2024-2025 - IngéSUP - Mathématiques Fondamentales

MidTerm - Algèbre Linéaire ***(Corrigé)***

Durée : 2 heures

ESME Bordeaux-Lille-Lyon-Paris

Exercice 1 : Diagonalisation d'une matrice 3x3

On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Q1. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Étape 1 : Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant selon la dernière colonne :

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Le déterminant du mineur 2×2 est :

$$(1-\lambda)(3-\lambda)$$

Ainsi, l'équation caractéristique est :

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Étape 2 : Détermination des valeurs propres et vecteurs propres

Les solutions de $1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$ sont :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On construit la matrice P dont les colonnes sont ces vecteurs propres, et la matrice diagonale D est :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 : Opérations sur les polynômes

Soients a, b des réels, et considérons le polynôme :

$$P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1.$$

Q1. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles $P(X)$ est le carré d'un polynôme à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(X) = (Q(X))^2.$$

Si $P = Q^2$ est le carré d'un polynôme, alors Q est nécessairement de degré 2, et son coefficient dominant est égal à 1 ou à -1. Dans le premier cas, on peut donc écrire :

$$Q(X) = X^2 + cX + d.$$

On a alors :

$$Q^2(X) = X^4 + 2cX^3 + (2d + c^2)X^2 + 2cdX + d^2.$$

Par identification avec $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$, on obtient le système :

$$2c = 2a, \quad 2d + c^2 = b, \quad 2cd = 2, \quad d^2 = 1.$$

On en déduit que $c = a$ et $d = \pm 1$. - Si $d = 1$, alors $c = 1$, donc $a = 1$ et $b = 3$. - Si $d = -1$, alors $c = -1$, donc $a = -1$ et $b = -1$.
Les deux solutions sont donc :

$$P_1(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2,$$

$$P_2(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2.$$

Dans le deuxième cas, on écrit $Q(X) = -R(X)$ avec $R(X) = X^2 + cX + d$, de sorte que :

$$Q^2(X) = R^2(X).$$

On retrouve alors en réalité le cas précédent.