

2024-2025 - IngéSUP - Systèmes Techniques  
*Midterm - Systèmes Mécaniques - Cinématique (**Corrigé**)*  
Durée : 2 heures

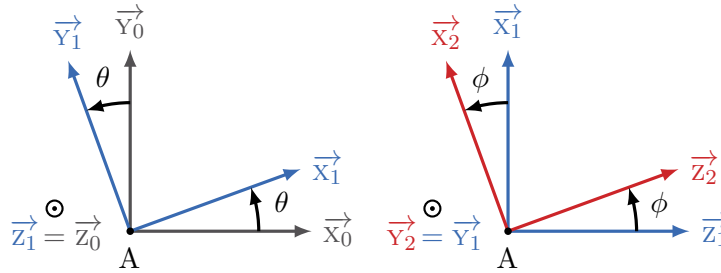
ESME Bordeaux-Lille-Lyon-Paris





## Exercice 1 : Dérivation Vectorielle (5 pts)

On considère trois repères de bases  $(R_0, R_1, R_2)$  déduits les uns des autres par rotation comme le précisent les deux figures planes de calcul suivantes :



On se donne le vecteur  $\overrightarrow{AP}$  tel que :

$$\overrightarrow{AP} = \rho(t)\overrightarrow{x_2}$$

L'objectif de cet exercice est d'appliquer les règles de calculs de la dérivation vectorielle pour déterminer la variation de ce vecteur dans la base 0.

**Q1. Donner le vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}$  et  $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$  [1 pt]**

$$\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\phi}\overrightarrow{y_1}$$

**Q2. Déterminer le vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{2/0}$  [1 pt]**

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_0} + \dot{\phi}\overrightarrow{y_1}$$

**Q3. Donner la dérivée du vecteur unitaire  $\overrightarrow{x_2}$  par rapport aux vecteurs de base  $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ . [1.5 pts]**

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{x_2} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_0} + \dot{\phi}\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{x_2}$$

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \right]_{R_0} = -\dot{\phi}\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta} \cos \phi \overrightarrow{y_1}$$

**Q4. À partir des résultats précédents, déterminer la dérivée du vecteur  $\left[ \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} \right]_{R_0}$ . [1.5 pts]**

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\rho}\overrightarrow{x_2} + \rho \left[ \frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \right]$$

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\rho}\overrightarrow{x_2} + \rho\dot{\theta} \cos \phi \overrightarrow{y_2} - \rho\dot{\phi}\overrightarrow{z_2}$$

## Exercice 2 : Cinématique d'un moulin à farine (10 pts)

Le dispositif utilisé pour écraser les graines de céréales comporte trois solides principaux, présentés sur l'ébauche de schéma ci-dessous :

- Au bâti **1** est associé le repère  $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ .
- L'arbre **2** est lié au bâti 1 par une liaison pivot glissant d'axe  $(O, \overrightarrow{z_1})$ . On lui associe le repère  $R_2(B, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ , tel que  $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1}$ ; on pose  $\alpha = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$  et  $\overrightarrow{OB} = \mu\overrightarrow{z_1}$ . La distance OB n'est pas fixe pour permettre au mécanisme de fonctionner.

- La meule **3**, de rayon  $R$ , est liée à l'arbre **2** par une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_2)$ . On lui associe le repère  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , tel que  $\vec{x}_3 = \vec{x}_2$  et on pose  $\beta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ .
- Finalement, la meule **3** est en contact avec le bâti par une liaison linéaire rectiligne (ou dites encore cylindre/plan) d'axe  $(B, \vec{x}_3)$

Soit  $I$  l'un des points de contact appartenant au segment de la tranche de la meule, on pose  $\vec{OI} = \lambda \vec{x}_2$ .

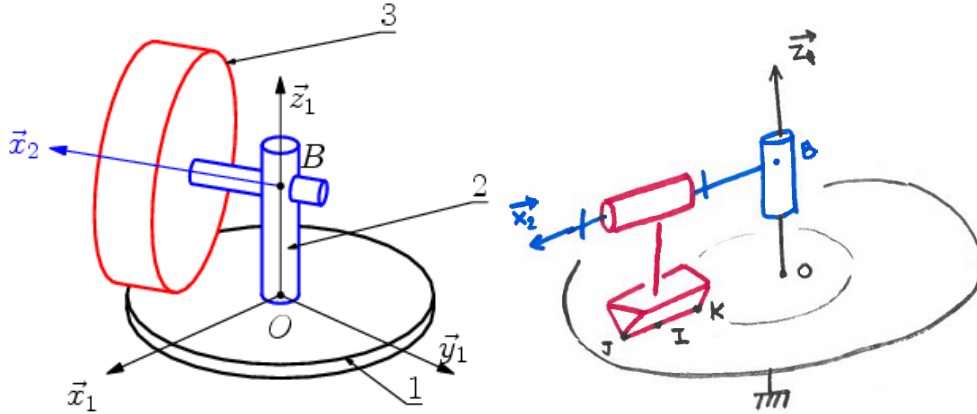
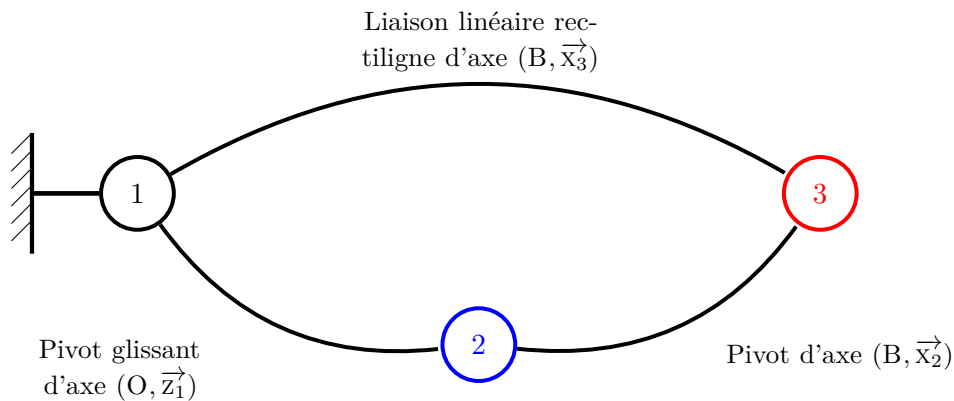
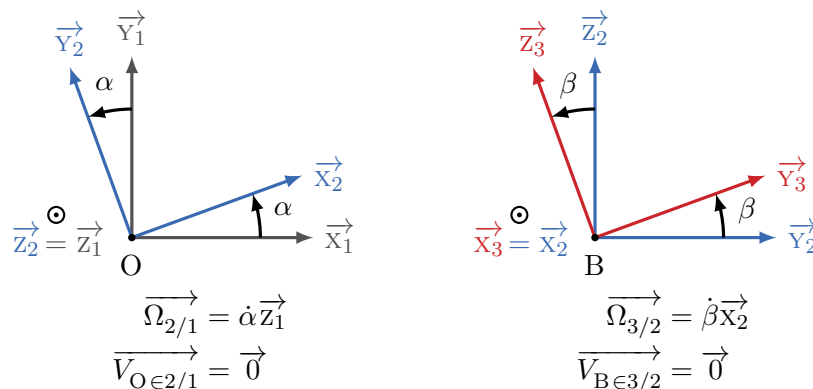


FIGURE 1 – (à gauche) Ebauche d'un moulin à farine (à droite) et son schéma cinématique.

**Q1. Tracer le graphe de liaison de ce mécanisme [1pt]**



**Q2. Tracer les figures planes permettant de représenter les paramètres d'orientation. [2 pts]**



**Q3. Donner les torseurs cinématiques associés aux mouvements des solides 2/1 et 3/2 au point B (c'est à dire ceux associés aux pivots). Attention la distance OB n'est pas fixe :  $\overrightarrow{OB} = \mu(t)\overrightarrow{z_1}$  [2 pts]**

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}_{2/1}\}_B &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \overrightarrow{z_1} \\ \dot{\mu} \overrightarrow{z_1} \end{array} \right\}_B \\ \{\mathcal{V}_{3/2}\}_B &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \\ \overrightarrow{V_{B \in 3/2}} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta} \overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B\end{aligned}$$

**Q4. Déterminer les vitesses  $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}}$  et  $\overrightarrow{V_{I \in 3/2}}$ . [2 pts]**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} &= \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{BI} = \dot{\mu} \overrightarrow{z_1} + \lambda \dot{\alpha} \overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{V_{I \in 3/2}} &= \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{BI} = \mu \dot{\beta} \overrightarrow{y_2}\end{aligned}$$

**Q5. Déterminer la vitesse  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}}$  par composition du mouvement. [1 pt]**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} &= \overrightarrow{V_{I \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} \\ \overrightarrow{V_{I \in 3/1}} &= (\lambda \dot{\alpha} + \mu \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2} + \dot{\mu} \overrightarrow{z_1}\end{aligned}$$

**Q6. Dans quel cas cette vitesse est orthogonal à  $\overrightarrow{z_1}$  ? Autrement dit, déterminer la condition pour que  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} \cdot \overrightarrow{z_1} = 0$ . [1 pt]**

$$\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} \cdot \overrightarrow{z_1} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mu} = 0$$

La distance entre OB doit être une constante.

**Q7. Que devient la vitesse  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}}$  pour  $\dot{\mu} = 0$  ? Et dans ce cas, déterminer une relation pour que  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} = \overrightarrow{0}$  [1 pt]**

Si  $\dot{\mu} = 0$  alors :

$$\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} = (\lambda \dot{\alpha} + \mu \dot{\beta}) \overrightarrow{y_2}$$

et donc on a  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} = \overrightarrow{0}$  si :

$$(\lambda \dot{\alpha} + \mu \dot{\beta}) = 0$$