2024-2025 - IngéSUP - Mathématiques Fondamentales *MidTerm - Algèbre Linéaire (Corrigé)* Durée : 2 heures

 ${\bf ESME~Bordeaux\text{-}Lille\text{-}Lyon\text{-}Paris}$



Exercice 1: Diagonalisation d'une matrice 3x3

On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Q1. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Étape 1 : Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

En développant selon la dernière colonne

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Le déterminant du mineur 2×2 est :

$$(1-\lambda)(3-\lambda)$$

Ainsi, l'équation caractéristique est

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

Étape 2 : Détermination des valeurs propres et vecteurs propres

Les solutions de $1 - \lambda(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$ sont :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On construit la matrice P dont les colonnes sont ces vecteurs propres, et la matrice diagonale D est :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

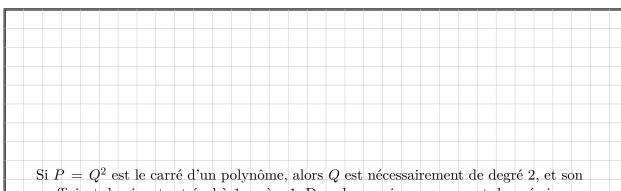
Exercice 2 : Opérations sur les polynômes

Soient a, b des réels, et considérons le polynôme :

$$P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1.$$

Q1. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles P(X) est le carré d'un polynôme à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(X) = (Q(X))^2.$$



coefficient dominant est égal à 1 ou à -1. Dans le premier cas, on peut donc écrire :

$$Q(X) = X^2 + cX + d.$$

On a alors:

$$Q^{2}(X) = X^{4} + 2cX^{3} + (2d + c^{2})X^{2} + 2cdX + d^{2}.$$

Par identification avec $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$, on obtient le système

$$2c = 2a$$
, $2d + c^2 = b$, $2cd = 2$, $d^2 = 1$.

On en déduit que c=a et $d=\pm 1$. - Si d=1, alors c=1, donc a=1 et b=3. - Si d = -1, alors c = -1, donc a = -1 et b = -1.

Les deux solutions sont donc

$$P_1(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2,$$

$$P_2(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2.$$

Dans le deuxième cas, on écrit Q(X) = -R(X) avec $R(X) = X^2 + cX + d$, de sorte que :

$$Q^2(X) = R^2(X).$$

On retrouve alors en réalité le cas précédent.

