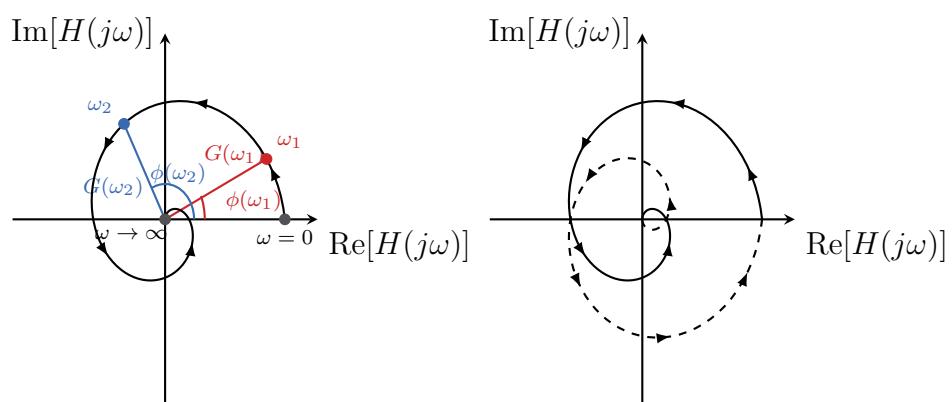
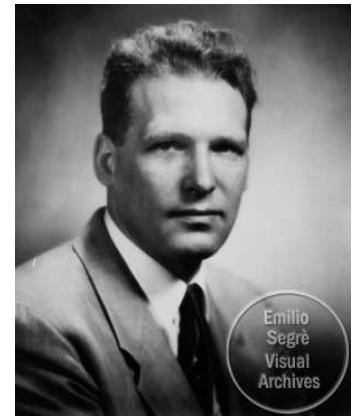


Figure 4.3 – (gauche) Représentation schématique d'un diagramme de Nyquist. Le nombre complexe $H(j\omega)$ est représenté dans le plan complexe pour différentes valeurs de la pulsation ω de 0 à ∞ . (droite) Représentation schématique du lieu complet de Nyquist, symétrique par rapport à l'axe des réels.

Le lieu de Nyquist complet est le tracé théorique des parties réel et imaginaire de $H(j\omega)$, en considérant les pulsations négatives, c'est à dire entre $\omega \rightarrow -\infty$ et $\omega \rightarrow +\infty$.

3.3 Diagramme de Black-Nichols

Le diagramme de Black² consiste à tracer le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ en fonction de la phase, paramétré par la pulsation ω . À l'instar du diagramme de Nyquist, le diagramme de Black à l'avantage de combiner les deux graphiques du diagramme de Bode. La diagramme de Black est habituellement utilisé dans l'étude des systèmes asservis (Chapitre 5) pour déterminer le lieu de transfert dans le plan de Black d'un système en boucle fermée (FTBF) à partir de la connaissance du lieu de transfert dans le plan de Black de la Fonction de Transfert en Boucle ouverte (FTBO).



Nathaniel B. Nichols,
(1914–1997) ingénieur américain.

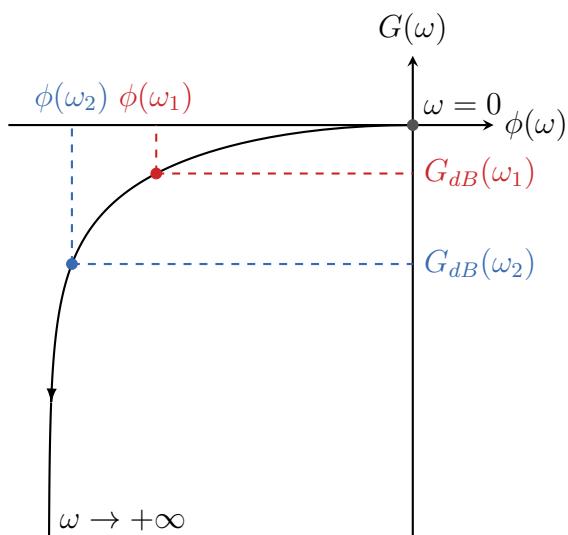


Figure 4.4 – Représentation schématique d'un diagramme de Black. Le gain et la phase de la fonction de transfert $H(j\omega)$ sont représentés sur le lieu de Black pour différentes valeurs de la pulsation ω de 0 à ∞ .

²Il également appelé diagramme de Black-Nichols ou simplement Nichols dans le monde anglo-saxon.

4 Analyse fréquentielle des modèles usuels

Nous allons ici présenter la forme canonique des diagrammes fréquentielles (Bode, Nyquist et Black-Nichols) pour les modèles usuels rencontrés dans l'étude des **SLCI**. Les diagrammes de Bode restent l'outil principale et fera l'objet d'une présentation plus détaillée.

4.1 Diagrammes de Bode

4.1.1 Méthodologie générale

Pour chacun des modèles usuels, à savoir : un gain pur, un intégrateur pur, un déivateur pur, un retard pur, un système du premier ordre et du second ordre, nous allons déterminer les diagrammes de Bode dits asymptotiques et réels. Le diagramme réel est la représentation exacte des fonctions du gain en décibel et de la phase en fonction de la pulsation d'entrée de la sollicitation. Le diagramme asymptotique permet de caractériser qualitativement l'effet du modèle usuel sur le diagramme de Bode. Dans la pratique, on ne s'interesse qu'aux limites aux basses et hautes fréquences. Nous pourrons vérifier que cette approximation asymptotique est une bonne approximation pour la fonction du gain.

Pour résumer, nous appliquerons la procédure suivante à chacun des modèles usuels :

- i) Définir la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ à partir de la fonction de transfert $H(p)$ du modèle en question pour $p = j\omega$.
- ii) Établir la fonction du gain $G(\omega)$ à partir du module de $H(j\omega)$.
- iii) Déterminer le gain en décibel G_{dB} tel que $G_{dB} = 20 \log G(\omega)$.
- iv) Établir la fonction de la phase $\phi(\omega)$ à partir de l'argument principale de $H(j\omega)$.
³
- v) Si les fonctions $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$ ne sont pas de simples constantes, réaliser une étude asymptotique pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$.
- vi) Tracer le diagramme de Bode **réel** et le diagramme de Bode **asymptotique** sur un graphe semi-logarithmique.

³L'argument principale est l'argument d'un nombre complexe dans $[-\pi, \pi]$. On se rapportera à l'[Annexe D](#) pour plus de détails.

4.1.2 Diagramme de Bode d'un gain pur

La fonction de transfert d'un gain pur est de la forme $H(j\omega) = K$, le gain est donc simplement donné par

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = K.$$

D'où le gain G_{dB} en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K$$

ce qui correspond à une constante pour un gain statique K donné (Figure 4.5) En ce qui concerne la phase, elle s'obtient à partir de l'argument principale du nombre complexe $H(j\omega)$:

$$\phi(\omega) = 0$$

Un gain pur n'a donc aucun effet sur le déphasage quelque soit la pulsation d'entrée.

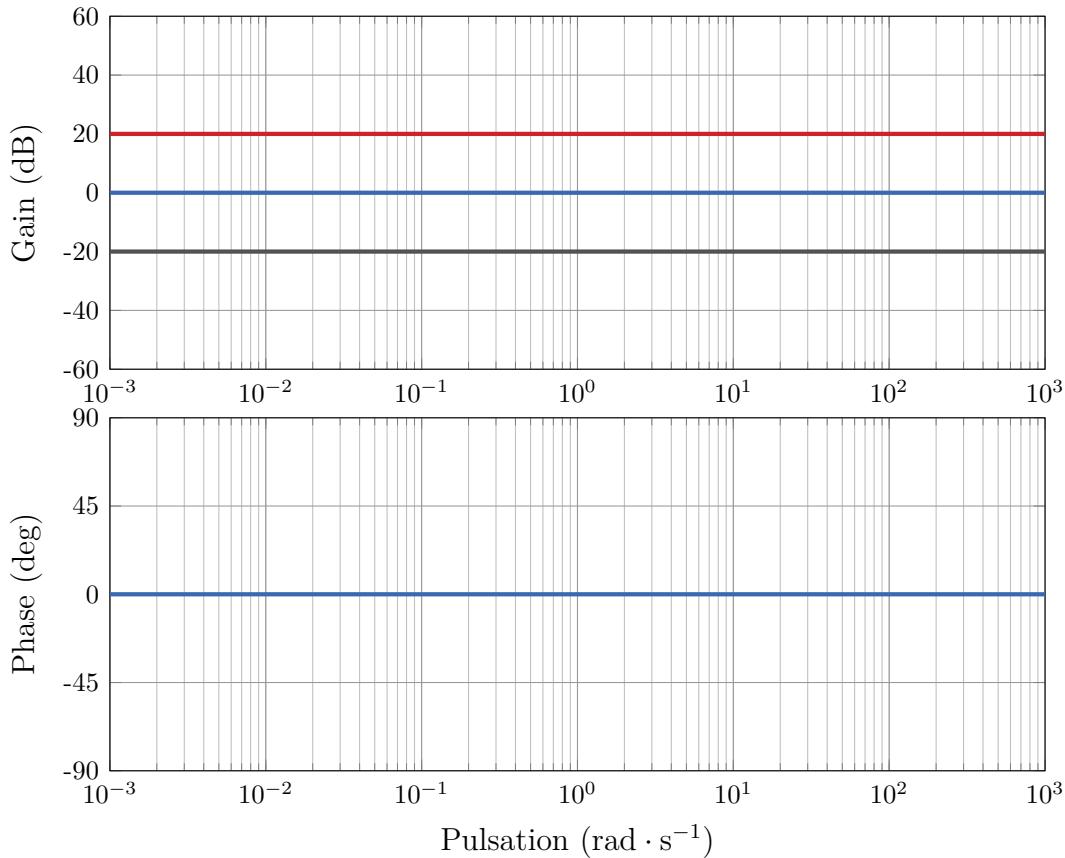


Figure 4.5 – Diagramme de Bode d'un gain pur avec (noir) $K = 0.1$, (bleu) $K = 1$ et (rouge) $K = 10$. Remarquons que la phase reste inchangée lorsque le gain statique K varie et que seul le gain $G_{dB}(\omega)$ est modifié.

4.1.3 Diagramme de Bode d'un intégrateur pur

La fonction de transfert d'un intégrateur pur est de la forme $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$, le gain est donc simplement donné par

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\omega},$$

d'où le gain G_{dB} en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega$$

ce qui correspond à une pente de $-20 \text{ dB} \cdot \text{decade}^{-1}$ (Figure 4.6). La phase s'obtient à partir de l'argument principale du nombre complexe $H(j\omega)$:

$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Un intégrateur pur déphase donc la sortie de -90° quelque soit la pulsation de l'entrée.

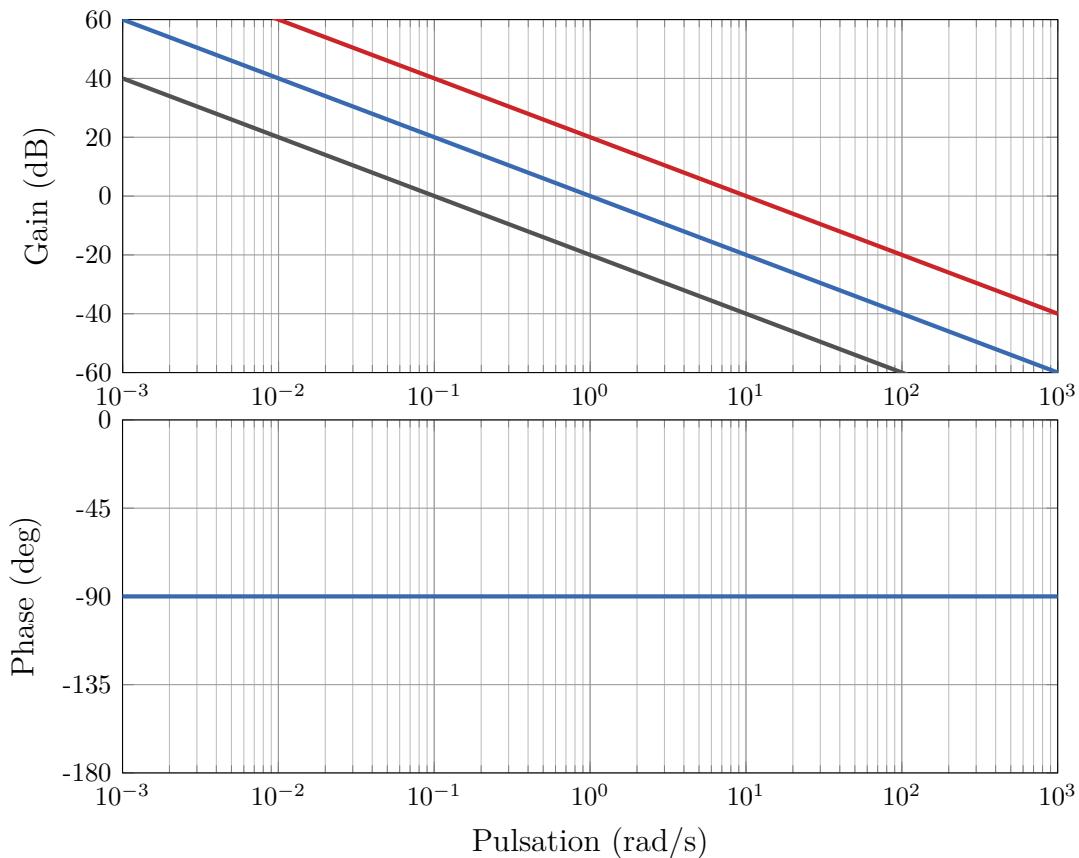


Figure 4.6 – Diagramme de Bode d'un intégrateur pur avec (noir) $K = 0.1$, (bleu) $K = 1$ et (rouge) $K = 10$. Remarquons que le gain s'annule pour $\omega = K$ et que la phase reste inchangée.

4.1.4 Diagramme de Bode d'un déivateur pur

La fonction de transfert d'un déivateur pur est de la forme $H(j\omega) = Kj\omega$, le gain est donc simplement donné par

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = Kj\omega$$

d'où le gain G_{dB} en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \omega$$

ce qui correspond à une pente de $20 \text{ dB} \cdot \text{decade}^{-1}$ (Figure 4.7). La phase s'obtient simplement par l'argument principal de $H(j\omega)$:

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Un déivateur pur déphase la sortie de $+90^\circ$ quelque soit la pulsation d'entrée.

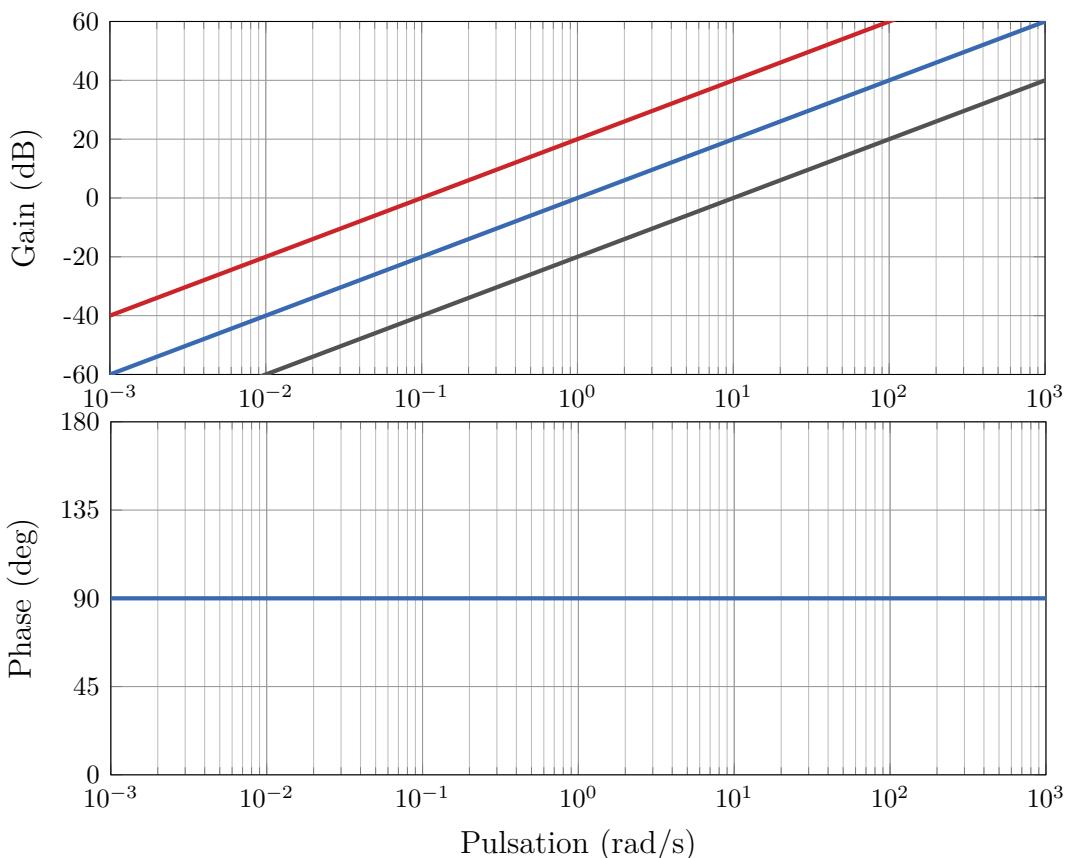


Figure 4.7 – Diagramme de Bode d'un déivateur pur avec (noir) $K = 0.1$, (bleu) $K = 1$ et (rouge) $K = 10$. Remarquons que le gain s'annule pour $\omega = \frac{1}{K}$ et que la phase reste inchangée.

4.1.5 Diagramme de Bode d'un système à retard pur

La fonction de transfert d'un retard pur est de la forme $H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$, le gain est donc simplement donné par

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = 1$$

d'où le gain G_{dB} en décibel :

$$G_{dB}(\omega) = 0 \text{ dB}$$

ce qui correspond à un gain constant (Figure 4.8). La phase s'écrit simplement à partir de l'argument principal de $H(j\omega)$:

$$\phi(\omega) = -\tau\omega$$

Le déphasage d'un retard pur croît linéairement avec la pulsation pour un retard de temps τ donné.

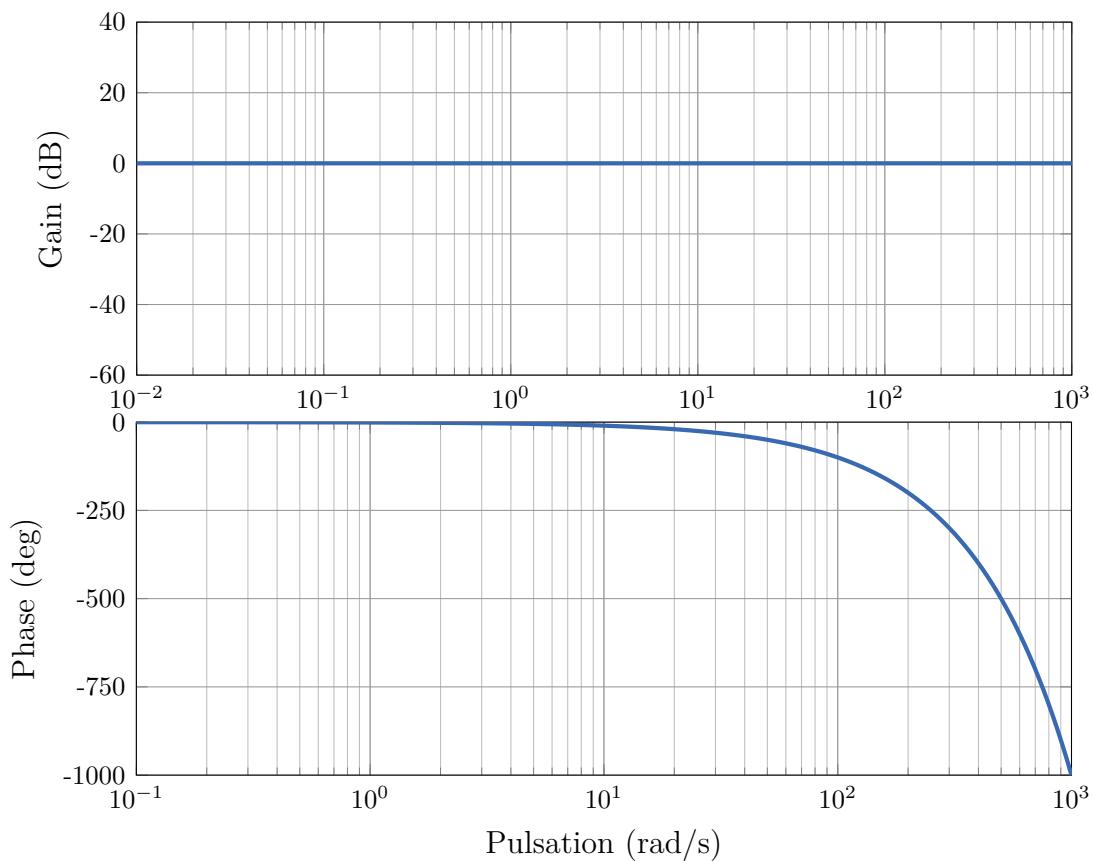


Figure 4.8 – Diagramme de Bode d'un retard pur avec $\tau = 1$. Remarquons que le gain est constant pour toutes pulsations et le déphasage est monotone décroissant en fonction de la pulsation.

4.1.6 Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Un système du premier ordre présente une fonction de transfert de la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} \quad (4.4)$$

Le module de cette fonction de transfert $G(\omega) = |H(j\omega)|$ s'écrit :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

Le gain en dB s'obtient alors par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2\omega^2} \quad (4.5)$$

et la phase est simplement donné par la fonction tangente réciproque :

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\arctan(\tau\omega) \quad (4.6)$$

Ce sont ces deux fonctions de la fréquence que nous traçons sur un diagramme de Bode. Elles sont représentés sur les [figures 4.9 et 4.10](#), pour respectivement différentes valeurs du gain statique K et du temps caractéristique τ .

Il est cependant recommandé de déterminer les asymptotes de ces deux fonctions à basse et haute fréquence. Pour cela, nous introduisons une **fréquence de cassure** $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ qui délimite ces deux domaines. À cette fréquence, le gain en décibel est de $G_{dB}(\omega_c) = 20 \log K - 3$ et la phase $\phi(\omega) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Le gain de -3dB est la valeur approximative de $20 \log \sqrt{2}$, communément utilisée pour définir la **fréquence de coupure**.

À basse fréquence, c'est à dire lorsque $\tau\omega \ll 1$ ou encore $\omega \ll \omega_0$, le gain et la phase se comporte comme,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K \\ \phi(\omega) &\sim 0^\circ. \end{aligned}$$

À haute fréquence, c'est à dire lorsque $\tau\omega \gg 1$ ou encore $\omega \gg \omega_0$, le gain et la phase se comporte comme,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &\sim 20 \log K - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \\ \phi(\omega) &\sim -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La [figure 4.11](#) présente sur un même diagramme de Bode, les courbes réels et les courbes asymptotiques.

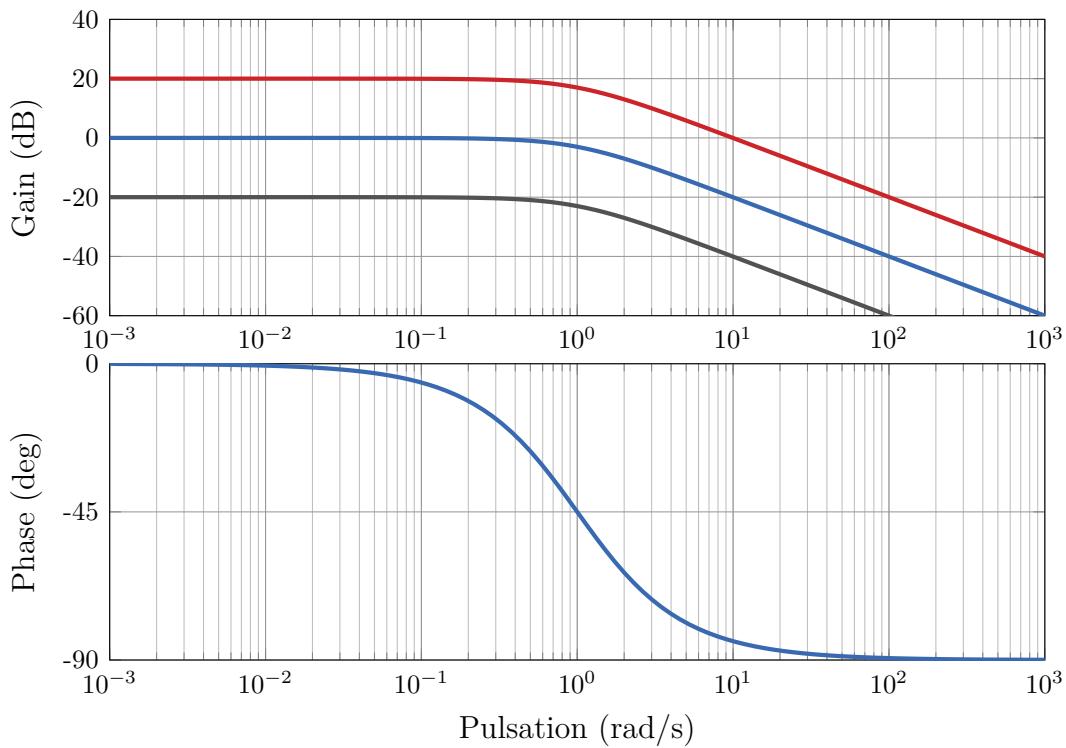


Figure 4.9 – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (Équation (4.4)) avec (noir) $K = 0.1$ (bleu) $K = 1$ et (rouge) $K = 10$. L'effet du gain K est de décaler verticalement la courbe de gain.

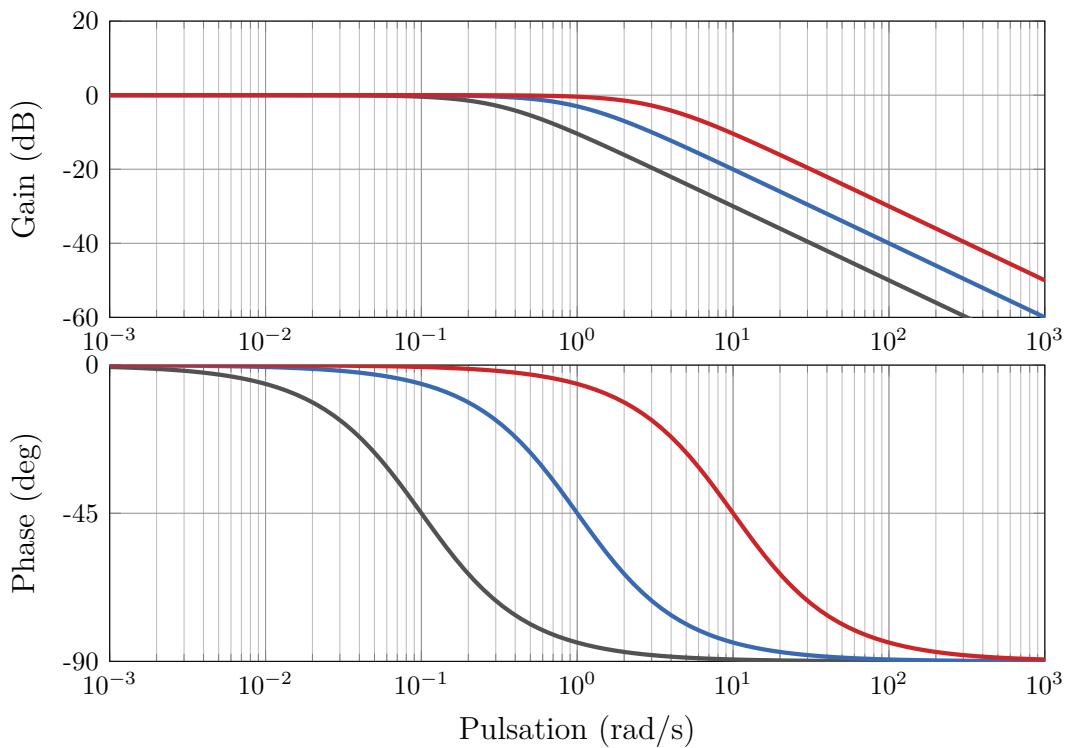


Figure 4.10 – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (Équation (4.4)) avec (noir) $\tau = 10$ (bleu) $\tau = 1$ et (rouge) $\tau = 0.1$. L'effet du temps caractéristique τ est de décaler horizontalement la courbe de phase.

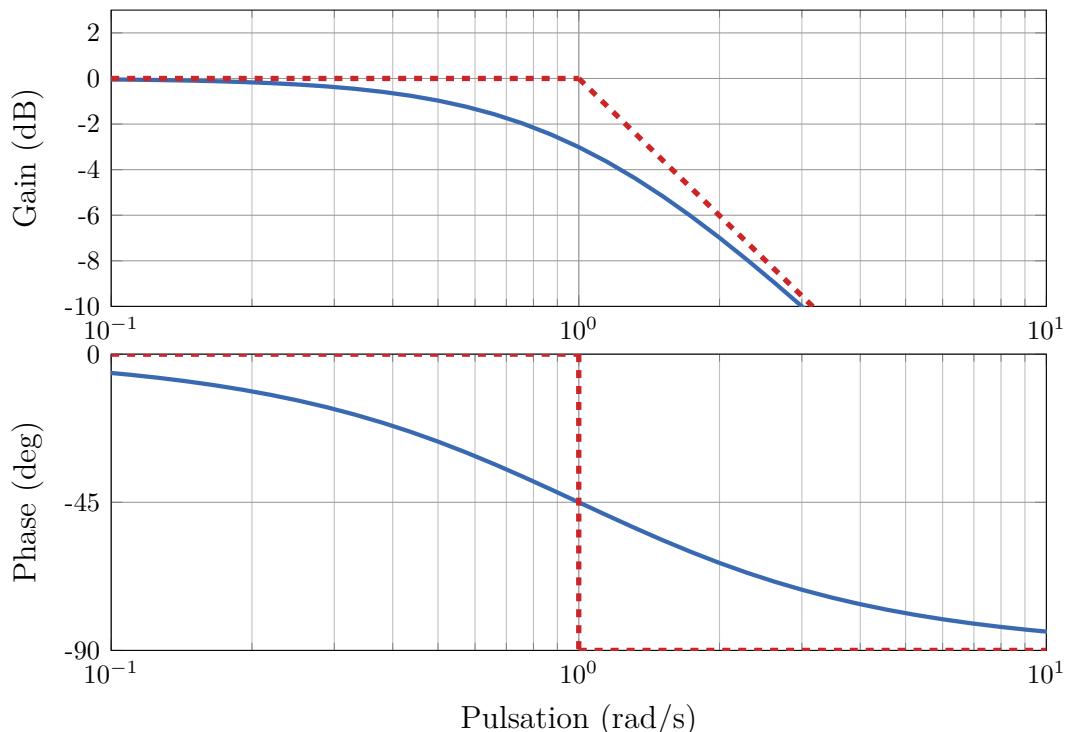


Figure 4.11 – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre ([Équation \(4.4\)](#)) (c.-à-d. $K = 1$, $\tau = 1$ et $\omega_c = 1$) avec (bleu) le diagramme réel et (rouge) le diagramme asymptotique. On vérifie que les valeurs asymptotiques sont de bonnes approximations à basse et haute fréquence. Il est également possible de lire un gain de -3 dB et une phase de -45° à la fréquence de coupure.

4.1.7 Diagramme de Bode de deux systèmes du premier ordre en série

La fonction de transfert globale de deux systèmes du premier ordre en série s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K_1 K_2}{(1 + j\tau_1\omega)(1 + j\tau_2\omega)} \quad (4.7)$$

On utilise la propriété du logarithme pour écrire le gain globale $G_{dB}(\omega)$ comme une somme de gain de deux systèmes du premier ordre, soit

$$G_{dB}(\omega) = G_{dB1}(\omega) + G_{dB2}(\omega)$$

De même pour la phase :

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

En reprenant les équations (4.5) et (4.6) on établit facilement que,

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K_1 K_2 - 20 \log \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2} - 20 \log \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}$$

et

$$\phi(\omega) = -\arctan \tau_1 \omega - \arctan \tau_2 \omega$$

L'étude asymptotique se fait en considérant deux fréquences de coupures $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2}$. Supposons d'abord, sans perte de généralité, que $\omega_{c2} > \omega_{c1}$ et considérons les trois domaines de fréquence ainsi définis selon que $\omega \ll \omega_{c1}$, $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$ ou $\omega \gg \omega_{c2}$

Pour $\omega \ll \omega_{c1}$

$$G_{dB}(\omega) \sim 20 \log K_1 K_2$$

$$\phi(\omega) \sim 0^\circ$$

Pour $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$

$$G_{dB}(\omega) \sim 20 \log K_1 K_2 - 20 \log \frac{\omega}{\omega_{c1} \omega_{c2}}$$

$$\phi(\omega) \sim -90^\circ$$

Pour $\omega \gg \omega_{c2}$

$$G_{dB}(\omega) \sim 20 \log K_1 K_2 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_{c1} \omega_{c2}}$$

$$\phi(\omega) \sim -180^\circ$$

La figure 4.12 présente le diagramme de Bode réel et asymptotique de deux systèmes du premier ordre en cascade. On remarquera que l'approximation asymptotique est suffisante pour décrire le gain de ce genre de système. En marquant la discontinuité dans le graphe de la phase, on distingue plus facilement les différentes zones et les

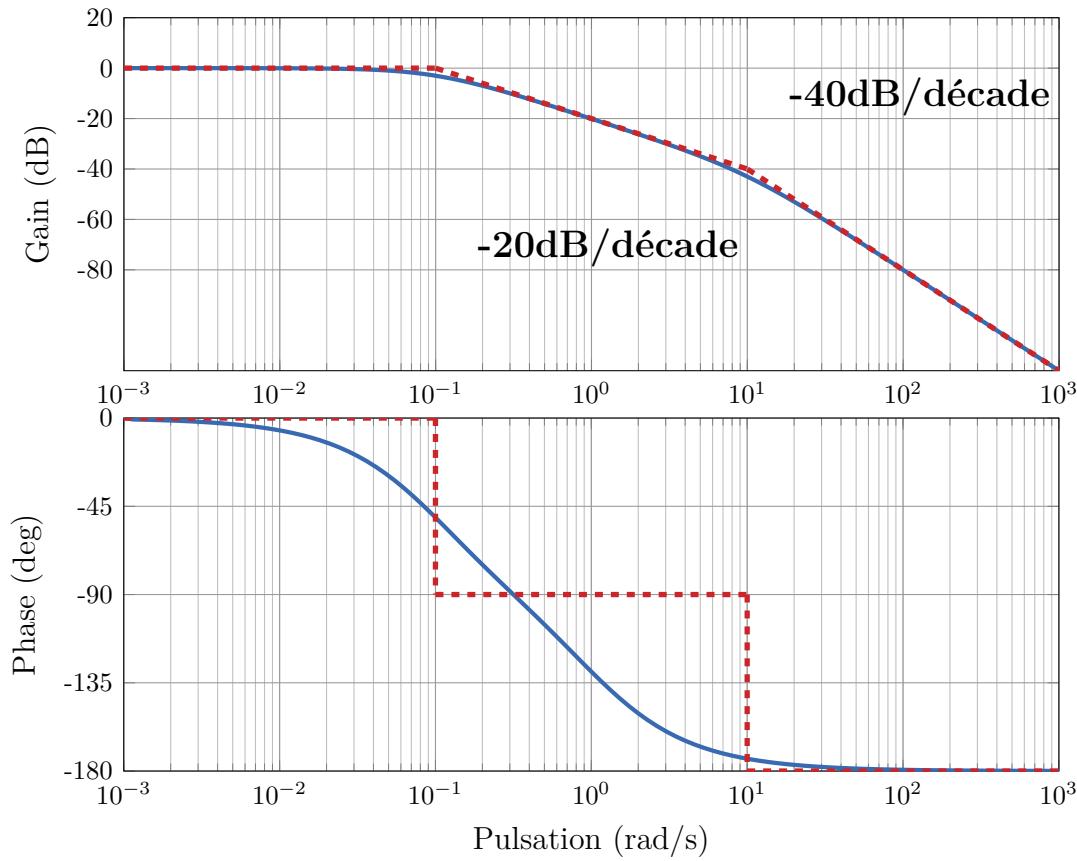


Figure 4.12 – Diagramme de Bode de systèmes du premier ordre en série ([Équation \(4.7\)](#)) avec $\tau_1 = 10$ et $\tau_2 = 0.1$ (bleu) le diagramme réel et (rouge) le diagramme asymptotique.

changements de pente du gain. Pour la phase, il suffit de déterminer sa valeur pour quelques valeurs particulières de la pulsation.

Comme nous l'avons déjà rencontré, l'étude de deux systèmes du premier ordre en série correspond à l'étude d'un système du second ordre en régime apériodique.

4.1.8 Diagramme de Bode d'un système second d'ordre

La fonction de transfert d'un système du second ordre ([Équation \(3.6\)](#)) est donnée par :

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega} \quad (4.8)$$

Le gain s'obtient en calculant le module de ce nombre complexe :

$$G(\omega) = \sqrt{\frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}$$

Le gain en décibel s'écrit alors :

$$G_{db}(\omega) = 20 \log K\omega_0^2 - 20 \log \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}$$

et la phase par l'argument principale :

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) & \text{si } \omega^2 < \omega_0^2 \\ -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) + \pi & \text{si } \omega^2 > \omega_0^2 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } \omega^2 = \omega_0^2 \end{cases}$$

Comme précédemment, il est recommandé d'étudier les valeurs asymptotiques du gain et de la phase.

Pour $\omega \ll \omega_0$

$$G_{dB}(\omega) \sim 20 \log K$$

$$\phi(\omega) \sim 0^\circ$$

Pour $\omega \gg \omega_0$

$$G_{dB}(\omega) \sim 20 \log K \omega_0^2 - 40 \log \omega$$

$$\phi(\omega) \sim -180^\circ$$

La figure 4.13 présente le diagramme de Bode associé à ces deux fonctions pour $\xi = 1$, ainsi que le diagramme de Bode asymptotique. La figure 4.14 présente l'effet du taux d'amortissement ξ sur le diagramme de Bode. Il est possible d'observer une augmentation de la valeur maximum du gain proche de la fréquence de coupure. C'est ce phénomène de résonance que nous allons discuter dans la prochaine partie.

Phénomène de résonance

Le gain d'un système du second ordre présente un maximum pour certaines valeurs du taux d'amortissement ξ . Nous allons établir en détail les différentes grandeurs caractéristiques de ce phénomène de résonance. L'approche suivante s'inspire en partie de [14].

Partons du gain naturel $G(\omega)$ d'un système du second ordre pour lequel,

$$G(\omega) = \frac{K\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}$$

on pose $X = \omega^2$, et on porte le gain au carré pour éliminer la racine carrée. On obtient alors,

$$(G(\omega))^2 = \frac{K^2\omega_0^4}{(\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X}$$

Le numérateur étant constant, le gain présentera un maximum si le dénominateur présente un minimum. Notons $D(X)$, ce dénominateur qui s'écrit :

$$D(X) = (\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X$$

Calculons, la dérivée par rapport à X ,

$$\frac{dD(X)}{dX} = -2(\omega_0^2 - X) + (2\xi\omega_0)^2$$

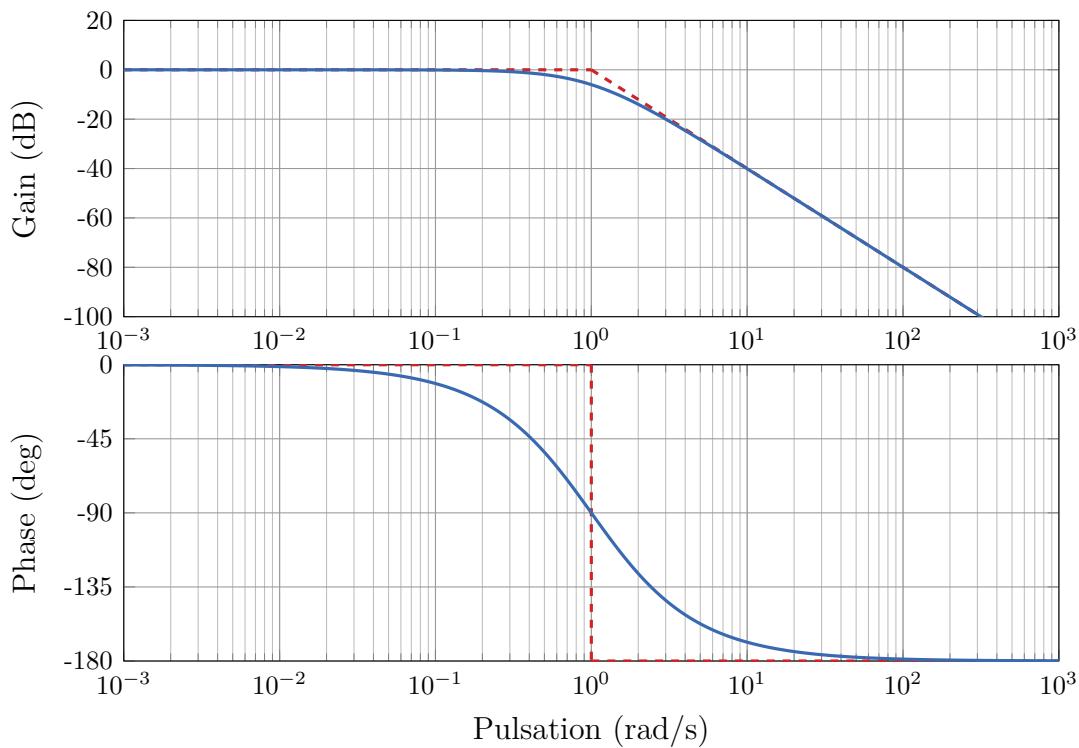


Figure 4.13 – Diagramme de Bode d’une fonction de transfert second ordre (Équation (4.8)) avec $K = 1$, $\omega_0 = 1$ et $\xi = 1$

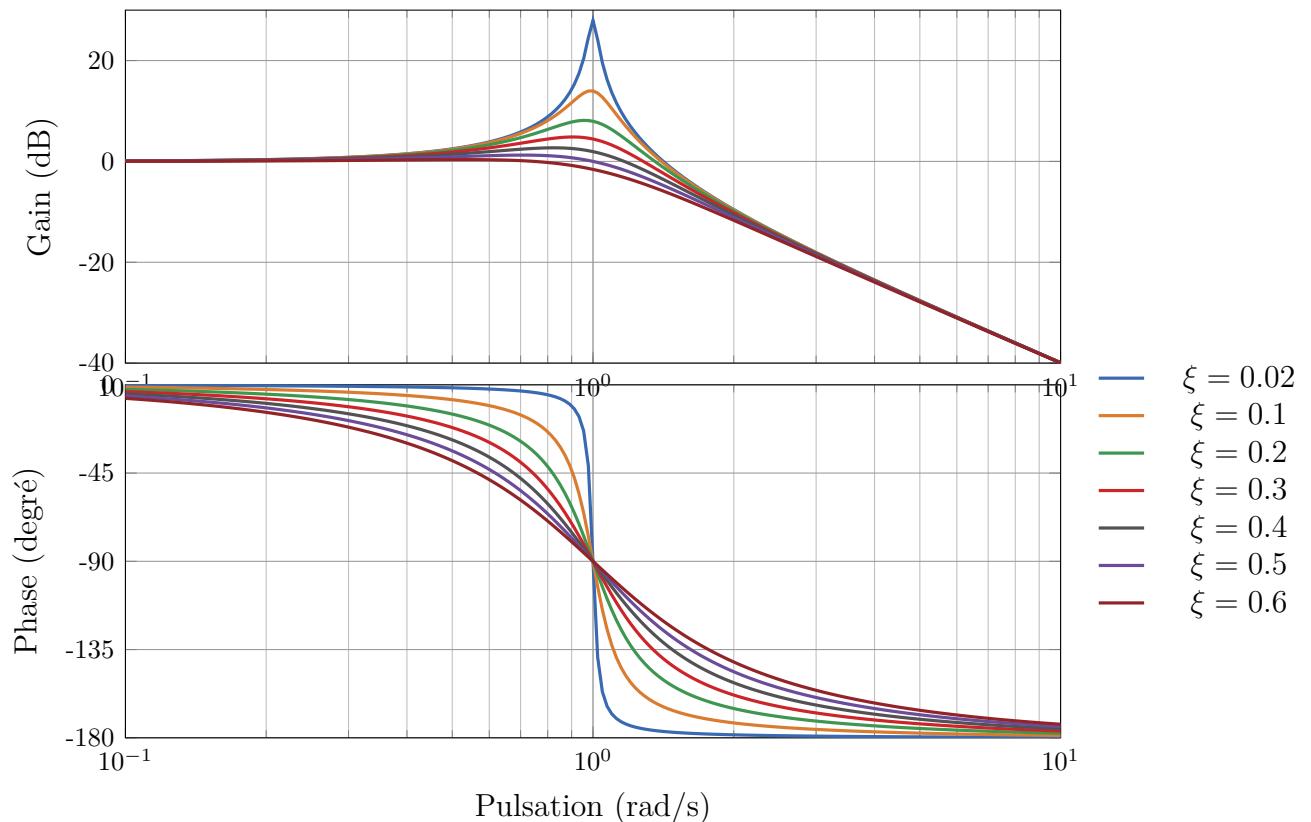


Figure 4.14 – Diagramme de Bode d’une fonction de transfert du second ordre (Équation (4.8)) pour différentes valeurs de ξ avec $K = 1$ et $\omega_0 = 1$

qui s'annule pour

$$X = X_0 = \omega_0^2(1 - 2\xi^2).$$

La dérivée seconde étant positive, le dénominateur $D(X)$ présente un minimum en X_0 . Puisque $X > 0$ et $\omega_0^2 > 0$ alors la condition sur le taux d'amortissement est

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4.9)$$

La **pulsation de résonance** est donc définie par :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}. \quad (4.10)$$

La valeur du gain maximal est obtenue à la pulsation de résonance,

$$G(\omega_r) = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}},$$

ce qui permet de définir le **facteur de surtension** Q qui est le rapport entre le maximum atteint par le gain et la valeur de l'asymptote à basse fréquence, d'où

$$Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.11)$$

D'après ces dernières expressions, on observe qu'à la limite $\xi \rightarrow 0$, la pulsation de résonance ω_r tend vers ω_0 , et le gain maximal tend lui vers l'infini. La pulsation ω_0 est donc la valeur pour lequel le phénomène de résonance est le plus intense. La [figure 4.15](#) présente la position du gain maximum à la pulsation de résonance pour différentes valeurs du taux d'amortissement.

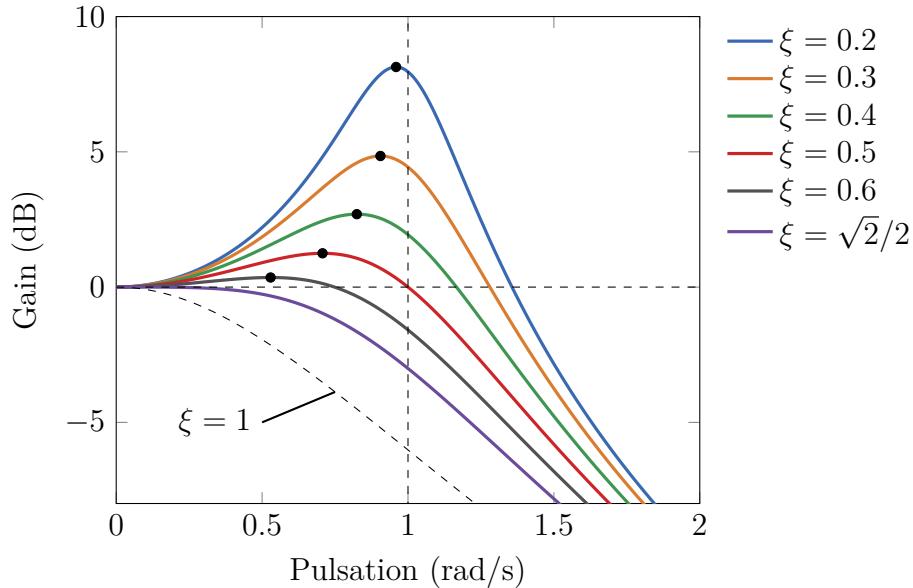


Figure 4.15 – Évolution du gain en décibel en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du taux d'amortissement du régime pseudo-périodique. Le gain maximal à la pulsation de résonance ω_r est représenté par une pastille noir sur chacune des courbes pour $\xi < \sqrt{2}/2$. On remarquera l'utilisation exceptionnelle d'une échelle linéaire pour les pulsations.

4.1.9 Diagramme de Bode d'un système d'ordre quelconque

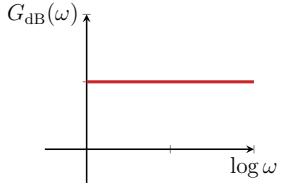
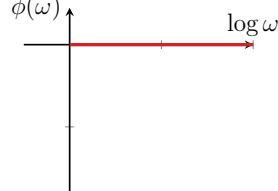
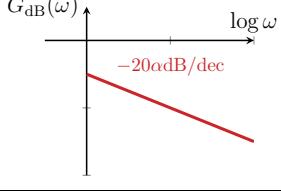
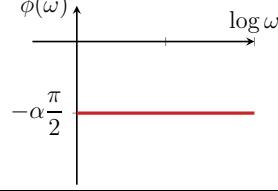
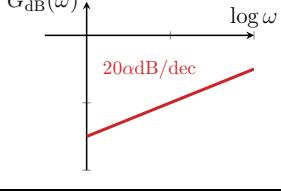
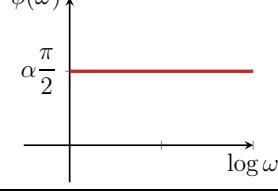
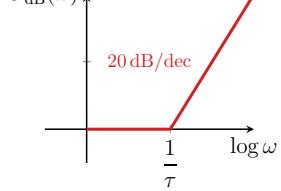
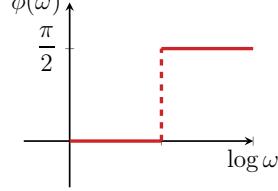
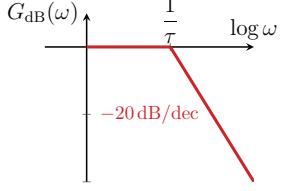
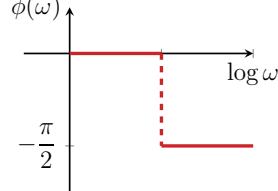
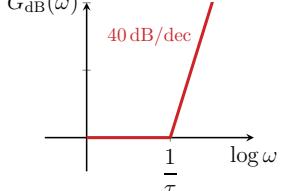
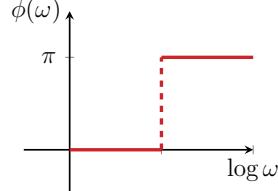
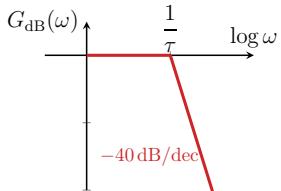
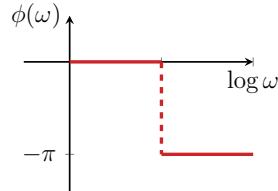
Dans le cas d'un système d'ordre supérieur à deux, nous allons utiliser les propriétés d'additivité des diagrammes de Bode, en décomposant la fonction de transfert en différents modèles simples.

Il est notamment toujours possible d'écrire une fonction de transfert ([chapitre 3](#)) sous la forme d'un produit de gains purs, d'intégrateurs, de déivateurs, de systèmes du premier et du second ordre :

$$H(p) = K_0 p^\alpha \prod_i (1 + \tau_i p)^{n_i} \prod_j (1 + 2\xi_j \tau_j p + \tau_j^2 p^2)^{n_j} \quad (4.12)$$

où les exposants α , n_i et n_j peuvent être positifs et négatifs.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous l'effet sur le gain et la phase d'un diagramme de Bode pour chacun de ces éléments selon le signe des paramètres α , n_i , et n_j .

Modèle	Effet sur le gain	Effet sur la phase
Gain pur K		
$\frac{1}{p^\alpha}$		
p^α		
$1 + \tau p$		
$\frac{1}{1 + \tau p}$		
$1 + 2\xi\tau p + \tau^2 p^2$		
$\frac{1}{1 + 2\xi\tau p + \tau^2 p^2}$		

Exemple

Soit la fonction de transfert $H(p)$ telle que

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)} \quad (4.13)$$

La première étape consiste à ordonner les temps caractéristiques par ordre décroissant cela nous permettra d'obtenir les pulsations propres par ordre croissant. Ensuite, il faut identifier les différents modèles. Pour cet exemple, nous identifions :

- un gain pur $K_0 = 100$
- un second ordre (ou un premier ordre double) au numérateur de temps caractéristique $\tau = 1$
- trois premier ordre au dénominateur de temps caractéristique $\tau = \{0.01, 10, 100\}$

On adopte la notation suivante : $\tau_1 = 100$, $\tau_2 = 10$, $\tau_3 = 1$ et $\tau_4 = 0.01$, avec $\omega_i = 1/\tau_i$, on obtient alors : $\omega_1 = 0.01$, $\omega_2 = 0.1$, $\omega_3 = 1$ et $\omega_4 = 100$.

Nous regroupons dans le tableau ci-dessous l'effet sur le gain et sur la phase pour chaque domaines de pulsations définis par les différentes pulsations caractéristiques.

	$\omega \ll \omega_1$	$\omega_1 < \omega < \omega_2$	$\omega_2 < \omega < \omega_3$	$\omega_3 < \omega < \omega_4$	$\omega \gg \omega_4$
$G_{dB}(\omega)$ (pente)	0(40dB)	-20dB/décade	-20dB/décade	+40dB/décade	-20dB/décade
$\phi(\omega)$	0°	-90°	-90°	$+180^\circ$	-90°
$G_{dB}(\omega)$ total	0(40dB)	-20dB/décade	-40dB/décade	0(-20dB)	-20dB/décade
$\phi(\omega)$ total	0°	-90°	-180°	0°	-90°

Il est également possible de déterminer la forme analytique du gain et de la phase.

$$G_{dB}(\omega) = 40 + 20 \log(1 + \tau_3^2 \omega^2) - 10 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_2^2 \omega^2)(1 + \tau_4^2 \omega^2) \quad (4.14)$$

et

$$\phi(\omega) = 2 \arctan \tau_3 \omega - \arctan \tau_1 \omega - \arctan \tau_2 \omega - \arctan \tau_4 \omega \quad (4.15)$$

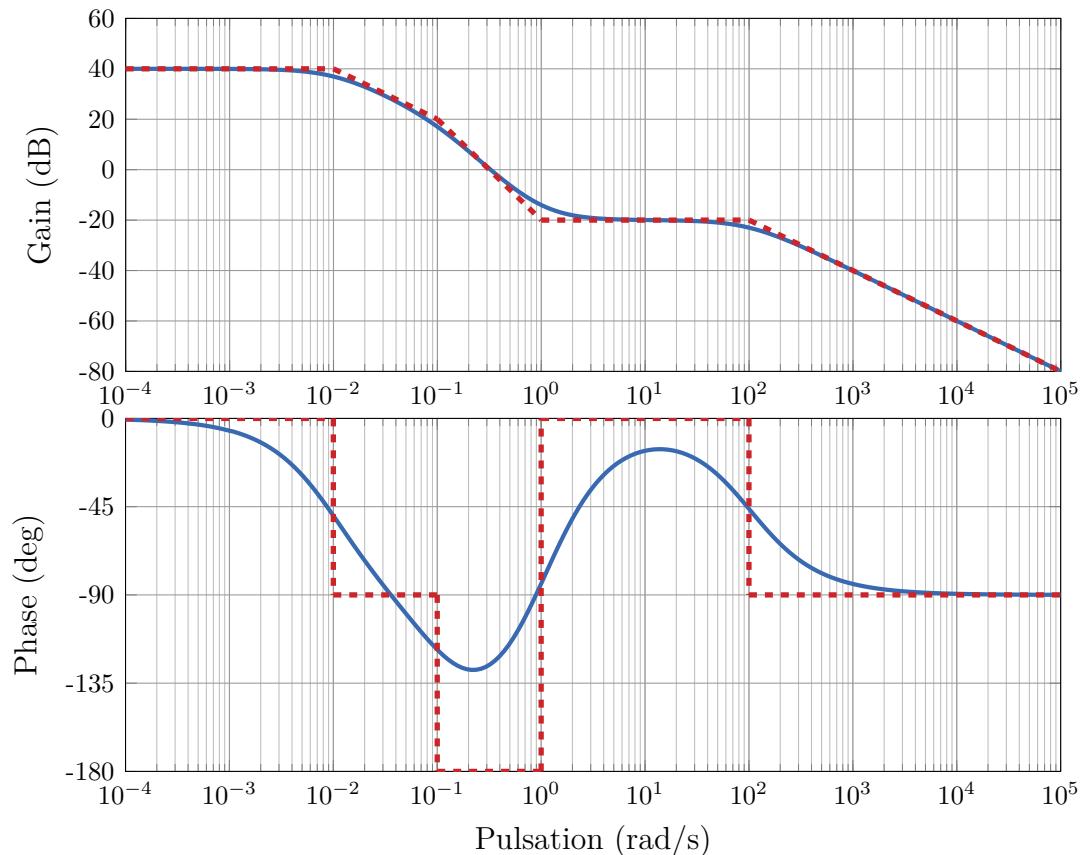


Figure 4.16 – Diagramme de Bode du système d'ordre quelconque de l'équation (4.13) (bleu) diagramme de Bode réel et (rouge) diagramme de Bode asymptotique.

4.2 Diagrammes de Nyquist

4.2.1 Méthodologie générale

Pour chacun des modèles usuels, nous appliquerons la procédure suivante :

- Définir la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ du modèle,
- Établir la partie réelle et imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
- Tracer le lieu de Nyquist, c'est à dire $\text{Re}[H(j\omega)]$ et $\text{Im}[H(j\omega)]$ pour différentes valeurs de ω de 0 à $+\infty$.
- Déterminer les valeurs du déphasage pour ω tendant vers 0 et $+\infty$

Dans chacun des modèles, nous reproduirons le lieu de Nyquist complet avec le domaine des pulsations négatives. Dans la pratique, il suffit de tracer le symétrique par rapport à l'axe des réels et d'inverser le sens de la flèche pour obtenir le sens de la pulsation de $-\infty \rightarrow 0$. En toute rigueur, le lieu de Nyquist complet est l'image du contour de Nyquist (c.f [figure 4.17](#)), de la fraction rationnelle $H(p)$. Le lieu de Nyquist complet nous sera utile lorsque nous étudierons la stabilité des systèmes asservis au [chapitre 7](#).

4.2.2 Diagramme de Nyquist d'un gain pur

Le diagramme de Nyquist d'un gain pur est trivial. En effet le nombre complexe $H(j\omega)$ étant égal à une constante réel K , le diagramme de Nyquist ce limite à un point sur l'axe des réels quelque soit la valeur de ω . Ce qui est en accord avec le fait qu'un gain pur présente un déphasage nul.

$$\text{Re}[H(j\omega)] = K$$

$$\text{Im}[H(j\omega)] = 0$$

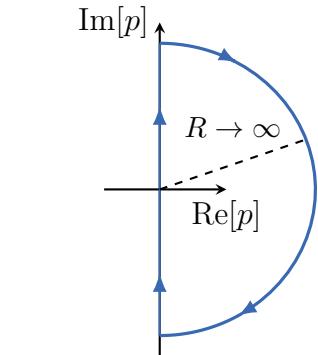


FIGURE 4.17 : Contour de Nyquist : le lieu de Nyquist complet est la courbe paramétrée des parties réelle et imaginaire de $H(p)$ lorsque p parcourt ce contour.

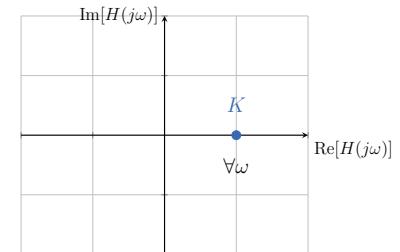


FIGURE 4.18 : Diagramme de Nyquist d'un gain pur. Le nombre complexe $H(j\omega)$ est représenté par un point sur l'axe des réels à la valeur K .

4.2.3 Diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur

Le diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur est également trivial, puisque le nombre complexe $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$ est un nombre imaginaire pur, qui dépend cependant directement de la pulsation ω .

$$\text{Re}[H(j\omega)] = 0$$

$$\text{Im}[H(j\omega)] = \frac{-K}{\omega}$$

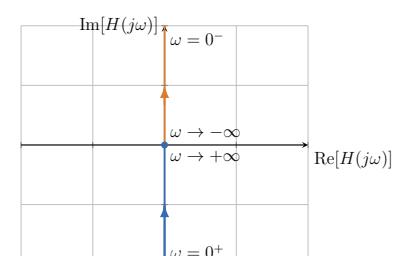


FIGURE 4.19 : Diagramme de Nyquist d'un intégrateur pur. Le lieu de Nyquist est représenté par une demi droite sur l'axe des nombres imaginaires purs négatifs.

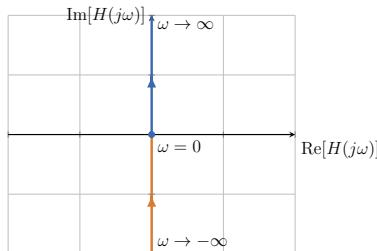


FIGURE 4.20 : Diagramme de Nyquist d'un déivateur pur. Le lieu de Nyquist est représenté par une demi droite sur l'axe des nombres imaginaires purs positifs.

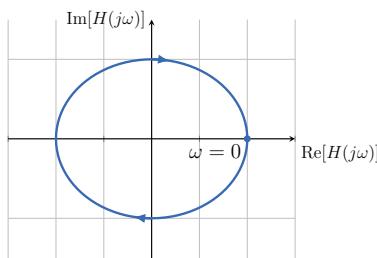


FIGURE 4.21 : Diagramme de Nyquist d'un retard pur. Le lieu de Nyquist est représenté par le cercle unité dans le plan complexe.

4.2.4 Diagramme de Nyquist d'un déivateur pur

Le diagramme de Nyquist d'un déivateur pur est également représentatif d'un nombre complexe $H(j\omega) = Kj\omega$ imaginaire pur. Les parties réelles et imaginaire de ce nombre complexe sont :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= 0 \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= K\omega\end{aligned}$$

On remarquera que le module le module $|H(j\omega)|$ ne s'annule pas lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Il est donc intrinsèquement instable.

4.2.5 Diagramme de Nyquist d'un retard pur

La fonction de transfert d'un retard pur s'écrit :

$$H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

Les parties réelles et imaginaires sont simplement donnés par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \cos \tau\omega \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= -\sin \tau\omega\end{aligned}$$

Ces coordonnées dans le plan complexe sont celles du cercle unité centré sur l'origine. Le lieu de transfert (c.a.d $\omega \rightarrow \infty$) est la rotation infinie sur ce cercle. La « vitesse angulaire » dépend de τ . On remarquera cependant que ce modèle est fondamentalement **instable** puisque le module $|H(j\omega)|$ ne s'annule pas lorsque $\omega \rightarrow \infty$, de ce fait nous le trouverons jamais seul.

4.2.6 Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

La fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

Les parties réelle et imaginaire de cette fonction de transfert sont données par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}\end{aligned}$$

Nous avons regroupé dans le tableau 4.2 quelques valeurs particulières de $\operatorname{Re}[H(j\omega)]$ et $\operatorname{Im}[H(j\omega)]$ selon ω pour un système du premier ordre.

$\omega = 0$	$\omega \rightarrow \infty$	$\omega = \frac{1}{\tau}$
$\operatorname{Re}[H(j\omega)]$	K	0
$\operatorname{Im}[H(j\omega)]$	0	$-K/2$

TABLEAU 4.2 : Quelques valeurs particulières de $\operatorname{Re}[H(j\omega)]$ et $\operatorname{Im}[H(j\omega)]$ selon ω pour un système du premier ordre.

Le lieu complet de Nyquist d'un système du premier ordre à la forme d'un cercle, nous allons établir ses caractéristiques [23]. Posons tout d'abord,

$$X = \operatorname{Re}[H(j\omega)] = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2}$$

on peut écrire,

$$\tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} - 1$$

En posant maintenant,

$$Y = \operatorname{Im}[H(j\omega)] = \frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} = -\tau\omega X$$

on obtient une relation entre Y et X :

$$Y^2 = \left(\frac{K}{X} - 1\right) X^2$$

on reconnaît alors l'équation d'un cercle de centre $(K/2, 0)$ et de rayon $K/2$

$$\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

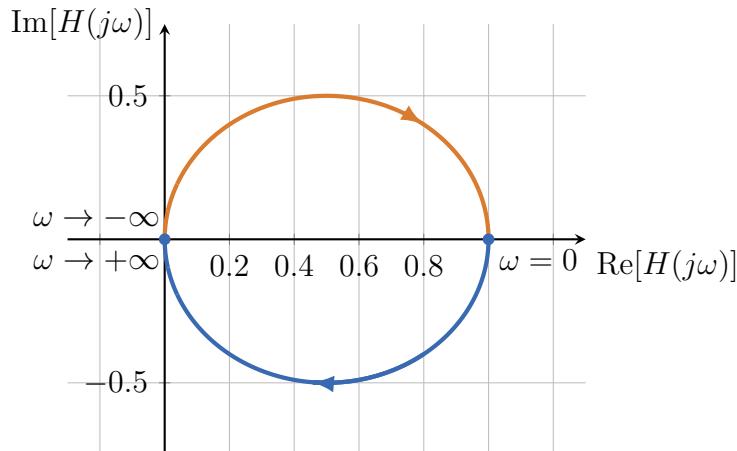


Figure 4.22 – Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre (avec $K = 1, \tau = 1$). Le lieu de Nyquist est représenté par un demi cercle dans le plan des nombres imaginaires négatifs. Le lieu de Nyquist complet correspond à un cercle de rayon $K/2$ et de centre $(K/2, 0)$

4.2.7 Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre

La fonction de transfert d'un système du second ordre s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega}$$

Les parties réel et imaginaire de cette fonction de transfert sont données par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= \frac{-2\xi\omega_0^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}\end{aligned}$$

Les figures figure 4.23 présentent le tracé des lieux de Nyquist pour deux valeurs de ξ . On observe que ces lieux ont la forme de cardioïde. Pour des valeurs de $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, on observe un renflement, sur la partie droite du lieu de Nyquist, dû à l'augmentation du module $|H(j\omega)|$ (c.-à-d. du gain) associée au phénomène de résonance.

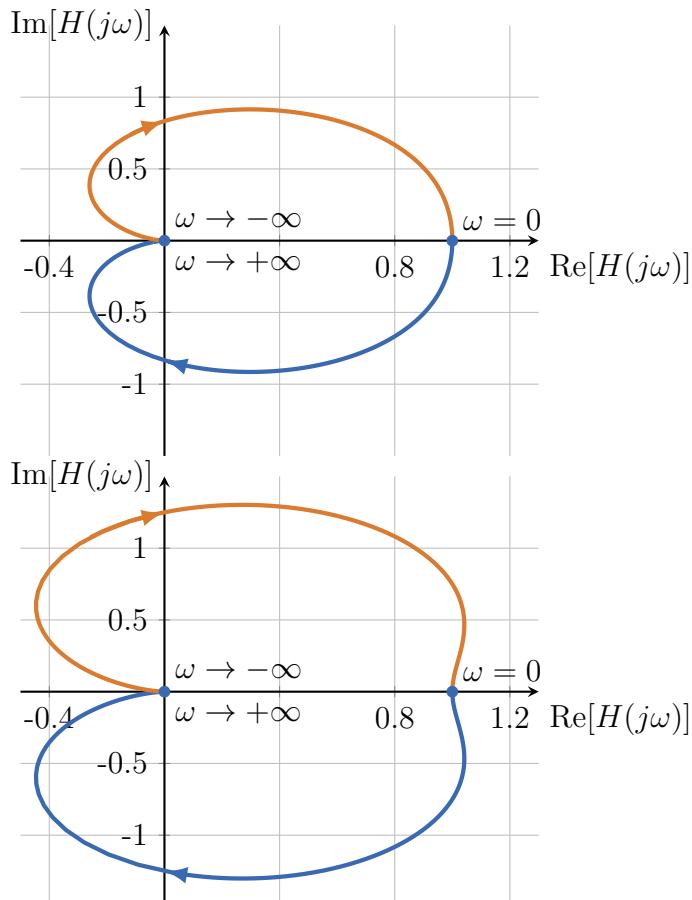


Figure 4.23 – Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre (avec $K = 1, \omega_0 = 1$ et (haut) $\xi = 0.6$ (bas) $\xi = 0.4$). Le lieu de Nyquist est représenté par une demi cardioïde dans le plan des nombres imaginaires négatifs.

4.2.8 Effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist

Nous allons ici étudier l'effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre. La fonction de transfert $H_R(j\omega)$ d'un retard est donnée par la relation :

$$H_R(j\omega) = e^{-j\tau_1\omega} = \cos \tau_1\omega - j \sin \tau_1\omega,$$

avec τ_1 le retard. La fonction de transfert modifié d'un système du premier ordre est donnée par

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} H_R(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} (\cos \tau\omega - j \sin \tau\omega).$$

Les parties réels et imaginaire de la fonction de transfert sont :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[H(j\omega)] &= \frac{K (\cos \tau_1\omega - \tau\omega \sin \tau_1\omega)}{1 + \tau^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}[H(j\omega)] &= \frac{-K (\tau\omega \cos \tau_1\omega + \sin \tau_1\omega)}{1 + \tau^2\omega^2}\end{aligned}$$

Pour des valeurs de $\tau_1 > \tau$ (c'est à dire que le temps caractéristique du premier ordre est affecté par le retard), on observe que le demi-cercle attendu pour le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre devient une spirale qui convergent vers 0.

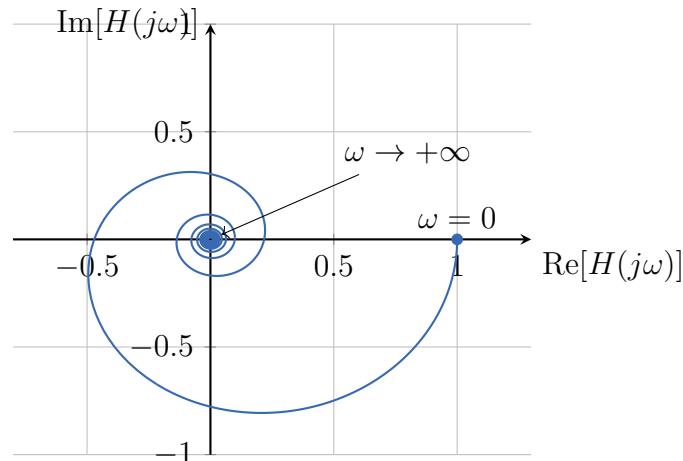


Figure 4.24 – Effet d'un retard sur le diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre. Avec $K = 1$, $\tau = 1$ et $\tau_1 = 2$. Le lieu de Nyquist est représenté par une spirale.

4.3 Diagrammes de Black-Nichols

4.3.1 Méthodologie générale

Pour chacun des modèles usuels, nous appliquerons la procédure suivante :

- Définir la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ du modèle,
- Établir le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ et la phase $\phi(\omega)$ à partir respectivement du module et de l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$.
- Tracer le lieu de Black, c'est à dire $G_{dB}(\omega)$ en ordonnées et $\phi(\omega)$ en abscisse pour différentes valeurs de ω de 0 à $+\infty$.

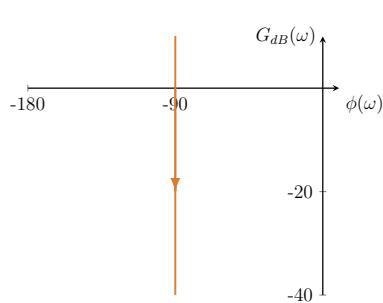


FIGURE 4.25 : Diagramme de Black d'un intégrateur pur. Le lieu de Black est représenté par une droite d'abscisse -90° .

4.3.2 Diagrammes de Black d'un intégrateur pur

La fonction de transfert complexe d'un intégrateur pur est simplement donnée par

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

Le gain en décibel et la phase sont donnés par :

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &= 20 \log K - 20 \log \omega \\ \phi(\omega) &= -90^\circ \end{aligned}$$

La figure 4.25 ci-contre représente le diagramme de Black d'un intégrateur pur. On vérifie, qu'un intégrateur présente une contribution de -90° à toutes pulsations et que le gain diminue lorsque la pulsation augmente. Contrairement au diagramme de Bode, l'effet du gain n'est pas explicite sur le lieu de Black. Cependant pour déterminer K il suffit de connaître la pulsation qui donne un gain de 0 dB

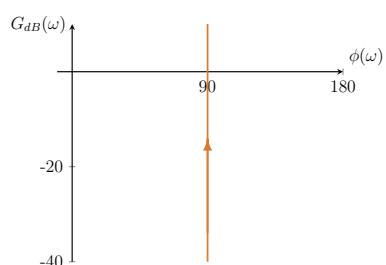


FIGURE 4.26 : Diagramme de Black d'un déivateur pur. Le lieu de Black est représenté par une droite d'abscisse $+90^\circ$.

4.3.3 Diagrammes de Black d'un déivateur pur

La fonction de transfert complexe d'un déivateur pur est simplement donnée par

$$H(j\omega) = K j\omega$$

Le gain en décibel et la phase sont donnés par :

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &= 20 \log K + 20 \log \omega \\ \phi(\omega) &= 90^\circ \end{aligned}$$

La figure 4.26 présente le diagramme de Black d'un déivateur pur. On vérifie qu'un déivateur présente une phase de 90° pour toutes pulsations et que gain diminue avec l'augmentation de la pulsation.

Le gain s'annule (en dB) pour $\omega = \frac{1}{K}$.

4.3.4 Diagrammes de Black d'un premier ordre

La fonction de transfert complexe d'un premier ordre est simplement donnée par :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

Le gain en décibel et la phase sont donnés par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 10 \log (1 + \tau^2 \omega^2)$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$

La figure 4.27 présente le diagramme de Black d'un premier ordre.

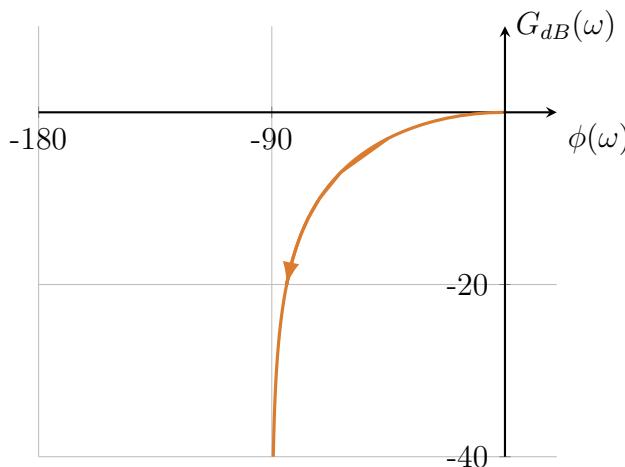


Figure 4.27 – Diagramme de Black d'un système du premier ordre.

4.3.5 Diagrammes de Black d'un second ordre

La fonction de transfert complexe d'un second ordre est simplement donnée par :

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_0\omega}$$

Le gain en décibel et la phase sont donnés par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K \omega_0^2 - 10 \log ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2)$$

$$\phi(\omega) = -\arctan \left(\frac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

La figure 4.28 présente le diagramme de Black d'un second ordre.

5 Etude du transitoire de la réponse harmonique

L'objectif principale de ce chapitre était de présenter le régime permanent de la réponse harmonique, c'est pourquoi nous avons délibérément occulté la description du régime transitoire. Nous allons voir comment prendre en compte le transitoire dans une étude analytique dans le cas particulier d'un système du premier ordre.

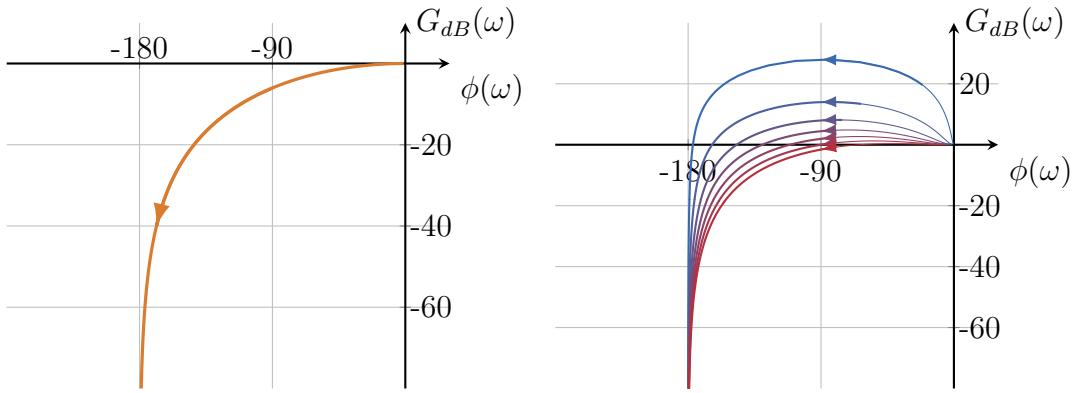


Figure 4.28 – Diagramme de Black d'un système du second ordre (à gauche) pour $\xi = 1$ (à droite) pour différentes valeurs de $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (phénomène de résonance).

5.1 Exemple d'un système du premier ordre

Soit un système du premier ordre $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ soumis à une entrée de la forme $e(t) = E_0 \sin \omega t \cdot u(t)$. La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit alors :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Il est possible de décomposer en éléments simples $S(p)$ sous la forme

$$S(p) = \frac{A}{1 + \tau p} + \frac{B}{p + j\omega} + \frac{C}{p - j\omega}$$

où les coefficients s'obtiennent par évaluation :

$$\begin{aligned} A &= (1 + \tau p)S(p) \Big|_{p=-\frac{1}{\tau}} = \frac{KE_0 \omega}{p^2 + \omega^2} \Big|_{p=-\frac{1}{\tau}} = \frac{KE_0 \tau^2 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \\ B &= (p - j\omega)S(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{E_0 \omega}{p + j\omega} H(p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{E_0}{2j} H(j\omega) \\ C &= (p + j\omega)S(p) \Big|_{p=-j\omega} = \frac{E_0 \omega}{p - j\omega} H(p) \Big|_{p=-j\omega} = -\frac{E_0}{2j} H(-j\omega) \end{aligned}$$

les nombres complexes $H(j\omega)$ et $H(-j\omega)$ pouvant s'écrire $|H(j\omega)|e^{j\phi}$ et $|H(j\omega)|e^{-j\phi}$, on écrit :

$$\begin{aligned} B &= \frac{KE_0}{2j\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} e^{j\phi} \\ C &= \frac{KE_0}{2j\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} e^{-j\phi} \end{aligned}$$

La transformée inverse de $S(p)$ donne alors :

$$s(t) = KE_0 \left(\frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{\sin \omega t + \phi}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \right)$$

Le second terme correspond au régime permanent de la réponse harmonique, le premier, composé d'une exponentielle décroissante, correspond au régime transitoire. Comme attendu le régime transitoire a une durée corrélée au temps caractéristique du système du premier ordre τ .

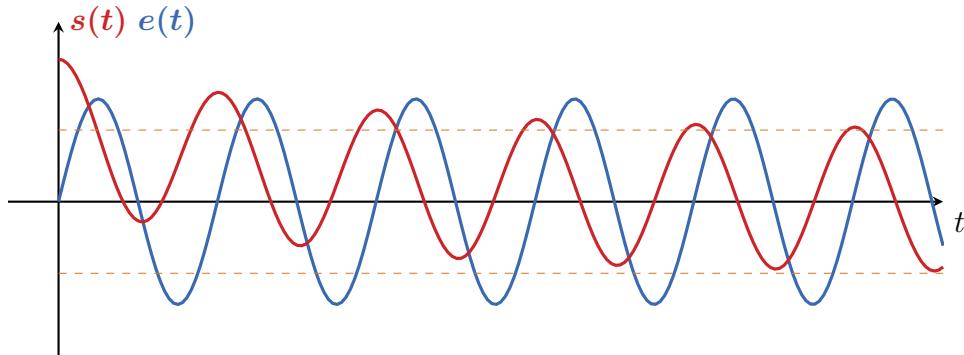


Figure 4.29 – Exemple du transitoire de la réponse harmonique d'un système du premier ordre.(en bleu) La sollicitation (en rouge) la réponse.

6 Exercices du chapitre

Exercice 1 : Représentation graphique d'un signal harmonique

Soit un système linéaire du premier ordre régit par la fonction de transfert $H(p)$ telle que :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2p}$$

On considère la réponse harmonique à un signal d'entrée $e(t) = E_0 \sin \omega t$ d'amplitude E_0 et de pulsation ω .

On rappel (c.f annexe) que la réponse harmonique en régime permanent à une telle sollicitation est de la forme :

$$s(t) = E_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

où $|H(j\omega)|$ et $\phi(\omega)$ sont respectivement le module et l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$.

Q1. Déterminer le gain naturel $G(\omega) = |H(j\omega)|$ et la phase $\phi(\omega)$ à partir de la fonction de transfert.

Q2. Tracer graphiquement la sollicitation $e(t)$ pour $E_0 = 1$, $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q3. Déterminer numériquement le gain et le déphasage pour $\omega = 0.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q4. Tracer graphiquement la réponse harmonique avec la sollicitation pour $\omega = 0.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On choisira judicieusement l'échelle temporelle pour représenter une période complète.

Exercice 2 : Diagramme de Bode

Tracer les diagrammes asymptotiques et réels de Bode des systèmes définis par les fonctions de transfert suivantes :

Q1.

$$H(p) = \frac{1}{10p + 1}$$

Q2.

$$H(p) = \frac{100}{(10p + 1)(100p + 1)}$$

Q3.

$$H(p) = \frac{100(p + 1)^2}{(100p + 1)(10p + 1)(0.01p + 1)}$$

Q4.

$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

Q5.

$$H(p) = \frac{10(10p + 1)}{(p + 1)(100p + 1)}$$

Exercice 3 : Diagrammes de Nyquist ★★

Q1. Tracer le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{1}{p(p + 1)}$$

7 Corrigé des exercices

Exercice 1 : Représentation graphique d'un signal harmonique

Q1. Déterminer le gain naturel $G(\omega) = |H(j\omega)|$ et la phase $\phi(\omega)$ à partir de la fonction de transfert.

Le gain naturel et la phase de la réponse harmonique sont déterminés respectivement par le module et l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$, ici tel que :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\omega}$$

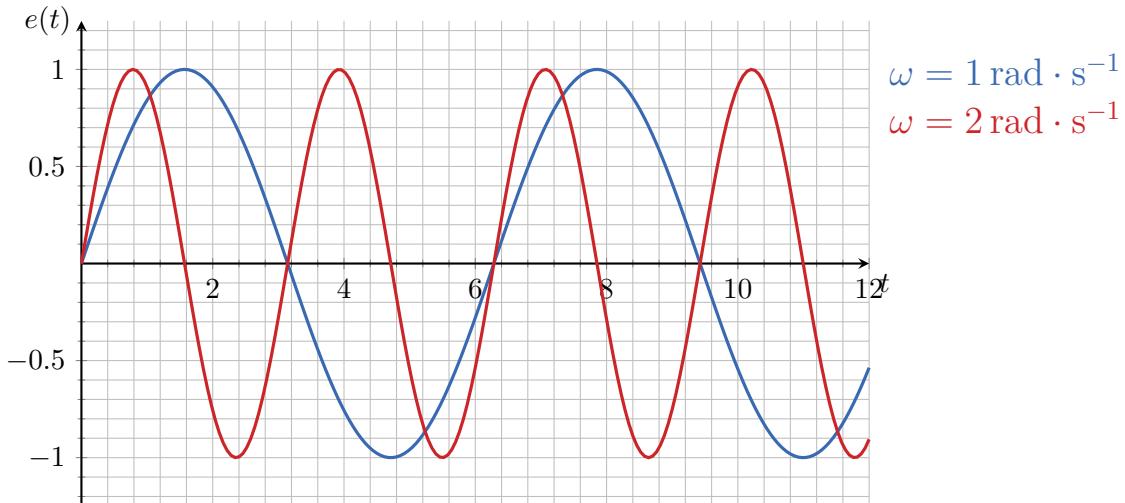
On obtient alors pour le gain :

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\omega^2}}$$

et pour la phase :

$$\phi(\omega) = \arctan 2\omega$$

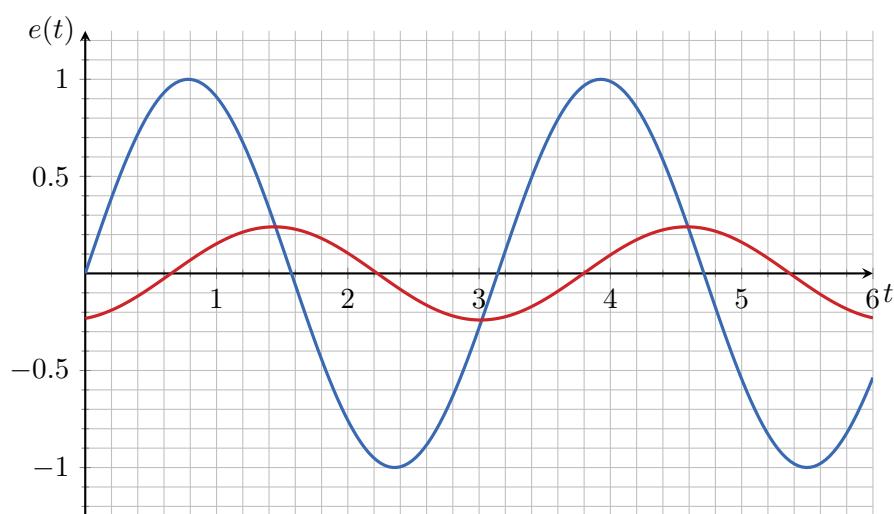
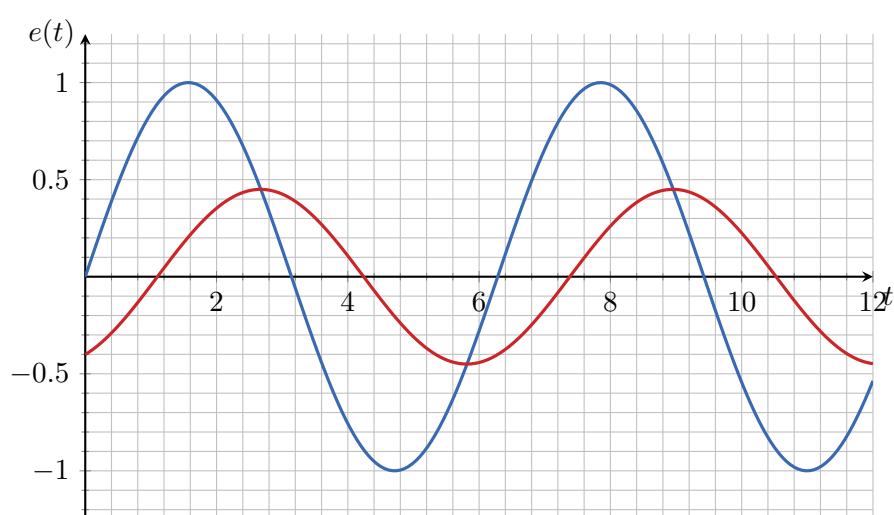
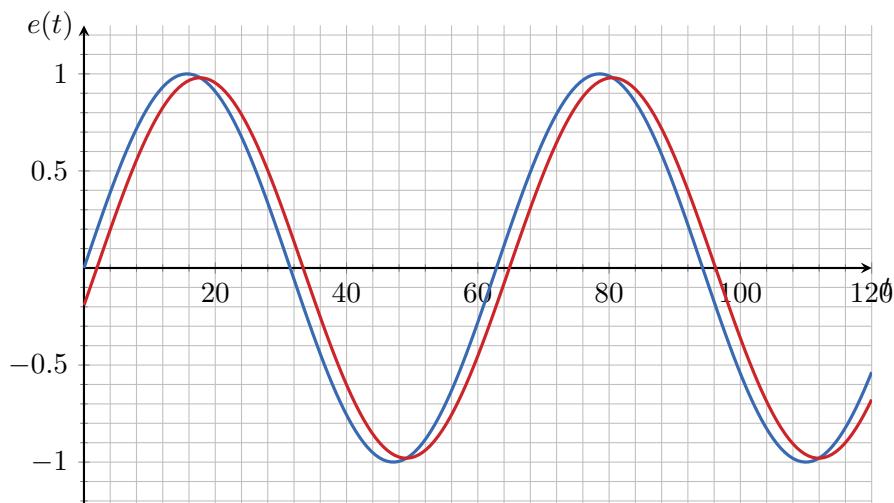
Q2. Tracer graphiquement la sollicitation $e(t)$ pour $E_0 = 1$, $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Q3. Déterminer numériquement le gain et le déphasage pour $\omega = 0.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

ω ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)	$G(\omega)$	$\phi(\omega)$ ($^\circ$)
0.1	0.98	-11.3
1.0	0.45	-63
2.0	0.24	-75

Q4. Tracer graphiquement la réponse harmonique avec la sollicitation pour $\omega = 0.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On choisira judicieusement l'échelle temporelle pour représenter une période complète.



Exercice 2 : Diagramme de Bode

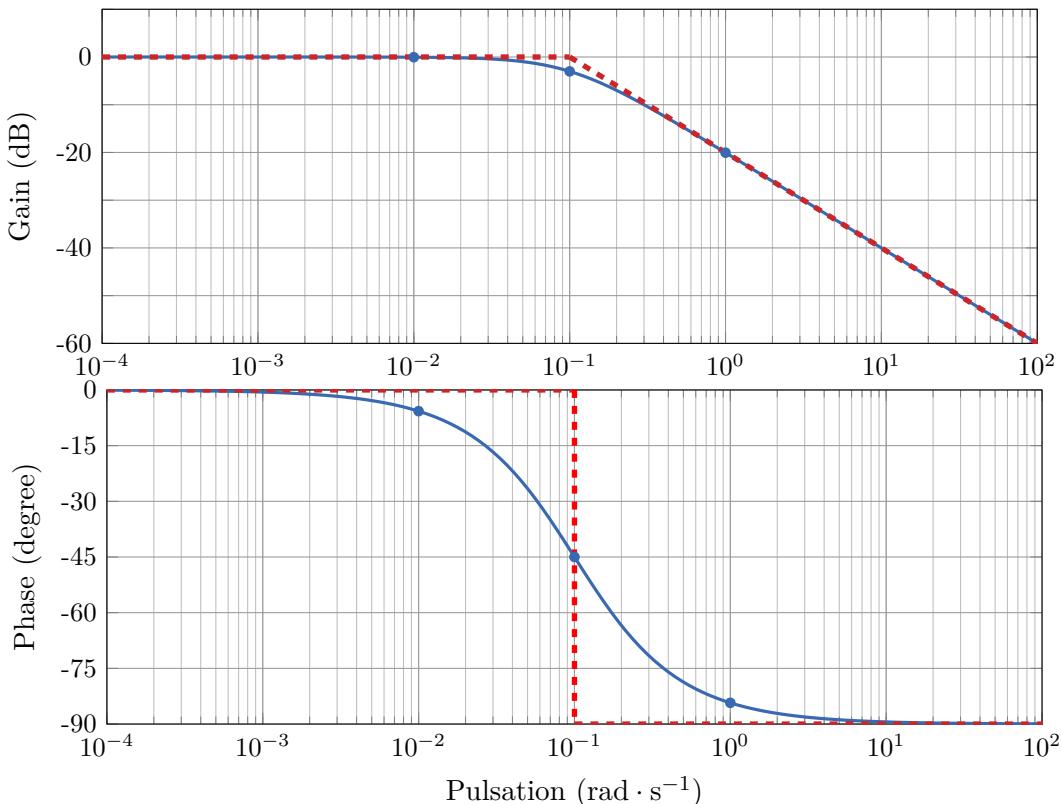
Tracer les diagrammes asymptotiques et réels de Bode des systèmes définis par les fonctions de transfert suivantes :

Q1.

$$H(p) = \frac{1}{10p + 1}$$

Recherche des asymptotes

- gain statique : $K = 1 \rightarrow$ toute fréquence $\rightarrow 0$ dB à basse fréquence \rightarrow pas d'effet sur la phase
- 1er ordre : $\tau_1 = 10 \rightarrow \omega_1 = 0.1 \rightarrow$ pente du gain : -20 dB/decade $\rightarrow \phi += -90^\circ$



Fonctions réelles du gain et du déphasage

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}}$$

$$G_{dB}(\omega) = -10 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2)$$

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\arctan \tau_1 \omega$$

Quelques valeurs particulières (calculées) :

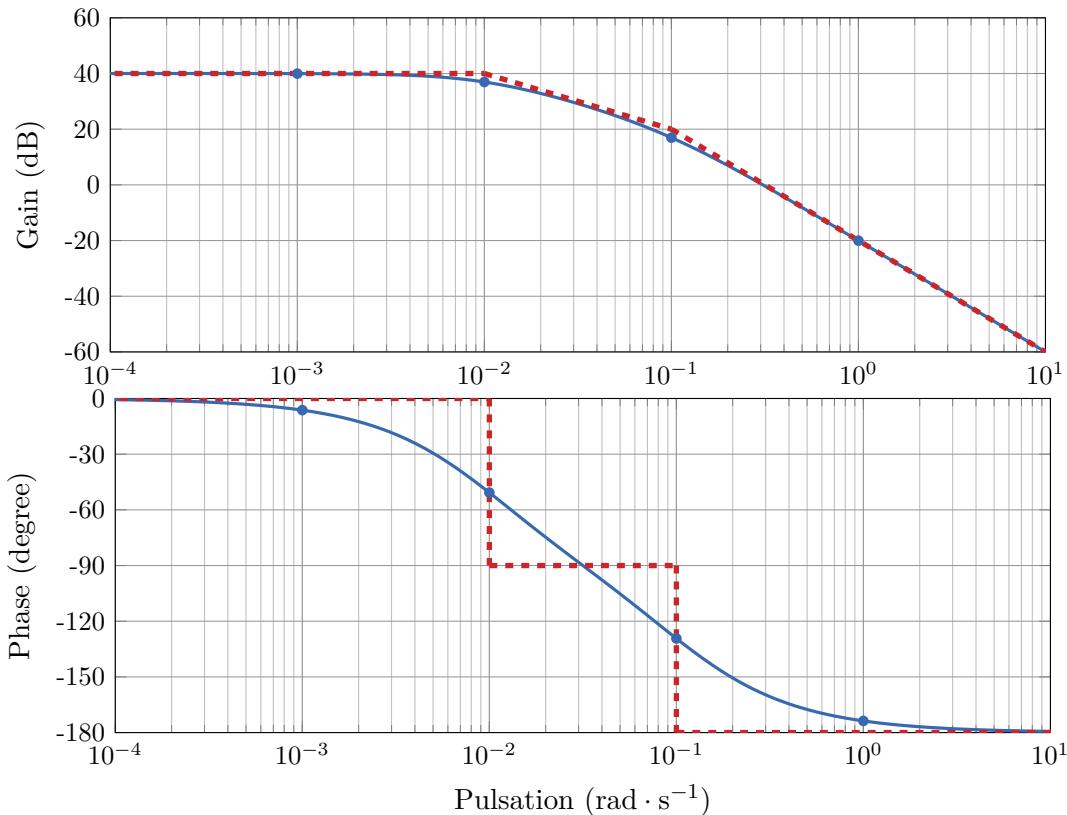
Pulsation (rad · s ⁻¹)	10 ⁻²	$\omega_1 = 0.1$	1
Gain (dB)	0	-3	-20
Déphasage (°)	-6	-45	-84

Q2.

$$H(p) = \frac{100}{(10p + 1)(100p + 1)}$$

Recherche des asymptotes

- gain statique : $K = 100 \rightarrow$ toute fréquence $\rightarrow 40$ dB à basse fréquence \rightarrow pas d'effet sur la phase
- 1er ordre : $\tau_1 = 100 \rightarrow \omega_1 = 10^{-2} \rightarrow$ pente du gain : -20 dB/decade $\rightarrow \phi += -90^\circ$
- 1er ordre : $\tau_2 = 10 \rightarrow \omega_2 = 10^{-1} \rightarrow$ pente du gain : -20 dB/decade $\rightarrow \phi += -90^\circ$



Fonctions réelles du gain et du déphasage

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{100}{\sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2} \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}}$$

$$G_{dB}(\omega) = 40 - 10 \log(1 + \tau_2^2 \omega^2) - 10 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2)$$

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\arctan \tau_1 \omega - \arctan \tau_2 \omega$$

Quelques valeurs particulières (calculées) :

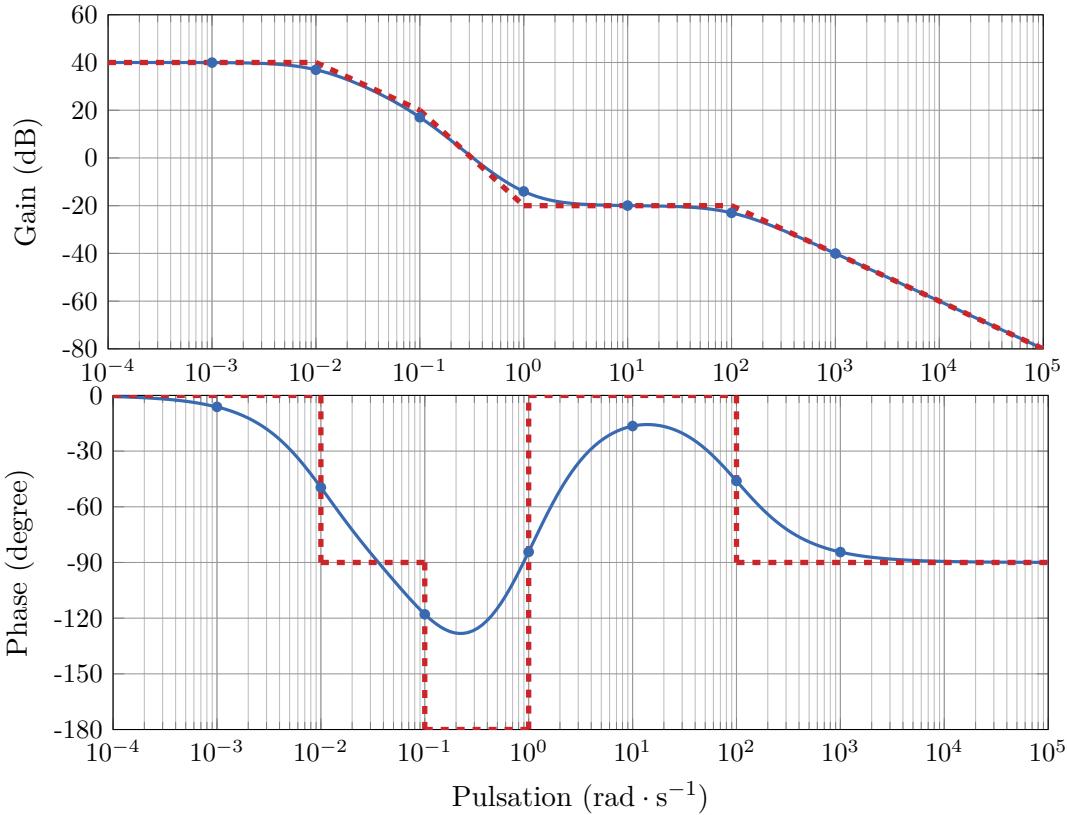
Pulsation (rad · s⁻¹)	10^{-3}	$\omega_1 = 10^{-2}$	$\omega_2 = 10^{-1}$	1
Gain (dB)	40	37	17	-20
Déphasage (°)	-6	-51	-129	-174

Q3.

$$H(p) = \frac{100(p+1)^2}{(100p+1)(10p+1)(0.01p+1)}$$

Recherche des asymptotes

- gain statique : $K = 100 \rightarrow$ toute fréquence $\rightarrow 40$ dB à basse fréquence \rightarrow pas d'effet sur la phase
- 1er ordre : $\tau_1 = 100 \rightarrow \omega_1 = 10^{-2} \rightarrow$ pente du gain : -20 dB/decade $\rightarrow \phi += -90^\circ$
- 1er ordre : $\tau_2 = 10 \rightarrow \omega_2 = 10^{-1} \rightarrow$ pente du gain : -20 dB/decade $\rightarrow \phi += -90^\circ$
- 2nd ordre : $\tau_3 = 1 \rightarrow \omega_3 = 1 \rightarrow$ pente du gain : $+40$ dB/decade $\rightarrow \phi += +180^\circ$
- 1er ordre : $\tau_4 = 0.01 \rightarrow \omega_4 = 10^2 \rightarrow$ pente du gain : -20 dB/decade $\rightarrow \phi += -90^\circ$



Fonctions réelles du gain et du déphasage

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{100(1 + \tau_3^2\omega^2)}{\sqrt{1 + \tau_1^2\omega^2}\sqrt{1 + \tau_2^2\omega^2}\sqrt{1 + \tau_4^2\omega^2}}$$

$$G_{dB}(\omega) = 40 + 20 \log(1 + \tau_3^2\omega^2) - 10 \log(1 + \tau_1^2\omega^2) - 10 \log(1 + \tau_2^2\omega^2) - 10 \log(1 + \tau_4^2\omega^2)$$

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = 2 \arctan \tau_3 \omega - \arctan \tau_1 \omega - \arctan \tau_2 \omega - \arctan \tau_4 \omega$$

Quelques valeurs particulières (calculées) :

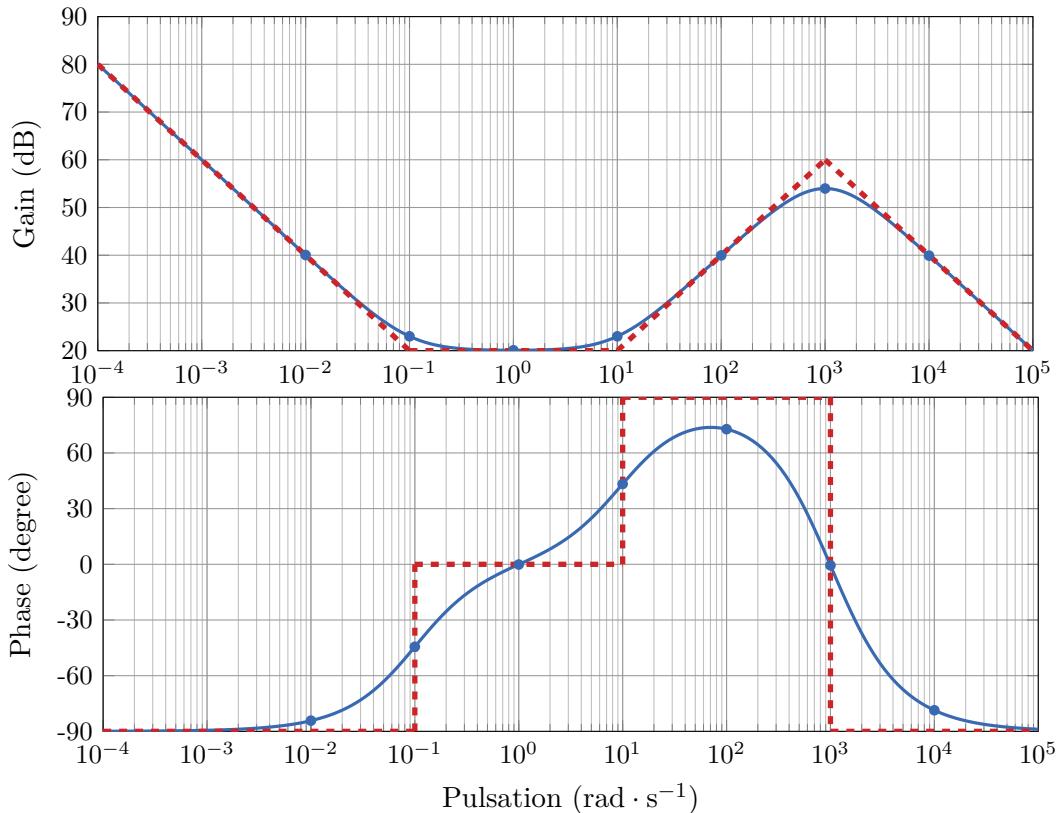
Pulsation (rad · s ⁻¹)	10^{-3}	$\omega_1 = 10^{-2}$	$\omega_2 = 10^{-1}$	$\omega_3 = 1$	10	$\omega_4 = 10^2$	10^3
Gain (dB)	40	37	17	-14	-20	-23	-40
Déphasage (°)	-6	-50	-118	-84	-16	-46	-84

Q4.

$$H(p) = \frac{(10p + 1)(0.1p + 1)}{p(0.001p + 1)^2}$$

Recherche des asymptotes

- intégrateur $\frac{K}{p} \rightarrow$ toute fréquence \rightarrow pente -20dB/dec $\rightarrow \phi += -90^\circ$
- 1er ordre : $\tau_1 = 10 \rightarrow \omega_1 = 10^{-1} \rightarrow$ pente du gain : +20 dB/decade $\rightarrow \phi += +90^\circ$
- 1er ordre : $\tau_2 = 0.1 \rightarrow \omega_2 = 10 \rightarrow$ pente du gain : +20 dB/decade $\rightarrow \phi += +90^\circ$
- 2nd ordre : $\tau_3 = 10^{-3} \rightarrow \omega_3 = 10^3 \rightarrow$ pente du gain : -40 dB/decade $\rightarrow \phi += -180^\circ$



Fonctions réelles du gain et du déphasage

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}}{\omega(1 + \tau_3^2 \omega^2)}$$

$$G_{dB}(\omega) = 10 \log(1 + \tau_1^2 \omega^2) + 10 \log(1 + \tau_2^2 \omega^2) - 20 \log \omega - 20 \log(1 + \tau_3^2 \omega^2)$$

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctan \tau_1 \omega + \arctan \tau_2 \omega - 2 \arctan \tau_3 \omega$$

Quelques valeurs particulières (calculées) :

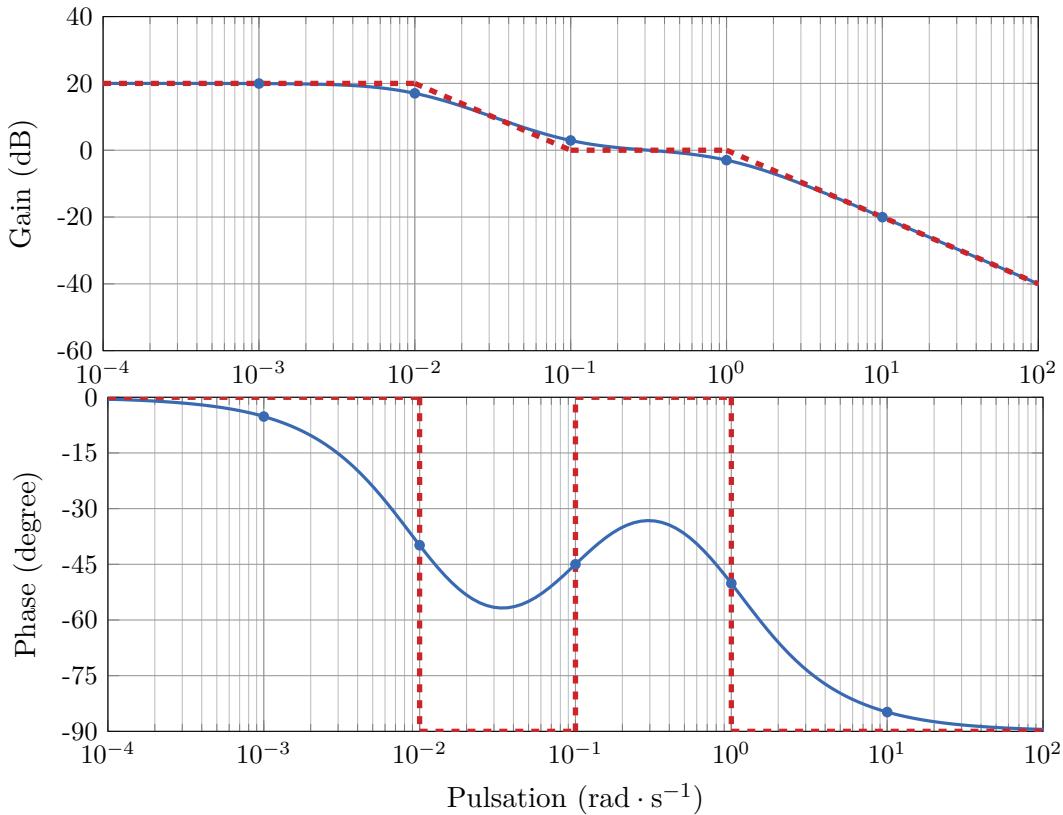
Pulsation (rad · s⁻¹)	10^{-2}	$\omega_1 = 10^{-1}$	1	$\omega_1 = 10$	10^2	$\omega_3 = 10^3$	10^4
Gain (dB)	40	23	20	23	40	54	40
Déphasage (°)	-84	-44	0	43	73	1	-79

Q5.

$$H(p) = \frac{10(10p + 1)}{(p + 1)(100p + 1)}$$

Recherche des asymptotes

- $K = 10 \rightarrow$ toute fréquence $\rightarrow 20$ dB à basse fréquence \rightarrow pas d'effet sur la phase
- 1er ordre : $\tau_1 = 100 \rightarrow \omega_1 = 10^{-2}$ \rightarrow pente du gain : -20 dB/decade $\rightarrow \phi += -90^\circ$
- 1er ordre : $\tau_2 = 10 \rightarrow \omega_2 = 10^{-1}$ \rightarrow pente du gain : $+20$ dB/decade $\rightarrow \phi += +90^\circ$
- 1er ordre : $\tau_3 = 1 \rightarrow \omega_3 = 1$ \rightarrow pente du gain : -20 dB/decade $\rightarrow \phi += -90^\circ$



Fonctions réelles du gain et du déphasage

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{10\sqrt{1 + \tau_2^2\omega^2}}{\sqrt{1 + \tau_3^2\omega^2}\sqrt{1 + \tau_1^2\omega^2}}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 + 10 \log(1 + \tau_2^2\omega^2) - 10 \log(1 + \tau_3^2\omega^2) - 10 \log(1 + \tau_1^2\omega^2)$$

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) = \arctan \tau_2 \omega - \arctan \tau_3 \omega - \arctan \tau_1 \omega$$

Quelques valeurs particulières (calculées) :

Pulsation (rad · s⁻¹)	10^{-3}	$\omega_1 = 10^{-2}$	$\omega_2 = 10^{-1}$	$\omega_3 = 1$	10
Gain (dB)	20	17	3	-3	-20
Déphasage (°)	-5	-40	-45	-50	-85

Exercice 3 : Diagrammes de Nyquist ★★

Q1. Tracer le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert suivante :

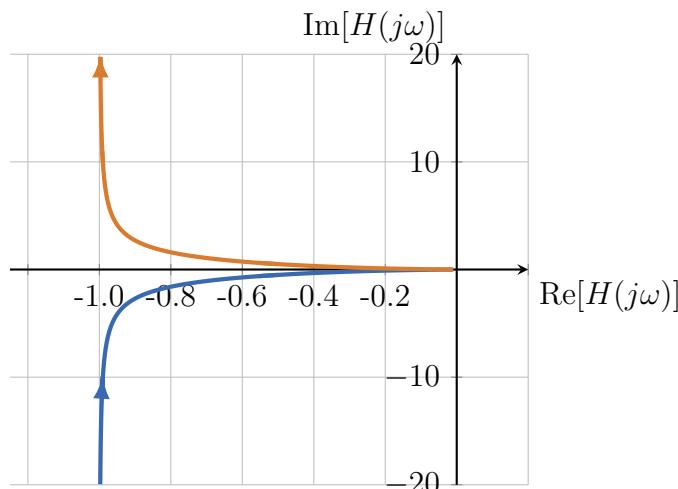
La fonction de transfert complexe de $H(p)$ s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)}$$

s'écrit, en identifiant explicitement la partie réelle et imaginaire, sous la forme :

$$H(j\omega) = -\frac{1}{1 + \omega^2} - j \frac{\frac{1}{\omega}}{1 + \omega^2}$$

Le diagramme de Nyquist consiste simplement à tracer la partie réelle et imaginaire pour différentes valeurs de la pulsation de la sollicitation. On remarque pour $\omega \rightarrow 0^\pm$ la partie



réelle tend vers -1 et la partie imaginaire vers $\mp\infty$ (selon le signe d'approche de 0). Pour compléter la description, déterminons le gain $G(\omega)$ et le déphasage $\phi(\omega)$ de ce système :

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan\left(-\frac{1}{\omega}\right) - \pi$$

Le déphasage permet de déterminer l'allure du diagramme de Nyquist lorsque ω approche zéro ou l'infini.

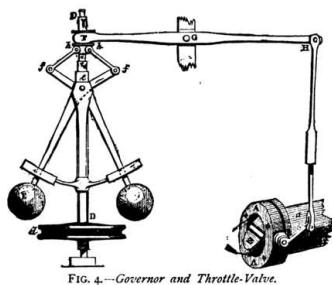
5 Asservissement des systèmes linéaires

Sommaire

1	Asservissement et régulation	172
2	Organisation d'un asservissement	173
2.1	Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis	173



FIGURE 5.1 : Exemple historique de régulateur : Régulateur de vitesse de Watt (d'après [16])



Dessin d'un régulateur à boules. Les boules en rotation s'élèvent lorsque la vitesse augmente, qui referme la valve d'arrivée de vapeur, ce qui entraîne une diminution de la vitesse de rotation de l'arbre entraînant le régulateur jusqu'à qu'un équilibre entre ces deux effets s'installe.

1 Asservissement et régulation

Les chapitres précédents nous ont permis de caractériser, modéliser et analyser la réponse temporelle des systèmes linéaires. Nous allons maintenant aborder la possibilité du **contrôle** de ces systèmes par l'intermédiaire de l'**asservissement** et de la **régulation**. L'idée sous-jacente est de permettre le contrôle automatique d'un système sans l'intervention d'un opérateur humain dans l'établissement d'une commande d'un système.

La figure 5.1 montre un exemple historique de régulateur de vitesse (également connu comme le régulateur à boules de Watt). La particularité de ce régulateur est d'avoir été utilisé dans l'industrie du 18ème siècle bien avant les premières avancées théoriques dans le domaine de l'automatique. Dans le contexte des premières machines à vapeurs, il était important de contrôler la vitesse angulaire des turbines à vapeur. Le mécanisme de Watt permet avec un dispositif de rétroaction d'agir sur la valve d'arrivée de la vapeur en fonction de la vitesse de l'axe de la turbine.

Jusqu'à présent nous nous sommes intéressés à l'étude de système linéaire « isolé » (de fonction de transfert $H(p)$) qui pour une entrée $E(p)$, élaborait une sortie $S(p)$ ¹. Dans le contexte du contrôle de ces systèmes l'entrée est appelée **consigne** et la sortie est la **réponse**. La différence entre l'entrée et la sortie est appelée **l'erreur**. Le problème de l'**asservissement** consiste alors à annuler cette erreur à chaque instant ou encore à faire en sorte que la réponse suive la consigne au cours du temps.

La **régulation** est un cas particulier d'asservissement, consistant à contrôler la sortie d'un système pour une consigne fixe quelque soit les perturbations auxquelles serait soumis le système. Nous avons pu caractériser la sortie en fonction de différentes critères de performances : rapidité, précision, stabilité et dépassement... pour différents systèmes linéaires modèles (c.f chapitre 3). La question est de savoir comment agir sur le signal $E(p)$ pour contrôler la sortie $S(p)$ en fonction de ces exigences de performances choisies initialement.

¹Nous continuerons, dans ce chapitre et les suivants, de représenter les signaux et systèmes linéaires dans le domaine de Laplace. Une approche temporelle sera introduite au chapitre 9

Il existe deux approches pour élaborer la **commande** d'un système linéaire :

- En **boucle ouverte** : on place un correcteur $C(p)$ en amont du système pour élaborer sa commande (notée $U(p)$). Remarquons que la consigne est maintenant l'entrée du correcteur.
- En **boucle fermée** : le principe consiste à récupérer le signal de sortie pour ajuster le signal de commande. Pour cela, on place le système (corrigeé ou non) dans une boucle de contre-réaction (négative). Les relations entre la sortie et la consigne dans une telle boucle ont été largement étudiées au [chapitre 2](#). Le signal correspondant à la différence entre la consigne et la réponse globale du système en boucle fermée est appelée l'**écart** $\epsilon(p)$. C'est ce signal qui est l'entrée du système en boucle ouverte $H(p)$.

La rétroaction² est devenu incontournable dans les applications industrielles et technologiques. Par abus de langage c'est le système en boucle fermée que l'on nomme asservissement. Cependant, la définition précédente de l'asservissement s'applique très bien dans le cas de la boucle ouverte.

2 Organisation d'un asservissement

2.1 Schémas fonctionnels associés aux systèmes asservis

Classiquement, un asservissement se représente par le schéma fonctionnel de la [figure 5.2](#). Celui-ci comporte en général un **régulateur** permettant de comparer l'entrée et la sortie. Ce régulateur est en général accompagné d'un **correcteur** permettant de corriger la boucle ouverte du système.

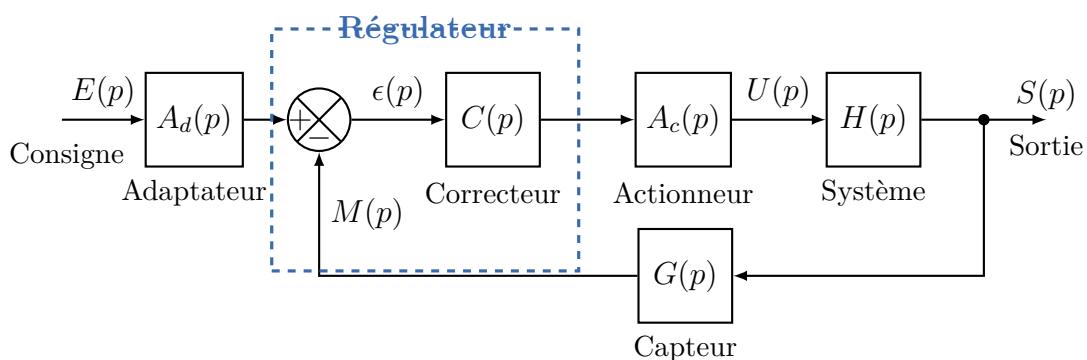


Figure 5.2 – Schéma fonctionnel de l'asservissement d'un système présentant un adaptateur et actionneur. (c.f ??)

²feedback (en anglais)

6 Performances des systèmes asservis

Sommaire

1	Introduction	176
2	Précision	176
2.1	Précision en boucle ouverte	176
2.2	Précision en boucle fermée	177
2.3	Effet d'une perturbation	179
3	Rapidité	184
3.1	Réponse temporelle	184
3.2	Étude de la rapidité à partir de la réponse harmonique	189
3.3	Influence des pôles dominants	190
4	Exercices du chapitre	192
5	Corrigé des exercices	193

1 Introduction

Les performances qui vont nous intéresser dans ce chapitre sont la **précision** et la **rapidité**. Après avoir défini formellement ces performances en boucle ouverte, nous allons déterminer l'effet de l'asservissement sur chacune de ces performances. **Dans les deux cas, nous allons observer que les performances en boucle fermée dépendent directement du système en boucle ouverte.**

2 Précision

Un système est précis si l'écart que l'on note $\epsilon(t)$ entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ est nul. Dans le domaine de Laplace, cet écart devient

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p).$$

Remarquons que l'écart correspond à la grandeur élaboré par le régulateur (comparateur) dans un asservissement à boucle de contre réaction unitaire.

On distingue deux cas selon le régime de la réponse, en effet :

- en régime permanent, cet écart ϵ_s est nommé **erreur statique** ;
- en régime transitoire, cet écart $\epsilon(t) = e(t) - s(t)$ est nommé **erreur dynamique**.

De plus, selon le type de sollicitation on parle de :

- **l'erreur indicielle** ou l'erreur de position, qui est l'erreur statique de la réponse indicielle ;
- **l'erreur de poursuite** ou erreur de vitesse, qui est l'erreur statique de la réponse à une rampe ;
- **l'erreur en accélération**, qui est l'erreur statique de la réponse à une parabole.

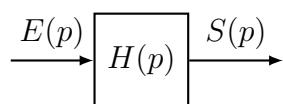
Concrètement, pour étudier l'erreur statique on cherche la limite à l'infini de $\epsilon(t)$ ou encore en appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\epsilon_S = \epsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) - s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - S(p)) \quad (6.1)$$

Rappelons que pour pouvoir appliquer ce théorème la valeur finale doit être finie ou en d'autre mot le système doit être stable.

2.1 Précision en boucle ouverte

Soit un système caractérisé par la fonction de transfert $H(p)$ est sollicité par l'entrée $E(p)$. La sortie $S(p)$ est alors donnée par :



L'erreur statique est alors donnée par :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - H(p)E(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(1 - H(p))E(p)$$

2.1.1 Exemple d'un premier ordre

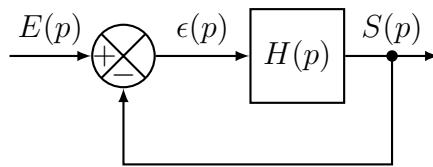
Prenons l'exemple d'un système du 1er ordre de fonction de transfert canonique $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ que l'on sollicite avec un échelon d'amplitude (consigne) E_0 . L'erreur statique est alors donnée par :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K}{1 + \tau p} \right) E_0 = (1 - K)E_0$$

Le système est précis (c.a.d $\epsilon(\infty) = 0$) si $K = 1$.

2.2 Précision en boucle fermée

Considérons le cas d'un système asservi de fonction de transfert $H(p)$ par une boucle de contre-réaction à retour unitaire.



La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est simplement donnée par $H(p)$. Dans le cas le plus générale, il est toujours possible d'écrire une fonction de transfert sous la forme canonique (Chapitre 1) :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec α la classe du système en boucle ouverte, K le gain statique et $N(p)$ et $D(p)$ deux polynômes tels que $N(0) = D(0) = 1$. Dans le domaine de Laplace l'écart $\epsilon(p)$ s'écrit :

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = \left(1 - \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} \right) E(p)$$

en remplaçant $H_{BO}(p)$ par sa représentation générale :

$$\epsilon(p) = \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + K N(p)} E(p) \quad (6.2)$$

L'erreur statique ϵ_s est alors donnée par la limite (Théorème de la valeur finale) :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + K N(p)} p E(p)$$

ou encore en utilisant les valeurs des polynômes en 0 :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} p E(p) \quad (6.3)$$

Cette erreur dépend donc de la nature de la sollicitation (c.a.d $E(p)$) et de la classe α de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Nous allons maintenant considérer différentes types de sollicitations pour différentes classes de système en boucle ouverte.

2.2.1 Erreur statique indicielle

L'erreur indicielle est l'erreur entre la sortie d'un système et une sollicitation en échelon $e(t) = E_0 u(t)$ de transformée de Laplace $E(p) = \frac{E_0}{p}$. Pour une telle entrée, l'erreur statique (c.f [équation \(6.3\)](#)) devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 \quad (6.4)$$

Dans le cas d'un système de classe $\alpha = 0$ en boucle ouverte :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p^0 + K} E_0 = \frac{E_0}{1 + K}. \quad (6.5)$$

L'erreur est finie mais les réponses indicielles des systèmes de classe $\alpha = 0$ en boucle ouverte ne sont pas précis.

Dans les autres cas $\alpha > 0$, l'erreur statique s'annule :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 = 0 \quad (6.6)$$

Les réponses indicielle des systèmes de classe $\alpha > 0$ sont donc précis.

2.2.2 Erreur statique de poursuite

L'erreur de poursuite est l'erreur statique d'un système soumis à une rampe du type $e(t) = r(t) = E_0 t u(t)$ de transformée de Laplace $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

Pour une telle entrée, l'erreur statique devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \frac{E_0}{p} = \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} E_0 \quad (6.7)$$

Dans le cas d'un système de classe $\alpha = 0$ en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{-1}}{p^0 + K} E_0 = +\infty \quad (6.8)$$

Le système est incapable de suivre l'entrée souhaitée.

Dans le cas d'un système de classe $\alpha = 1$ en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p + K} E_0 = \frac{E_0}{K} \quad (6.9)$$

Entrée	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$\frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0	0
$\frac{E_0}{p^2}$	$+\infty$	$\frac{E_0}{K}$	0	0
$\frac{2E_0}{p^3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{2E_0}{K}$	0

Tableau 6.1 – Résumé des erreurs statiques pour différentes sollicitations et classe de système en boucle ouverte

Dans le cas d'un système de classe $\alpha > 1$ en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} E_0 = 0 \quad (6.10)$$

Le système est donc précis.

2.2.3 Erreur statique d'accélération

L'erreur d'accélération est l'erreur statique d'un système soumis à un signal parabolique $e(t) = E_0 t^2 u(t)$ de transformée de Laplace $E(p) = \frac{2E_0}{p^3}$

Pour une telle entrée, l'erreur statique devient :

$$\epsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} \frac{2E_0}{p^2} = \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} 2E_0 \quad (6.11)$$

Dans le cas d'un système de classe $\alpha < 2$ en boucle ouverte, l'erreur devient :

$$\epsilon_s = +\infty \quad (6.12)$$

Pour un système de classe $\alpha = 2$ en boucle ouverte, l'erreur est finie :

$$\epsilon_s = \frac{2E_0}{K} \quad (6.13)$$

et s'annule pour $\alpha > 2$

2.3 Effet d'une perturbation

2.3.1 Cas générale

On considère maintenant l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système asservis. Sans perte de généralité, on ne considérera que le cas d'une perturbation en entrée (c'est à dire en amont d'un système linéaire défini par une fonction de transfert $H_2(p)$),

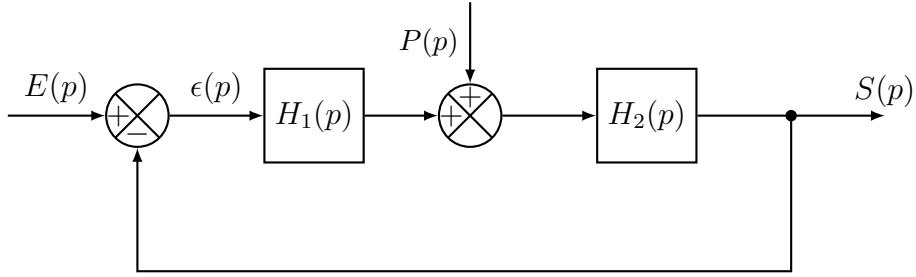
la présence d'un correcteur $H_1(p)$ n'est pas obligatoire mais facilite l'interprétation des résultats.

Considérons le schéma bloc suivant avec les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ de forme canonique :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

$$H_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

de les gains statiques K_i , de classe α_i , de polynômes $N_i(p)$ et $D_i(p)$ tels que $N_i(0) = 1$ et $D_i(0) = 1$.



Pour déterminer l'écart, il nous faut déterminer la sortie globale $S(p)$ pour des entrées multiples (c.f [Chapitre 2-section 4](#)). Cette sortie est sous la forme :

$$S(p) = H_{P=0}E(p) + H_{E=0}P(p)$$

c'est à dire que c'est la somme des contributions des deux entrées prises séparément. L'écart est alors donné par

$$\epsilon(p) = E(p) - S(p) = (1 - H_{P=0})E(p) - H_{E=0}P(p)$$

ou encore en notant $\epsilon_S(p) = (1 - H_{P=0})E(p)$ et $\epsilon_P(p) = -H_{E=0}P(p)$

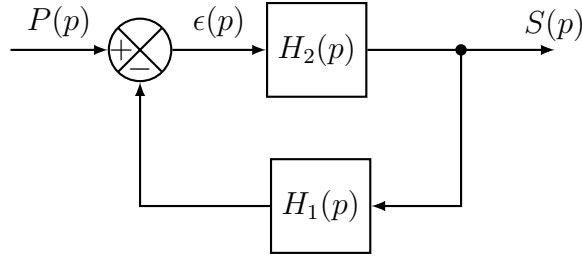
$$\epsilon(p) = \epsilon_S(p) + \epsilon_P(p)$$

Le premier terme correspond à l'écart de l'asservissement que nous avons déjà étudié précédemment, le second terme, que l'on note $\epsilon_P(p)$, est la contribution à l'écart dû à la perturbation. La fonction de transfert de l'asservissement est donnée par :

$$H_{P=0} = \frac{H_1 H_2(p)}{1 + H_1(p) H_2(p)}$$

Dans le cas de la régulation d'un système asservis, il est nécessaire de rejeter cette contribution.

La fonction de transfert $H_{E=0}$, de la régulation, correspondant à une consigne nulle, s'obtient en considérant le schéma-bloc suivant :



en boucle fermée, on a alors :

$$H_{E=0}(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

en remplaçant par leurs formes canoniques générales :

$$H_{E=0}(p) = \frac{p^{\alpha_1} K_2 N_2(p) D_1(p)}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

Examinons l'erreur en régime permanent pour une perturbation constante. C'est à dire pour perturbation $P(p)$ en échelon telle que $P(p) = \frac{P_0}{p}$. L'erreur dû à la perturbation en régime permanent est alors :

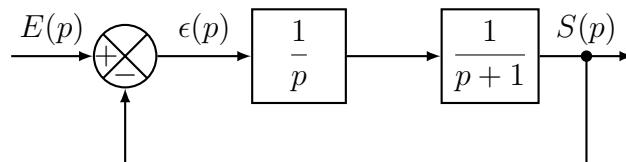
$$\begin{aligned}\epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon_P(p) \\ \epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} -H_{E=0} P_0 \\ \epsilon_P &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha_1} K_2}{p^{\alpha_1} p^{\alpha_2} + K_1 K_2} P_0\end{aligned}$$

La perturbation est rejettée ($\epsilon_P = 0$) si $\alpha_1 > 0$, c'est à dire s'il existe au moins un intégrateur en amont de la perturbation. En effet si $\alpha_1 = 0$, l'erreur dû à la perturbation est finie et donnée par :

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 & \epsilon_P = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2} P_0 \\ \alpha_2 > 0 & \epsilon_P = \frac{P_0}{K_1} \end{cases}$$

2.3.2 Exemple de rejet de perturbation

Nous allons voir ici le rejet d'une perturbation d'un système du premier ordre. On considère le système du premier ordre, en boucle ouverte, placé dans une boucle de contre réaction unitaire avec un intégrateur comme ci-dessous :



On souhaite réguler ce système pour une consigne en échelon. D'après les résultats précédents, l'erreur statique de position est nulle en asservissement puisque le système présente au moins un intégrateur. Pour observer le rejet de la perturbation, nous allons

considérer deux positions possibles pour la perturbation (avant et après l'intégrateur). On considère une perturbation constante telle que $P(p) = e^{-\tau p} \frac{P_0}{p}$ retardée d'un temps $\tau > 0$.

Si l'intégrateur est en aval de la perturbation

Dans un tel cas l'erreur dû à la perturbation est donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon_P(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{-\tau p}}{p(p+1)+1} P_0 = P_0$$

L'erreur statique de position totale est donc non nulle. La perturbation n'est pas rejétée comme on peut le voir sur la simulation de la réponse temporelle globale de ce système (c.f figure 6.1).

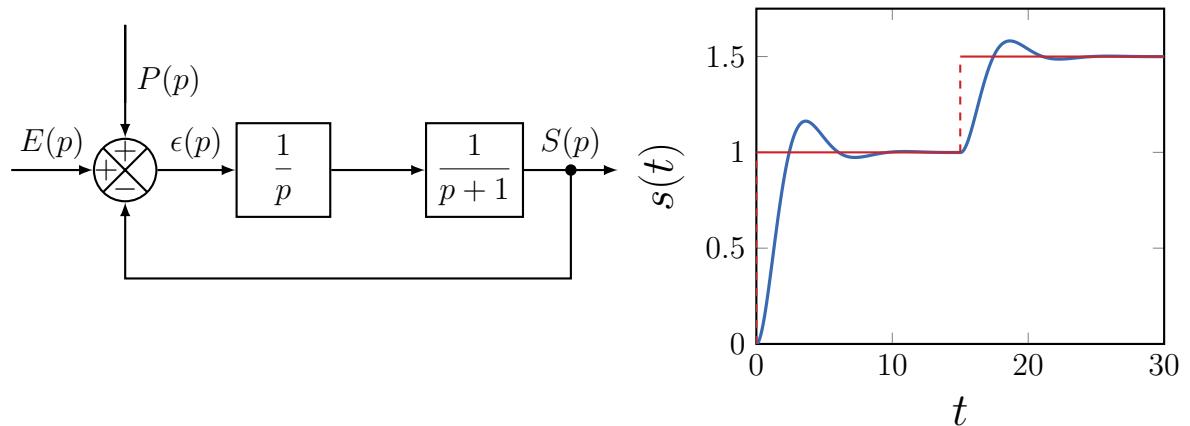


Figure 6.1 – Effet de la perturbation sur la réponse temporelle dans le cas où l'intégrateur est en aval de la perturbation. La simulation de la réponse temporelle est obtenue pour les paramètres suivants : $E_0 = 1$, $P_0 = 0.5$ et $\tau = 15$

Si l'intégrateur est en amont de la perturbation

Dans un tel cas l'erreur dû à la perturbation est donnée par :

$$\epsilon_P = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pe^{-\tau p}}{p(p+1)+1} P_0 = 0$$

L'erreur statique de position totale est donc nulle. La perturbation est rejétée, comme on peut le voir sur la simulation de la réponse temporelle globale de ce système (c.f figure 6.2).

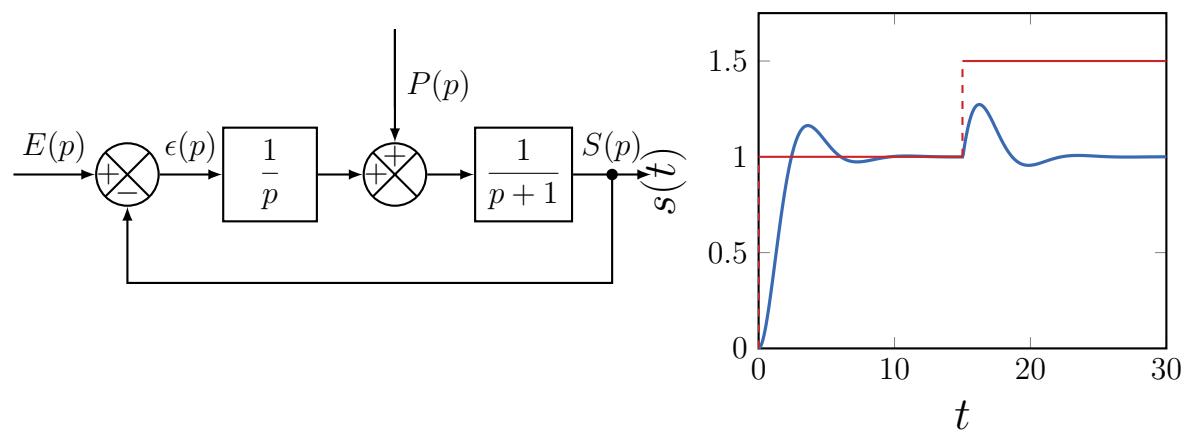


Figure 6.2 – Effet de la perturbation sur la réponse temporelle dans le cas où l'intégrateur est en amont de la perturbation. La simulation de la réponse temporelle est obtenue pour les paramètres suivants : $E_0 = 1$, $P_0 = 0.5$ et $\tau = 15$

3 Rapidité

La rapidité est un critère important dans le contexte du contrôle des systèmes dynamiques. Cette rapidité correspond à la durée que met un système pour atteindre le régime permanent. Ce critère de performance dépend donc directement du transitoire de la réponse temporelle. En générale, la valeur finale de la réponse d'un système est atteinte de façon asymptotique. C'est pourquoi, ce critère est généralement évalué relativement à la valeur finale de la réponse indicielle. Dans le cas des systèmes en boucle ouverte, nous ne rappelerons que les résultats obtenus dans les chapitres précédents. L'objectif principale est ici d'évaluer l'effet du bouclage sur ce critère de performance.

3.1 Réponse temporelle

Dans la pratique, on caractérise la rapidité d'une réponse temporelle par l'intermédiaire de deux valeurs : $t_{5\%}$ le **temps de réponse à 5%** et t_m le **temps de montée**. On rappel ici les définitions de ces deux temps ainsi que les résultats obtenus au [chapitre 3](#) pour les systèmes modèles.

3.1.1 Temps de réponse à 5% et temps de montée

Le temps de réponse à 5% d'un système correspond au temps mis par la réponse pour atteindre 5% de sa valeur finale $s(\infty)$. Dans le cas où la réponse tend asymptotiquement en oscillant vers la valeur finale, le temps de réponse à 5% correspond au temps pour lequel le signal de la réponse reste dans une bande à 5% autour de la valeur finale. Il

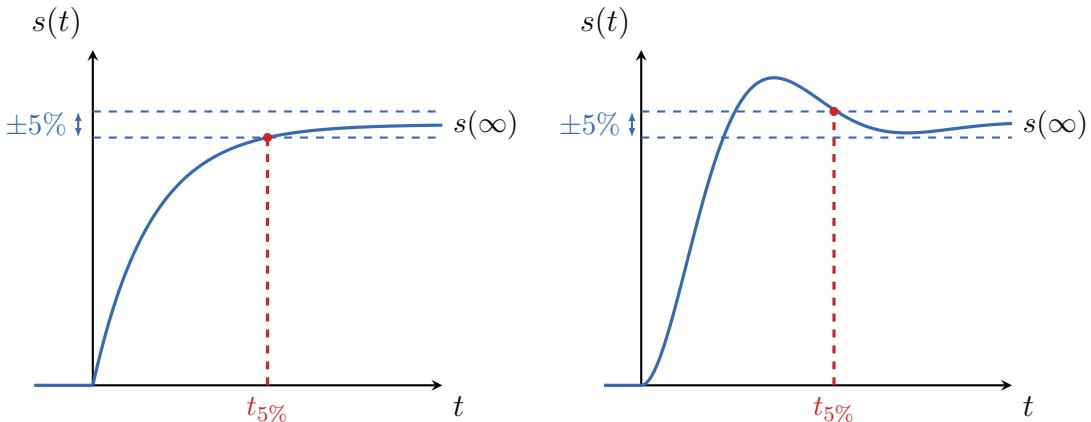


Figure 6.3 – Définition du temps de réponse à 5% : (à gauche) dans le cas d'une réponse temporelle sans pseudo-oscillations et (à droite) dans le cas d'une réponse temporelle avec pseudo-oscillations

apparaît clair que dans le cas d'une réponse présentant des oscillations, le temps de réponse à 5% va dépendre de l'amplitude et la période des pseudo-oscillations. Dans le cas où l'on souhaite caractériser la rapidité indépendamment de ces oscillations, on utilisera le temps de montée.

Le temps de montée t_m est le temps mis par la réponse temporelle d'un système pour passer de 10% à 90% de la valeur finale. Il existe une autre définition du temps de montée. Pour celle-ci le temps de montée (que nous noterons t_M) correspond à la durée au bout de laquelle la réponse passe pour la première fois par la valeur finale. Cependant, il faut remarquer que pour les réponses monotones la valeur finale n'est

jamais atteinte en un temps fini. Cette dernière définition n'a donc de sens qu'en régime pseudo-périodique. Quelque soit la grandeur utilisée pour caractériser les performances de rapidité d'un système linéaire, on pourra simplement dire que **plus le temps de réponse à 5% et le temps de montée t_m seront faibles plus le système sera rapide.**

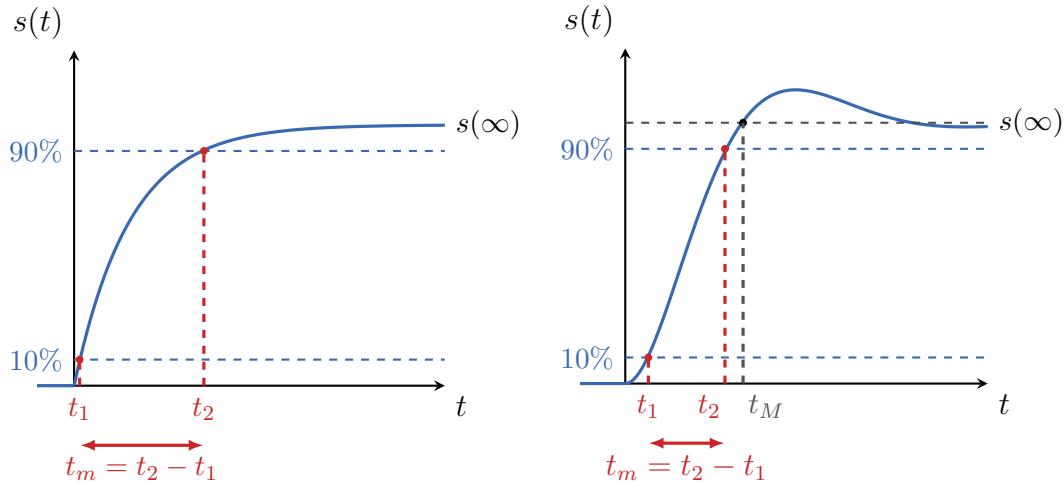


Figure 6.4 – Définition du temps de montée : (à gauche) dans le cas d'une réponse temporelle sans pseudo-oscillations et (à droite) dans le cas d'un réponse temporelle avec pseudo-oscillations

3.1.2 Système du premier ordre

La réponse indicielle $s(t)$, à un échelon unitaire, d'un système du premier ordre est donnée par l'équation (3.4) du chapitre 3, à savoir :

$$s(t) = K \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

Le temps de réponse à 5%, $t_{5\%}$, est tel que $s(t_{5\%}) = 0.95K$,

$$t_{5\%} = -\tau \log 0.05 \sim 3\tau.$$

Le temps de montée $t_m = t_2 - t_1$ avec t_1 et t_2 , les temps tels que :

$$\begin{aligned} s(t_1) &= 0.1K \\ s(t_2) &= 0.9K \\ t_m &= -\tau \log \frac{0.1}{0.9} \sim 2.2\tau \end{aligned}$$

Le temps de réponse à 5% et le temps de montée t_m dépendent directement de la constante. Ce qui permet de vérifier que **plus la constante de temps τ d'un système du premier ordre est faible plus le système est rapide.**

Effet du bouclage sur un système du premier ordre

Nous avons montré au chapitre 5 que les paramètres de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système du premier ordre (K_{BF}, τ_{BF}) peuvent être obtenues à partir des para-

mètres de la **FTBO**. Notamment les relations suivantes :

$$K_{BF} = \frac{K}{1+K}$$

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+K}$$

Il est alors possible de modifier la constante de temps en boucle fermée en modifiant la valeur du gain statique en boucle ouverte. **Pour augmenter la rapidité d'un système, on augmentera le gain statique de la FTBO pour diminuer les temps de réponse et de montée.**

3.1.3 Système du second ordre

Comme nous l'avons déjà souligné au [chapitre 3](#), dans le cas d'un système du second ordre, il n'existe pas de forme analytique simple pour déterminer le temps de réponse à 5%. Nous savons cependant que ce temps de réponse est une fonction du coefficient d'amortissement ξ et qu'il dépend également de la pulsation propre du système ω_0 .

En générale, pour déterminer le temps de réponse à 5%, on utilise l'abaque de la [figure 6.5](#). Sur cette figure nous avons représenté le temps de réponse à 5% et le temps de montée réduits par rapport à la pulsation propre ω_0 . On observe en effet que **pour un même coefficient d'amortissement, plus la pulsation propre augmente plus le temps de réponse diminue, donc plus le système est rapide.**

Nous pouvons relever sur ces abaques les coefficients d'amortissement donnant lieu au système le plus rapide selon le régime du second ordre accepté. **Dans le cas où les dépassements ne sont pas autorisés (c.a.d régime apériodique ($\xi > 1$)), le système est le plus rapide est donné pour $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim 5$. Dans le cas où un dépassement relatif est autorisé, le temps de réponse minimal est obtenu pour $\xi \sim 0.7$ soit pour $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim 3$.**

Pour des valeurs de $\xi < 1$, il est possible d'approcher le temps de réponse à 5% réduit en fonction de ξ par la fonction $\frac{3}{\xi}$, comme représentée en pointillé sur l'abaque de la [figure 6.5](#). Il est possible de déterminer une relation analytique pour le temps de montée à la valeur finale t_M . Pour cela, rappelons ([c.f section 3.4.2](#)) que la réponse indicielle pour une échelon unitaire, en régime pseudo-périodique est donnée par

$$s(t) = K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \right).$$

Celle-ci tend vers le gain statique K pour $t \rightarrow \infty$. Le temps de montée à la valeur finale t_M est donc tel que,

$$s(t_M) = K$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t_M} \sin(\omega_d t_M + \phi) = 0$$

Cette expression est nulle que si $\sin(\omega_d t_M + \phi) = 0$. On obtient alors :

$$t_M = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} \quad (6.14)$$

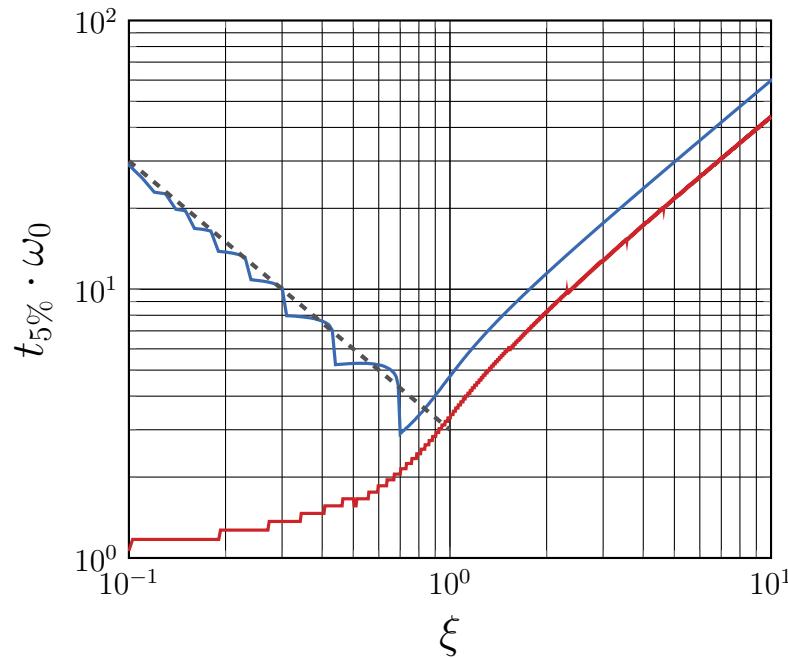


Figure 6.5 – Caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre en fonction du taux d'amortissement ξ : par (bleu) le temps de réponse à 5%, (rouge) le temps de montée t_m . Ces deux temps sont donnés en unité réduite par rapport la pulsation propre ω_0 . Le droite en pointillé représente l'équation approchée $t_{5\%} \cdot \omega_0 \sim \frac{3}{\xi}$ pour les faibles valeurs de ξ .

en fonction de ξ uniquement cette relation devient :

$$t_M = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

ou encore sous sa forme réduite en ω_0 :

$$t_M \cdot \omega_0 = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (6.15)$$

Remarquons que pour le temps de réponse à 5% minimal, le temps de montée à la valeur finale réduit sont proche. **Autrement dit, pour $\xi \sim 0.7$ on a :**

$$t_M = t_{5\%}$$

La figure 6.6 présente le temps de montée à la valeur finale réduit t_M en fonction de ξ comme donné par la relation équation (6.15). On observe [13] que pour des valeurs courantes de ξ , il est possible d'encadré la valeur de $t_M \omega_0$ entre 2 et 4. Pour ces valeurs de ξ , on utilisera la relation approchée

$$t_M \omega_0 \sim 3$$

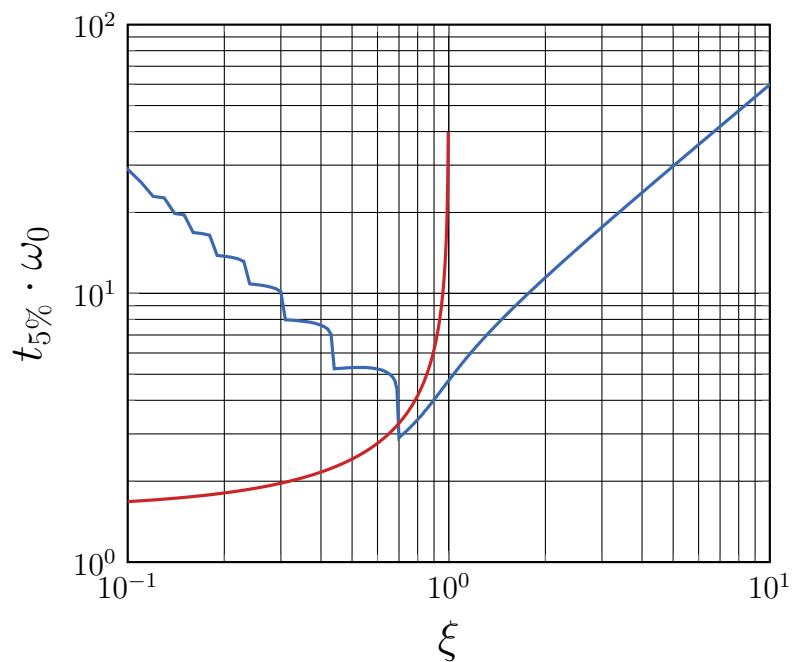


Figure 6.6 – Caractérisation de la rapidité d'un système du second ordre en fonction du taux d'amortissement ξ : par (bleu) le temps de réponse à 5%, (rouge) le temps de montée t_M à la valeur finale. Ce dernier est donné par la relation analytique établie dans le texte (c.f [équation \(6.15\)](#)).

Effet du bouclage sur un système du second ordre

À l'instar des systèmes du premier ordre, nous avons montré au [chapitre 5](#) que les paramètres de la **FTBF** d'un système du second ordre K_{BF} , ξ_{BF} et $\omega_{0,BF}$) peuvent être obtenues à partir des paramètres de la **FTBO**. Notamment, nous avons montré les relations suivantes :

$$K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$$

$$\omega_{0,BF} = \omega_0 \sqrt{1 + K}$$

$$\xi_{BF} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K}}$$

En s'appuyant sur l'abaque discuté précédemment, il est possible de modifier les performances de rapidité de la boucle fermée en modifiant le gain de la boucle ouverte, notamment il est possible de rendre un système plus rapide en boucle fermée,

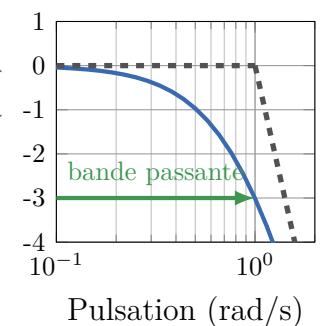
- en augmentant la valeur de la pulsation propre du système par l'intermédiaire du gain K de la **FTBO**.
- en diminuant coefficient d'amortissement ξ_{BF} pour $\xi_{BF} > 0.7$, c'est à dire en augmentant le gain en boucle ouverte K .

Dans le cas où $\xi_{BF} < 0.7$ une conclusion générale est impossible on se reportera sur les abaques du temps de réponse ou du temps de montée en fonction du coefficient d'amortissement pour établir la rapidité du système en boucle fermée.

3.2 Étude de la rapidité à partir de la réponse harmonique

L'intervalle des fréquences allant des basses fréquences à la fréquence donnant un lieu à un gain de $-x$ dB est appelée la bande passante à x dB. Nous avons montré au [chapitre 4](#) que la fréquence de coupure ω_c d'un système du premier ordre donne lieu à un gain de -3dB (par rapport au gain statique). Cette bande passante à -3dB permet de quantifier les fréquences pour lesquelles le gain de la réponse harmonique n'est pas grandement modifié. La fréquence de coupure étant directement reliée à la constante de temps d'un système du premier ordre ($\omega_0 = \frac{1}{\tau}$), nous en déduisons que la bande passante à -3dB est directement reliée à la rapidité. À partir de ce résultat, on généralise à tous les ordres, cette relation entre la bande passante à -3dB et la rapidité pour énoncer cette règle simple :

L'augmentation de la bande passante provoque, en général, une augmentation de la rapidité



Pulsation (rad/s)

Gain de la réponse harmonique d'un système du premier ordre, en fonction de la pulsation d'entrée. (pointillé) Tracé du gain asymptotique (bleu) Tracé gain réel.

3.3 Influence des pôles dominants

Soient p_1, \dots, p_n les pôles d'un système stable¹. Le pôle p_i est dit dominant si la valeur absolue de sa partie réelle est largement plus petite que celle de tout autre pôles du système²

$$|\operatorname{Re}[p_i]| \ll |\operatorname{Re}[p_j]| \quad \forall j \neq i \quad (6.16)$$

Pour observer l'influence d'un pôle dominant sur la réponse temporelle d'un système linéaire, nous nous allons l'illustrer par l'étude d'une fonction de transfert du second ordre en régime apériodique. Une telle fonction de transfert est équivalente à deux systèmes du premier ordre en série.

Prenons l'exemple de la fonction de transfert définie par

$$H(p) = \frac{5}{(p+1)(5p+1)} \quad (6.17)$$

et de décomposition en éléments simples telle que :

$$H(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{5p+1}$$

Par identification on peut écrire $H(p)$ en fonction de deux fonctions de transferts $H_1(p)$ et $H_2(p)$ tel que :

$$\begin{aligned} H(p) &= H_1(p) - H_2(p) \\ H_1(p) &= \frac{6.25}{5p+1} \\ H_2(p) &= \frac{1.25}{p+1} \end{aligned}$$

Par définition, le pôle dominant est donné par $H_1(p)$. Pour observer, l'effet de chacun des pôles, nous avons tracé les réponses indicielles de ces trois fonctions de transfert (c.f [figure 6.7](#)) Nous constatons que la réponse indicelle $s_1(t)$ de la fonction de transfert $H_1(p)$ domine le temps de réponse de la sortie globale $s(t)$. En conclusion, l'étude des pôles dominants de la fonction de transfert d'un système est, en première approximation, suffisante pour caractériser la rapidité d'un système que se soit en boucle ouverte ou en boucle fermée.

¹À partir des résultats obtenus dans ce chapitre il est déjà clair que la stabilité d'un système dépend également des pôles de sa fonction de transfert

²Dans la pratique un rapport de 5 est suffisant pour considérer une domination d'un pôle sur les autres

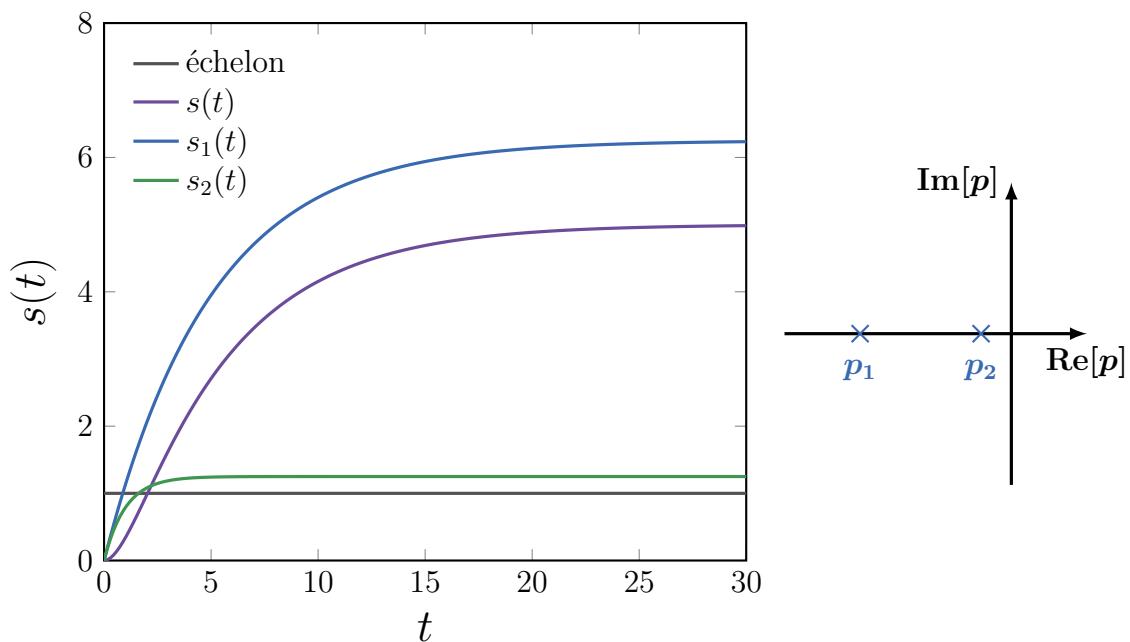


Figure 6.7 – (à gauche) Réponse indicelle $s(t)$ de la fonction de transfert donnée par [équation \(6.17\)](#), ainsi que les réponses indicielles $s_1(t)$ et $s_2(t)$ des fonctions de transfert de sa décomposition en éléments simples. On constate que la réponse du pôle dominant ($s_1(t)$) présente un temps de réponse proche de la réponse globale. (à droite) carte des pôles du système en question

4 Exercices du chapitre

Exercice 1 : Précision d'un système du second ordre ★☆☆

Soit un système du second ordre dont la fonction de transfert $H(p)$ est donnée par la forme canonique suivante :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Q1. Déterminer la forme générale de l'erreur statique de la réponse indicielle d'un système du second ordre

Q2. Déterminer la forme générale de l'erreur statique de la réponse indicielle de ce système placé dans une boucle de contre réaction

Q3. Déterminer la forme générale de l'erreur statique de la réponse à une rampe d'un système du second ordre

Exercice 2 : Pôles dominants

Soit un système dont la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H(p) = \frac{5}{(1 + 0.1p)^2(1 + 0.05p)}$$

Q1. Déterminer la décomposition en éléments simples.

Q2. Identifier les pôles de chacunes des contributions de cette décomposition et les pôles dominants.

Q3. Tracer la réponse indicielle de chacunes des contributions. Conclure.

Exercice 3 : Temps de montée et bande passante

Soit un système en boucle ouverte de fonction de transfert en boucle ouverte $H(p)$ définie par :

$$H(p) = \frac{K}{p(p + 1)}$$

On place ce système dans une boucle de contre réaction unitaire.

Q1. Pour les valeurs de $K = 0.1$, $K = 1$ et $K = 10$. Déterminer le temps de montée du système en boucle fermée.

Q2. Tracer les diagrammes de Bode des système en boucle ouverte et en boucle fermée pour $K = 0.1$, $K = 1$ et $K = 10$.

Q3. Pour chacunes de ces figures déterminer la bande passante à 3 dB en boucle fermée ainsi que la valeur de $\omega_{0,\text{dB}}$ en boucle ouverte (c'est à dire la valeur de la pulsation pour laquelle le gain est nulle en boucle ouverte).

Q4. D'après les résultats quelle lien existe t-il entre la bande passante et la rapidité. Et comment l'approximer à partir de la réponse harmonique en boucle ouverte.

5 Corrigé des exercices

Exercice 1 : Précision d'un système du second ordre ★☆☆

Soit un système du second ordre dont la fonction de transfert $H(p)$ est donnée par la forme canonique suivante :

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Q1. Déterminer la forme générale de l'erreur statique de la réponse indicielle d'un système du second ordre

Q2. Déterminer la forme générale de l'erreur statique de la réponse indicielle de ce système placé dans une boucle de contre réaction

Q3. Déterminer la forme générale de l'erreur statique de la réponse à une rampe d'un système du second ordre

Exercice 2 : Pôles dominants

Q1. Déterminer la décomposition en éléments simples.

La décomposition en éléments simples est donnée par :

$$H(p) = \frac{A}{(1+0.1p)} + \frac{B}{(1+0.1p)^2} + \frac{C}{(1+0.05p)}$$

Il nous faut maintenant identifier les coefficients A, B et C . Le coefficient C est obtenu $H(p)$ par $(1+0.05p)$ et en évaluant p en -20 :

$$C = (1+0.05p)H(p)\Big|_{p=-20} = 5$$

Par identification des numérateurs :

$$A(1+0.1p)(1+0.05p) + B(1+0.05p) + 5(1+0.1p)^2 = 5$$

il apparaît évident que le monome d'ordre 0 nous donne l'expression :

$$A + B = 0$$

pour le l'ordre 2, nous avons :

$$0.005A + 0.05 = 0$$

soit alors $A = -10$ et $B = 10$

La décomposition en éléments simples s'écrit donc :

$$H(p) = \frac{-10}{(1 + 0.1p)} + \frac{10}{(1 + 0.1p)^2} + \frac{5}{(1 + 0.05p)}$$

Q2. Identifier les pôles de chacunes des contributions de cette décomposition et les pôles dominants.

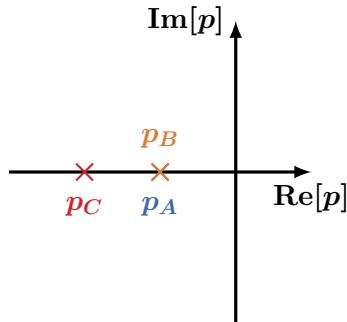
On pose

$$\begin{aligned} H(p) &= H_1(p) + H_2(p) + H_3(p) \\ H(p) &= \frac{-10}{(1 + 0.1p)} + \frac{10}{(1 + 0.1p)^2} + \frac{5}{(1 + 0.05p)} \end{aligned}$$

Le premier terme est un système du premier ordre de temps de réponse à 5% de $3\tau_1 = 0.3$ s.
Le second terme est un système du second ordre : avec $\xi = 1$ et $\omega_0 = 10$ de temps de réponse à 5% de 0.5 s (lecture sur l'abaque)

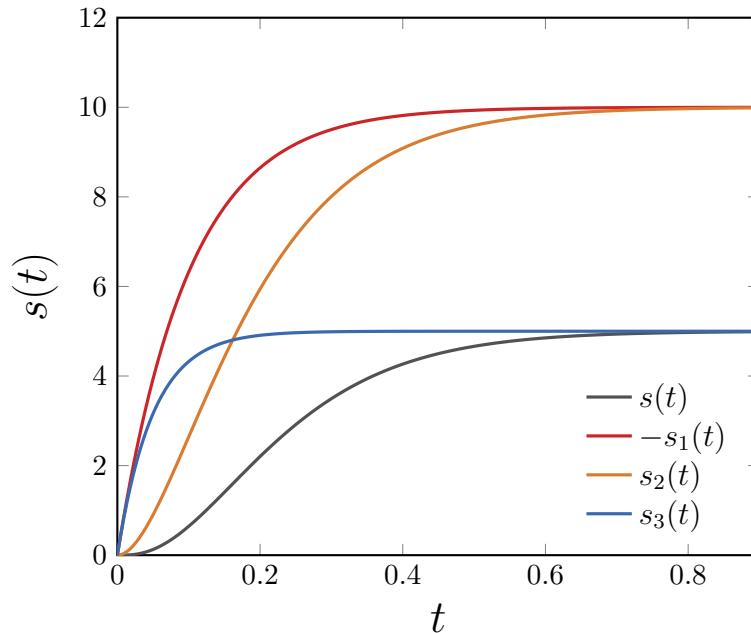
Le dernier terme est un premier ordre de temps de réponse à 5% de $3\tau_3 = 0.15$ s.

Les pôles dominants sont les pôles du premier et second termes de partie réelle -10.



Q3. Tracer la réponse indicielle de chacunes des contributions. Conclure.

On représente ci-dessous, le réponse indicielle $s_i(t)$ pour chacunes des contributions $H_i(p)$ ainsi que la réponse totale $s(t)$



On conclue bien sur la domination de la réponse $s_2(t)$ sur la réponse totale.

Exercice 3 : Temps de montée et bande passante

Soit un système en boucle ouverte de fonction de transfert en boucle ouverte $H(p)$ définie par :

$$H(p) = \frac{K}{p(p+1)}$$

On place ce simple dans une boucle de contre réaction unitaire.

Q1. Pour les valeurs de $K = 0.1$, $K = 1$ et $K = 10$. Déterminer le temps de montée du système en boucle fermée.

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

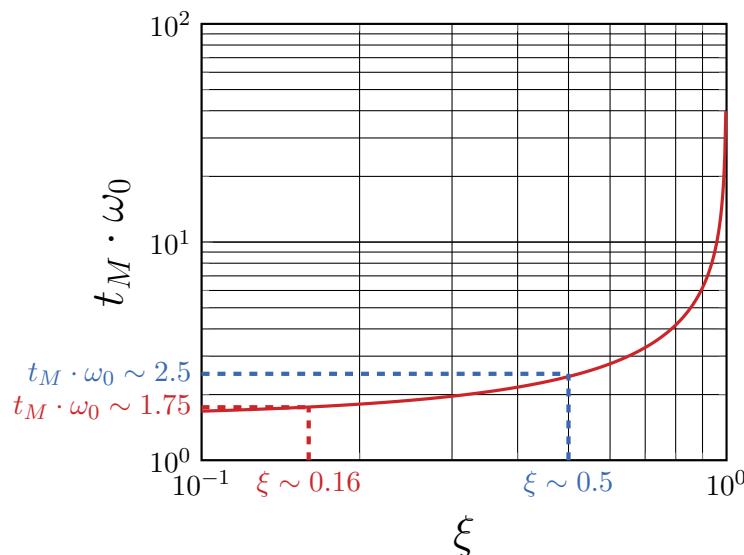
$$H_{BF}(p) = \frac{K}{p(p+1)+K} = \frac{K}{p^2+p+K}$$

par identification avec la fonction de transfert canonique d'un système du second ordre, on détermine :

$$\begin{aligned} K_{BF} &= 1 \\ \omega_{0,BF} &= \sqrt{K} \\ \xi_{BF} &= \frac{1}{2\sqrt{K}} \end{aligned}$$

Nous déterminons les temps de montée à la valeur finale à l'aide de l'abaque approprié. Nous regroupons les données dans le tableau suivant :

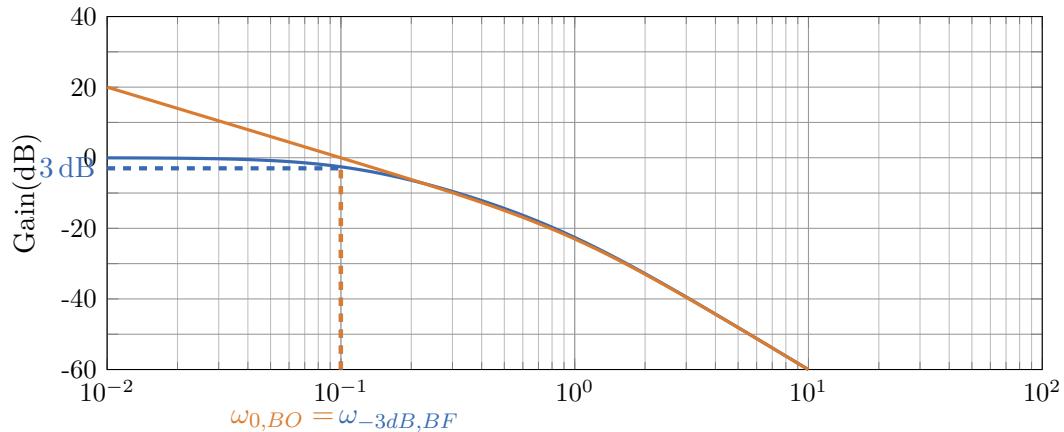
K	ξ_{BF}	$\omega_{0,BF}$	$t_M \cdot \omega_{0,BF}$	t_M (s)
0.1	~1.6	~0.316	-	-
1	0.5	1.0	2.5	2.5
10	~0.16	~3.16	1.75	~0.55



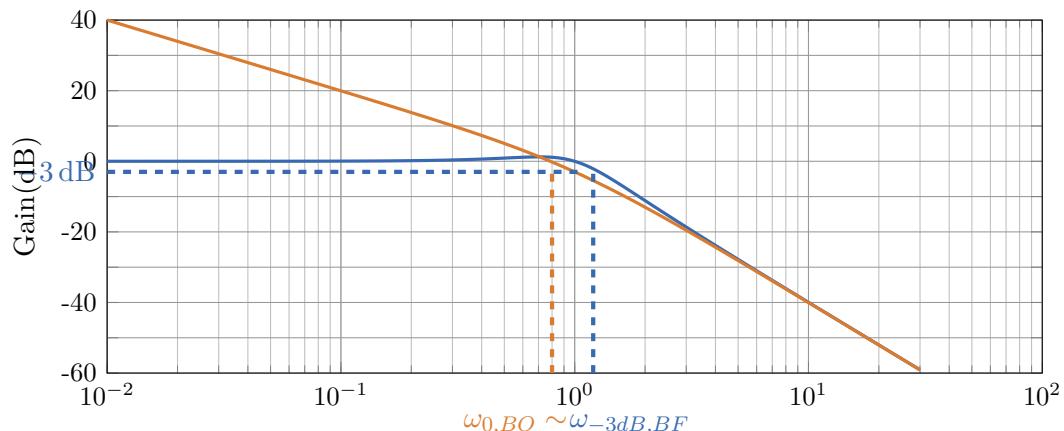
Q2. Tracer les diagrammes de Bode des système en boucle ouverte et en boucle fermée pour $K = 0.1$, $K = 1$ et $K = 10$.

Q3. Pour chacunes de ces figures déterminer la bande passante à 3 dB en boucle fermée ainsi que la valeur de $\omega_{0,dB}$ en boucle ouverte (c'est à dire la valeur de la pulsation pour laquelle le gain est nulle en boucle ouverte).

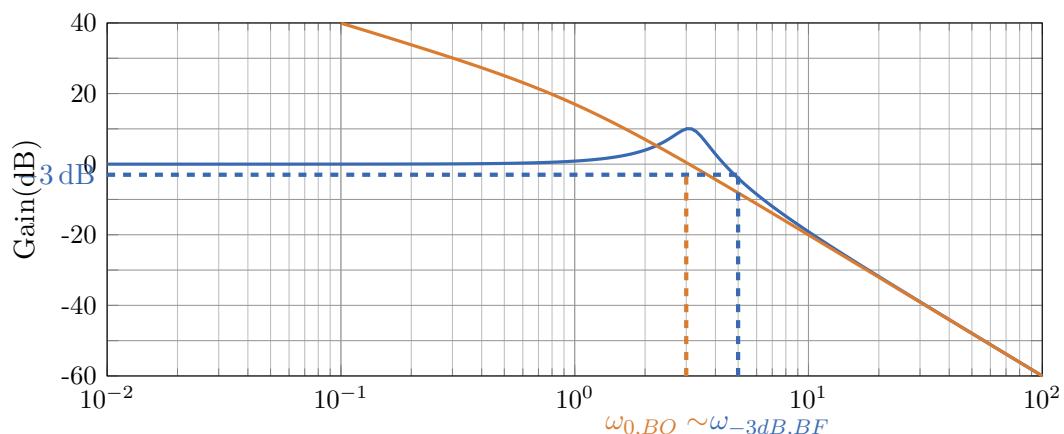
Pour $K = 0.1$



Pour $K = 1$



Pour $K = 10$



Q4. D'après les résultats quelle lien existe t-il entre la bande passante et la rapidité. Et comment l'approximer à partir de la réponse harmonique en boucle ouverte.

Il apparaît que la bande passante à 3 dB est liée à la rapidité. Plus cette bande passante est grande plus faible est le temps de montée (donc plus rapide). Il apparaît également que la bande passante peut être approximée par la valeur de la pulsation donnant un gain de 0 dB en boucle ouverte. On peut alors dire :

$$\omega_{-3dB,BF} \sim \omega_{0,BO}$$

7 Stabilité des systèmes asservis

Sommaire

1	Contexte et définition de la stabilité	200
2	Instabilité de l'asservissement	202
3	Condition fondamentale de stabilité	203
4	Critère algébrique de Routh-Hurwitz	206
4.1	Tableau de Routh	206
4.2	Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz	209
5	Critère de stabilité du revers	210
5.1	Critère de stabilité à partir de la boucle ouverte	210
5.2	Mise en évidence de l'instabilité en boucle fermée	211
5.3	Critère du revers dans le plan de Nyquist	213
5.4	Critère du revers dans le plan de Black	214
5.5	Critère du revers dans le plan de Bode	214
6	Marge de stabilité et robustesse de la stabilité	215
6.1	Marges de stabilité à partir du diagramme de Nyquist	216
6.2	Marges de stabilité à partir du diagramme de Bode	216
6.3	Marges de stabilité à partir du diagramme de Black	216
7	Critère de Nyquist	218
7.1	Image d'un contour par une fonction de transfert	218
7.2	Principe de l'argument de Cauchy	219
7.3	Contours de Nyquist et de Bromwich	219
7.4	Énoncé et application du critère de Nyquist	222
8	Exercices du chapitre	224
9	Corrigé des exercices	226

1 Contexte et définition de la stabilité

Dans ce chapitre, nous allons étudier en détail la stabilité des systèmes linéaires asservis. Il faut dès lors et déjà noter que ce sont les états d'équilibres¹ qui sont stables ou instables et non les systèmes eux mêmes. Cet « abus de langage » (largement utilisé) provient du fait que l'on considère *a priori* un système dans son état d'équilibre au moment de l'instant initial de la sollicitation. Une façon de se représenter ces états d'équilibres est d'imaginer le mouvement d'une bille à la surface d'une fonction d'énergie potentielle à une dimension. On peut facilement généraliser à plusieurs dimensions, en considérant le déplacement de la bille sur un relief accidenté et composé de collines, vallées ou puits à l'image d'un paysage d'énergie potentielle (c.f Figure 7.1). L'état d'équilibre de la bille est donc ici une position d'équilibre.

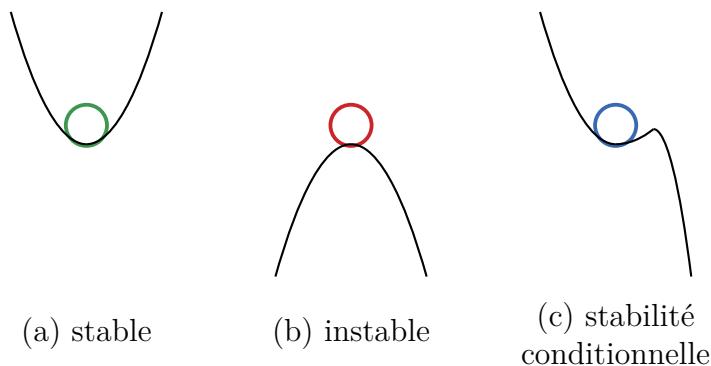


Figure 7.1 – Représentation schématique de la stabilité d'un équilibre

La manière la plus simple de caractériser la stabilité de ces positions d'équilibres est de s'en écarter en appliquant une impulsion brève et intense.

- (Figure 7.1 (a)) Dans le cas d'un équilibre stable : la bille va naturellement retrouver (avec ou sans oscillations) sa position d'équilibre.
- (Figure 7.1 (b)) Dans le cas d'un équilibre instable : la bille va continuer à s'en écarter indéfiniment.

D'autres scénarios sont possibles mais vont dépendre de la façon dont le système est déséquilibré et de la forme de la surface d'énergie potentielle (c.f Figure 7.1 (c)). On parle alors de stabilité conditionnelle.

Dans le cas des **SLCIs**, il est possible d'étudier la stabilité du système en étudiant sa réponse impulsionale (l'impulsion de Dirac permet d'écarter le système de son état d'équilibre dans lequel il se trouvait). Finalement, on définit la stabilité d'un système de la façon suivante :

Définition : Stabilité d'un système (1)

Un système est dit stable lorsque écarté de son état d'équilibre, il tend à y revenir

Il existe une autre définition de la stabilité qui s'avère équivalente dans le cas des systèmes linéaires.

¹(ou points fixes). Un état d'équilibre est une constante solution de l'équation différentielle du système. En générale, 0 est toujours une solution de l'équation différentielle et donc considéré comme l'état d'équilibre du système

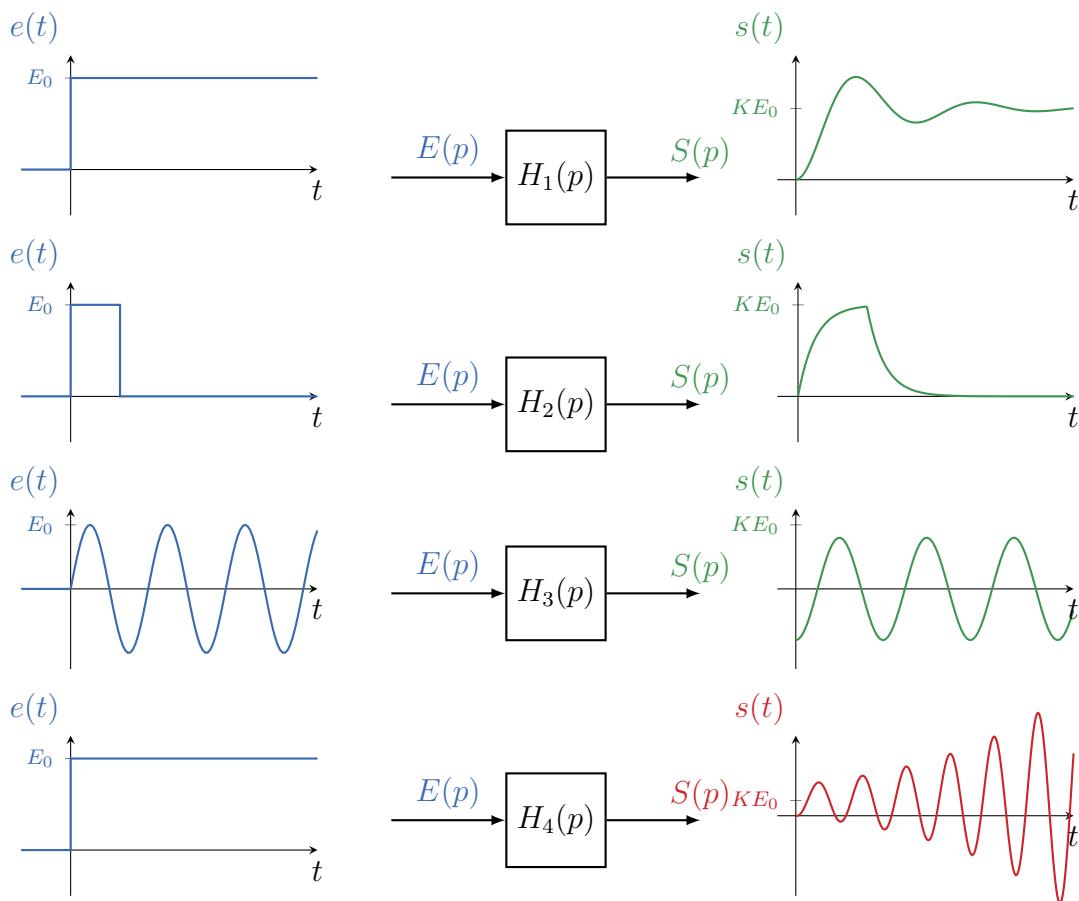


Figure 7.2 – Exemples de systèmes (vert) stables et (rouge) instables. Les systèmes stables présentent une réponse bornée à une sollicitation elle-même bornée.

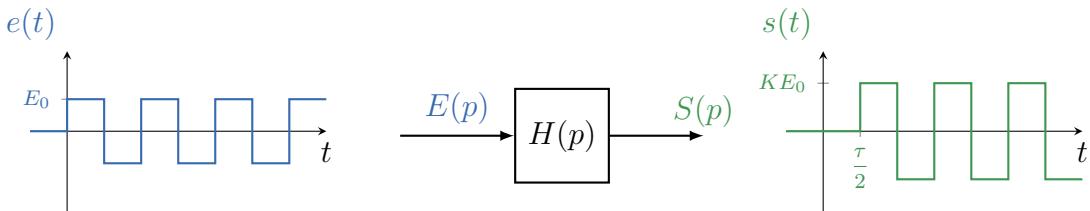
Définition : Stabilité d'un système (2)

Un système est dit stable si à une entrée bornée le système produit une sortie bornée. On parle alors de stabilité **EBSB**.

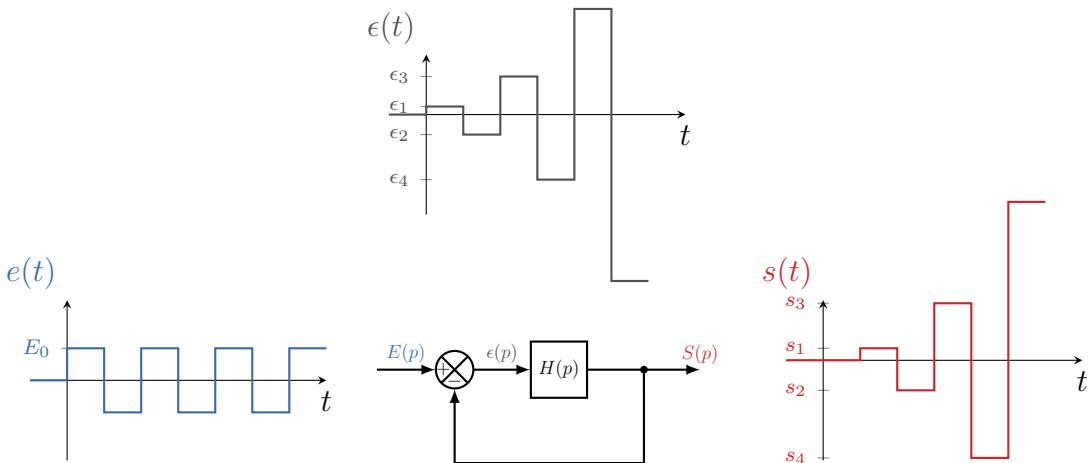
En anglais, on rencontre l'acronyme “**Bounded Input Bounded Output**” (BIBO) pour désigner cette notion. Ci-dessous nous avons représenté les réponses de **SLCI** à différentes sollicitations bornées. D'après la définition précédente, il est aisément de caractériser la stabilité de ces systèmes en observant la forme de la réponse. La [figure 7.2](#) représente différents scénarios de réponse à des entrées bornées par des systèmes stable ou instable.

2 Mise en évidence de l'instabilité de l'asservissement

Nous avons vu au [chapitre 5](#) que l'asservissement permettait de rendre stable un système intrinsèquement instable. C'est le cas notamment d'un intégrateur pur qui lorsque placé dans une boucle de contre-réaction devient un système du premier ordre. Cependant, l'asservissement peut également rendre un système instable par bouclage, on parle alors de **phénomène de pompage**. Pour illustrer ce phénomène [12], considérons un système de fonction de transfert d'un retard pur $H(p) = Ke^{-p\frac{\tau}{2}}$ qui entraîne un déphasage de $\tau/2$ et de gain K . Si on sollicite ce système par un signal $e(t)$ rectangulaire de période τ et d'amplitude E_0 , la sortie est de même nature et est donc simplement amplifiée de K et déphasée de $\tau/2$, comme représentée ci-dessous.



Si on place maintenant ce système dans une boucle de contre-réaction unitaire le système est alors soumis à la différence entre les signaux d'entrée et de sortie $\epsilon(t) = e(t) - s(t)$.



Nous allons établir la relation entre les valeurs des signaux par demi-période $\tau/2$.

$$\epsilon_i = e_i - s_i$$

où ϵ_i , e_i et s_i sont respectivement les valeurs des signaux $\epsilon(t)$, $e(t)$ et $s(t)$ pour la demi-période $i \in [1, +\infty]$. Dans cette notation, la sortie du système bouclé est donnée par :

$$s_{i+1} = K\epsilon_i$$

Pour la première demi-période, la sollicitation est positive $e_1 = E_0$, le système étant causal ($\epsilon_0 = 0$), on a $s_1 = 0$ et donc $\epsilon_1 = E_0$. Pour la seconde demi-période, la sollicitation est maintenant négative $e_2 = -E_0$, la sortie est maintenant donnée par $s_2 = KE_0$. De la même manière pour la troisième demi-période, on obtient $s_3 = K\epsilon_2 = K(e_2 - s_2) = -E_0(K + K^2)$. On obtient la relation suivante donnant la sortie en fonction de la demi-période pour $i > 1$:

$$s_i = (-1)^i KE_0 \sum_{j=0}^{i-1} K^j$$

La suite géométrique présente dans cette expression diverge pour $K > 1$.

Il est donc clair que l'instabilité est une conséquence de l'asservissement par bouclage. Il est donc essentiel d'étudier cette propriété dans le cas des systèmes asservis. Il faut cependant noter l'influence indispensable du :

- gain statique en boucle ouverte $K > 1$
- et du retard d'une demi-période (en opposition de phase) ;

dans cet exemple. Comme nous le verrons, la réponse harmonique par l'intermédiaire du gain et du déphasage de la fonction de transfert de la boucle ouverte jouera un rôle fondamental dans la stabilité du système en boucle fermée.

3 Condition fondamentale de stabilité d'un système asservis

Pour caractériser la stabilité des **SLCI**, il est possible de déterminer **une condition sur les pôles** (racines du dénominateur de la fonction de transfert). Pour montrer cela, nous allons étudier la réponse impulsionale d'une fonction de transfert présentant des pôles de différentes natures et observer la condition sur ses pôles pour que le système soit stable selon les définitions précédentes. Soit une fonction de transfert $H(p)$ présentant quatre pôles :

- un pôle réel simple p_1 ,
- un pôle réel double p_2 ,
- deux pôles complexes conjugués $p_{3,4} = \alpha \pm j\omega$

tel que :

$$H(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)^2(p - p_3)(p - p_4)}.$$

En notant que $(p - p_3)(p - p_4) = (p - \alpha)^2 + \omega^2$, la décomposition en éléments simples de la réponse impulsionale $S(p)$ dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} + \frac{C}{(p - p_2)^2} + \frac{Dp + E}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$$

La transformée inverse de cette expression est de la forme :

$$s(t) = \left(Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} + Cte^{p_2 t} + De^{\alpha t} \cos \omega t + \frac{\alpha D + E}{\alpha} e^{\alpha t} \sin \omega t \right) u(t)$$

Il apparaît clair que les pôles doivent être à parties réelles strictement négatives pour que les exponentielles présentent dans la réponse temporelle tendent vers 0 pour $t \rightarrow 0$.

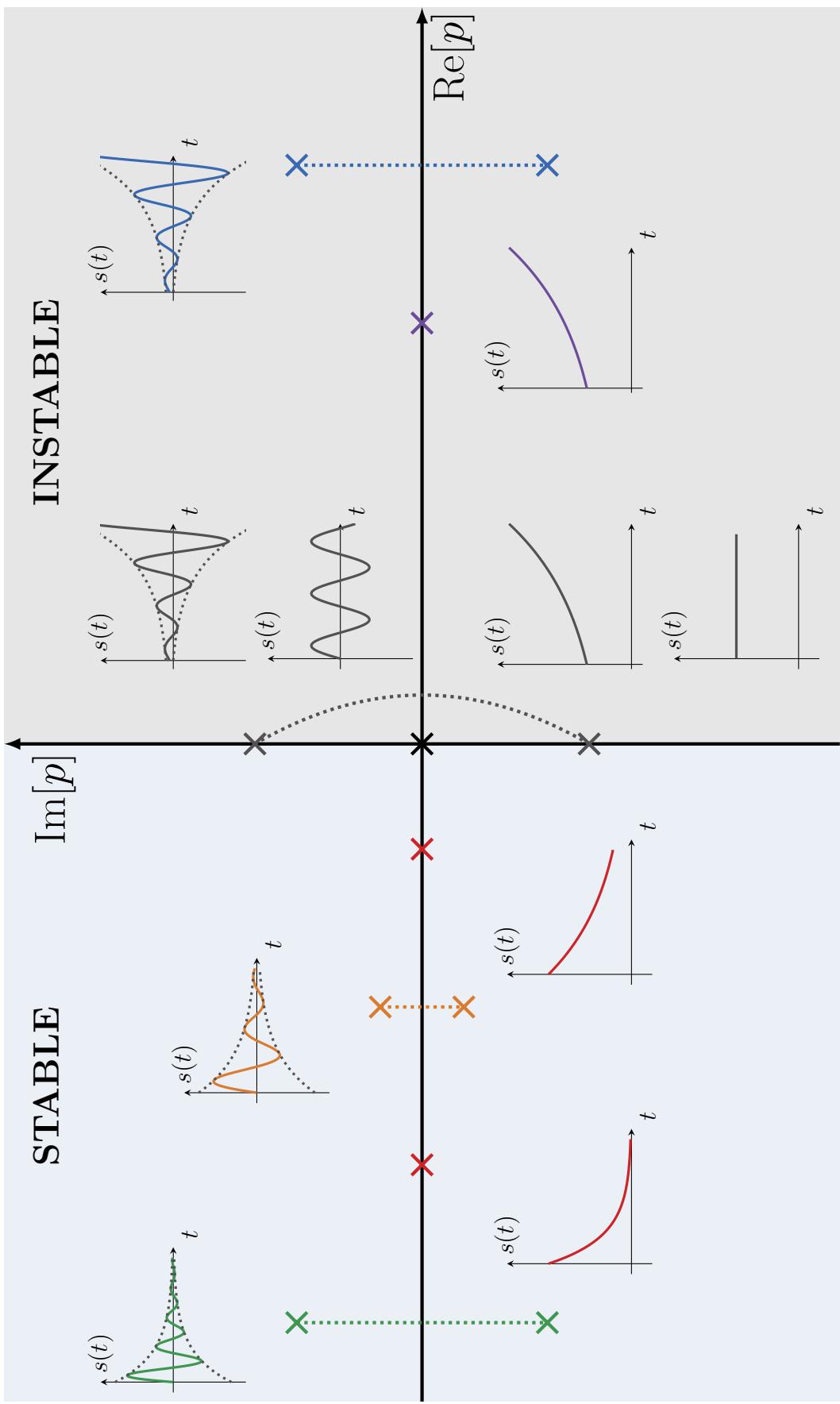


Figure 7.3 – Stabilité d'un SLCI d'après la carte des pôles de sa fonction de transfert et de leurs réponses impulsionnelles. (Vert) Deux pôles complexes conjugués. (Rouge) Pôle à partie réel négative. (Gris) Deux pôles complexes conjugués à partie réelle nulle. (Noir) Pôle nul. (Bleu) Deux pôles complexes conjugués à partie réelle positive. (Orange) Pôle à partie réel positive.

La figure 7.3 présente schématiquement les réponses impulsionales des systèmes selon la nature des pôles de la fonction de transfert du système dont on étudie la stabilité. Pour des pôles à parties réelles négatives, les réponses tendent toutes vers 0, mais à des vitesses différentes. Plus le pôle est éloigné de l'axe des imaginaires (plus la valeur absolue de la partie réelle est importante) plus rapide sera la convergence vers 0. Les pôles plus proches de l'axe des imaginaires sont qualifiés de **pôles dominants** (c.f section 3).

Condition fondamentale de stabilité

Un système est stable si sa fonction de transfert ne possède aucun pôles à partie réelle positive.

L'extrapolation de cette condition fondamentale de stabilité des systèmes linéaires au systèmes asservis est triviale. En effet, dans le cas d'un système asservis c'est la fonction de transfert en boucle fermée qui caractérise le système. Il suffit alors d'adapter la condition précédente à la fonction de transfert en boucle fermée.

Condition de stabilité d'un système asservi (1)

Un système asservi est stable si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôles à partie réelle positive.

L'inconvénient de cette condition est qu'elle nécessite de déterminer les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée par le calcul. Il existe deux familles de critères de stabilité qui permettent de s'affranchir de ces calculs :

- **Les critères algébriques**, qui permettent de vérifier la condition fondamentale de stabilité en étudiant directement le polynôme caractéristique de la **FTBF**.
- **Les critères graphiques**, qui permettent de vérifier la condition fondamentale de stabilité du système asservi en étudiant graphiquement la réponse harmonique de la **FTBO**.

Lorsque l'on a accès aux pôles de la fonction de transfert en boucle fermée, la vérification du respect de la condition fondamentale est aisée. Il est également possible d'étudier la stabilité du système asservis en fonction d'un paramètre de la boucle ouverte (comme le gain statique). Cette méthode correspond à la construction graphique des lieux d'Evans ((??))

4 Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh est dit algébrique car il s'établit directement sur la fonction de transfert $H_{BF}(p)$ en boucle fermée du système asservi.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec $N(p)$ et $D(p)$ deux polynômes en p . Pour appliquer le critère fondamental de stabilité à cette fonction de transfert, il nous faut étudier le **polynôme caractéristique** :

$$\begin{aligned} D(p) &= 0 \\ b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$



Edward John Routh (1831-1907), mathématicien anglais.



Adolf Hurwitz (1859-1919), mathématicien allemand.

pour déterminer si ce polynôme possède des racines toutes à partie réelle strictement négative. Les polynômes de ce type sont dits en mathématiques de Hurwitz². C'est pourquoi le critère suivant est également connu sous le nom de **critère de Routh-Hurwitz**. Il est possible de conclure sur la nature des racines d'un polynôme en étudiant ses coefficients. Le critère de Routh-Hurwitz se base sur cette propriété en posant deux conditions pour établir qu'un polynôme est un polynôme de Hurwitz. Dans le cas de l'application de la stabilité des systèmes linéaires asservis, la première condition s'énonce de la façon suivante :

Condition nécessaire de Routh-Hurwitz

Un système asservi d'ordre n est stable en boucle fermée si tous les coefficients ($b_i \forall i \neq n$) de son équation caractéristique sont de même signe que b_n .

Cette condition nécessaire s'avère suffisante si le système est du premier ou du second ordre. Pour un ordre supérieur il faut construire le tableau de Routh à partir des coefficients de $D(p)$, pour appliquer une condition supplémentaire.

4.1 Tableau de Routh

Dans le cas où la condition nécessaire est respectée et $n > 2$, il faut construire le **tableau de Routh** à partir des coefficients de l'équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée.

²Un polynôme de Hurwitz est un polynôme à coefficients réels dont les racines sont toutes à partie réelle strictement négative.

Le tableau de Routh est constitué de n lignes et de k colonnes où $k = n/2 + 1^3$. L'élément A_{ij} correspond à l'élément de la i -ème ligne et j -ème colonne.

p^n	A_{11}	A_{12}	A_{13}	\cdots	$A_{1(k-1)}$	A_{1k}
p^{n-1}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	\cdots	$A_{2(k-1)}$	A_{2k}
p^{n-2}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	\cdots	$A_{3(k-1)}$	A_{3k}
p^{n-3}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	\cdots	$A_{4(k-1)}$	A_{4k}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	A_{ij}	\vdots	\vdots
p^1	$A_{(n-1)1}$	$A_{(n-1)2}$	$A_{(n-1)3}$	\cdots	$A_{(n-1)(k-1)}$	$A_{(n-1)k}$
p^0	A_{n1}	A_{n2}	A_{n3}	\cdots	$A_{n(k-1)}$	A_{nk}

Les deux premières lignes du tableau sont directement construites à partir des coefficients de $D(p)$.

si n est impaire la dernière colonne de la seconde ligne est non-nulle :

impaire	p^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	\cdots	b_3	b_1	$\boxed{0}$
	p^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	\cdots	b_2	b_0	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Les éléments de la troisième ligne sont construits à partir du déterminant⁴ des éléments des deux premières lignes.

$$\frac{p^n}{p^{n-1}} \left| \begin{array}{cccccc} b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ \textcolor{red}{b_{n-1}} & \textcolor{red}{b_{n-3}} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \end{array} \right| \Rightarrow A_{31} = -\frac{1}{b_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{array} \right|$$

$$\frac{p^n}{p^{n-1}} \left| \begin{array}{cccccc} b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ \textcolor{blue}{b_{n-1}} & b_{n-3} & \textcolor{blue}{b_{n-5}} & \cdots & b_2 & b_0 \end{array} \right| \Rightarrow A_{32} = -\frac{1}{b_{n-1}} \left| \begin{array}{cc} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{array} \right|$$

On construit de la même manière la quatrième ligne :

$$\left| \begin{array}{cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & \color{red}{b_{n-1}} & \color{red}{b_{n-3}} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & \color{red}{A_{31}} & \color{red}{A_{32}} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right| \Rightarrow A_{41} = -\frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{22} \end{vmatrix}$$

³On réalise ici une division entière. Par exemple si $n = 5$, $k = 2 + 1 = 3$ et si $n = 6$, $k = 3 + 1 = 4$

⁴Le déterminant d'une matrice 2×2 est tel que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_3 & b_1 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_2 & b_0 \\ \hline p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \Rightarrow A_{42} = -\frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Et ainsi de suite jusque la dernière ligne du tableau. La formule générale pour obtenir l'élément A_{ij} est alors :

$$A_{ij} = -\frac{1}{A_{(i-1)1}} \begin{vmatrix} A_{(i-2)1} & A_{(i-2)(j+1)} \\ A_{(i-1)1} & A_{(i-1)(j+1)} \end{vmatrix} \quad (7.2)$$

Le critère s'applique sur la première colonne ainsi construit dite **colonne des pivots** du tableau de Routh.

$$\begin{array}{c|cccccc} p^n & b_n & b_{n-2} & b_{n-4} & \cdots & b_2 & b_0 \\ p^{n-1} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots & b_1 & 0 \\ \hline p^{n-2} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3(k-1)} & 0 \\ p^{n-3} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ p^1 & A_{(n-1)1} & A_{(n-1)2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p^0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}$$

Critère de Routh-Hurwitz

Un système asservi est stable en boucle fermée si tous les termes de la colonne des pivots du tableau de Routh du polynôme caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée sont de même signes.

Remarques :

Le nombre de changement de signe, nous donne le nombre de pôles à partie réelle positives (instables) de la fonction de transfert en boucle fermée.

Propriétés du tableau de Routh

Nous énonçons ici quelques propriétés du tableau de Routh pour faciliter ou permettre l'application du critère dans des cas particuliers [20].

- Pour simplifier les calculs, il est possible de factoriser par un entier une ligne du tableau.
- Dans le cas où le tableau présente un zéro dans la première colonne, il est possible de remplacer par une variable ϵ , et de prendre la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$ ou $\epsilon \rightarrow 0^-$ selon le signe de la colonne des pivots qui respecterait le critère.
- Une ligne de zéros pour les coefficients de l'avant-dernière ligne du tableau de Routh indique que le polynôme du dénominateur de la fonction de transfert possède une paire de pôles, qui sont racines de l'équation auxiliaire :

$$Ap^2 + B = 0$$

où A et B sont les coefficients de la ligne précédente du tableau. On peut alors continuer le tableau en remplaçant la ligne de coefficients nuls par les coefficients de la dérivée de l'équation auxiliaire.

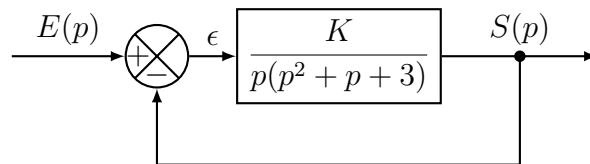
Une ligne de zéro implique la présence d'une paire de racines imaginaires pures donnant lieu à une forme sinusoïdale dans la réponse transitoire. Le système diverge en oscillant s'il y a au moins une racine à partie réelle positive, ou il converge vers des oscillations entretenues si les autres racines ont toutes une partie réelle négative.

4.2 Exemple d'application du critère de Routh-Hurwitz

La particularité du critère de Routh-Hurwitz est de permettre d'étudier les conditions de stabilité d'un système en fonction des paramètres de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Dans l'exemple ci-dessous, nous allons considérer un système asservi caractérisé par fonction de transfert en boucle ouverte défini par un gain K dont l'on souhaite déterminer la valeur pour assurer la stabilité du système en boucle fermée.

Soit un système asservi défini par le schéma-bloc suivant :



La fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ s'écrit :

$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{K}{p^3 + p^2 + 3p + K}.$$

L'équation caractéristique $D(p)$ de H_{BF} est donc

$$D(p) = p^3 + p^2 + 3p + K,$$

Nous constatons que le système est d'ordre 3 de coefficients :

$$\begin{aligned} b_3 &= 1 \\ b_2 &= 1 \\ b_1 &= 3 \\ b_0 &= K \end{aligned}$$

Le critère nécessaire de Routh est donc respecté pour $K > 0$. L'équation caractéristique étant d'ordre 3, il nous faut construire le tableau de Routh, afin de vérifier le critère supplémentaire :

p^3	1	3	
p^2	1	K	
p^1	A_{31}	0	
p^0	A_{41}	0	

$$A_{31} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & K \end{vmatrix} = 3 - K$$

$$A_{41} = -\frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} 1 & K \\ A_{31} & 0 \end{vmatrix} = K$$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 3 \\ p^2 & 1 & K \\ p^1 & 3 - K & 0 \\ p^0 & K & 0 \end{array}$$

La colonne des pivots sont tous de même signe si $3 - K > 0$ et $K > 0$ (déjà établie par la condition nécessaire de Routh). La condition sur K pour que le système soit stable en boucle fermée est donc :

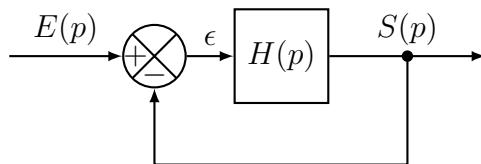
$$0 < K < 3$$

5 Critère de stabilité du revers

5.1 Critère de stabilité à partir de la boucle ouverte

Le critère de Routh s'applique sur la fonction de transfert en boucle fermée. Les critères graphiques que nous allons maintenant établir permettent d'étudier la stabilité du système en boucle fermée en considérant le système en boucle ouverte. Cependant, **le but est toujours de vérifier indirectement la condition fondamentale de stabilité des systèmes asservis** (c.-à-d. sur la nature des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée).

Pour celà considérons la boucle de contre réaction unitaire pour l'asservissement d'un système de fonction de transfert $H(p)$, telle que :



La fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ est simplement donné par $H(p)$, et comme nous l'avons déjà rencontré à plusieurs occasions, la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ est égale à

$$H_{BF}(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)},$$

Étudier les pôles de l'équation caractéristique $D(p) = 0$ est équivalent à étudier l'équation $1 + H_{BO}(p) = 0$, ou encore

$$D(p) = 0 \Leftrightarrow 1 + H_{BO}(p) = 0 \Leftrightarrow H_{BO}(p) = -1$$

Il est alors possible d'étudier la fonction de transfert en boucle ouverte par rapport à -1 plutôt que par rapport à l'origine. Ce point de coordonnées $(-1, 0)$ dans le plan complexe est appelé le **point critique** de $H_{BO}(p)$.

Pour montrer quelques propriétés de $1 + H_{BO}(p)$, nous allons réécrire ces fonctions de transferts en fonction des polynômes du numérateur et du dénominateur de la boucle ouverte. En effet, la fonction de transfert en boucle ouverte est en générale une fraction rationnelle de la forme :

$$H_{BO}(p) = \frac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p)} \quad (7.3)$$

$$1 + H_{BO}(p) = \frac{D_{BO}(p) + N_{BO}(p)}{D_{BO}(p)} \quad (7.4)$$

on a alors pour la fonction de transfert en boucle fermée,

$$H_{BF}(p) = \frac{N_{BO}(p)}{D_{BO}(p) + N_{BO}(p)} \quad (7.5)$$

Nous remarquons, à partir de cette dernière relation, que les zéros de $1 + H_{BO}(p)$ sont les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ et que les pôles de $1 + H_{BO}(p)$ coïncident avec les pôles de $H_{BO}(p)$. Il est donc possible de réinterpréter la condition stabilité d'un système asservi :

Condition de stabilité d'un système asservi (2)

Un système asservi est stable en boucle fermée si la fonction de transfert $1 + H_{BO}(p)$ en boucle ouverte ne possède aucun zéros à partie réelle positive.

5.2 Mise en évidence de l'instabilité en boucle fermée

Nous allons maintenant établir un critère de stabilité des systèmes asservis, dit du revers, que nous pourrons appliquer directement sur la réponse harmonique de la FTBO (et de ses différentes représentations graphiques).

Supposons le système asservi précédent décrit par la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$. Par définition cette fonction de transfert est le rapport de la sortie $S(p)$ sur l'écart $\epsilon(p)$ que l'on souhaite minimiser.

$$S(p) = H_{BO}(p)\epsilon(p)$$

Considérons une entrée $e(t)$ sinusoïdale de la forme :

$$e(t) = E_0 \sin \omega t.$$

Étant donné qu'au premier instant, on a $e(t) = \epsilon(t)$, en régime permanent la sortie est de la forme (c.f [Chapitre 4](#)) :

$$s(t) = E_0 |H_{BO}(j\omega)| \sin(\omega t + \phi).$$

L'écart $\epsilon(t) = e(t) - s(t)$ est maximum pour une sortie en opposition de phase. Il existe donc une pulsation ω_π pour laquelle :

$$\phi = \arg H_{BO}(j\omega_\pi) = -\pi$$

Pour cette pulsation (ω_π) et ce déphasage (- π)

$$S(p) = -|H_{BO}(j\omega_\pi)|\epsilon(p)$$

en posant $K = |H_{BO}(j\omega_\pi)|$, on identifie la **FTBO** a :

$$H_{BO}(p) = -K$$

puisque la fonction de transfert est sur l'axe des réels négatifs pour cette pulsation. L'écart dans le domaine de Laplace devient :

$$\begin{aligned}\epsilon(p) &= E(p) - S(p) \\ \epsilon(p) &= E(p) + K\epsilon(p)\end{aligned}$$

Remplaçons à nouveau $\epsilon(p)$ par sa définition (pour simuler une deuxième boucle) :

$$\epsilon(p) = E(p) + K(E(p) - S(p)) = E(p)(1 + K) + K^2\epsilon(p)$$

et ainsi de suite :

$$\epsilon(p) = E(p)(1 + K) + K^2(E(p) - S(p)) = E(p)(1 + K + K^2) + K^3\epsilon(p)$$

on obtient après n substitutions :

$$\epsilon(p) = E(p) \sum_{i=0}^n K^i + K^n\epsilon(p)$$

La stabilité du système est alors liée à la convergence de cette somme. La somme diverge si $K \geq 1$ et converge si $K < 1$. **Autrement dit le système est stable en boucle fermée pour $|H_{BO}(j\omega)| < 1$.**

Nous pouvons donc énoncer le critère de stabilité dit du revers :

Critère de stabilité du revers

Un système est stable en boucle fermée si lorsque le déphasage en boucle ouverte est de -180° le module $|H_{BO}(j\omega)|$ est strictement inférieur à 1.

Formellement, pour une pulsation ω_π telle que $\phi = \arg(H_{BO}(j\omega_\pi)) = -\pi$, le système est stable en boucle fermée si $|H_{BO}(j\omega_\pi)| < 1$ ou $20 \log |H_{BO}(j\omega_\pi)| < 0 \text{ dB}$.

Dans le plan complexe, un déphasage de $-\pi$ et un gain naturel de 1 correspond au point de coordonnées $(-1, 0)$ ce que nous avons défini comme le point critique à partir de l'équation caractéristique $1 + H_{BO} = 0$. Ce critère revient donc à étudier graphiquement le comportement de la réponse harmonique de $H_{BO}(j\omega)$ par rapport au point critique. Nous allons maintenant appliquer ce critère du revers aux différentes représentations graphiques de la réponse harmonique du système en boucle ouverte (c.f [Chapitre 4](#)).

5.3 Critère du revers dans le plan de Nyquist

Pour énoncer le critère du revers dans le plan de Nyquist. Il nous faut tracer le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte et observer comment il se comporte par rapport au point critique de coordonnées $(-1, 0)$ du plan complexe.

La figure 7.4 présente les lieux de Nyquist de trois systèmes : stable, instable et critique. Observons que dans le cas stable, le lieu de déphasage $\phi = -\pi$ (c.a.d lorsque le lieu coupe l'axe des réels négatifs), le module ou le gain naturel $G(\omega)$ (ou encore la distance à l'origine) est inférieur à 1. Dans le cas instable ce gain est supérieur à 1. Nous appelerons critique le système dont le lieu de Nyquist passe par le point critique de coordonnées $(-1, 0)$.

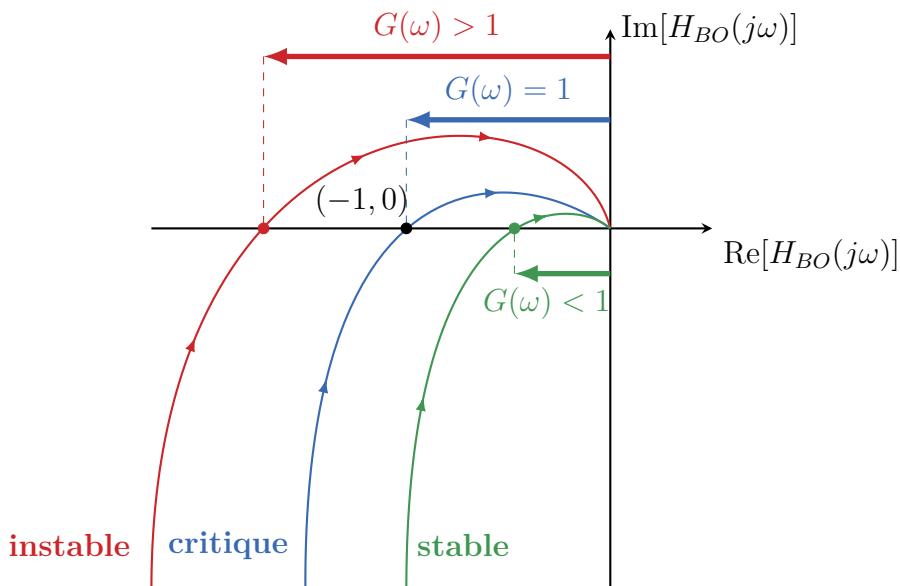


Figure 7.4 – Représentation schématique de lieux de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

Nous pouvons maintenant formuler le critère du revers du lieu de Nyquist :

Critère du revers de Nyquist

Un système est stable en boucle fermée si lorsque parcourant le lieu de Nyquist de la boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique sur la gauche.

5.4 Critère du revers dans le plan de Black

Dans le plan de Black (c.-à-d. le gain en ordonnée dB et le déphasage en abscisse), le point critique est de coordonnées $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$. À l'instar du cas précédent, nous allons discuter de l'allure du lieu de Black par rapport à ce point critique pour trois systèmes différents : stable, instable et critique.

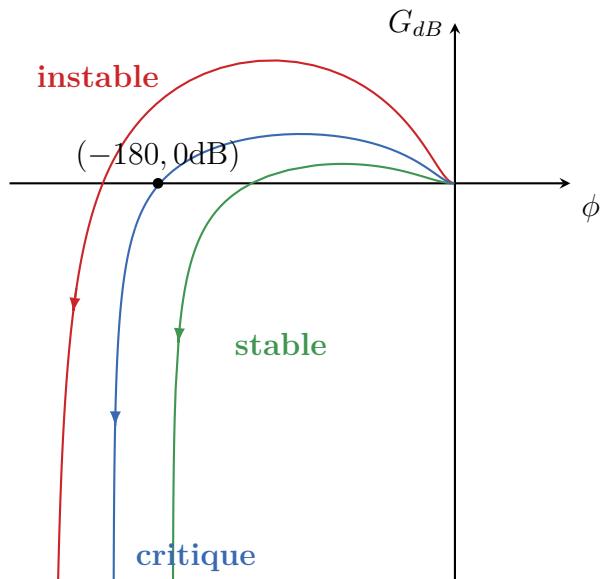


Figure 7.5 – Représentation schématique de lieux de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

Critère du revers de Black

Un système est stable en boucle fermée si lorsque parcourant le lieu de Black de la boucle ouverte dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique sur la *droite*.

5.5 Critère du revers dans le plan de Bode

Il est possible d'appliquer le critère du revers au lieu de transfert de Bode en boucle ouverte. Le point critique dans le plan de Bode est représenté par deux verticales coupant les deux graphes en gain et en déphasage. De ce fait il faut vérifier deux conditions pour respecter le critère du revers dans le plan de Bode

Critère du revers de Bode (1)

Un système est stable en boucle fermée si, pour la pulsation ω_1 telle que le module de la fonction de transfert en boucle ouverte est égal à 1 (c.a.d $H_{BO}(\omega_1) = 1$ ou 0 dB), le déphasage $\phi(\omega_1)$ est supérieur à -180°

Critère du revers de Bode (2)

Un système est stable en boucle fermée si, pour la pulsation ω_c (pulsation critique) telle que l'argument de la fonction de transfert en boucle ouverte (déphasage) est égale à -180° (c.a.d $\phi(\omega_c) = -180^\circ$), le gain $G_{dB}(\omega_c)$ est négatif.

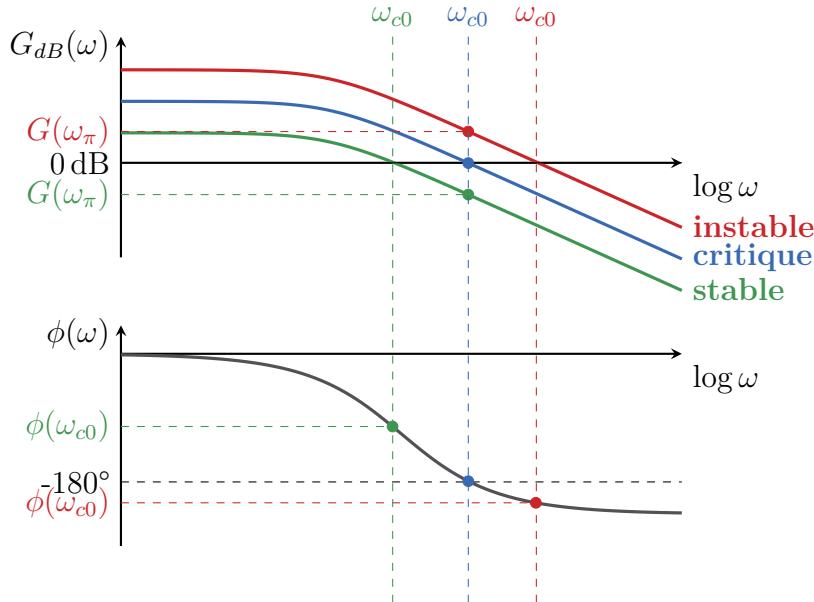


Figure 7.6 – Représentation schématique de lieux de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte de trois systèmes asservis : stable, critique et instable.

6 Marge de stabilité et robustesse de la stabilité

Les critères de stabilité graphiques permettent de s'assurer qu'un système est stable ou instable (ou à la limite de la stabilité) en étudiant la réponse harmonique. Pour estimer la proximité de la réponse harmonique au point critique, nous définissons les marges de stabilité.

Marge de phase

La marge de phase M_ϕ est définie par : $M_\phi = \pi + \arg H_{BO}(j\omega_{c0})$ où ω_{c0} est la pulsation de coupure pour laquelle le gain naturel $G(\omega_{c0}) = |H_{BO}(j\omega_{c0})| = 1$ (ou encore 0 dB)

Marge de gain

La marge de gain M_G est définie par $M_G = -20 \log |H(j\omega_\pi)|$ où ω_π est la pulsation pour laquelle le déphasage vaut -180° ($\phi(\omega_\pi) = \arg(H_{BO}(j\omega_{c0})) = -\pi$ ou autrement l'argument du point critique dans le plan complexe).

Ces marges de stabilité sont en générales imposées par le cahier des charges. En générales des valeurs pour M_ϕ de 45 à 60° et pour M_G de 6 à 15 dB sont considérées comme satisfaisantes.

Il est possible de déterminer ces marges de stabilité par le calcul, mais c'est la détermination graphique qui est la plus intéressante. Il est d'ailleurs possible de le faire à partir des trois diagrammes de la réponse harmonique.

6.1 Marges de stabilité à partir du diagramme de Nyquist

La figure 7.7 représente schématiquement les marges de stabilité pour le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte. Pour obtenir la marge de gain M_G , on détermine graphiquement le module pour la pulsation donnant une partie imaginaire nulle (ω_π) et on calcule directement la marge de gain en dB par la relation $M_G = -20 \log |H(j\omega_\pi)|$. Pour déterminer la marge de phase graphiquement, on trace le cercle de rayon 1 (en module). L'intersection avec le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte nous permet d'obtenir $H_{BO}(j\omega_{c0})$ et on détermine l'angle entre l'axe des réels et le segment passant par le point $H_{BO}(j\omega_{c0})$ et l'origine.

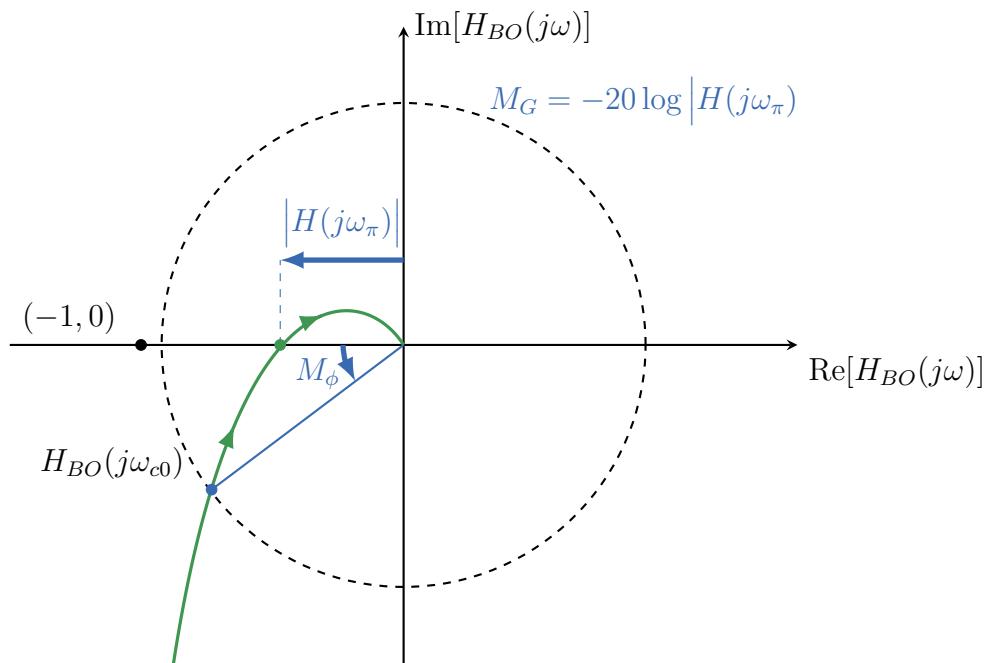


Figure 7.7 – Représentation schématique des marges de stabilité du lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système stable.

6.2 Marges de stabilité à partir du diagramme de Bode

La figure 7.8 représente schématiquement les marges de stabilité pour le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte. Pour obtenir la marge de gain M_G , on

6.3 Marges de stabilité à partir du diagramme de Black

La figure 7.9 représente schématiquement les marges de stabilité pour le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte. Pour obtenir la marge de gain M_G , on

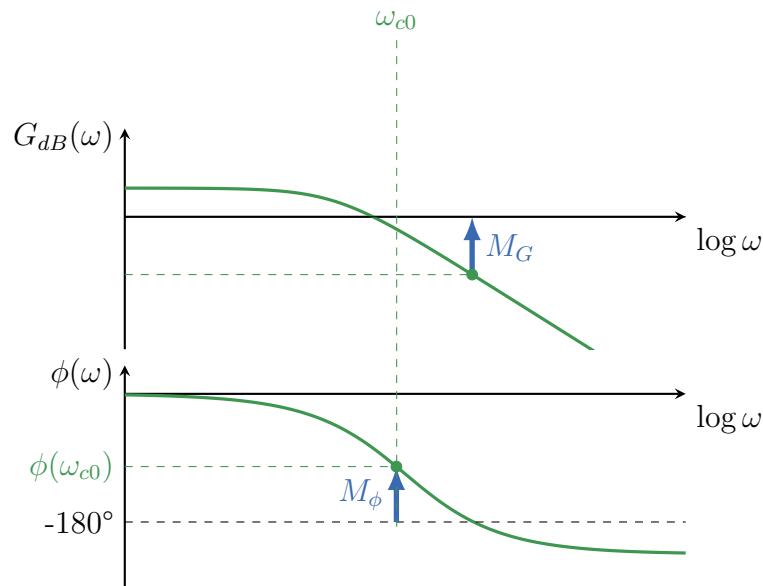


Figure 7.8 – Représentation schématique des marges de stabilité du lieu de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système stable.

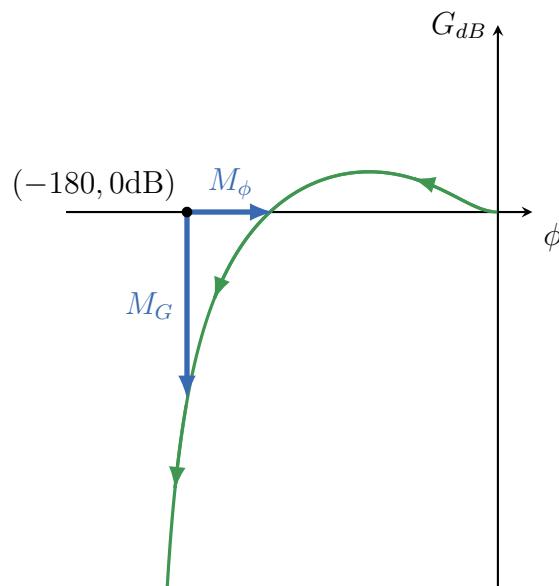


Figure 7.9 – Représentation schématique des marges de stabilité du lieu de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système stable.

7 Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist généralise le critère du revers. Il s'appuie sur le principe de l'argument de Cauchy. Nous suivrons la présentation « graphique » de ce théorème et du critère de Nyquist donné par [1, 2].

7.1 Image d'un contour par une fonction de transfert

Pour présenter le principe de l'argument de Cauchy, il nous faut déterminer l'image d'un contour par une fonction de transfert. La figure 7.10 présente un exemple de contour \mathcal{C} parcourant le plan complexe de la variable p dans le sens des aiguilles d'une montre. On se donne une fonction de transfert ne possédant aucun pôles et zéros sur \mathcal{C} . Ces pôles et zéros de la fonction de transfert peuvent être contenus dans le contour d'origine. On appelle Γ l'image de \mathcal{C} par $F(p)$. Le principe de Cauchy nous permet de quantifier le nombre de pôles et zéros contenus dans le contour en étudiant l'image de la fonction de transfert par rapport à l'origine du plan..

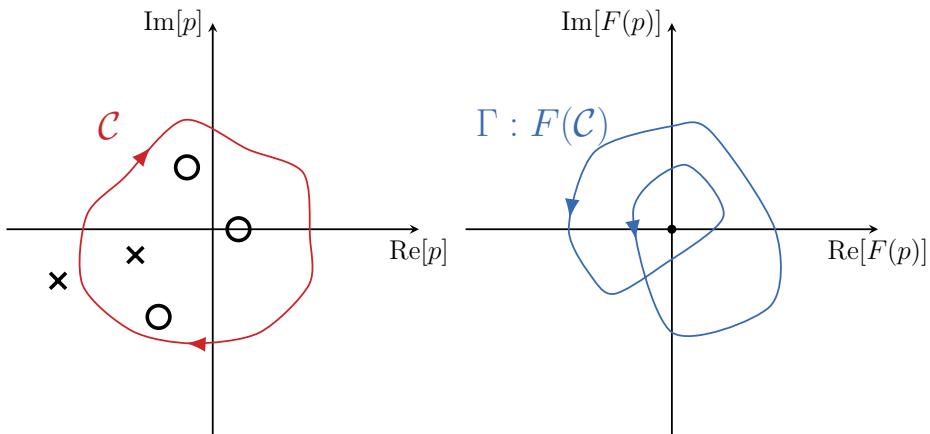


Figure 7.10 – Représentation de la transformation (à gauche) d'un contour \mathcal{C} (à droite) en son image par une fonction analytique $F(p)$. La carte des pôles et zéros est également représentée sur le plan complexe de gauche.

En prenant des exemples simples (c.f Annexe J⁵), il est possible de formuler quelques règles sur la nature du contour image connaissant le contour d'origine par rapport aux pôles et zéros de l'application. Notamment,

- si le contour origine contient Z zéros de la fonction de transfert, le contour image fait Z tours autour de l'origine dans le même sens que le contour origine.
- si le contour origine contient P pôles de la fonction de transfert, le contour image fait P tours autour de l'origine dans le sens opposé au contour d'origine.

⁵Cette annexe est formellement un notebook IPython. Les modules utilisés sont développés en Python

7.2 Principe de l'argument de Cauchy

Soit un contour \mathcal{C} parcourant le plan complexe de la variable p dans le sens des aiguilles d'une montre et $F(p)$ une fonction rationnelle ne possédant ni pôles ni zéros sur \mathcal{C} . Le théorème du principe de l'argument de Cauchy permet de relier, le nombre de pôles P et de zéros Z contenus par le contour \mathcal{C} au comportement de la courbe $F(\mathcal{C})$ image $F(p)$ de \mathcal{C} .

Énoncé du principe de l'argument de Cauchy

Si un contour \mathcal{C} contient Z zéros et P pôles d'une fonction analytique $F(p)$ sans en traverser aucun, alors quand on le parcourt dans le sens anti-trigonométrique, le contour $\Gamma = F(\mathcal{C})$ fait un nombre de tours N autour de l'origine dans le sens anti-trigonométrique égal à,

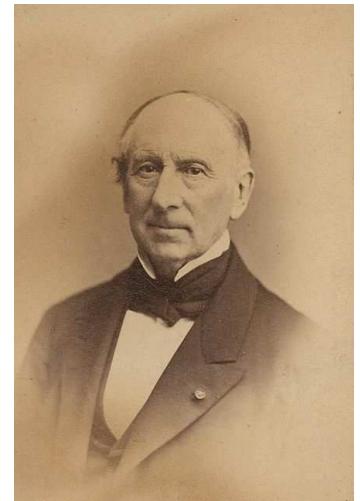
$$N = Z - P$$

On se rapportera à nouveau à l'[Annexe J](#) pour une démonstration graphique de ce théorème⁶.

Dans l'exemple de la [figure 7.10](#), la fonction analytique $F(p)$ possède 2 pôles et 3 zéros. Le contour contient $Z = 3$ zéros et $P = 1$ pôle. Le contour $\Gamma = F(\mathcal{C})$ fait alors $N = Z - P = 2$ tours autour de l'origine dans le sens trigonométrique ($N > 0$). Remarquons que les tours sont comptés positivement dans le sens trigonométrique (c.f [figure 7.11](#)).

7.3 Contours de Nyquist et de Bromwich

Pour pouvoir appliquer le critère de Nyquist par l'intermédiaire du principe de l'argument de Cauchy, il nous faut définir le contour orienté dans le plan p qui entoure la zone instable (c.a.d le demi-plan à partie réelle positive). Nous présentons deux types de contours : (1) le contour de Nyquist et (2) ceux de Bromwich. Ces contours sont composés de tout l'axe des imaginaires et d'un demi cercle de rayon infini centré sur l'origine. La portion sur l'axe des imaginaires correspond directement au diagramme de Nyquist de la réponse harmonique d'un [SLCI](#) régi par la fonction de transfert mis en jeu. Dans le cas où $p = 0$ est un pôle ou un zéro de cette fonction de transfert, le contour sera également composé d'un cercle de rayon $r \rightarrow 0$ centré sur les pôles nuls. Cette limite assure que le contour ne passe pas par des pôles et zéros de la fonction de transfert mais que tous le plan complexe soit bien pris en compte.



Augustin Louis Cauchy
(1789-1857), mathématicien français (X1807)

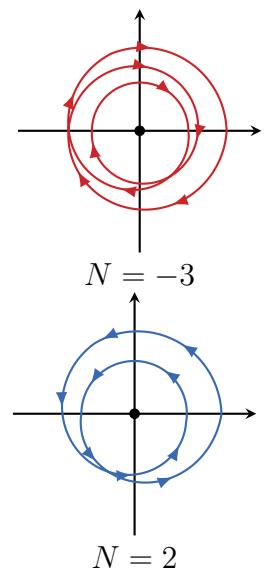


FIGURE 7.11 : Représentation schématique du nombre de tours N autour de l'origine de l'image d'une fraction rationnelle d'un contour fermé. Le sens positif est celui du sens trigonométrique.



Thomas John I'Anson Bromwich (1875-1929), mathématicien anglais.

⁶Un cours d'analyse complexe permettra de compléter cette présentation. On trouvera dans [5, 1], une introduction plus détaillée ainsi qu'une bibliographie très fournie sur le sujet.

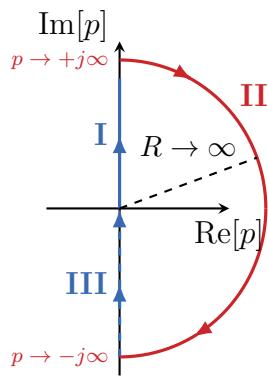


FIGURE 7.12 : Contour de Nyquist où H_{BO} ne possède aucun pôle ou zéro nul.

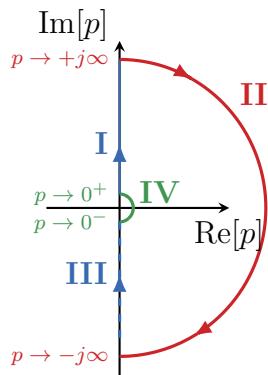


FIGURE 7.13 : Contour de Bromwich où 0 est un pôle ou zéro de H_{BO} .

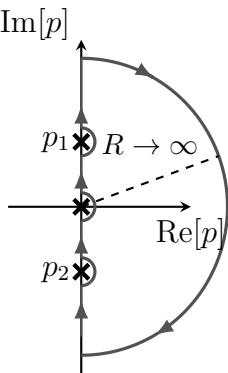


FIGURE 7.14 : Contours de Bromwich où 0, p_1 et p_2 sont des pôles ou zéros de H_{BO} .

Contour de Nyquist

La figure 7.12 (a) présente le contour de Nyquist. Celui-ci est composé de trois portions :

- **I** : l'axe des imaginaires positifs pour laquelle $p = j\omega$ avec $\omega \in [0, \infty[$,
- **II** : un demi-cercle de rayon R entourant tout le demi-plan complexe de partie réelle positive et pour lequel $p = Re^{j\theta}$ avec $R \rightarrow \infty$ et $\theta \in [0, \pi/2]$,
- **III** : l'axe des imaginaires négatifs pour laquelle $p = -j\omega$ avec $\omega \in]-\infty, 0]$, symétrique de **I**

L'image de la portion **I** sera donnée par $H_{BO}(j\omega)$, ce qui correspond au lieu de Nyquist pour $\omega \in [0, \infty[$. L'image de la portion **II** est l'origine du plan complexe dans le cas où la fraction rationnelle présente un degré au dénominateur supérieur à celui du numérateur⁷. L'image de la portion **III** peut être déterminé à partir de l'image de la portion **I** par symétrie par rapport à l'axe des réels⁸. **En conclusion, l'image par le contour de Nyquist d'une fonction de transfert est donnée par le lieu de Nyquist complet de sa réponse harmonique.**

Contour de Bromwich

La figure 7.13 (b) présente un contour de Bromwich dans le cas où $p = 0$ est pôle de la fonction de transfert. Celui-ci est composé de quatre portions, les trois premières correspondent à celles déjà rencontrée précédemment dans le cas du contour de Nyquist, et :

- **IV** : un demi cercle de rayon r contournant l'origine pour lequel $p = re^{j\theta}$ avec $r \rightarrow 0$ et $\theta \in]0, \pi/2]$.

Dans le cas où la fonction de transfert présente également des pôles et zéros imaginaires purs non nuls, on utilisera le contour de Bromwich évitant ces pôles et zéros sur l'axe des imaginaires. (c.f figure 7.14).

De la même manière que précédemment, les images d'une fonction de transfert par ces contours de Bromwich correspondent également au lieu de Nyquist complet de la réponse harmonique. Le choix du contour dépend donc de la forme de la fonction de transfert étudiée.

⁷C'est très souvent le cas dans l'étude des systèmes linéaires

⁸C'est la conséquence géométrique du fait que $\overline{H_{BO}(j\omega)} = H_{BO}(-j\omega) = \text{Re}[H_{BO}(j\omega)] - \text{Im}[H_{BO}(j\omega)]$. Nous avons déjà rencontré cette propriété pour déterminer la réponse harmonique d'un système linéaire.

Exemple d'image par le contour de Nyquist

La figure 7.15 présente une image du contour de Nyquist par la fonction de transfert du premier ordre $H_1(p) = \frac{1}{1+p}$. Les images des différentes portions de ce contour sont représentées et correspondent bien au lieu de Nyquist complet de la fonction de transfert de départ.

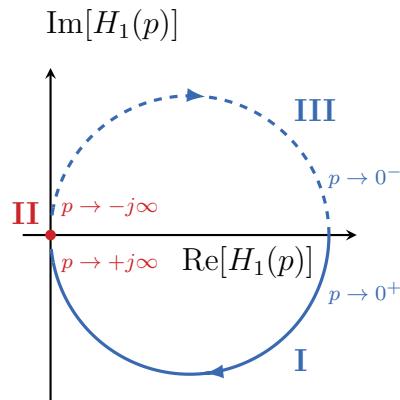


Figure 7.15 – Exemple de représentation d'un lieu complet de Nyquist d'une fonction de transfert $H_1(p)$ par l'image du contour de Nyquist.

Exemple d'image par le contour de Bromwich

Dans le cas où la fonction de transfert présente un pôle sur l'axe des imaginaires, il faut alors utiliser le contour de Bromwich. C'est le cas par exemple pour la fonction de transfert suivante : $H_2(p) = \frac{1}{p(1+p)}$. Les portions **I**, **II** et **III** correspondent bien au

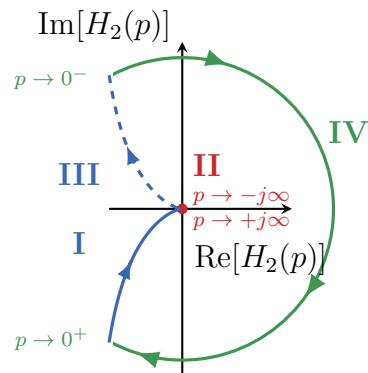


Figure 7.16 – Exemple de représentation d'un lieu complet de Nyquist d'une fonction de transfert $H_2(p)$ possédant un pôle nul par l'image du contour de Bromwich.

lieu de Nyquist complet de la fonction de transfert. La portion **IV** permet de relier le plan des imaginaires positifs et négatifs à l'infini.

7.4 Énoncé et application du critère de Nyquist

Le critère de Nyquist consiste à relier le principe de l'argument de Cauchy au second critère de stabilité des systèmes asservis. Nous rappelons en effet qu'un système est stable en boucle fermée si la fonction de transfert $1 + H_{BO}$ ne présente pas de zéros à partie réelle positive. Il nous est possible d'établir l'énoncé suivant :

Énoncé du critère de Nyquist

D'après le principe de l'argument de Cauchy, appliqué à $H_{BO}(p)$ avec le contour de Nyquist (ou de Bromwich si nécessaire). Un système est stable en boucle fermée si

$$Z = N + P = 0,$$

avec :

- Z est le nombre de zéros à partie réelle positive de $1 + H_{BO}$.
- N le nombre de tours autour du point critique **(-1,0)** que fait le diagramme de Nyquist de $H_{BO}(p)$ dans le sens anti-trigonométrique (équivalent au nombre de tours autour de l'origine de $1 + H_{BO}(p)$)
- P le nombre de pôles positifs de $1 + H_{BO}(p)$ (équivalent au nombre de pôles de $H_{BO}(p)$)

Nous allons maintenant traiter quelques exemples pour montrer l'efficacité de cet énoncé.

Exemple 1

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte $H_1(p)$ telle que :

$$H_1(p) = \frac{p + 3}{(p + 2)(p^2 + 2p + 25)}$$

On cherche à déterminer si le système est stable en boucle fermée par le critère de Nyquist. La FTBO ne présente aucun pôle à partie réelles positives donc $P = 0$. Traçons maintenant, le lieu de Nyquist complet de la FTBO. Celui-ci n'entoure pas le point critique ($N = 0$) (c.f [figure 7.17](#)).

Nous obtenons donc, par application du critère de Nyquist :

$$Z = N + P = 0$$

C'est à dire que $1 + H_1(p)$ n'a pas de zéro à partie réelle positive, ce qui permet de conclure que le système est stable en boucle fermée.

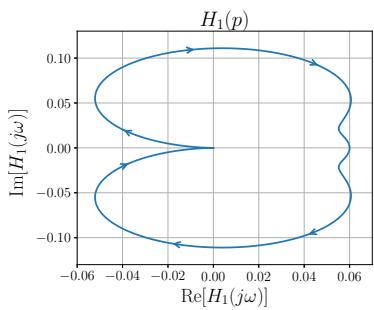


FIGURE 7.17 : Lieu de Nyquist complet de la FTBO de $H_1(p)$

Exemple 2

Dans l'exemple suivant la fonction de transfert en boucle ouverte est maintenant donnée par :

$$H_2(p) = \frac{500(p - 2)}{(p + 2)(p + 7)(p + 50)}$$

Celle-ci ne présente pas de pôles à partie réelle positive ($P = 0$). Il est également possible d'observer que la réponse harmonique en boucle ouverte entoure le point critique une fois dans le sens trigonométrique ($N = 1$) (c.f [figure 7.18](#)). Par application du critère de Nyquist, on obtient donc :

$$Z = N + P = 1$$

Le système est donc instable en boucle fermée et présente un pôle instable.

Nous laissons au lecteur la vérification par application des autres critères de stabilité (algébrique et graphique) vus lors de ce graphique.

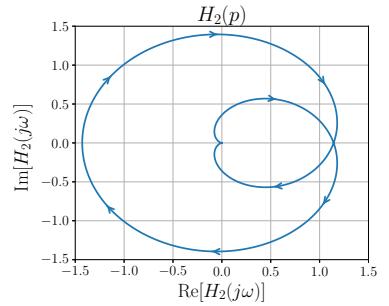
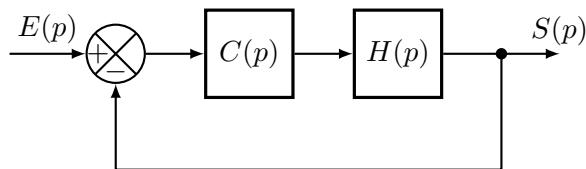


FIGURE 7.18 : Lieu de Nyquist complet de la FTBO de $H_2(p)$

8 Exercices du chapitre

Exercice 1 : Stabilité d'un système du second ordre ★★★

Un système est décrit par le schéma bloc suivant :



avec :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}$$

Q1. À partir du critère de Routh, déterminer les conditions de stabilité sur K , ξ et ω_0 pour deux types de correcteurs :

- P (proportionnel) : $C(p) = 1$
- I (intégrateur) : $C(p) = \frac{1}{p}$

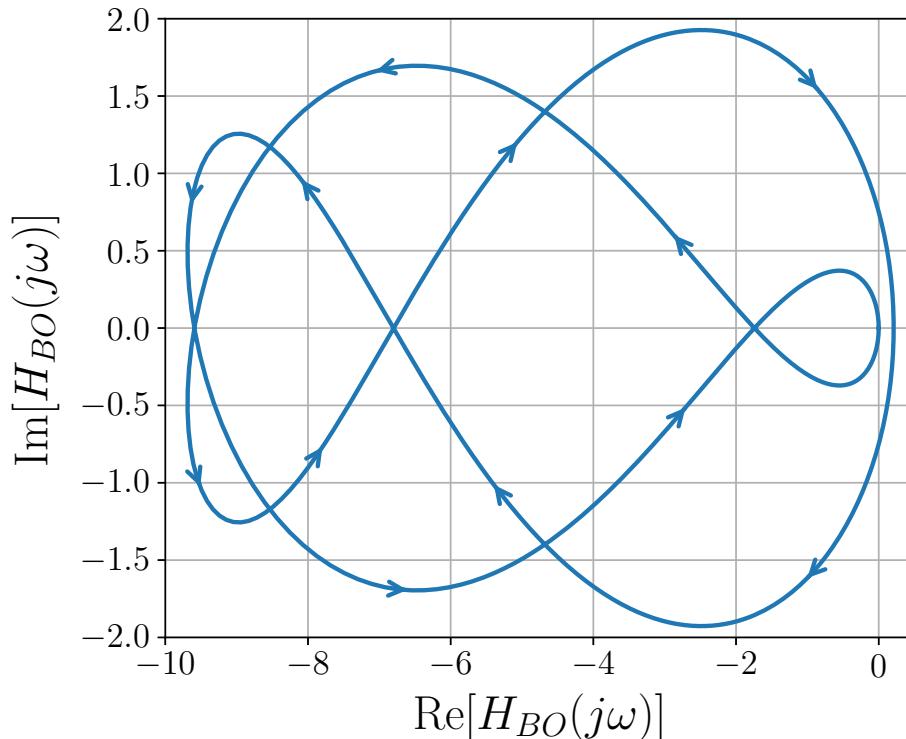
Exercice 2 : Application du critère de Routh ★★★

Q1. Déterminer la stabilité des systèmes définis par les équations caractéristiques suivantes par le critère de Routh :

- a) $D(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 1$
- b) $D(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + p + 1$
- c) $D(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3$
- d) $D(p) = p^5 + 7p^4 + 6p^3 + 42p^2 + 8p + 56$

Exercice 3 : Critère de Nyquist ★★

Un système en boucle ouverte présente deux pôles instables (à parties réelles positives). On cherche à montrer que ce système peut être stable en modifiant la valeur du gain K en boucle ouverte. La figure ci-dessous représente la réponse harmonique du système en boucle ouverte que l'on souhaite asservir à l'aide d'une boucle de contre-réaction pour $K = 1$.



Q1. D'après le critère de Nyquist, déterminer les zones du plan complexe qui permettraient au système d'être stable en boucle fermée.

Q2. Déterminer alors la condition sur K pour ce système soit stable en boucle fermée.

9 Corrigé des exercices

Exercice 1 : Stabilité d'un système du second ordre

Q1. À partir du critère de Routh, déterminer les conditions sur K , ξ et ω_0 pour deux types de fonctions de transferts $C(p)$:

$$C(p) = 1 \text{ (gain pur)}$$

Dans ce cas la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$H_{BF} = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2(1 + K)}$$

Cette fonction de transfert est du deuxième ordre. Le critère de Routh s'applique sur le dénominateur $D(p)$ de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$D(p) = p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2(1 + K)$$

À l'aide du premier critère de Routh (condition nécessaire de stabilité), nous savons que tous les coefficients du polynôme $D(p)$ doivent être de même signe. Il s'avère que cette condition est suffisante dans le cas où le système est d'ordre $n < 2$.

$$\begin{aligned} 1 + K > 0 &\Rightarrow K > -1 \\ 2\xi\omega_0 > 0 &\Rightarrow \xi > 0 \end{aligned}$$

Nous retrouvons un résultat déjà connu pour la stabilité d'un système du second ordre amorti. En effet, le cas $\xi = 0$ correspond au cas de l'oscillateur harmonique instable par définition. Les deux autres régimes connus s'obtiennent pour $\xi > 0$.

$$C(p) = \frac{1}{p} \text{ (un intégrateur)}$$

Dans ce cas la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$H_{BF} = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2) + K\omega_0^2}$$

Cette fonction de transfert est du troisième ordre. Le critère de Routh s'applique sur le dénominateur $D(p)$ de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$D(p) = p^3 + 2\xi\omega_0 p^2 + \omega_0^2 p + K\omega_0^2$$

À l'aide du premier critère de Routh (condition nécessaire de stabilité), nous savons que tous les coefficients du polynôme $D(p)$ doivent être de même signe. Soit alors les conditions suivantes, nécessaire mais pas suffisante, sur les paramètres du système du second ordre :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &> 0 \\ K &> 0 \\ 2\omega_0\xi > 0 &\Rightarrow \xi > 0 \text{ (que si } \omega_0 > 0\text{)} \end{aligned}$$

Notons que la condition sur K est différente par rapport au cas du second ordre pur et que la condition sur ξ est retrouvée que si on impose une condition sur ω_0 (condition physique

d'une pulsation positive). Construisons le tableau de Routh pour permettre de déterminer les conditions supplémentaires.

p^3	1	ω_0^2
p^2	$2\xi\omega_0$	$K\omega_0^2$
p^1	A_{31}	0
p^0	A_{41}	0

avec

$$A_{31} = -\frac{1}{2\xi\omega_0} \begin{vmatrix} 1 & \omega_0^2 \\ 2\xi\omega_0 & K\omega_0^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\xi\omega_0} (2\xi\omega_0^3 - K\omega_0^2) = \frac{1}{2\xi\omega_0} (\omega_0^2(2\xi\omega_0 - K))$$

et

$$A_{41} = -\frac{1}{A_{31}} \begin{vmatrix} 2\xi\omega_0 & K\omega_0^2 \\ A_{31} & 0 \end{vmatrix} = K\omega_0^2$$

Les conditions sur la colonne des pivots du tableau de Routh sont :

$$2\xi\omega_0 > 0$$

$$A_{31} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\xi\omega_0} (\omega_0^2(2\xi\omega_0 - K)) > 0 \Rightarrow 2\xi\omega_0 - K > 0 \Rightarrow K < 2\xi\omega_0$$

$$K\omega_0^2 > 0$$

La première et la dernière conditions étaient déjà connues à partir de la condition nécessaire. La condition fondamentale de stabilité reliant tout les paramètres du système du second ordre en série avec un intégrateur pur est :

$$K < 2\xi\omega_0$$

Exercice 2 : Application du critère de Routh

Q1. Déterminer la stabilité des systèmes définis par les équations caractéristiques suivantes :

a)

La condition nécessaire du critère de Routh est trivialement respectée. Construisons le tableau de Routh :

p^5	1	3	3
p^4	2	4	1
p^3	1	$\frac{5}{2}$	0
p^2	-1	1	0
p^1	$\frac{7}{2}$	0	0
p^0	1	0	0

Avec,

$$A_{31} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{32} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{2},$$

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{42} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{51} = - \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2},$$

$$A_{61} = -\frac{2}{7} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{7}{2} & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

Le système est **instable** en boucle fermée par le critère de Routh. **b)**

La condition nécessaire du critère de Routh est trivialement respectée. Construisons le tableau de Routh :

p^4	1	3	1
p^3	1	1	0
p^2	2	1	0
p^1	$\frac{1}{2}$	0	0
p^0	1	0	0

Avec,

$$A_{31} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{41} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$A_{51} = -\frac{1}{A_{41}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ A_{41} & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

Le système est **stable** en boucle fermée par le critère de Routh. **c)**

La condition nécessaire du critère de Routh est trivialement respectée. Construisons le tableau de Routh :

p^5	1	3	5
p^4	2	6	3
p^3	ϵ	$\frac{7}{2}$	0
p^2	$6 - \frac{7}{\epsilon}$	3	0
p^1	A_{51}	0	0
p^0	3	0	0

Avec

$$A_{31} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

lorsque l'on obtient un zéro dans la première colonne on remplace le zéro par un epsilon que l'on fait tendre vers zéro (c.a.d $\epsilon \rightarrow 0$).

$$A_{32} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{7}{2},$$

$$A_{41} = -\frac{1}{\epsilon} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ \epsilon & \frac{7}{2} \end{vmatrix} = 6 - \frac{7}{\epsilon},$$

$$A_{42} = -\frac{1}{\epsilon} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \epsilon & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{51} = -\frac{1}{A_{41}} \begin{vmatrix} \epsilon & \frac{7}{2} \\ A_{41} & 3 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} - 3\epsilon \frac{1}{A_{41}},$$

Déterminons les signes des éléments de la colonne des pivots du tableau de Routh :

$$\epsilon > 0 \Rightarrow \epsilon \rightarrow 0^+$$

$$A_{41} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 6 - \frac{7}{\epsilon} < 0$$

$$A_{51} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{7}{2} - 3\epsilon \frac{1}{A_{41}} > 0$$

$$A_{61} = 3 > 0$$

Le système est **instable** en boucle fermée par le critère de Routh. Le nombre de changement de signe dans la colonne des pivots nous indique le nombre de pôles à partie réelle positive. **d)**

La condition nécessaire du critère de Routh est trivialement respectée. Construisons le tableau de Routh :

p^5	1	6	8
p^4	7	42	56
p^3	A_{31}	A_{32}	0
p^2	A_{41}	A_{42}	0
p^1	A_{51}	0	0
p^0	A_{61}	0	0

Notons qu'il est possible de factoriser une ligne par un entier :

p^5	1	6	8
p^4	1	6	8
p^3	A_{31}	A_{32}	0
p^2	A_{41}	A_{42}	0
p^1	A_{51}	0	0
p^0	A_{61}	0	0

Avec,

$$A_{31} = -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$A_{32} = -\frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Lorsque l'on a à faire à une ligne de zéro on peut remplacer cette ligne par la dérivée de l'équation auxiliaire. Cette équation correspond au polynôme construit à partir des coefficients précédent la ligne de zéros. L'équation auxiliaire $A(p)$ est donc :

$$A(p) = p^4 + 6p^2 + 8$$

sa dérivée :

$$4p^3 + 12p$$

Le tableau de Routh devient alors :

p^5	1	6	8	
p^4	1	6	8	
p^3	4	12	0	
p^2	A_{41}	A_{42}	0	
p^1	A_{51}	0	0	
p^0	A_{61}	0	0	

avec

$$A_{41} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{42} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8,$$

p^5	1	6	8	
p^4	1	6	8	
p^3	4	12	0	
p^2	3	8	0	
p^1	A_{51}	0	0	
p^0	A_{61}	0	0	

Calculons maintenant :

$$A_{51} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{4}{3},$$

et

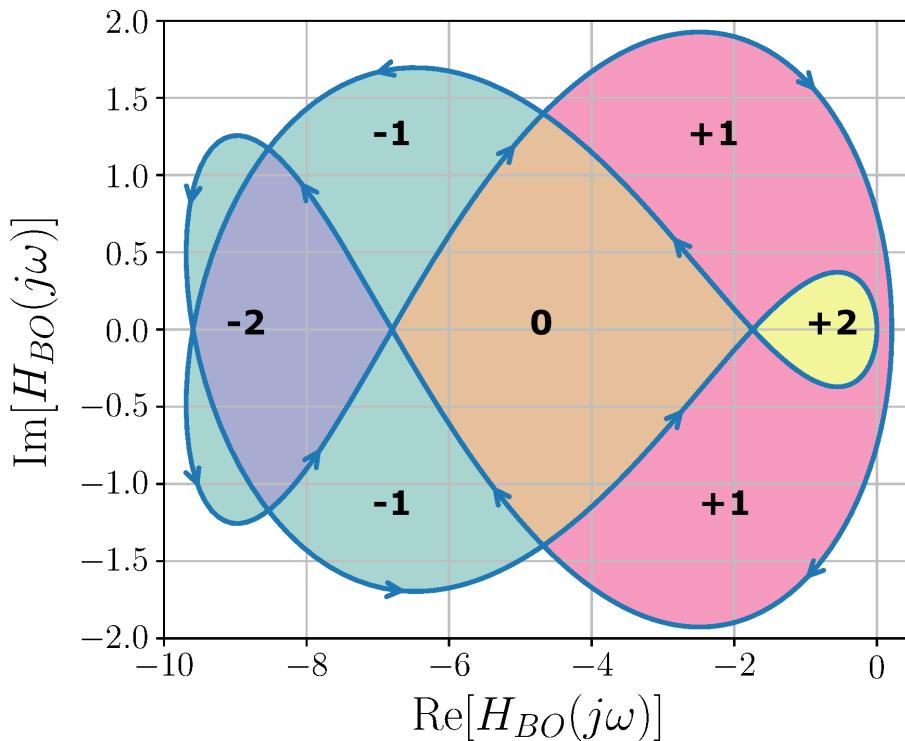
$$A_{61} = -\frac{1}{A_{51}} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ A_{51} & 0 \end{vmatrix} = 8$$

p^5	1	6	8	
p^4	1	6	8	
p^3	4	12	0	
p^2	3	8	0	
p^1	$\frac{4}{3}$	0	0	
p^0	8	0	0	

Le système est **stable** en boucle fermée par le critère de Routh.

Exercice 3 : Critère de Nyquist ★★

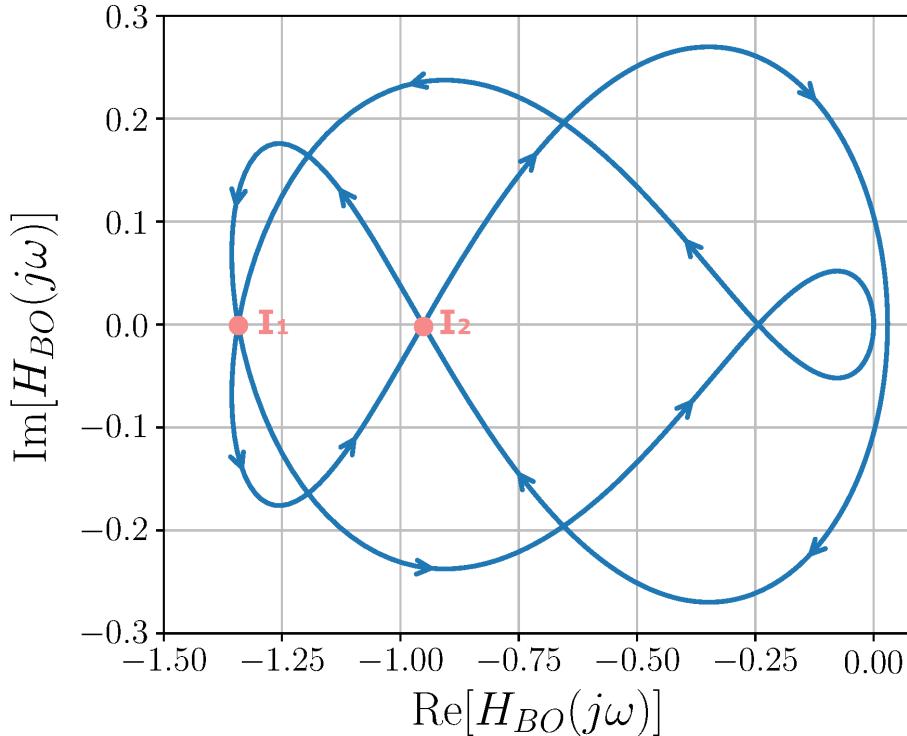
La FTBO présentant 2 pôles instables ($P = 2$), le système sera stable en boucle fermée pour $N = 2$, il existe une seule région du lieu de Nyquist de la FTBO pouvant prétendre à celà. La figure ci-dessous présente les différentes valeurs de N pour l'ensemble du plan complexe.



Q1. Déterminer alors la condition sur K pour ce système soit stable en boucle fermée.

Pour que le système soit stable en boucle fermée, il faut que le point critique de coordonnées $(-1,0)$ se trouve entre les deux points I_1 et I_2 comme représentés sur la figure ci-dessous. La partie réel de ces points est directement proportionnelle au gain de la boucle ouverte. Lorsque l'on augmente ou diminue le gain K , le diagramme de Nyquist est transformé par homothétie (même forme et même orientation). Ainsi, la relation entre K et cet interval est donnée par :

$$\begin{cases} K \operatorname{Re}[I_1] < 1 \\ K \operatorname{Re}[I_2] > 1 \end{cases}$$



ou encore :

$$\frac{1}{\text{Re}[I_1]} < K < \frac{1}{\text{Re}[I_2]}$$

On mesure sur le diagramme précédent la position des points I_1 et I_2 dans le cas où $K = 1$.

$$\begin{aligned}\text{Re}[I_1] &= -9.59 \\ \text{Re}[I_2] &= -6.8\end{aligned}$$

donc, le système est stable en boucle fermée pour un gain K tel que

$$0.104 < K < 0.147.$$

Nous laissons au lecteur la vérification de cette conclusion par d'autres approches (critères algébriques ou graphiques). À noter que la figure précédente a été obtenu pour un gain de $K = 0.14$, plaçant effectivement le point critique entre les points I_1 et I_2 .

8 Correction des systèmes asservis

Sommaire

1	Nécessité de la correction	234
2	Structure de la correction	235
3	Correcteurs élémentaires P, I et D	237
3.1	Correcteur P	237
3.2	Correcteur I	237
3.3	Correcteur D	237
4	Correcteurs composés	237
4.1	Correcteur PI	237
4.2	Correcteur PD	239
5	Correcteurs à avance et retard de phase	240
5.1	Correcteur à avance de phase	240
5.2	Correcteur à retard de phase	243
6	Correcteur PID	245
6.1	PID idéal	245
6.2	PID amélioré	247
7	Exercices du chapitre	249
8	Corrigé des exercices	252

1 Nécessité de la correction

Nous avons établi et étudié en détail les différentes performances et exigences que l'on peut attendre de la réponse temporelle d'un système asservi. Un système peut par exemple présenter des dépassemens ([Chapitre 3](#)), être précis, rapide ([Chapitre 6](#)), stable ([Chapitre 7](#)). Lorsque une réponse temporelle présente des performances défaillantes par rapport à celles attendues par le cahier des charges (c.f la représentation schématique de la correction de la [figure 8.1](#)), la notion de correction devient nécessaire. Une bonne correction est celle qui permet de respecter toutes les exigences de l'ensemble des performances d'un cahier des charges donné. Par exemple, la figure ci-dessous présente un système asservi en boucle fermée avant et après correction. Il est clair que les performances de rapidité et de précision ont été largement améliorées. Il est possible de constater également que le dépassement est largement réduit. Dans le cas, où un dépassement serait innacceptable, il faudrait alors imaginer une modification de la nature du système : un premier ordre ou un second ordre en régime apériodique serait alors indispensable.

Le but de ce chapitre est de compiler une partie des résultats obtenus aux chapitres précédents et de présenter la structure fonctionnelle de la correction. Nous nous intéresserons alors aux différents types de correcteurs élémentaires ainsi que de leurs compositions. Nous insisterons finalement sur les correcteurs les plus utilisés que sont les correcteurs à avance de phase, à retard de phase et les correcteurs PID. L'exercice assez complet de ce chapitre permettra d'appliquer numériquement en détail les principaux résultats du chapitre.

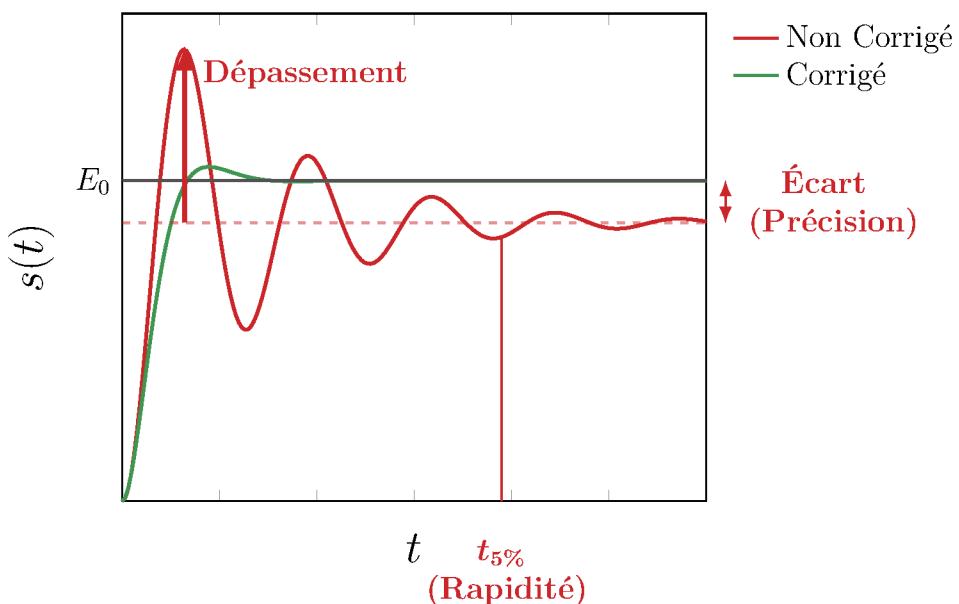
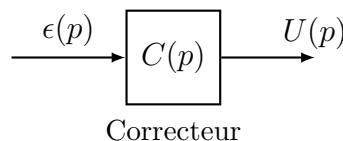


Figure 8.1 – Représentation schématique de la correction de la réponse temporelle d'un système asservi. (en rouge) Le système non corrigé, présente un important dépassement, il est lent et peu précis. (en vert) Le système corrigé présente de meilleures performances pour tous les critères précédents.

2 Structure de la correction

Comme nous avons pu l'observer au cours de chapitres précédents, les performances d'un système asservis dépendent essentiellement de la fonction de transfert en boucle ouverte. Corriger un système revient à modifier cette **FTBO** pour obtenir les performances souhaitées. Il existe un grand nombre de structure de la correction, nous souhaitons tout d'abord les présenter avant de faire une étude plus détaillé de la structure la plus classiquement rencontrée.

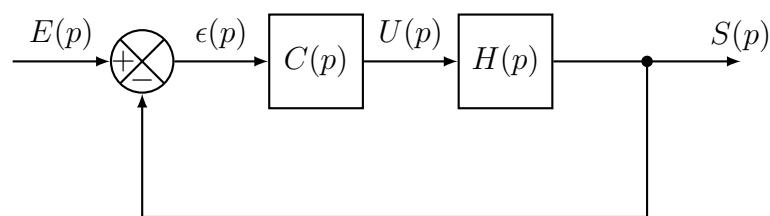
Notons tout abord que la correction ou un correcteur est une fonction de transfert qui **élabore une commande $u(t)$ à partir d'un écart $\epsilon(t)$** . Nous noterons un correcteur par la fonction de transfert $C(p)$ et sa représentation en schéma-bloc comme ci-dessous.



Cependant, il existe différentes façon de placer un correcteur dans un asservissement. Si il est vraie qu'un asservissement présente toujours une boucle de contre-réaction, **la correction peut se faire soit en série, soit en réaction ou soit dans une structure mixte (appelée série-réaction)**. À noter, que c'est la correction en série qui est la plus fréquemment rencontrée et c'est celle-ci que nous étudierons en détail dans ce chapitre.

Correction en série

Dans une correction en série, le correcteur $C(p)$ est placé dans la chaîne directe de l'asservissement. Il élabore une commande $U(p)$ pour le système en boucle ouverte non corrigée $H(p)$. Le schéma-bloc d'une telle correction est représentée ci-dessous :



En appliquant l'algèbre de bloc, il est assez simple de déterminer la forme de la commande pour ce type de correction :

$$U(p) = C(p)\epsilon(p)$$

À partir de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé H_{BO} , telle que :

$$H_{BO}(p) = C(p)H(p),$$

la fonction de transfert en boucle fermée est simplement donnée par :

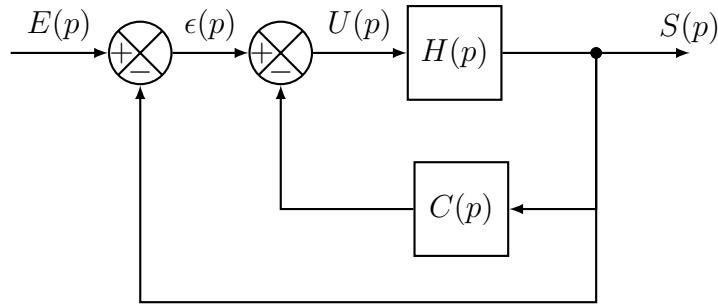
$$H_{BF}(p) = \frac{C(p)H(p)}{1 + C(p)H(p)}.$$

Correction en réaction

Dans le cas d'une correction en réaction, la commande $U(p)$ est élaborée à partir de l'écart $\epsilon(p)$ et de l'image de la sortie par le correcteur $C(p)S(p)$, cette relation s'écrit simplement :

$$U(p) = \epsilon(p) - C(p)S(p)$$

Le schéma-bloc de cette correction est donnée ci-dessous :



Attention, le correcteur ne se trouve pas dans la chaîne de retour (ce qui aurait un effet très peu différent de la correction en série puisque la fonction de transfert en boucle ouverte serait alors la même)

En appliquant une nouvelle fois l'algèbre de bloc à cette correction, on obtient les relations suivantes pour les fonctions de transfert en boucle ouverte et boucle fermée

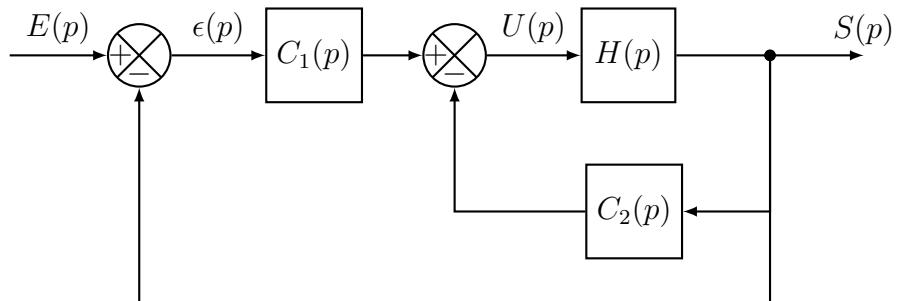
$$H_{BO}(p) = \frac{H(p)}{1 + C(p)H(p)}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p) + C(p)H(p)}$$

Comme on peut l'observer, dans une telle correction la **FTBO** est de la forme d'un asservissement. On peut dire de façon imagée que l'on corrige par un asservissement interne.

Correction en série-réaction

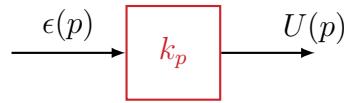
Dans le cas d'une correction en série-réaction, on combine les deux structures précédentes (série et réaction) en une seul correction. Dans ce cas, deux correcteurs $C_1(p)$ et $C_2(p)$ sont nécessaires respectivement en correction en série et réaction.



Nous envisagerons que la correction en série par la suite.

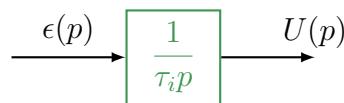
3 Correcteurs élémentaires P, I et D

3.1 Correcteur P



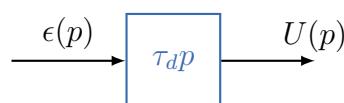
$$C_P(p) = k_p \quad (8.1)$$

3.2 Correcteur I



$$C_I(p) = \frac{1}{\tau_i p} \quad (8.2)$$

3.3 Correcteur D



$$C_D^{\text{idéal}}(p) = \tau_d p \quad (8.3)$$

Le correcteur dérivé sous cette forme est purement théorique, notamment parce que le gain est infini lorsque la pulsation tend vers l'infini.

Une solution technologique permet de réaliser une forme approché :

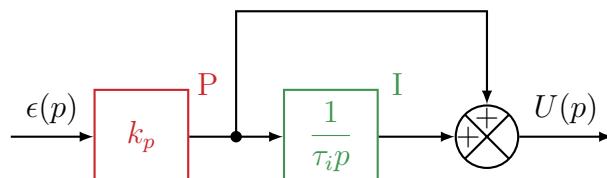
$$C_D^{\text{réel}}(p) = \frac{\tau_d p}{1 + \tau p}$$

en choisissant un temps $\tau \ll \tau_d$, cette fonction de transfert se comporte comme un correcteur dérivé idéal. On parle également dans ce cas de correcteur « D filtré ».

4 Correcteurs composés

Comme leurs noms l'indique, les correcteurs composés combinent plusieurs des correcteurs élémentaires présentés précédemment.

4.1 Correcteur PI



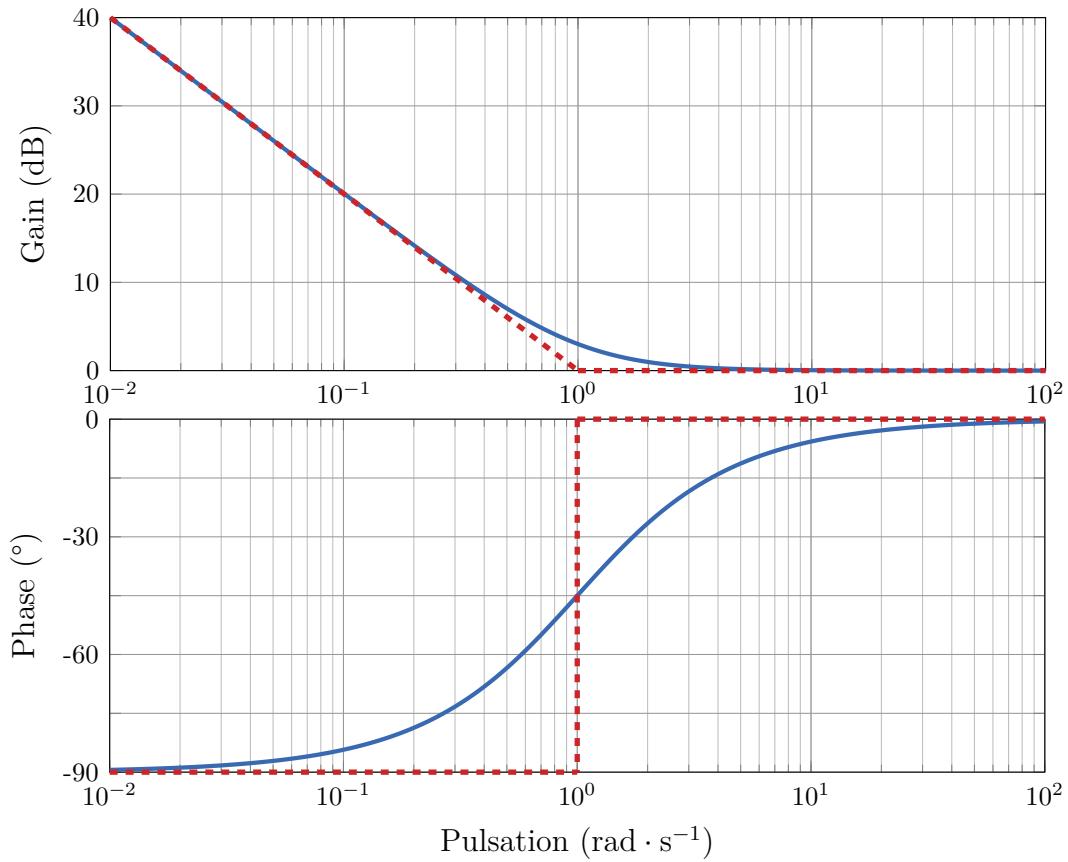


Figure 8.2 – Diagramme de Bode du correcteur à effet proportionnel et intégral.

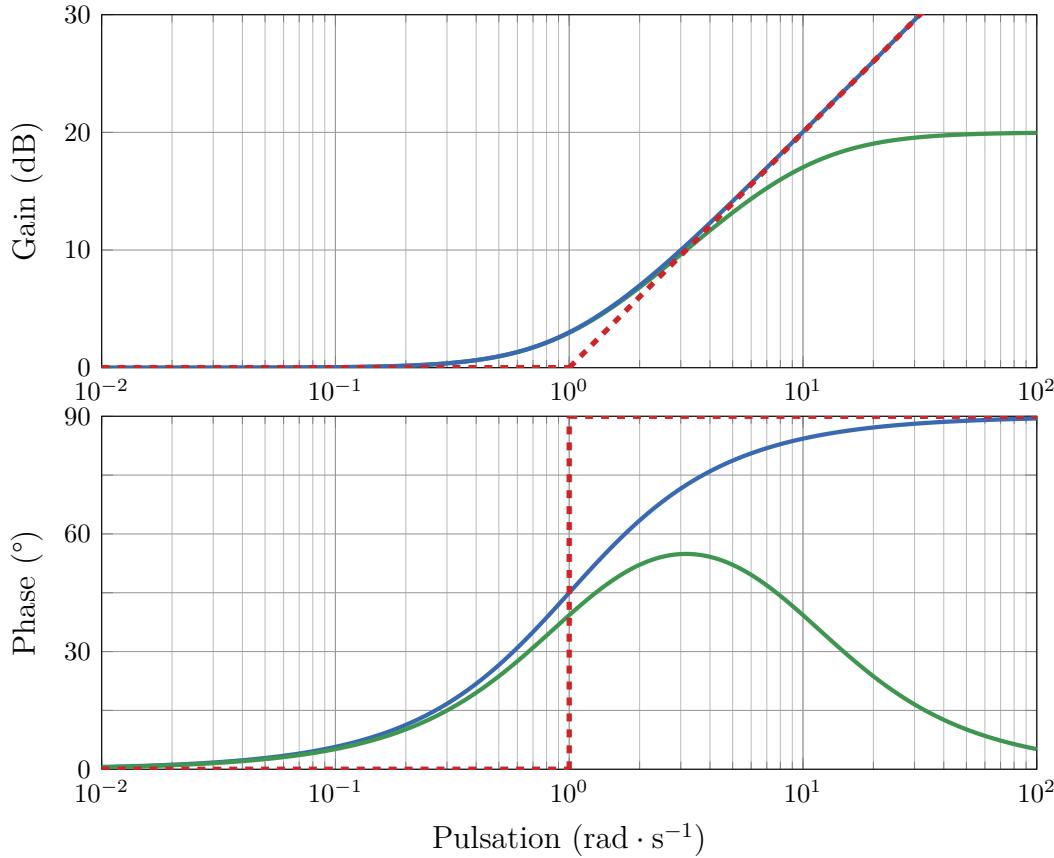
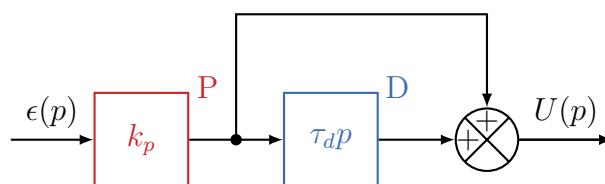


Figure 8.3 – Diagramme de Bode du correcteur à effet proportionnel et dérivé.

$$U(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right) \epsilon(p)$$

$$C_{\text{PI}} = k_p \left(\frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right) \quad (8.4)$$

4.2 Correcteur PD



$$U(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right) \epsilon(p)$$

$$C_{\text{PD}} = k_p (1 + \tau_d p) \quad (8.5)$$

À l'instar du correcteur dérivé élémentaire, le correcteur composé PD présente une forme approché/filtré :

$$C_{\text{PD}} = k_p \frac{1 + \tau_d p}{1 + \tau p}$$

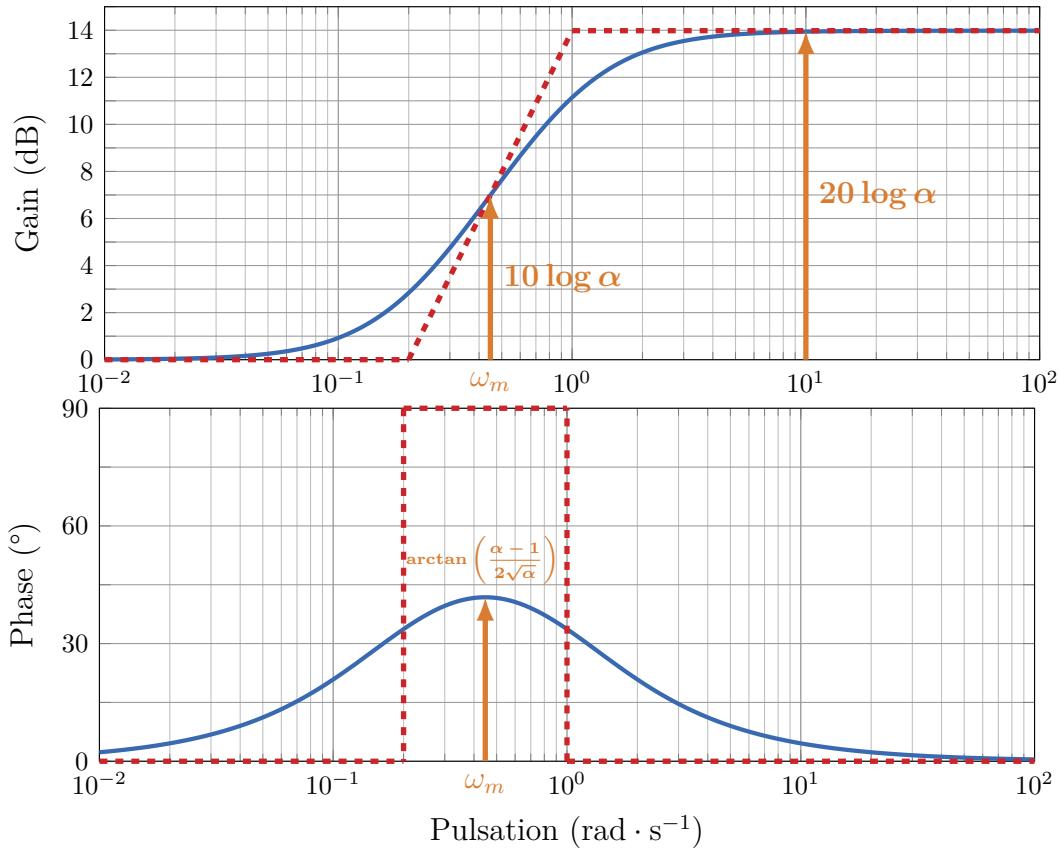


Figure 8.4 – Diagramme de Bode du correcteur à avance de phase.

avec $\tau \ll \tau_d$

5 Correcteurs à avance et retard de phase

5.1 Correcteur à avance de phase

Le correcteur à avance de phase (AP) est défini par la fonction de transfert :

$$C_{\text{AP}}(p) = k_p \frac{1 + \alpha \tau p}{1 + \tau p} \quad (8.6)$$

avec $\alpha > 1$. Le maximum de la phase se trouve à la moyenne géométrique du segment $\left[\frac{1}{\alpha \tau}, \frac{1}{\tau} \right]$ (l'échelle étant logarithmique ceux sont les rapports qui sont égaux)

$$\omega_m^2 = \frac{1}{\alpha \tau^2}$$

ou encore

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \tau}$$

Pour $k_p = 1$, $\alpha = 5$ et $\tau = 1$ on a alors $\omega_m = 1/\sqrt{5} \sim 0.44 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$\phi(\omega) = \arg(C_{\text{AP}}(j\omega)) = \arctan \alpha \tau \omega_m - \arctan \tau \omega_m$$

$$\phi_m = \phi(\omega_m) = \arctan \alpha \tau \omega_m - \arctan \tau \omega_m$$

en utilisant la relation trigonométrique pour $\tan(a - b)$ et en posant $a = \arctan \alpha \tau \omega_m$ et $b = \arctan \tau \omega_m$, on écrit :

$$\tan \phi(\omega_m) = \frac{\alpha \tau \omega_m - \tau \omega_m}{1 + \alpha \tau^2 \omega_m^2} = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

donc on a :

$$\phi_m = \arctan \left(\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \right)$$

Une autre forme possible est également donnée par (en notant que $\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$) :

$$\phi_m = \arcsin \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)$$

On remarquera que le maximum ne dépend pas de τ . Pour $\alpha = 5$, $\phi_m = 41.8^\circ$.

Le gain pour la pulsation ω_m est donné par :

$$C_{AP,dB}(j\omega_m) = 10 \log(1 + \alpha^2 \tau^2 \omega_m^2) - 10 \log(1 + \tau^2 \omega_m^2)$$

puisque $\tau^2 \omega_m^2 = \frac{1}{\alpha}$.

$$C_{AP,dB}(j\omega_m) = 10 \log 1 + \alpha - 10 \log \frac{1 + \alpha}{\alpha} = 10 \log \alpha$$

Exemple d'application du correcteur à avance de phase

Remarque : Dans cet exercice, on utilisera SCILAB pour tracer les réponses harmoniques et temporelles des fonctions de transfert en boucle ouverte et/ou boucle fermée lorsque celles-ci sont nécessaires.

On se donne un procédé de fonction de transfert $H(p)$ telle que

$$H(p) = \frac{1}{p(p + 0.2)}$$

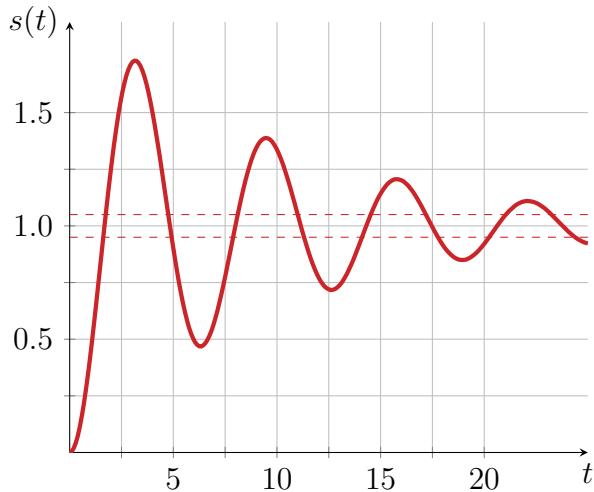
dans une boucle de contre-réaction unitaire.

On souhaite corrigé ce système pour qu'il présente une marge de stabilité de 55° , un temps de réponse à 5% de moins de 5 s et un premier dépassement inférieur à 20% pour la réponse indicielle.

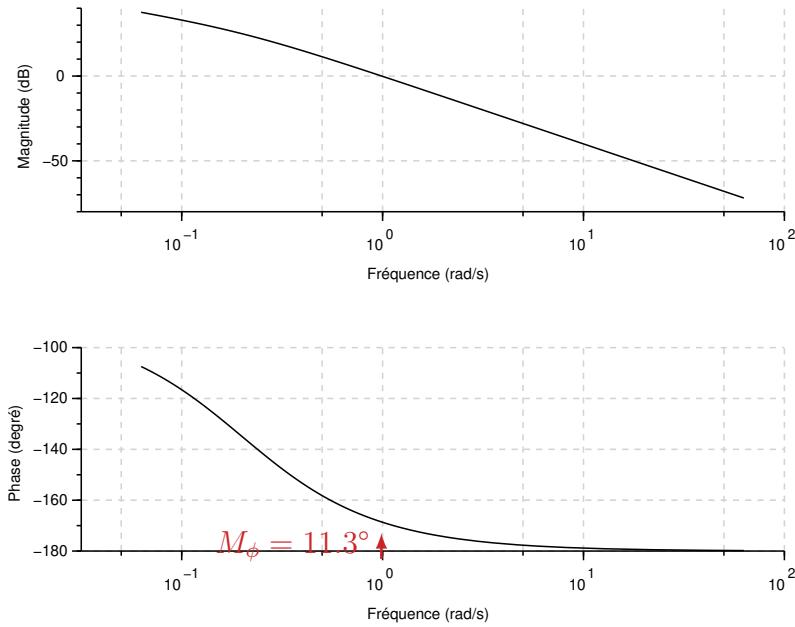
- Le système est précis en boucle fermée puisqu'il présente un intégrateur.
- Si on calcule la fonction de transfert en boucle fermée, on conclue qu'il est également stable en boucle fermée, tous les coefficients du polynôme caractéristique étant de même signes.

$$H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{1}{p^2 + 0.2p + 1}$$

- Pour le dépassement et la rapidité, nous les mesurererons directement sur la réponse indicielle.



Le dépassement est de plus de 70% et le temps de réponse à 5% est au dessus de 25 s. Pour déterminer la marge de phase avant correction on peut tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée.



On utilise maintenant un correcteur à avance de phase. On cherche ϕ_m tel que

$$M_\phi + \phi_m = 55^\circ$$

où ϕ_m est la phase maximale apportée par le correcteur à avance de phase tel que : $\phi_m = \arcsin\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)$ Donc on cherche α tel que $\phi_m = 43.7^\circ$

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = 5.47$$

On souhaite ajouter cette phase à la pulsation ω_0 dB, il faut donc que τ (le paramètre du correcteur) soit défini tel que

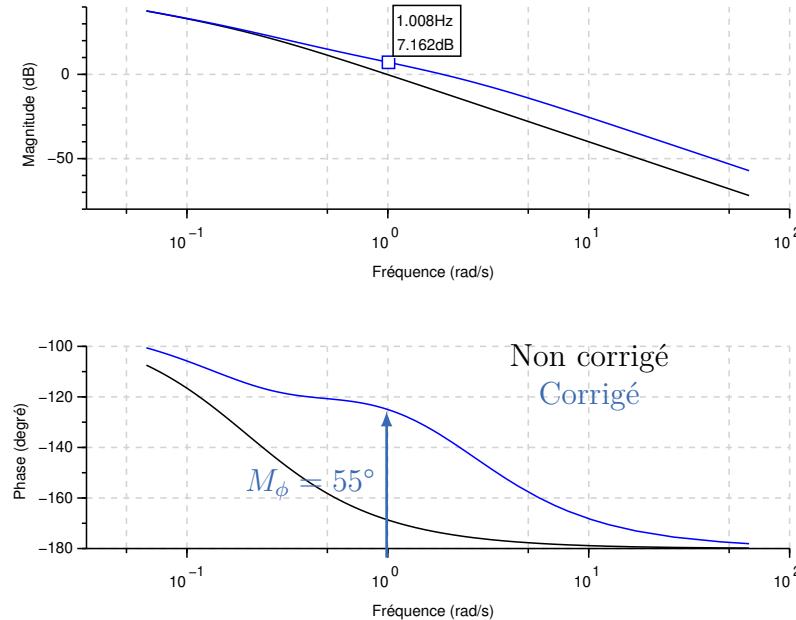
$$\omega_m = \omega_0$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau} = \omega_{0 \text{ dB}}$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_{0 \text{ dB}}} = 0.43 \text{ s}$$

Traçons le diagramme de Bode de la boucle fermée corrigée pour $K_P = 1$

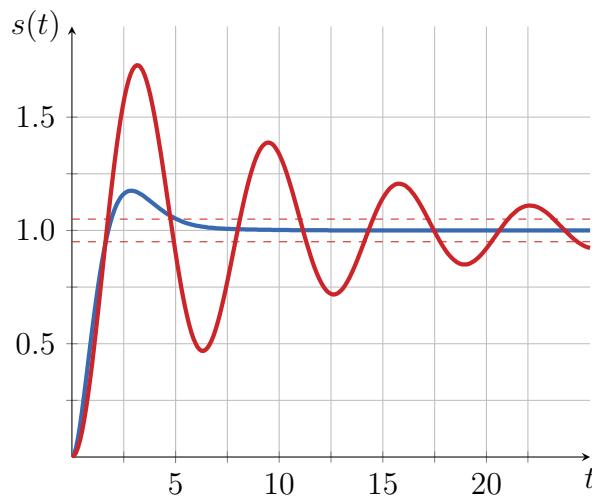


Le diagramme ci-dessous nous permet de déterminer la valeur K_P du correcteur pour que le gain s'annule (en décibel) à la pulsation $\omega_{0 \text{ dB}}$.

On a alors

$$K_P = 10^{-\frac{7.16}{20}} = 0.44$$

On trace maintenant la réponse indicielle pour le système corrigé pour observer que les exigences du cahier des charges sont bien respectées.



5.2 Correcteur à retard de phase

Le correcteur à retard de phase (RP) est défini par la fonction de transfert :

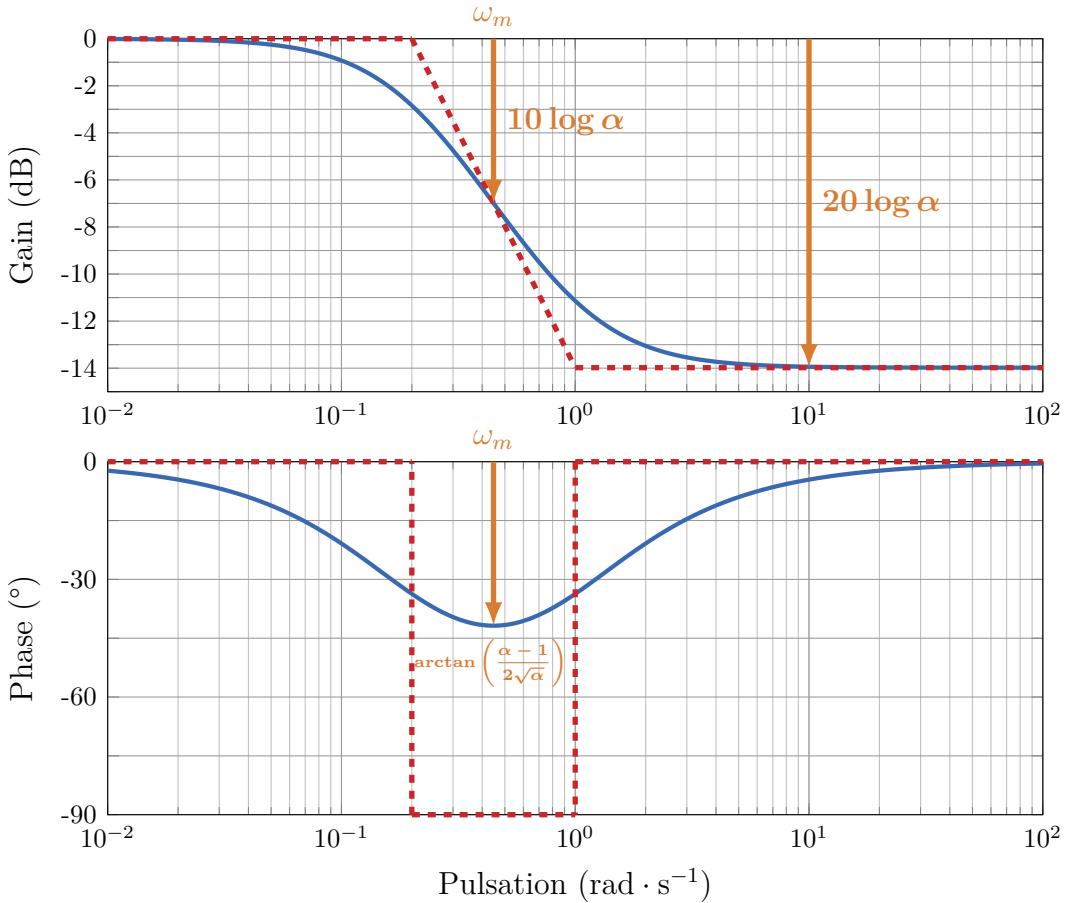


Figure 8.5 – Diagramme de Bode du correcteur à retard de phase

$$C_{\text{RP}}(p) = k_p \frac{1 + \tau p}{1 + \beta \tau p} \quad (8.7)$$

avec $\beta > 1$. Le minimum de la phase se trouve à la moyenne géométrique du segment $\left[\frac{1}{\beta \tau}, \frac{1}{\tau} \right]$. Cette pulsation est donnée par :

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta \tau}}$$

Pour $k_p = 1$, $\beta = 5$ et $\tau = 1$ on a alors $\omega_m = 1/\sqrt{5} \sim 0.44 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$\phi(\omega) = \arg(C_{\text{RP}}(j\omega)) = \arctan \tau \omega_m - \arctan \beta \tau \omega_m$$

$$\phi_m = \phi(\omega_m) = \arctan \tau \omega_m - \arctan \beta \tau \omega_m$$

en utilisant la relation trigonométrique pour $\tan(a - b)$ et en posant $a = \arctan \tau \omega_m$ et $b = \arctan \beta \tau \omega_m$, on écrit :

$$\tan \phi(\omega_m) = \frac{\tau \omega_m - \beta \tau \omega_m}{1 + \beta \tau^2 \omega_m^2} = \frac{1 - \beta}{2\sqrt{\beta}}$$

donc on a :

$$\phi_m = \arctan \left(\frac{1 - \beta}{2\sqrt{\beta}} \right)$$

On remarquera que le maximum ne dépend pas de τ . Pour $\beta = 5$, $\phi_m = -41.8^\circ$.

Le gain pour la pulsation ω_m est donné par :

$$C_{RP,dB}(j\omega_m) = 10 \log (1 + \tau^2 \omega_m^2) - 10 \log (1 + \beta^2 \tau^2 \omega_m^2)$$

puisque $\tau^2 \omega_m^2 = \frac{1}{\beta}$.

$$C_{RP,dB}(j\omega_m) = 10 \log \left(\frac{1 + \beta}{\beta} \right) - 10 \log (1 + \beta) = -10 \log \beta$$

6 Correcteur PID

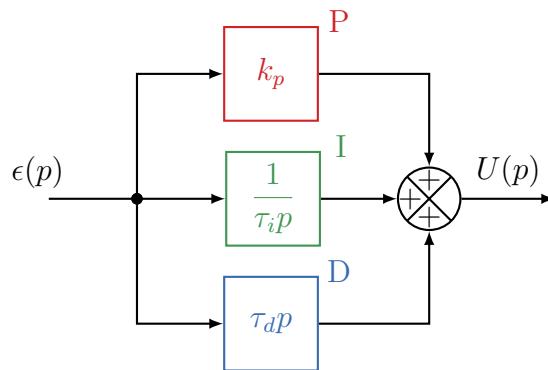
6.1 PID idéal

Pour élaborer un correcteur Proportionnel Intégral Dérivé (PID), il suffit évidemment de construire un correcteur avec les trois correcteurs élémentaires P, I et D comme brique de base. Il existe trois façon d'agencer ces blocs de base pour élaborer un correcteur PID :

- en **parallèle**
- en **série**
- et une combinaison des deux précédentes, dite **mixte**.

parallèle

Un PID en parallèle est la structure du correcteur la plus évidente, en effet on combine directement la commande de

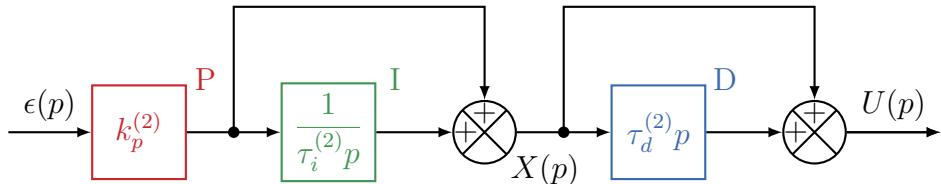


La réduction de ce schéma-bloc nous donne la relation entre la commande et l'écart

$$U(p) = \left(k_p^{(1)} + \frac{1}{\tau_i^{(1)} p} + \tau_d^{(1)} p \right) \epsilon(p)$$

$$C_{PID}^{(1)}(p) = k_p^{(1)} + \frac{1}{\tau_i^{(1)} p} + \tau_d^{(1)} p \quad (8.8)$$

série

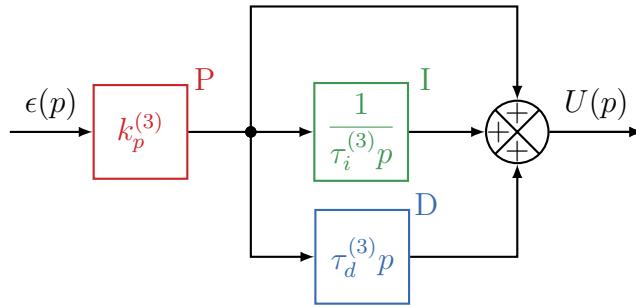


$$X(p) = k_p^{(2)} \left(1 + \frac{1}{\tau_i^{(2)} p} \right) \epsilon(p)$$

$$U(p) = X(p) \left(1 + \tau_d^{(2)} p \right) = k_p^{(2)} \left(1 + \frac{1}{\tau_i^{(2)} p} \right) \left(1 + \tau_d^{(2)} p \right) \epsilon(p)$$

$$C_{\text{PID}}^{(2)}(p) = k_p^{(2)} \left(1 + \frac{1}{\tau_i^{(2)} p} \right) \left(1 + \tau_d^{(2)} p \right) \quad (8.9)$$

mixte



$$U(p) = k_p^{(3)} \left(1 + \frac{1}{\tau_i^{(3)} p} + \tau_d^{(3)} p \right) \epsilon(p)$$

$$C_{\text{PID}}^{(3)}(p) = k_p^{(3)} \left(1 + \frac{1}{\tau_i^{(3)} p} + \tau_d^{(3)} p \right) \quad (8.10)$$

Les trois structures du correcteur PID précédentes sont équivalentes, les paramètres k_p, τ_i, τ_d n'auront simplement pas les mêmes valeurs. Il est possible d'exprimer des relations de passage entre ces trois structures :

3⇒ 1 et 1⇒ 3

$$\begin{cases} k_p^{(1)} = k_p^{(3)} \\ \tau_i^{(1)} = \frac{\tau_i^{(3)}}{k_p^{(3)}} \\ \tau_d^{(1)} = k_p^{(3)} \tau_d^{(3)} \end{cases} \quad \begin{cases} k_p^{(3)} = k_p^{(1)} \\ \tau_i^{(3)} = k_p^{(1)} \tau_i^{(1)} \\ \tau_d^{(3)} = \frac{\tau_d^{(1)}}{k_p^{(1)}} \end{cases}$$

$2 \Rightarrow 1$

$$\begin{cases} k_p^{(1)} = k_p^{(2)} \left(1 + \frac{\tau_d^{(2)}}{\tau_i^{(2)}} \right) \\ \tau_i^{(1)} = \frac{\tau_i^{(2)}}{k_p^{(2)}} \\ \tau_d^{(1)} = k_p^{(2)} \tau_d^{(2)} \end{cases}$$

$2 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 2$

$$\begin{cases} k_p^{(3)} = k_p^{(2)} \left(1 + \frac{\tau_d^{(2)}}{\tau_i^{(2)}} \right) & k_p^{(2)} = k_p^{(3)} \left(1 + \frac{\tau_d^{(3)}}{\tau_i^{(3)}} \right) \\ \tau_i^{(3)} = \tau_i^{(2)} + \tau_d^{(2)} & \tau_i^{(2)} = \tau_i^{(3)} + \tau_d^{(3)} \\ \tau_d^{(3)} = \frac{\tau_i^{(2)} \tau_d^{(2)}}{\tau_i^{(2)} + \tau_d^{(2)}} & \tau_d^{(2)} = \frac{\tau_i^{(3)} \tau_d^{(3)}}{\tau_i^{(3)} + \tau_d^{(3)}} \end{cases}$$

6.2 PID amélioré

PID avec filtrage

Correcteur à retard-avance de phase

Le correcteur à retard-avance de phase (RAP) est défini par la fonction de transfert :

$$C_{\text{RAP}}(p) = \frac{1 + \tau_r p}{1 + \beta \tau_r p} \cdot \frac{1 + \alpha \tau_a p}{1 + \tau_a p} \quad (8.11)$$

avec $\alpha > 1$ et $\beta > 1$. On prendra $\alpha = \beta$.

PID avec la dérivée sur la mesure seule

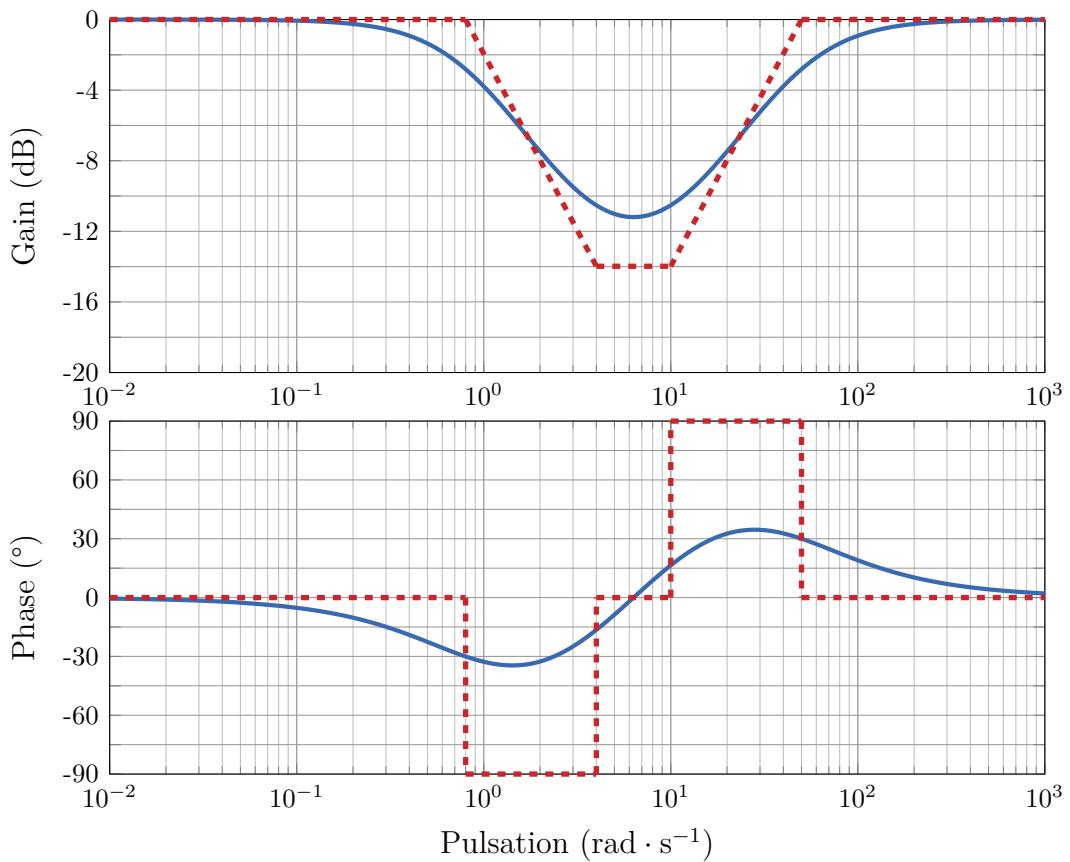


Figure 8.6 – Diagramme de Bode du correcteur à retard-avance de phase

7 Exercices du chapitre

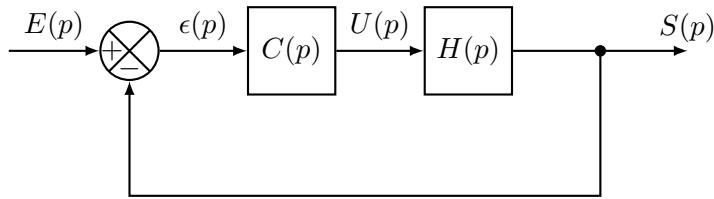
Exercice 1 : Etude et conception de correcteurs AP, PI et PID★★★

L'objectif de cet exercice, (adapté de [8]), est de déterminer les paramètres de correcteurs à avance de phase (AV), Proportionnel et Intégral (PI) et Proportionnel, Intégral et Dérivé (PID) afin d'améliorer les performances d'un système en boucle fermée.

On se placera dans le cas d'un système régi en boucle ouverte par la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{5p + 10}{p^3 + 3p^2 + 4p + 2}$$

et placé dans une boucle de contre-réaction avec un correcteur en série $C(p)$.



On étudiera en détail trois correcteurs :

- Avance de phase :

$$C(p) = C_{AV}(p) = K_d \frac{1 + \alpha \tau_d p}{1 + \tau_d p}$$

avec K_d le gain proportionnel, $\alpha > 1$ et τ_d les paramètres du correcteur.

- Proportionnel et Intégral :

$$C(p) = C_{PI}(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$$

avec K_i le gain proportionnel et τ_i la constante de temps du terme intégral.

- Proportionnel, Intégral et Dérivé :

$$C(p) = C_{PID}(p) = K_p C_{AV}(p) C_{PI}(p)$$

avec K_p le gain proportionnel du correcteur PID

Le correcteur PID est la mise en série des deux premiers correcteurs (avec des paramètres qui leurs sont propres).

On pourra utiliser Scilab pour les calculs et les tracés des réponses harmoniques et temporelles.

Caractérisation du système non corrigée

- Q1.** Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée
- Q2.** Déterminer la pulsation $\omega_0 \text{dB}$, telle que le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte soit égale à 0 dB. Remarque : on pourra l'établir précisément par le calcul ou par la mesure sur le diagramme de Bode précédent.
- Q3.** Déterminer si le système est stable en boucle fermée par la méthode de votre choix. Si oui, déterminer la marge de phase M_ϕ .
- Q4.** Tracer la réponse indicielle de la boucle fermée et déterminer la valeur finale de la boucle fermée. On pourra donner certaines grandeurs caractérisant sa rapidité, son dépassement

Régulation du correcteur à avance de phase

On souhaite corriger le système en rapidité et en robustesse (augmenter la marge de stabilité). Pour augmenter la bande passante en boucle fermée, on décide de fixer la pulsation de coupure ω_0 à $4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et on cherche à obtenir parallèlement une marge de phase M_ϕ de 60° .

Q5. À partir du diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée, déterminer la phase ϕ_d et le gain G_d devant être apportés par le correcteur à avance de phase à la pulsation de coupure que l'on s'est donnée.

Q6. À partir des relations suivantes, déterminer les paramètres (α, τ_d, K_d) du correcteur à avance de phase

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_d}{1 - \sin \phi_d} \quad \tau_d = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{\alpha}} \quad K_d = \frac{G_d}{\sqrt{\alpha}}$$

Q7. Donner la forme numérique de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase

Q8. Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par ce correcteur

Régulation du correcteur PI

On souhaite maintenant rendre le système précis à l'aide de l'effet integral. Cependant, on veut également garantir de nouveau une marge de phase M_ϕ de 60° . Pour maintenir le système stable, il faut donc centrer le correcteur PI à une pulsation $\omega_0 < \omega_0 \text{dB}$

Q9. Déterminer l'intervalle des pulsations pour laquelle la marge de phase M_ϕ de 60° est accessible

On choisit arbitrairement une pulsation $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ compris dans l'intervalle précédent.

Q10. Déterminer le gain G_i et la phase ϕ_i devant être apporté pour maintenir une marge de phase de 60° à cette pulsation de coupure.

Q11. Déterminer les paramètres τ_i et K_i à partir des relations du correcteur PI suivantes :

$$\tau_i = -\frac{1}{\omega_0 \tan \phi_i} \quad K_i = \frac{G_i \tau_i \omega_0}{\sqrt{1 + \tau_i^2 \omega_0^2}}$$

Q12. Donner la forme numérique de la fonction de transfert du régulateur PI ainsi obtenu

Q13. Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par ce correcteur

Régulation du correcteur PID

Nous allons dans un premier temps présenter la méthodologie pour déterminer les paramètres du correcteur PID. La principale contrainte est de maintenir une marge de phase de 60° à une pulsation de coupure ω_0 de $4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La méthodologie est la suivante :

- Le correcteur à avance de phase amène un déphasage ϕ_d compris en 0° et 90° . Pour ce déphasage, on détermine les paramètres α , τ_d et K_d pour que le gain de ce correcteur soit égal à 0 dB à la pulsation de coupure ω_c .
- Le correcteur PI en série amène un déphasage négatif ϕ_i compris en 0° et 90° . Pour ce déphasage on détermine les paramètres τ_i , K_i pour que le gain de ce correcteur soit égal à 0 dB à la pulsation de coupure ω_0 .
- Pour déterminer ϕ_d et ϕ_i . On utilise la relation

$$\arg H(j\omega_0) + \phi_d - \phi_i = -180^\circ + M_\phi$$

avec la contrainte suivante $\phi_d + \phi_i = 90^\circ$

- On détermine finalement le paramètre K_p telle que le gain de la boucle ouverte corrigée soit égale 0 dB à la pulsation de coupure ω_0 .

Q14. En utilisant cette approche, déterminer les paramètres des régulateurs composant ce PID

Q15. Donner la forme numérique de la fonction de transfert du correcteur

Q16. Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée

Réponses temporelles en boucle fermée

Q17. Comparer sur une figure les diagrammes de Bode de ces boucles ouvertes corrigées et non corrigées

Q18. Tracer les réponses indicielles en boucle fermée de tous ces correcteurs. Conclure ses performances corrigées.

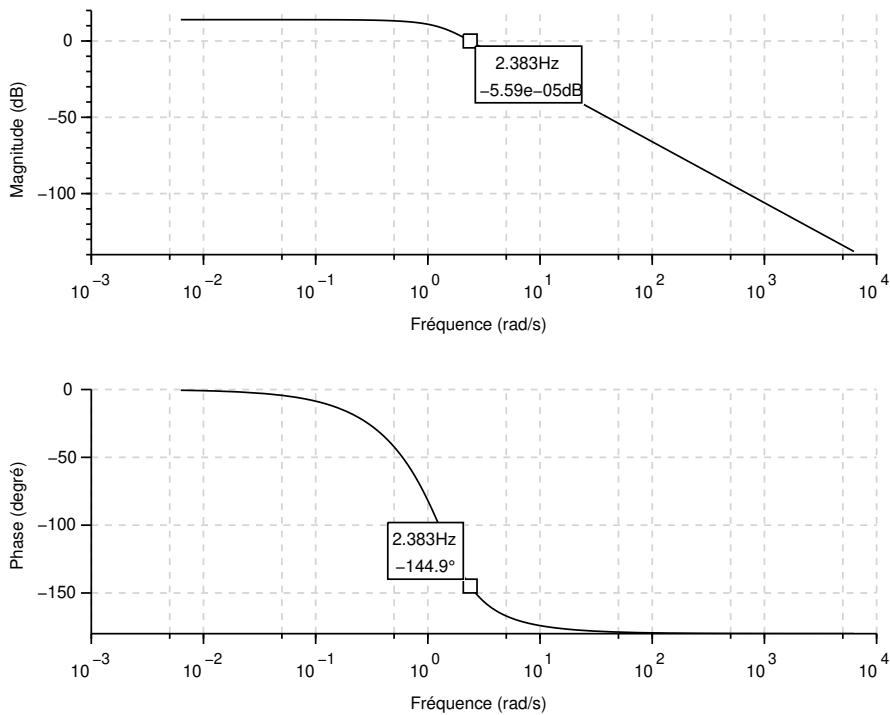


Figure 8.7 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée. On a représenté le gain et la phase à la pulsation de coupure ω_0 dB du système non corrigée.

8 Corrigé des exercices

Exercice 1 : Etude et conception de correcteurs AP, PI et PID★★★

Caractérisation du système non corrigée

Q1. Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée

La fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée $H(p)$ est donnée par :

$$H(p) = \frac{5p + 10}{p^3 + 3p^2 + 4p + 2}$$

Le programme Scilab ci-dessous permet de tracer le diagramme de Bode pour cette fonction de transfert.

```
PI=%pi // Constante pi
p=%s // indéterminée du polynôme
hbo_nc=syslin('c',5*p+10,p^3+3*p^2+4*p+2) // Boucle Ouverte Non Corrigée
scf(0);clf();
bode(hbo_nc,'rad') // diagramme de Bode en rad/s
```

Comme attendu le déphasage est nulle à basse fréquence (BF) et de -180° à haute fréquence (HF) (degré 1 au numérateur et degré 3 au dénominateur). De même la pente du gain est nulle à BF et de $-40 \text{ dB} \cdot \text{decade}^{-1}$.

Q2. Déterminer la pulsation ω_0 dB, telle que le gain de la fonction de transfert en

boucle ouverte soit égale à 0 dB

D'après le diagramme de Bode précédent, on mesure graphiquement une pulsation $\omega_{0\text{dB}} = 2.383 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Par le calcul, on déterminer cette valeur comme la pulsation qui donne un module de la fonction de transfert en boucle ouverte complexe égal à 1. On cherche donc ω tel que :

$$\begin{aligned}|H(j\omega)| &= 1 \iff \\ \frac{|10 + j5\omega|}{|(2 - 3\omega^2) + j\omega(4 - \omega^2)|} &= 1 \iff \\ \frac{100 + 25\omega^2}{\omega^6 + \omega^4 + 4\omega^2 + 4} &= 1 \iff \\ \omega^6 + \omega^4 - 21\omega^2 - 96 &= 0\end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation, on pourrait utiliser l'instruction Scilab suivante :

```
--> racine=roots(poly([-96 0 -21 0 1 0 1], 'x', 'c'))
racine =
-2.3827142
2.3827142
-0.6218668 + 1.9301248i
-0.6218668 - 1.9301248i
0.6218668 + 1.9301248i
0.6218668 - 1.9301248i
```

La solution réelle et positive de cette équation est bien la pulsation obtenue graphiquement. Il est possible de vérifier ceci en calculant le module et la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée à cette pulsation. (En utilisant les fonctions Scilab `repfreq` et `dbphi`).

```
// Cette partie peut être obtenue graphiquement
w0dB=2.38
frq=w0dB/(2*PI)
[frq1,repf] = repfreq(hbo_nc,frq)
[db_w0dB,phi_w0dB]= dbphi(repff)
//phi_w0dB : la phase du système non corrigé en w=2.38 rad/s
```

Q3. Déterminer si le système est stable en boucle fermée par la méthode de votre choix. Si oui, déterminer la marge de phase M_ϕ

D'après le diagramme de Bode de la boucle ouverte, le système est stable en boucle fermée par le critère de Nyquist. On peut également le vérifier en déterminant les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$H_{BF} = \frac{5p + 10}{p^3 + 3p^2 + 9p + 12}$$

```
hbf_nc=hbo_nc/(1+hbo_nc) // FTBF Non Corrigée
poles_hbf_nc=roots(hbf_nc.den) // Calcul des pôles de la FTBF

--> poles_hbf_nc
poles_hbf_nc =
```

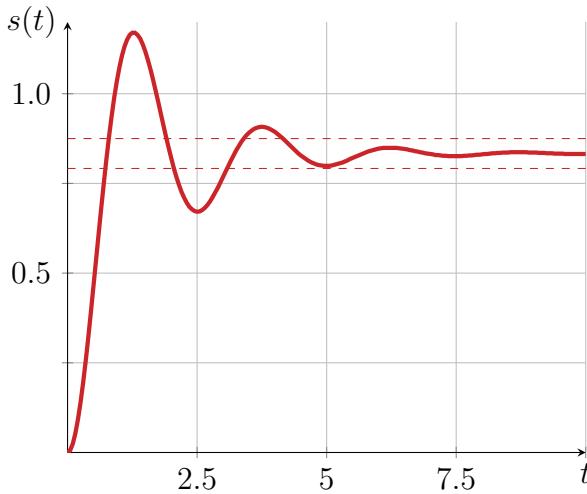


Figure 8.8 – Réponse indicielle du système en boucle fermée non corrigé

```
-0.6199338 + 2.5364051i
-0.6199338 - 2.5364051i
-1.7601324
```

Les pôles sont tous à partie réelle négative ce qui confirme la conclusion précédente. Le critère pourrait également être appliqué.

Q4. Tracer la réponse indicielle de la boucle fermée et déterminer la valeur finale de la boucle fermée. On pourra donner certaines grandeurs caractérisant sa rapidité, son dépassement

```
t=0:0.05:10 // vecteur temps
hbf_nc=hbo_nc/(1+hbo_nc) // FTBF Non Corrigée
sr_hbf_nc=csim('step',t,hbf_nc) // sr : step_response
scf(1);clf(1);
plot2d(t,sr_hbf_nc,style=1) // tracé de la réponse en fonction du temps
```

La valeur finale est graphiquement égale à 0.83 . Par le calcul il suffit d'appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{BF}(p)E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} H_{BF}(p) = \frac{5}{6} \sim 0.833$$

pour $E(p) = \frac{1}{p}$. Le temps de réponse à 5% est de l'ordre de 5 s et le premier dépassement de 40%.

Régulation du correcteur à avance de phase

On souhaite corriger le système en rapidité et en robustesse (augmenter la marge de stabilité). Pour augmenter la bande passante en boucle fermée, on décide de fixer la pulsation de coupure ω_0 à $4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et on cherche à obtenir parallèlement une marge de phase M_ϕ de 60° .

Q5. À partir du diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée, déterminer la phase ϕ_d et le gain G_d devant être apportés par le correcteur à avance de phase à la pulsation de coupure que l'on s'est donnée.

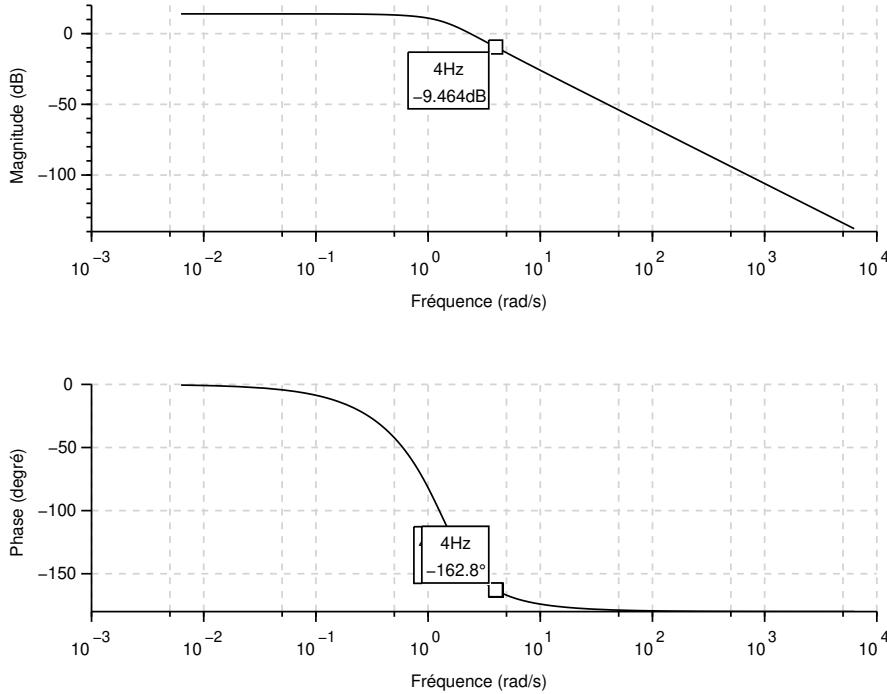


Figure 8.9 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée. On a représenté le gain et la phase à la pulsation de coupure $\omega_0 = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Le déphasage apporté par le système en boucle ouverte corrigée est donnée par l'argument de la fonction de transfert complexe en ω_0 . Soit encore,

$$\arg(C_{PI}H(j\omega_0)) = \phi_d + \arg H(j\omega_0)$$

où ϕ_d est le déphasage apporté par le correcteur seul. Pour une marge de phase souhaitée de M_ϕ . On cherche donc ϕ_d

$$\phi_d = -180^\circ + M_\phi - \arg H(j\omega_0)$$

$$\phi_d = -120^\circ - \arg H(j\omega_0)$$

où $\arg H(j\omega_0)$ est le déphasage de la boucle ouverte non corrigée à la pulsation ω_0 (que l'on obtient graphiquement sur le diagramme de Bode.) On mesure $\arg H(j\omega_0) = -162.8^\circ$:

$$\phi_d = 42.8^\circ$$

$$G_d = 9.46 \text{ dB} = 10^{9.46/20} = 2.97$$

Q6. À partir des relations suivantes, déterminer les paramètres (α, τ_d, K_d) du correcteur à avance de phase

On a alors :

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_d}{1 - \sin \phi_d} = 5.239$$

$$\tau_d = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{\alpha}} = 0.109 \text{ s}$$

$$K_d = \frac{G_d}{\sqrt{\alpha}} = 1.298$$

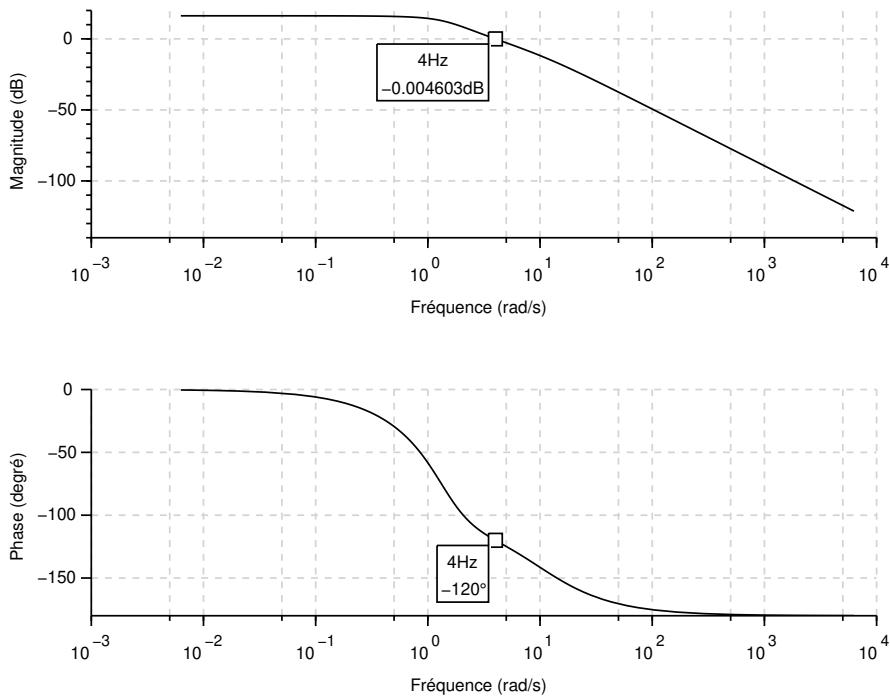


Figure 8.10 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par le correcteur à avance de phase

Q7. Donner la forme numérique de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase

$$C_{AP}(p) = \frac{1.298 + 0.743p}{1 + 0.109p}$$

Q8. Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par ce correcteur

Les instructions Scilab ci-dessous permettent de tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par un correcteur à avance de phase.

```
// =====
// Correcteur à avance de phase.
// =====
phi_d_d=42.8 //degree
phi_d=phi_d_d*PI/180
wc=4
a=(1+sin(phi_d))/(1-sin(phi_d))
tau_d=1/(sqrt(a)*wc)
Gd=9.46
kd=10^(Gd/20)/sqrt(a)
CAP=syslin('c',kd*(1+a*tau_d*p),1+tau_d*p)
hbo_c_ap=hbo_nc*CAP
bode(hbo_c_ap,'rad')
```

On vérifie bien que la marge de phase M_ϕ est égale à 60° à la pulsation de coupure de $\omega_0 = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

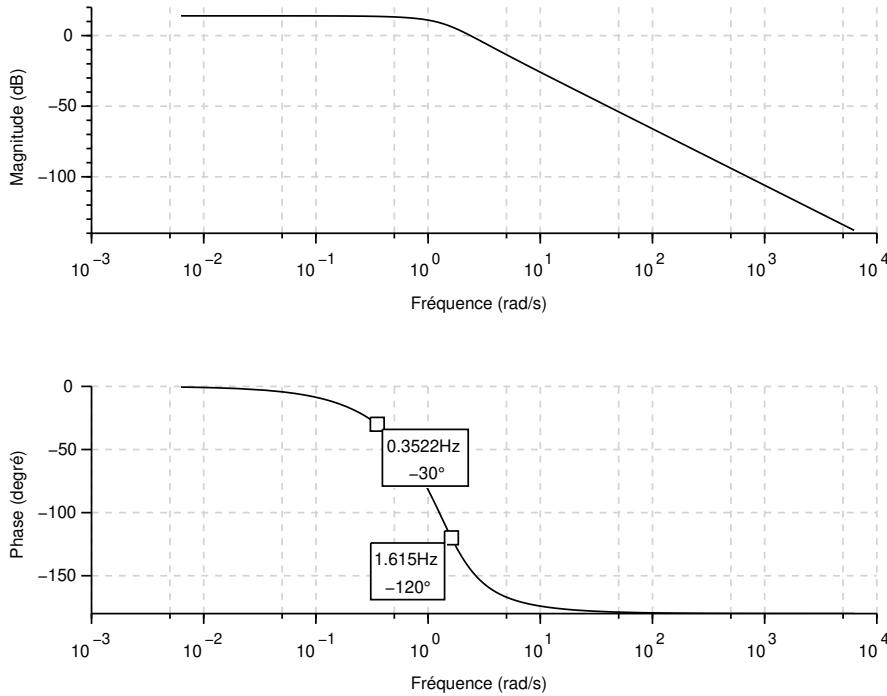


Figure 8.11 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée. On a représenté l'intervalle de pulsations donnant lieu à l'encadrement $-120^\circ < \arg H(j\omega_0) < -30^\circ$.

Régulation du correcteur PI

On souhaite maintenant rendre le système précis à l'aide de l'effet integral. Cependant, on veut également garantir de nouveau une marge de phase M_ϕ de 60° . Pour maintenir le système stable, il faut donc centrer le correcteur PI à une pulsation $\omega_0 < \omega_{0dB}$

Q9. Déterminer l'intervalle des pulsations pour laquelle la marge de stabilité M_ϕ de 60° est accessible

Le déphasage apporté par le correcteur PI étant compris entre -90° et 0° , le déphasage du système corrigé ne peut présenter une marge de phase de 60° que pour un certain intervalle de pulsations. En effet, puisque

$$\arg H(j\omega_0) = -180^\circ + M_\phi - \phi_i,$$

où $\arg H(j\omega_0)$ est le déphasage de la boucle ouverte non corrigé à la pulsation ω_0 et ϕ_i le déphasage du correcteur tel que $-90^\circ < \phi_i < 0^\circ$. L'argument $\arg H(j\omega_0)$ est donc contraint par les bornes de ϕ_i :

$$-180^\circ + M_\phi < \arg H(j\omega_0) < -90^\circ + M_\phi$$

soit pour $M_\phi = 60^\circ$

$$-120^\circ < \arg H(j\omega_0) < -30^\circ$$

On peut relever sur le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée, l'intervalle de pulsations donnant lieu à cet encadrement de la phase. On détermine :

$$0.35 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} < \omega_0 < 1.615 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La pulsation de coupure sera donc plus petite que la pulsation de coupure du système non corrigée. On s'attend donc à un système moins rapide puisque la bande passante en BF

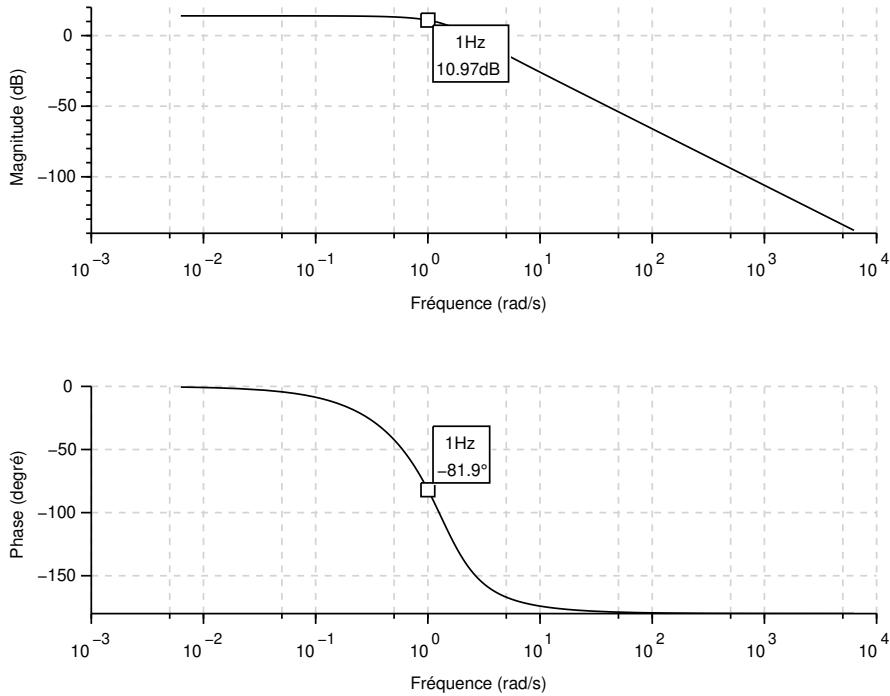


Figure 8.12 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée. On a représenté le gain et la phase à la pulsation de coupure $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

devrait être également plus petite.

On choisit arbitrairement une pulsation $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ comprise dans l'intervalle précédent.

Q10. Déterminer le gain G_i et la phase ϕ_i devant être apporté pour maintenir une marge de phase de 60° à cette pulsation de coupure.

On peut simplement lire ces quantités sur le diagramme de Bode de la boucle ouverte non corrigée. On obtient :

$$G_i = -10.97 \text{ dB} = 10^{-10.97/20} = 0.283$$

$$\phi_i = \arg H(j\omega_0) + 180^\circ - M_\phi = 38.13^\circ$$

avec $\arg H(j\omega_0) = -81.9^\circ$ et $\phi_i = \arg C_{PI}(j\omega_0)$

Q11. Déterminer les paramètres τ_i et K_i à partir des relations du correcteur PI suivantes :

$$\begin{aligned}\tau_i &= -\frac{1}{\omega_0 \tan \phi_i} = 1.27 \text{ s} \\ K_i &= \frac{G_i \tau_i \omega_0}{\sqrt{1 + \tau_i^2 \omega_0^2}} = 0.222\end{aligned}$$

Q12. Donner la forme numérique de la fonction de transfert du régulateur PI ainsi obtenu

$$C_{PI}(p) = \frac{0.222 + 0.283p}{1.274p}$$

Q13. Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par ce correcteur

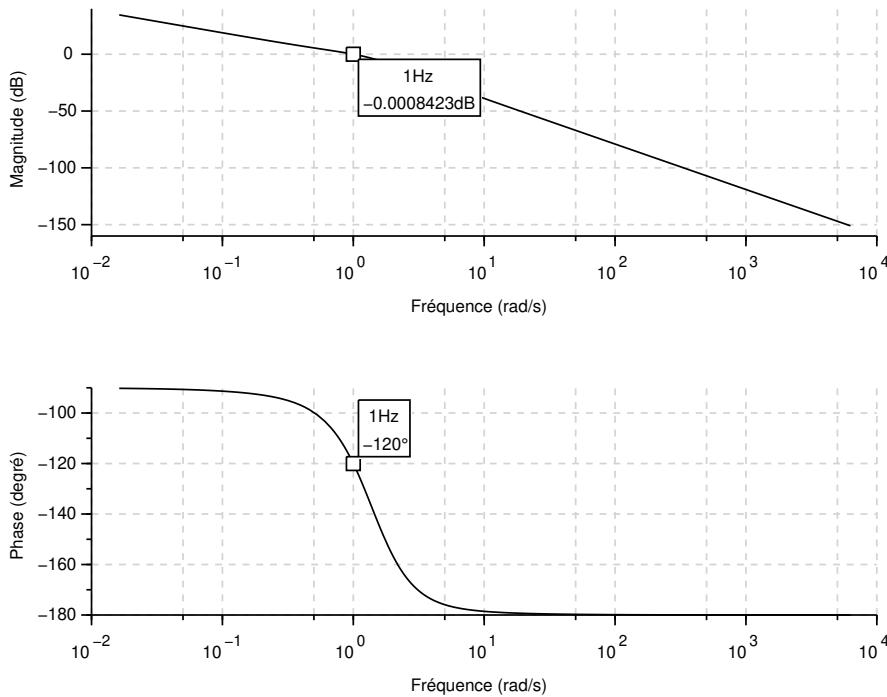


Figure 8.13 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par le correcteur PI

```
// =====
//          Correcteur PI.
// =====
w0=1                                // pulsation arbitraire 1 rad/s
frq=w0/(2*PI)
[frq1,repf] = repfreq(hbo_nc,frq)
[db_1,phi_1]=dbphi(repf)           // calcul du module et de la phase à w0=1 rad/s
phi_i=(phi_1+180-60)*PI/180
tau_i=1/(w0*tan(phi_i))
Gi=1/(10^(db_1/20))
ki=(Gi*tau_i*w0)/(sqrt(1+tau_i*w0*tau_i*w0))
CPI=syslin('c',ki*(1+tau_i*p),tau_i*p) // FT du correcteur
bode(hbo_c_pi,'rad')
```

On vérifie qu'à la pulsation de coupure le gain est nul (en dB) et que la phase donne une marge de phase de 60°

Régulation du correcteur PID

Q14. En utilisant la méthodologie précédente, déterminer les paramètres des régulateurs composant ce PID

La résolution du système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} \phi_d - \phi_i &= -180^\circ + M_\phi - \arg H(j\omega_0) \\ \phi_d + \phi_i &= 90^\circ, \end{cases}$$

nous permet de déterminer numériquement les phases ϕ_d et ϕ_i des correcteurs. On obtient alors :

$$\begin{cases} \phi_d = -45^\circ + \frac{M_\phi - \arg H(j\omega_0)}{2} = 66.39^\circ \\ \phi_i = 135^\circ + \frac{\arg H(j\omega_0) - M_\phi}{2} = 23.61^\circ \end{cases}$$

On a alors pour les paramètres des correcteurs :

AP

$$\alpha = 22.89$$

$$\tau_d = 0.052 \text{ s}$$

$$K_d = 0.209$$

PI

$$\tau_i = 0.572 \text{ s}$$

$$k_i = 0.9163$$

$$k_p = 2.97$$

Q15. Donner la forme numérique de la fonction de transfert du correcteur

$$\begin{aligned} C_{AP}(p) &= \frac{0.208 + 0.25p}{1 + 0.052p} \\ C_{PI}(p) &= \frac{0.916 + 0.524p}{0.572p} \\ C_{PID}(p) &= \frac{0.569 + 1.006p + 0.389p^2}{0.572p + 0.029p^2} \end{aligned}$$

Q16. Tracer le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée

```
// =====
//                               Correcteur PID (AP + PI)
// =====
w0=4                                // pulsation de coupure
phi_i_pid=(135+(phi_4-M_phi)*0.5)*PI/180 // radian
phi_d_pid=(-45+(M_phi-phi_4)*0.5)*PI/180 // radian
// -----
// Paramètres du correcteur AP
a_pid=(1+sin(phi_d_pid))/(1-sin(phi_d_pid))
tau_d_pid=1/(sqrt(a_pid)*w0)
kd_pid=1/sqrt(a_pid)
// Fonction de transfert AP
CAP_pid=syslin('c',kd_pid*(1+a_pid*tau_d_pid*p),1+tau_d_pid*p)
// -----
// Paramètres du correcteur PI
tau_i_pid=1/(w0*tan(phi_i_pid))
ki_pid=(tau_i_pid*w0)/(sqrt(1+tau_i_pid*w0*tau_i_pid*w0))
// Fonction de transfert PI
```

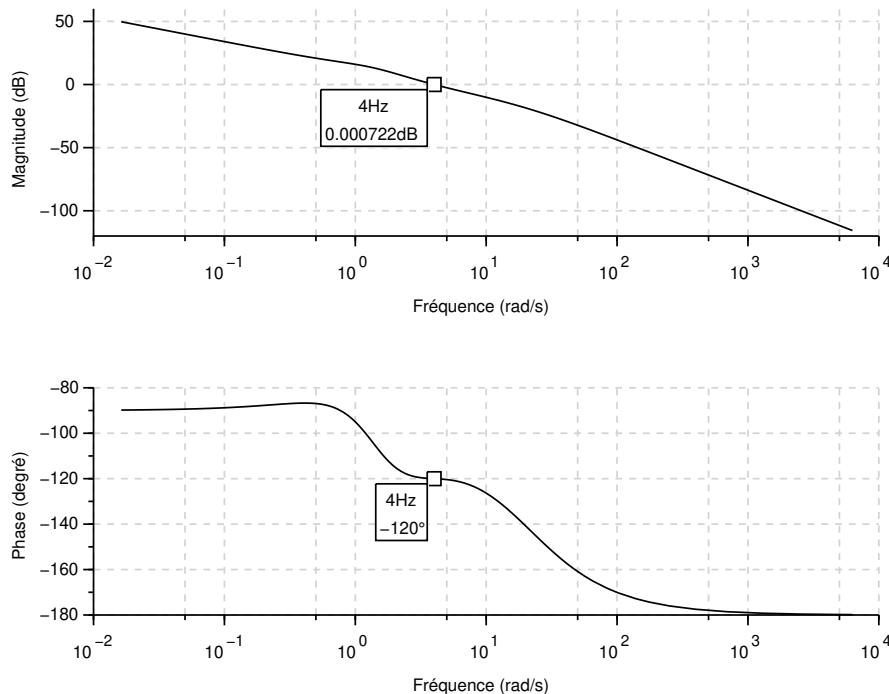


Figure 8.14 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par le correcteur PID

```

CPI_pid=syslin('c',ki_pid*(1+tau_i_pid*p),tau_i_pid*p)
// -----
// PID
kp=10^(-db_4/20)
// -----
// Fonction de transfert du correcteur
CPID=kp*CAP_pid*CPI_pid           // Correcteur PID
hbo_c_pid=CPID*hbo_nc              // FTBO corrigée PID
hbf_c_pid=hbo_c_pid/(1+hbo_c_pid)  // FTBF corrigée PID
sr_hbf_c_pid=csim('step',t,hbf_c_pid) // réponse indicielle BF PID
// -----
// Diagramme de Bode de la BO corrigée PID
scf(4);clf(4);
bode(hbo_c_pid,'rad')

```

On vérifie la phase et le gain à la pulsation de coupure.

Réponses temporelles en boucle fermée

Q17. Comparer sur une figure les diagrammes de Bode de ces boucles ouvertes corrigées et non corrigées

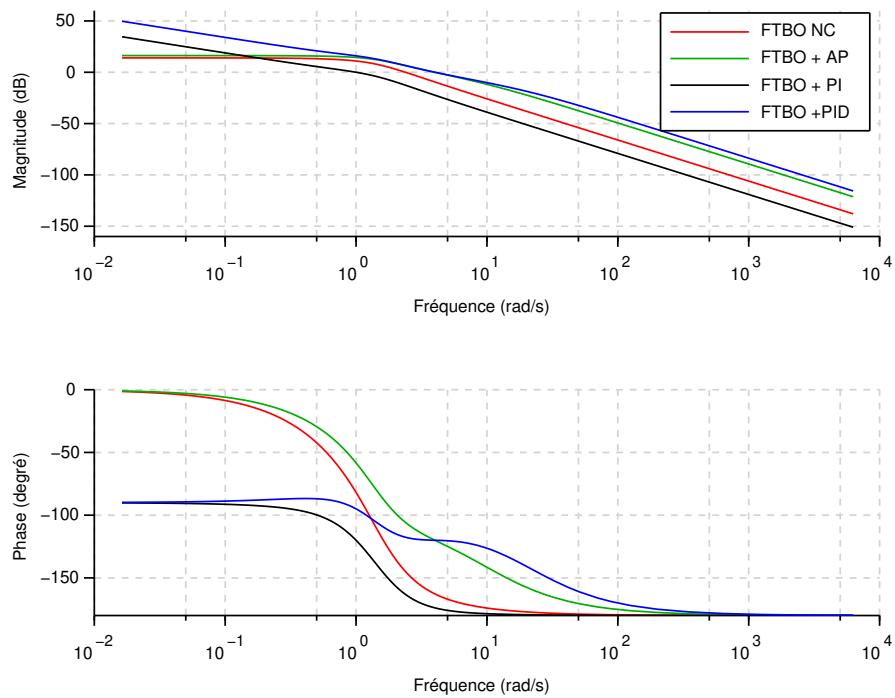


Figure 8.15 – Diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée par le correcteur PID

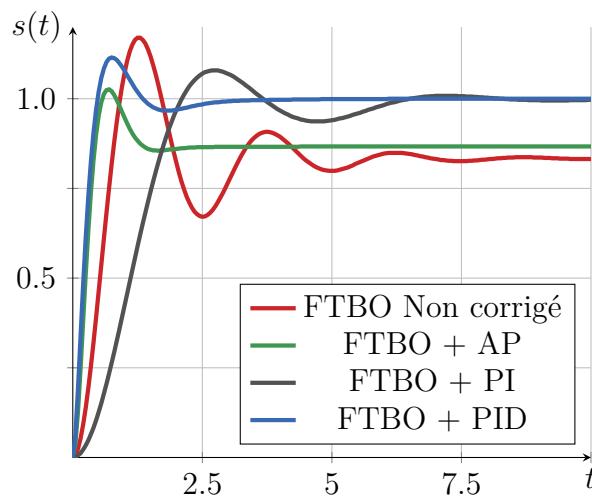


Figure 8.16 – Réponse indicielle du système en boucle fermée non corrigé et corrigé par les différents régulateurs du TD.

Q18. Tracer les réponses indicielles en boucle fermée de tous ces correcteurs. Conclure ses les performances corrigées.

On a tracé sur la même figure 8.16 en boucle fermée de tout les systèmes corrigés et non corrigés du TD. On observe clairement les effets de chacuns d'entre eux :

- Avance de phase :
 - augmentation de la marge de stabilité (moins d'oscillations, réduction du déplacement)
 - augmentation de la bande passante et donc de la rapidité
 - le système n'est pas précis (elle augmente cependant par rapport au système non corrigé)
- Proportionnel Integral :
 - effet integral : système précis et diminution de la rapidité
- Proportionnel Integral Dérivé :
 - effet integral : système précis
 - effet dérivé : augmentation de la rapidité et diminution des oscillations.

Code Scilab complet

```

// -----
// TD 22 Correction des systèmes asservis -- Etude et
// Conception de correcteur AP, PI et PID
// auteur : F. Vasconcelos (ESME Sudria Lille)
// Problème adapté de H. Bourles et H. Guillard
// ("Commande des systèmes. Performances et robustesse")
// -----
clear();
p=%s                                     // indéterminée du polynôme
PI=%pi
hbo_nc=syslin('c',5*p+10,p^3+3*p^2+4*p+2) // FTBO Non Corrigée
scf(0);clf(0);
bode(hbo_nc,'rad')                      // diagramme de Bode en rad/s
t=0:0.05:10                                // Vecteur temps
hbf_nc=hbo_nc/(1+hbo_nc)                  // FTBF Non Corrigée
poles_hbf_nc=roots(hbf_nc.den)            // poles de la FTBF
sr_hbf_nc=csim('step',t,hbf_nc)          // réponse indicielle FTBF
// -----
// tracé de la réponse indicielle
// et récupération des données dans un fichier texte
scf(1);clf(1);
plot2d(t,sr_hbf_nc,style=1)
fd = mopen('step_response_hbf_NC_td19.dat','wt');
for i=1:length(t)
    mfprintf(fd,'%.3f %.3f\n',t(i),sr_hbf_nc(i));
end
mclose('all')
// =====
//           Correcteur à avance de phase.
// =====
w0=4           // pulsation de coupure souhaitée (rad/s)
M_phi=60       // marge de phase souhaitée
// -----
// Cette partie peut être obtenue graphiquement
frq=w0/(2*%pi)
[frq1,repf] = repfreq(hbo_nc,frq)
[db_4,phi_4]= dbphi(repf)
//phi_4 : la phase du système non corrigé en w0=4 rad/s
//db_4 : le gain du système non corrigé en w0=4 rad/s
// -----
phi_d=(-180+M_phi-phi_4)*%pi/180          // en degré
Gd=-db_4                                    // gain à apporté => 0dB
// -----
// paramètre du correcteur à avance de phase
a=(1+sin(phi_d))/(1-sin(phi_d))           // alpha
tau_d=1/(sqrt(a)*w0)                      // temps caractéristique
kd=10^(Gd/20)/sqrt(a)
// -----
// Fonction de transfert du correcteur
CAP=syslin('c',kd*(1+a*tau_d*p),1+tau_d*p)// Correcteur AP

```

```

hbo_c_ap=hbo_nc*CAP                                // FTBO corrigée AP
hbf_c_ap=hbo_c_ap/(1+hbo_c_ap)                      // FTBF corrigée AP
sr_hbf_c_ap=csim('step',t,hbf_c_ap)                // réponse indicielle FTBF AP
// -----
// tracé de la réponse indicielle
// et récupération des données dans un fichier texte
scf(1);
plot2d(t,sr_hbf_c_ap,style=2)
fd = mopen('step_response_hbf_C_AP_td19.dat','wt');
for i=1:length(t)
    mfprintf(fd,'%.3f %.3f\n',t(i),sr_hbf_c_ap(i));
end
mclose('all')
// -----
// diagramme de Bode
scf(2);clf(2);
bode(hbo_c_ap,'rad')
// -----
//                               Correcteur PI.
// -----
w0=1                                              // pulsation de Bourles
// -----
// Cette partie peut être obtenue graphiquement
frq=w0/(2*PI)
[frq1,repf] = repfreq(hbo_nc,frq)
[db_1,phi_1]= dbphi(repf)
//phi_1 : la phase du système non corrigé en w0=1 rad/s
//db_1 : le gain du système non corrigé en w0=1 rad/s
// -----
phi_i=(phi_1+180-M_phi)*PI/180
Gi=1/(10^(db_1/20))
// paramètres du correcteur
tau_i=1/(w0*tan(phi_i))                          // temps caractéristiques
ki=(Gi*tau_i*w0)/(sqrt(1+tau_i*w0*tau_i*w0)) // gain du correcteur
// -----
// Fonction de transfert du correcteur
CPI=syslin('c',ki*(1+tau_i*p),tau_i*p)          // Correcteur PI
hbo_c_pi=hbo_nc*CPI                             // FTBO corrigée PI
hbf_c_pi=hbo_c_pi/(1+hbo_c_pi)                  // FTBF corrigée PI
sr_hbf_c_pi=csim('step',t,hbf_c_pi)              // réponse indicielle BF PI
// -----
// tracé de la réponse indicielle
// et récupération des données dans un fichier texte
scf(1);
plot2d(t,sr_hbf_c_pi,style=3)
fd = mopen('step_response_hbf_C_PI_td19.dat','wt');
for i=1:length(t)
    mfprintf(fd,'%.3f %.3f\n',t(i),sr_hbf_c_pi(i));
end
mclose('all')
// -----
// Diagramme de Bode de la BO corrigée PI

```

```

scf(3);clf(3);
bode(hbo_c_pi,'rad')
// =====
//          Correcteur PID (AP + PI)
// =====
w0=4                                // pulsation de coupure
phi_i_pid=(135+(phi_4-M_phi)*0.5)*PI/180 // radian
phi_d_pid=(-45+(M_phi-phi_4)*0.5)*PI/180 // radian
// -----
// Paramètres du correcteur AP
a_pid=(1+sin(phi_d_pid))/(1-sin(phi_d_pid))
tau_d_pid=1/(sqrt(a_pid)*w0)
kd_pid=1/sqrt(a_pid)
// Fonction de transfert AP
CAP_pid=syslin('c',kd_pid*(1+a_pid*tau_d_pid*p),1+tau_d_pid*p)
// -----
// Paramètres du correcteur PI
tau_i_pid=1/(w0*tan(phi_i_pid))
ki_pid=(tau_i_pid*w0)/(sqrt(1+tau_i_pid*w0*tau_i_pid*w0))
// Fonction de transfert PI
CPI_pid=syslin('c',ki_pid*(1+tau_i_pid*p),tau_i_pid*p)
// -----
// PID
kp=10^(-db_4/20)
// -----
// Fonction de transfert du correcteur
CPID=kp*CAP_pid*CPI_pid           // Correcteur PID
hbo_c_pid=CPID*hbo_nc              // FTBO corrigée PID
hbf_c_pid=hbo_c_pid/(1+hbo_c_pid) // FTBF corrigée PID
sr_hbf_c_pid=csim('step',t,hbf_c_pid) // réponse indicielle BF PID
// -----
// tracé de la réponse indicielle
// et récupération des données dans un fichier texte
scf(1);
plot2d(t,sr_hbf_c_pid,style=4)
fd = mopen('step_response_hbf_C_PID_td19.dat','wt');
for i=1:length(t)
    mfprintf(fd,'%.3f %.3f\n',t(i),sr_hbf_c_pid(i));
end
mclose('all')
// -----
// Diagramme de Bode de la BO corrigée PID
scf(4);clf(4);
bode(hbo_c_pid,'rad')
// -----
// tracé de l'écart u (dans la notation de Bourles)
// avec u(t) = e(t)-s(t) ici e(t)=1 (échelon)
scf(5);clf(5);
cap_u=csim(1-sr_hbf_c_ap,t,CAP)
cpi_u=csim(1-sr_hbf_c_pi,t,CPI)
cpid_u=csim(1-sr_hbf_c_pid,t,CPID)
plot2d(t,1-sr_hbf_nc,style=1)

```

```
plot2d(t,cap_u,style=2)
plot2d(t,cpi_u,style=3)
plot2d(t,cpid_u,style=4)
// -----
// Superposition des diagrammes de Bode
scf(6);clf(6);
bode([hbo_nc;hbo_c_ap;hbo_c_pi;hbo_c_pid], 'rad')
hl=legend(['FTBO NC';'FTBO + AP';'FTBO + PI';'FTBO +PID']);
```


9 Initiation à la représentation d'état

Sommaire

1	Contexte	270
1.1	Système multivariable	270
2	État d'un système dynamique	272
2.1	Équation d'état et équation de sortie	272
2.2	Intégration de l'équation d'état	273
2.3	Représentation en schéma bloc	273
2.4	Lien entre la fonction de transfert et la représentation d'état	273
3	Application de la représentation d'état	275
3.1	Représentation d'état du système	275
3.2	Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert	276
4	Exercices du chapitre	278
5	Corrigé des exercices	279

1 Contexte

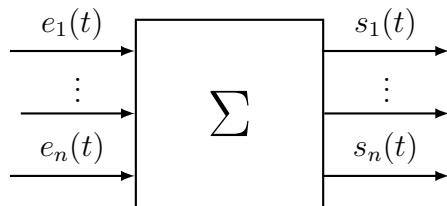
Le chapitre suivant n'est qu'une initiation à une approche extrêmement riche en résultats et applications. Nous ne faisons qu'éffleurer le problème et n'insistons que sur quelques points permettant de faire le pont avec les notions présentées dans ce document. Le lecteur désirant approfondir ces connaissances dans cette direction est invité à se procurer d'autres sources comme par exemple [6].

Dans les précédents chapitres, les systèmes linéaires dynamiques ont été largement étudiés à l'aide de la notion de fonction de transfert. Cette fonction de transfert est une représentation dans le domaine de Laplace du système que l'on souhaite analyser, modéliser et contrôler. Elle permet de donner une représentation fréquentielle de l'équation différentielle régissant le système. L'analyse des propriétés de cette fonction de transfert est riche de résultats et nous a permis de caractériser un grand nombre des performances des **SLCIs** ainsi que les performances liées à leur asservissement. Cependant, cette approche s'avère difficile à mettre en œuvre dans le cas des systèmes non-linéaires et/ou discrets. Le but de ce chapitre est d'introduire une nouvelle approche pour l'étude des systèmes dynamiques permettant d'englober un plus grand nombre de situations.

Il faut également remarquer que nous avons étudié uniquement les systèmes monovariables, il est possible de s'attaquer à l'étude des systèmes multivariables par l'approche fréquentielle, mais les problèmes deviennent très rapidement difficile à étudier pour un nombre d'entrée et de sortie.

1.1 Système multivariable

Au contraire des systèmes monovariables, les systèmes multivariables présentent plusieurs entrées et sorties (en nombre différents dans le cas général) ¹. Nous pouvons représenter ce type de système par le schéma suivant :



Pour un tel système de n entrées/sorties, toutes les équations différentielles sont couplées. C'est à dire que l'équation différentielle d'une sortie $s_i(t)$ quelconque dépend de toutes les entrées $e_j(t) \quad \forall j \in [0, n]$. En passant directement dans le domaine de Laplace, on peut écrire un système d'équations reliant les sorties $S_i(p)$ à toutes les entrées $E_j(p)$, tel que :

$$\begin{aligned} S_1(p) &= H_{11}(p)E_1(p) + \dots + H_{1n}(p)E_n(p) \\ &\vdots = \\ S_n(p) &= H_{n1}(p)E_1(p) + \dots + H_{nn}(p)E_n(p) \end{aligned}$$

¹Il ne faut pas confondre un système multivariable avec les systèmes multientrées que nous avons rencontré lorsque par exemple nous avons considéré la prise en compte d'une perturbation dans un système composé de plusieurs sous-systèmes.

où H_{ij} sont les fonctions de transfert couplant l'entrée j à la sortie i . Il est alors possible de considérer le système comme une matrice de fonctions de transfert :

$$\begin{pmatrix} S_1(p) \\ \vdots \\ S_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) & \dots & H_{1n}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) & \dots & H_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{n1}(p) & H_{n2}(p) & \dots & H_{nn}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1(p) \\ \vdots \\ E_n(p) \end{pmatrix}$$

Prenons le cas de 2 équations différentielles couplées $n = 2$, on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} S_1(p) &= H_{11}(p)E_1(p) + H_{12}(p)E_2(p) \\ S_2(p) &= H_{21}(p)E_1(p) + H_{22}(p)E_2(p) \end{aligned}$$

ou dans sa forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} S_1(p) \\ S_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1(p) \\ E_2(p) \end{pmatrix}$$

Exemple

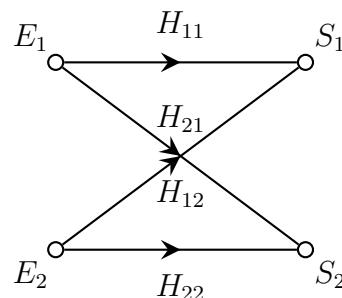
Prenons l'exemple de deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \frac{ds_1(t)}{dt} + s_1(t) = e_1(t) + 3e_2(t) \\ \frac{d^2s_2(t)}{dt^2} + 3\frac{ds_2(t)}{dt} + 2s_2(t) = 2e_1(t) + e_2(t) \end{cases}$$

Nous avons ici deux équations différentielles (une 1er et une du 2nd ordre). Le système matriciel devient :

$$\begin{pmatrix} S_1(p) \\ S_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{3}{p+1} \\ \frac{2}{p^2+3p+2} & \frac{1}{p^2+3p+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1(p) \\ E_2(p) \end{pmatrix}$$

en associant les fonctions de transfert de la matrice au fonctions de transferts de couplage H_{ij} , il est possible de représenter le système par le graphe de fluence suivant :



2 État d'un système dynamique

2.1 Équation d'état et équation de sortie

L'étude d'un système dynamique basée sur une approche fréquentielle (c.-à-d. dans le domaine de Laplace) est pratique dans le cas des systèmes continus, linéaires et monovariables. La **représentation d'état** des systèmes dynamiques, que nous allons maintenant présenter, conserve une description naturellement temporelle de ces systèmes et pourra d'ailleurs s'appliquer à des systèmes dynamiques plus généraux que les seuls **SLCI**. Nous allons cependant, nous limiter à une présentation liminaire de cette notion qui pourrait faire l'objet d'un ouvrage dédié.

La représentation d'état nécessite la description d'un état $\mathbf{x}(t)$ à instant t^2 qui est un vecteur de variables $x_i(t)$ dont le nombre n de composantes dépend de l'ordre du système.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Il faut noter que le choix des variables $x_i(t)$ n'est pas unique, seul leur nombre n est fixé par le système. Ce choix correspond en toute rigueur à choisir une base de représentation de l'état d'un système. Il est tout à fait possible de passer d'une représentation à une autre par une transformation linéaire analogue à un changement de base.

Connaissant cet état $\mathbf{x}(t)$ à un instant t , ainsi que l'entrée $\mathbf{e}(t)$, il est possible de déterminer l'état $\mathbf{x}(t + dt)$ du système à un instant $t + dt$. L'**équation d'état** qui donne l'évolution de l'état du système est de la forme générale :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \quad (9.1)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices dans le cas général. Dans le cas où le système est monovariable et donc que $s(t)$ et $e(t)$ sont de simples fonctions, \mathbf{A} est une matrice que l'on nomme la **matrice d'évolution**, et \mathbf{B} est le **vecteur commande**.

La sortie d'un système dynamique $\mathbf{s}(t)$ est un vecteur (dans le cas général) qui dépend à la fois du vecteur d'entrée $\mathbf{e}(t)$ et du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$. La relation entre ces vecteurs est donnée par l'**équation de sortie** ou **équation de mesure** :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \quad (9.2)$$

où \mathbf{C} et \mathbf{D} sont des matrices dans le cas général. Dans le cas où le système est monovariable et donc que $s(t)$ et $e(t)$ sont de simples fonctions, \mathbf{C} est un vecteur l'on nomme le **vecteur observation**, et \mathbf{D} un simple scalaire **d'action directe ou de transmission** de l'entrée sur la sortie.

²Nous utilisons ici la notation anglosaxonne qui représente les vecteurs par des symboles en caractères gras.

2.2 Intégration de l'équation d'état

Puisque l'équation de sortie dépend de l'état du système $\mathbf{x}(t)$, il est nécessaire d'intégrer l'équation d'état pour déterminer l'évolution du système. Dans la pratique, l'état \mathbf{x} à l'instant $t + dt$ est donnée par,

$$\mathbf{x}(t + dt) = e^{\mathbf{A}dt}\mathbf{x}(t) + \int_t^{t+dt} e^{\mathbf{A}(t+\tau)}\mathbf{B}e(\tau)d\tau$$

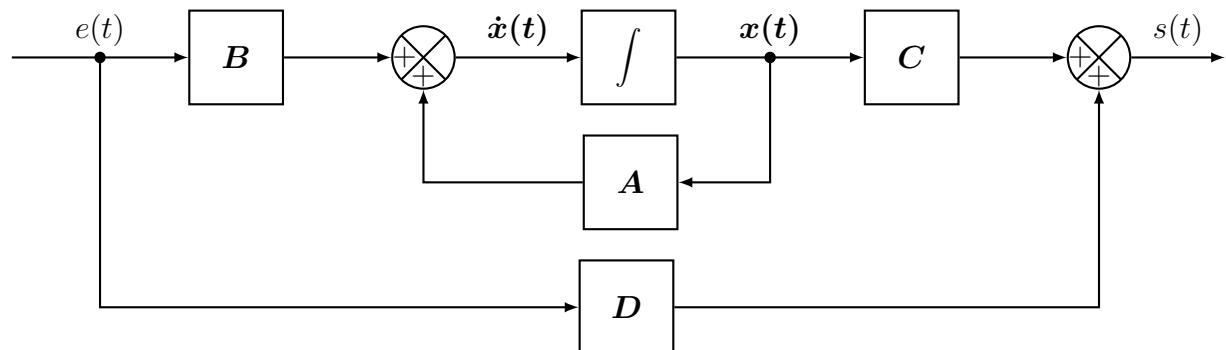
Notons, que cette expression fait intervenir l'exponentielle d'une matrice.

2.3 Représentation en schéma bloc

Pour un système monovariable, les équations d'état et de sortie, ne présentent que des fonctions simples en entrée $e(t)$ et sortie $s(t)$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Be}(t) \\ s(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{De}(t) \end{cases}$$

nous pouvons maintenant nous donner une représentation de « l'état interne » du système dynamique. Ce que nous modélisons par un simple bloc dans le domaine temporel peut être maintenant décrit par le schéma-bloc ci-dessous :



Cette représentation permet de conforter le rôle des grandeurs \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} . Il faut noter, que dans de nombreuses applications l'action directe de l'entrée sur la sortie est nulle $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

2.4 Lien entre la fonction de transfert et la représentation d'état

Bien évidemment, il existe un lien entre la fonction de transfert et la représentation d'état. Le passage de la représentation d'état à la fonction de transfert, nous permettra d'extrapoler les résultats de l'approche fréquentielle à celle de représentation d'état. Pour cela appliquons la transformée de Laplace aux équations d'état et de sortie (c.f équations (9.1) et (9.2)) en utilisant l'algèbre des matrices :

$$\begin{cases} p\mathbf{X}(p) = \mathbf{AX}(p) + \mathbf{BE}(p) \\ S(p) = \mathbf{CX}(p) + \mathbf{DE}(p) \end{cases}$$

$\mathbf{X}(p)$ étant un vecteur, la première relation devient

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(p) = \mathbf{BE}(p)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité. Pour isoler $\mathbf{X}(p)$, il faut alors multiplier par l'inverse de $(p\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

$$\begin{cases} \mathbf{X}(p) &= (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} E(p) \\ S(p) &= \mathbf{C} \mathbf{X}(p) + \mathbf{D} E(p) \end{cases}$$

En remplaçant cette nouvelle relation dans la seconde, on obtient

$$S(p) = [\mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] E(p),$$

Pour laquelle, on reconnaît la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$:

$$H(p) = \mathbf{C} (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (9.3)$$

Ce résultat nous permet d'extraire un résultat important de l'approche fréquentielle aux propriétés de la matrice \mathbf{A} . En effet, les valeurs propres de \mathbf{A} sont telles que $(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Puisque ce terme se trouve au dénominateur de la fonction de transfert [équation \(9.3\)](#), les valeurs propres se trouvent être les pôles du système dynamique de l'étude.

Tous les résultats obtenus sur les pôles de la fonction de transfert peuvent être extrapolés aux valeurs propres de la matrice d'évolution \mathbf{A} .

3 Application de la représentation d'état

Pour terminer ce chapitre, nous allons appliquer l'approche de représentation d'état nouvellement introduite au système masse-ressort que nous avons plusieurs fois rencontré dans ce document.

3.1 Représentation d'état du système

On reprend ici, la mise en équation du système mécanique masse-ressort présentée au chapitre précédent (c.f [section 3.2](#) et figure ci-contre). L'équation différentielle reliant la position de la masse $z(t)$ et la force appliquée $f(t)$ est donnée par

$$m \frac{d^2z(t)}{dt^2} + b \frac{dz(t)}{dt} + kz(t) = f(t)$$

où m est la masse, b le coefficient d'amortissement visqueux et k la constante de raideur du ressort. Réécrivons cette équation du mouvement sous une forme qui nous sera plus pratique par la suite :

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{m}f(t) - \frac{b}{m}\dot{z}(t) - \frac{k}{m}z(t)$$

Nous rappelons que l'entrée du système $e(t)$ est donc donnée par la force $f(t)$ appliquée à l'instant t . La sortie $s(t)$ est sa position $z(t)$.

L'équation différentielle régissant le mouvement de la masse est du second ordre. Il nous faut donc établir un vecteur d'état de deux composantes. Les variables d'état pour ce problème de mécanique sont la position $z(t)$ et la vitesse instantanée $\dot{z}(t)$. On pose donc :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

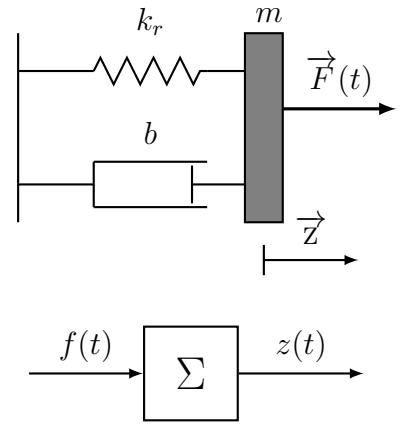
Notons que l'ordre des composantes du vecteur d'état n'a pas d'influence sur les propriétés du système. Cela correspond simplement à l'échange de deux lignes dans le système d'équations régissant l'état du système. Dans ses conditions l'équation de sortie est triviale puisque la sortie est une des deux variables d'état :

$$z(t) = \mathbf{C} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + Df(t)$$

avec,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0,$$

on retrouve bien la relation triviale $z(t) = z(t)$.



Pour établir l'équation d'état (c.f [équation \(9.1\)](#)) dérivons chacunes des composantes de $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Il nous faut maintenant déterminer les composantes de \mathbf{A} et \mathbf{B} telles :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \mathbf{B} f(t)$$

Ce qui donne simplement en utilisant l'équation du mouvement du système précédente :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f(t)$$

Avec,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0,$$

nous avons toutes les grandeurs permettant de décrire la représentation d'état de ce système mécanique simple.

3.2 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert

Pour établir la fonction de transfert à partir de la représentation d'état, nous allons appliquer la relation obtenue précédemment (c.f [équation \(9.3\)](#)). Déterminons tout d'abord le terme $p\mathbf{I} - \mathbf{A}$ que l'on notera \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M} = p\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \frac{k}{m} & p + \frac{b}{m} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer, l'inverse de \mathbf{M} , on détermine la matrice complémentaire (la matrice transposée \mathbf{M}^T de la matrice des cofacteurs \mathbf{M}^*) ainsi que son déterminant Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 \\ \frac{k}{m} & p + \frac{b}{m} \end{vmatrix} = p^2 + \frac{b}{m}p + \frac{k}{m}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{M}^{*T} = \frac{1}{p^2 + \frac{b}{m}p + \frac{k}{m}} \begin{pmatrix} p + \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & p \end{pmatrix}^T = \frac{1}{p^2 + \frac{b}{m}p + \frac{k}{m}} \begin{pmatrix} p + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & p \end{pmatrix}$$

La fonction de transfert étant donnée par :

$$H(p) = \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}$$

où $D = 0$ dans équation (9.3). Déterminons d'abord $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} p + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ p \end{pmatrix}$$

Nous developpons le calcul de $\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$ pour obtenir la fonction de transfert du système :

$$\begin{aligned} H(p) &= \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \\ H(p) &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ p \end{pmatrix} \\ H(p) &= \frac{1}{\Delta m} \\ H(p) &= \frac{1}{mp^2 + bp + k} \end{aligned}$$

On vérifie que cette fonction correspond bien à celle que nous aurions obtenu en appliquant directement la transformée de Laplace à l'équation du mouvement du système. Bien évidemment, cette approche n'est pas idéale pour déterminer cette fonction de transfert. L'objectif était de vérifier que les deux approches permettent d'obtenir le même résultat.

4 Exercices du chapitre

Exercice 1 : Détermination de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état ★★☆

Q1. Déterminer la fonction de transfert associée à la représentation d'état suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

Q2. Déterminer la fonction de transfert associée à la représentation d'état suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 2$$

Exercice 2 : Représentation d'état d'un système hydraulique ★★☆

5 Corrigé des exercices

Exercice 1 : Détermination de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état ★★☆

Q1. Déterminer la fonction de transfert associée à la représentation d'état suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

Déterminons d'abord $\mathbf{M} = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})$, $\Delta = \det \mathbf{M}$ et \mathbf{M}^{-1}

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p-3 & -1 \\ 0 & p+2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-3 & -1 \\ 0 & p+2 \end{vmatrix} = (p-3)(p+2) = p^2 - p - 6$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} p+2 & 1 \\ 0 & p-3 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant calculer la fonction de transfert $H(p)$ associé à cette représentation d'état.

$$\begin{aligned} H(p) &= \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \\ H(p) &= \frac{1}{\Delta} \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1 \\ p-3 \end{pmatrix} \\ H(p) &= \frac{1}{\Delta}(p-2) \\ H(p) &= \frac{p-2}{(p-3)(p+2)} \end{aligned}$$

Q2. Déterminer la fonction de transfert associée à la représentation d'état suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 2$$

Déterminons d'abord $\mathbf{M} = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})$, $\Delta = \det \mathbf{M}$ et \mathbf{M}^{-1}

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p+2 & 0 \\ 1 & p+1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+2 & 0 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+2)(p+1) = p^2 + 3p + 2$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p+2 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant calculer la fonction de transfert $H(p)$ associé à cette représentation d'état.

$$\begin{aligned} H(p) &= \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} + D \\ H(p) &= \frac{1}{\Delta}\mathbf{C} \begin{pmatrix} p+1 \\ 2p+3 \end{pmatrix} + D \\ H(p) &= \frac{1}{\Delta}(p+1) + 2 \\ H(p) &= \frac{(p+1) + 2(p+1)(p+2)}{(p+2)(p+1)} \\ H(p) &= \frac{2p+5}{p+2} \end{aligned}$$

Annexes

A Alphabet Grec

Nom	Minuscule	Majuscule	Usages courants
alpha	α	A	angles
bêta	β	B	angles
gamma	γ	Γ	angles
delta	δ	Δ	variations
epsilon	ϵ, ε	E	petite quantité
zéta	ζ	Z	-
êta	η	H	rendement
thêta	θ, ϑ	Θ	angles
iota	ι	I	-
kappa	κ, \varkappa	K	-
lambda	λ	Λ	longueur, densité linéique
mu	μ	M	masse réduite
nu	ν	N	fréquence
ksi	ξ	Ξ	coefficient sans dimension
omicron	o	O	-
pi	π, ϖ	Π	Π : plan
rhô	ρ, ϱ	P	densité volumique
sigma	σ, ς	Σ	σ : densité surfacique, Σ : Système
tau	τ	T	temps, durée relative
upsilon	v	Y	-
phi	ϕ, φ	Φ	angles
khi	χ	X	coefficients
psi	ψ	Ψ	fonction d'onde
oméga	ω	Ω	vitesse angulaire, angle solide

Tableau A.1 – Lettres de l'alphabet Grec et leurs usages courants en physique (non exhaustifs)

B Unités du Système International

La Conférence générale des poids et mesures (CGPM) qui se réunit tous les quatre ans depuis 1889, est un organe décisionnel chargé de prendre les décisions en matière de métrologie et en particulier en ce qui concerne le Système international d'unités (SI)¹. Ces conférences ont établi les différentes unités fondamentales à partir desquelles un grand nombre de grandeurs peuvent être dérivées. Dans cette annexe, nous présentons ces unités fondamentales ainsi que les grandeurs dérivées utiles en physique.

Le Système International compte sept unités de base quantifiant des grandeurs physiques indépendantes.

Grandeur	Nom	Symbol	Dimension
Longueur	mètre	m	[L]
Masse	kilogramme	kg	[M]
Temps	seconde	s	[T]
Intensité du courant électrique	ampère	A	[I]
Température thermodynamique	kelvin	K	[Θ]
Quantité de matière	mole	mol	[N]
Intensité lumineuse	candela	cd	[J]

Tableau B.1 – Les unités de base du Système International

Grandeur	Nom	Symbol	Dimension
Vitesse	mètre par seconde	$m \cdot s^{-1}$	$[LT^{-1}]$
Accélération	mètre par seconde carré	$m \cdot s^{-2}$	$[LT^{-2}]$
Force	newton	N	$[MLT^{-2}]$
Moment de force	newton-mètre	$N \cdot m$	$[ML^2T^{-2}]$
Travail Énergie	joule	J	$[ML^2T^{-2}]$
Puissance	watt	W	$[ML^2T^{-3}]$
Pression	pascal	Pa	$[ML^{-1}T^{-2}]$
Moment d'inertie	kilogramme-mètre carré	$kg \cdot m^2$	$[ML^2]$
Quantité de mouvement	newton-seconde	$N \cdot s$	$[MLT^{-1}]$

Tableau B.2 – Grandeurs dérivées du système international.

¹La conférence se réunit dans les locaux du Bureau international des poids et mesures (BIPM), au Pavillon de Breteuil, à Sèvres (France).

C Transformation de Laplace

1 Définition

Soit f une fonction de la variable réelle t définie sur \mathbb{R} et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle transformée de Laplace de f , la unique fonction F définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

avec $p \in \mathbb{C}$.

En automatique, on n'utilise que la transformée de Laplace restreinte qui ne s'applique qu'aux fonctions causales. Pour transformer une fonction quelconque en fonction causale, on la combine avec la fonction de Heaviside $u(t)$ qui est telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

On note $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, la transformée de Laplace de $f(t)$ et on dit de $F(p)$ qu'elle est l'image de $f(t)$ dans le domaine de Laplace¹ et on notera $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ la transformée de Laplace inverse.

2 Propriétés

- *linéarité* :

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(p) + bG(p)$$

- *dilatation du temps* :

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)$$

- *produit de convolution* :

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(p)G(p)$$

¹Plusieurs termes sont utilisés dans la littérature. On parle de domaine complexe, domaine fréquentielle ou de domaine symbolique. On choisit dans ce document de ne parler que du domaine de Laplace

- *dérivation :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} &= pF(p) - f(0^+) \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right\} &= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} &= p^n F(p)\end{aligned}$$

si toutes les conditions initiales sont nulles.

- *intégration :*

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(u)du \right\} = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

avec : $g(t) = \int_0^t f(u)du$

- *théorème du retard en (t) :*

$$\mathcal{L} \{f(t - \tau)\} = e^{-\tau p} F(p)$$

- *théorème du retard en (p) :*

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(p + a)\} = e^{-at} f(t)$$

- *théorème de la valeur initiale :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

- *théorème de la valeur finale :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

3 Table des transformées de Laplace

	$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$
1	1	$\delta(t)$
2	$e^{-\tau p}$	$\delta(t - \tau)$
3	$\frac{1}{p}$	1
4	$\frac{1}{p^2}$	t
5	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2}t^2$
6	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
7	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
8	$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
9	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$
10	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
11	$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$
12	$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a}[at - (1 - e^{-at})]$
13	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1 - at)e^{-at}$
14	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$1 - (1 + at)e^{-at}$
15	$\frac{a^2(p+z)}{p(p+a)^2}$	$z - (z + a(z - a)t)e^{-at}$
16	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$

Tableau C.1 – Table de transformées de Laplace d'après[20]

	$F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$
17	$\frac{(b-a)p}{(p+a)(p+b)}$	$-ae^{-at} + be^{-bt}$
18	$\frac{(b-a)(p+z)}{(p+a)(p+b)}$	$(z-a)e^{-at} - (z-b)e^{-bt}$
19	$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$	$1 + \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{a-b}$
20	$\frac{ab(p+z)}{p(p+a)(p+b)}$	$z + \frac{b(z-a)e^{-at} - a(z-b)e^{-bt}}{a-b}$
21	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
22	$\frac{p+z}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{(z-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{(z-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{(z-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
23	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
24	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
25	$\frac{p+z}{p^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\frac{z^2 + \omega^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$ avec $\phi = \arctan \frac{\omega}{z}$
26	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
27	$\frac{\omega^2(p+z)}{p(p^2 + \omega^2)^2}$	$z - \sqrt{\frac{z^2 + \omega^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \phi)$ avec $\phi = \arctan \frac{\omega}{z}$
28	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
29	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
30	$\frac{p+z}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\sqrt{\frac{(z-a)^2 + \omega^2}{\omega^2}} e^{-at} \sin(\omega t + \phi)$ avec $\phi = \arctan \frac{\omega}{z-a}$
31	$\frac{\omega^2}{p^2 + 2\xi\omega p + \omega^2}$ avec $\xi < 1$	$\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega t} \sin \omega \sqrt{1-\xi^2} t$
32	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + 2\xi\omega p + \omega^2)}$ avec $\xi < 1$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega t} \sin \omega \sqrt{1-\xi^2} t + \phi$ avec $\phi = \arccos \xi$

Tableau C.2 – (suite) Table de transformées de Laplace d'après [20]

D Les nombres complexes

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Un nombre complexe z est défini par un couple de nombre réel (x, y) , tel que

$$z = x + jy,$$

où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$ ¹.

Un nombre complexe est donc composé d'une partie réel $\text{Re}[z] = x$ et d'une partie imaginaire $\text{Im}[z] = y$.

Un nombre complexe peut être représenté géométriquement dans un plan (dit complexe), pour lequel l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan correspondent respectivement à la partie réelle et imaginaire ([Figure D.1](#)).

Définition du conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué de z est le nombre noté \bar{z} tel que :

$$\bar{z} = \text{Re}[z] - j\text{Im}[z] = x - jy$$

Dans la représentation géométrique le conjugué \bar{z} est le symétrique de z par rapport à l'axe des réels ([Figure D.1](#)).

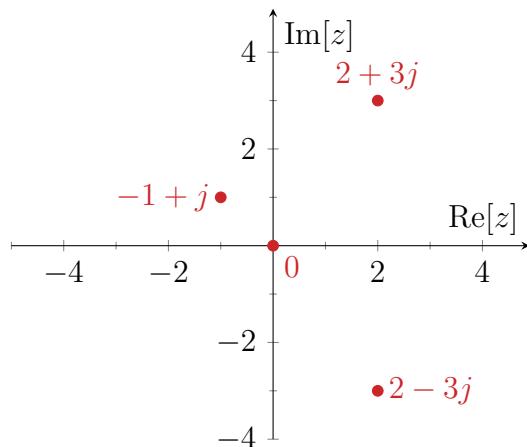


Figure D.1 – Exemple de représentation géométrique en coordonnées cartésiennes de différents nombres complexes. Les nombres complexes $2 + 3j$ et $2 - 3j$ sont conjugués l'un de l'autre. Ces points sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

¹En mathématiques et en physique, le nombre imaginaire pur est généralement noté i . Ici nous utilisons la convention des automaticiens et des électroniciens pour ne pas confondre i avec l'intensité du courant.

Définition du module d'un nombre complexe

Le module d'un nombre complexe noté $|z|$ est la racine carrée de la somme des carrés de $\text{Re}[z]$ et de $\text{Im}[z]$, autrement dit,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

où $x = \text{Re}[z]$ et $y = \text{Im}[z]$ comme définis précédemment.

Dans le plan complexe, le module $|z|$ correspond à la distance à l'origine du point correspondant à z dans le plan complexe.

Propriétés du module

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

- $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $|z^n| = |z|^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ pour $z_2 \neq 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|-z| = |z|$; $|\bar{z}| = |z|$

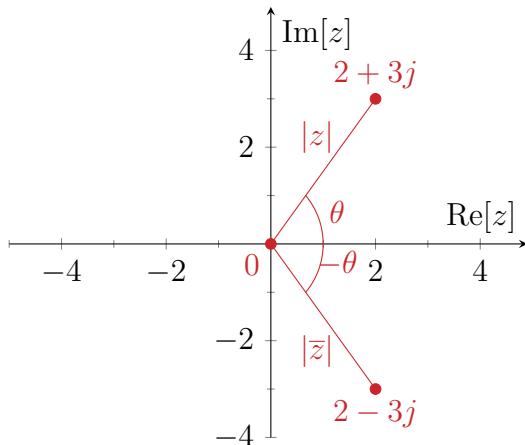


Figure D.2 – Exemple de représentation géométrique en coordonnées polaires d'un nombre complexe. Le nombre complexe $z = 2 + 3j$ s'écrit sous la forme polaire $z = |z|e^{i\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13}$ et $\theta = \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Définition de l'argument d'un nombre complexe

L'argument $\arg(z)$ d'un nombre complexe z est l'angle qui, dans la représentation géométrique, sépare l'axe des réels du vecteur représentatif de z (Figure D.2). Le couple $(|z|, \theta = \arg(z))$ sont donc les coordonnées polaires de la représentation géométrique d'un nombre complexe. L'argument est défini à 2π près. On appelle argument principal celui qui est compris entre $[-\pi, \pi]$

Propriétés de l'argument

Soient z , z_1 et z_2 des nombres complexes.

- $\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}[z]}{|z|}$; $\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}[z]}{|z|}$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$; $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)[2\pi]$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$ pour $z_2 \neq 0$
- $\arg(z\bar{z}) = \arg(z) + \arg(\bar{z}) = \arg(z) - \arg(z) = 0[2\pi]$

Calcul de l'argument principal d'un nombre complexe

L'argument étant défini à 2π près, il est recommandé de donner l'argument principale pour des questions d'unicité (c.-à-d. $\arg z \in [-\pi, \pi]$). Soit ϕ l'argument principale d'un nombre complexe $z = a + ib$, alors ϕ est défini par :

$$\phi = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{si } a > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b \geq 0 \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

La formule précédente nécessite de distinguer plusieurs cas. Cependant, de nombreux langages de programmation fournissent une variante de la fonction arc tangente, qui est souvent appelée `atan2(b,a)`, et qui traite ces différents cas.

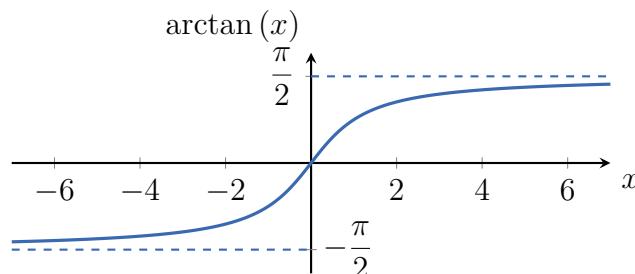


Figure D.3 – Représentation graphique de la fonction arc tangente.

Forme exponentielle ou polaire d'un nombre complexe

La formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

permet d'écrire tout nombre complexe sous sa forme exponentielle :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Une conséquence spectaculaire de la formule d'Euler est que

$$e^{i\pi} = -1.$$

On notera que $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1 admettant θ pour argument. Lorsque θ varie de 0 à 2π , l'image du nombre complexe $e^{i\theta}$ décrit le cercle unité. Une autre conséquence est que les fonctions trigonométriques peuvent s'exprimer sous forme d'exponentielle complexe :

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

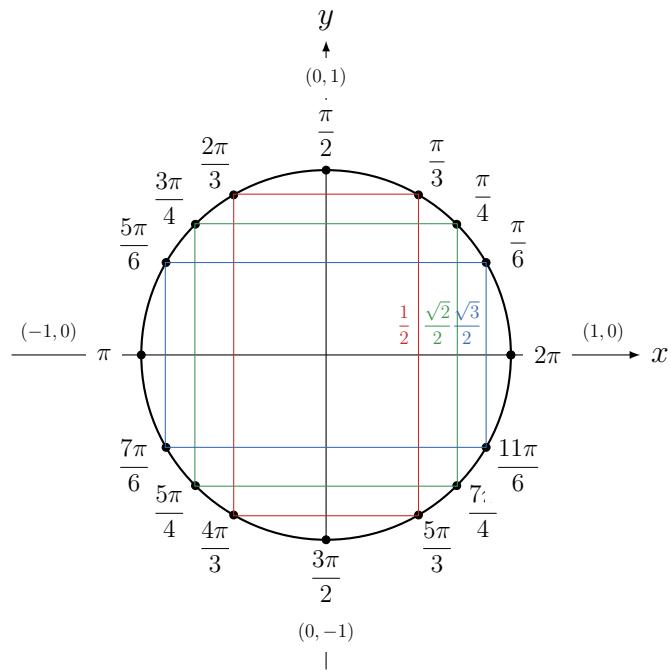


Figure D.4 – Quelques points particuliers du cercle trigonométrique ou cercle unité.

E Équations différentielles à coefficients constants

La forme générale d'une équation différentielle à coefficients constants est donnée par :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} \quad (\text{E.1})$$

avec a_i et b_i des coefficients réels et m et n des entiers naturels tels que $m \leq n$. L'ordre de l'équation est donnée par n .

Nous allons dans cette annexe, présenter la résolution direct des formes canoniques du premier et du second ordre. La méthodologie consiste à déterminer la solution générale de l'équation homogène (c.a.d sans second membre) puis de chercher une solution particulière pour l'équation avec second membre. Nous nous limiterons à l'étude des solutions pour des seconds membres correspondant à l'échelon-unité en entrée.

1 Résolution équation différentielle du premier ordre

1.1 Forme canonique

La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre est donnée par :

$$a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

Il est toujours possible de simplifier une telle équation sous la forme :

$$\frac{ds(t)}{dt} + \frac{a_0}{a_1} s(t) = \frac{b_0}{a_1} e(t)$$

La forme canonique d'une équation différentielle du premier ordre est alors :

$$\frac{ds(t)}{dt} + a s(t) = b e(t) \quad (\text{E.2})$$

1.2 Sans second membre

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme :

$$s(t) = C e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

1.3 Avec second membre

Considérons l'équation différentielle suivante régissant l'entrée et la sortie d'un **SLCI** :

$$\frac{ds(t)}{dt} + as(t) = be(t)$$

avec pour condition initiale $s(0) = s_0$.

La réponse libre du système $s_1(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = -as_1(t)$$

Cette réponse ne dépend que des conditions initiales, ici $s(0) = s_0$. Cette solution est donc de la forme :

$$s_1(t) = Ce^{-at}$$

avec C une constante réel. La réponse doit satisfaire la condition initiale $s(0) = s_0$. Ce qui impose :

$$s_1(t) = s_0e^{-at}$$

La réponse indicielle est donnée pour $e(t) = u(t)$. Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$\frac{ds(t)}{dt} + as(t) = b$$

Déterminons une solution particulière $s_2(t)$ de cette équation différentielle de la forme :

$$s_2(t) = \lambda(t)e^{-at}.$$

En introduisant, celle-ci dans l'équation différentielle on a alors :

$$\lambda'(t)e^{-at} - a\lambda(t)e^{-at} + a\lambda(t)e^{-at} = b$$

On cherche une primitive de la dérivée de λ à partir de :

$$\lambda'(t) = be^{at}$$

soit alors :

$$\lambda(t) = \frac{b}{a}e^{at} + C$$

avec C une constante d'intégration.

$$s_2(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$$

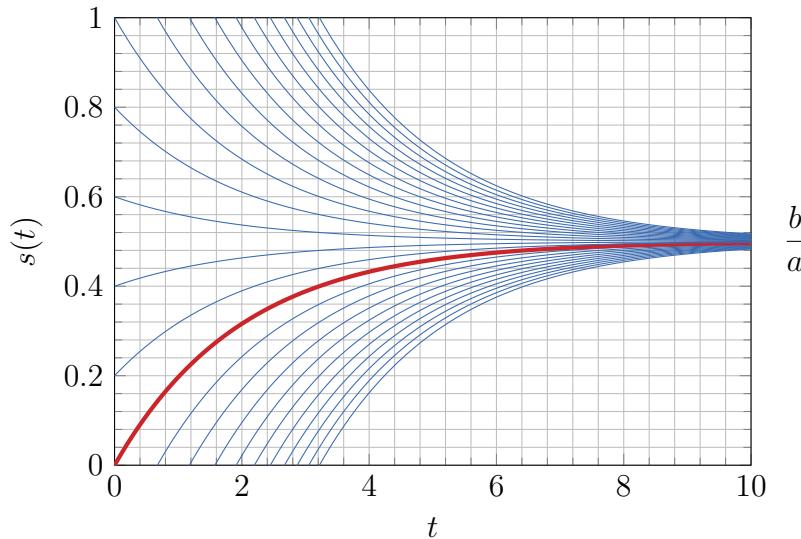
La solution générale est donnée par la somme des deux réponses précédentes :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\ s(t) &= s_0e^{-at} + \frac{b}{a} + Ce^{-at} \end{aligned}$$

La constante C se détermine à partir de la condition initiale :

$$s(t) = s_0 e^{-at} + \frac{b}{a} (1 - e^{-at})$$

Prenons l'équation différentielle telle que $a = 0.5$ et $b = 0.25$. Il est possible de déterminer toutes les solutions pour différentes valeurs de la condition initiale, comme représenté par la figure ci-dessous. Le graphe de la solution en rouge correspond à la solution pour une condition initiale nulle.



Sur les trois termes de la solution générale, un seul est non nul pour $t \rightarrow \infty$ (si $a > 0$). Il correspond au régime permanent de la réponse. Les deux autres correspondent au régime transitoire.

$$s(t) = s_0 e^{-at} - \frac{b}{a} e^{-at} + \frac{b}{a}$$

transitoire permanent

2 Résolution équation différentielle du second ordre

La forme générale d'une équation différentielle du second ordre est donnée par :

$$a \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \frac{ds(t)}{dt} + cs(t) = d \cdot e(t) \quad (\text{E.3})$$

avec pour conditions initiales $s(0) = s_0$ et $s'(0) = s_1$.

La solution générale est de la forme

$$s(t) = s_P + s_H$$

où $s_P = \frac{d}{c}$ est une solution particulière et la solution homogène telle que $s_H = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique composé des coefficients de l'équation différentielle ($aX^2 + bX + c = 0$). La solution générale s'écrit alors,

$$s(t) = \frac{d}{c} + \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$$

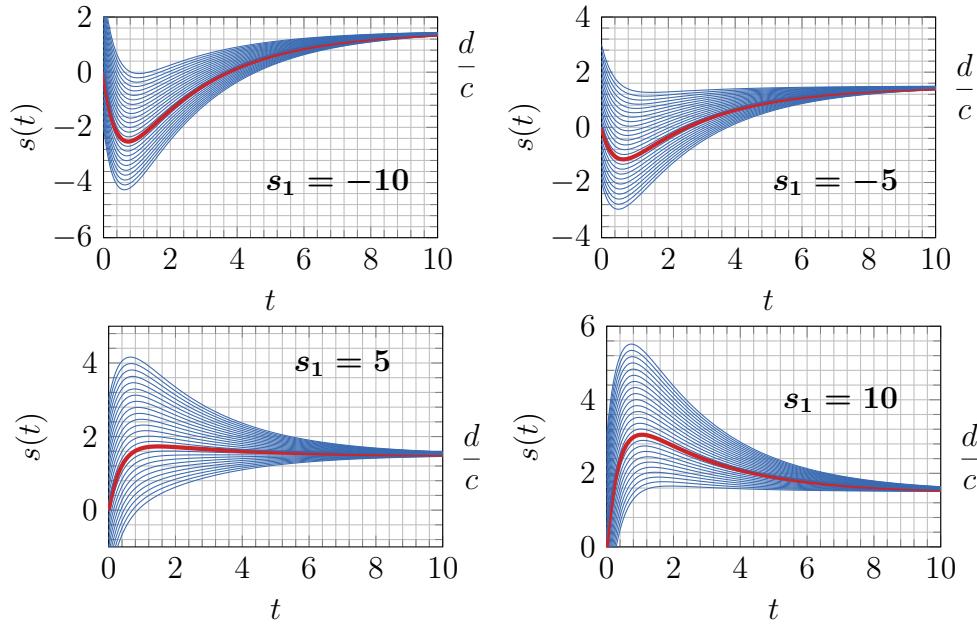
où λ_1 et λ_2 dépendent des conditions initiales.

On écrit :

$$\lambda_1 = \frac{-r_2(s_0 - s_P) + s_1}{r_1 - r_2}$$

$$\lambda_2 = \frac{r_1(s_0 - s_P) - s_1}{r_1 - r_2}$$

Ci dessous nous avons tracé les solutions pour différentes conditions initiales s_0 et $s_1 = \{-10, -5, 5, 10\}$ pour l'équation différentielle telle que $a = 1, b = 3, c = 1, d = 1.5$.



Constatons que les exponentielles de la solution générale ne s'annulent que si r_1 et r_2 sont à partie réelles négatives (ce qui correspond aux pôles de la fonction de transfert). On peut alors identifier les termes responsables du régime transitoire et permanent.

$$s(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} + \frac{d}{c}$$

transitoire permanent

F Décomposition en éléments simples

1 Contexte

En automatique, la détermination d'une réponse temporelle $s(t)$ correspond à déterminer la transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle $S(p)$ définie dans le domaine de Laplace. Autrement dit,

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\}$$

Cette inversion passe généralement par l'utilisation des tables de transformées de Laplace (c.f [Annexe C](#)). Cependant, ces tables peuvent ne pas être complètes, on utilise alors la [décomposition en éléments simples \(DES\)](#) de $S(p)$. Celle-ci nous permet alors de réécrire cette fraction rationnelle en une somme de fractions rationnelles usuellement présentes dans les tables.

Dans cette annexe, nous présenterons les techniques de [DES](#) les plus couramment rencontrées dans l'étude des [SLCI](#). Cette présentation n'est pas exhaustive, et ne remplacera donc pas la lecture du chapitre du cours de mathématiques qui lui est consacré.

2 Fractions rationnelles rencontrées en automatique

Dans le cas qui nous intéresse la fraction rationnelle est la réponse $S(p)$ défini dans le domaine de Laplace. Cette grandeur est de la forme,

$$S(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont deux polynômes de degrés m et n respectivement. En générale, nous aurons à faire à des systèmes pour lesquels $m \leq n$. Une des conséquences est que [la décomposition en éléments simples ne comportera pas de partie entière](#).

3 Décomposition en éléments simples

Soit $S(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ une fraction rationnelle. On considère la décomposition de $D(p)$ en produit de polynômes irréductibles¹ unitaire² de la forme :

$$D(p) = a \prod_{k=1}^r (p - \alpha_k)^{m_k} \prod_{l=1}^s (p^2 + \beta_l p + \gamma_l)^{n_l}$$

¹Nous rappelons que dans $\mathbb{R}[p]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant négatif.

²Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient de degré le plus grand est 1.

où a est une constante qui est le coefficient du terme de plus haut degré de $D(p)$, les α_k sont les pôles de multiplicités m_k , les polynômes de degré 2 sont sans pôles réels (c.-à-d. $\beta_i - 4\gamma_i < 0$).

Alors il existe une famille unique de réels $A_{k,i}$, $B_{l,j}$ et $C_{l,j}$ telles que :

$$S(p) = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}}{(p - \alpha_k)^i} + \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^{n_l} \frac{B_{l,j}p + C_{l,j}}{(p^2 + \beta_l p + \gamma_l)^j} \quad (\text{F.1})$$

On appelle cette écriture la **décomposition en éléments simples** de $S(p)$ sur \mathbb{R} .

Exemple 1

Soit $S(p)$ tel que :

$$S(p) = \frac{1}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)^2}$$

où $D(p)$ se factorise sous la forme :

$$D(p) = (p^2 - 1)(p^2 + 1)^2 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)^2$$

On obtient une décomposition en éléments simples de $S(p)$ de la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p - 1} + \frac{B}{p + 1} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1} + \frac{Ep + F}{p^2 + 1}$$

Exemple 2

Soit $S(p)$ tel que :

$$S(p) = \frac{4p^3}{(p^2 - 1)^2}$$

où $D(p)$ se factorise sous la forme :

$$D(p) = (p^2 - 1)^2 = ((p - 1)(p + 1))^2$$

On obtient une décomposition en éléments simples de $S(p)$ de la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p - 1} + \frac{B}{(p - 1)^2} + \frac{C}{p + 1} + \frac{D}{(p + 1)^2}$$

4 Détermination des coefficients de la décomposition en éléments simples

Après avoir obtenue la **DES**, il faut alors en déterminer les coefficients. Il existe plusieurs méthodes permettant cette détermination, toutes donnant évidemment le même résultat. Le choix de la méthode dépend de la décomposition. On considérera alors la méthode la plus efficace et rapide.

4.1 Par identification

Cette méthode est toujours applicable, mais pourra s'avérer être la fastidieuse à mettre en oeuvre dans certains cas. Celle-ci consiste à réduire la décomposition au même dénominateur et à établir un système d'équations sur les coefficients à déterminer.

Exemple 1

Soit $S(p)$ tel que :

$$S(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

sa décomposition en éléments simples est donnée par :

$$S(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

au même dénominateur on obtient

$$S(p) = \frac{A(p+2) + B(p+1)}{(p+1)(p+2)} = \frac{(A+B)p + (2A+B)}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

Le système d'équations sur les coefficients de la décomposition sont :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases}$$

Sa résolution nous donne, $A = 1$ et $B = -1$. La décompositon en éléments simples de $S(p)$ est donc finalement donnée par :

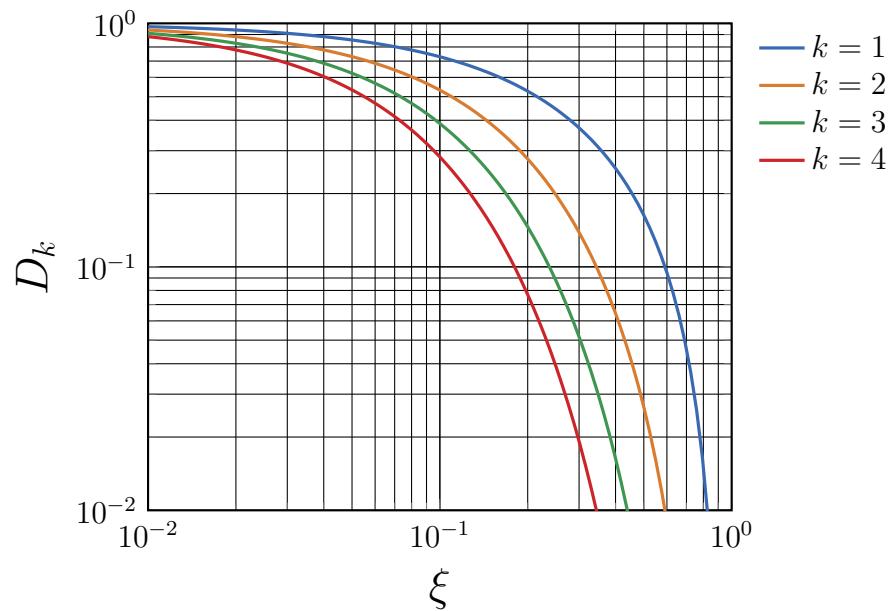
$$S(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

G Systèmes du second ordre

Cette annexe résume les principales propriétés et les abaques des systèmes linéaires du second ordre.

1 Abaques de la réponse temporelle

Dépassemement



Temps de réponse à x%

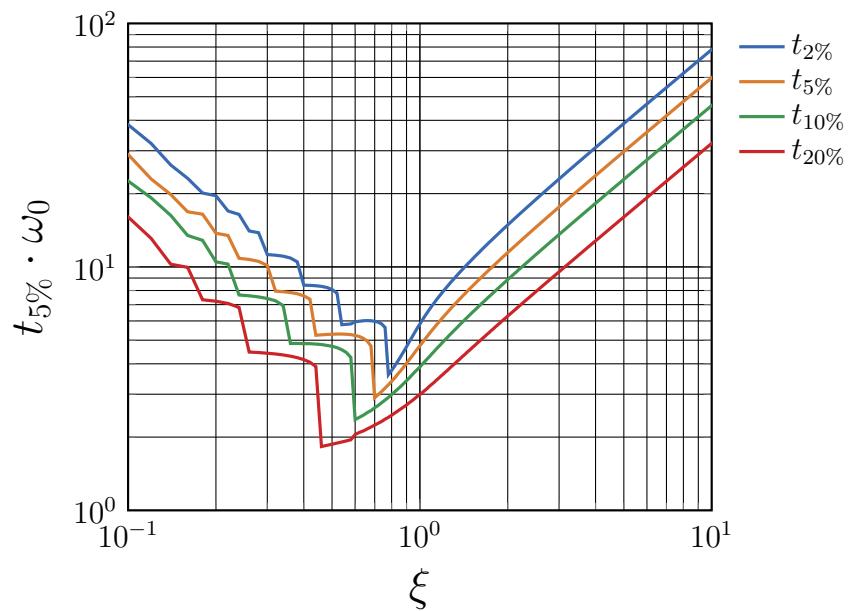


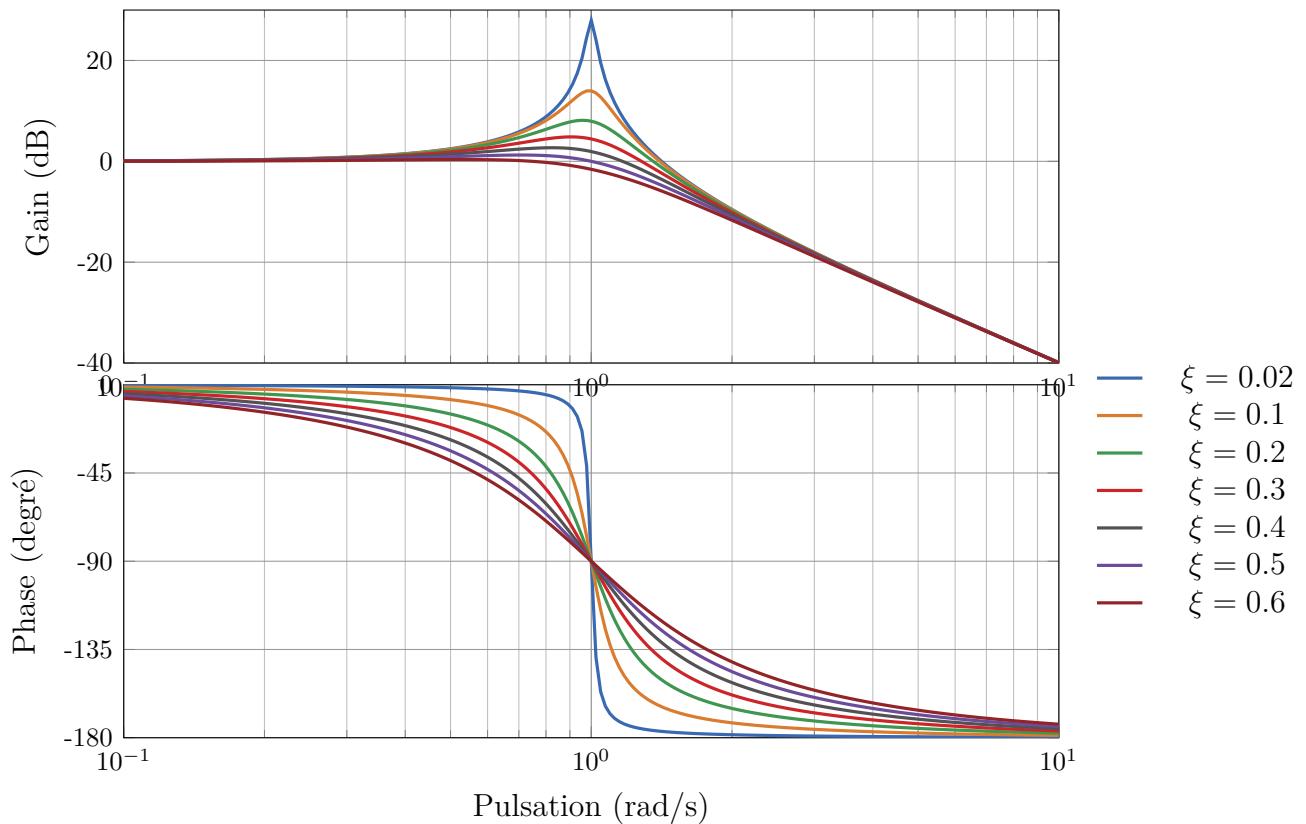
Tableau G.1 – Réponses temporales d'un système du 2nd ordre pour les différents régimes.

Réponse	Régime apériodique ($\xi > 1$)	Régime critique ($\xi = 1$)	Régime pseudo-périodique ($0 < \xi < 1$)
Réponse impulsionnelle			
Réponse indicelle		$s(t) = \frac{t}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$	$s(t) = \frac{\omega_d}{1 - \xi^2} e^{-\xi \omega_0 t} \sin \omega_d t$

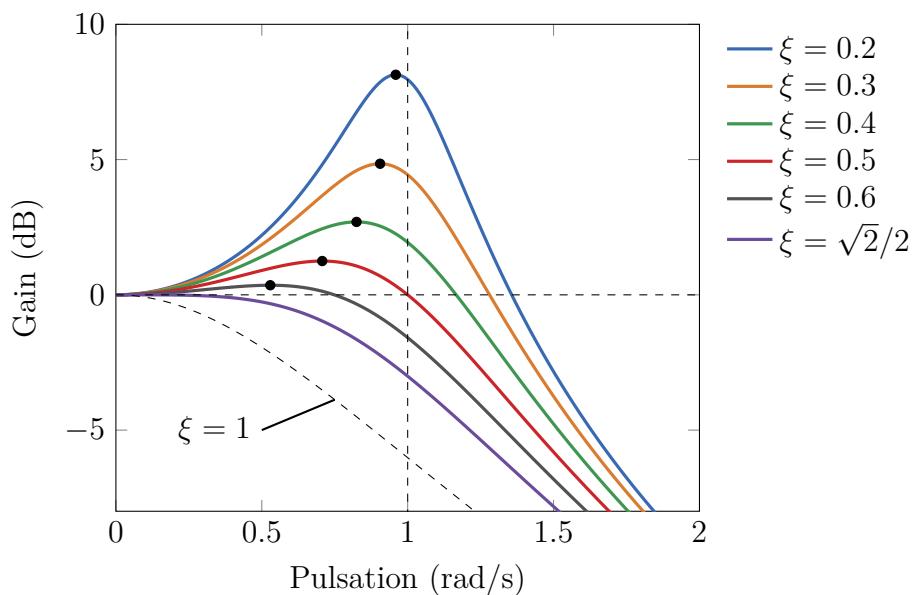
Paramètres : (pour tous) $K = 1$, $E_0 = 1$ (apériodique) $\xi = 2$, $\omega_0 = 1$ (c.-à-d. $\tau_1 = 3/3$ et $\tau_2 = 0.26$) (critique) $\xi = 1$, $\omega_0 = 1$ (c.-à-d. $\tau = 1$) (pseudo-périodique) $\xi = 0.3$ et $\omega_0 = 1$

2 Analyse fréquentielle

Diagramme de Bode



Phénomène de résonance



H Transformée de Laplace inverse

1 Contexte

Il existe une forme analytique de la transformée inverse basée sur la formule de Mellin-Fourier[20] :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} S(p) dp$$

Cette inversion se fait donc par le biais d'une intégrale dans le plan complexe.

2 Méthode de Gaver-Stehfest

3 Méthode de Talbot fixe

I Abaque de Black-Nichols

1 Contexte

Dans le cadre d'un asservissement à retour unitaire, la fonction de transfert complexe en boucle fermée $H_{BF}(j\omega)$ peut être établie à partir de la fonction de transfert complexe en boucle ouverte $H_{BO}(j\omega)$.

$$H_{BF}(j\omega) = \frac{H_{BO}(j\omega)}{1 + H_{BO}(j\omega)}$$

On formalise cette relation par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} :

$$z \rightarrow \frac{z}{1+z}$$

C'est cette application que nous allons étudier dans cette annexe, nous la représenterons à la fois sur les diagramme de Nyquist et celui de Black. L'idée est de tracer sur le même diagramme les contours d'isogain et d'isophase (respectivement les contours de module et d'arguments constant en boucle fermée).

2 Dans le plan complexe (*Hall circles*)

Dans le diagramme de Nyquist (représentant les parties réelles et imaginaires de la fonction de transfert en boucle ouverte), les contours d'isogain et d'isophase de la boucle fermée sont représentés par des cercles. On parle respectivement de M-cercles et de N-cercles.

2.1 M-cercles

On se donne une valeur M représentant le gain en boucle fermée (en dB). Les contours de module constant M sur le diagramme de Nyquist sont donnés par :

$$M = |H_{BF}(j\omega)| = \frac{|H_{BO}(j\omega)|}{|1 + H_{BO}(j\omega)|}$$

2.2 N-cercles

On se donne une valeur N représentant la phase en boucle fermée (en °). Les contours de phase constante N sur le diagramme de Nyquist sont donnés par :

$$N = \arg H_{BF}(j\omega) = \arg \frac{H_{BO}(j\omega)}{1 + H_{BO}(j\omega)}$$

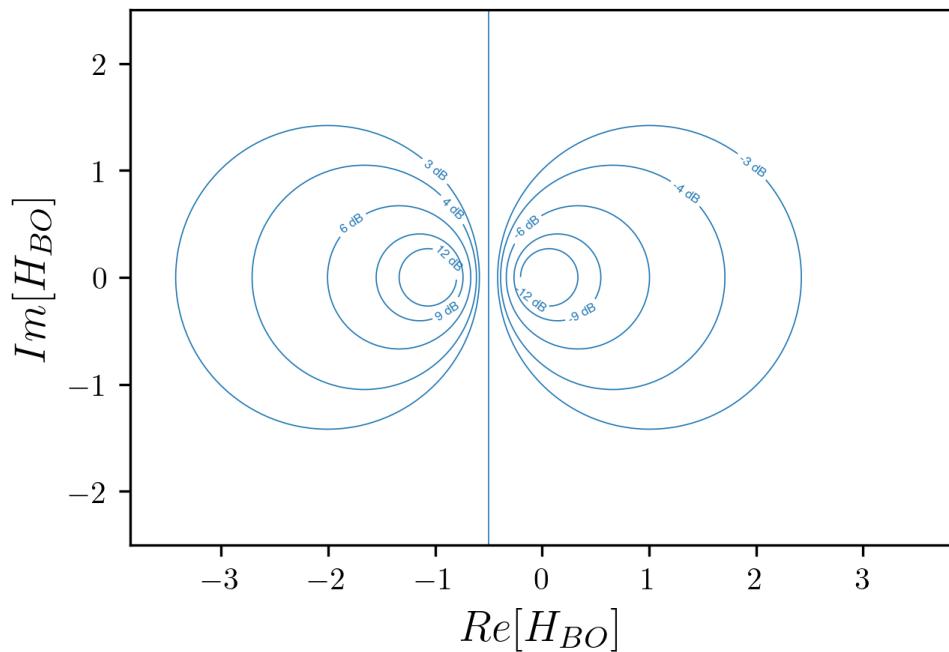


Figure I.1 – Contours des M-cercles (isogain) dans le plan complexe.

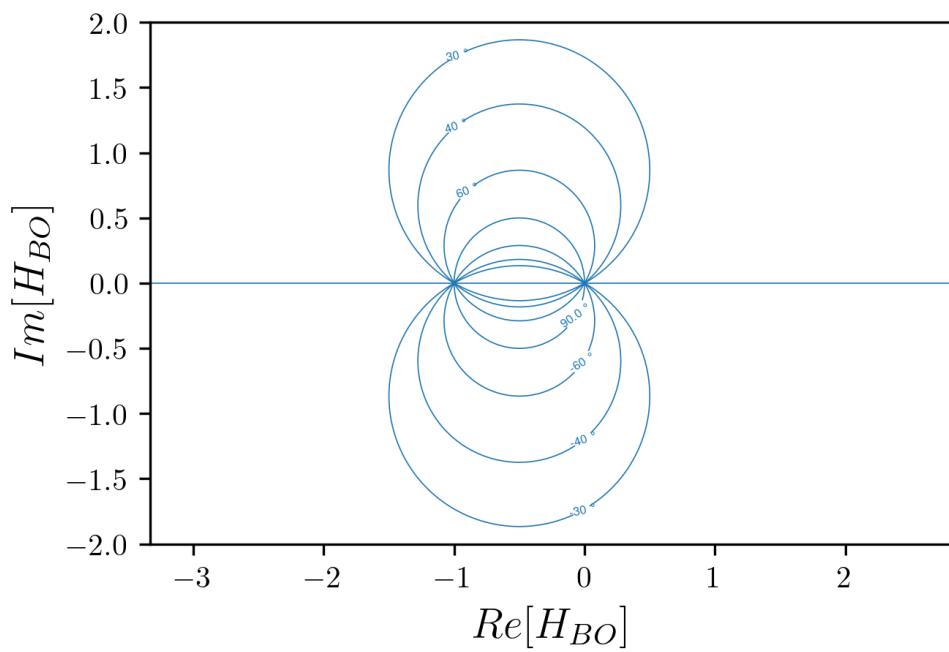


Figure I.2 – Contours des N-cercles (isophase) dans le plan complexe.

3 Abaque de Black-Nichols

L'abaque de Black-Nichols permet de repérer par un système de doubles coordonnées les valeurs des modules et de la phase de la FTBF correspondant à un lieu de Black particulier de la FTBO. Les contours d'isogain sont concentriques autour du point critique $(-180, 0 \text{ dB})$. Les contours d'isophase sont orthogonaux aux contours d'isogain. On constate que le gain en boucle fermée augmente rapidement et tend vers ∞ quand on s'approche du point critique.

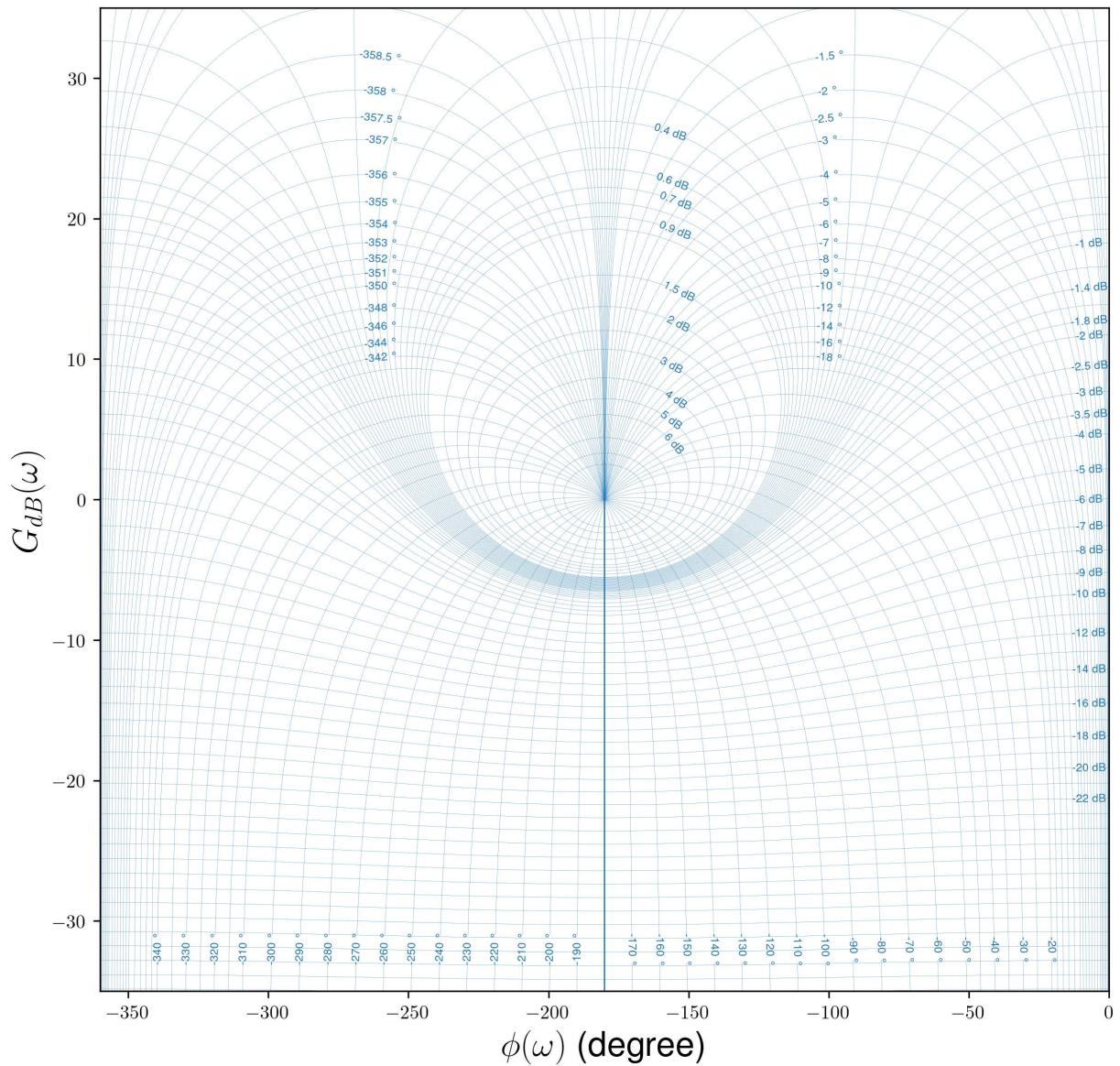


Figure I.3 – ABAQUE DE BLACK-NICHOLS.

4 Exemples d'application

L'objectif de ces exemples est de montrer l'utilité des abaques présentés précédemment (M-cercles, N-cercles et Black-Nichols). Pour cela, nous allons étudier quelques systèmes simple en boucle ouverte et boucle fermée. Soit un système en boucle ouverte de fonction de transfert telle que :

$$H_{BO}(p) = \frac{1}{p+1}$$

Placé dans une boucle de contre-réaction négative unitaire, sa FTBF est alors donnée par :

$$H_{BF}(p) = \frac{1}{p+2}$$

On trace ci-dessous figure I.4, les diagrammes de Bode de ces deux fonctions de transfert. Le principal avantage des abaques est qu'un seul diagramme (Nyquist, Black) permettra d'obtenir la même information contenues dans ces deux diagrammes de Bode. En effet il est possible de lire le gain et le déphasage en boucle fermée sur les diagrammes en boucle ouverte superposés aux différents abaques. Sur les diagrammes de Bode, on constate que

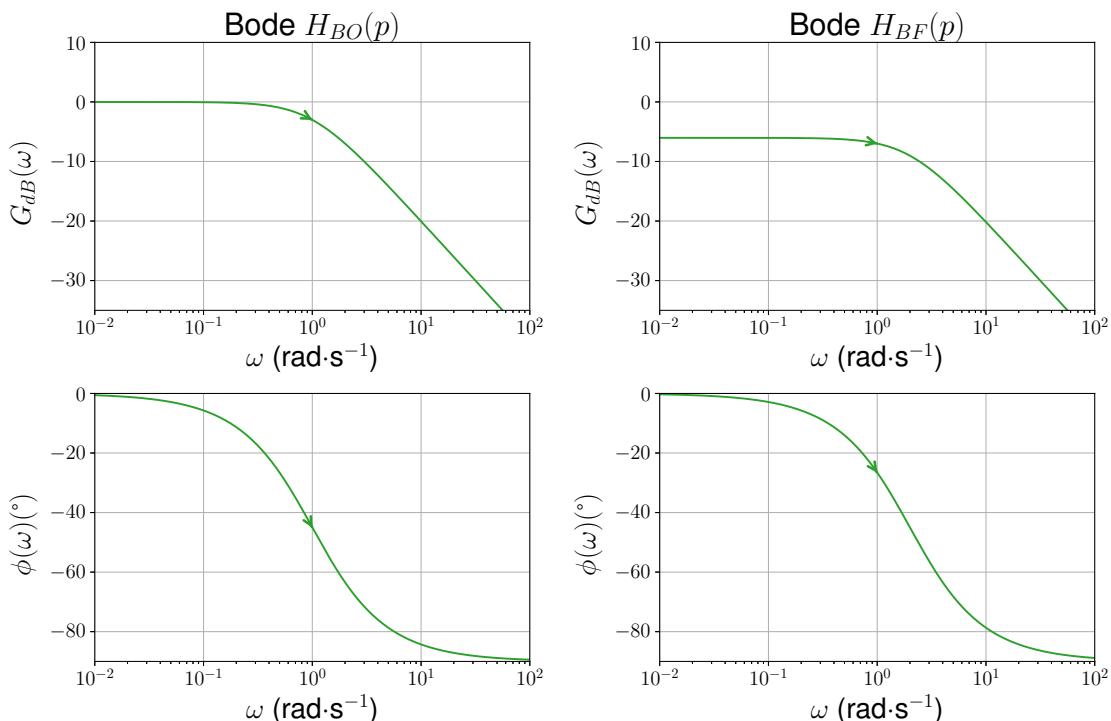


Figure I.4 – Diagrammes de Bode (à gauche) en boucle ouverte et (à droite) boucle fermée.

le gain à basse fréquence du système en boucle fermée est d'environ 6 dB (plus exactement $-20 \log 2$). Il est même tout à fait possible de suivre le gain et la phase du système en boucle fermée pour toutes les valeurs de la pulsation représentées.

ω (rad · s ⁻¹)	Gain (dB)	Phase (°)
0.00	-6.02	0.00
1.00	-6.99	-26.57
2.00	-9.03	-45.00
3.00	-11.14	-56.31

Tableau I.1 – Valeurs du gain et du déphasage de la réponse harmonique en boucle fermée pour quelques valeurs particulières de la pulsation ω

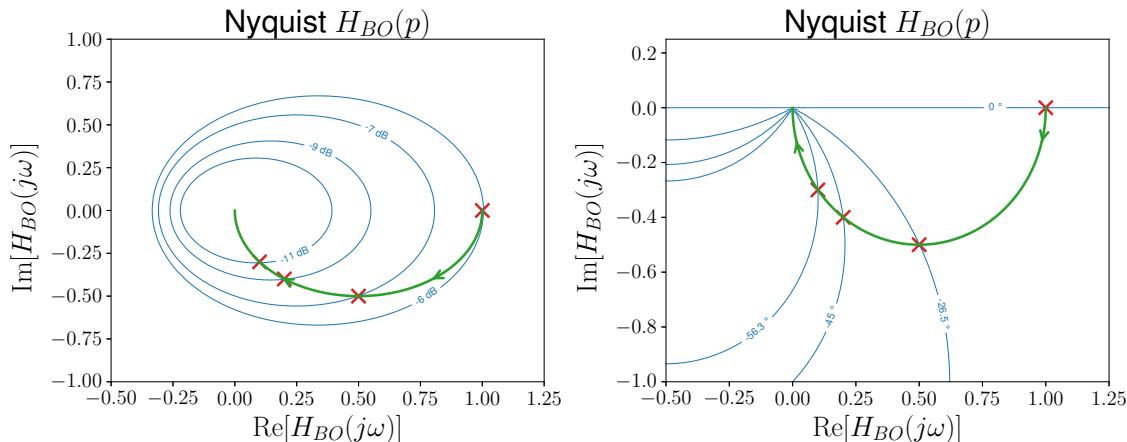


Figure I.5 – Diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte, superposé (gauche) aux M-cercles (droite) aux N-cercles.

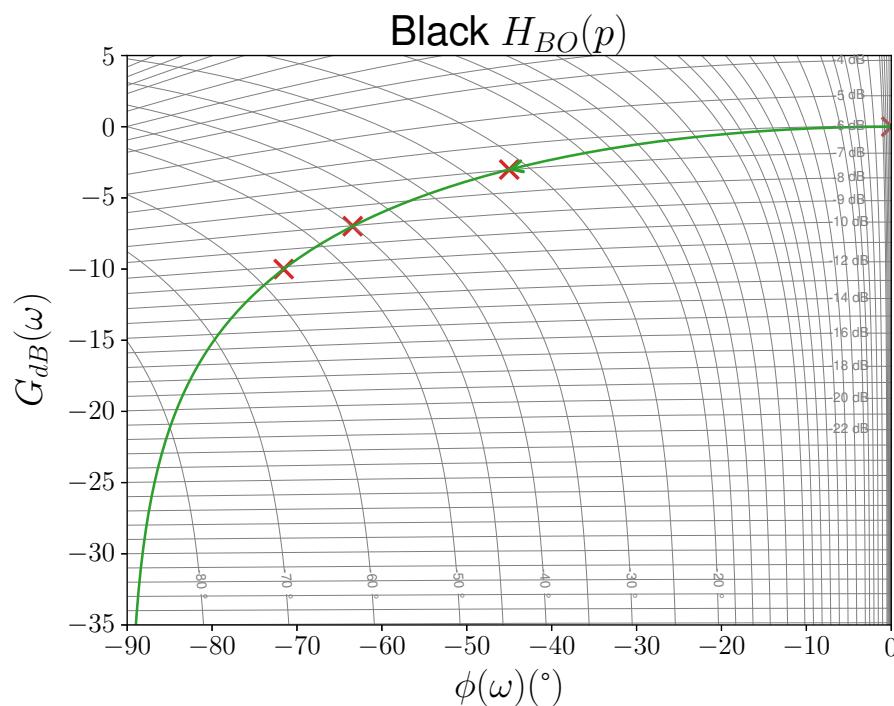
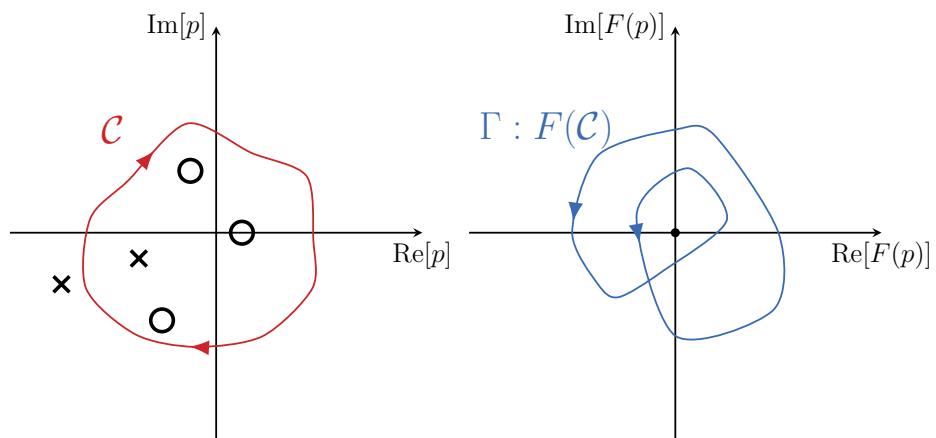


Figure I.6 – Diagramme de Black du système en boucle ouverte superposé à l'abaque de Black-Nichols.

J Principe de l'argument de Cauchy

1 Notebook et class Ftransfert

Ce notebook permet de tracer l'image d'un contour du plan complexe par une fonction de transfert quelconque. Le but est de vérifier le **principe de l'argument de Cauchy** en partant de cas simples. Ce principe est à la base du critère de Nyquist qui permet d'étudier la stabilité des systèmes asservis.



Le module qui s'occupe explicitement de calculer et tracer les contours d'origine et image est le module `ftransfert`. Ici nous allons simplement importer les fonctions les plus importantes et apprendre à les manipuler. L'importation du module se fait par l'instruction suivante :

```
[1]: from ftransfert import Ftransfert
```

La classe `Ftransfert` permet de définir une fonction de transfert. Celle-ci sera simplement définie par son gain k , ses pôles p_i et ses zéros z_i .

$$F(p) = k \frac{(p - z_1)(p - z_2)(p - z_3) \dots}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \dots}$$

La définition d'une fonction de transfert se fait par les instructions suivantes :

```
zeros=[]
poles=[(-1,0),(-2,0)]
gain=6
F=Ftransfert(zeros=zeros,poles=poles,gain=gain)
print(repr(F))
print(str(F))
```

où `zeros` et `poles` sont des listes de nombre complexe (c.-à-d. un tuple de deux éléments (`réel`, `imaginaire`)). Un segment de points est une liste de nombres complexes modélisés par une liste de tuples.

```
[2]: zeros=[]
poles=[(-1,0),(-2,0)]
gain=6
F=Ftransfert(zeros=zeros,poles=poles,gain=gain)
print(repr(F))
print(str(F))
```

```
Ftransfert(zeros=[],poles=[(-1, 0), (-2, 0)],gain=6,name="F")
```

$$F(p) = \frac{6}{(p+1)(p+2)}$$

L'objet (`F`) ainsi construit possède quelques méthodes pour le tracé des réponses harmoniques. Par exemple pour tracer le diagramme de Nyquist complet on utilisera la méthode suivante :

```
[3]: import matplotlib.pyplot as plt
F.nyquist(labels=r"$F(p)$",xlim=(-2,4),ylim=(-2.5,2.5),n=4096,dw=0.01)
```

```
*****
Nyquist plot : F(p)
```

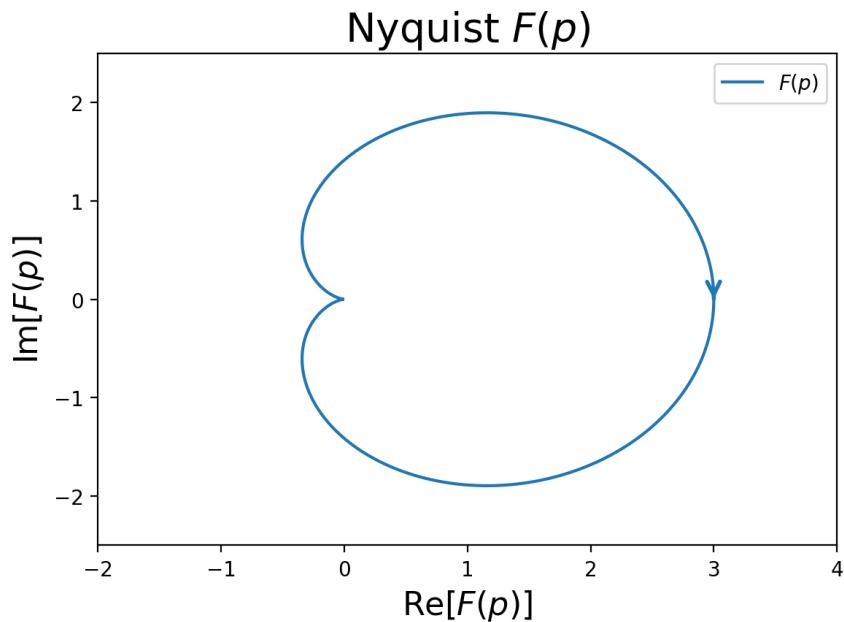
```
Pulsation pas : 0.01
```

```
Interval des pulsations -20.48 20.48
```

```
Nombre de points 4096
```

$$F(p) = \frac{6}{(p+1)(p+2)}$$

```
*****
```



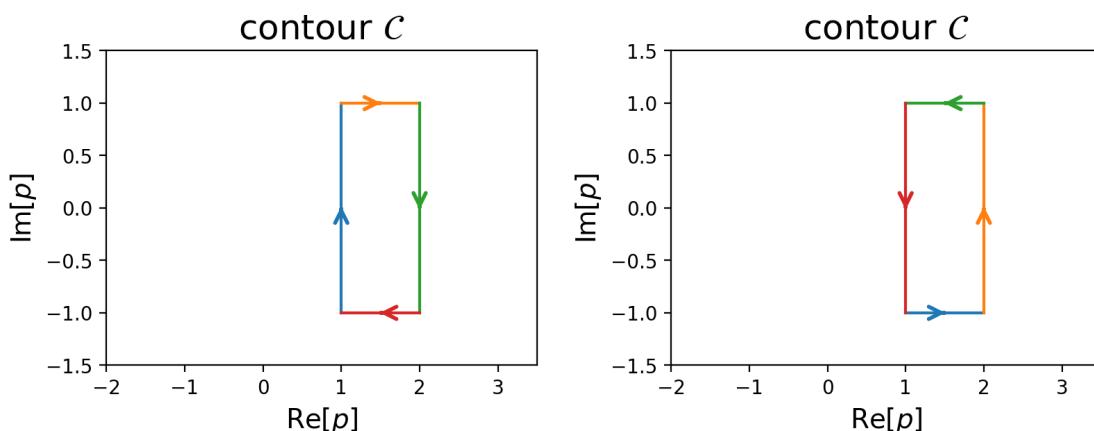
2 Contour dans le plan complexe

Le module est accompagné de quelques fonctions pour tracer des figures de contour simple.

```
[4]: from contour import rectangle,circle,plot_contour
```

Commençons par définir un contour de la forme d'un rectangle en définissant deux coins de coordonnées $A=(-1.5, -1)$ et $B=(-0.5, 1)$ à l'aide de la fonction `rectangle`. Celle-ci retourne une liste de quatre liste Python de 64 points chacuns (valeur par défaut : 128). On peut également définir le même contour mais parcouru dans le sens contraire (ici le sens trigonométrique). Nous nommerons ce contour `C1_inv`

```
[5]: C1=rectangle((1,-1),(2,1),npts=64)
plot_contour(C1,xlim=(-2,3.5),ylim=(-1.5,1.5))
C1_inv=rectangle((1,-1),(2,1),npts=64,inverse=True)
plot_contour(C1_inv,xlim=(-2,3.5),ylim=(-1.5,1.5))
```



À partir du contour ainsi défini, il est maintenant possible de déterminer l'image par une fonction de transfert à l'aide de la méthode `cauchy` d'un objet `Ftransfert`.

3 Image d'un contour par une fonction de transfert

Pour vérifier le principe de cauchy, nous allons étudier des fonctions de transfert simple présentant un zéro et un pôle et nous allons observer l'image des ces fonctions de transfert de contours qu'il les contiennent ou pas.

3.1 Fonction de transfert avec un seul zéro

Déterminons maintenant l'image de ces contours par une fonction de transfert composée d'un seul zéro ($z_1 = -1$).

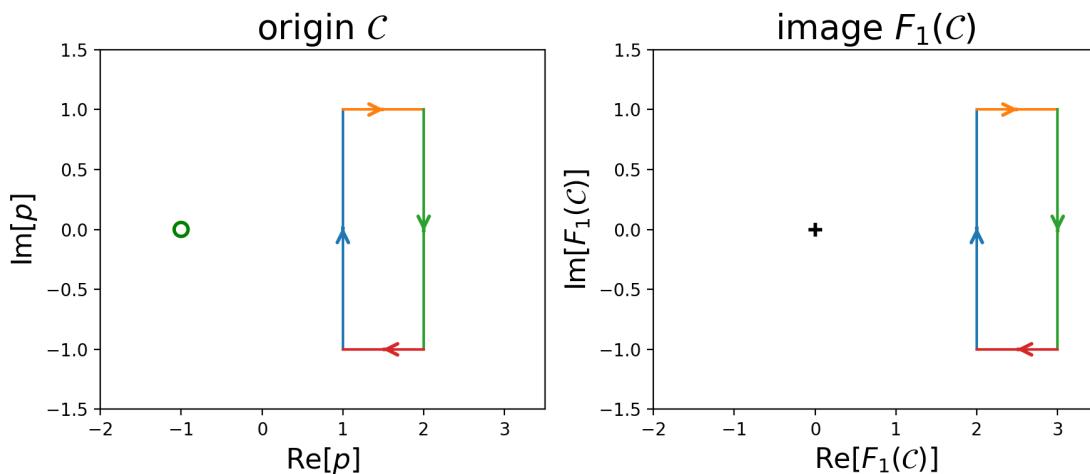
$$F_1(p) = (p + 1)$$

```
[6]: poles=[]
zeros=[(-1,0)]
gain=1
F_1=Ftransfert(zeros=zeros,poles=poles,gain=gain,name="F_1")
```

3.1.1 Contour ne contenant pas le zéro parcouru

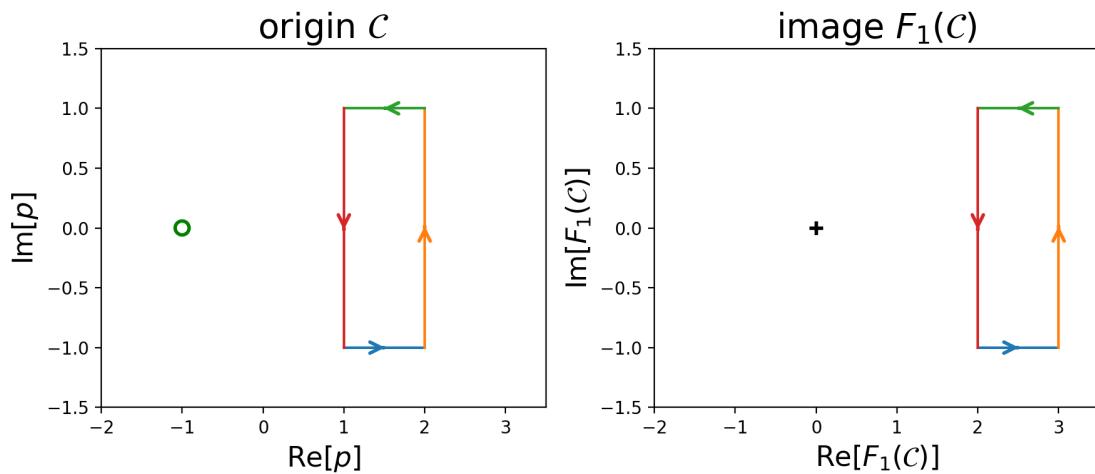
... dans le sens horaire

```
[7]: F_1.cauchy(C1,xlim=(-2,3.5),ylim=(-1.5,1.5),contourLabel="C1")
```



... Dans le sens trigonométrique

```
[8]: F_1.cauchy(C1_inv,xlim=(-2,3.5),ylim=(-1.5,1.5),contourLabel="C1_U
↪(inverse)")
```



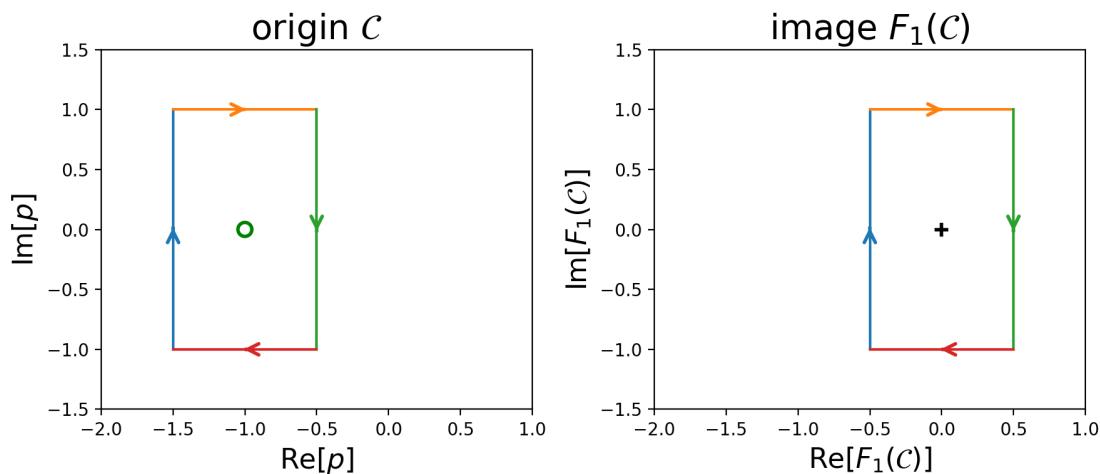
(La carte des pôles et zéros de la fonction de transfert sera toujours représentée sur le graphe de gauche. Sur le graphe de droite c'est l'origine du plan qui sera toujours représentée par un '+') Nous constatons que l'image du contour par une telle fonction de transfert est simplement traduite d'une distance égale à la distance entre le point du contour et la position du zéro. **Nous observons également que le sens de parcours du contour de l'image n'est pas modifié.**

3.1.2 Contour contenant le zéro

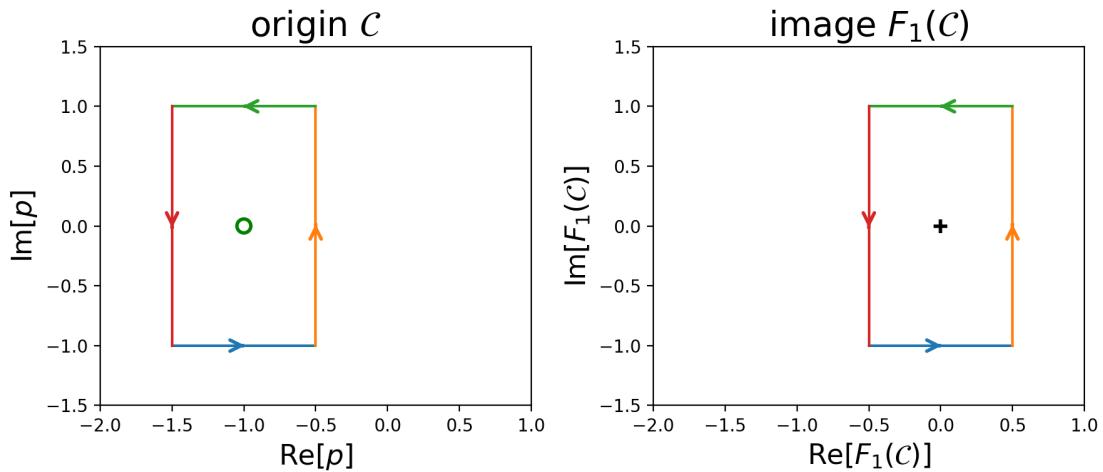
On se donne un deuxième contour C_2 qui contient le zéro de la fonction de transfert test.

[9] : `C2=rectangle((-1.5,-1),(-0.5,1),npts=64)
C2_inv=rectangle((-1.5,-1),(-0.5,1),npts=64,inverse=True)`

[10] : `F_1.cauchy(C2,xlim=(-2,1),ylim=(-1.5,1.5),contourLabel="C2")`



[11] : `F_1.cauchy(C2_inv,xlim=(-2,1),ylim=(-1.5,1.5),contourLabel="C2 (inverse)"
→")`



Ici le contour \mathcal{C} entoure le zéro de la fonction de transfert. Nous observons que le contour image contient l'origine (et est orienté dans le même sens que le contour origine). Si le contour contient deux zéros, l'image par la fonction de transfert fait deux tours autour de l'origine. Plus généralement, si le contour contient un nombre Z de zéros, l'image par la fonction de transfert du contour fait Z tours autour de l'origine dans le même sens.

3.2 Fonction de transfert possédant un pôle

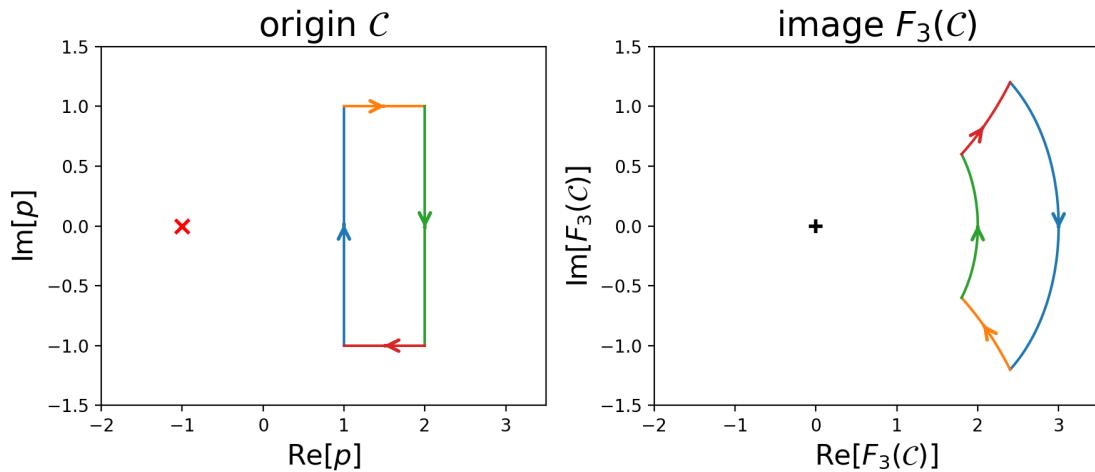
Nous allons maintenant observer le comportement de ces tracés pour différents contours dans le cas où la fonction de transfert présente un pôle, notamment avec :

$$F_3(p) = \frac{6}{p + 1}$$

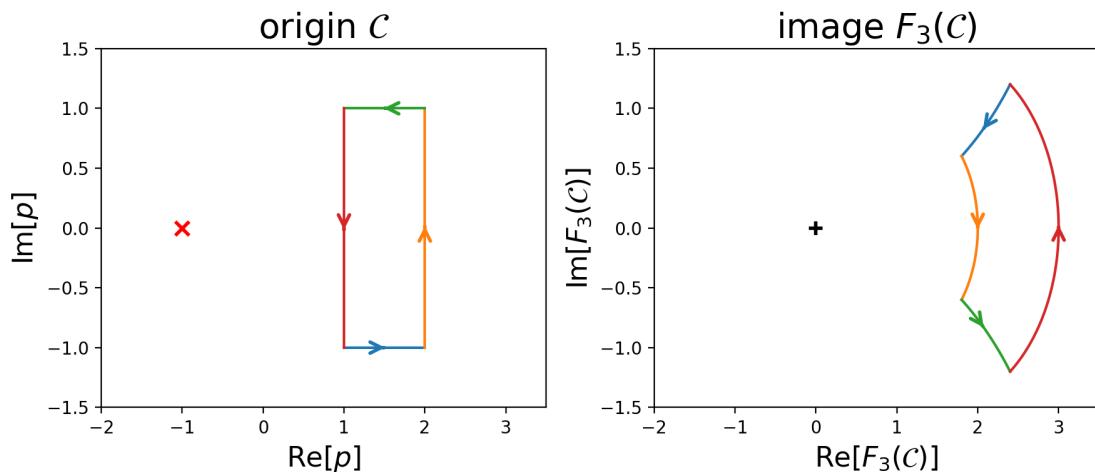
3.2.1 Contour ne contenant pas le pôle

```
[12]: zeros=[]
poles=[(-1,0)]
gain=6
F_3=Ftransfert(zeros=zeros,poles=poles,gain=gain,name="F_3")
```

```
[13]: F_3.cauchy(C1,xlim=(-2,3.5),ylim=(-1.5,1.5),contourLabel="C1")
```



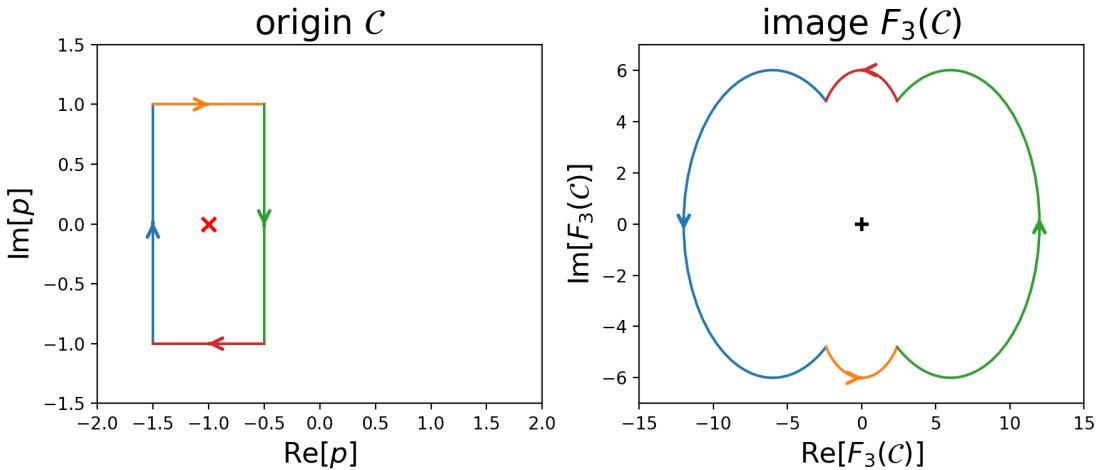
```
[14]: F_3.cauchy(C1_inv,xlim=(-2,3.5),ylim=(-1.5,1.5),contourLabel="C1 ↳(inverse)")
```



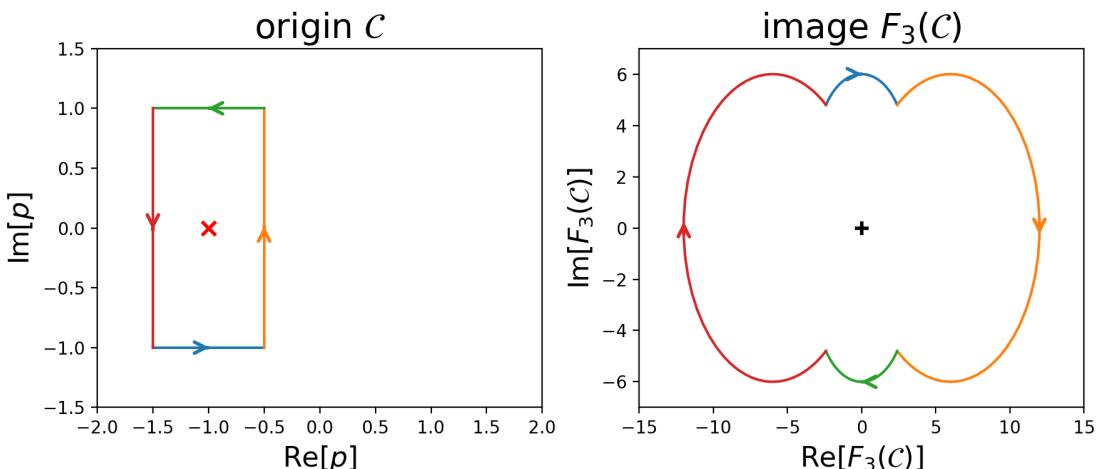
Nous remarquons tout d'abord que le contour image ne contient pas l'origine du plan complexe. De plus le contour image est parcouru dans le même sens que le contour origine.

3.2.2 Contour contenant le pôle

```
[15]: F_3.cauchy(C2,xlim=[(-2,2),(-15,15)],ylim=[(-1.5,1.5),(-7,7)],contourLabel="C1")
```



```
[16]: F_3.cauchy(C2_inv,xlim=[(-2,2),(-15,15)],ylim=[(-1.5,1.5),(-7,7)],contourLabel="C1 (inverse)")
```



Nous remarquons que l'image du contour entoure l'origine dans le sens opposé celui du contour d'origine. Si le contour entoure un nombre P de pôles, l'image par la fonction de transfert de ce contour fait un nombre P de tours autour de l'origine dans le sens opposé (à celui du contour).

4 Enoncé du principe de l'argument de Cauchy

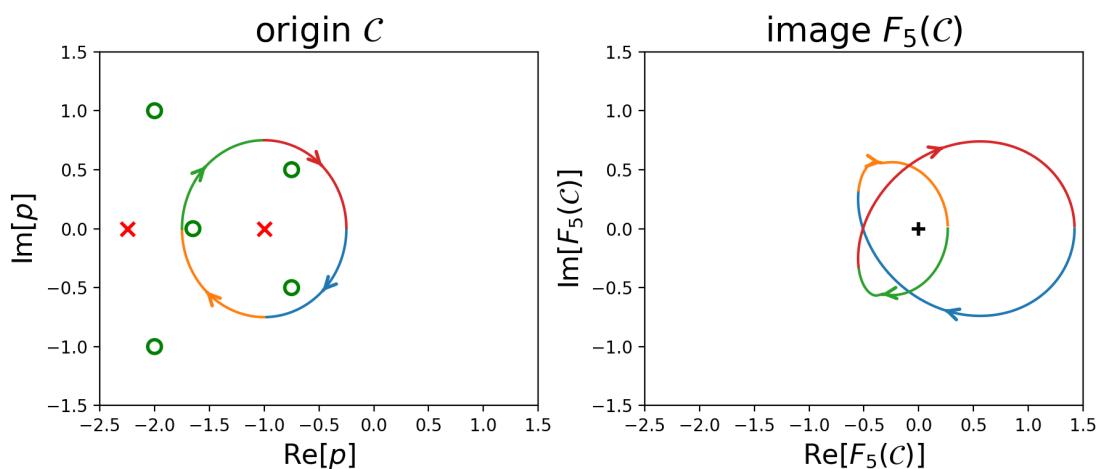
On énonce alors le principe de Cauchy : Si un contour \mathcal{C} entoure Z zéros et P pôles d'une fonction analytique $F(p)$ sans en traverser aucun, alors quand on le parcourt dans le sens anti-trigonométrique, le contour image par $F(p)$, $\Gamma = F(\mathcal{C})$ fait un nombre de tours N autour de l'origine dans le sens anti-trigonométrique égal à,

$$N = Z - P$$

On vérifie le principe de Cauchy avec une fonction de transfert composé de cinq zéros et deux pôles. Et un contour \mathcal{C} qui contient que $Z = 3$ zéros et $P = 1$ pôle. On a donc

$N = 2$. Le signe négatif indique que le nombre de tours est dans le sens opposé au sens trigonométrique (lorsque le contour d'origine tourne dans le sens horaire).

```
[17]: zeros=[(-0.75,0.5),(-0.75,-0.5),(-1.65,0),(-2,1),(-2,-1)]
poles=[(-1,0),(-2.25,0)]
gain=0.75
F_6=Ftransfert(zeros=zeros,poles=poles,gain=gain,name="F_6")
C3=circle(center=(-1,0),radius=0.75)
F_6.cauchy(C3,xlim=(-2.5,1.5),ylim=(-1.5,1.5))
```



K Lieu d'Evans (lieu des racines)

1 Règles de construction

Références

- [1] Régulation automatique (analogique) (REG). <http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/>.
- [2] Intro to Control - 16.3 Contour Mapping. https://www.youtube.com/watch?v=k_XXfN1TZXM.
- [3] <http://www.demosciences.fr/projets/scilab-xcos/-utilisation/premiers-pas>.
- [4] Xcos pour les vrais debutants. <https://scilab.developpez.com/tutoriels/debuter/apprendre-xcos-debutant/>.
- [5] Denis Arzelier. Représentation et analyse des systèmes linéaires (pc7bis), 2005.
- [6] Olivier E. Bachelier. 2021. <https://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/LIVRE.php>.
- [7] B. Bayle and J. Gangloff. Systèmes et asservissements à temps continu, 2009.
- [8] Henri Bourlès and Hervé Guillard. *Commande des systèmes performance et robustesse*. Technosup les filières technologiques des enseignements supérieurs. Ellipses, Paris, DL 2012, cop. 2012.
- [9] S. L. Campbell, J.-P. Chancelier, and R. Nikoukhah. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos*. Springer, 2006.
- [10] D. M. Freeman. 6.003 Signal and Systems. <https://ocw.mit.edu/courses/6-003-signals-and-systems-fall-2011/pages/syllabus/>.
- [11] H. Garnier. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/hugues.garnier/?q=content/teaching>.
- [12] S. Genouel. Evaluation des performances des systèmes asservis - stabilité. <http://stephane.genouel.free.fr/>.
- [13] Y. Granjon. *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, événements discrets*. Dunod, Paris, 2015.
- [14] E. Laroche and H. Halalchi. Asservissement des systèmes linéaires à temps continu. <http://eavr.u-strasbg.fr/~larache/student>.
- [15] O. Le Gallo. *Automatique des systèmes mécaniques : Cours, travaux pratiques et exercices corrigés*. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2009.
- [16] Joe Mabel. Régulateur à boules au Georgetown PowerPlant Museum à Seattle. CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5694146>.
- [17] B. Marx. Outils Mathématiques pour l'ingénieur - Traitement du Signal. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/benoit.marx/enseignement.html>.
- [18] B. Marx. Contrôle des systèmes linéaires. <http://w3.cran.univ-lorraine.fr/perso/-benoit.marx/enseignement.html>.
- [19] F. Orieux. *Automatique : Systèmes linéaires et asservissements*. Notes de Cours, Master 2 Outils et systèmes de l'astronomie et de l'Espace, 20017-1018.

- [20] E. Ostertag. *Systèmes et asservissements continus : Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande*. Ellipses Marketing, 2004.
- [21] R. Papanicola. Schéma-blocs avec PGF/TIKZ. <https://sciences-indus-cpge.papanicola.info/IMG/pdf/schema-bloc.pdf>.
- [22] R. Papanicola. *Sciences industrielles PCSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2003.
- [23] R. Papanicola. *Sciences industrielles PSI : Mécanique et automatique*. Ellipses Marketing, 2010.
- [24] Marsyas-Travail personnel. Clepsydre athénienne reconstituée, Musée de l'Agora antique d'Athènes. CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=476174>.
- [25] Consortium Scilab. Introduction to Scilab. www.scilab.org/content/download/247/1702/file/introscilab.pdf.
- [26] S. Steer and Y. Degré. *Scilab : De la théorie à la pratique - II. Modéliser et simuler avec Xcos*. Éditions D-BookeR, 2014.
- [27] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne. *Automatique des systèmes continus*. Editions Technip.
- [28] E. Thomas. TP Scilab. http://cpgeptljg.free.fr/scenari/TP_INFO/TP_info_12_ordre/co/module_TP_1_2_ordre_5.html.

Index

- Black, Harold, 59
Bode, Hendrik, 131
Bromwich, Thomas, 219
Cauchy, Augustin Louis, 219
Correcteur
 Proportionnel Intégral Dérivé (PID)
 série, 246
 Dérivé (D), 237
 Intégral (I), 237
 Proportionnel (P), 237
 Proportionnel Dérivé (PD), 239
 Proportionnel Intégral (PI), 237
 Proportionnel Intégral Dérivé (PID)
 mixte, 246
 parallèle, 245
 à avance de phase (AP), 240
 à retard de phase (RP), 243
 à retard-avance de phase, 247
Critère de Nyquist, 222
Critère de stabilité
 de Routh-Hurwitz, 206
 du revers, 210
 dans le plan de Black, 214
 dans le plan de Bode, 214
 dans le plan de Nyquist, 213
 de Nyquist, 218
Diagramme
 de Black-Nichols, 133
 de Bode, 131
 de Nyquist, 132
Dirac, Paul, 22
Décomposition d'un signal, 26
Dérivateur pur, 113
 diagramme de Bode, 137
Fonction de Transfert, 37
 forme canonique, 39
 forme factorisée, 40
 carte des pôles et zéros, 41
Gain pur, 112
diagramme de Bode, 135
Heaviside, Oliver, 33
Hurwitz, Adolf, 206
Instabilité des systèmes asservis
 phénomène de pompage, 202
Intégrateur pur, 112
 diagramme de Bode, 136
Laplace, Pierre-Simon, 27
Mason, Samuel, 70
McCulloch, Warren, 15
Minsky, Marvin, 15
Nichols, Nathaniel, 133
Nyquist, Harry, 132
Phénomène de pompage, 202
Phénomène de résonance, 144
Point critique, 210
Principe de l'argument de Cauchy, 219
Représentation d'État, 270
 Équation d'état, 272
 Équation de sortie, 272
 Lien avec la fonction de transfert, 273
 Schéma-bloc, 273
Retard pur, 113
 diagramme de Bode, 138
 diagramme de Nyquist, 152
 effet d'un retard sur le diagramme de
 Nyquist, 155
Routh, Edward, 206
Shannon, Claude, 15
Signal
 causal, 19
 périodique, 20
 retardé, 19
 stable, 20
Signaux usuels
 exponentielle décroissante, 24

Impulsion de Dirac, 22
rampe unité, 23
sinusoïde, 24
sinusoïde amortie, 24
échelon unité, 23
Système, 15
causal, 17
invariant, 16
linéaire, 16
masse-ressort, 275
monovariable, 15
multivariable, 15, 270
stable, 17
à temps continu, 16
Système du premier ordre
diagramme de Bode, 139
diagramme de Nyquist, 152
définition, 92
fonction de transfert, 93
réponse harmonique dans le domaine
temporel, 130
réponse impulsionale, 93
réponse indicielle, 95
réponse à une rampe, 96
Système du second ordre
diagramme de Bode, 143
diagramme de Nyquist, 154
définition, 97
fonction de transfert, 97
réponse impulsionale, 99
réponse indicielle, 100
réponse à une rampe, 108
Théorème
de la valeur finale, 30
de la valeur initiale, 30
Transformée de Laplace, 27
résolution d'équation différentielle, 35
d'un cosinus, 32
d'un sinus, 32
d'un échelon-unité, 31
d'une exponentielle décroissante, 31
d'une impulsion de Dirac, 30
d'une rampe, 31
Wiener, Norbert, 15

Acronymes

BIBO Bounded Input Bounded Output

DES Décomposition en Éléments Simples

EBSB Entrée Bornée/Sortie Bornée

FTBF Fonction de Transfert en Boucle Fermée

FTBO Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

FTCD Fonction de Transfert de la Chaîne Directe

FTCR Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour

MEI Matière-Énergie-Information

MIMO Multiple Input Multiple Output

SISO Single Input Single Output

SLCI Système Linéaire Continu et Invariant

TL Transformée de Laplace

Glossaire

Asservissement

L'asservissement consiste à contrôler un système dynamique pour que sa réponse temporelle suive une consigne variable au cours du temps.

Contrôle

Le contrôle permet d'englober les notions d'asservissement et de régulation à l'idée de contrôle automatique des systèmes. C'est le terme qui est plus largement utilisé dans la littérature moderne.

Correcteur

Diagramme de Blach-Nichols

Diagramme de Bode

C'est un diagramme pour lequel la réponse harmonique est représentée par deux graphes semi-logarithmique donnant d'une part le gain en décibel en fonction de la pulsation et d'autre part le déphasage en degré en fonction de la pulsation.

Diagramme de Nyquist

Dépassemment

Le dépassement (ou plutôt le premier dépassement) est lié à valeur maximale prise par une réponse temporelle en régime pseudo-périodique.

Fonction de Transfert

La fonction de transfert défini la relation entre l'entrée et la sortie d'un système linéaire.

Performances

Les performances attendues par un système asservis ou régulé sont généralement liées à sa stabilité, sa précision et sa rapidité.

Précision

La précision est une performance recherchée par les automaticiens pour le système qu'ils souhaitent asservir. Un système automatique est précis si la différence (l'écart) entre la consigne et la sortie est nulle. Il est possible de définir une précision statique (en régime permanent) ou une précision dynamique (l'écart instantané)

Pôle	Un pôle est formellement la racine du dénominateur d'une fraction rationnelle irréductible. Dans le contexte de l'étude d'un système linéaire, c'est la racine au dénominateur de la fonction de transfert du système
Rapidité	La rapidité est une performance recherchée par les automaticiens pour le système qu'ils souhaitent asservir. La rapidité peut être quantifier par le temps de réponse ou le temps de montée. Un système est d'autant plus rapide que ces temps sont brefs.
Régime apériodique	Le régime apériodique est le régime pour lequel la réponse temporelle d'un système linéaire ne présente pas d'oscillations. On parle également de réponse fortement amortie.
Régime critique	Le régime critique est le régime intermédiaire entre le régime apériodique et le régime pseudo-périodique. Il correspond à un cas limite.
Régime permanent	Le régime permanent est la contribution de la réponse temporelle qui persiste lorsque le régime transitoire disparé.
Régime pseudo-périodique	Le régime pseudo-périodique est le régime pour lequel la réponse temporelle d'un système linéaire présente des oscillations faiblement amorties.
Régime transitoire	Le régime transitoire est la contribution de la réponse temporelle qui disparaît lorsque le régime permanent persiste.
Régulation	La régulation est un cas particulier d'asservissement consistant à garder une consigne constante en présence de perturbation.
Réponse harmonique	La réponse harmonique est la réponse d'un système à une sollicitation harmonique, ou autrement dit à une sollicitation sinusoïdale.
Réponse temporelle	La réponse temporelle correspond à la réponse d'un système dans le domaine temporel à n'importe quelle sollicitation.

Schéma-bloc	Un schéma-bloc ou un schéma fonctionnel permet de représenter graphiquement des relations mathématiques entre des grandeurs dans les domaines temporel ou de Laplace.
Signal	Un signal est la grandeur qui porte l'information. Elle peut être de différente nature selon le domaine d'application.
Stabilité	Deux définitions sont possibles : (1) Un système est dit stable lorsque écarté de son état d'équilibre, il tend à y revenir. Un système est dit stable si à une entrée bornée le système produit une sortie bornée. On parle alors de stabilité EBSB .
Système Linéaire	Un système est dit linéaire si il respecte le principe de proportionnalité et le principe de superposition.
Temps de montée	Le temps de montée est la durée de l'intervalle de temps d'une réponse temporelle passe d'une réponse
Temps de réponse	Le temps de réponse est le temps écoulé entre le moment de la sollicitation et le moment de sa réponse.

Liste des Symboles

t	Variable temporelle
p	Indéterminée de polynôme
$s(t)$	Fonction/Signal dans le domaine temporel
$S(p)$	Fonction/Signal dans le domaine de Laplace de la fonction $s(t)$
$u(t)$	Fonction échelon unité ou de Heaviside
$\delta(t)$	Distribution de Dirac
$r(t)$	Fonction rampe unité
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformation de Laplace de la fonction $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	Transformation de Laplace inverse de la fonction $F(p)$
$H(p)$	Fonction de transfert
$N(p)$	Polynôme du numérateur d'une fraction rationnelle
$D(p)$	Polynôme du dénominateur d'une fraction rationnelle
ω	Pulsation
$H(j\omega)$	Nombre complexe associé à la fonction de transfert $H(p)$
E_0	Paramètre dimensionnelle d'amplitude de l'entrée
K	Gain statique
ω_0	Pulsation propre
$\text{Im}[H(j\omega)]$	Partie imaginaire du nombre complexe $H(j\omega)$
$\text{Re}[H(j\omega)]$	Partie réelle du nombre complexe $H(j\omega)$
ξ	Coefficient d'amortissement
$G(\omega)$	Gain naturel de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
$G_{\text{dB}}(\omega)$	Gain en dB de la réponse harmonique en fonction de la pulsation

$\phi(\omega)$	Déphasage de la réponse harmonique en fonction de la pulsation
ω_{0dB}	Pulsation de coupure à 0 dB
D_k	k-ème dépassement
$t_{5\%}$	Temps de réponse à 5%
t_m	Temps de montée
t_M	Temps de montée à la valeur finale
$H_{BO}(p)$	Fonction de transfert en boucle ouverte
$H_{BF}(p)$	Fonction de transfert en boucle fermée
$C(p)$	Fonction de transfert du correcteur

$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 + \frac{C_r(p)}{\frac{k_m}{R} s + \frac{s}{26}}}\right)$

$$\phi(\omega) = -\arg\left[\left(\frac{k_e \frac{\omega^2}{m}}{s + \frac{s_0}{26}}\right) + j\frac{\beta}{m}\right]$$

$$A(\omega) = \frac{E_m(p)/2}{\sqrt{\left(\frac{4(p\omega^2)}{104}\right)^2 + \left(\frac{C_m(p)}{26}\right)^2}} \cdot \frac{1}{J_e p} \quad \Omega(p) = \left[\frac{k_m}{R}\right] U$$

$|G_{FB}| E(p) = k_e \Omega(p)$

$$\Omega(p) = \frac{k_m}{J_e R_p} U(p) - \frac{k_m k_e}{J_e R_p} \Omega(p) \quad M_Ag = \frac{1}{\Omega(p)}$$

$$H_1(p) = \frac{k_m}{J_e R_p \left(1 + \frac{k_m k_e}{J_e R_p}\right)}$$

$$H_2(p) = \frac{k_m}{J_e R_p}$$

$$H_3(p) = \frac{1}{J_e R_p}$$

$$H(p) = H_1(p) H_2(p) H_3(p)$$

$$a) E(p) H_1(p) = \frac{k_m}{1 + \frac{1}{J_e R_p} + \frac{k_m k_e}{J_e R_p}}$$

$H_{BF}(p) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 H_3} = \frac{H_1 H_2}{1 + H_2 H_3} \quad k_1 = \frac{1}{k_e} \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{J_e R}{k_m k_e}$

b) $H_2(p) = \frac{1 + H_1 H_2 H_3}{J_e p + \frac{k_m R M_Ag}{R}} = \frac{B_{p1}}{R}$

$$= \frac{k_m R D \left(\log \frac{R H_2(p)}{k_m k_e} + j \omega \right)}{R}$$

$\Rightarrow \omega_{-\pi} = 0 \Rightarrow 1 + H_2 H_3 = 0 \Rightarrow H_2 H_3 = -1$